Σημειώσεις Απειροστικού Λογισμού

Οι σημειώσεις αυτές είναι μέρος του βιβλίου Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Οικονομολόγους και Μηχανικούς

Χρησιμοποιούμε το ελεύθερο μαθηματικό λογισμικό Geogebra για υπολογισμούς.

Μπορείτε να στείλετε παρατηρήσεις στην ηλεκτρονική διεύθυνση Νίκος Χαλιδιάς.

Ξεκινάμε με δυο **απλά** προβλήματα:

Να εξεταστούν ως προς τα ακρότατα οι δυο παρακάτω συναρτήσεις

(i) $g(x) = (1+e^x)^{\frac{1}{x}}$, $x \in (0, +\infty)$

(ii) $h(x) = \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^x}{\ln\frac{2}{5}} - \frac{x^2}{2}$, $x \in \mathbb{R}$

...αν δεν μπορείτε να αποφανθείτε ως προς τα α-
κρότατα, μπορείτε τουλάχιστον να βρείτε ποια σημεία
μηδενίζουν την πρώτη παράγωγο;

...μπορείτε να βρείτε την πρώτη παράγωγο;

...τότε πρέπει να πάρουμε τα πράγματα α-
πό την αρχή....

Πραγματικοί Αριθμοί

Σε αυτή την ενότητα θα αναφέρουμε μερικά βασικά στοιχεία και ιδιότητες του συνόλου των πραγματικών αριθμών το οποίο συμβολίζουμε με $\mathbb{R}$. Αρχίζοντας από τα βασικά, θα αναφέρουμε ότι το $\mathbb{R}$ είναι εφοδιασμένο με δύο πράξεις, την πρόσθεση $(+)$ και τον πολλαπλασιασμό $(\cdot)$. Στην συνέχεια θα αναφέρουμε τα αξιώματα και τα βασικά θεωρήματα με τα οποία περιγράφουμε την αξιωματική θεμελίωση των πραγματικών αριθμών.

Αξιωματική θεμελίωση των Πραγματικών Αριθμών

Αξιωμα 1 (Νομοι Αντιμεταθεσησ) *Δεχόμαστε ότι, για κάθε* $x, y \in \mathbb{R}$

$$x + y = y + x, \quad x \cdot y = y \cdot x$$

Αξιωμα 2 (Προσεταιριστικοι Νομοι) *Δεχόμαστε ότι, για κάθε* $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$x + (y + z) = (x + y) + z, \quad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

Αξιωμα 3 (Επιμεριστικοσ Νομοσ) *Δεχόμαστε ότι, για κάθε* $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

ΑΞΙΩΜΑ 4 (ΥΠΑΡΞΗ ΤΑΥΤΟΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ) *Υπάρχουν δυο διαφορετικοί πραγματικοί αριθμοί, οι οποίοι συμβολίζονται με* 0 *και* 1 *τέτοιοι ώστε για κάθε* $x \in \mathbb{R}$ *να ισχύει* $x + 0 = x$ *και* $1 \cdot x = x$.

ΑΞΙΩΜΑ 5 (ΥΠΑΡΞΗ ΑΝΤΙΘΕΤΟΥ) *Για κάθε πραγματικό αριθμό* $x \in \mathbb{R}$ *υπάρχει αριθμός* $y \in \mathbb{R}$ *τέτοιος ώστε* $x + y = 0$.

ΑΞΙΩΜΑ 6 (ΥΠΑΡΞΗ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΥ) *Για κάθε πραγματικό αριθμό* $x \neq 0$ *υπάρχει πραγματικός αριθμός* y *τέτοιος ώστε* $x \cdot y = 1$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 7 *Οι ταυτοτικοί αριθμοί* 0 *και* 1 *είναι μοναδικοί.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω ότι υπάρχει κάποιος αριθμός $z \neq 0$ έτσι ώστε $x + z = x$. Προσθέτοντας κατά μέλη με έναν αντίθετο του x προκύπτει ότι $z = 0$, το οποίο είναι άτοπο.

Παρόμοια, έστω ότι υπάρχει κάποιος αριθμός $d \neq 1$ έτσι ώστε $d \cdot x = x$. Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη με έναν αντίστροφο του x προκύπτει ότι $d = 1$, το οποίο είναι άτοπο. □

ΘΕΩΡΗΜΑ 8 *Για κάθε* $x \in \mathbb{R}$ *υπάρχει μοναδικός αριθμός* $y \in \mathbb{R}$ *τέτοιος ώστε* $x + y = 0$ *ο οποίος συμβολίζεται με* $-x$. *Συνεπώς,* $-(-x) = x$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω ότι υπάρχουν δυο τέτοιοι αριθμοί y, z, με $y \neq z$. Από την ισότητα $x + y = 0$ προσθέτοντας τον z κατά μέλη έχουμε $y = z$, το οποίο είναι άτοπο. $\square$

ΘΕΩΡΗΜΑ 9 *Για κάθε* $x \neq 0$ *υπάρχει μοναδικός αριθμός* $y \in \mathbb{R}$ *τ.ω.* $x \cdot y = 1$ *και συμβολίζεται με* $\frac{1}{x}$ *ή* x^{-1}*. Συνεπώς* $(x^{-1})^{-1} = x$*.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω ότι υπάρχουν δυο τέτοιοι αριθμοί, οι y, z. Πολλαπλασιάζουμε την ισότητα $x \cdot y = 1$ κατά μέλη με τον z και έχουμε $x \cdot y \cdot z = x \cdot z \cdot y = z$ ή αλλιώς $y = z$. $\square$

ΘΕΩΡΗΜΑ 10 *Ισχύει ότι* $0 \cdot x = 0$ *για κάθε* $x \in \mathbb{R}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αφού $1+(-1)=0$ (γράφουμε για συντομία $1-1=0$) τότε $0 \cdot x = (1-1) \cdot x = x - x = 0$. $\square$

ΘΕΩΡΗΜΑ 11 *Ισχύει ότι* $(-1) \cdot a = -a$. *Συνεπώς* $(-1) \cdot (-1) \cdot a = a$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Πράγματι, από την σχέση $(1+(-1)) \cdot a = 0$ προκύπτει ότι $a+(-1) \cdot a = 0$ επομένως $(-1) \cdot a = -a$, λόγω μοναδικότητας του αντιθέτου. $\square$

ΘΕΩΡΗΜΑ 12 *Αν* $a + b = a + c$ *τότε* $b = c$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Χρησιμοποιώντας το αξίωμα της ύπαρξης αντιθέτου προσθέτουμε κατά μέλη τον αριθμό $-a$ και έχουμε $-a + (a + b) = -a + (a + c)$. Στην συνέχεια χρησιμοποιούμε την προσεταιριστική ιδιότητα και προκύπτει το ζητούμενο. □

ΘΕΩΡΗΜΑ 13 *Αν* $a \cdot b = 0$ *τότε τουλάχιστον ένας από τους δυο αριθμούς είναι ο μηδέν.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αν $b \neq 0$ τότε μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε με τον αντίστροφο του b, δηλαδή τον b^{-1} και έχουμε

$$a = 0 \cdot b^{-1} = 0$$

Επομένως, $a = 0$. Παρόμοια, αν υποθέσουμε ότι $a \neq 0$ προκύπτει ότι $b = 0$. □

Οι θετικοί αριθμοί

Θα συμβολίζουμε με $\mathbb{R}^+$ ένα συγκεκριμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ το οποίο ικανοποιεί τα παρακάτω αξιώματα.

ΑΞΙΩΜΑ 14 *Αν* $x, y \in \mathbb{R}^+$ *τότε και* $x + y \in \mathbb{R}^+$ *καθώς και* $x \cdot y \in \mathbb{R}^+$.

ΑΞΙΩΜΑ 15 *Για κάθε πραγματικό αριθμό* $x \neq 0$ *είτε* $x \in \mathbb{R}^+$ *είτε* $-x \in \mathbb{R}^+$.

ΑΞΙΩΜΑ 16 $0 \notin \mathbb{R}^+$

Θα λέμε ότι ο x είναι μικρότερος του y και θα γράφουμε $x < y$ όταν $y + (-x) \in \mathbb{R}^+$. Για συντομία θα γράφουμε $y - x$ αντί για $y + (-x)$. Όταν γράφουμε $y > x$ θα εννοούμε $x < y$. Όταν γράφουμε $x \leq y$ θα εννοούμε ότι είτε $x = y$ είτε $x < y$. Αν $x > 0$ λέμε ότι ο x είναι θετικός ενώ όταν $x < 0$ λέμε ότι ο x είναι αρνητικός.

ΘΕΩΡΗΜΑ 17 *Για οποιουσδήποτε αριθμούς $a, b \in \mathbb{R}$ ι-σχύει ένα από τα επόμενα: είτε $a < b$ είτε $b < a$ είτε $a = b$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θέτουμε $x = b - a$. Αν $x = 0$ τότε επειδή $0 \notin \mathbb{R}^+$ δεν ισχύει ούτε $a < b$ ούτε $b < a$. Αν $x \neq 0$ τότε είτε $x \in \mathbb{R}^+$ είτε $-x \in \mathbb{R}^+$. $\square$

ΘΕΩΡΗΜΑ 18 *Αν $a < b$ και $b < c$ τότε και $a < c$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αφού $a < b$ και $b < c$ τότε $b - a \in \mathbb{R}^+$ και $c - b \in \mathbb{R}^+$. Οπότε $c - b + b - a \in \mathbb{R}^+$ δηλαδή $c - a \in \mathbb{R}^+$. $\square$

ΘΕΩΡΗΜΑ 19 *Αν* $a < b$ *και* $c > 0$ *τότε και* $a \cdot c < b \cdot c$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εφόσον $a < b$ τότε $b - a \in \mathbb{R}^+$ και επίσης $c \in \mathbb{R}^+$ επομένως $c \cdot (b - a) \in \mathbb{R}^+$ δηλαδή $a \cdot c < b \cdot c$. □

ΘΕΩΡΗΜΑ 20 *Αν* $a \neq 0$ *τότε* $a^2 = a \cdot a > 0$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εφόσον $a \neq 0$ τότε είτε $a > 0$ είτε $a < 0$. Αν $a > 0$ τότε και $a^2 > 0$. Αν $a < 0$ τότε $(-a) \cdot (-a) > 0$ ή αλλιώς $(-1) \cdot (-1) \cdot a \cdot a > 0$ δηλαδή $a^2 > 0$. □

ΘΕΩΡΗΜΑ 21 *Ισχύει ότι* $1 \in \mathbb{R}^+$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εφόσον $1 \neq 0$ τότε είτε $1 \in \mathbb{R}^+$ είτε $-1 \in \mathbb{R}^+$. Έστω κάποιο $x \in \mathbb{R}^+$. Αν $-1 \in \mathbb{R}^+$ τότε και $-x \in \mathbb{R}^+$ το οποίο είναι άτοπο. $\square$

ΘΕΩΡΗΜΑ 22 *Αν* $a < b$ *και* $c < 0$ *τότε και* $a \cdot c > b \cdot c$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εφόσον $b - a \in \mathbb{R}^+$ και $-c \in \mathbb{R}^+$ τότε και $-c \cdot (b - a) \in \mathbb{R}^+$ οπότε και $a \cdot c - b \cdot c \in \mathbb{R}^+$. $\square$

ΘΕΩΡΗΜΑ 23 *Αν* $a < c$ *και* $b < d$ *τότε και* $a+b < c+d$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εφόσον $c - a \in \mathbb{R}^+$ και $b - d \in \mathbb{R}^+$ τότε και $c - a + d - b \in \mathbb{R}^+$ δηλαδή $(c + d) - (a + b) \in \mathbb{R}^+$. $\square$

Για συντομία, αντί για $a \cdot b$ θα γράφουμε ab.

Θετικοί ακέραιοι, ακέραιοι και ρητοί αριθμοί

Ξεκινώντας από τον αριθμό 1 και προσθέτοντας τον στον εαυτό του έχουμε έναν νέο αριθμό τέτοιον ώστε $1 + 1 \in \mathbb{R}^+$ αφού $1 \in \mathbb{R}^+$. Ο αριθμός αυτός συμβολίζεται με 2. Στην συνέχεια προσθέτουμε στον 2 τον αριθμό 1 και το αποτέλεσμα παραμένει στο $\mathbb{R}^+$ και τον συμβολίζουμε με 3. Συνεχίζοντας με τον τρόπο αυτό κατασκευάζουμε τους αριθμούς $1, 2, 3, 4, \cdots$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 24 *Ένα σύνολο πραγματικών αριθμών ονομάζεται* **επαγωγικό** *αν έχει τις επόμενες δυο ιδιότητες*

(*i*) *Ο αριθμός 1 ανήκει στο σύνολο*

(*ii*) *Για κάθε x στοιχείο του συνόλου, ο αριθμός $x + 1$ ανήκει επίσης στο σύνολο αυτό.*

Προφανώς κάθε επαγωγικό σύνολο περιέχει τους αριθμούς $\{1, 2, 3, \cdots\}$. Τα $\mathbb{R}$ και $\mathbb{R}^+$ είναι επαγωγικά σύνολα όπως και τα σύνολα

$$\{1, 2, 3, \cdots\} \text{ και } \left\{\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2},\ 2,\ \frac{5}{2}, \cdots\right\}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 25 *Ένας αριθμός $x \in \mathbb{R}^+$ ονομάζεται* **θετικός ακέραιος** *ή αλλιώς* **φυσικός** *αριθμός αν ανήκει στην τομή όλων των επαγωγικών συνόλων. Το σύνολο των θετικών ακέραιων συμβολίζεται με $\mathbb{N}$.*

Κάθε επαγωγικό σύνολο περιέχει το 1 λόγω της πρώτης ιδιότητας των επαγωγικών συνόλων ενώ από την δεύτερη ιδιότητα αναγκαστικά περιέχει και τους $2, 3, \cdots$. Το $\mathbb{N}$ είναι προφανώς το μικρότερο επαγωγικό σύνολο διότι είναι η τομή όλων των επαγωγικών συνόλων και περιέχει ακριβώς τα στοιχεία $\{1, 2, 3, \cdots\}$. Οι θετικοί ακέραιοι μαζί με τους αντίθετους τους και το μηδέν σχηματίζουν ένα νέο σύνολο πραγματικών αριθμών, τους ακέραιους, και το σύνολο τους συμβολίζεται με $\mathbb{Z}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 26 *Έστω ότι η $p(x)$ είναι μια μαθηματική ιδιότητα. Λέμε ότι η $p(x)$ ισχύει αν ο αριθμός x ικανοποιεί την ιδιότητα p. Υποθέτουμε ότι ισχύει η επόμενη συνεπαγωγή,*
Έστω ότι η $p(1)$ ισχύει και υποθέτοντας ότι η $p(n)$ ισχύει για κάποιο φυσικό n τότε και η $p(n+1)$ ισχύει.
Τότε η $p(n)$ ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό n.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω το σύνολο

$$A = \{x \in \mathbb{N} : \text{ τέτοια ώστε η } p(x) \text{ να ισχύει}\}$$

Από τις υποθέσεις του θεωρήματος προκύπτει ότι το A είναι επαγωγικό σύνολο και μάλιστα υποσύνολο του $\mathbb{N}$. Όμως, το $\mathbb{N}$ είναι το μικρότερο επαγωγικό σύνολο οπότε αναγκαστικά $A = \mathbb{N}$. $\square$

Ανω και κάτω φράγμα

Θα λέμε ένα υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ ότι είναι άνω φραγμένο αν υπάρχει πραγματικός αριθμός a τ.ω. $x \leq a$ για κάθε $x \in A$ και κάτω φραγμένο αν υπάρχει πραγματικός αριθμός b τ.ω. $b \leq x$ για $x \in A$. Τέλος θα λέμε ότι είναι φραγμένο αν είναι κάτω και άνω φραγμένο.

ΟΡΙΣΜΟΣ 27 *Ένας αριθμός B ονομάζεται* **ελάχιστο άνω φράγμα** *ενός μη κενού συνόλου S και συμβολίζεται με $\sup S$, εάν έχει τις επόμενες δυο ιδιότητες*

(*i*) *B είναι ένα άνω φράγμα του S, δηλαδή $x \leq B$ για κάθε $x \in S$.*

(*ii*) *Δεν υπάρχει μικρότερος αριθμός του B που να είναι άνω φράγμα του S.*

Το $\sup S$ μπορεί να ανήκει στο σύνολο S αλλά μπορεί και να μην ανήκει. Για παράδειγμα το σύνολο $[0, 1)$ δεν περιέχει το sup ενώ το σύνολο $[0, 1]$ το περιέχει. Στην περίπτωση όπου το $\sup S$ ανήκει στο S τότε το συμβολίζουμε με $\max S$. Προφανώς, το $\sup S$ είναι μοναδικό διότι αν δεν ήταν θα υπήρχαν δυο αριθμοί B, C που θα ικανοποιούσαν τις δυο παραπάνω ιδιότητες. Από την δεύτερη ιδιότητα όμως προκύπτει ότι οι δυο αυτοί αριθμοί είναι αναγκαστικά ίσοι.

Αξιωμα 28 (Πληρότητας) *Κάθε μη κενό σύνολο S πραγματικών αριθμών το οποίο είναι άνω φραγμένο έχει ένα ελάχιστο άνω φράγμα, δηλαδή υπάρχει πραγματικός αριθμός $B = \sup S$.*

Σε πλήρη αναλογία, ορίζουμε το μέγιστο κάτω φράγμα ενός συνόλου και το συμβολίζουμε με $\inf S$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 29 *Κάθε μη κενό σύνολο S το οποίο είναι κάτω φραγμένο έχει ένα μέγιστο κάτω φράγμα, δηλαδή υπάρχει πραγματικός αριθμός τέτοιος ώστε $L = \inf S$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Το σύνολο $-S$ περιέχει τα στοιχεία του S με αντίθετο πρόσημο. Αφού το S είναι κάτω φραγμένο τότε το $-S$ είναι άνω φραγμένο. Δηλαδή το $\sup(-S)$ υπάρχει και έστω ότι είναι το y^*. Αρα, $-a \leq y^*$ για κάθε $a \in S$. Αυτό σημαίνει ότι $a \geq -y^*$ οπότε το $-y^*$ είναι κάτω φράγμα για το S. Θα αποδείξουμε ότι είναι το μέγιστο από τα κάτω φράγματα. Έστω ότι δεν είναι. Τότε υπάρχει κάποιο $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $a \geq -y^* + \varepsilon$ για κάθε $a \in S$ ή αλλιώς $-a \leq y^* - \varepsilon$. Αυτό όμως έρχεται σε αντίφαση με το ότι το y^* είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του $-S$. Επομένως δεν υπάρχει τέτοιο $\varepsilon > 0$ και άρα το $-y^*$ είναι το μέγιστο κάτω φράγμα του S. □

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 30 *Αν το* $\sup S$ *ανήκει στο* S *τότε λέμε ότι το* S *έχει μέγιστο στοιχείο και συμβολίζεται με* $\max S$. *Παρόμοια για το* $\inf S$, *αν αυτό ανήκει στο* S *θα λέμε ότι έχει ελάχιστο και θα συμβολίζεται με* $\min S$.

Λημμα 31 (Αρχιμήδεια **Ιδιότητα**) *Το σύνολο των φυσικών αριθμών* $\mathbb{N}$ *δεν είναι άνω φραγμένο.*

Αποδειξη. Έστω ότι είναι. Εφόσον είναι μη κενό τότε θα έχει ένα ελάχιστο άνω φράγμα, το b. Το $b-1$ δεν θα είναι άνω φράγμα του $\mathbb{N}$ επομένως υπάρχει τουλάχιστον ένα στοιχείο του $\mathbb{N}$, έστω n_0 τέτοιο ώστε $n_0 > b-1$ ή αλλιώς $n_0+1 > b$. Εφόσον όμως το $n_0 \in \mathbb{N}$ τότε και $n_0+1 \in \mathbb{N}$ το οποίο έρχεται σε αντίθεση με την αρχική υπόθεση. $\square$

ΘΕΩΡΗΜΑ 32 *Για κάθε πραγματικό αριθμό x υπάρχει ένας αριθμός $n \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $n > x$. Συνεπώς, αν $x > 0$ και y πραγματικοί τότε υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $nx > y$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αν αυτό δεν ισχύει τότε κάποιο x θα ήταν άνω φράγμα του $\mathbb{N}$ το οποίο είναι άτοπο. Για τον αριθμό $\frac{y}{x}$ υπάρχει ένας αριθμός $n \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $nx > y$. $\square$

ΘΕΩΡΗΜΑ 33 *Αν οι αριθμοί a, x, y ικανοποιούν τις ανισότητες*

$$a \leq x \leq a + \frac{y}{n}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $x = a$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αν $x > a$ τότε από το προηγούμενο θεώρημα υπάρχει n τέτοιο ώστε $n(x - a) > y$ το οποίο έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεση του θεωρήματος. $\square$

ΠΡΟΤΑΣΗ 34 *Με επαγωγή, αποδεικνύονται οι παρακάτω ταυτότητες*

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = 0 + 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2},$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = 0^2 + 1^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = 0^3 + 1^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θα αποδείξουμε την ισότητα

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

με επαγωγή στο n. Για $n = 1$ είναι προφανές. Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n = i$, δηλαδή

$$\sum_{k=0}^{i} k = \frac{i(i+1)}{2}$$

και θα αποδείξουμε ότι ισχύει για $i + 1$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{i+1} k &= \sum_{k=0}^{i} k + (i+1) \\ &= \frac{i(i+1)}{2} + i + 1 = \frac{(i+1)(i+2)}{2}\end{aligned}$$

Στην συνέχεια θα αποδείξουμε την δεύτερη ταυτότητα με επαγωγή στο n. Για $n = 1$ είναι προφανές. Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n = i$ δηλαδή

$$\sum_{k=0}^{i} k^2 = \frac{i(i+1)(2i+1)}{6}$$

και θα αποδείξουμε ότι ισχύει για $n = i + 1$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{i+1} k^2 &= \sum_{k=0}^{i} k^2 + (i+1)^2 \\ &= \frac{i(i+1)(2i+1) + 6(i+1)^2}{6} \\ &= \frac{(i+1)(i+2)(2(i+1)+1)}{6}\end{aligned}$$

Τέλος, θα αποδείξουμε την τελευταία ταυτότητα με επαγωγή στο n. Για $n = 1$ είναι προφανές. Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n = i$ δηλαδή,

$$\sum_{k=0}^{i} k^3 = \left(\frac{i(i+1)}{2}\right)^2$$

και θα αποδείξουμε ότι ισχύει για $n = i + 1$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{i+1} k^3 &= \sum_{k=0}^{i} k^3 + (i+1)^3 \\
&= \frac{i^2(i+1)^2 + 4(i+1)^3}{4} \\
&= \frac{(i+1)^2(i+2)^2}{4} \\
&= \left(\frac{(i+1)(i+2)}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

$\square$

Την ποσότητα $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ με $0 \leq k \leq n$ και $k, n \in \mathbb{N}$ την συμβολίζουμε με $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$. Επίσης με την αρχή της επαγωγής μπορεί να αποδειχθεί και η παρακάτω πρόταση.

Προταση 35

- $$\begin{pmatrix} n + 1 \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ k - 1 \end{pmatrix}$$
- $$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} a^{n-k} b^k.$$

Αποδειξη. Ξεκινάμε με την πρώτη ταυτότητα, όπου ξεκινώντας από το δεξί μέλος θα καταλήξουμε στο αριστερό.

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k\ -\ 1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n+1-k)!} \\
&= \frac{n!(n+1-k)}{k!(n+1-k)!} + \frac{n!k}{k!(n+1-k)!} \\
&= \binom{n\ +\ 1}{k}
\end{aligned}$$

Για την δεύτερη ταυτότητα θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στο n. Ξεκινώντας για $n = 2$ διαπιστώνουμε ότι έχουμε την γνωστή ταυτότητα

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

Υποθέτουμε ότι ισχύει για κάποιο n και θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για $n + 1$. Ξεκινώντας από το δεξί μέλος, έχουμε

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k \\
=\ &\sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k + a^{n+1} + b^{n+1} \\
=\ &\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k + a^{n+1} + b^{n+1}
\end{aligned}$$

όπου για να πάρουμε την δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την ταυτότητα που αποδείξαμε προηγούμενα.

Όμως

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + a^{n+1} &= a\left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \binom{n}{0} a^{n-0} b^0\right) \\
&= a\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\
&= a(a+b)^n
\end{aligned}$$

Επίσης, θέτοντας $l = k - 1$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \left(\begin{array}{ccc} & n & \\ k & - & 1 \end{array} \right) a^{n+1-k} b^k + b^{n+1} &= b \sum_{l=0}^{n-1} \left(\begin{array}{c} n \\ l \end{array} \right) a^{n-l} b^l + b \left(\begin{array}{c} n \\ n \end{array} \right) a^{n-n} b^n \\
&= b \sum_{l=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ l \end{array} \right) a^{n-l} b^l \\
&= b(a+b)^n
\end{aligned}$$

Αρα προκύπτει το ζητούμενο. $\square$

Προταση 36 (Ανισοτητα Bernoulli) *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x > -1$ ισχύει ότι*

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

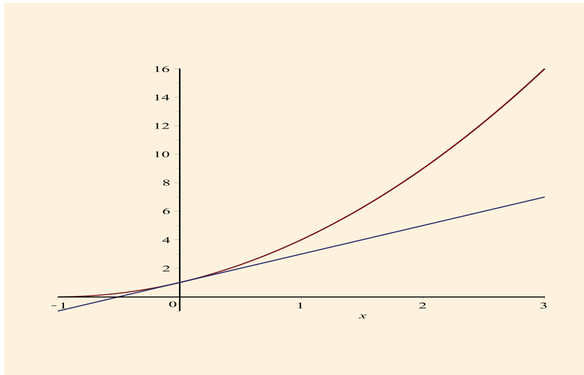
Αποδειξη. Η απόδειξη γίνεται εύκολα με επαγωγή. Για $n = 1$ είναι προφανές. Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n = k$ δηλαδή

$$(1+x)^k \geq 1 + kx$$

Θα αποδείξουμε ότι ισχύει για $n = k + 1$

$$\begin{aligned}(1+x)^{k+1} &= (1+x)^k(1+x) \\ &\geq (1+kx)(1+x) \\ &= 1 + (k+1)x + kx^2 \\ &\geq 1 + (k+1)x\end{aligned}$$

όπου για να πάρουμε την τρίτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε το δεύτερο μέρος της επαγωγής. $\square$



Σχήμα 1: Τα γραφήματα των συναρτήσεων $(1+x)^2$ (με κόκκινο χρώμα) και $1+2x$ (με μπλε χρώμα).

Προταση 37 (**Ανισοτητα Cauchy-Schwarz**) *Αν τα a_k και b_k με $k = 1, \cdots, n$ είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$$

Αποδειξη. Είναι εύκολο να δούμε ότι

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + tb_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2t\sum_{k=1}^{n} a_k b_k + t^2\sum_{k=1}^{n} b_k^2 \geq 0 \quad \text{για κάθε } t \in \mathbb{R}$$

Έτσι λοιπόν η εξίσωση δευτέρου βαθμού ως προς t

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2t \sum_{k=1}^{n} a_k b_k + t^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2 = 0$$

θα έχει είτε μια πραγματική ρίζα είτε δυο συζυγείς μιγαδικές αλλιώς θα άλλαζε πρόσημο για κατάλληλες επιλογές του t. Αυτό σημαίνει ότι η διακρίνουσα είναι πάντοτε αρνητική ή μηδέν, δηλαδή ισχύει η ζητούμενη ανισότητα. $\square$

Το σύνολο των ρητών αριθμών $\mathbb{Q}$ αποτελείται από τους αριθμούς $\frac{m}{n}$ με $m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 38 *Υπάρχει ένας μοναδικός θετικός πραγματικός αριθμός x τ.ω. $x^n = a$ όταν $a \geq 0$ με $n \in \mathbb{N}$ ο οποίος συμβολίζεται ως $\sqrt[n]{x}$ ή $x^{\frac{1}{n}}$. Ειδικότερα, υπάρχει μοναδικός θετικός αριθμός x τ.ω. $x^2 = 2$ ο οποίος δεν είναι ρητός αριθμός.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θα χρειαστούμε την ανισότητα

$$(1+\varepsilon)^n < 1 + 3^n\varepsilon \tag{1}$$

όπου $\varepsilon \in (0,1)$ την οποία θα αποδείξουμε αμέσως τώρα. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή. Για $n = 1$ προφανώς ισχύει $1 + \varepsilon < 1 + 3\varepsilon$. Υποθέτουμε ότι ισχύει για κάποιο n και θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για $n+1$. Οπότε

$$\begin{aligned}(1+\varepsilon)^{n+1} &= (1+\varepsilon)^n(1+\varepsilon)\\ &< (1+3^n\varepsilon)(1+\varepsilon)\\ &= 1 + (3^n\varepsilon + 3^n + 1)\varepsilon\\ &< 1 + 3^{n+1}\varepsilon\end{aligned}$$

Στην συνέχεια θα αποδείξουμε την ύπαρξη μοναδικού αριθμού x τ.ω. $x^n = a$. Η μοναδικότητα έπεται από το γεγονός ότι $x^n < y^n$ όταν $x < y$. Αν $a = 0$ τότε $x = 0$. Υποθέτουμε ότι $a > 0$ και ορίζουμε το σύνολο

$$E = \{t \in \mathbb{R} : t > 0,\ t^n < a\}$$

Το E είναι μη κενό αφού το $t_0 = \frac{a}{1+a} \in E$ το οποίο αποδεικνύεται πολύ εύκολα με επαγωγή στο n. Επίσης το E είναι άνω φραγμένο από το $1+a$ διότι για $t \leq 1$ έχουμε ότι $t < 1+a$ ενώ για $t > 1$ έχουμε ότι $t \leq t^n < a < 1+a$. Από το αξίωμα 28 προκύπτει ότι το E έχει supremum, έστω x το οποίο ανήκει στο $\mathbb{R}$. Προφανώς $t_0 \leq x$ και θα αποδείξουμε ότι στην πραγματικότητα $x^n = a$. Έστω ότι $x^n < a$. Διαλέγουμε $\varepsilon \in (0,1)$ τ.ω. $\varepsilon < \frac{a-x^n}{(3x)^n}$. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα 1

$$\begin{aligned} x^n(1+\varepsilon)^n &< x^n(1+3^n\varepsilon) \\ &= x^n + (3x)^n\varepsilon \\ &< x^n + (a-x^n) \\ &= a \end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει ότι $x(1+\varepsilon) \in E$. Όμως $x = \sup E$ και αυτό είναι άτοπο άρα $x^n \geq a$.

Έστω ότι $x^n > a$. Διαλέγουμε $\varepsilon \in (0,1)$ τ.ω. $\varepsilon < \frac{x^n-a}{3^n a}$. Οπότε $a(1+3^n\varepsilon) < x^n$ και επομένως χρησιμοποιώντας πάλι την ανισότητα 1 προκύπτει ότι

$$a < \frac{x^n}{1+3^n\varepsilon} < \left(\frac{x}{1+\varepsilon}\right)^n$$

Επειδή $\frac{x}{1+\varepsilon} < x$ μπορούμε να βρούμε κάποιο $t \in E$

έτσι ώστε

$$\left(\frac{x}{1+\varepsilon}\right)^n < t^n < a$$

το οποίο είναι άτοπο επομένως αναγκαστικά $x^n = a$.

Υπάρχει λοιπόν μοναδικός θετικός αριθμός x τ.ω. $x^2 = 2$. Αν x είναι ρητός τότε υπάρχουν $n, m \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $x = \frac{m}{n}$ και ο n να μην διαιρεί τον m. Τότε και ο n^2 δεν διαιρεί τον m^2 επομένως αν υποθέσουμε ότι $x^2 = \frac{m^2}{n^2} = 2$ θα οδηγηθούμε σε άτοπο. Αρα $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. $\square$

Η προηγούμενη πρόταση μας οδηγεί στο επόμενο σημαντικό συμπέρασμα.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ 39 *Σύμφωνα με τα παραπάνω ισχύει ότι $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$ και το σύνολο $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ αποτελείται από πραγματικούς αριθμούς που δεν είναι ρητοί οι οποίοι ονομάζονται* **άρρητοι**.

Έστω $a \in \mathbb{R}$. Με $|a|$ θα εννοούμε τον αριθμό a αν $a > 0$ και $-a$ αν $a < 0$. Ονομάζεται **απόλυτη τιμή** του a και όπως βλέπουμε είναι πάντοτε θετικός αριθμός. Ισχύει η επόμενη ανισότητα για την απόλυτη τιμή, η οποία ονομάζεται τριγωνική ανισότητα,

$$\Big||a| - |b|\Big| \leq |a + b| \leq |a| + |b|. \tag{2}$$

Η απόδειξη αφήνεται σαν άσκηση.

ΠΡΟΤΑΣΗ 40 *Έστω ότι το $A \subseteq \mathbb{Z}$ είναι άνω φραγμένο. Τότε το ελάχιστο άνω φράγμα του ανήκει στο σύνολο A και επομένως πρόκειται για maximum. Παρομοίως αν το A είναι κάτω φραγμένο.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εφόσον το A είναι άνω φραγμένο τότε υπάρχει το ελάχιστο άνω φράγμα, δηλαδή το $\sup A$. Θα αποδείξουμε ότι ανήκει στο A. Συμβολίζοντας με $y = \sup A$ θα έχουμε ότι υπάρχει κάποιο $n \in A$ έτσι ώστε $y - 1 < n$. Αν το A δεν έχει μέγιστο στοιχείο τότε θα υπάρχει $m \in A$ έτσι ώστε $y - 1 < n < m < y$. Τότε όμως οι ακέραιοι αριθμοί θα έχουν απόσταση μικρότερη της μονάδας το οποίο είναι αδύνατο. □

Έστω $x \in \mathbb{R}$. Σχηματίζουμε το σύνολο των ακεραίων οι οποίοι είναι μικρότεροι ή ίσοι με το x, δηλαδή το $A \subseteq \mathbb{Z}$ τέτοιο ώστε

$$A = \{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$$

Προφανώς το A είναι άνω φραγμένο και επομένως έχει ελάχιστο άνω φράγμα το οποίο ανήκει στο A. Το ελάχιστο αυτό άνω φράγμα συμβολίζεται με $[x]$. Προφανώς $[x] \leq x$ από τον ορισμό. Όμως ισχύει ότι

$[x] \leq x < [x] + 1$. Πράγματι, αν ίσχυε ότι $x \geq [x] + 1$ τότε θα είχαμε αντίφαση με το γεγονός ότι ο $[x]$ είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος μικρότερος του x. Επομένως ο επόμενος ορισμός είναι καλά τοποθετημένος.

Με $[a]$ συμβολίζουμε το **ακέραιο μέρος** του αριθμού $a \in \mathbb{R}$, δηλαδή είναι ο προηγούμενος ακέραιος αριθμός πριν από τον αριθμό a και ισχύει ότι

$[a] \leq a < [a] + 1$, (ακέραιο μέρος πραγματικου αριθμού)

ΠΡΟΤΑΣΗ 41 (ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΥ-ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΥ ΜΕΣΟΥ)
Έστω ότι οι $a_1, \cdots, a_n$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί.
Τότε

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 42 *Αν a, b είναι οποιοιδήποτε πραγματικοί αριθμοί και $a < b$ τότε υπάρχει ένας ρητός αριθμός c και ένας άρρητος d στο διάστημα (a, b).*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Χρησιμοποιώντας την Αρχιμήδεια ιδιότητα των φυσικών αριθμών διαλέγουμε κάποιο $s \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\frac{1}{b-a} < s$ οπότε $\frac{1}{s} < b-a$. Έστω $z = [sa]+1 \in \mathbb{Z}$ οπότε $z-1 \leq sa < z$ και επομένως $a < \frac{z}{s} \leq a+\frac{1}{s} < b$. Ο ρητός αριθμός $c = \frac{z}{s}$ βρίσκεται στο διάστημα (a, b).

Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει άρρητος αριθμός στο διάστημα (a, b). Όπως προηγούμενα, μπορούμε να βρούμε έναν ρητό αριθμό u στο διάστημα $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$. Θέτουμε $d = u\sqrt{2}$ και προκύπτει ότι $d \in (a, b)$. Είναι όμως εύκολο να δούμε ότι ο d είναι άρρητος. □

Στην συνέχεια θα παραθέσουμε ορισμένες ασκήσεις για την καλύτερη κατανόηση των εννοιών.

ΑΣΚΗΣΗ 43 *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Θέτουμε $-A = \{x \in \mathbb{R} : -x \in A\}$. Αποδείξτε ότι*

$$\begin{aligned} \sup(-A) &= -\inf A \\ \inf(-A) &= -\sup A \end{aligned}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θα αποδείξουμε την πρώτη ισότητα, η δεύτερη είναι παρόμοια.

Ας υποθέσουμε ότι το A είναι φραγμένο από κάτω και θέτουμε $a = \inf A$. Τότε $x \geq a$ για κάθε $x \in A$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $x^* \in A$ τέτοιο ώστε $x^* < a + \varepsilon$. Πολλαπλασιάζοντας τις ανισότητες με -1 προκύπτει ότι $x \leq -a$ για κάθε $x \in (-A)$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $x^* \in (-A)$ τέτοιο ώστε $x^* > -a - \varepsilon$. Αυτό σημαίνει ότι $-a = \sup(-A)$.

Εάν το A δεν είναι φραγμένο από κάτω, τότε το $-A$ δεν είναι άνω φραγμένο και επομένως $\sup(-A) = -\inf A = +\infty$. $\square$

ΑΣΚΗΣΗ 44 *Έστω A και B υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι*

$$\begin{aligned}\sup(A \cup B) &= \max\{\sup A, \sup B\} \\ \inf(A \cup B) &= \min\{\inf A, \inf B\}\end{aligned}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θα αποδείξουμε την πρώτη ισότητα, η δεύτερη είναι παρόμοια.

Υποθέτουμε ότι τα A και B είναι άνω φραγμένα. Θέτουμε $a = \sup A$ και $b = \sup B$ και υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $a \leq b$. Θα αποδείξουμε ότι $\sup(A \cup B) = b$. Για κάθε $x \in A \cup B$ έχουμε ότι $x \leq b$. Επίσης, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει κάποιο $x^* \in B$ τέτοιο ώστε $x^* > b - \varepsilon$ και προφανώς $x^* \in A \cup B$. Επομένως προκύπτει η πρώτη ισότητα. Στην περίπτωση όπου τα σύνολα A και B δεν είναι άνω φραγμένα τότε και το $A \cup B$ δεν είναι επίσης. Επομένως $\sup(A \cup B) = +\infty$ και έτσι προκύπτει επίσης το αποτέλεσμα αφού $\max\{+\infty, c\} = \max\{+\infty, +\infty\}$. $\square$

Μιγαδικοί Αριθμοί

Από το θεώρημα 20 προκύπτει ότι δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός που το τετράγωνό του είναι αρνητικός αριθμός. Για τον λόγο αυτόν θα επεκτείνουμε το σύστημα των αριθμών με τέτοιον τρόπο ώστε οι τετραγωνικές ρίζες να υπάρχουν πάντοτε. Ορίζουμε έναν νέο αριθμό, τον i και του δίνουμε την ιδιότητα $i^2 = -1$. Έτσι, προκύπτουν οι λεγόμενοι μιγαδικοί αριθμοί οι οποίοι έχουν την μορφή $a+ib$ όπου $a, b \in \mathbb{R}$. Ο αριθμός a ονομάζεται το **πραγματικό** μέρος του μιγαδικού αριθμού και συμβολίζεται με $\mathrm{Re}(x)$ όταν $x = a+ib$ και ο αριθμός b ονομάζεται το **φανταστικό** μέρος του μιγαδικού αριθμού και συμβολίζεται με $\mathrm{Im}(x)$. Θα λέμε ότι δυο μιγαδικοί αριθμοί είναι ίσοι όταν έχουν ίσα πραγματικά μέρη και ίσα φανταστικά μέρη.

Με βάση την ιδιότητα $i^2 = -1$ προκύπτουν διάφορες ιδιότητες των μιγαδικών αριθμών. Έστω $z_1 = a_1 + ib_1$ και $z_2 = a_2 + ib_2$. Το γινόμενό τους είναι ως εξής,

$$z_1 z_2 = a_1 a_2 + i a_1 b_2 + i b_1 a_2 + i^2 b_1 b_2 = a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + b_1 a_2)$$

Η πρόσθεση δυο μιγαδικών αριθμών είναι ως εξής,

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$$

Η διαίρεση μπορεί να γίνει ως εξής,

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{a_1+ib_1}{a_2+ib_2} = \frac{(a_1+ib_1)(a_2-ib_2)}{(a_2+ib_2)(a_2-ib_2)} = \frac{a_1a_2+b_1b_2+i(b_1a_2-a_1b_2)}{a_2^2+b_2^2} \\ &= \frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2} + i\frac{b_1a_2-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}\end{aligned}$$

Αν $z = a+ib$ τότε ο μιγαδικός αριθμός $\bar{z} = a-ib$ ονομάζεται **συζυγής** του z.

Αν για δυο μιγαδικούς αριθμούς z_1 και z_2 ισχύει ότι $z_1 z_2 = 0$ τότε αναγκαστικά ένας από τους δυο είναι ίσος με το μηδέν. Πράγματι,

$$z_1 z_2 = a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + b_1 a_2) = 0 + i0$$

Επομένως, προκύπτουν δυο εξισώσεις

$$\begin{aligned} a_1 a_2 - b_1 b_2 &= 0 \\ a_1 b_2 + b_1 a_2 &= 0 \end{aligned}$$

Υψώνουμε στο τετράγωνο τις δυο αυτές ισότητες και έπειτα τις προσθέτουμε κατά μέλη για να πάρουμε

$$(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) = 0$$

Αρα, τουλάχιστον μια εκ των δυο παρενθέσεων είναι ίση με το μηδέν, έστω $a_1^2 + b_1^2 = 0$. Για να ισχύει αυτό αναγκαστικά πρέπει να ισχύει $a_1 = b_1 = 0$.

Το άθροισμα των z και $\bar{z}$ είναι ίσο με $2a$ όταν $z = a + ib$ ενώ το γινόμενο των συζυγών είναι ίσο με $a^2 + b^2$. Αρα, το άθροισμα και το γινόμενο δυο συζυγών αριθμών είναι πάντοτε πραγματικός αριθμός. Η διαφορά $z - \bar{z} = 2ib$, έχει δηλαδή πραγματικό μέρος ίσο με το μηδέν. Το πηλίκο

$$\frac{z}{\bar{z}} = \frac{a^2 - b^2 + i2ab}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} + i\frac{2ab}{a^2 + b^2}$$

δηλαδή είναι μιγαδικός αριθμός.

ΑΣΚΗΣΗ 45 *Ο συζυγής του αθροίσματος, της διαφοράς, του γινομένου και του πηλίκου δυο μιγαδικών αριθμών ισούται με το αντίστοιχο άθροισμα, διαφορά, γινόμενο και πηλίκο των συζυγών τους. Δηλαδή, ισχύει* $\overline{x \pm y} = \bar{x} \pm \bar{y}$, $\overline{xy} = \bar{x}\bar{y}$ *και* $\overline{x\frac{1}{y}} = \frac{\bar{x}}{\bar{y}}$.

ΛΗΜΜΑ 46 *Έστω ένα πολυώνυμο*

$$P(z) = a_0 z^n + \cdots + a_n$$

όπου z *μιγαδικός αριθμός, δηλαδή* $z = a + ib$ *και* $a_0, \cdots, a_n$ *πραγματικοί αριθμοί. Τότε, αν* $z \in \mathbb{C}$ *είναι ρίζα του πολυωνύμου τότε και ο συζυγής* $\overline{z}$ *είναι επίσης ρίζα.*

ΘΕΩΡΗΜΑ 47 *Έστω ένα πολυώνυμο*

$$P(z) = a_0 z^n + \cdots + a_n$$

όπου z *μιγαδικός αριθμός, δηλαδή* $z = a + ib$ *και* $a_0, \cdots, a_n$ *μιγαδικοί αριθμοί. Το πολυώνυμο αυτό έχει* n *ρίζες όχι κατά ανάγκη διακεκριμένες. Αν* $z_1, \cdots, z_k$ *ρίζες του πολυωνύμου πολλαπλότητας* $r_1, \cdots, r_k$ *τότε αναγκαστικά* $r_1 + \cdots + r_k = n$. *Επιπλέον ισχύει ότι* $P(z_i) = P^{'}(z_i) = \cdots = P^{r_i - 1}(z_i) = 0$ *και* $P^{r_i} \neq 0$ *για κάθε* $i = 1, \cdots, k$. *Τέλος, αν υπάρχει* $z^* \in \mathbb{C}$ *τέτοιο ώστε* $P(z^*) = P^{'}(z^*) = \cdots = P^{r^*}(z^*) = 0$ *και* $P^{r^*+1}(z^*) \neq 0$ *τότε το* z^* *είναι ρίζα του πολυωνύμου πολλαπλότητας* $r^* + 1$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 48 *Έστω η δευτεροβάθμια εξίσωση*

$$ax^2 + bx + c = 0$$

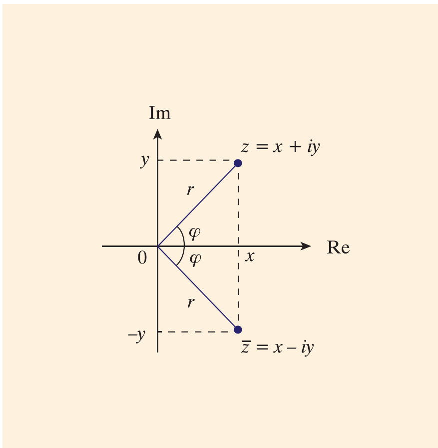
Αν η διακρίνουσα $\Delta = b^2 - 4ac$ *είναι αρνητική τότε οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης θα είναι μιγαδικές. Πράγματι*

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{|\Delta| i^2}}{2a} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a} i$$

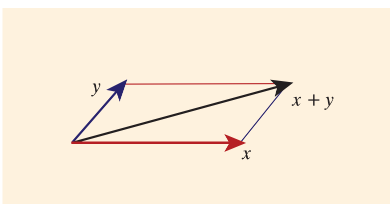
Παρατηρούμε ότι οι ρίζες είναι συζυγείς μιγαδικές. $\square$

Οι Μιγαδικοί Αριθμοί ως Διανύσματα

(α΄) Γεωμετρική Αναπαράσταση Μιγαδικών Αριθμών



(β΄) Πρόσθεση Διανυσμάτων



Σχήμα 2

Εφόσον κάθε μιγαδικός αριθμός $z = x + iy$ αποτελείται από δυο πραγματικούς αριθμούς, δηλαδή ένα ζευγάρι (x, y), τότε μπορεί να τον αναπαραστήσουμε γεωμετρικά (δες σχήμα 2α′) με ένα σημείο του $\mathbb{R}^2$ ή αλλιώς με ένα διάνυσμα με αρχή την αρχή των αξόνων και τέλος το σημείο (x, y). Έτσι, αν r είναι η Ευκλείδεια απόσταση του σημείου (x, y) (ή αλλιώς το μήκος του αντίστοιχου διανύσματος) και ϕ η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα με τον άξονα των x τότε μπορούμε να γράψουμε $z = x + iy = r(\cos\phi + i\sin\phi)$. Η μορφή αυτή είναι σε **πολική μορφή** όπως λέμε. Ο αριθμός r ονομάζεται η **απόλυτη τιμή** του μιγαδικού αριθμού z και συμβολίζεται με $|x + iy|$ ενώ η ϕ ονομάζεται η **γωνία** του μιγαδικού αριθμού $x + iy$. Επομένως, ισχύει ότι $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ και $\tan\phi = \frac{y}{x}$. Όταν προσθέτουμε δυο μιγαδικούς αριθμούς $x = a_1 + ib_1$ και $y = a_2 + ib_2$ είναι σαν να προσθέτουμε τα αντίστοιχα διανύσματα που παράγουν, δες σχήμα 2β′.

Αν υπολογίσουμε το γινόμενο δυο μιγαδικών αριθμών στην πολική μορφή τους θα έχουμε

$$\begin{aligned} x_1 x_2 &= r_1 r_2 (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= r_1 r_2 \left(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right) \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε γνωστές τριγωνομετρικές ταυτότητες. Από την σχέση αυτή προκύπτει η φόρμουλα του De Moivre για το γινόμενο n ίσων παραγόντων,

$$x^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) \qquad \text{(φόρμουλα του De Moivre)}$$

Εύκολα μπορούμε τώρα να δούμε ότι ένας οποιοσδήποτε μιγαδικός αριθμός $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ έχει ακριβώς n-ρίζες n-οστής τάξης. Αυτές οι ρίζες είναι οι επόμενοι μιγαδικοί αριθμοί,

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta}{n} + i\sin\frac{\theta}{n}\right) \\ &\vdots \\ x_n &= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+(n-1)2\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+(n-1)2\pi}{n}\right) \end{aligned}$$

Μετά τον μιγαδικό αριθμό με γωνία $\frac{\theta+(n-1)2\pi}{n}$ οι αριθμοί επαναλαμβάνονται.

Εύκολα βλέπουμε ότι για έναν μιγαδικό αριθμό z το γινόμενο με τον συζυγή του μας δίνει την απόλυτη τιμή του z στο τετράγωνο, δηλαδή $z\bar{z} = |z|^2 = r^2$. Επίσης, αν $z_1 = a_1 + ib_1$ και $z_2 = a_2 + ib_2$ δυο μιγαδικοί αριθμοί, τότε $z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = 2(a_1a_2 + b_1b_2) = 2\,\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$ όπου με $\mathrm{Re}(z)$ συμβολίζουμε το πραγματικό μέρος του μιγαδικού αριθμού z.

Ισχύει και στους μιγαδικούς η τριγωνική ανισότητα, δηλαδή ισχύει ότι

$$\big|\,|z_1| - |z_2|\,\big| \le |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2| \qquad \text{(τριγωνική ανισότητα)}$$

όπου z_1, z_2 μιγαδικοί αριθμοί. Για να αποδείξουμε την δεξιά ανισότητα εργαζόμαστε ως εξής,

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} \\ &= (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$|z_1 + z_2|^2 - (|z_1| + |z_2|)^2 = 2\left(\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) - |z_1|\,|z_2|\right)$$

Επειδή $\mathrm{Re}(z) = a \le |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ για κάθε μιγαδικό αριθμό $z = a + ib$ και επίσης $|z_1\bar{z}_2| = |z_1|\,|z_2|$

προκύπτει ότι $\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) - |z_1|\ |z_2| \leq 0$. Η αριστερή ανισότητα της τριγωνικής ανισότητας αποδεικνύεται παρόμοια.

Μελετώντας διεξοδικότερα τους μιγαδικούς αριθμούς και τις μιγαδικές συναρτήσεις μπορούμε να ορίσουμε την εκθετική συνάρτηση με μιγαδικό όρισμα ως την δυναμοσειρά

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots$$

όπου $z = a + ib$ μιγαδικός αριθμός. Παρόμοια, ορίζονται οι συναρτήσεις sin και cos με μιγαδικό όρισμα μέσω των δυναμοσειρών

$$\begin{aligned} \sin z &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots \\ \cos z &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots \end{aligned}$$

Οι ιδιότητες που ισχύουν για την εκθετική και τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις παραμένουν σε ισχύ ακόμη και με μιγαδικό όρισμα. Αν αναπτύξουμε σε δυναμοσειρά την e^{iz} μετά από κατάλληλη αναδιάταξη των όρων μπορεί να αποδειχθεί ότι

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \quad \text{(φόρμουλα του Euler)}$$

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των συναρτήσεων αυτών προκύπτει η εξής αναπαράσταση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad \text{και} \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{(τύποι του Euler)(3)}$$

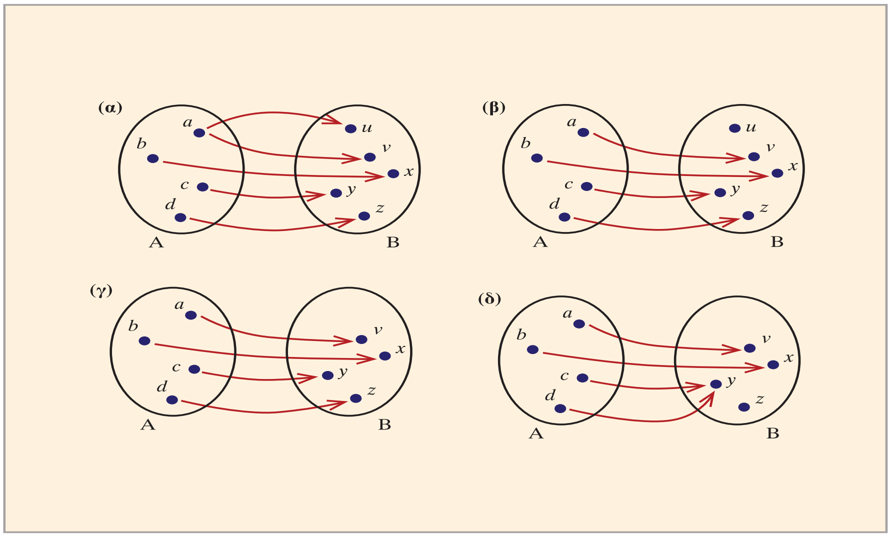
Τέλος, σε πολικές συντεταγμένες ισχύει ότι

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

Συναρτήσεις

Σε αυτή την ενότητα θα ασχοληθούμε με τις συναρτήσεις, όρια και συνέχεια συναρτήσεων, παραγώγους και εφαρμογές τους.

Έστω $I \subseteq \mathbb{R}$. Συνάρτηση είναι μια απεικόνιση του $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$ όπου σε κάθε ένα στοιχείο από το $\mathbb{R}$ αντιστοιχεί μονάχα ένα σημείο του $\mathbb{R}$. Όπως συχνά λέμε, είναι μια μηχανή που την τροφοδοτείς με πραγματικούς αριθμούς και σου επιστρέφει πραγματικούς αριθμούς (δείτε σχεδιάγραμμα 3). Το σύνολο από το οποίο διαλέγεις αριθμούς για την συνάρτηση λέγεται πεδίο ορισμού ενώ το σύνολο που σου επιστρέφει η συνάρτηση λέγεται πεδίο τιμών.



Σχήμα 3: Στο a) σχεδιάγραμμα η απεικόνιση δεν είναι συνάρτηση αφού ένα στοιχείο του πεδίου ορισμού αντιστοιχεί σε δυο σημεία του πεδίου τιμών.

Συνήθως συμβολίζουμε την συνάρτηση ως εξής, $f(x) : I \to \mathbb{R}$. Με f συμβολίζουμε την συνάρτηση, με x το όρισμα της και με τα υπόλοιπα εννοούμε ότι η f παίρνει τιμές από το σύνολο I και δίνει τιμές στο $\mathbb{R}$. Για παράδειγμα μια συνάρτηση είναι η $f(x) = x^2$, δίνοντας της έναν οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό, αυτή σου επιστρέφει το τετράγωνό του.

Σημειώστε ότι, μια συνάρτηση σε κάθε έναν πραγματικό αριθμό πρέπει να αντιστοιχεί έναν (και μόνον έναν) πραγματικό αριθμό αλλιώς την ονομάζουμε απεικόνιση. Το σύνολο I μπορεί να είναι όλο το $\mathbb{R}$ ή οποιοδήποτε υποσύνολο του, αρκεί βέβαια να ορίζεται η συνάρτηση. Αν αναλογιστούμε την συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$ τότε το πεδίο ορισμού δεν μπορεί να περιέχει το 0. Γενικότερα, το πεδίο ορισμού I μιας συνάρτησης θα είναι ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$ αλλά και το πεδίο τιμών θα είναι επίσης υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΗ 49 *Βρείτε το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών των συναρτήσεων*

$$f(x) = 4 - x^2, \quad g(x) = -2\sqrt{x}, \quad h(x) = \sqrt{4 - x^2}$$
$$k(x) = |x - 1|, \quad l(x) = [2x] \text{ όπου } [\cdot] \text{ το ακέραιο μέρος}$$

Το ακέραιο μέρος ενός $x \in \mathbb{R}$ *έχει την παρακάτω ιδιότητα*

$$[x] \leq x \leq [x] + 1, \qquad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Παρακάτω θα μελετήσουμε συστηματικότερα την καταγραφή του πεδίου τιμών μιας συνεχούς (ή κατά τμήματα συνεχούς) συνάρτησης κατασκευάζοντας τον πίνακα ακροτάτων και φραγμάτων της συνάρτησης.

Όριο συνάρτησης

Μια χρήσιμη έννοια, όπως θα δούμε παρακάτω, είναι η έννοια του ορίου.

ΟΡΙΣΜΟΣ 50 (ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ) *Έστω μια συνάρτηση $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και κάποιο $\xi \in \mathbb{R}$ σημείο συσσώρευσης του I (δεν είναι αναγκαίο το $\xi \in I$).*

- *Θα λέμε ότι η f προσεγγίζει το $A \in \mathbb{R}$ καθώς το $x \in I$ προσεγγίζει το ξ όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ τ.ω. $|f(x) - A| < \varepsilon$ όταν $|x - \xi| < \delta$. Συμβολίζεται με*

$$\lim_{x \to \xi} f(x) = A$$

- *Θα λέμε ότι η f αποκλίνει στο $+\infty$ (αντίστοιχα στο $-\infty$) καθώς $x \to \xi$ όταν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε $f(x) > M$ (αντίστοιχα $f(x) < -M$) όταν $|x - \xi| < \delta$. Συμβολίζεται με*

$$\lim_{x \to \xi} f(x) = \pm\infty$$

- *Θα λέμε ότι η f προσεγγίζει το $A \in \mathbb{R}$ καθώς $x \to +\infty$ (αντίστοιχα καθώς $x \to -\infty$) όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε αρκετά μεγάλο $M > 0$ έτσι ώστε $|f(x) - A| < \varepsilon$ όταν $x > M$ (αντίστοιχα όταν $x < -M$). Συμβολίζεται με*

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = A$$

- *Θα λέμε ότι η f αποκλίνει στο $+\infty$ (αντίστοιχα στο $-\infty$) καθώς το $x \to +\infty$ όταν για κάθε $M > 0$ υπάρχει αρκετά μεγάλο $N > 0$ έτσι ώστε $f(x) > M$ (αντίστοιχα $f(x) < -M$) όταν $x > N$. Συμβολίζεται με*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$$

Παρόμοια ο ορισμός του ορίου

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \pm\infty$$

- *Θα λέμε ότι η f συγκλίνει στο $A \in \mathbb{R}$ καθώς $x \to \xi^+$ (ή αλλιώς καθώς το x τείνει στο ξ από δεξιά) όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε*

$|f(x) - A| < \varepsilon$ *όταν* $\xi < x < \xi + \delta$. *Συμβολίζεται με*

$$\lim_{x \to \xi^+} f(x) = A$$

Παρόμοια, οι ορισμοί για $x \to \xi^-$ *και για* $A = \pm\infty$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 51 *Ισχύει η συνεπαγωγή*

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = A \Longleftrightarrow \left(\lim_{x\to\xi^+} f(x) = A \text{ και } \lim_{x\to\xi^-} f(x) = A \right)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Όταν ισχύει το ευθύ, δηλαδή

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = A$$

τότε είναι προφανές ότι ισχύουν και τα

$$\lim_{x\to\xi^+} f(x) = A \text{ και } \lim_{x\to\xi^-} f(x) = A$$

Αντίστροφα, αν ισχύει ότι

$$\lim_{x\to\xi^+} f(x) = A \text{ και } \lim_{x\to\xi^-} f(x) = A$$

θα αποδείξουμε ότι και

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = A$$

Ως δεδομένο έχουμε λοιπόν ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε $\delta_1, \delta_2 > 0$ έτσι ώστε $|f(x) - A| < \varepsilon$ όταν $\xi < x < \xi + \delta_1$ ή όταν $\xi - \delta_2 < x < \xi$. Διαλέγουμε $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ και επομένως ισχύει ότι $|f(x) - A| < \varepsilon$ όταν $x \in (\xi - \delta, \xi + \delta)$ ή αλλιώς $|x - \xi| < \delta$. Αρα ισχύει και το ευθύ. $\square$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 52 *Αν θέλουμε να υπολογίσουμε το όριο μιας συνάρτησης του τύπου $f(x)^{g(x)}$ τότε θα πρέπει να την γράψουμε στην μορφή $e^{g(x)\ln f(x)}$ και να υπολογίσουμε το όριο σε αυτή την μορφή.*

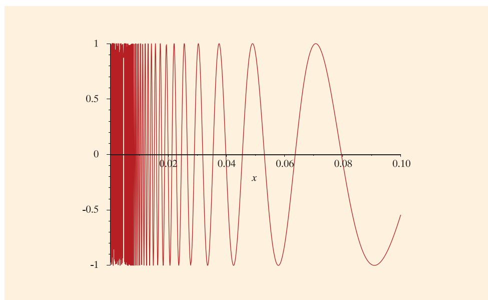
Ο αυστηρά μαθηματικός ορισμός των τριγωνομετρικών, λογαριθμικών και εκθετικών συναρτήσεων θα γίνει παρακάτω. Σε επόμενα παραδείγματα και ασκήσεις όμως θα χρησιμοποιηθούν οι συναρτήσεις αυτές και οι ιδιότητες τους θεωρώντας γνωστά τα βασικά χαρακτηριστικά τους.

Παραδείγματα

• Η συνάρτηση $f(x) = x$ έχει όριο το ξ όταν $x \to \xi$. Πράγματι, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ το οποίο μπορούμε να επιλέξουμε να είναι ίσο με το ε έτσι ώστε

$$|x - \xi| < \varepsilon \text{ όταν } |x - \xi| < \delta$$

• Ως δεύτερο παράδειγμα μπορούμε να δούμε την συ-



Σχήμα 4: $f(x) = \sin\frac{1}{x}$

νάρτηση $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ (σχήμα 4) και να αποδείξουμε ότι δεν έχει όριο στο 0. Αν είχε κάποιο όριο, έστω A, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ πρέπει να υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε για κάθε $x \in (-\delta, \delta)$ να ισχύει ότι $|\sin\frac{1}{x} - A| < \varepsilon$. Στο διάστημα όμως $(-\delta, \delta)$ ανήκουν οι αριθμοί $\frac{1}{2\pi n}, \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$

για αρκετά μεγάλο n. Όμως η τιμή της $\sin\frac{1}{x}$ στα σημεία αυτά είναι ίση με $0, 1$ αντίστοιχα.

• Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{1-x}$ αποκλίνει στο $+\infty$ καθώς $x \to 1^-$ και στο $-\infty$ καθώς $x \to 1^+$. Πράγματι, αν $x \to 1^-$ θα αποδείξουμε ότι $f(x) \to +\infty$. Για κάθε $M > 0$ θα πρέπει να βρούμε κατάλληλο $\delta > 0$ έτσι ώστε για $1 - \delta < x < \delta$ να ισχύει $f(x) > M$. Διαλέγοντας $\delta = \frac{1}{M}$ προκύπτει ότι $\frac{1}{1-x} > M$ όταν $x \in (1-\delta, 1)$.

• Η συνάρτηση $f(x) = x$ αποκλίνει στο $+\infty$ καθώς $x \to +\infty$ και στο $-\infty$ καθώς $x \to -\infty$.

• Η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{όταν } x \leq \frac{1}{2} \\ x, & \text{όταν } x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

δεν έχει όριο στο σημείο $x = \frac{1}{2}$ αλλά τα αριστερά και δεξιά όρια υπάρχουν και είναι διαφορετικά. □

ΘΕΩΡΗΜΑ 53 *Αν* $f(x) \to A$, $g(x) \to B$ *καθώς* $x \to \xi$, *τότε* $f(x)+g(x) \to A+B$, $\quad f(x)g(x) \to AB$, $\quad \frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{A}{B}$ *αν* $B \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *και* $A \in \mathbb{R}$.

Συνέχεια Συνάρτησης

ΟΡΙΣΜΟΣ 54 *Μια συνάρτηση $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ λέγεται* **συνεχής** *στο σημείο $\xi \in I$ αν*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \ \text{ τέτοιο ώστε αν } x \in I \ \text{ και } |x - \xi| < \delta \text{ τότε } |f(x) - f(\xi)| < \varepsilon.$$

Το δ εξαρτάται τόσο από το ε όσο και από το σημείο ξ. Η συνάρτηση $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ θα λέγεται **ασυνεχής** *στο $\xi \in I$ όταν δεν είναι συνεχής στο σημείο αυτό. Επίσης, μια συνάρτηση $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ λέγεται* **δεξιά συνεχής** *στο σημείο $\xi \in I$ αν*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ τέτοιο ώστε αν } x \in I \ \text{ και } 0 < x - \xi < \delta \text{ τότε } |f(x) - f(\xi)| < \varepsilon.$$

Παρομοίως, μια συνάρτηση $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ λέγεται **αριστερά συνεχής** *στο σημείο $\xi \in I$ αν*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ τέτοιο ώστε αν } x \in I \text{ και } 0 < \xi - x < \delta \text{ τότε } |f(x) - f(\xi)| < \varepsilon.$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 55 *Παρατηρήστε ότι στον ορισμό της συνέχειας δεν απαιτούμε το $\xi \in I$ να είναι σημείο συσσώρευσης (σε αντίθεση με τον ορισμό του ορίου συνάρτησης). Απαιτούμε όμως το $\xi \in I$ (σε αντίθεση με τον ορισμό του ορίου όπου αυτό δεν απαιτείται).*

Ο ορισμός της συνέχειας μιας συνάρτησης $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ στο σημείο συσσώρευσης $\xi \in I$ είναι ισοδύναμος με την απαίτηση

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi) \quad (\text{δείτε ορισμό } 50)$$

Παρόμοια για την δεξιά και αριστερή συνέχεια μιας συνάρτησης στο σημείο συσσώρευσης $\xi \in I$.

Αν το σημείο $\xi \in I$ είναι μεμονωμένο σημείο τότε ισχύει ο ορισμός της συνέχειας στο σημείο αυτό. Πράγματι, για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορώ να βρω αρκετά μικρό $\delta > 0$ τέτοιο ώστε το μοναδικό $x \in I$ που είναι τέτοιο ώστε $|x - \xi| < \delta$ να είναι το $x = \xi$ και επομένως ισχύει προφανώς ότι $|f(\xi) - f(\xi)| = 0 < \varepsilon$, δηλαδή η συνάρτηση f θεωρείται συνεχής στο μεμονωμένο σημείο ξ. Σε αυτή την περίπτωση (παρόλο που η συνάρτηση είναι συνεχής) το γράφημα της συνάρτησης δεν είναι *μια συνεχής γραμμή όπως θα ήταν αν το σημείο ήταν σημείο συσσώρευσης.* □

Πρόταση 56 *Μια συνάρτηση $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο σημείο συσσώρευσης $\xi \in I$* **ανν** *είναι δεξιά και αριστερά συνεχής στο σημείο αυτό.*

Παραδείγματα

• Η συνάρτηση $f(x) = x$ είναι συνεχής σε κάθε σημείο $\xi \in \mathbb{R}$ αφού όπως είδαμε σε προηγούμενο παράδειγμα

$$\lim_{x \to \xi} f(x) = \xi = f(\xi)$$

• Η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{όταν } x \leq \frac{1}{2} \\ x, & \text{όταν } x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

είναι αριστερά συνεχής στο $\frac{1}{2}$ (το οποίο είναι σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού) αλλά όχι δεξιά συνεχής συνεπώς δεν είναι συνεχής στο $x = \frac{1}{2}$.

• Η συνάρτηση

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{όταν } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

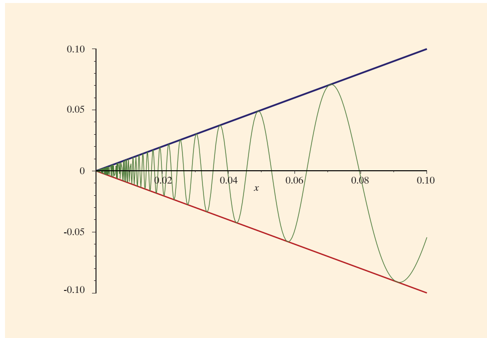
δεν είναι συνεχής σε κανένα σημείο του $\mathbb{R}$ διότι θα έπρεπε για κάθε $\varepsilon > 0$ να υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε για κάθε $x \in (\xi - \delta, \xi + \delta)$ να ισχύει ότι $|D(x) - D(\xi)| < \varepsilon$. Όμως σε κάθε διάστημα υπάρχουν και ρητοί και άρρητοι αριθμοί και άρα μια τέτοια ανισότητα δεν είναι εφικτή είτε το $\xi \in \mathbb{Q}$ είτε όχι.

• Η συνάρτηση $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ (σχήμα 5) είναι συνεχής παντού

εκτός από το μηδέν στο οποίο δεν ορίζεται. Όμως το όριο υπάρχει καθώς $x \to 0$ και είναι ίσο με το μηδέν, διότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει δ (μπορούμε να διαλέξουμε οποιοδήποτε $\delta < \varepsilon$) έτσι ώστε

$$\left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| < \varepsilon \qquad \text{όταν } |x| < \delta$$

Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να ορίσουμε μια νέα συνάρτηση $\hat{f}(x)$ η οποία να συμπίπτει με την προηγούμε-



Σχήμα 5: *Με μπλε και κόκκινη γραμμή είναι τα γραφήματα των συναρτήσεων $y = x$ και $y = -x$ αντίστοιχα. Με πράσινη γραμμή είναι το γράφημα της συνάρτησης $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$*

νη σε όλα τα σημεία εκτός του μηδενός και στο μηδέν να είναι ίση με μηδέν, δηλαδή

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{όταν } x \neq 0 \\ 0, & \text{όταν } x = 0 \end{cases}$$

Η $\hat{f}(x)$ είναι συνεχής παντού (και στο μηδέν) και ονομάζεται η **συνεχής επέκταση** της $f(x)$. Γενικά αυτό είναι εφικτό όταν μια συνάρτηση δεν ορίζεται σε ένα σημείο x_0 αλλά έχει όριο καθώς $x \to x_0$, έστω A. Οπότε σε αυτή την περίπτωση ορίζουμε νέα συνάρτηση

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{όταν } x \neq x_0 \\ A, & \text{όταν } x = x_0 \end{cases}$$

• Έστω μια συνεχής συνάρτηση f η οποία είναι τέτοια ώστε $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{Q}$. Τότε ισχύει ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Πράγματι, αφού η f είναι συνεχής για κάθε $c \in \mathbb{R}$ τότε $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$. Αν c είναι ένας οποιοσδήποτε άρρητος αριθμός τότε σύμφωνα με την πρόταση 42 μπορούμε να βρούμε ρητούς αριθμούς οσοδήποτε κοντά στον άρρητο αριθμό c. Λόγω συνέχειας της f έχουμε ότι

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ τέτοιο ώστε } |f(x) - f(c)| < \varepsilon \text{ όταν } |x - c| < \delta$$

Βάζοντας στην θέση του x έναν οποιοδήποτε ρητό αριθμό κοντά στο c προκύπτει ότι

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ τέτοιο ώστε } \forall x \in \mathbb{Q} \text{ ισχύει ότι } |f(c)| < \varepsilon \text{ όταν } |x - c| < \delta$$

Αυτό σημαίνει αναγκαστικά ότι $f(c) = 0$.

• Έστω f μια συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε $f(x+y) = f(x)+f(y)$. Θα αποδείξουμε ότι $f(x) = cx$ για κάποια σταθερά $c \in \mathbb{R}$. Θέτουμε $f(1) = c$. Θα αποδείξουμε επαγωγικά ότι $f(n) = cn$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Για $n = 1$ ισχύει. Υποθέτοντας ότι ισχύει για κάποιο n θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για $n+1$. Πράγματι, $f(n+1) = f(n) + f(1) = cn + c = c(n+1)$. Εύκολα αποδεικνύουμε ότι $f(0) = 0$ αφού $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$. Στην συνέχεια αν $n \in \mathbb{N}$ τότε $0 = f(n-n) = f(n) + f(-n)$ άρα $f(-n) = -f(n) = -cn = c(-n)$. Δηλαδή για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ ισχύει ότι $f(n) = cn$. Κάθε ρητός αριθμός γράφεται στην μορφή m/n όπου $m, n \in \mathbb{Z}$. Οπότε

$$cm = f(m) = f\underbrace{\left(\frac{m}{n} + \cdots + \frac{m}{n}\right)}_{n \text{ φορές}} = \underbrace{f\left(\frac{m}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{m}{n}\right)}_{n \text{ φορές}} = nf\left(\frac{m}{n}\right)$$

Αρα $f\left(\frac{m}{n}\right) = c\frac{m}{n}$. Τέλος, αν x είναι ένας οποιοσδήποτε άρρητος αριθμός τότε μπορούμε να βρούμε ρητό αριθμό $q = \frac{m}{n}$ όσο κοντά θέλουμε στον x. Λόγω συνέχειας της f έχουμε ότι

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ τέτοιο ώστε } |f(x) - f\left(\frac{m}{n}\right)| < \varepsilon \text{ όταν } |x - \frac{m}{n}| < \delta$$

Η ανισότητα

$$|f(x) - f\left(\frac{m}{n}\right)| < \varepsilon$$

σημαίνει ότι

$$-\varepsilon + c\frac{m}{n} < f(x) < \varepsilon + c\frac{m}{n}$$

αφού $f\left(\frac{m}{n}\right) = c\frac{m}{n}$. Από την άλλη μεριά η ανισότητα

$$|x - \frac{m}{n}| < \delta$$

σημαίνει ότι

$$-\delta + x < \frac{m}{n} < \delta + x$$

Αρα τελικά

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ έτσι ώστε } |f(x) - cx| < \varepsilon + |c|\delta$$

Αυτό σημαίνει ότι $f(x) = cx$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. □

ΑΣΚΗΣΗ 57 *Έστω μια συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε $f(x+y) = f(x)f(y)$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι υπάρχει σταθερά $c \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x) = e^{cx}$.*

Ισχύουν τα παρακάτω θεωρήματα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 58 *Αν η $f(x)$ είναι συνεχής στο ξ και $f(\xi) \neq 0$ τότε η $f(x)$ διατηρεί το ίδιο πρόσημο με την $f(\xi)$ σε μια περιοχή του ξ.*

ΘΕΩΡΗΜΑ 59 *Αν $f(x), g(x)$ είναι συνεχείς στο ξ, τότε το ίδιο συμβαίνει και για τις $f(x)+g(x)$, $f(x)g(x)$ και $\frac{f(x)}{g(x)}$ αρκεί $g(\xi) \neq 0$.*

Επίσης για την σύνθεση συναρτήσεων ισχύει το εξής θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 60 *Αν $y = f(x)$ είναι συνεχής στο ξ και $F(y)$ είναι συνεχής στο $f(\xi)$, τότε η $F \circ f$ είναι συνεχής στο ξ.*

ΘΕΩΡΗΜΑ 61 *Μια συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε κλειστό διάστημα είναι φραγμένη και επιπλέον λαμβάνει την μεγαλύτερη και την μικρότερη τιμή τουλάχιστον μια φορά.*

ΘΕΩΡΗΜΑ 62 (**Bolzano**) *Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και $f(a)f(b) < 0$ τότε υπάρχει κάποιο x στο $[a, b]$ τ.ω. $f(x) = 0$.*

Το θεώρημα του Bolzano προτείνει επίσης και μια μέθοδο προσέγγισης ρίζας μιας συνάρτησης. Περιγράφουμε στην συνέχεια την τεχνική αυτή.

Υποθέτουμε ότι η $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και τέτοια ώστε $f(a)f(b) \leq 0$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $[a, b]$. Επιλέγουμε $c = \frac{a+b}{2}$ δηλαδή το μέσο του διαστήματος και υπολογίζουμε το $f(c)$. Τότε είτε $f(c) = 0$ είτε $f(a)f(c) \leq 0$ είτε $f(c)f(b) \leq 0$. Στην πρώτη περίπτωση έχουμε ήδη υπολογίσει την ρίζα. Στις άλλες δυο περιπτώσεις έχουμε υπο-διπλασιάσει το διάστημα στο οποίο βρίσκεται η ρίζα. Συνεχίζουμε με αυτό τον τρόπο έτσι ώστε το μήκος του διαστήματος να γίνει αρκετά μικρό.

ΘΕΩΡΗΜΑ 63 (Μέθοδος της Διχοτόμησης) *Έστω $f \in C([a, b])$ και $f(a)f(b) \leq 0$. Έστω x_n η ακολουθία προσεγγίσεων που παράγει η μέθοδος της διχοτόμησης. Τότε είτε $x_N = x^*$ για κάποιο N, είτε $x_n \to x^*$ καθώς $n \to \infty$. Επιπλέον*

$$|x^* - x_n| \leq \frac{b-a}{2^n}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

Με την μέθοδο της διχοτόμησης επιλέγουμε εκ των προτέρων το n για να υπολογίσουμε την ρίζα της συνάρτησης με μια ζητούμενη ακρίβεια. Μπορούμε π.χ. να εφαρμόσουμε την μέθοδο της διχοτόμησης για να υπολογίσουμε την ρίζα της συνάρτησης με ακρίβεια ενός ή δυο δεκαδικών ψηφίων και αυτή την προσέγγιση να την χρησιμοποιήσουμε ως αρχική τιμή στην μέθοδο του Νεύτωνα που θα δούμε λίγο παρακάτω. Αυτό το κάνουμε διότι η μέθοδος του Νεύτωνα είναι ταχύτερη. Ένα σημαντικό πλεονέκτημα όμως της μεθόδου της διχοτόμησης είναι ότι δεν απαιτείται από την συνάρτηση να είναι παραγωγίσιμη παρά μόνο συνεχής. Έτσι σε μερικές περιπτώσεις ίσως είναι η μοναδική μέθοδος προσέγγισης ρίζας συνάρτησης.

ΑΣΚΗΣΗ 64 (Σταθερό Σημείο) *Έστω* $f : [a, b] \to I \subseteq [a, b]$ *μια συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι έχει σταθερό σημείο, δηλαδή υπάρχει* $x \in [a, b]$ *τέτοιο ώστε* $f(x) = x$.

ΛΥΣΗ. Αν $f(a) = a$ ή $f(b) = b$ τότε έχουμε τελειώσει. Αλλιώς υποθέτουμε (χωρίς βλάβη της γενικότητας) ότι $a < f(a)$ και $b > f(b)$ και σχηματίζουμε την συνεχή συνάρτηση $h(x) = f(x) - x$. Παρατηρούμε ότι $h(a)h(b) < 0$ άρα υπάρχει κάποιο $c \in [a, b]$ έτσι ώστε $h(c) = 0$ ή αλλιώς $f(c) = c$ οπότε το c είναι ένα σταθερό σημείο για την f. $\square$

ΑΣΚΗΣΗ 65 *Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $\phi(x) = 2^{-x}$ έχει σταθερό σημείο στο διάστημα $[0, 1]$ και επομένως η συνάρτηση $2^{-x} - x$ έχει ρίζα στο διάστημα $[0, 1]$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έχουμε ότι $\phi'(x) = -\ln 2 \cdot 2^{-x} < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα η συνάρτηση ϕ είναι φθίνουσα. Επίσης, $\phi(0) = 1$ και $\phi(1) = \frac{1}{2}$ επομένως $\phi([0, 1]) = [\frac{1}{2}, 1] \subseteq [0, 1]$. Αυτό σημαίνει ότι $\phi : [0, 1] \to [0, 1]$ και επειδή είναι συνεχής έπεται ότι έχει σταθερό σημείο στο διάστημα $[0, 1]$. $\square$

Γενικότερα ισχύει το παρακάτω θεώρημα ενδιάμεσης τιμής.

ΘΕΩΡΗΜΑ 66 (ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ) *Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και $c \in [f(a), f(b)]$ τότε υπάρχει $x \in [a, b]$ τ.ω. $f(x) = c$.*

Παράγωγος

Θα ξεκινήσουμε με τον ορισμό της παραγώγου μιας συνάρτησης σε ένα σημείο.

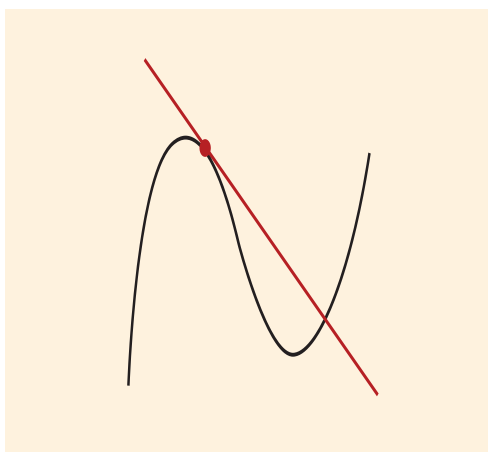
Ορισμος 67 *Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο a αν το*

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

υπάρχει. Συμβολίζεται με $f'(a)$ και ονομάζεται παράγωγος της f στο a. Τέλος, αν η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε σημείο ενός συνόλου $I \subseteq \mathbb{R}$ τότε λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη στο I.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 68 *Μελετώντας τον ορισμό της παραγώγου διαπιστώνουμε ότι όταν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο a τότε θα υπάρχει μια συνάρτηση $u(h)$ με $u(h) \to 0$ καθώς $h \to 0$ και τέτοια ώστε $f(a+h) - f(h) = h(f^{'}(a) + u(h))$.* □

Στο σχήμα 6 βλέπουμε την γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου μιας συνάρτησης σε ένα σημείο. Η παράγωγος της συνάρτησης στο σημείο αυτό είναι ίση με την κλίση της ευθείας που εφάπτεται στο γράφημα της συνάρτησης στο εν λόγω σημείο.



Σχήμα 6: Γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου μιας συνάρτησης σε ένα σημείο.

Παραδείγματα

• Η συνάρτηση $f(x) = |x|$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο μηδέν διότι το όριο

$$\lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$$

εξαρτάται (και είναι διαφορετικό) από το πρόσημο του h. Αν το h προσεγγίζει το μηδέν από τους θετικούς αριθμούς (από τα δεξιά όπως λέμε) τότε το όριο είναι 1 ενώ αν το προσεγγίζει από τα αριστερά είναι -1.

• Η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & \text{όταν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

είναι παραγωγίσιμη στο $\xi = 0$ και μάλιστα

$$f^{'}(0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x} - 0}{x} = \lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$$

• Έστω μια συνάρτηση f τέτοια ώστε $f(x+h) = f(x)f(h)$ και $f(0) = f^{'}(0) = 1$. Θα αποδείξουμε ότι $f^{'}(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Πράγματι, έχουμε

$$f(x+h) - f(x) = f(x)f(h) - f(x) = f(x)(f(h) - 1) = f(x)(f(h) - f(0))$$

Αρα

$$f^{'}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f(x) \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = f(x) f^{'}(0) = f(x)$$

• Αν η συνάρτηση f είναι άρτια και παραγωγίσιμη τότε η $f^{'}$ είναι περιττή. Παρόμοια, αν η f είναι περιττή και παραγωγίσιμη τότε η $f^{'}$ είναι άρτια. Πράγματι, έστω ότι η f είναι άρτια και παραγωγίσιμη. Τότε

$$\begin{aligned} f^{'}(-x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{h} \\ &= -\lim_{k \to 0} \frac{f(x+k) - f(x)}{k} \quad (\text{θέτοντας } k = -h) \\ &= -f^{'}(x) \end{aligned}$$

Παρόμοια, αν η f είναι περιττή έχουμε ότι

$$\begin{aligned} f'(-x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(-x+h)-f(-x)}{h} \\ &= -\lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{k\to 0}\frac{f(x+k)-f(x)}{k} \qquad (\text{θέτοντας } k=-h) \\ &= f'(x) \end{aligned}$$

□

ΘΕΩΡΗΜΑ 69 *Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο a, τότε η f είναι συνεχής στο a. Το αντίστροφο γενικά δεν ισχύει.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αυτό που θα αποδείξουμε είναι ότι

$$\lim_{x\to a}(f(x)-f(a))=0$$

ή αλλιώς

$$\lim_{h\to 0}(f(a+h)-f(a))=0$$

Πολλαπλασιάζω και διαιρώ με το h και έχω,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}h=f'(a)\lim_{h\to 0}h=0$$

Αρα είναι συνεχής. Αν θεωρήσουμε την συνάρτηση $f(x) = |x|$ βλέπουμε ότι είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$ αλλά όχι παραγωγίσιμη στο 0. $\square$

Στην συνέχεια θα αποδείξουμε χρήσιμα αποτελέσματα όσον αφορά την παράγωγο συναρτήσεων που εμφανίζονται συχνά.

ΘΕΩΡΗΜΑ 70 *Αν η f είναι μια σταθερή συνάρτηση, $f(x) = c$, τότε $f^{'}(a) = 0$ για κάθε αριθμό a, ενώ η παράγωγος της $f(x) = x$ είναι $f'(a) = 1$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $f(x) = c \in \mathbb{R}$. Θα υπολογίσουμε την παράγωγο σε ένα τυχαίο σημείο a.

$$f^{'}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = 0.$$

Αν $f(x) = x$ τότε έχουμε,

$$f^{'}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{a + h - a}{h} = 1.$$

$\square$

ΘΕΩΡΗΜΑ 71 *Αν οι f και g είναι παραγωγίσιμες στο a, τότε και η $f+g$ είναι παραγωγίσιμη και μάλιστα $(f+g)'(a) = f'(a)+g'(a)$. Επίσης και η fg είναι παραγωγίσιμη στο a και $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.*

Η n-οστή δύναμη ενός πραγματικού αριθμού x ορίζεται ως

$$x^n = \underbrace{x \cdots x}_{n-\text{φορές}}$$

Παρακάτω και αφού ορίσουμε την λογαριθμική και την εκθετική συνάρτηση θα γενικεύσουμε την έννοια της δύναμης ενός θετικού πραγματικού αριθμού και για μη ακέραιες δυνάμεις. Στο επόμενο θεώρημα υπολογίζουμε την παράγωγο της $f(x) = x^n$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 72 *Αν $f(x) = x^n$ με $n \in \mathbb{N}$ τότε $f'(a) = na^{n-1}$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$.*

Όταν θα ορίσουμε και μελετήσουμε την λογαριθμική και εκθετική συνάρτηση θα διαπιστώσουμε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^t$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^+$ και παραγωγίσιμη με παράγωγο $(x^t)' = tx^{t-1}$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 73 *Αν η g είναι παραγωγίσιμη στο a και $g(a) \neq 0$, τότε η $\frac{1}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο a και $\left(\frac{1}{g}\right)^{'}(a) = -\frac{g^{'}(a)}{[g(a)]^2}$.*

ΘΕΩΡΗΜΑ 74 (ΚΑΝΟΝΑΣ ΤΗΣ ΑΛΥΣΙΔΑΣ) *Αν η g είναι παραγωγίσιμη στο a και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(a)$, τότε η $f \circ g$ παραγωγίζεται στο a και $(f \circ g)^{'}(a) = f^{'}(g(a))g^{'}(a)$.*

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 75 *Αν θέλουμε να υπολογίσουμε την παράγωγο μιας συνάρτησης του τύπου $f(x)^{g(x)}$ τότε θα την γράψουμε στην μορφή $e^{g(x)\ln f(x)}$ και θα παραγωγίσουμε την μορφή αυτή.*

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 76 *Η συνάρτηση*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{όταν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη και μάλιστα $f^{(n)}(0) = 0$ για κάθε n. Με $f^{(n)}$ συμβολίζουμε την νιοστή παράγωγο της συνάρτησης. □

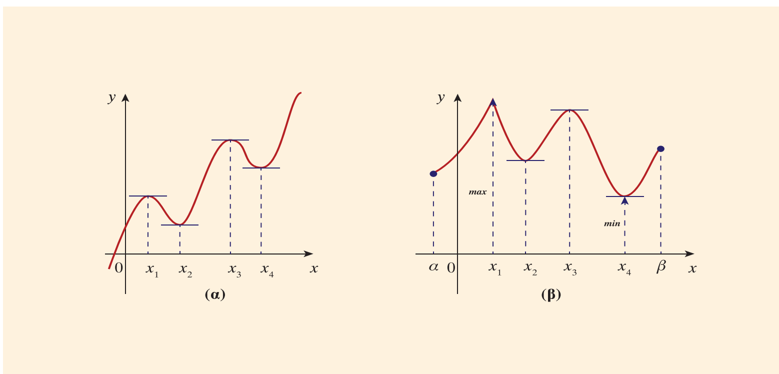
Εφαρμογές των παραγώγων

Σε αυτή την ενότητα θα αναφερθούμε στις εφαρμογές των παραγώγων όπως στην εύρεση μεγίστων και ελαχίστων.

ΟΡΙΣΜΟΣ 77 *Έστω f μια συνάρτηση και $A \subseteq \mathbb{R}$. Ένα σημείο $x \in A$ είναι* **σημείο μεγίστου** *της f στο A, αν $f(x) \geq f(y)$ για κάθε $y \in A$. Ο αριθμός $f(x)$ λέγεται η* **μέγιστη τιμή** *της f στο A. Επίσης, ένα σημείο $x \in A$ ονομάζεται σημείο* **τοπικού μεγίστου** *αν υπάρχει διάστημα $(x-\delta, x+\delta)$ όπου $\delta > 0$ αρκετά μικρό τ.ω. το x να είναι σημείο μεγίστου στο $(x-\delta, x+\delta)$. Παρόμοια για σημείο ελαχίστου.* **Τοπικό ακρότατο** *ονομάζεται ένα σημείο το οποίο είναι είτε τοπικό μέγιστο είτε τοπικό ελάχιστο.*

ΘΕΩΡΗΜΑ 78 (**Fermat**) *Αν η f ορίζεται στο (a, b) και έχει τοπικό ακρότατο στο x και η f είναι παραγωγίσιμη στο x, τότε $f'(x) = 0$.*

ΟΡΙΣΜΟΣ 79 ***Κρίσιμο σημείο*** *μιας συνάρτησης f λέμε έναν αριθμό x ο οποίος είναι τέτοιος ώστε $f'(x) = 0$. Ο αριθμός $f(x)$ λέγεται* ***κρίσιμη τιμή***.



Σχήμα 7: Στο σχήμα αυτό βλέπουμε τα τοπικά ακρότατα (μέγιστα ή ελάχιστα) μιας συνάρτησης. Διαπιστώνουμε ότι αυτά βρίσκονται είτε στα κλειστά άκρα του διαστήματος είτε στα σημεία στα οποία δεν υπάρχει παράγωγος είτε στα σημεία στα οποία η παράγωγος μηδενίζεται.

ΘΕΩΡΗΜΑ 80 (ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ Rolle) *Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b), και $f(a) = f(b)$, τότε υπάρχει ένας αριθμός $x \in (a, b)$ τ.ω. $f^{'}(x) = 0$.*

Μια σημαντική εφαρμογή του θεωρήματος του Rolle είναι το θεώρημα του Taylor.

ΘΕΩΡΗΜΑ 81 *Αν η συνάρτηση f έχει συνεχείς παραγώγους μέχρι τάξεως n στο διάστημα $[a, b]$ και η $f^{(n+1)}(x)$ υπάρχει στο ανοικτό (a, b) τότε για κάθε $x_0, x \in [a, b]$ υπάρχει ξ μεταξύ του x_0 και x τ.ω.*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{'}(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Λέμε ότι έχουμε το ανάπτυγμα Taylor της f γύρω από το σημείο x_0.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 82 *Έστω η $f(x) = e^x$. Είναι γνωστό ότι $f^{(n)}(x) = e^x$ όπου με $f^{(n)}(x)$ εννοούμε την νιοστή παράγωγο της συνάρτησης. Η συγκεκριμένη συνάρτηση ικανοποιεί τις προυποθέσεις του προηγούμενου θεωρήματος επομένως μπορούμε να επιλέξουμε $x_0 = 0$ και να γράψουμε*

$$\begin{aligned} e^x &= e^0 + \frac{e^0}{1!}x + \frac{e^0}{2!}x^2 + \frac{e^\xi}{3!}x^3 \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{e^\xi}{3!}x^3, \quad \xi \in (0, x) \end{aligned}$$

Για την συγκεκριμένη συνάρτηση, επειδή έχει παραγώγους όλων των τάξεων, μπορούμε να συνεχίσουμε το ανάπτυγμα μέχρι όποιον όρο θέλουμε. $\square$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 83 *Έστω η συνάρτηση*

$$f(x) = xe^x - (1+e^x)\ln(1+e^x), \quad x \in (0,+\infty)$$

Θα υπολογίσουμε το όριο της συνάρτησης καθώς $x \to \infty$ *χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα Taylor αφού υπολογίσουμε τις παραγώγους* f' *και* f'' *και αποδείξουμε ότι είναι αρνητικές για κάθε* $x \in (0,+\infty)$. *Η πρώτη παράγωγος είναι*

$$f'(x) = e^x\left(x - \ln(1+e^x)\right)$$

η οποία είναι αρνητική για κάθε $x \in (0,+\infty)$. *Η δεύτερη παράγωγος είναι*

$$f''(x) = e^x\left(x - \ln(1+e^x) + \frac{1}{1+e^x}\right)$$

η οποία είναι αρνητική για κάθε $x \in (0,+\infty)$.

Αναπτύσσουμε γύρω από την μονάδα την $f(x)$ *κατά* *σειρά Taylor και έχουμε*

$$f(x) = f(1) + f^{'}(1)\frac{(x-1)}{1!} + f^{''}(\xi)\frac{(x-1)^2}{2!}, \quad \xi \in (1, x)$$

Επειδή $f^{''}(\xi)\frac{(x-1)^2}{2!} \leq 0$ *για κάθε* $x > 1$ *και για κάθε* $\xi \in (1, +\infty)$ *προκύπτει ότι*

$$f(x) \leq f(1) + f^{'}(1)\frac{(x-1)}{1!}$$

Λαμβάνοντας το όριο της $f(x)$ *καθώς* $x \to +\infty$ *με βάση την παραπάνω ανισότητα προκύπτει ότι*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

παρατηρώντας ότι $f^{'}(1) \leq 0$. □

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 84 *Το αποτέλεσμα του προηγούμενου παραδείγματος ισχύει γενικότερα για κάθε συνάρτηση η οποία έχει αρνητική πρώτη και δεύτερη παράγωγο. Παρόμοια, αν μια συνάρτηση έχει θετική πρώτη και δεύτερη παράγωγο τότε το όριο καθώς* $x \to +\infty$ *θα είναι το* $+\infty$. □

ΘΕΩΡΗΜΑ 85 (ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ) *Αν η f είναι συνεχής στο $[a,b]$ και παραγωγίσιμη στο (a,b), τότε υπάρχει ένας αριθμός x στο (a,b) τ.ω. $f^{'}(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.*

ΠΟΡΙΣΜΑ 86 *Αν οι f, g είναι ορισμένες στο ίδιο διάστημα και*

$$f^{'}(x) = g^{'}(x)$$

για όλα τα x στο διάστημα αυτό, τότε υπάρχει κάποιος αριθμός c τ.ω. $f = g + c$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 87 *Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα στο διάστημα I όταν $f(a) < f(b)$ αν $a < b$ με $a, b \in I$. Αν αντιστρέψουμε την πρώτη ανισότητα, λέγεται γνησίως φθίνουσα.*

ΠΟΡΙΣΜΑ 88 *Αν $f^{'}(x) > 0$ για κάθε $x \in I$ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο I ενώ αν $f^{'} < 0$ τότε είναι γνησίως φθίνουσα.*

ΘΕΩΡΗΜΑ 89 *Έστω ότι $f^{'}(a) = 0$. Αν $f^{''}(a) > 0$ τότε η f έχει τοπικό ελάχιστο στο a ενώ αν $f^{''}(a) < 0$ τότε η f έχει τοπικό μέγιστο στο a. Αν $f^{''}(a) = 0$ δεν έχουμε κάποιο συμπέρασμα.*

ΑΣΚΗΣΗ 90 *Εξετάστε τις συναρτήσεις $f(x) = x^3$ και $g(x) = x^4$ ως προς τα τοπικά ακρότατα. (**Υπόδειξη**: Αν από το κριτήριο της δεύτερης παραγώγου δεν βγαίνει συμπέρασμα εξετάστε τις συναρτήσεις με τον ορισμό του τοπικού ακροτάτου).*

ΑΣΚΗΣΗ 91 *Έστω $x \in [0, 1]$ και $a \in [0, 1]$. Αποδείξτε ότι*

$$(1 + x \cdot a) \geq (1 + a)^x$$

ΛΥΣΗ. Αν $a = 0$ τότε είναι προφανές. Στην συνέχεια θα υποθέσουμε ότι $a \in (0, 1]$. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = 1 + xa - (1 + a)^x$ της οποίας η πρώτη παράγωγος είναι ίση με $f^{'}(x) = a - (1 + a)^x \ln(1 + a)$. Η πρώτη παράγωγος μηδενίζεται στο σημείο

$$x^* = \frac{\ln a - \ln \ln(1 + a)}{\ln(1 + a)}$$

το οποίο είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο και μάλιστα ισχύει $x^* \in [0, 1]$. Αυτό μπορεί να αποδειχθεί θεωρώντας τις συναρτήσεις

$$\begin{aligned} g(x) &= \ln x - \ln\ln(1+x) \\ h(x) &= (1+x)\ln(1+x) - x \end{aligned}$$

και αποδεικνύοντας ότι $g(x), h(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (0,1]$. Η δεύτερη παράγωγος είναι $f^{''}(x) = -(1+a)^x \ln^2(1+a)$ η οποία είναι πάντοτε αρνητική όταν $a \in (0,1]$ επομένως η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο σημείο x^*. Επειδή $f(0) = f(1) = 0$ τότε αναγκαστικά $f(x^*) \geq f(0) = 0$. Αφού η f δεν έχει τοπικό ελάχιστο (μιας και το μοναδικό κρίσιμο σημείο είναι το x^*) στο $(0,1)$ προκύπτει ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [0,1]$. Πράγματι, αν υπήρχε κάποιο σημείο $\xi \in (0, x^*)$ τ.ω. $f(\xi) < 0$ τότε θα υπήρχε και κάποιο $u \in (\xi, x^*]$ τ.ω. $f(u) = 0$. Επομένως στο διάστημα $(0, u)$ θα υπήρχε κάποιο $v \neq x^*$ τ.ω. $f^{'}(v) = 0$. Ατοπο, διότι το x^* είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο. Παρόμοια, αν υπήρχε $\xi \in (x^*, 1)$ τ.ω. $f(\xi) < 0$. $\square$

ΘΕΩΡΗΜΑ 92 *Αν για τις f, g έχουμε ότι*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

και υπάρχουν οι παράγωγοι $f^{'}(a)$ *και* $g^{'}(a)$ *με* $g^{'}(a) \neq 0$ *τότε*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{'}(a)}{g^{'}(a)}$$

Αποδειξη. Λόγω συνέχειας των f, g στο σημείο a προκύπτει ότι $f(a) = g(a) = 0$ και επομένως

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \frac{f^{'}(a)}{g^{'}(a)}$$

$\square$

Θεωρημα 93 (**Κανονας του** L'Hospital) *Δίνονται οι συναρτήσεις* f, g *οι οποίες είναι παραγωγίσιμες στο διάστημα* (a, b) *με* $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ *και* $g^{'}(x) \neq 0$ *για κάθε* $x \in (a, b)$. *Αν*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = 0$$

τότε

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)}$$

όταν το όριο του δεξιού μέλους υπάρχει (είτε πεπερασμένο είτε άπειρο). Στην περίπτωση που το όριο στο δεξί μέλος δεν υπάρχει τότε δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι δεν υπάρχει και το όριο στο αριστερό μέλος.

ΘΕΩΡΗΜΑ 94 (ΚΑΝΟΝΑΣ ΤΟΥ L'Hospital) *Έστω οι συναρτήσεις f, g οι οποίες είναι παραγωγίσιμες στο (a, b) με $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ και $g^{'}(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, b)$. Αν $\lim\limits_{x \to a^+} g(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ (ή $-\infty$) τότε*

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)}$$

όταν το όριο του δεξιού μέλους υπάρχει (είτε πεπερασμένο είτε άπειρο). Στην περίπτωση που το όριο στο δεξί μέλος δεν υπάρχει τότε δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι δεν υπάρχει και το όριο στο αριστερό μέλος.

ΘΕΩΡΗΜΑ 95 (Προσέγγιση Σταθερού Σημείου) *Έστω η ακολουθία* $x_{n+1} = \phi(x_n)$ *για* $n \geq 0$ *και* x_0 *δοσμένο. Έστω ότι*

(i) $\phi : [a, b] \to I \subseteq [a, b]$

(ii) $\phi \in C^1([a, b])$, *δηλαδή είναι παραγωγίσιμη στο* $[a, b]$ *και η παράγωγος της είναι συνεχής στο* $[a, b]$.

(iii) *Υπάρχει* $K < 1$ *τέτοιο ώστε* $|\phi^{'}(x)| \leq K$ *για κάθε* $x \in [a, b]$.

Τότε η συνάρτηση ϕ *έχει μοναδικό σταθερό σημείο* $\xi \in [a, b]$ *(δηλαδή* $\xi = \phi(\xi)$*) και η ακολουθία* x_n *συγκλίνει στο* ξ *για κάθε αρχική τιμή* $x_0 \in [a, b]$. *Επιπλέον,*

$$\lim_{k \to \infty} \frac{x_{k+1} - \xi}{x_k - \xi} = \phi^{'}(\xi)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 96 *Είχαμε αποδείξει στην άσκηση 65 ότι η συνάρτηση* $\phi(x) = 2^{-x} : [0,1] \to [0,1]$ *έχει σταθερό σημείο. Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα η ακολουθία αριθμών* $x_{n+1} = \phi(x_n)$ *θα συγκλίνει σε αυτό το σημείο. Πράγματι, μετά από μερικές επαναλήψεις προκύπτει ότι* $x^* \simeq 0.6411770746$. *Ως επαλήθευση μπορούμε να υπολογίσουμε την ποσότητα* $2^{-0.6411770746} - 0.6411770746 = 0.0000125231$. *Συνεχίζοντας τις επαναλήψεις βελτιώνουμε την ακρίβεια των υπολογισμών μας.* $\square$

Μέθοδος του Νεύτωνα

Μια εφαρμογή του αναπτύγματος Taylor μιας συνάρτησης και του θεωρήματος προσέγγισης σταθερού σημείου είναι η μέθοδος του Νεύτωνα για τον υπολογισμό ρίζας μιας συνάρτησης.

Έστω η συνάρτηση f η οποία έχει μια ρίζα, την x^*. Έστω ότι μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα 238 στην f τότε έχουμε

$$0 = f(x^*) = f(x_n) + (x^* - x_n)f^{'}(x_n) + \frac{1}{2}(x^* - x_n)^2 f^{''}(\xi),\ \xi \in (x_n, x^*)$$

για κάποιο σημείο x_n. Επειδή δεν γνωρίζουμε αν το x_n είναι μικρότερο ή όχι του x^* όταν γράφουμε $\xi \in (x_n, x^*)$ εννοούμε ότι το ξ είναι μεταξύ του x_n και του x^*. Αρα

$$x^* = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{1}{2}(x^* - x_n)^2 \frac{f^{''}(\xi)}{f'(x_n)}$$

Επειδή το σημείο ξ δεν είναι γνωστό δεν μπορούμε να υπολογίσουμε με ακρίβεια το x^*. Αν υποθέσουμε όμως ότι το x_n είναι πολύ κοντά στο x^* τότε ο όρος $\frac{1}{2}(x^* - x_n)^2 \frac{f^{''}(\xi)}{f^{'}(x_n)}$ θα είναι πολύ μικρός οπότε παραλείποντας τον μπορούμε να πούμε ότι η ποσότητα

$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ θα είναι ακόμη πιο κοντά στην ρίζα της f. Με αυτό το σκεπτικό κατασκευάσαμε μια ακολουθία σημείων, την x_n, η οποία κάτω από προϋποθέσεις συγκλίνει πράγματι στην ρίζα της f. Τις απαιτούμενες προϋποθέσεις καθώς και την απόδειξη της σύγκλισης θα την δούμε στο επόμενο θεώρημα.

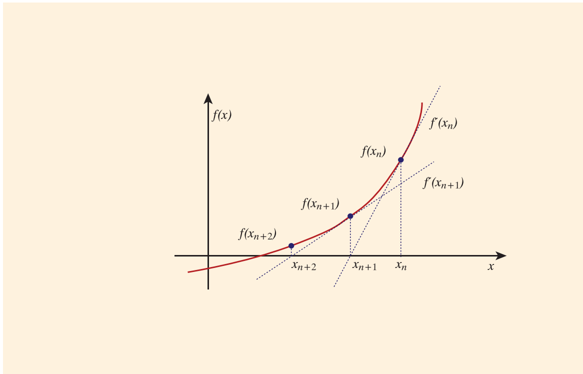
ΘΕΩΡΗΜΑ 97 (Μέθοδος του Νεύτωνα) *Έστω x^* απλή ρίζα της συνάρτησης f, δηλαδή $f(x^*) = 0$ και $f^{'}(x^*) \neq 0$. Υποθέτουμε ότι η f είναι δυο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα που περιέχει το x^*. Τότε υπάρχει ένα κλειστό διάστημα I που περιέχει το x^* τέτοιο ώστε για κάθε $x_0 \in I$ η ακολουθία x_n που ορίζεται ως εξής,*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad \textbf{(Μέθοδος του Νεύτωνα)}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots \tag{4}$$

να συγκλίνει στο x^*. Επιπλέον,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^2} = \frac{f^{''}(x^*)}{2f'(x^*)}$$

Όπως παρατηρούμε, για να έχει αποτέλεσμα η μέθοδος του Νεύτωνα θα πρέπει να επιλέξουμε την αρχική τιμή της ακολουθίας κοντά στο x^*. Για τον λόγο αυτό συχνά εφαρμόζουμε την μέθοδο της διχοτόμησης για μερικά βήματα έτσι ώστε να μας δώσει μια καλή αρχι-



Σχήμα 8

κή τιμή για να την χρησιμοποιήσουμε στην μέθοδο του Νεύτωνα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 98 *Θα υπολογίσουμε την ρίζα της συνάρτησης $f(x) = x^3 - 2x - 5$ στο διάστημα $[2, 3]$ χρησιμοποιώντας τις παραπάνω τεχνικές. Όπως έχουμε διαπιστώσει, η μέθοδος του Νεύτωνα είναι ταχύτερη από την μέθοδο της διχοτόμησης αρκεί η αρχική τιμή να είναι αρκετά κοντά στην ζητούμενη ρίζα. Για τον λόγο αυτό συνήθως εφαρμόζουμε την μέθοδο της διχοτόμησης για μερικά βήματα έτσι ώστε να πάρουμε μια προσέγγιση η οποία στην συνέχεια θα χρησιμοποιηθεί ως αρχική τιμή στην μέθοδο του Νεύτωνα.*

Έχουμε ότι $f(2) = -1$ και $f(3) = 16$ συνεπώς $a_1 = 2$ και $b_1 = 16$. Θέτουμε $x_1 = \frac{2+3}{2} = 2.5$ και υπολογίζουμε το $f(2.5) = 5.625$. Αρα η ρίζα βρίσκεται στο διάστημα $[2, 2.5]$. Στην συνέχεια θέτουμε $x_2 = \frac{2+2.5}{2} = 2.25$ και υπολογίζουμε το $f(2.25) = 0.21$ και επομένως η ρίζα βρίσκεται στο διάστημα $[2, 2.25]$. Θέτουμε $x_3 = \frac{2+2.25}{2} = 2.125$ και χρησιμοποιούμε αυτό τον αριθμό ως αρχική τιμή στην μέθοδο του Νεύτωνα έτσι ώστε να φτάσουμε γρηγορότερα σε μια καλή προσέγγιση της ρίζας.

Η μέθοδος του Νεύτωνα στην προκειμένη περίπτω-

ση είναι η κατασκευή της ακολουθίας αριθμών

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots, \quad x_0 = 2.125$$

Έτσι προκύπτει ότι $x_1 = 2.106805099$, $x_2 = 2.099557030$, $x_3 = 2.096608257$, $x_4 = 2.095398617$ *και* $x_5 = 2.094900735$. *Διαπιστώνουμε ότι έχουν σταθεροποιηθεί τα δυο πρώτα δεκαδικά ψηφία. Μπορούμε να συνεχίσουμε τις επαναλήψεις για να έχουμε ακόμη μεγαλύτερη ακρίβεια.*

$\square$

Παραδείγματα

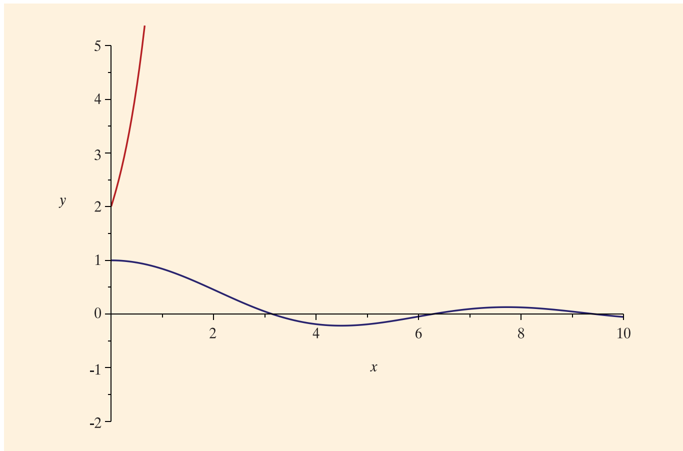
• Αν και οι ορισμοί καθώς και οι ιδιότητες των συναρτήσεων $a^x, \sin x, \ln x$ θα δοθούν παρακάτω μπορούμε σε αυτό το σημείο να τις χρησιμοποιήσουμε ως παραδείγματα. Έτσι τα παρακάτω όρια επιβεβαιώνονται και με τον κανόνα L'Hospital,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} = 1,\\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\ln(1+x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}}{1/(1+x)} = 2\end{aligned}$$

Το πρώτο όριο θα αποδειχθεί παρακάτω με μια γεωμετρική απόδειξη και θα χρησιμοποιηθεί για να υπολογισθεί η παράγωγος της $\sin x$. Εδώ θεωρούμε προς στιγμή ότι αυτά είναι δεδομένα και απλά επιβεβαιώνουμε το αποτέλεσμα με την χρήση του κανόνα L'Hospital.

• Επίσης, αν θέλουμε να υπολογίσουμε το παρακάτω όριο

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$$



Σχήμα 9: Με κόκκινη γραμμή η συνάρτηση $\frac{e^{2x}-1}{\ln(1+x)}$ και με μπλε γραμμή η συνάρτηση $\frac{\sin x}{x}$.

διαπιστώνουμε ότι και οι δυο όροι συγκλίνουν στο $+\infty$ επομένως δεν μπορούμε να βγάλουμε συμπέρασμα. Γράφοντας διαφορετικά την παράσταση, δηλαδή

$$\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) = \frac{x - \sin x}{x \sin x}$$

και εφαρμόζοντας τον κανόνα L'Hospital προκύπτει ότι το ζητούμενο όριο είναι ίσο με μηδέν.

• Αν θέλουμε να υπολογίσουμε το όριο

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$$

θα διαπιστώσουμε ότι είναι απροσδιόριστη μορφή. Θέτουμε

$$f(x) = \ln(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \frac{\ln\cos x}{x^2}$$

και θα υπολογίσουμε το

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2x\cos x} = -\frac{1}{2}$$

Αρα

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}}$$

• Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το επόμενο όριο χρησιμοποιώντας τον κανόνα L'Hospital

$$\lim_{x\to 0}\frac{1/x}{1/x+\sin\frac{1}{x}}$$

Αν υπολογίσουμε το κλάσμα των παραγώγων θα διαπιστώσουμε ότι δεν έχει όριο καθώς $x \to 0$ όμως το όριο του αρχικού κλάσματος υπάρχει και είναι το 1.

• Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f τέτοια ώστε $f^{'}(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, b)$. Θα αποδείξουμε ότι μηδενίζεται το πολύ μια φορά στο διάστημα (a, b). Πράγματι, έστω ότι μηδενίζεται δυο φορές, δηλαδή υπάρχουν u, v με $u < v$ τέτοια ώστε $f(u) = f(v) = 0$. Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα του Rolle και επομένως θα υπάρχει κάποιο $c \in (u, v)$ τέτοιο ώστε $f^{'}(c) = 0$. Αυτό όμως είναι άτοπο με την αρχική υπόθεση.

Ως παράδειγμα ας δούμε την συνάρτηση $f(x) = 5x^3 - 2x^2 + 3x - 4$. Θα αποδείξουμε ότι μηδενίζεται σε κάποιο σημείο του διαστήματος $(0, 1)$ και αυτό το σημείο είναι η μοναδική ρίζα του πολυωνύμου. Πράγματι, έχουμε ότι $f(0) = -4 < 0$ και $f(1) = 2 > 0$. Επομένως, εφαρμόζοντας το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής έχουμε ότι υπάρχει κάποιο $x \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f(x) = 0$. Επιπλέον, υπολογίζοντας την παράγωγο της f διαπιστώνουμε εύκολα ότι δεν μηδενίζεται πουθενά και ότι η f είναι παντού αύξουσα. Αυτό σημαίνει ότι μηδενίζεται μονάχα μια φορά σε ένα σημείο $x \in (0, 1)$.

• Έστω ότι $f(x)$ και $g(x)$ είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε $f(a) \geq g(a)$ και $f^{'}(x) > g^{'}(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Θα αποδείξουμε ότι $f(x) > g(x)$ για κάθε $x > a$. Πράγματι, ορίζουμε την συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και μάλιστα $h(a) \geq 0$ και $h^{'}(x) > 0$ για κάθε x. Συνεπώς είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση και επομένως $h(x) > 0$ για κάθε $x > a$ το οποίο είναι ακριβώς αυτό που θέλαμε.

• Έστω η συνάρτηση $g(x) = 8x^3 - 6x^2 - 2x + 1$. Θα αποδείξουμε ότι μηδενίζεται σε κάποιο σημείο μεταξύ του 0 και 1. Επειδή $g(0) = 1$ και $g(1) = 1$ το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής δεν μας βοηθά. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = 2x^4 - 2x^3 - x^2 + x$ η οποία είναι τέτοια ώστε $f^{'}(x) = g(x)$. Επειδή $f(0) = f(1) = 0$ μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα του Rolle στην $f(x)$ και στο διάστημα $[0, 1]$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει κάποιο $c \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f^{'}(c) = g(c) = 0$.

• Θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^3 + px + q$ έχει ακριβώς μια πραγματική ρίζα όταν $p > 0$. Πράγματι, $f^{'}(x) = 3x^2 + p > 0$ επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα. Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση μηδενίζεται το πολύ μια φορά. Επειδή $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ και

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$ υπάρχουν αριθμοί u, v τέτοιοι ώστε $f(u) > 0$ και $f(v) < 0$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής έχουμε ότι η f μηδενίζεται σε κάποιο σημείο μεταξύ των u και v.

• Θα αποδείξουμε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και τέτοια ώστε $\lim_{x\to\infty} f^{'}(x) = 0$ τότε $\lim_{x\to\infty}(f(x+1) - f(x)) = 0$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα μέσης τιμής έχουμε ότι υπάρχει $c \in (x, x+1)$ τέτοιο ώστε $f(x+1) - f(x) = f^{'}(c)$. Αυτό σημαίνει ότι $c \to \infty$ καθώς $x \to \infty$ και επομένως $f^{'}(c)$ τείνει στο 0 καθώς $c \to \infty$. Από αυτό βγάζουμε το απαιτούμενο συμπέρασμα.

• Θα υπολογίσουμε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 - 4x + 3$ στο διάστημα $[0, 4]$. Υπολογίζουμε την παράγωγο η οποία είναι $f^{'}(x) = 4x^3 - 6x^2 - 2x - 4 = 2(2x^3 - 3x^2 - x - 2)$. Αν η ποσότητα $2x^3 - 3x^2 - x - 2$ έχει ακέραιη ρίζα αυτή θα διαιρεί τον σταθερό όρο, δηλαδή τον αριθμό 2. Βλέπουμε εύκολα ότι το 2 μηδενίζει την ποσότητα αυτή. Διαιρούμε το πολυώνυμο $2x^3 - 3x^2 - x - 2$ με το $x - 2$ και παίρνουμε την ποσότητα $2x^2 + x + 1$ η οποία δεν μηδενίζεται πουθενά. Επομένως, το μοναδικό κρίσιμο σημείο είναι το $x = 2$. Αρα τα μέγιστα και ελάχιστα στο διάστημα $[0,4]$ θα βρίσκονται μεταξύ των σημείων $0,2,4$ (δηλαδή είτε στα άκρα του διαστήματος είτε στο κρίσιμο σημείο). Βλέπουμε ότι η μέγιστη τιμή επιτυγχάνεται στο $x=4$ και η ελάχιστη στο $x=2$.

• Πως θα υπολογίσουμε το $\sin\frac{1}{2}$ με ακρίβεια δυο δεκαδικών ψηφίων. Θα αναπτύξουμε την $\sin x$ γύρω από το 0 και έχουμε

$$\begin{aligned}
\sin x &= \sin 0 + \frac{\cos 0}{1!}x + \frac{-\sin 0}{2!}x^2 + \frac{-\cos 0}{3!}x^3 + \cdots + \frac{\sin^{(n)}(\xi)}{n!}x^n, \quad \xi \in (0,x) \\
&= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{\sin^{(n)}(\xi)}{n!}x^n, \quad \xi \in (0,x)
\end{aligned}$$

Εφόσον θέλω να υπολογίσω συγκεκριμένα το $\sin\frac{1}{2}$ τότε

$$\sin\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{(\frac{1}{2})^3}{3!} + \frac{(\frac{1}{2})^5}{5!} + \cdots + \frac{\sin^{(n)}(\xi)}{n!}(\frac{1}{2})^n, \quad \xi \in (0,\frac{1}{2})$$

ή αλλιώς

$$|\sin\frac{1}{2} - (\frac{1}{2} - \frac{(\frac{1}{2})^3}{3!} + \frac{(\frac{1}{2})^5}{5!} + \cdots)| \leq |\frac{\sin^{(n)}(\xi)}{n!}(\frac{1}{2})^n|, \quad \xi \in (0,\frac{1}{2})$$

Επομένως θα αναπτύξω μέχρι τον όρο εκείνο έτσι ώστε το υπόλοιπο $|\frac{\sin^{(n)}(\xi)}{n!}(\frac{1}{2})^n|$ να είναι μικρότερο του 10^{-2}.

Όμως

$$|\frac{\sin^{(n)}(\xi)}{n!}(\frac{1}{2})^n| \leq \frac{1}{2^n n!}$$

Πρέπει να υπολογίσω το κατάλληλο $n \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $\frac{1}{2^n n!} \leq \frac{1}{100}$ ή αλλιώς $2^n n! \geq 100$. Δοκιμάζοντας διαπιστώνουμε ότι αρκεί να προσθέσω τους τρεις πρώτους όρους της σειράς Taylor. Επομένως

$$\sin\frac{1}{2} \backsimeq \frac{1}{2} - \frac{(\frac{1}{2})^3}{3!} \backsimeq 0.48$$

Υπολογίζοντας το $\sin\frac{1}{2}$ σε ένα υπολογιστή θα βρούμε ακριβώς αυτό το αποτέλεσμα.

• Έστω μια συνάρτηση f συνεχώς παραγωγίσιμη στο $[a, b]$. Διαλέγοντας $x_0 = a$ και $x = b$ μπορώ να εφαρμόσω το θεώρημα Taylor και θα έχω

$$f(b) = f(a) + f^{'}(\xi)(b-a), \quad \xi \in (a, b)$$

ή αλλιώς

$$f^{'}(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}, \quad \xi \in (a, b)$$

Δηλαδή το θεώρημα μέσης τιμής προκύπτει από το θεώρημα Taylor ή αλλιώς το θεώρημα Taylor είναι μια γενίκευση του θεωρήματος μέσης τιμής. Είναι σωστό να ισχυριστούμε ότι αποδείξαμε το θεώρημα μέσης τιμής χρησιμοποιώντας το θεώρημα Taylor; Μελετήστε την απόδειξη του και απαντήστε στο ερώτημα αυτό. $\square$

Αντίστροφες Συναρτήσεις

ΟΡΙΣΜΟΣ 99 *Μια συνάρτηση f λέγεται $1-1$ αν $f(a) \neq f(b)$ όταν $a \neq b$.*

ΟΡΙΣΜΟΣ 100 *Για κάθε συνάρτηση f η αντίστροφή της συμβολίζεται με f^{-1} και είναι το σύνολο των ζευγών (a, b) για τα οποία το ζεύγος (b, a) ανήκει στο γράφημα της f.*

ΘΕΩΡΗΜΑ 101 *Η f^{-1} είναι συνάρτηση* **ανν** *η f είναι $1-1$.*

ΘΕΩΡΗΜΑ 102 *Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της τότε είναι και 1-1 εκεί. Η αντίστροφή της f^{-1} είναι επίσης γνησίως μονότονη με το ίδιο είδος μονοτονίας. Επίσης, αν η f είναι 1-1 και συνεχής στο $I = [a, b]$ τότε η f είναι γνησίως μονότονη και η f^{-1} είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.*

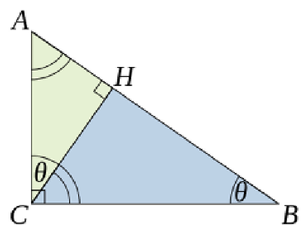
ΘΕΩΡΗΜΑ 103 *Έστω f μια συνεχής και $1 - 1$ συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα I και έστω ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $f^{-1}(b)$ με παράγωγο $f'(f^{-1}(b)) \neq 0$. Τότε η f^{-1} έχει παράγωγο στο b και $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$.*

Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

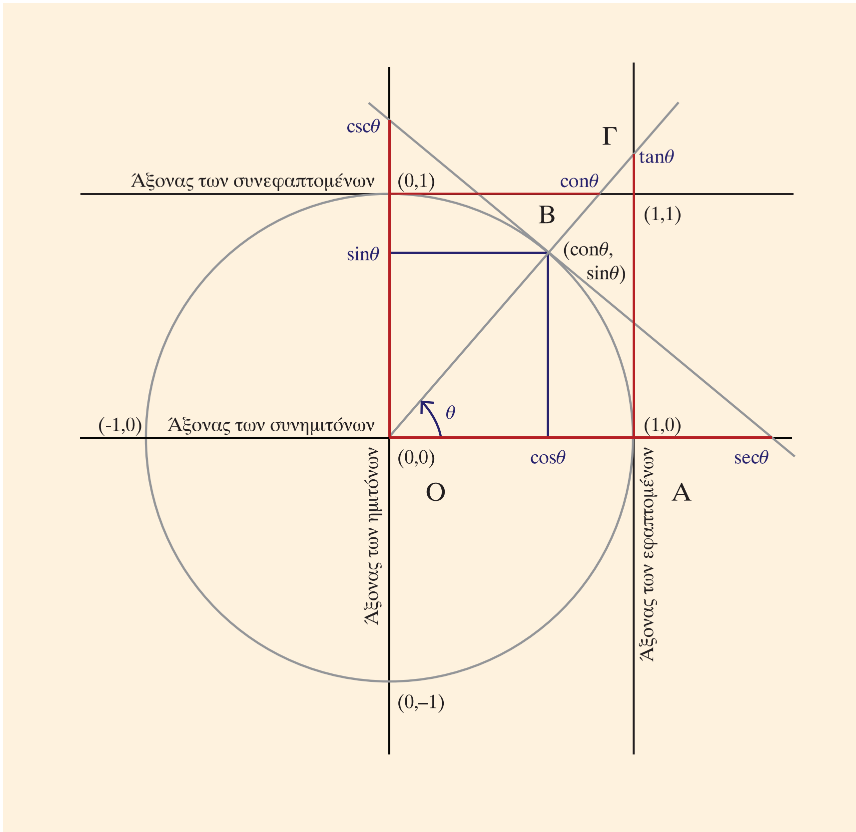
Θα ξεκινήσουμε με την διατύπωση και απόδειξη του Πυθαγόρειου θεωρήματος.

ΘΕΩΡΗΜΑ 104 (Πυθαγόρειο Θεώρημα) *Έστω ένα ορθογώνιο τρίγωνο ABC όπου η ορθή γωνία βρίσκεται στο C. Τότε ισχύει ότι*

$$(AC)^2 + (CB)^2 = (AB)^2$$



Σχήμα 10



Σχήμα 11: Τριγωνομετρικος Κυκλος

Όπως βλέπουμε στο σχήμα 11 η συνάρτηση $\sin\theta$ ορίζεται ως η απόσταση του σημείου τομής της ακτίνας του μοναδιαίου κύκλου και γωνίας θ από τον άξονα των x. Ως όρισμα μπορούμε να δώσουμε και το μήκος του αντίστοιχου τόξου. Αντίστοιχα και ο ορισμός του $\cos\theta$. Από το σχήμα διαπιστώνουμε ότι το $\tan\theta$ είναι ίσο με $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ χρησιμοποιώντας τα αντίστοιχα όμοια τρίγωνα. Θα αποδείξουμε, χρησιμοποιώντας το παρακάτω γεωμετρικό σχήμα, ότι η $\sin x$ (όπου x το μήκος του αντίστοιχου τόξου) είναι συνεχής συνάρτηση ως προς x. Από το σχήμα προκύπτει εύκολα ότι $\sin x \leq x$ όπου x είναι το μήκος του αντίστοιχου τόξου διότι $\sin x$ είναι η απόσταση του σημείου τομής της ακτίνας τόξου x με τον τριγωνομετρικό κύκλο από την ευθεία των x ενώ το μήκος του τόξου x ενώνει το ίδιο σημείο με την ίδια ευθεία αλλά όχι με την κοντινότερη διαδρομή. Με την ίδια λογική θεωρούμε δυο τόξα με μήκη $x > y$ και το τόξο της διαφοράς $x - y$. Έπειτα, θεωρούμε την διαφορά $\sin x - \sin y$ όπου είναι η απόσταση του σημείου τομής της ακτίνας τόξου με μήκος x με τον τριγωνομετρικό κύκλο από την παράλληλη ευθεία που περνά από το αντίστοιχο σημείο τομής της ακτίνας με μήκος τόξου y με τον τριγωνομετρικό κύκλο. Είναι προφανές ότι αυτή η απόσταση είναι μικρότερη από το μήκος $x - y$, δηλαδή ισχύει τελικά

$$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|, \quad \text{για κάθε } x, y \in (0, \pi/2)$$

Η συνέχεια της $\sin x$ στο διάστημα $(0, \frac{\pi}{2})$ είναι προφανής χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση (`Lipschitz συνεχής`).
Για $x \in (0, \pi/2)$ από την σχέση $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ (**Πυθαγόρειο θεώρημα**) προκύπτει ότι και η $\cos x$ είναι συνεχής στο διάστημα αυτό. Στα άκρα του διαστήματος θα εργαστούμε ξεχωριστά. Για $x = \pi/2$ και για $y = \pi/2 - h$ για h κοντά στο μηδέν έχουμε ότι

$$0 \leq \sin\frac{\pi}{2} - \sin y \leq \pi/2 - y$$

Λαμβάνοντας το όριο καθώς $h \to 0$ προκύπτει η συνέχεια της $\sin x$ στο $x = \pi/2$ από τα αριστερά. Αν $y = \pi/2 + h$ τότε λαμβάνοντας το όριο καθώς $h \to 0$ στην ισότητα $\sin y = \sin(\pi - y)$ έχουμε την συνέχεια της $\sin x$ στο $x = \pi/2$ και από τα δεξιά. Παρομοίως εργαζόμαστε για την περίπτωση $x = 0$ χρησιμοποιώντας την σχέση $\sin(-h) = -\sin h$ όπου $h > 0$ αριθμός κοντά στο μηδέν. Για το $\cos x$ στα άκρα του διαστήματος θα υποθέσουμε ότι $y \to \pi/2$ και θα υπολογίσουμε το όριο $\lim\limits_{y \to \frac{\pi}{2}} \cos y$. Αν το $y < \pi/2$ τότε $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$ επομένως $\cos y \to 0$. Αν το $y > \pi/2$ τότε χρησιμοποιούμε την σχέση $\cos y = -\cos(\pi - y)$ οπότε

$$\lim_{y \to \pi/2} \cos y = -\lim_{y \to \pi/2} \cos(\pi - y) = -\lim_{y \to \pi/2} \sqrt{1 - \sin^2(\pi - y)} = 0$$

Για το άκρο $x = 0$ χρησιμοποιούμε την σχέση $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$ η οποία ισχύει για $y \in [-\pi/2, \pi/2]$ και υπολογίζουμε το όριο $\lim\limits_{y \to 0} \cos y = 1$.

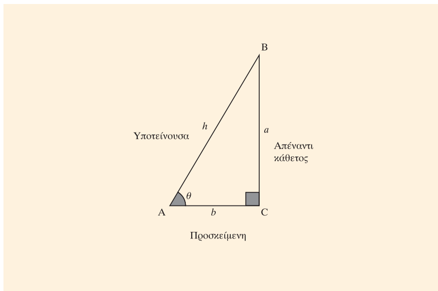
Οι συναρτήσεις sin και cos μπορούν να ορισθούν και σε ένα οποιοδήποτε όμοιο ορθογώνιο τρίγωνο με το ορθογώνιο τρίγωνο του τριγωνομετρικού κύκλου. Βλέπουμε ότι στον τριγωνομετρικό κύκλο (σχήμα 11) ότι το $\cos \theta$ είναι ίσο με την προσκείμενη (στην γωνία θ) κάθετο δια την υποτείνουσα η οποία ισούται με την μονάδα. Αντίστοιχα, το $\sin \theta$ είναι ίσο με την απέναντι κάθετο (απέναντι από την γωνία θ) δια την υποτείνουσα. Κοιτώντας ένα όμοιο τρίγωνο 12α′ (αφού οι γωνίες του είναι ίσες) διαπιστώνουμε ότι ο λόγος της προσκείμενης δια της υποτείνουσας θα πρέπει να ισούται με το $\cos\theta$ όπως το ορίσαμε πριν. Παρόμοια, ο λόγος της απέναντι καθέτου δια την υποτείνουσα θα ισούται με το $\sin\theta$. Δηλαδή,

$$\cos\theta = \frac{b}{h} \quad \text{και} \quad \sin\theta = \frac{a}{h}$$

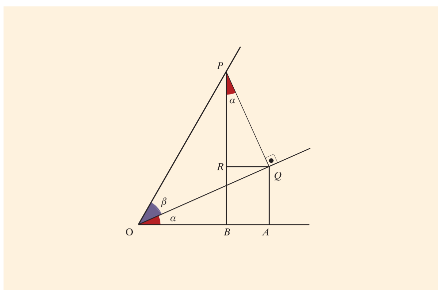
Το $\tan\theta$ ορίζεται ως $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{a}{b}$. Θα αποδείξουμε στην συνέχεια μερικές βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες κοιτώντας το σχήμα 12β′. Σημειώστε ότι το μήκος του OP είναι ίσο με την μονάδα. Επομένως, το μήκος του PQ είναι ίσο με το $\sin\beta$ ενώ το μήκος του OQ είναι ίσο με το $\cos\beta$. Επίσης, $\frac{AQ}{OQ} = \sin\alpha$ επομένως $AQ = \sin\alpha\cos\beta$. Παρόμοια, $PR = \cos\alpha\sin\beta$. Όμως $\sin(\alpha+\beta) = PB = PR + RB = AQ + PR = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$. Παρόμοια, $\cos(\alpha+\beta) = OB = OA - BA = OA - RQ = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$. Εύκολα προκύπτουν οι ταυτότητες $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$ και $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$. Επίσης, χρησιμοποιώντας τα παραπάνω μπορούμε να αποδείξουμε τις επόμενες ταυτότητες,

$$\begin{aligned}
\sin\theta \pm \sin\phi &= 2\sin\left(\frac{\theta\pm\phi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta\mp\phi}{2}\right)\\
\cos\theta + \cos\phi &= 2\cos\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)\\
\cos\theta - \cos\phi &= -2\sin\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)
\end{aligned}$$

(α′)



(β′)



Σχήμα 12

Στην συνέχεια θα αποδείξουμε το εξής όριο

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Η απόδειξη είναι πάλι γεωμετρική κοιτώντας το σχήμα 11. Θεωρούμε ένα τόξο μήκους x και την αντίστοιχη τιμή $\sin x$. Ας συμβολίσουμε με $\mathbf{O}$ το σημείο $(0, 0)$, με $\mathbf{A}$ το σημείο $(1, 0)$, με $\mathbf{B}$ το σημείο τομής της αντίστοιχης ακτίνας με τον τριγωνομετρικό κύκλο και τέλος με $\mathbf{\Gamma}$ το σημείο τομής της προέκτασης της ακτίνας με την ευθεία των $\tan x$. Σχηματίζονται με αυτό τον τρόπο τρία εμβαδά, του τριγώνου $\mathbf{OAB}$, του τριγώνου $\mathbf{OA\Gamma}$ και του κυκλικού τομέα $\mathbf{OAB}$. Είναι προφανές ότι

$$\frac{1}{2}\sin x \leq \frac{x}{2} \leq \frac{1}{2}\tan x$$

όπου $\frac{1}{2}\sin x$ είναι το εμβαδόν του τριγώνου $\mathbf{OAB}$, $\frac{x}{2}$ είναι το εμβαδόν του κυκλικού τομέα (θυμηθείτε ότι το εμβαδόν του μοναδιαίου κύκλου, που έχει μήκος περιφέρειας 2π, είναι π και άρα το εμβαδόν του κυκλικού τομέα με μήκος τόξου x θα είναι $x/2$) και τέλος όπου $\frac{1}{2}\tan x$ είναι το εμβαδόν του τριγώνου $\mathbf{OA\Gamma}$.

Από την παραπάνω ανισότητα και παίρνοντας το όριο $x \to 0$ κατά μέλη προκύπτει ότι

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

Τώρα θα αποδείξουμε ότι $\sin' x = \cos x$ και $\cos' x = -\sin x$ για $x \in [0, \pi/2]$. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό, κατάλληλη τριγωνομετρική ταυτότητα αλλά και την συνέχεια της $\sin x$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{-2\sin\frac{h}{2}\sin(x+h/2)}{h}\\
&= -\sin x\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\\
&= -\sin x
\end{aligned}$$

Εντελώς παρόμοια έχουμε για το sin,

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{2\sin\frac{h}{2}\cos\frac{2x+h}{2}}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\lim_{h\to 0}\cos\frac{2x+h}{2}\\
&= \cos x
\end{aligned}$$

Για $x\in\mathbb{R}$ οι παραπάνω παράγωγοι ισχύουν λόγω συμμετρίας και περιοδικότητας. Για παράδειγμα, όταν $x\in[\pi/2,\pi]$ τότε $\sin x=\sin(\pi-x)$ όπου $(\pi-x)\in[0,\pi/2]$ επομένως

$$\sin' x=\sin'(\pi-x)=-\cos(\pi-x)=\cos x$$

Παρομοίως και για τις περιπτώσεις $x\in[\pi,\frac{3}{2}\pi]$ και $x\in[\frac{3}{2}\pi,2\pi]$. Επομένως, οι συναρτήσεις $\sin x$ και $\cos x$

είναι παραγωγίσιμες για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και άρα συνεχείς σε όλο το $\mathbb{R}$ αφού οι συναρτήσεις $\sin x$ και $\cos x$ είναι περιοδικές με περίοδο 2π, δηλαδή $\sin(x+2k\pi) = \sin x$ και $\cos(x+2k\pi) = \cos x$ για κάθε $k = 0, 1, \cdots$.

Στο επόμενο θεώρημα χρησιμοποιώντας το θεώρημα 103 υπολογίζουμε τις αντίστροφες των τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

ΘΕΩΡΗΜΑ 105 *Αν* $-1 < x < 1$ *τότε*

- $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ξεκινάμε με την arcsin. Έχουμε

$$\arcsin'(x) = (\sin^{-1}(x))' = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}$$

Όμως

$$(\sin(\arcsin(x)))^2 + (\cos(\arcsin(x)))^2 = 1$$

άρα

$$x^2 + (\cos(\arcsin(x)))^2 = 1$$

επομένως $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$. Με την ίδια τεχνική δείχνουμε και την δεύτερη σχέση.

Συμβολίζουμε με $\sec x = \frac{1}{\cos x}$. Για την τρίτη ιδιότητα έχουμε

$$\arctan'(x) = (\tan^{-1})'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan x)} = \frac{1}{\sec^2(\arctan x)}$$

Όμως ισχύει ότι $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$. Άρα $\sec^2(\arctan x) = x^2 + 1$. $\square$

ΑΣΚΗΣΗ 106 *Να υπολογισθούν τα όρια*

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x},\quad \lim_{x\to 1}\frac{1+\cos\pi x}{x^2-2x+1},\quad \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-x+5}{5x^2+6x-3},\quad \lim_{x\to\infty}x^2e^{-x},$$
$$\lim_{x\to 0^+}\ln x,\quad \lim_{x\to\infty}(e^{3x}-5x)^{\frac{1}{x}},\quad \lim_{x\to 0}(e^{3x}-5x)^{\frac{1}{x}}$$

ΑΣΚΗΣΗ 107 *Να υπολογισθεί το όριο της ακολουθίας*

$$a_n=\frac{n^3}{e^{n^2}}$$

χρησιμοποιώντας το κανόνα του L'Hospital.

ΑΣΚΗΣΗ 108 *Μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα του L'Hospital για τον υπολογισμό του ορίου*

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$$

Αν όχι, ποιο είναι το ζητούμενο όριο;

Υπερβολικά Ημίτονα και Συνημίτονα

Ορίζουμε δυο νέες συναρτήσεις, τις

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{και} \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε τις επόμενες ιδιότητες

$$\begin{aligned} (\cosh x)' &= \sinh x, \\ (\sinh x)' &= \cosh x, \\ \cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1, \\ \cosh 2x &= 2\cosh x \sinh x \end{aligned}$$

Η συνάρτηση $\sinh x$ ονομάζεται **υπερβολικό** ημίτονο ενώ η $\cosh x$ **υπερβολικό** συνημίτονο. Το υπερβολικό ημίτονο $\sinh x : (-\infty, +\infty) \to (-\infty, +\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση επομένως αντιστρέφεται για κάθε x. Θα υπολογίσουμε την αντίστροφή της η οποία συμβολίζεται με $\sinh^{-1} x : (-\infty, +\infty) \to (-\infty, +\infty)$. Για να γίνει αυτό θα λύσουμε ως προς x την ισότητα $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ Εύκολα φτάνουμε στην ισότητα $2ye^x = e^{2x} - 1$. Θέτουμε $z = e^x$ και έχουμε την εξίσωση δευτέρου βαθμού $z^2 - 2yz - 1$. Το πολυώνυμο στο αριστερό μέλος της εξίσωσης έχει διακρίνουσα $D = 4(y^2 + 1)$ ενώ οι δυο ρίζες του είναι οι $y \pm \sqrt{y^2 + 1}$. Αφού $z = e^x$ δεχόμαστε την θετική ρίζα και επομένως $e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}$ δηλαδή $x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right)$ ή αλλιώς

$$\sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

Το υπερβολικό συνημίτονο είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$. Επομένως αντιστρέφεται στα διαστήματα $(-\infty, 0]$ ή $[0, +\infty)$. Στο διάστημα $(-\infty, 0]$ θα υπολογίσουμε την αντίστροφη της από την ισότητα

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

λύνοντας ως προς x. Παρατηρούμε ότι $y \geq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Εύκολα φθάνουμε στην ισότητα $2ye^x = e^{2x} + 1$ και θέτουμε $z = e^x$. Τότε έχουμε την εξίσωση δευτέρου βαθμού $z^2 - 2yz + 1 = 0$ της οποίας οι λύσεις είναι $z = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$ ή αλλιώς $x =$

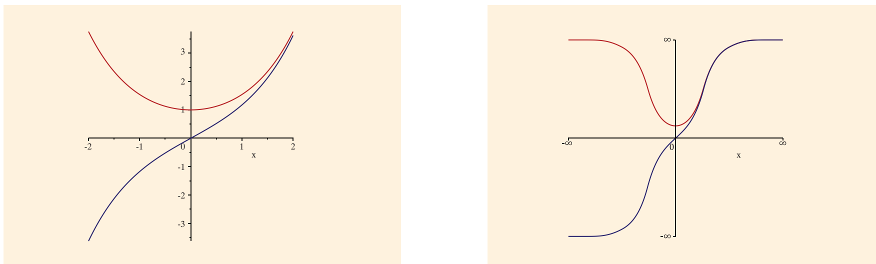
$\ln\left(y \pm \sqrt{y^2-1}\right)$. Εφόσον το $x \in (-\infty, 0]$ δεχόμαστε ως λύση την $x = \ln\left(y - \sqrt{y^2-1}\right)$ ή αλλιώς η αντίστροφη της $\cosh x : (-\infty, 0] \to [1, +\infty)$ (η οποία συμβολίζεται με $\cosh^{-1} x : [1, +\infty) \to (-\infty, 0]$) είναι η συνάρτηση

$$\cosh^{-1} x = \ln\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)$$

Εντελώς παρόμοια, η αντίστροφη της $\cosh x : [0, +\infty) \to [1, +\infty)$ είναι η $\cosh^{-1} x : [1, +\infty) \to [0, +\infty)$ με συναρτησιακό τύπο

$$\cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$$

(α′) (β′)



Σχήμα 13: Με κόκκινο χρώμα η συνάρτηση $f(x) = \cosh x$ και με μπλε η συνάρτηση $f(x) = \sinh x$. Στο αριστερό σχήμα απεικονίζονται σε μικρότερο διάστημα ενώ στο δεξί απεικονίζονται στο $\mathbb{R}$. Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί στο δεξιό σχήμα μοιάζει να ταυτίζονται για μεγάλα x;

Κυρτές και Κοίλες Συναρτήσεις

ΟΡΙΣΜΟΣ 109 *Μια συνάρτηση f λέγεται κυρτή σε ένα διάστημα, αν για κάθε a, b στο διάστημα αυτό, το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$ βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση της f.*

Ισοδύναμα μπορούμε να δώσουμε τον παρακάτω ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ 110 *Μια συνάρτηση f λέγεται κυρτή σε ένα διάστημα $I = [a, b]$ αν για κάθε $x, y \in I$ προκύπτει ότι*

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(b) - f(y)}{b - y}$$

Θα λέγεται κοίλη αν η ισχύει η αντίστροφη ανισότητα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 111 *Έστω ότι η f είναι κυρτή στο διάστημα $[a, b]$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στα a, b, τότε έχουμε $f^{'}(a) \leq f^{'}(b)$.*

ΘΕΩΡΗΜΑ 112 *Αν η f είναι παραγωγίσιμη και η $f^{'}$ είναι αύξουσα σε ένα διάστημα $[a, b]$, τότε η f είναι κυρτή στο διάστημα αυτό.*

Ολικά Ακρότατα-Φράγματα-Πεδίο Τιμών

Σε αυτή την ενότητα θα περιγράψουμε την κατασκευή του πίνακα ακροτάτων και φραγμάτων ο οποίος μας βοηθά να καταγράψουμε το πεδίο τιμών μιας συνεχούς συνάρτησης. Σημειώστε ότι το ολικό μέγιστο μιας συνάρτησης είναι και άνω φράγμα της με την επιπλέον ιδιότητα ότι ανήκει στο πεδίο τιμών της συνάρτησης. Παρομοίως και το ολικό ελάχιστο. Έτσι λοιπόν τα ολικά ακρότατα έχουν το ίδιο ενδιαφέρον και την ίδια (σχεδόν) σημασία με τα φράγματα διότι μας πληροφορούν ουσιαστικά για το πεδίο τιμών της συνάρτησης με την μοναδική διαφορά ότι τα ολικά ακρότατα ανήκουν στο πεδίο τιμών της.

Θα δώσουμε τα βασικά βήματα που πρέπει να κάνουμε για να καταγράψουμε τα ολικά μέγιστα και ελάχιστα μιας συνάρτησης καθώς και τα φράγματα αν τυχόν δεν υπάρχουν ολικά ακρότατα. Όπως γνωρίζουμε, μια συνεχής συνάρτηση σε κλειστό διάστημα λαμβάνει μέγιστο και ελάχιστο (δες θεώρημα 61). Τα ακρότατα θα βρίσκονται είτε στα κλειστά άκρα του διαστήματος (σημειώστε ότι αφού ένα κλειστό άκρο είναι πάντοτε τοπικό ακρότατο μας ενδιαφέρει αν είναι και ολικό ακρότατο) είτε εκεί που μηδενίζεται η πρώτη παράγωγος αν υπάρχει ή στα σημεία που δεν ορίζεται η πρώτη παράγωγος. Στην περίπτωση που η συνάρτηση δεν είναι ορισμένη σε κλειστό σύνολο (αλλά ενδεχομένως σε ανοικτό ή ανοικτό από την μια πλευρά) ενδέχεται να μην έχει ολικό μέγιστο ή ολικό ελάχιστο ή και τα δυο. Σε αυτήν την περίπτωση μας ενδιαφέρει η συμπεριφορά της συνάρτησης στο ανοικτό άκρο, συγκεκριμένα μας ενδιαφέρει αν η συνάρτηση είναι άνω φραγμένη ή/και κάτω φραγμένη.

Θα περιγράψουμε τα βήματα κατασκευής του πίνακα ακροτάτων και φραγμάτων της συνάρτησης ο οποίος θα περιέχει όλη την πληροφορία που χρειαζόμαστε.

1) Σημεία που μηδενίζουν την πρώτη παράγωγο
Το πρώτο που κάνουμε σε μια παραγωγίσιμη συνάρτηση είναι να βρούμε τα κρίσιμα σημεία (τα σημεία που μηδενίζουν την πρώτη παράγωγο). Σημειώστε ότι ενδέχεται να μην είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε ακριβώς το σημείο που μηδενίζει την παράγωγο, αν υπάρ-

χει τέτοιο σημείο. Προκειμένου να είμαστε σίγουροι ότι η παράγωγος μηδενίζεται κάπου μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα 62 και να βρούμε δυο σημεία a, b τ.ω. $f^{'}(a)f^{'}(b) < 0$. Τότε, αν η παράγωγος είναι συνεχής συνάρτηση, θα υπάρχει σίγουρα ένα x_0 τ.ω. $f^{'}(x_0) = 0$. Αν δεν μπορούμε να υπολογίσουμε ακριβώς το σημείο x_0 τότε θα πρέπει να το προσεγγίσουμε (δες θεώρημα 243 για ένα τρόπο προσέγγισης καθώς και το 95). Αν $f^{''}(x_0) > 0$ τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο ενώ αν $f^{''}(x_0) < 0$ είναι τοπικό μέγιστο. Αν όμως $f^{''}(x_0) = 0$ τότε θα πρέπει να εξετάσουμε το σημείο αυτό με τον ορισμό του τοπικού ακροτάτου. Αν δεν είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο κρίσιμο σημείο τότε πάλι θα εξετάσουμε το σημείο αυτό με τον ορισμό του τοπικού ακροτάτου.

2) `Σημεία στα οποία δεν παραγωγίζεται` Στην περίπτωση που η συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 τότε κοιτάμε το πρόσημο των $f^{'}(x_{0-})$ και $f^{'}(x_{0+})$ προκειμένου να εξετάσουμε την μονοτονία αριστερά και δεξιά του x_0 της συνάρτησης. Δηλαδή αν $f^{'}(x_{0-}) > 0$ και $f^{'}(x_{0+}) < 0$ τότε πρόκειται για το-

πικό μέγιστο. Αν είναι αντίθετα τα πρόσημα τοπικό ελάχιστο. Αν δεν συμβαίνει τίποτε από τα δυο τότε εξετάζουμε το σημείο αυτό με τον ορισμό του τοπικού ακροτάτου.

3) **Ανοικτά άκρα** Αν υπάρχουν ανοικτά άκρα, υπολογίζουμε τα όρια της συνάρτησης στα ανοικτά άκρα.

4) **Σημεία του πεδίου ορισμού τα οποία δεν είναι εσωτερικά** Καταγράφουμε τα κλειστά άκρα του πεδίου ορισμού

Στην συνέχεια κατασκευάζουμε τον πίνακα ακροτάτων και φραγμάτων ως εξής: Συγκεντρώνουμε στον πίνακα όλα τα σημεία που μηδενίζουν την πρώτη παράγωγο και ταυτόχρονα είναι τοπικά ακρότατα (δηλαδή αλλάζει η μονοτονία της συνάρτησης γύρω από το σημείο), γράφοντας στην πρώτη στήλη το σημείο x_0, στην δεύτερη στήλη την τιμή $f(x_0)$ και στην τρίτη στήλη τον χαρακτηρισμό (τοπικό μέγιστο ή ελάχιστο). Στην συνέχεια, στον ίδιο πίνακα, συγκεντρώνουμε όλα τα σημεία στα οποία η συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη και ταυτόχρονα αλλάζει η μονοτονία της συνάρτησης. Στην πρώτη στήλη γράφουμε το σημείο x_0 στην δεύτερη στήλη την τιμή $f(x_0)$ και στην τρίτη στήλη τον χαρακτηρισμό (τοπικό μέγιστο ή ελάχιστο). Τέλος, αν η συνάρτηση είναι ορισμένη σε κλειστό σύνολο (ή έστω το ένα άκρο είναι κλειστό) γράφουμε στον πίνακα, το κλειστό άκρο x_0 στην πρώτη στήλη, την τιμή της $f(x_0)$ στην δεύτερη στήλη. Αν το πεδίο ορισμού περιέχει ανοικτό άκρο (είτε πεπερασμένος αριθμός είτε το $\pm\infty$) το προσθέτουμε επίσης στον πίνακα και στην δεύτερη στήλη βάζουμε το όριο της συνάρτησης καθώς το x τείνει στο άκρο αυτό. Στην τελευταία στήλη θα δώσουμε τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό, όσον αφορά το αν είναι άνω ή κάτω φραγμένη ή όχι.

x_0	$f(x_0)$	Τοπικά Ακρότατα	Ολικά Ακρότατα-Φράγματα
σημεία που μηδενίζουν την παράγωγο	$f(x_0)$	χαρακτηρισμός	χαρακτηρισμός
σημεία στα οποία δεν είναι παραγωγίσιμη	$f(x_0)$	χαρακτηρισμός	χαρακτηρισμός
κλειστό άκρο	$f(x_0)$	-	χαρακτηρισμός
ανοικτό άκρο a	$\lim_{x\to a} f(x)$	-	χαρακτηρισμός

Με τον πίνακα ακροτάτων και φραγμάτων είναι εύκολο να καταγράψουμε το πεδίο τιμών (σύνολο τιμών) της συνάρτησης. Εφόσον είναι συνεχής, το πεδίο τιμών θα είναι ένα διάστημα. Στο αριστερό άκρο του διαστήματος θα τοποθετήσουμε την μικρότερη τιμή που βρίσκεται στην δεύτερη στήλη (συμπεριλαμβανομένων και των ορίων σε ανοικτά άκρα αν υπάρχουν) και στο δεξί την μεγαλύτερη τιμή. Το αν θα είναι ανοικτό άκρο ή κλειστό εξαρτάται από το αν η συνάρτηση μπορεί να λάβει την τιμή αυτή ή όχι. Σημειώστε ότι οι τιμές με μπλε χρώμα μπορούν να ληφθούν από την συνάρτηση ενώ οι τιμές με κόκκινο χρώμα δεν λαμβάνονται.

Για παράδειγμα, έστω

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{όταν } -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{x}, & \text{όταν } 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

Αφού η συνάρτηση είναι ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[-1, 3]$ τότε υποχρεωτικά θα λαμβάνει ολικό ελάχιστο και ολικό μέγιστο στο διάστημα αυτό τουλαχιστον μια φορά. Ελέγχοντας την συνάρτηση στο σημείο $x = 1$ βλέπουμε ότι είναι συνεχής αλλά όχι παραγωγίσιμη. Μάλιστα αλλάζει η μονοτονία της συνάρτησης στο σημείο αυτό έτσι ώστε να έχουμε τοπικό μέγιστο. Η παράγωγος της συνάρτησης μηδενίζεται στο σημείο $x = 0$ ενώ η δεύτερη παράγωγος στο σημείο αυτό είναι θετική άρα πρόκειται για τοπικό ελάχιστο. Στον πίνακα ακροτάτων και φραγμάτων θα τοποθετήσουμε, εκτός από τα σημεία $x = 0$ και $x = 1$, και τα δυο άκρα. Δηλαδή

x_0	$f(x_0)$	Τοπικά Ακρότατα	Ολικά Ακρότατα - Φράγματα
$x = 0$	0	τοπικό ελάχιστο	ολικό ελάχιστο
$x = 1$	1	τοπικό μέγιστο	ολικό μέγιστο
$x = -1$	1	-	ολικό μέγιστο
$x = 3$	$\frac{1}{3}$	-	-

Στην περίπτωση αυτή όπου η συνάρτηση είναι ορισμένη σε κλειστό διάστημα θα βγάλουμε το συμπέρασμά μας απλά κοιτώντας την δεύτερη στήλη του παραπάνω πίνακα, δεν θα χρειαστεί να μελετήσουμε περαιτέρω την συνάρτηση. Βλέπουμε ότι λαμβάνει την ελάχιστη τιμή για $x = 0$ (δηλαδή εκεί είναι τοπικό ελάχιστο αλλά και ολικό ελάχιστο) και επίσης την μέγιστη τιμή την λαμβάνει στα σημεία $x = 1$ και $x = -1$ όπου στο σημείο $x = 1$ είναι και τοπικό μέγιστο εκτός από ολικό. Συνεπώς το πεδίο τιμών, λόγω συνέχειας της συνάρτησης, είναι το $[0, 1]$.

Στην συνέχεια θα δώσουμε παράδειγμα όπου το ένα άκρο του πεδίου ορισμού είναι ανοικτό. Έστω η παρακάτω συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{όταν } x \leq 1 \\ \frac{1}{x}, & \text{όταν } 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

Η παράγωγος της f είναι

$$f^{'}(x) = \begin{cases} 2x, & \text{όταν } x < 1 \\ -\frac{1}{x^2}, & \text{όταν } 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

Διαπιστώνουμε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ αλλά όχι παραγωγίσιμη.

Ξεκινάμε, με το να δούμε που μηδενίζεται η πρώτη παράγωγος. Ιδιαίτερη προσοχή χρειάζεται σε περιπτώσεις συναρτήσεων με κλάδους διότι η παράγωγος συνάρτησης ενός κλάδου ενδέχεται να μηδενίζεται έξω από το πεδίο ορισμού της οπότε σε αυτή την περίπτωση το σημείο αυτό δεν είναι κρίσιμο. Στην προκειμένη περίπτωση βλέπουμε ότι μηδενίζεται μόνο για $x = 0$. Η συνάρτηση σε αυτό το σημείο είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και μάλιστα $f^{''}(0) = 2 > 0$ επομένως το $x = 0$ είναι τοπικό ελάχιστο. Στην συνέχεια, διαπιστώνουμε ότι στο σημείο $x = 1$ δεν είναι παραγωγίσιμη και μάλιστα αλλάζει μονοτονία η συνάρτηση γύρω από το σημείο αυτό (αφού $f^{'}(1^{-}) = 2$ και $f^{'}(1^{+}) = -1$) με τέτοιο τρόπο ώστε το σημείο $x = 1$ να είναι τοπικό μέγιστο. Τέλος, διαπιστώνουμε ότι η συνάρτηση είναι ορισμένη στο $(-\infty, 3]$ άρα στον πίνακα ακροτάτων και φραγμάτων θα προσθέσουμε και το σημείο $x = 3$. Επίσης, θα εξετάσουμε το όριο της συνάρτησης καθώς $x \to -\infty$. Βλέπουμε ότι η συνάρτηση αποκλίνει στο $+\infty$.

x_0	$f(x_0)$	Τοπικά Ακρότατα	Ολικά Ακρότατα - Φράγματα
$x = 0$	0	τοπικό ελάχιστο	Ολικό Ελάχιστο
$x = 1$	1	τοπικό μέγιστο	-
$x = 3$	$\frac{1}{3}$	-	
$-\infty$	$+\infty$	-	Όχι άνω φραγμένη

Επειδή η συνάρτηση δεν είναι άνω φραγμένη δεν υπάρχει ολικό μέγιστο. Τελικά, κοιτώντας την δεύτερη στήλη, διαπιστώνουμε ότι στο $x = 0$ έχουμε ολικό ελάχιστο και στο σημείο $x = 1$ τοπικό μέγιστο. Σημειώστε ότι αν είχαμε ορίσει την συνάρτηση f σε κλειστό διάστημα (του τύπου $[a, b]$) τότε θα είχε και ολικό μέγιστο και ολικό ελάχιστο όπως το θεώρημα 61 προβλέπει. Συνεπώς το πεδίο τιμών, λόγω συνέχειας της συνάρτησης, είναι το $[0, +\infty)$.

Ας δούμε ακόμη ένα παρόμοιο παράδειγμα. Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{1}{2}, & \text{όταν } x \leq 1 \\ \\ \frac{1}{x}, & \text{όταν } 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

Η συνάρτηση είναι συνεχής παντού και το πεδίο ορισμού της είναι το $(-\infty, 3]$. Το όριο της συνάρτησης καθώς $x \to -\infty$ είναι ίσο με $\frac{3}{2}$, δηλαδή πλησιάζει όσο κοντά θέλουμε σε αυτόν τον αριθμό. Επίσης, διαπιστώνουμε ότι δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x = 1$ και μάλιστα αλλάζει μονοτονία με τέτοιο τρόπο ώστε στο σημείο $x = 1$ να έχουμε τοπικό μέγιστο. Ακόμη, η παράγωγος της μηδενίζεται στο $x = 0$ ενώ $f''(0) = 2$ οπότε πρόκειται για τοπικό ελάχιστο.

x_0	$f(x_0)$	Τοπικά ακρότατα	Ολικά ακρότατα-Φράγματα
$x = 0$	$\frac{1}{2}$	τοπικό ελάχιστο	
$x = 1$	1	τοπικό μέγιστο	-
$x = 3$	$\frac{1}{3}$	-	ολικό ελάχιστο
$-\infty$	$\frac{3}{2}$	-	άνω φράγμα το $\frac{3}{2}$

Κοιτώντας στην δεύτερη στήλη βλέπουμε ότι η μικρότερη από αυτές τις τιμές είναι το $\frac{1}{3}$ και η μέγιστη το 1. Το όριο της f καθώς $x \to -\infty$ είναι το $\frac{3}{2}$ επομένως υπάρχει $x^* < 1$ τέτοιο ώστε $f(x^*) > 1$ δηλαδή η συνάρτηση δεν έχει ολικό μέγιστο (παρόλα αυτά είναι άνω φραγμένη από το $\frac{3}{2}$). Τελικά έχει ολικό ελάχιστο στο $x = 3$, τοπικό μέγιστο στο $x = 1$, τοπικό ελάχιστο στο $x = 0$ και είναι άνω φραγμένη από το $\frac{3}{2}$. Συνεπώς το πεδίο τιμών, λόγω συνέχειας της συνάρτησης, είναι το $[\frac{1}{3}, \frac{3}{2})$.

Στο επόμενο παράδειγμα, η συνάρτηση είναι ορισμένη σε όλο το $\mathbb{R}$. Ορίζουμε την συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{1}{2}, & \text{όταν } x \leq 1 \\ \frac{1}{x}, & \text{όταν } 1 < x \leq 2 \\ -\frac{x^2}{1+x} + \frac{11}{6}, & \text{όταν } x > 2 \end{cases}$$

Ελέγχοντας την συνάρτηση στα σημεία $x = 1$ και $x = 2$ διαπιστώνουμε ότι είναι συνεχής αλλά όχι παραγωγίσιμη. Μάλιστα, στο σημείο $x = 1$ αλλάζει η μονοτονία της συνάρτησης με τέτοιο τρόπο ώστε να έχουμε τοπικό μέγιστο ενώ στο σημείο $x = 2$ δεν αλλάζει η μονοτονία (σημείο καμπής). Στην συνέχεια θα εξετάσουμε που μηδενίζεται η πρώτη παράγωγος η οποία έχει την μορφή

$$f^{'}(x) = \begin{cases} \frac{2x}{x^4+2x^2+1}, & \text{όταν } x < 1 \\ -\frac{1}{x^2}, & \text{όταν } 1 < x < 2 \\ -\frac{x^2+x}{x^2+2x+1}, & \text{όταν } x > 2 \end{cases}$$

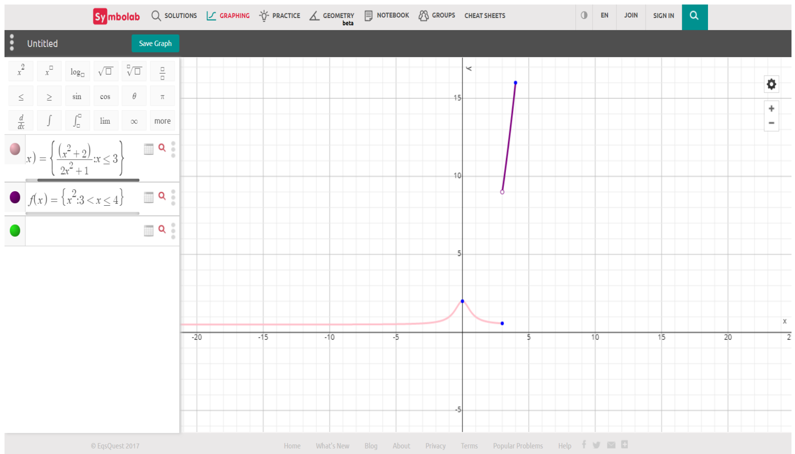
Παρατηρήστε ότι για να υπολογίσουμε την παράγωγο κλαδωτής συνάρτησης υπολογίζουμε την παράγωγο του κάθε κλάδου αλλά η συνάρτηση παράγωγος δεν είναι ορισμένη στην αλλαγή των κλάδων διότι δεν είναι παραγωγίσιμη εκεί. Βλέπουμε ότι η $f^{'}(x)$ μηδενίζεται μονάχα στο σημείο $x = 0$ και μάλιστα η δεύτερη παράγωγος στο σημείο αυτό είναι θετική άρα πρόκειται για τοπικό ελάχιστο. Επειδή και τα δυο άκρα είναι ανοικτά, εξετάζουμε το όριο της συνάρτησης καθώς το x τείνει στο κάθε άκρο. Διαπιστώνουμε ότι η συνάρτηση συγκλίνει στο $\frac{3}{2}$ καθώς $x \to -\infty$ επομένως το σημείο $x = 1$ δεν είναι ολικό μέγιστο αφού η συνάρτηση μπορεί να πάρει μεγαλύτερες τιμές. Επίσης, η συνάρτηση συγκλίνει στο $-\infty$ καθώς $x \to +\infty$ επομένως ούτε το $x = 0$ δεν είναι ολικό ελάχιστο διότι η συνάρτηση μπορεί να πάρει ακόμη μικρότερες τιμές. Τελικά, η συνάρτηση είναι άνω φραγμένη από το $\frac{3}{2}$, έχει τοπικά ακρότατα για $x = 0$ και $x = 1$ και δεν είναι κάτω φραγμένη. Συνεπώς το πεδίο τιμών, λόγω συνέχειας της συνάρτησης, είναι το $(-\infty, \frac{3}{2})$.

x_0	$f(x_0)$	Τοπικά Ακρότατα	Ολικά Ακρότατα-Φράγματα
$x=0$	$\frac{1}{2}$	τοπικό ελάχιστο	-
$x=1$	1	τοπικό μέγιστο	-
$-\infty$	$\frac{3}{2}$	-	άνω φραγμένη από το $\frac{3}{2}$
$+\infty$	$-\infty$	-	Όχι κάτω φραγμένη

$\square$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 113 *Στην περίπτωση όπου μια συνάρτηση δεν είναι συνεχής αλλά κατά τμήματα συνεχής τότε χωρίζουμε το πεδίο ορισμού σε υποδιαστήματα στα οποία η συνάρτηση είναι συνεχής. Μελετούμε όπως παραπάνω την συνάρτηση σε κάθε υποδιάστημα χωριστά οπότε το πεδίο τιμών θα είναι, εν γένει, ένωση διαστημάτων. Ας δούμε ένα τέτοιο παράδειγμα. Έστω η συνάρτηση*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+2}{2x^2+1}, & \text{όταν } x \leq 3 \\ x^2, & \text{όταν } 3 < x \leq 4 \end{cases}$$



Σχήμα 14: Το γράφημα της συνάρτησης μέσω του Symbolab

Όπως φαίνεται και στο σχήμα, η συνάρτηση δεν είναι συνεχής στην αλλαγή του κλάδου. Σε αυτή την περίπτωση μελετούμε την συνάρτηση χωριστά σε κάθε υποδιάστημα στο οποίο είναι συνεχής, δηλαδή στο $(-\infty, 3]$ *και στο* $(3, 4]$. *Κατασκευάζοντας τον πίνακα ακροτάτων και φραγμάτων της συνάρτησης σε κάθε υποδιάστημα χωριστά διαπιστώνουμε ότι το πεδίο τιμών της συνάρτησης θα είναι το* $(\frac{1}{2}, 2] \cup (9, 16]$.

Ας δούμε ακόμη ένα παράδειγμα. Έστω η συνάρ-

τηση

$$f(x)=\frac{x+\sqrt{x^2+x}}{x}$$

Προκειμένου να βρούμε το πεδίο τιμών της συνάρτησης αυτής θα πρέπει πρώτα να βρούμε το πεδίο ορισμού της. Διαπιστώνουμε ότι το πεδίο ορισμού της είναι το $(-\infty,-1]\cup(0,+\infty)$. *Για να υπολογίσουμε το πεδίο τιμών της θα εργαστούμε σε κάθε διάστημα χωριστά. Αρχίζουμε με το διάστημα* $(-\infty,-1]$ *και κατασκευάζουμε τον πίνακα ακροτάτων και φραγμάτων ο οποίος θα είναι ως εξής*

x_0	$f(x_0)$	*Τοπικά Ακρότατα*	*Ολικά Ακρότατα-Φράγματα*
$x=-1$	*1*	-	-
$-\infty$	*0*	-	*κάτω φραγμένη από το 0*

Επομένως, όταν $x\in(-\infty,-1]$ *τότε το πεδίο τιμών της συνάρτησης θα είναι το* $(0,1]$. *Σημειώστε ότι η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη χωρίς όμως να μηδενίζεται πουθενά η παράγωγος. Επομένως στον πίνακα ακροτάτων και φραγμάτων τοποθετούμε μονάχα το κλειστό άκρο και το όριο καθώς* $x\to-\infty$.

Στην συνέχεια εργαζόμαστε στο διάστημα $(0,+\infty)$ *και κατασκευάζουμε τον πίνακα ακροτάτων και φραγμάτων. Θα έχουμε λοιπόν*

x_0	$f(x_0)$	Τοπικά Ακρότατα	Ολικά Ακρότατα-Φράγματα
$-$	-	-	
$0+$	$+\infty$	-	όχι άνω φραγμένη
$+\infty$	2	-	κάτω φραγμένη από το 2

Παρόμοια με πριν, τοποθετούμε μόνο τα όρια καθώς $x \to 0+$ και $x \to +\infty$ αφού δεν έχει κλειστά άκρα αλλά επίσης δεν μηδενίζεται πουθενά η παράγωγος.

Τελικά το πεδίο τιμών της συνάρτησης f θα είναι το $(0,1] \cup (2,+\infty)$.

Σημειώστε ότι χρειάστηκε να υπολογίσουμε τα όρια

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)$$

Για να υπολογίσουμε το όριο καθώς $x \to +\infty$ γράφουμε την συνάρτηση $f(x) = 1 + \sqrt{1+\frac{1}{x}}$ από όπου διαπιστώνουμε ότι συγκλίνει στο 2. Για το όριο όμως καθώς $x \to -\infty$ τότε δεν είναι σωστό να το κάνουμε όπως πριν. Σε αυτή την περίπτωση θέτουμε $y = -x$ και έτσι η συνάρτηση γίνεται $f(y) = 1 - \sqrt{1-\frac{1}{y}}$ οπότε το όριο καθώς $y \to +\infty$ είναι το 0. $\square$

ΑΣΚΗΣΗ 114 *Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο* *τιμών της συνάρτησης*

$$f(x) = \frac{(0.4)^x}{\ln 0.4} - \frac{x^2}{2}$$

(Υπόδειξη: Υπολογίστε την παράγωγο και αποδείξτε ότι μηδενίζεται σε ακριβώς ένα σημείο στο οποίο η συνάρτηση μεγιστοποιείται. Υπολογίστε την ρίζα της παραγώγου (προσεγγίζοντας τη) και στην συνέχεια υπολογίστε το σύνολο τιμών).

Παραδείγματα

• Κάθε συνάρτηση $f(x)$ μπορεί να γραφεί ως άθροισμα περιττής και άρτιας συνάρτησης. Πράγματι, αν

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{f(x) - f(-x)}{2}, \\ h(x) &= \frac{f(x) + f(-x)}{2} \end{aligned}$$

τότε η $g(x)$ είναι περιττή ενώ η $h(x)$ είναι άρτια και το άθροισμά τους είναι ίσο με την $f(x)$.

• Χρησιμοποιώντας το όριο

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

μπορούμε να υπολογίσουμε τα όρια

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x} &= \lim_{x\to 0} 2\frac{\sin 2x}{2x} = 2,\\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}\cdot\frac{\sin 2x}{x} = 4,\\ \lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x} &= \lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1\end{aligned}$$

• Η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1}, & \text{όταν } x < 1 \\ x^2, & \text{όταν } x \geq 1 \end{cases}$$

δεν είναι συνεχής στο σημείο $x = 1$ διότι το όριο $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} x^2 = 1$ ενώ το όριο $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x-1} = -\infty$.

• Θα υπολογίσουμε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x)$ η οποία ικανοποιεί την παρακάτω σχέση

$$f^5(x) - 3xf^4(x) - 5x^5 - 1 = 0$$

Θεωρούμε την συνάρτηση

$$F(x) = f^5(x) - 3xf^4(x) - 5x^5 - 1$$

και υπολογίζουμε την παράγωγό της η οποία είναι

$F^{'}(x) = 5f^4(x)f^{'}(x) - 3f^4(x) - 12xf^3(x)f^{'}(x) - 25x^4 = 0$

άρα

$$f^{'}(x) = \frac{3f^4(x) - 25x^4}{5f^4(x) - 12xf^3(x)}$$

- Η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & \text{όταν } x \neq 0 \\ 0, & \text{όταν } x = 0 \end{cases}$$

είναι συνεχής στο 0 όπως έχουμε αποδείξει αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη. Πράγματι,

$$f^{'}(0) = \lim_{h\to 0} \sin\frac{1}{h} \quad \text{το οποίο δεν υπάρχει}$$

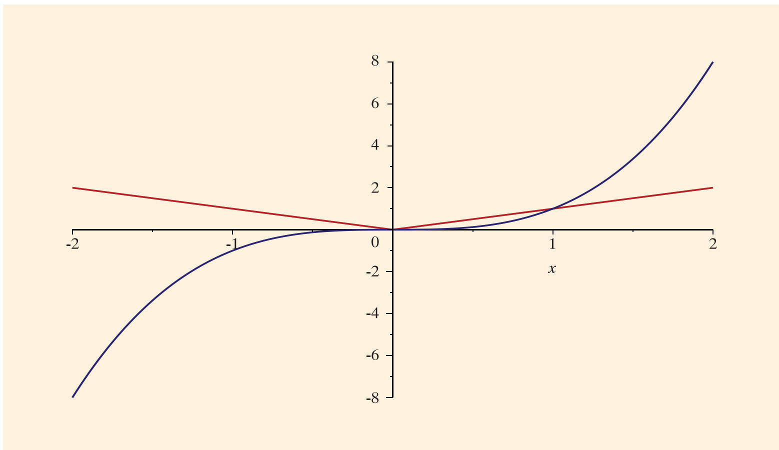
- Η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & \text{όταν } x \neq 0 \\ 0, & \text{όταν } x = 0 \end{cases}$$

είναι συνεχής στο μηδέν και παραγωγίσιμη με $f^{'}(0) = 0$. Όμως η τιμή της παραγώγου στο μηδέν πρέπει να υπολογισθεί χρησιμοποιώντας τον ορισμό της παραγώγου στο σημείο αυτό και όχι παραγωγίζοντας την συνάρτηση $x^2 \sin \frac{1}{x}$ και θέτοντας έπειτα $x = 0$.

• Η συνάρτηση $f(x) = |x|$ (δες σχήμα 15) είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη παντού εκτός από το σημείο μηδέν. Τα ακρότατα θα βρίσκονται είτε εκεί που μηδενίζεται η παράγωγός είτε εκεί που δεν υπάρχει. Πράγματι, στο $x = 0$ έχουμε ελάχιστο.

• Η συνάρτηση $f(x) = x^3$ (δες σχήμα 15) έχει παράγωγο $f^{'}(x) = 3x^2$ η οποία μηδενίζεται για $x = 0$ το οποίο είναι κρίσιμο σημείο αλλά η δεύτερη παράγωγος $f^{''}(x) = 6x$ μηδενίζεται επίσης, οπότε δεν μπορούμε να βγάλουμε συμπέρασμα. Παρατηρούμε όμως ότι η $f^{'}(x) = 3x^2$ είναι παντού θετική και επομένως η f είναι αύξουσα συνάρτηση. Αρα δεν έχει ακρότατο στο 0 διότι θα έπρεπε να αλλάζει πρόσημο η πρώτη παράγωγος γύρω από αυτό το σημείο. Αν όμως ορίσουμε την $f(x) = x^3$ στο διάστημα $[-1, 1]$ τότε τα ακρότατα παρουσιάζονται στα άκρα του διαστήματος, δηλαδή στο σημείο $x = -1$ έχουμε ελάχιστο και στο σημείο $x = 1$ μέγιστο.



Σχήμα 15: Η συνάρτηση $|x|$ με κόκκινο χρώμα και η συνάρτηση x^3 με μπλε χρώμα.

• Θα υπολογίσουμε τους αριθμούς x, y έτσι ώστε το γινόμενό τους να είναι το μέγιστο δυνατό δεδομένου του αθροίσματός τους που πρέπει να ίσο με A. Δηλαδή, υποθέτουμε ότι $x + y = A$ και θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε την ποσότητα xy. Εφόσον, $y = A - x$ τότε πρέπει να μεγιστοποιηθεί η συνάρτηση $f(x) = x(A - x) = Ax - x^2$. Η παράγωγος της συνάρτησης αυτής είναι $f^{'}(x) = A - 2x$ και μηδενίζεται για $x = A/2$. Διαπιστώνουμε ότι η παράγωγος αλλάζει πρόσημο, δηλαδή $f^{'}(A/2-) > 0$ και $f^{'}(A/2+) < 0$, γύρω από το σημείο που μηδενίζεται και επομένως το σημείο αυτό είναι σημείο μεγίστου. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα αυτό αποδεικνύουμε εύκολα ότι μεταξύ των ορθογωνίων με σταθερή περίμετρο το τετράγωνο έχει το μέγιστο εμβαδόν.

• Θα υπολογίσουμε τους αριθμούς x, y τέτοιους ώστε το γινόμενο $xy = A$ να είναι σταθερό και να μεγιστοποιηθεί το άθροισμα $x + y$. Αφού $y = A/x$ τότε πρέπει να μεγιστοποιήσουμε την συνάρτηση $f(x) = x + A/x$ για $x > 0$. Η παράγωγος είναι $f^{'}(x) = 1 - A/x^2$ η οποία μηδενίζεται για $x = \sqrt{A}$. Η παράγωγος αλλάζει πρόσημο γύρω από το σημείο αυτό, δηλαδή $f^{'}(\sqrt{A}-) > 0$ και $f^{'}(\sqrt{A}+) < 0$ επομένως στο σημείο αυτό έχει μέγιστο.

• Έστω η συνάρτηση $f(x) = xe^x$. Η παράγωγος της είναι $f^{'}(x) = (1+x)e^x$ ενώ η δεύτερη παράγωγος είναι $f^{''}(x) = (2 + x)e^x$. Η πρώτη παράγωγος μηδενίζεται για $x = -1$ ενώ $f^{''}(-1) = \frac{1}{e} > 0$ άρα στο σημείο $x = -1$ έχει τοπικό ελάχιστο.

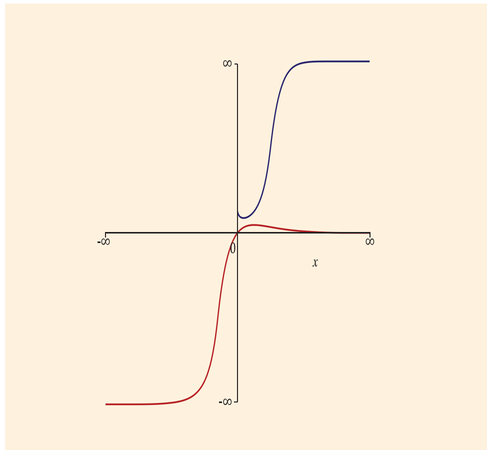
• Η συνάρτηση $f(x) = xe^{-x}$ έχει παράγωγο $f^{'}(x) = (1-x)e^{-x}$ η οποία μηδενίζεται για $x = 1$. Η δεύτερη παράγωγος είναι $f^{''}(x) = -e^{-x}(2-x)$ ενώ $f^{''}(1) = -\frac{1}{e} < 0$ επομένως στο σημείο $x = 1$ έχει τοπικό μέγιστο.

• Η συνάρτηση $f(x) = x^x$ (δες σχήμα 16) έχει παράγωγο $f^{'}(x) = (\ln x + 1)x^x$ η οποία μηδενίζεται για $x = \frac{1}{e}$. Η δεύτερη παράγωγος είναι θετική σε αυτό το σημείο οπότε η συνάρτηση λαμβάνει τοπικό ελάχιστο στο σημείο $x = \frac{1}{e}$.

• Θα εξετάσουμε την συνάρτηση $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ στο διάστημα $(0, +\infty)$ ως προς τα ακρότατα. Υπολογίζουμε την παράγωγο και βρίσκουμε ότι

$$f^{'}(x) = x^{\frac{1}{x}}\frac{1-\ln x}{x^2}$$

η οποία μηδενίζεται στο σημείο $x = e$. Η $f^{'}(x) > 0$ για $0 < x < e$ ενώ για $x > e$ έχουμε ότι $f^{'}(x) < 0$ άρα το σημείο $x = e$ είναι σημείο τοπικού μεγίστου, με



Σχήμα 16: Με κόκκινο η συνάρτηση xe^{-x} και με μπλε η συνάρτηση x^x.

μέγιστο τον αριθμό $e^{\frac{1}{e}}$.

• Έστω $\varepsilon \in (0,1)$. Θα αποδείξουμε ότι

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^{\varepsilon}} = 0$$

το οποίο σημαίνει ότι οσοδήποτε μικρή δύναμη του x αυξάνεται γρηγορότερα από την λογαριθμική συνάρτηση. Χρησιμοποιώντας τον κανόνα του L'Hospital έχουμε

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^{\varepsilon}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\varepsilon x^{\varepsilon}} = 0$$

• Θα αποδείξουμε ότι

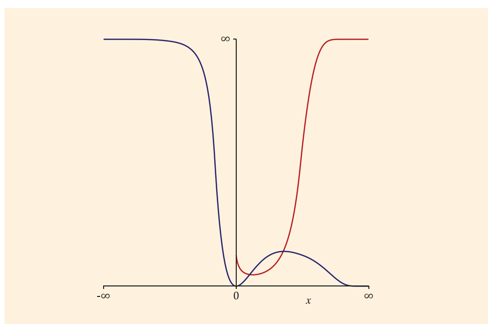
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^p}{e^x} = 0$$

για οσοδήποτε μεγάλη δύναμη p.

Αυτό σημαίνει ότι η εκθετική συνάρτηση αυξάνει γρηγορότερα από οποιαδήποτε δύναμη του x. Αν $f(x) = \frac{x^p}{e^x}$ θέτουμε $g(x) = \ln f(x) = x\left(\frac{p \ln x}{x} - 1\right) \to -\infty$ καθώς $x \to \infty$. Επομένως $f(x) \to 0$ καθώς $x \to \infty$.

• Η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^x}{e^x}$ (δες σχήμα 17) συγκλίνει στο $+\infty$ καθώς $x \to +\infty$ όπως εύκολα διαπιστώνουμε εργαζόμενοι στην συνάρτηση $g(x) = \ln f(x)$. Δηλαδή η συνάρτηση x^x αυξάνεται γρηγορότερα από την εκθετική. Η συνάρτηση όμως $e^{x^{1+\varepsilon}}$ με $\varepsilon > 0$ αυξάνεται γρηγορότερα από την x^x όπως διαπιστώνει κανείς εφαρμόζοντας την ίδια μεθοδολογία. Η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = \frac{x^x}{e^x}$ είναι $f^{'}(x) = \frac{x^x \ln x}{e^x}$ και επομένως μηδενίζεται για $x = 1$. Εύκολα βλέπουμε (και αποφεύγουμε τον υπολογισμό της δεύτερης παραγώγου) ότι είναι φθίνουσα αριστερά του σημείου $x = 1$ και αύξουσα δεξιά του ίδιου σημείου άρα στο σημείο αυτό έχει ελάχιστο.

• Η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2}{2^x}$ (δες σχήμα 17) έχει παράγωγο $f'(x) = \frac{x2^x(2-x\ln 2)}{2^{2x}}$ η οποία μηδενίζεται στα σημεία $x = 0$ και $\frac{2}{\ln 2}$. Αριστερά του μηδέν η παράγωγος είναι αρνητική επομένως η συνάρτηση είναι φθίνουσα. Δεξιά του μηδέν και μέχρι το σημείο $\frac{2}{\ln 2}$ η συνάρτηση είναι αύξουσα και μετά το σημείο αυτό πάλι φθίνουσα, επομένως στο σημείο $x = 0$ έχει τοπικό ελάχιστο ενώ στο σημείο $\frac{2}{\ln 2}$ έχει τοπικό μέγιστο.



Σχήμα 17: Με κόκκινη γραμμή η συνάρτηση $\frac{x^x}{e^x}$ ενώ με μπλε γραμμή η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2}{2^x}$.

• Θα αποδείξουμε ότι

$$x^a - 1 \geq a(x-1) \quad \text{όταν } a > 1 \quad x > 0$$

Ορίζουμε την συνάρτηση $f(x) = x^a - 1 - a(x-1)$ με παράγωγο $f^{'}(x) = a(x^{a-1} - 1)$. Κρίσιμο σημείο είναι το $x = 1$. Αριστερά του 1 η συνάρτηση είναι φθίνουσα ενώ δεξιά είναι αύξουσα επομένως ισχύει ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x > 0$.

• Έστω $p, q \geq 1$ τέτοιοι ώστε $1/p + 1/q = 1$. Αν $x \geq 1$ θα αποδείξουμε ότι

$$x^{1/p} \leq \frac{x}{p} + \frac{1}{q}$$

Θέτουμε $f(x) = x^{1/p} - \frac{x}{p} - \frac{1}{q}$. Υπολογίζουμε τα κρίσιμα σημεία, δηλαδή τα σημεία που μηδενίζουν την πρώτη παράγωγο η οποία είναι

$$f^{'}(x) = \frac{1}{p}x^{(1-p)/p} - \frac{1}{p}$$

Η παράγωγος μηδενίζεται στο σημείο $x = 1$ ενώ η δεύτερη παράγωγος είναι θετική στο σημείο αυτό άρα η συνάρτηση έχει ελάχιστο και επομένως ισχύει η ζητούμενη ανισότητα. Ως εφαρμογή μπορούμε να αποδείξουμε ότι για κάθε $u, v \geq 0$ και p, q όπως πριν ισχύει ότι

$$u^{\frac{1}{p}}v^{\frac{1}{q}} \leq \frac{u}{p} + \frac{1}{q}$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $u \geq v$ οπότε θέτουμε $x\frac{u}{v}$ στην ανισότητα που έχουμε αποδείξει και έπειτα πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη με το v. $\square$

Αντιπαραγώγιση

Σε αυτή την ενότητα θα εργαστούμε στο πρόβλημα της εύρεσης μιας αντιπαραγώγου μιας συνάρτησης f, δηλαδή μια συνάρτηση F τέτοια ώστε $F^{'} = f$.

Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x) = x$. Γνωρίζουμε ότι αν $F(x) = \frac{x^2}{2}$ τότε $F^{'}(x) = f(x)$. Είναι άραγε μοναδική η συνάρτηση F με αυτή την ιδιότητα ή υπάρχουν και άλλες;

Ας θυμηθούμε το επόμενο πόρισμα

Αν οι f, g είναι ορισμένες στο ίδιο διάστημα και

$$f^{'}(x) = g^{'}(x)$$

για όλα τα x στο διάστημα αυτό, τότε υπάρχει κάποιος αριθμός c τ.ω. $f = g + c$.

Δηλαδή, αν υπάρχει μια συνάρτηση $G(x)$ τέτοια ώστε $G^{'}(x) = f(x) = F^{'}(x)$ τότε υποχρεωτικά θα ισχύει $F(x) = G(x) + c$ για μια οποιαδήποτε σταθερά $c \in \mathbb{R}$.

Αρα το σύνολο των αντιπαραγώγων μιας συνάρτησης f είναι στην πραγματικότητα της μορφής $\{F + c, c \in \mathbb{R}\}$ όπου F μια αντιπαράγωγος. Θα δούμε παρακάτω, όταν μελετήσουμε το ορισμένο ολοκλήρωμα, την σχέση που έχει μια τέτοια F (εκτός του ότι είναι αντιπαράγωγος) με την f.

Το σύνολο $\{F + c, c \in \mathbb{R}\}$ των αντιπαραγώγων μιας συνάρτησης θα το συμβολίζουμε με

$$\int f(x)dx$$

και θα εξηγήσουμε (όταν διατυπώσουμε και αποδείξουμε το πρώτο θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού) γιατί χρησιμοποιούμε το σύμβολο του ολοκληρώματος. Θα το ονομάζουμε **αόριστο ολοκλήρωμα** της f.

Μέχρι τώρα γνωρίζουμε αρκετές αντιπαραγώγους συναρτήσεων διότι γνωρίζουμε την παράγωγο αρκετών συναρτήσεων. Για παράδειγμα γνωρίζουμε ότι η παράγωγος της $\sin x$ είναι η $\cos x$ επομένως το σύνολο των αντιπαραγώγων της $\cos x$ είναι όλες οι συναρτήσεις της μορφής $\sin x + c$. Παρόμοια γνωρίζουμε την παράγωγο της $x^n, \cos x, \tan x, e^x$ κ.τ.λ. καθώς και των αντιστρόφων τους επομένως γνωρίζουμε το σύνολο των αντιπαραγώγων αυτών των συναρτήσεων. Τι γίνεται όμως αν μια συνάρτηση είναι άθροισμα (ή διαφορά) συναρτήσεων για τις οποίες γνωρίζουμε το σύνολο των αντιπαραγώγων τους (δηλαδή το αόριστο ολοκλήρωμά τους);

Θα δώσουμε στην συνέχεια ένα σημαντικό θεώρημα, για την ακρίβεια την ιδιότητα της **γραμμικότητας του αορίστου ολοκληρώματος**, η οποία είναι εξαιρετικά χρήσιμη κατά τους υπολογισμούς.

ΘΕΩΡΗΜΑ 115 (ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑ) *Έστω f και g συνεχείς συναρτήσεις και $a, b \in \mathbb{R}$. Τότε ισχύει το εξής*

$$\int (af(x) + bg(x))dx = a \int f(x)dx + b \int g(x)dx$$

Δηλαδή, αν $f(x) = 2\sin x + 3e^x$ τότε το σύνολο των αντιπαραγώγων της f είναι οι συναρτήσεις $-2\cos x + 3e^x + c$ όπου $c \in \mathbb{R}$ ή αλλιώς

$$\int f(x)dx = -2\cos x + 3e^x + c$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 116 *Ισχύει ότι*

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

αλλά όχι

$$\int f(x)g(x)dx = \int f(x)dx \int g(x)dx$$

Κατασκευάστε αντιπαράδειγμα!

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 117 *Έστω μια συνάρτηση f η οποία δεν μηδενίζεται. Τότε η παράγωγος της συνάρτησης $\ln|f(x)|$ είναι ίση με $\frac{f'(x)}{f(x)}$. Επομένως*

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + c$$

Όπως θα δούμε παρακάτω, κάθε συνεχής συνάρτηση έχει μια αντιπαράγωγο αλλά δεν γνωρίζουμε κατ΄ ανάγκη τον συναρτησιακό της τύπο σε κλειστή μορφή (αν υπάρχει). Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι η συνάρτηση e^{-x^2} η οποία είναι συνεχής αλλά η αντιπαράγωγος της δεν έχει «κλειστό» συναρτησιακό τύπο.

Παραγοντική Ολοκλήρωση

Σε αυτή την ενότητα θα περιγράψουμε έναν τρόπο εύρεσης μιας αντιπαραγώγου μιας συνάρτησης f ή αλλιώς τον υπολογισμό του αορίστου ολοκληρώματος της f. Η τεχνική που θα αναπτύξουμε ονομάζεται **παραγοντική ολοκλήρωση** και στηρίζεται στο επόμενο θεώρημα (θεώρημα ολοκλήρωσης κατά παράγοντες).

ΘΕΩΡΗΜΑ 118 (ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΚΑΤΑ ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ) *Αν οι f και g είναι συνεχώς παραγωγίσιμες στο $I \subseteq \mathbb{R}$, τότε*

$$\int f(x)g^{'}(x)dx = f(x)g(x) - \int f^{'}(x)g(x)dx$$

στο I.

ΑΣΚΗΣΗ 119 *Να υπολογισθούν τα αόριστα ολοκληρώματα*

$$\int \ln x dx, \quad \int xe^x dx, \quad \int x^2e^x dx, \quad \int x \sin x dx.$$

ΛΥΣΗ.

- $\int \ln x dx = \int \ln x (x)' dx = x \ln x - \int (\ln x)' x dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + c$
- $\int x e^x dx = \int x (e^x)' dx = x e^x - \int e^x (x)' dx = x e^x - e^x + c$
- $\int x^2 e^x dx = \int x^2 (e^x)' dx = x^2 e^x - 2 \int e^x x dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + c$
- $\int x \sin x dx = -\int x (\cos x)' dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + c$

$\square$

Άσκηση 120 *Να αποδειχθούν οι ισότητες*

$$\begin{aligned} I &= \int \cos(ax+b) e^{kx} dx \\ &= \frac{k \cos(ax+b) + a \sin(ax+b)}{a^2+k^2} e^{kx} + c, \quad k^2 + a^2 \neq 0. \\ J &= \int \sin(ax+b) e^{kx} dx \\ &= \frac{k \sin(ax+b) - a \cos(ax+b)}{a^2+k^2} e^{kx} + c, \quad k^2 + a^2 \neq 0. \end{aligned}$$

ΛΥΣΗ. Θα εφαρμόσουμε δύο φορές την ολοκλήρωση κατά παράγοντες

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{1}{k}\int \cos(ax+b)(e^{kx})'dx \\
&= \frac{1}{k}\cos(ax+b)e^{kx} - \frac{1}{k}\int (\cos(ax+b))'e^{kx}dx \\
&= \frac{1}{k}\cos(ax+b)e^{kx} + \frac{a}{k^2}\int \sin(ax+b)(e^{kx})'dx \\
&= \frac{1}{k}\cos(ax+b)e^{kx} + \frac{a}{k^2}\sin(ax+b)e^{kx} \\
&\quad -\frac{a}{k^2}\int (\sin(ax+b))'e^{kx}dx \\
&= \frac{k\cos(ax+b)+a\sin(ax+b)}{k^2}e^{kx} - \frac{a^2}{k^2}I.
\end{aligned}
$$

Έπειτα λύνουμε ως προς I και έχουμε το ζητούμενο. Τα ίδια σχεδόν ισχύουν και για το J και αφήνεται σαν άσκηση. □

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 121 *Οι παραπάνω ισότητες μπορούν να αποδειχθούν και με παραγώγιση κατά μέλη.*

Ολοκλήρωση με Αντικατάσταση

Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε την μέθοδο της αντικατάστασης. Δηλαδή σκοπός μας είναι θέτοντας $u = \phi(x)$ να μετατρέψουμε το αρχικό ολοκλήρωμα ως προς x σε ένα ολοκλήρωμα ως προς u του οποίου όμως ο υπολογισμός θα είναι ευκολότερος. Συμβολικά θα γράφουμε $du = \phi^{'}(x)dx$ και θα αντικαθιστούμε κατάλληλα.

ΑΣΚΗΣΗ 122 *Να υπολογισθεί το* $\int x\cos(x^2+1)dx$.

ΛΥΣΗ. Θέτουμε $u = x^2 + 1$ και επομένως (συμβολικά) $du = 2xdx$. Επομένως το αρχικό ολοκλήρωμα γράφεται

$$\frac{1}{2}\int \cos(u)du$$

Οπότε

$$\frac{1}{2}\int \cos u du = \frac{1}{2}\sin u + c$$

και αντικαθιστώντας το $u = x^2 + 1$ έχουμε ότι

$$\int x\cos(x^2+1)dx = \frac{1}{2}\sin(x^2+1) + c$$

Τέλος επαληθεύουμε παραγωγίζοντας την συνάρτηση $\frac{1}{2}\sin(x^2+1)+c$. $\square$

ΑΣΚΗΣΗ 123 *Να υπολογισθεί το* $\int \sin^2 x \cos x dx$.

ΛΥΣΗ. Θέτουμε $u = \sin x$ και επομένως $du = \cos x dx$. Δηλαδή το αρχικό ολοκλήρωμα γράφεται

$$\int u^2 du = \frac{u^3}{3}$$

Αντικαθιστώντας το u έχουμε

$$\int \sin^2 x \cos x dx = \frac{\sin^3 x}{3}$$

Επαληθεύστε! $\square$

ΑΣΚΗΣΗ 124 *Να υπολογισθεί το* $\int \cos^2 x dx$.

ΛΥΣΗ. Γνωρίζουμε από την τριγωνομετρία ότι $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, άρα

$$\int \cos^2 dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos(2x)dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\int \cos(2x)dx.$$

Θέτουμε $u = 2x$ επομένως $du = 2dx$. Δηλαδή

$$\int \cos(2x)dx = \frac{1}{2}\int \cos u du = \frac{1}{2}\sin u$$

Επομένως, $\int \cos^2 dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin(2x) + c$. Επαληθεύστε! □

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 125 *Όταν υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης καλό είναι στην συνέχεια να επαληθεύουμε το αποτέλεσμα. Η επαλήθευση θα γίνει αν παραγωγίσουμε το ολοκλήρωμα της f και το αποτέλεσμα είναι η συνάρτηση f. Επαληθεύστε όλα τα προηγούμενα αποτελέσματα.* □

Στα επόμενα παραδείγματα θέτουμε $t = \phi(x)$ και λύνουμε ως προς x προκειμένου να προχωρήσουμε.

Άσκηση 126 *Να υπολογισθεί το*

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$$

Λύση. Θέτουμε $t = \sqrt{x}$ και άρα $x = t^2$. Επομένως (συμβολικά) $dx = 2tdt$. Δηλαδή το αρχικό ολοκλήρωμα μετασχηματίσθηκε στο $\int \frac{2t}{1+t}dt$, δηλαδή

$$\begin{aligned}
\int \frac{2t}{1+t}dt &= 2\int \frac{1+t-1}{1+t}dt \\
&= 2\int dt - 2\int \frac{1}{1+t}dt \\
&= 2t - 2\ln|1+t| \\
&= G(t) + c
\end{aligned}$$

Οπότε τελικά ισχύει

$$\int f(x)dx = 2\sqrt{x} - 2\ln(1+\sqrt{x}) + c, \qquad \text{για } x \geq 0$$

$\square$

ΑΣΚΗΣΗ 127 *Να υπολογισθεί το*

$$\int \sqrt{4-x^2}dx$$

ΛΥΣΗ. Θέτουμε $x = \phi(t) = 2\sin t$ και επομένως $dx = 2\cos t dt$. Αρα $t = \phi^{-1}(x) = \arcsin\frac{x}{2}$. Τότε έχουμε

$$\int \sqrt{4-x^2}dx = \int 4\cos^2 t dt = 2t + \sin(2t) + c$$

Όμως $t = \arcsin\frac{x}{2}$ και

$$\sin 2t = 2\sin t\cos t = 2\sin(\arcsin\frac{x}{2})\cos(\arcsin\frac{x}{2}) = \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}$$

Σημειώστε ότι $\cos(\arcsin\frac{x}{2}) = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin\frac{x}{2})} = \sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$.

Επομένως το αρχικό ολοκλήρωμα είναι

$$\int \sqrt{4-x^2}dx = 2\arcsin\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + c$$

$\square$

Ολοκλήρωση Ρητών Συναρτήσεων

Έστω η ρητή συνάρτηση $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ όπου P, Q είναι δύο πολυώνυμα. Υποθέτουμε ότι ο βαθμός του P είναι μικρότερος του Q.

Σε αυτή την ενότητα θα δούμε πως θα ολοκληρώνουμε τέτοιου είδους εκφράσεις. Η βασική ιδέα είναι να τις αναλύουμε σε άθροισμα απλών κλασμάτων και έπειτα να ολοκληρώνουμε το άθροισμα.

Ορισμος 128 *Οι ρητές συναρτήσεις της μορφής*

$$\frac{A}{(x-a)^k}, \quad \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^k}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad b^2 - 4ac < 0.$$

ονομάζονται ***απλά κλάσματα****.*

Με την επόμενη πρόταση, την οποία θα δώσουμε χωρίς απόδειξη, θα δούμε πως οι ρητές συναρτήσεις αναλύονται σε απλά κλάσματα.

Προταση 129 *Κάθε ρητή συνάρτηση, όπως περιγράφεται παραπάνω, αναλύεται κατά μοναδικό τρόπο σε άθροισμα απλών κλασμάτων.*

Συγκεκριμένα,

1) αν a είναι μια πραγματική ρίζα του $Q(x)$ πολλαπλότητας k, ή αλλιώς $Q(x) = (x-a)^k Q_1(x)$ με $Q_1(a) \neq 0$, τότε

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{A_{k-1}}{(x-a)^{k-1}} + \cdots + \frac{A_1}{x-a} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)},$$

όπου $A_1, A_2, \cdots, A_k$ σταθεροί πραγματικοί αριθμοί.

2) αν $a+bi$ είναι μια μιγαδική ρίζα του $Q(x)$ βαθμού μ, ή αλλιώς $Q(x) = [(x-a)^2+b^2]^\mu Q_2(x)$ με $Q_2(a+bi) \neq 0$, τότε

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_\mu x + B_\mu}{[(x-a)^2+b^2]^\mu} + \frac{A_{\mu-1} x + B_{\mu-1}}{[(x-a)^2+b^2]^{\mu-1}} + \cdots + \frac{A_1 x + B_1}{(x-a)^2+b^2} + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$$

Ιδιαίτερα βολικό είναι και το παρακάτω αποτέλεσμα, ειδικά στον μετασχηματισμό Fourier αλλά και στον υπολογισμό των σταθερών (δες παράδειγμα 133).

ΠΡΟΤΑΣΗ 130 *Αν $P(x)$ και $Q(x)$ όπως παραπάνω τότε*

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} = & \quad \frac{a_{11}}{x-x_1} + \frac{a_{12}}{(x-x_1)^2} + \cdots + \frac{a_{1n_1}}{(x-x_1)^{n_1}} \\ & + \frac{a_{21}}{x-x_2} + \frac{a_{22}}{(x-x_2)^2} + \cdots + \frac{a_{2n_2}}{(x-x_2)^{n_2}} \\ & + \cdots \\ & + \frac{a_{m1}}{x-x_m} + \frac{a_{m2}}{(x-x_m)^2} + \cdots + \frac{a_{mn_m}}{(x-x_m)^{n_m}}\end{aligned}$$

όπου $x_1, x_2, \cdots, x_m$ οι m διαφορετικές (μιγαδικές ρίζες εν γένει) του $Q(x)$ πολλαπλότητας $n_1, n_2, \cdots, n_m$ αντίστοιχα και a_{ij} μοναδικοί συντελεστές.

Παρατηρηση 131 *Αν θέλουμε να αναλύσουμε σε απλά κλάσματα τη ρητή συνάρτηση $\frac{P(x)}{Q(x)}$ όπου $P(x), Q(x)$ είναι πολυώνυμα θα πρέπει πρώτα να κάνουμε διαίρεση πολυωνύμων αν ο βαθμός του αριθμητή είναι μεγαλύτερος του βαθμού του παρονομαστή. Οπότε θα έχουμε*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \pi(x) + \frac{v(x)}{Q(x)}$$

όπου $\pi(x)$ κάποιο πολυώνυμο και $v(x)$ το υπόλοιπο της διαίρεσης το οποίο θα είναι ένα βαθμού μικρότερο από το βαθμό του $Q(x)$. Εφόσον το πολυώνυμο $Q(x)$ έχει πραγματικούς συντελεστές τότε θα γράφεται στη μορφή $Q(x) = (x-x_1)^{r_1}(x-x_2)^r_2 \cdots (x-x_m)^{r_m}(x-z_1)^{l_1}(x-\bar{z}_1)^{l_1} \cdots (x-z_k)^{l_k}(x-\bar{z}_k)^{l_k}$ όπου $x_1, \cdots, x_m$ πραγματικές ρίζες πολλαπλότητας $r_1, \cdots, r_m$ αντίστοιχα και $z_1, \cdots, z_k$ μιγαδικές ρίζες πολλαπλότητας $l_1, \cdots, l_k$ αντίστοιχα. Παρατηρήστε ότι ρίζες με την ίδια πολλαπλότητα θα είναι και οι συζυγείς τους. Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα θα υπάρχουν κατάλληλες στα-

θερές έτσι ώστε

$$\begin{aligned}
\frac{v(x)}{Q(x)} &= \frac{a_{1,1}}{(x-x_1)^{r_1}} + \cdots + \frac{a_{1,r_1}}{x-x_1} \\
&+ \frac{a_{2,1}}{(x-x_2)^{r_2}} + \cdots + \frac{a_{2,r_2}}{x-x_2} \\
&\vdots \\
&+ \frac{a_{m+1,1}}{(x-z_1)^{l_1}} + \cdots + \frac{a_{m+k,l_1}}{x-z_1} \\
&+ \frac{a_{m+1,1}}{(x-\bar{z}_1)^{l_1}} + \cdots + \frac{a_{m+k,l_1}}{x-\bar{z}_1} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Μπορούμε να υπολογίσουμε τους συντελεστές (με κόκκινο χρώμα) που είναι πάνω από τους μεγιστοβάθμιους όρους (π.χ. πάνω από το $(x-x_1)^{r_1}$*) πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη με το παρονομαστή αυτό και θέτοντας* $x = x_1$ *για παράδειγμα (στην πραγματικότητα λαμβάνουμε το όριο καθώς* $x \to x_1$*). Με αυτό το τρόπο μπορούμε να υπολογίσουμε όλους τους συντελεστές που βρίσκονται πάνω από τους μεγιστοβάθμιους όρους, δηλαδή τους* $a_{1,1}, a_{2,1}, \cdots$. *Στη συνέχεια φέρνουμε τα κλάσματα αυτά στο αριστερό μέλος και υπολογίζουμε* *τις σταθερές που βρίσκονται πάνω από τους εναπομείναντες μεγιστοβάθμιους όρους κ.τ.λ.*

Αν το αναλύσουμε σύμφωνα με το θεώρημα 129 τότε το κλάσμα $\frac{Bx+C}{[(x-a)^2+b^2]^m} = \frac{Bx+C}{(x-z)^m(x-\bar{z})^m}$ *όπου* z *μιγαδικός. Πολλαπλασιάζουμε με τον παρονομαστή κατά μέλη και παίρνουμε τα όρια καθώς* $x \to z$ *και* $x \to \bar{z}$. *Δημιουργούνται δυο εξισώσεις με αγνώστους τους* B, C. *Αφού τους υπολογίσουμε στέλνουμε το κλάσμα αυτό στο αριστερό μέλος και στη συνέχεια υπολογίζουμε τους συντελεστές του* $\frac{Dx+E}{[(x-a)^2+b^2]^{m-1}}$ *με τον ίδιο τρόπο.* □

Παραδειγμα 132 *Θα αναλύσουμε σε απλά κλάσματα τη ρητή συνάρτηση*

$$\frac{1}{x^4+1}$$

Πρώτα θα υπολογίσουμε τις ρίζες του παρονομαστή. Εφόσον $x^4 = -1$ *τότε* $x^2 = \pm i$ *και επομένως οι ρίζες θα είναι οι* $x_{1,2} = \pm\sqrt{i}$ *και* $x_{3,4} = \pm\sqrt{-i}$. *Αφού* $e^{i\pi/2} = i$ *τότε* $\sqrt{i} = e^{i\pi/4} = \cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4) =$

$\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$. *Αυτό σημαίνει ότι*

$$\begin{aligned} & x^4+1 \\ = \; & (x-\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}})(x-\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}})(x+\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}})(x+\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}) \\ = \; & \left((x-\frac{1}{\sqrt{2}})^2+1/2\right)\left((x+\frac{1}{\sqrt{2}})^2+1/2\right) \end{aligned}$$

Οπότε

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{Ax+B}{(x-\frac{1}{\sqrt{2}})^2+1/2} + \frac{Cx+D}{(x+\frac{1}{\sqrt{2}})^2+1/2}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 133 *Να αναλυθεί σε απλά κλάσματα η ρητή συνάρτηση*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2x-1}{(x-1)(x+2)(x-3)}.$$

ΛΥΣΗ. Αφού ο παρονομαστής έχει 3 απλές πραγματικές ρίζες, θα υπάρχουν A, B, Γ τέτοιες ώστε

$$\frac{2x-1}{(x-1)(x+2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{\Gamma}{x-3},$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Για να υπολογίσουμε τα A, B, Γ μπορούμε να κάνουμε το εξής. Πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση με $(x-1)$, ύστερα θέτουμε $x = 1$ (στην πραγματικότητα λαμβάνουμε το όριο καθώς $x \to 1$) και υπολογίζουμε το A, δηλαδή $A = \frac{2\cdot 1-1}{(1+2)(1-3)} = -\frac{1}{6}$. Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζουμε και τα υπόλοιπα, οπότε $B = -\frac{1}{3}$, $\Gamma = \frac{1}{2}$. Αυτό είναι εφικτό όταν οι πολλαπλότητες των ριζών του παρονομαστή είναι ένα (είτε πραγματικές είτε μιγαδικές).

Αρα,

$$\frac{2x-1}{(x-1)(x+2)(x-3)} = -\frac{1}{6}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{3}\frac{1}{x+2} + \frac{1}{2}\frac{1}{x-3}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 134 *Να αναλυθεί σε απλά κλάσματα η ρητή συνάρτηση*

$$\frac{x+2}{(x+1)(x^2+1)^2}$$

ΛΥΣΗ. Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε την πρόταση 129. Αφού έχουμε μια πραγματική ρίζα και μια μιγαδική πολλαπλότητας 2 (το x^2+1 έχει δύο συζυγείς μιγαδικές ρίζες, άρα το $(x^2+1)^2$ έχει δύο συζυγείς πολλαπλότητας δύο), η ρητή συνάρτηση αναλύεται ως εξής

$$\frac{x+2}{(x+1)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+\Gamma}{(x^2+1)^2} + \frac{\Delta x+E}{x^2+1}.$$

Για να υπολογίσουμε τις σταθερές θα κάνουμε ομώνυμα τα κλάσματα (με άλλα λόγια πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη με τον παρονομαστή του αριστερού μέλους), και έπειτα θα εξισώσουμε τους αριθμητές. Θα εξισώσουμε τους συντελεστές του ενός πολυωνύμου με τους αντίστοιχους συντελεστές του άλλου πολυωνύμου και το γεγονός αυτό θα μας δώσει 5 εξισώσεις με 5 αγνώστους. Υπολογίστε την ανάλυση σε απλά κλάσματα χρησιμοποιώντας την πρόταση 130.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 135 *Θα αναλύσουμε σε απλά κλάσματα το εξής*

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)}$$

Ο παρονομαστής έχει μια πραγματική ρίζα, την $x=1$, *και δυο συζυγείς μιγαδικές, τις* $x=i$ *και* $x=-i$

πολλαπλότητας ένα. Αρα

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-i} + \frac{C}{x+i}$$

Πολλαπλασιάζοντας με $x-1$ *και στην συνέχεια θέτοντας* $x=1$ *λαμβάνουμε την σταθερά* $A=\frac{1}{2}$. *Κάνουμε το ίδιο για να υπολογίσουμε τις σταθερές* B *και* C, *δηλαδή πολλαπλασιάζουμε με* $x-i$ *και* $x+i$ *αντίστοιχα και ύστερα θέτουμε* $x=i$ *και* $x=-i$. *Έχουμε ότι* $B=\frac{1}{(i-1)2i}$ *και* $C=\frac{1}{(i+1)2i}$. *Οπότε*

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{1}{2}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{(i-1)2i(x-i)} + \frac{1}{(i+1)2i(x+i)}$$

Προσθέτοντας τα τελευταία δυο κλάσματα έχουμε

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{1}{2}\frac{1}{x-1} + \frac{-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}}{x^2+1}$$

□

ΑΣΚΗΣΗ 136 *Να αναλυθεί σε απλά κλάσματα η ρητή συνάρτηση*

$$f(x) = \frac{2x-5}{(x-2)(x^2+1)(x^2-2x+5)}$$

Υπολογίστε τις σταθερές χωρίς την επίλυση συστήματος.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 137 *Ο υπολογισμός του αόριστου ολοκληρώματος μιας ρητής συνάρτησης ανάγεται στον υπολογισμό ολοκληρωμάτων των εξής μορφών*

$$1) \int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + c,$$
$$2) \int \frac{dx}{(x-a)^n} = \frac{-1}{(n-1)} \frac{1}{(x-a)^{n-1}} + c$$

και των μορφών

$$J_n' = \int \frac{dx}{[(x-a)^2+b^2]^n},$$
$$I_n' = \int \frac{Ax+B}{[(x-a)^2+b^2]^n} dx.$$

Τα τελευταία δύο με τον μετασχηματισμό $x-a=tb$ μετατρέπονται σε ολοκληρώματα της μορφής

$$J_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$$
$$I_n = \int \frac{Ax+b}{(x^2+1)^n} dx.$$

Οπότε δεν έχουμε παρά να υπολογίσουμε τα δύο τελευταία ολοκληρώματα, τα οποία υπολογίζονται με αναγωγικό τύπο.

Ας υπολογίσουμε πρώτα το J_n.

$$
\begin{aligned}
J_n &= \int \frac{dx}{(x^2+1)^n} \\
&= \int \frac{x^2+1}{(x^2+1)^n}dx - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^n}dx \\
&= J_{n-1} - \frac{1}{2}\int x\frac{2x}{(x^2+1)^n}dx \\
&= J_{n-1} - \frac{1}{2}\int x\Big(-\frac{1}{n-1}\frac{1}{(x^2+1)^{n-1}}\Big)'dx \\
&= J_{n-1} + \frac{x}{2(n-1)}\frac{1}{(x^2+1)^{n-1}} - \frac{1}{2(n-1)}\int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}} \\
&= \frac{2n-3}{2n-2}J_{n-1} + \frac{x}{2(n-1)}\frac{1}{(x^2+1)^{n-1}}.
\end{aligned}
$$

Το $J_1 = \arctan x + c$.

Τώρα θα υπολογίσουμε το I_n.

$$\begin{aligned}
I_n &= \int \frac{Ax+B}{(x^2+1)^n}dx \\
&= \frac{A}{2}\int \frac{2x}{(x^2+1)^n}dx + B\int \frac{dx}{(x^2+1)^n} \\
&= \frac{A}{2n-2}\frac{-1}{(x^2+1)^{n-1}} + BJ_n.
\end{aligned}$$

Το I_1 *το υπολογίζουμε ως εξής.*

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int \frac{Ax+B}{x^2+1}dx = \frac{A}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx + B\int \frac{dx}{x^2+1} \\
&= \frac{A}{2}\ln(x^2+1) + B\arctan x + c
\end{aligned}$$

$\square$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 138 (Συμπλήρωση Τετραγώνου) *Στον υπολογισμό ολοκληρωμάτων ρητών συναρτήσεων (αλλά και αλλού) εμφανίζεται συχνά η περίπτωση όπου ένα τριώνυμο,* x^2+bx+c *με αρνητική διακρίνουσα, πρέπει να γραφεί στην μορφή* $(x-a)^2+d^2$. *Αυτό γίνεται ως* *εξής,*

$$\begin{aligned} x^2+bx+c &= x^2+2\frac{b}{2}x+\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(c-\left(\frac{b}{2}\right)^2\right) \\ &= \left(x+\frac{b}{2}\right)^2+\left(\sqrt{c-\left(\frac{b}{2}\right)^2}\right)^2 \end{aligned}$$

Προφανώς, η ποσότητα $c-(\frac{b}{2})^2$ είναι μεγαλύτερη από το μηδέν αφού έχουμε υποθέσει ότι η διακρίνουσα είναι αρνητική. Αν βρούμε τις (συζυγείς) μιγαδικές ρίζες του πολυωνύμου θα έχουν την μορφή $a \pm id$ οπότε εύκολα προκύπτει ότι

$$x^2+bx+c=(x-a)^2+d^2$$

$\square$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 139 *Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα*

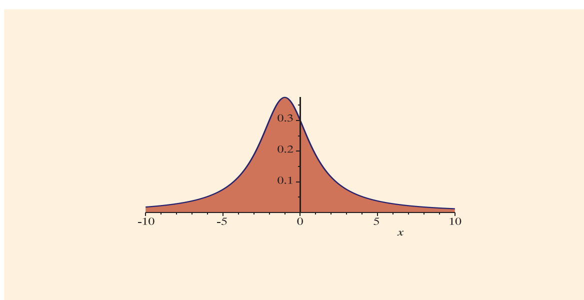
$$\int \frac{3}{2x^2+4x+10}dx$$

ΛΥΣΗ. Βγάζουμε έξω από το ολοκλήρωμα το $\frac{3}{2}$ και έχουμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα της $\frac{1}{x^2+2x+5}$.

Ο παρονομαστής έχει διακρίνουσα -16 άρα δεν έχει πραγματικές ρίζες αλλά δύο συζυγείς μιγαδικές. Σκοπός μας είναι να γράψουμε τον παρονομαστή στην μορφή $(x-a)^2+b^2$. Θα υπολογίσουμε τις μιγαδικές ρίζες του παρονομαστή, οι οποίες είναι $-1\pm 2i$. Αρα ο παρονομαστής γράφεται $(x+1)^2+2^2$. Θέτουμε $x+1=2t$ επομένως $dx=2dt$. Τελικά

$$\int \frac{3}{2x^2+4x+10}dx = \frac{3}{4}\arctan\frac{x+1}{2}+c.$$

□



Σχήμα 18: Η συνάρτηση $\frac{3}{2x^2+4x+10}$ με μπλε χρώμα και το εμβαδό που σχηματίζει με τον άξονα των x με κόκκινο χρώμα.

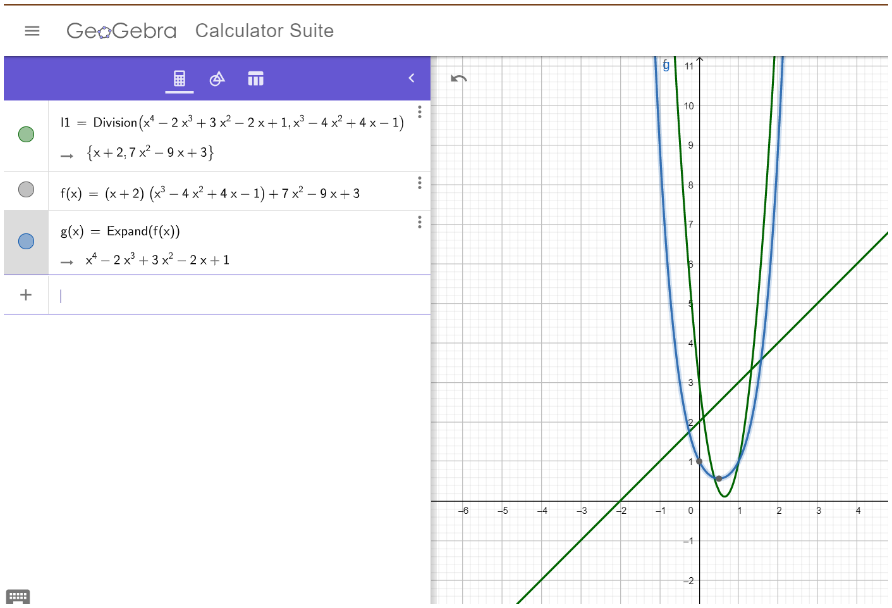
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 140 *Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα*

$$I = \int \frac{2x^2+2x-7}{(x-2)(x^2+1)^2}dx$$

ΛΥΣΗ. Αρχικά αναλύουμε την ρητή συνάρτηση σε άθροισμα απλών κλασμάτων.

$$\begin{aligned}
& \int \frac{2x^2+2x-7}{(x-2)(x^2+1)^2}dx \\
= & \int \frac{1}{5}\frac{1}{x-2} + \frac{x+4}{(x^2+1)^2} - \frac{1}{5}\frac{x+2}{x^2+1}dx \\
= & \frac{1}{5}\ln|x-2| - \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1} + 4\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} \\
& -\frac{1}{10}\ln(x^2+1) - \frac{2}{5}\arctan x \\
= & \frac{1}{5}\ln|x-2| + \frac{4x-1}{2(x^2+1)} - \frac{1}{10}\ln(x^2+1) + \frac{8}{5}\arctan x + c \\
= & \frac{4x-1}{2(x^2+1)} + \frac{1}{10}\ln\frac{(x-2)^2}{x^2+1)} + \frac{8}{5}\arctan x + c.
\end{aligned}$$

$\square$



Σχήμα 19: Διαίρεση πολυωνύμων με το Geogebra. Το αποτέλεσμα της διαίρεσης είναι το $x+2$ και το υπόλοιπο είναι το $7x^2-9x+3$. Δηλαδή ισχύει ότι $x^4-2x^3+3x^2-2x+1=(x+2)(x^3-4x^2+4x-1)+7x^2-9x+3$

Υπολογισμός Ολοκληρωμάτων με μετασχηματισμούς

Σε συγκεκριμένες μορφές ολοκληρώματων θα κάνουμε έναν συγκεκριμένο μετασχηματισμό με τον οποίο το αρχικό ολοκλήρωμα θα μετασχηματίζεται σε κάποιο άλλο ευκολότερα υπολογίσιμο.

Στις επόμενες μορφές ολοκληρωμάτων θα συμβολίζουμε με $R(x, y)$ μια συνάρτηση δυο μεταβλητών η οποία είναι ρητή συνάρτηση των μεταβλητών x και y.
Α. Στα ολοκληρώματα της μορφής

$$I = \int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+e}}\right) dx,$$

θέτουμε

$$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+e}},$$

οπότε

$$x = \phi(t) = \frac{et^n - b}{-ct^n + a}.$$

Στην συνέχεια υπολογίζουμε το $dx = \phi^{'}(t)dt$ και αντικαθιστούμε το x και το dx στο αρχικό ολοκλήρωμα. Το νέο ολοκλήρωμα που θα προκύψει θα είναι ως προς την μεταβλητή t. Γενικότερα στα ολοκληρώματα της μορφής,

$$I = \int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+e}\right)^{a_1}, \cdots, \left(\frac{ax+b}{cx+e}\right)^{a_k}\right) dx$$

όπου $a_i = \frac{m_i}{n_i}$ με $m_i, n_i \in \mathbb{N}$ για $i = 1, \cdots, k$, θέτουμε

$$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+e}}$$

όπου n είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των $n_1, \cdots, n_k$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 141 *Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα*

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x+1)^3(x-1)}}$$

ΛΥΣΗ. Έχουμε

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x+1)^3(x-1)}} = \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}}$$

Θέτουμε $t = \sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}} \Rightarrow x = \phi(t) = \frac{1+t^4}{1-t^4}$ άρα και $x+1 = \frac{2}{1-t^4}$. Επίσης $dx = \phi'(t) = \frac{8t^3}{(t^4-1)^2}dt$ Το αρχικό ολοκλήρωμα ανάγεται στο

$$\int \frac{4t^2}{1-t^4}dt = \ln|1-t^2| - 2\arctan t$$

Το ολοκλήρωμα αυτό υπολογίστηκε αναλύοντας σε απλά κλάσματα. Δηλαδή

$$\frac{4t^2}{1-t^4} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{1+t} + \frac{Ct+D}{1+t^2}$$

για κατάλληλες σταθερές A, B, C, D,

Τελικά

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x+1)^3(x-1)}} = \ln\left|1-\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right| - 2\arctan\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}} + c,$$

$\square$

B. Στα ολοκληρώματα της μορφής

$$\int R\left(\cos x, \sin x\right) dx,$$

θέτουμε $t = \tan\frac{x}{2}$ επομένως $x = \phi(t) = 2\arctan t$ και $\phi^{'}(t) = \frac{2}{1+t^2}$. Επίσης, προκύπτει ότι $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ και $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

Σε ειδικές μορφές της R μπορούμε να κάνουμε α-πλούστερους μετασχηματισμούς,

B_1 Αν $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ τότε θέτουμε $\sin x = t$ άρα $x = \phi(t) = \arcsin t$ και $\phi^{'}(t) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

B_2 Αν $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ τότε θέτουμε $\cos x = t$ άρα $x = \phi(t) = \arccos t$ και $\phi^{'}(t) = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$.

B_3 Αν $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ τότε θέτουμε $\tan x = t$ άρα $x = \phi(t) = \arctan t$ και $\phi^{'}(t) = \frac{1}{1+t^2}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 142 *Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα*

$$I_1 = \int \frac{\cos x}{2+\sin x}dx, \quad I_2 = \int \frac{\cos x + 1}{3\sin x + \sin^3 x}dx$$

ΛΥΣΗ.

· Θέτουμε $\sin x = t$ επομένως $x = \phi(t) = \arcsin t$ και $\phi^{'}(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ οπότε $dx = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$. Αντικαθιστώντας το x και το dx στο αρχικό ολοκλήρωμα καταλήγουμε στο

$$\int \frac{1}{2+t}dt = \ln|2+t|$$

Επομένως το αρχικό ολοκλήρωμα θα είναι

$$\int \frac{\cos x}{2+\sin x}dx = \ln|2+\sin x| + c$$

· Θέτουμε $\cos x = t$ και επομένως $x = \phi(t) = \arccos t$ και $\phi^{'}(t) = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ επομένως $dx = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$. Αντικαθιστώντας, το αρχικό ολοκλήρωμα μετασχηματίζεται στο

$$\int \frac{-1}{(t-1)(t-2)(t+2)}dt = \frac{1}{3}\ln|1-t| - \frac{1}{4}\ln(2-t) - \frac{1}{12}\ln(t+2)$$

Τελικά

$$\int \frac{\cos x + 1}{3\sin x + \sin^3 x} dx$$

$$= \frac{1}{3} \ln|1 - \cos x| - \frac{1}{4} \ln(2 - \cos x) - \frac{1}{12} \ln(\cos x + 2) + c,$$

$\square$

Γ. Στα ολοκληρώματα της μορφής

$$\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right) dx,$$

θέτουμε $x = \phi(t) = a \sin t$ άρα $t = \arcsin \frac{x}{a}$ και $\phi^{'}(t) = a \cos t$.

ΑΣΚΗΣΗ 143 *Υπολογίστε το*

$$\int \frac{1}{\sqrt{2 - x^2}} dx$$

ΛΥΣΗ. Θέτουμε $x = \phi(t) = \sqrt{2} \sin t$. Υπολογίζουμε την παράγωγο της ϕ η οποία είναι $\phi^{'}(t) = \sqrt{2} \cos t$ και επομένως $dx = \sqrt{2} \cos t dt$. Αντικαθιστώντας, το αρχικό ολοκλήρωμα γίνεται

$$\int 1 dt = t$$

Τελικά

$$\int \frac{1}{\sqrt{2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{\sqrt{2}} + c$$

□

Δ. Στα ολοκληρώματα της μορφής

$$\int R\left(x, \sqrt{bx^2 - a}\right) dx$$

θέτουμε $x = \phi(t) = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \cosh t$ άρα $t = \cosh^{-1} \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} x$ και $(\cosh t)' = \sinh t$.

ΑΣΚΗΣΗ 144 *Να υπολογισθεί το αόριστο ολοκλήρωμα*

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x^2 - 1}} dx$$

ΛΥΣΗ. Θέτουμε $x = \phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cosh t = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ θεωρώντας $t \in (0, +\infty)$. Επομένως $\phi'(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sinh t$ και $t = \ln\left(\sqrt{2}x + \sqrt{2x^2 - 1}\right)$ οπότε $dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \sinh t dt$. Αντικαθιστώντας το x και το dx στο αρχικό ολοκλήρωμα προκύπτει το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{1}{\sqrt{2}} dt = \frac{t}{\sqrt{2}}$$

Τελικά

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x^2 - 1}} dx = \frac{\ln\left(\sqrt{2}x + \sqrt{2x^2 - 1}\right)}{\sqrt{2}} + c$$

Αν θεωρούσαμε ότι $t \in (-\infty, 0)$ τότε θα ίσχυε ότι $t = \ln\left(\sqrt{2}x - \sqrt{2x^2-1}\right)$. Επιπλέον, συνεχίζοντας την ίδια διαδικασία θα είχαμε ότι

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x^2-1}}dx = -\frac{\ln\left(\sqrt{2}x - \sqrt{2x^2-1}\right)}{\sqrt{2}} + c$$

Το αρνητικό πρόσημο προκύπτει από το γεγονός ότι για $t \in (-\infty, 0)$ η $\sinh t$ είναι αρνητική και επομένως $\sqrt{\sinh^2 t} = -\sinh t$. Σημειώστε ότι οι αντιπαράγωγοι για τις δυο αυτές περιπτώσεις συμπίπτουν. Ακόμη όμως και αν αυτό δεν συνέβαινε τότε θα διέφεραν κατά μια σταθερά. $\square$

Ε. Στα ολοκληρώματα της μορφής

$$\int R\left(x, \sqrt{bx^2+a}\right) dx$$

θέτουμε $x = \phi(t) = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \sinh t$ άρα $t = \sinh^{-1} \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} x$ με $t \in \mathbb{R}$ άρα και $x \in \mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΗ 145 *Να υπολογισθεί το αόριστο ολοκλήρωμα*

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x^2+1}} dx$$

ΛΥΣΗ. Θέτουμε $x = \phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sinh t$ και επομένως $\phi'(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cosh t$ άρα $dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \cosh t dt$. Αντικαθιστούμε το x και το dx στο αρχικό ολοκλήρωμα και έχουμε το

$$\int \frac{1}{\sqrt{2}} dt = \frac{t}{\sqrt{2}}$$

Τελικά

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x^2+1}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \sinh^{-1}\left(\sqrt{2}x\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left(\sqrt{2}x + \sqrt{2x^2+1}\right) + c,$$

$\square$

Ζ. Στα ολοκληρώματα της μορφής

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$$

ξεχωρίζουμε τις παρακάτω τρεις περιπτώσεις (Αντικαταστάσεις του Euler).

· Αν $a > 0$ τότε θέτουμε

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm \sqrt{a}x$$

και λύνοντας ως προς x λαμβάνουμε την μορφή της $\phi(t)$, δηλαδή, $x = \phi(t) = \frac{t^2-c}{b\mp 2t\sqrt{a}}$. Αν η διακρίνουσα είναι αρνητική τότε με κατάλληλο μετασχηματισμό γράφουμε την ρίζα στην μορφή $\sqrt{kt^2+d}$ και συνεχίζουμε όπως σε προηγούμενη περίπτωση.

· Αν $a < 0$ και $c > 0$ θέτουμε

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = tx \pm \sqrt{c}$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο και λύνοντας ως προς x λαμβάνουμε την μορφή της $\phi(t)$ η οποία είναι $x = \phi(t) = \frac{b\mp 2t\sqrt{c}}{t^2-a}$. Η αντίστροφή της είναι η $t = \phi^{-1}(x) = \frac{\sqrt{ax^2+bx+c}\mp\sqrt{c}}{x}$ η οποία πρέπει να επεκταθεί συνεχώς στο

$x = 0$. Η συνεχής επέκτασή της στο μηδέν είναι ως εξής

$$t = \phi^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{ax^2+bx+c}\mp\sqrt{c}}{x}, & \text{όταν } x \neq 0 \\ \frac{b}{2\sqrt{c}}, & \text{όταν } x = 0 \end{cases}$$

· Αν $b^2 - 4ac > 0$ και r_1 μια ρίζα του τριωνύμου, τότε θέτουμε

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - r_1)$$

Εφόσον η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι θετική τότε θα έχει άλλη μια ρίζα, την r_2 και επομένως $ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2)$. Υψώνοντας στο τετράγωνο την ισότητα $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - r_1)$ και λύνοντας ως προς x λαμβάνουμε την μορφή της $\phi(t)$ η οποία είναι $x = \phi(t) = \frac{ar_2 - t^2 r_1}{a - t^2}$.

Ασκηση 146 *Να υπολογισθούν τα αόριστα ολοκληρώματα*

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - x + 1}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{-2x^2 + x + 1}}, \quad \int \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}dx$$

Λυση.

· Θέτουμε $t = \sqrt{x^2 - x + 1} + x$ οπότε $x = \phi(t) = \frac{1-t^2}{1-2t}$ με παράγωγο την $\phi^{'}(t) = 2\frac{t^2-t+1}{(1-2t)^2}$ άρα $dx = 2\frac{t^2-t+1}{(1-2t)^2}dt$.

Αντικαθιστούμε το x και το dx στο αρχικό ολοκλήρωμα και έχουμε το

$$\int -\frac{2}{1-t^2}dt = -\ln|\frac{t+1}{t-1}|$$

Τελικά

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+1}} = \ln\left|\frac{\sqrt{x^2-x+1}+x-1}{\sqrt{x^2-x+1}+x+1}\right| + c$$

Αν θέσουμε $t = \sqrt{x^2 - x + 1} - x$ τι αποτέλεσμα θα πάρουμε;

· Θέτουμε $tx + 1 = \sqrt{-2x^2 + x + 1}$ άρα $x = \phi(t) = \frac{1-2t}{t^2+2}$ και $\phi^{'}(t) = \frac{2t^2-2t-4}{(t^2+2)^2}$. Δηλαδή $dx = \frac{2t^2-2t-4}{(t^2+2)^2}dt$. Αντικαθιστούμε το x και το dx στο αρχικό ολοκλήρωμα και έχουμε το

$$\int -\frac{2}{t^2+2}dt = -\frac{2}{\sqrt{2}}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}}$$

Τελικά

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-2x^2+x+1}} = \sqrt{2}\arctan\frac{1-\sqrt{-2x^2+x+1}}{x\sqrt{2}} + c$$

Αν θέσουμε $tx - 1 = \sqrt{-2x^2+x+1}$ τι αποτέλεσμα θα πάρουμε;

Ως διαφορετική αντιμετώπιση του ίδιου ολοκληρώματος μπορούμε να γράψουμε την ολοκληρωτέα ποσότητα διαφορετικά, δηλαδή

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{-2x^2+x+1}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{4}{3}x-\frac{1}{3})^2}}$$

Διαπιστώνουμε ότι μια αντιπαράγωγος της συνάρτησης αυτής είναι η

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\frac{4}{3}x - \frac{1}{3}\right)$$

η οποία είναι καλά ορισμένη για $x \in \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$.

Εφόσον αυτές οι δυο συναρτήσεις είναι αντιπαράγωγοι της ίδιας συνάρτησης στο ίδιο διάστημα οφείλουν να διαφέρουν κατά μια σταθερά για κάθε $x \in (-\frac{1}{2}, 1)$ (ποια είναι η σταθερά;)

· Θέτουμε $t(x-2) = \sqrt{x^2-3x+2}$ οπότε $x = \phi(t) = \frac{1-2t^2}{1-t^2}$ και υπολογίζουμε την παράγωγο της ϕ η οποία είναι $\phi^{'}(t) = -\frac{2t}{(1-t^2)^2}$ οπότε $dx = -\frac{2t}{(1-t^2)^2}dt$. Αντικαθιστώντας το x και το dx στο αρχικό ολοκλήρωμα καταλήγουμε στο

$$\int \frac{4-6t^2}{(1-t^2)^2}dt = \frac{t}{t^2-1} + \frac{5}{2}\ln|\frac{t+1}{t-1}|$$

Τελικά

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2-3x+2}}dx$$
$$= \sqrt{x^2-3x+2} + \frac{5}{2}\ln|2x-3+2\sqrt{x^2-3x+2}| + c$$

Τι αποτέλεσμα θα πάρουμε αν θέσουμε $\sqrt{x^2-3x+2} = t(x-1)$; $\square$

Η. Στα ολοκληρώματα της μορφής

$$I = \int R(e^x)dx$$

όπου $R(\cdot)$ ρητή συνάρτηση, θέτουμε $x = \ln t$.

ΑΣΚΗΣΗ 147 *Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα*

$$\int \frac{dx}{\cosh x + 1}$$

όπου $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

ΛΥΣΗ. Το ολοκλήρωμα αυτό είναι στην πραγματικότητα το εξής

$$\int \frac{2e^x}{e^{2x} + 2e^x + 1} dx$$

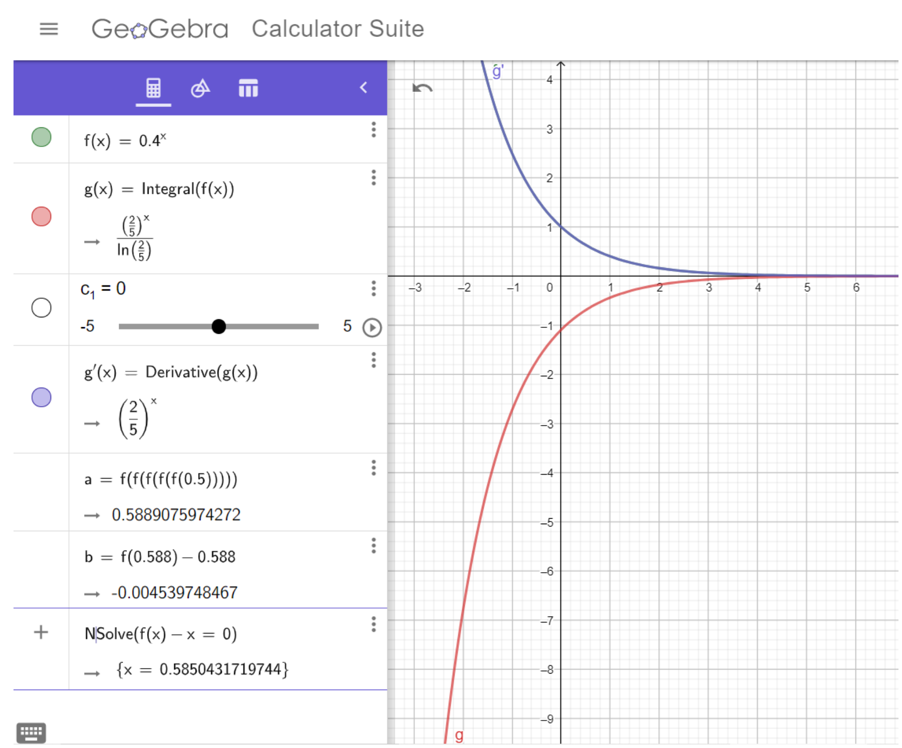
Θέτουμε $x = \phi(t) = \ln t$. Η παράγωγος της ϕ είναι $\phi'(t) = \frac{1}{t}$ οπότε $dx = \frac{1}{t}dt$. Αντικαθιστούμε το x και το dx στο αρχικό ολοκλήρωμα και έχουμε το

$$\int \frac{2}{(t+1)^2} dt = -\frac{2}{t+1}$$

Τελικά

$$\int \frac{dx}{\cosh x + 1} = -\frac{2}{e^x + 1} + c$$

όπου $c \in \mathbb{R}$ αυθαίρετη σταθερά. $\square$



Σχήμα 20: Θέτουμε την συνάρτηση $f(x) = (0.4)^x$. Με την εντολή `Integral(f(x))` υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα της συνάρτησης ενώ με την εντολή `Derivative(g(x))` υπολογίζουμε την παράγωγο μιας συνάρτησης. Αν θέλουμε να υπολογίσουμε μερικούς όρους της ακολουθίας $x_{n+1} = f(x_n)$ με αρχική τιμή $x_0 = 0.5$ μπορούμε να γράψουμε $f(f(f(f(0.5))))$. Με την εντολή `NSolve(f(x)-x=0)` υπολογίζουμε την λύση της εξίσωσης. Διαπιστώνουμε ότι η ακολουθία x_n συγκλίνει σε αυτή την ρίζα όπως προβλέπει το θεώρημα σταθερού σημείου.

Ορισμένο Ολοκλήρωμα

Έστω ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$ και μια συνάρτηση f φραγμένη στο διάστημα αυτό. Συμβολίζουμε με m, M το infimum και το supremum αντίστοιχα της συνάρτησης f στο διάστημα $[a, b]$. Χωρίζουμε το (a, b) σε n-υποδιαστήματα με $n-1$ ενδιάμεσα σημεία, δηλαδή

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

και συμβολίζουμε με Δ^n την διαμέριση

$$\{x_0, \cdots, x_n\}$$

Με δ^n συμβολίζουμε το

$$\delta^n = \max_i \{x_i - x_{i-1} : i = 1, \cdots, n\}$$

Δυο διαμερίσεις μπορεί να διαφέρουν ως προς το πλήθος των σημείων που έχουν μέσα στο διάστημα (a, b) αλλά και ως προς τα σημεία αυτά καθ' αυτά. Θα χρησιμοποιούμε διαμερίσεις για τις οποίες να ισχύει ότι $\delta^n \to 0$ καθώς $n \to \infty$, δηλαδή τις **κανονικές διαμερίσεις**.

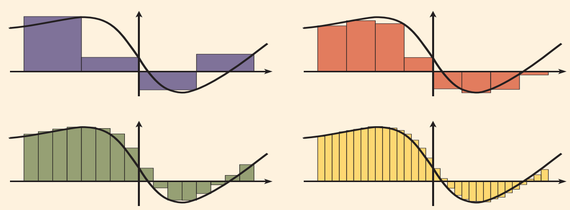
Έστω ξ_i ένα οποιοδήποτε σημείο στο υποδιάστημα (x_{i-1}, x_i). Κατασκευάζουμε το άθροισμα

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \quad \text{(άθροισμα Riemann)} \qquad (5)$$

το οποίο εξαρτάται από την διαμέριση Δ^n αλλά και από την επιλογή των ξ_i. Αν το παραπάνω άθροισμα συγκλίνει σε κάποιον αριθμό καθώς $n \to \infty$ (όπου $n-1$ το πλήθος των ενδιάμεσων σημείων στο (a,b)) και αν το όριο είναι ανεξάρτητο της επιλογής των ξ_i αλλά και της διαμέρισης τότε λέμε ότι η συνάρτηση f είναι **ολοκληρώσιμη** στο (a,b) και γράφουμε

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

Δείτε στο σχήμα 21 την σύγκλιση των αθροισμάτων Riemann στο εμβαδόν μιας συνάρτησης.

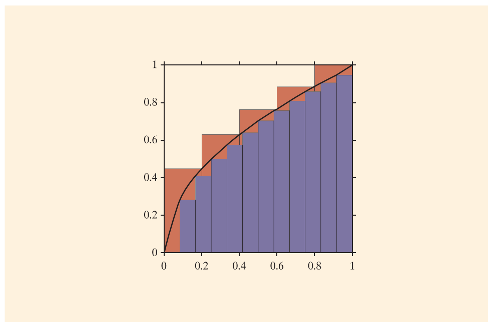


Σχήμα 21: Σύγκλιση αθροίσματος Riemann

Κατασκευάζουμε τα άνω και κάτω αθροίσματα (Darboux) (δείτε σχήμα 22)

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \quad \text{και} \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

όπου m_i, M_i είναι το infimum και το supremum της f αντίστοιχα στο διάστημα (x_{i-1}, x_i). Τα παραπάνω αθροίσματα εξαρτώνται μόνο από την συγκεκριμένη διαμέριση του (a, b). Είναι προφανές ότι $s_n \leq \sum f(\xi_i)(x_{i-1}, x_i) \leq S_n$ για οποιαδήποτε διαμέριση επομένως αν $s_n \to A$ και $S_n \to A$ τότε αναγκαστικά $\sum f(\xi_i)(x_{i-1}, x_i) \to A$. Επίσης, είναι εύκολο να δούμε ότι $m(b-a) \leq s_n \leq S_n \leq M(b-a)$ χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $m \leq m_i \leq M_i \leq M$ όπου m, M είναι το infimum και το supremum της f στο διάστημα (a, b). Αν υποθέσουμε ότι σε μια δοσμένη



Σχήμα 22: Ανω και κάτω αθροίσματα Darboux

διαμέριση προσθέσουμε ακόμη ένα σημείο x^* στο διάστημα (x_{j-1}, x_j) για κάποιο j τότε τα νέα αθροίσματα $s^{'}_{n+1}$ και $S^{'}_{n+1}$ είναι τ.ω. $s_n \leq s^{'}_{n+1} \leq S^{'}_{n+1} \leq S_n$ αφού

$$\begin{aligned}
s^{'}_{n+1} - s_n &= m_*(x^* - x_{j-1}) + m^*(x_j - x^*) - m_j(x_j - x_{j-1}) \\
&\geq m_j(x^* - x_{j-1}) + m_j(x_j - x^*) - m_j(x_j - x_{j-1}) \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

Σημειώστε ότι $m_* \geq m_j$ και $m^* \geq m_j$. Παρόμοιο συλλογισμό κάνουμε για να αποδείξουμε ότι $S'_{n+1} \leq S_n$. Αν προσθέσουμε περισσότερα από ένα σημεία το αποτέλεσμα είναι προφανές χρησιμοποιώντας τα παραπάνω επιχειρήματα.

Στην συνέχεια θα αποδείξουμε ότι ένα κάτω άθροισμα s_n είναι πάντοτε μικρότερο από ένα άνω άθροισμα S_m για οποιαδήποτε n, m και για οποιεσδήποτε διαμερίσεις. Πράγματι, έστω τα αθροίσματα s_n, S_n και s_m, S_m καθώς και τα αθροίσματα $s_{n,m}, S_{n,m}$ τα οποία είναι πάνω στην διαμέριση που περιέχει τα σημεία και των δυο άλλων διαμερίσεων. Τότε ισχύει ότι

$$\begin{aligned} s_n &\leq s_{n,m} \leq S_{n,m} \leq S_n \\ s_m &\leq s_{n,m} \leq S_{n,m} \leq S_m \end{aligned}$$

Οπότε εύκολα προκύπτει ότι $s_n \leq S_m$.

Συμβολίζουμε με I το ελάχιστο άνω φράγμα όλων των κάτω αθροισμάτων Darboux πάνω σε όλες τις πιθανές διαμερίσεις και με J το μέγιστο κάτω φράγμα όλων των άνω αθροισμάτων Darboux πάνω σε όλες τις πιθανές διαμερίσεις. Τότε, προφανώς ισχύει ότι

$$s_n \leq I \leq J \leq S_m$$

για οποιαδήποτε άνω και κάτω αθροίσματα Darboux, δηλαδή πάνω σε οποιεσδήποτε διαμερίσεις τόσο όσον αφορά το πλήθος των σημείων αλλά και την θέση των σημείων.

ΘΕΩΡΗΜΑ 148 *Για οποιαδήποτε διαμέριση ισχύει ότι*

$$\lim_{n\to\infty} s_n = I \quad \textit{και} \quad \lim_{n\to\infty} S_n = J$$

Κριτήρια Ολοκληρωσιμότητας

ΘΕΩΡΗΜΑ 149 *Μια φραγμένη συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα (a, b)* **αν και μόνο αν** *$I = J$ και σε αυτή την περίπτωση έχουμε*

$$\int_a^b f(x)dx = I = J$$

Οπότε, η f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα (a, b) αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση έτσι ώστε να ισχύει

$$S_n - s_n < \varepsilon$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 150 *Αν η f είναι μονότονη και φραγμένη στο $[a, b]$, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.*

Στην συνέχεια θα αποδείξουμε ότι κάθε συνεχής συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη. Για τον σκοπό αυτόν θα χρειαστούμε την έννοια της **ομοιόμορφης** συνέχειας την οποία θα περιγράψουμε τώρα. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, η έννοια της συνέχειας σε ένα σημείο a ορίζεται ως εξής,

$$\forall \varepsilon > 0, \ \ \exists \delta > 0 : |f(x) - f(a)| < \varepsilon \text{ όταν } |x - a| < \delta$$

όπου το δ εξαρτάται και από το a. Στην περίπτωση όπου μπορούμε να διαλέξουμε δ το οποίο να εξαρτάται μονάχα από το ε και όχι από το εκάστοτε a τότε λέμε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο διάστημα όπου αυτό είναι εφικτό.

ΟΡΙΣΜΟΣ 151 (ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗΣ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ) *Έστω μια συνάρτηση $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Θα λέμε ότι είναι* **ομοιόμορφα συνεχής** *στο I όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε*

$$\text{αν } x, y \in I \text{ είναι τ.ω. } |x - y| < \delta \text{ τότε } |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 152 *Έστω f συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, b]$. Τότε είναι και ομοιόμορφα συνεχής σε αυτό το διάστημα.*

ΘΕΩΡΗΜΑ 153 *Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$ τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Το αντίστροφο δεν ισχύει.*

Σημειώστε τις δυο παρακάτω παρατηρήσεις.

- Αν $a = b$ τότε το ολοκλήρωμα ορίζεται να είναι 0.

• Αν $a > b$ και η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[b, a]$ τότε ως ολοκλήρωμα $\int_a^b f$ ορίζουμε το $-\int_b^a f$.

Άσκηση 154 *Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με*

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ x+1, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 2]$.

Λύση. Θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα 150 και θα αποδείξουμε ότι η f είναι μονότονη και φραγμένη. Είναι πολύ εύκολο να δούμε ότι είναι φραγμένη αφού για κάθε $x \in [0, 2]$ ισχύει $0 \leq f(x) \leq 3$. Θα αποδείξουμε ότι είναι και μονότονη. Για κάθε $x, y \in [0, 2]$ με $y \geq x$ θα αποδείξουμε ότι $f(y) \geq f(x)$. Πράγματι, αν $x, y \in [0, 1]$ ή $x, y \in (1, 2]$ τότε ισχύει.

Αν $x \in [0, 1]$ και $y \in (1, 2]$ τότε $f(y) - f(x) = y + 1 - x = (y - x) + 1 \geq 1 \geq 0$. Άρα η f είναι και μονότονη, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα 150 είναι ολοκληρώσιμη.

Χρησιμοποιώντας την πρόταση 56 διαπιστώνουμε ότι η f δεν είναι συνεχής στο σημείο 1 αφού

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 2 \neq 1 = \lim_{x\to 1^-} f(x)$$

Σημειώστε το παραπάνω παράδειγμα σαν αντιπαράδειγμα για το ότι δεν ισχύει το αντίστροφο του θεωρήματος 153. □

Άσκηση 155 *Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν} \quad x \text{ άρρητος} \\ -1, & \text{αν} \quad x \text{ ρητός} \end{cases}$$

δεν είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.

Λυση. Θα αποδείξουμε ότι τα αθροίσματα Darboux δεν συγκλίνουν μεταξύ τους. Πράγματι,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) = b - a,$$

αφού $M_k = 1$. Σημειώστε, ότι σε κάθε διάστημα (x_{k-1}, x_k) υπάρχει πάντα ένας άρρητος, άρα σε κάθε διάστημα η συνάρτηση παίρνει την μέγιστη τιμή της. Επίσης,

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) = -(b-a),$$

αφού $m_k = -1$. Αρα,

$$S_n - s_n = b - a + b - a = 2(b-a) \neq 0.$$

Αν ήταν ολοκληρώσιμη, αναγκαστικά (σύμφωνα με το θεώρημα 149), τα αθροίσματα Darboux θα συνέκλιναν μεταξύ τους. □

ΘΕΩΡΗΜΑ 156 *Μια φραγμένη συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα στο οποίο περιέχει πεπερασμένου πλήθος ασυνεχειών της συνάρτησης.*

Στην πραγματικότητα μια συνάρτηση f μπορεί να είναι ολοκληρώσιμη ακόμη και αν έχει άπειρο πλήθος ασυνεχειών, για την ακρίβεια να είναι **συνεχής σχεδόν παντού** (δείτε στην βιβλιογραφία τι ακριβώς σημαίνει αυτό). Μάλιστα μια συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη **αν και μόνο αν** είναι συνεχής σχεδόν παντού.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 157 *Ως συμπέρασμα, έχουμε ότι αν δυο συναρτήσεις f και g είναι ίσες και ολοκληρώσιμες σε όλο το διάστημα $[a, b]$, εκτός από ένα πεπερασμένο πλήθος σημείων, τότε τα ολοκληρώματά τους θα είναι ίσα. Για να το δούμε αυτό κοιτάμε την συνάρτηση $h = f - g$ η οποία είναι παντού μηδέν εκτός από ένα πεπερασμένο πλήθος σημείων. Η διαφορά των μερικών αθροισμάτων Darboux μπορεί να γίνει όσο μικρή θέλουμε επιλέγοντας κατάλληλη διαμέριση. Αλλά έχουμε και άλλο συμπέρασμα με αυτό το σκεπτικό. Αν μια συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη σε ένα διάστημα $[a, b]$ τότε οποιαδήποτε συνάρτηση g η οποία διαφέρει από την f σε πεπερασμένου πλήθος σημεία, είναι και αυτή ολοκληρώσιμη και οι τιμές των ολοκληρωμάτων συμπίπτουν ή αλλιώς αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ μπορούμε να αλλάξουμε την τιμή της (αν αυτό βολεύει σε κάτι) σε πεπερασμένου πλήθους σημεία και να μην αλλάξει τίποτε ως προς το ολοκλήρωμά της.* $\square$

Ιδιότητες του ορισμένου Ολοκληρώματος

ΘΕΩΡΗΜΑ 158 *Αν οι συναρτήσεις f και g είναι ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$ και c σταθερά, τότε και οι συναρτήσεις $f + g$ και cf είναι ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$ και μάλιστα $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$ και $\int_a^b cf = c\int_a^b f$.*

ΘΕΩΡΗΜΑ 159 *Έστω ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a, b]$. Υποθέτουμε ότι μια συνάρτηση $\phi(x)$ είναι καλά ορισμένη και συνεχής στο διάστημα $[m^f, M^f]$ όπου m^f, M^f το infimum και το supremum της f στο $[a, b]$. Τότε η σύνθετη συνάρτηση $h = \phi \circ f$ είναι επίσης ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a, b]$.*

Έτσι, αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ τότε και οι συναρτήσεις f^p για $p \in \mathbb{R}$, e^f, $\ln f$ είναι ολοκληρώσιμες αρκεί να ικανοποιούν τις προϋποθέσεις του προηγούμενου θεωρήματος. Έστω μια συνάρτηση $f = h - g$ όπου h, g είναι φραγμένες και αύξουσες (όχι αναγκαία συνεχείς και πιθανόν με άπειρου πλήθους ασυνέχειες). Τότε από το θεώρημα 150 (δες και 158) προκύπτει ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και από το 159 προκύπτει πως κάθε κατάλληλη σύνθεση της είναι επίσης ολοκληρώσιμη. Οι συναρτήσεις οι οποίες είναι διαφορά δυο αυξουσών συναρτήσεων ονομάζονται συναρτήσεις **φραγμένης κύμανσης** (δες βιβλιογραφία για περισσότερες πληροφορίες).

Θεωρημα 160 *Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και για κάθε $x \in [a,b]$ ισχύει ότι $f(x) \geq 0$ τότε και $\int_a^b f \geq 0$.*

Επομένως, αν $f(x) \leq g(x)$ τότε και $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$ το οποίο προκύπτει από το προηγούμενο θεώρημα εφαρμόζοντάς το στην συνάρτηση $h(x) = g(x) - f(x) \geq 0$.

Προταση 161 *Έστω ότι $f(x) \geq 0$ στο διάστημα $[a,b]$ και ας υποθέσουμε ότι $\int_a^b f(x)dx = 0$. Τότε $f(x) = 0$ σε κάθε $x \in [a,b]$ για το οποίο η f συνεχής.*

Θεωρημα 162 *Αν η f είναι ολοκληρώσιμη τότε*

$$\Big|\int_a^b f\Big| \leq \int_a^b |f|.$$

Η συνάρτηση της άσκησης 155 είναι ένα παράδειγμα συνάρτησης όπου η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη αλλά η f όχι.

ΘΕΩΡΗΜΑ 163 *Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και $a < c < b$ τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στα διαστήματα $[a, c]$ και $[c, b]$ και $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.*

Θεωρήματα Μέσης Τιμής

ΘΕΩΡΗΜΑ 164 *Αν η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και για κάθε $x \in [a,b]$, έχουμε $m \leq f(x) \leq M$, $(m, M \in \mathbb{R})$ τότε υπάρχει $\mu \in [m, M]$ έτσι ώστε $\int_a^b f = \mu(b-a)$.*

ΘΕΩΡΗΜΑ 165 **(Θεώρημα Μέσης Τιμής Ολοκληρωμάτων)** *Αν η f είναι συνεχής στο $[a,b]$, τότε υπάρχει $\xi \in [a,b]$ τέτοιο ώστε $\int_a^b f = f(\xi)(b-a)$.*

ΘΕΩΡΗΜΑ 166 *Αν οι συναρτήσεις f, g είναι ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$ και για κάθε $x \in [a,b]$ ισχύει ότι $m \leq f(x) \leq M$ και ακόμη για κάθε $x \in [a,b]$ ισχύει ότι$g(x) \geq 0$ ή $g(x) \leq 0$, τότε υπάρχει $\mu \in [m, M]$ έτσι ώστε $\int_a^b fg = \mu \int_a^b g$.*

ΘΕΩΡΗΜΑ 167 *Αν η f είναι συνεχής στο $[a,b]$ και g ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και για κάθε $x \in [a,b]$ έχουμε $g(x) \geq 0$ ή $g(x) \leq 0$, τότε υπάρχει $\xi \in [a,b]$ έτσι ώστε $\int_a^b fg = f(\xi) \int_a^b g$.*

Αντιπαράγωγος και Ορισμένο Ολοκλήρωμα

Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ είναι γνωστό ότι για κάθε $x \in [a, b]$, η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, x]$. Επομένως μπορούμε να ορίσουμε μια νέα συνάρτηση $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ όπου για κάθε $x \in [a, b]$, $F(x) = \int_a^x f$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 168 *Αν η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$, τότε η συνάρτηση*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

είναι συνεχής.

Το επόμενο θεώρημα είναι γνωστό ως πρώτο θεμελιώδες θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

ΘΕΩΡΗΜΑ 169 (ΠΡΩΤΟ ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑ) *Αν η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο (a, b), τότε η συνάρτηση*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

είναι παραγωγίσιμη για τα x για τα οποία η f είναι συνεχής και ισχύει ότι

$$F^{'}(x) = f(x)$$

Σε προηγούμενη παράγραφο, είχαμε συμβολίσει το σύνολο των αντιπαραγώγων μιας συνάρτησης f με το σύμβολο $\int f(x)dx$ και το είχαμε ονομάσει αόριστο ολοκλήρωμα. Τώρα, έχοντας αποδείξει το πρώτο θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού, βλέπουμε ότι μια αντιπαράγωγος της f είναι η $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ σε κάθε διάστημα $[a, x]$ που η f είναι ολοκληρώσιμη, δηλαδή, σχετίζεται με το ορισμένο ολοκλήρωμα της f σε ένα κλειστό διάστημα. Για τον λόγο αυτό επιλέξαμε να συμβολίσουμε το σύνολο των αντιπαραγώγων μιας συνάρτησης f με το σύμβολο του ολοκληρώματος.

Κάθε συνεχής συνάρτηση έχει μια αντιπαράγωγο, όπως είδαμε στο προηγούμενο θεώρημα, αλλά αυτό δεν σημαίνει ότι μπορούμε πάντοτε να την βρούμε σε κλειστή μορφή όπως λέμε, δηλαδή να βρούμε τον συναρτησιακό της τύπο. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι η συνάρτηση $f(x) = e^{-x^2}$ η οποία όχι μόνο είναι συνεχής αλλά και άπειρες φορές παραγωγίσιμη, παρόλα αυτά δεν μπορούμε να καταγράψουμε την αντιπαράγωγο της σε κλειστή συναρτησιακή μορφή.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 170 *Το παραπάνω θεώρημα είναι πολύ σημαντικό διότι μας δίνει την μορφή της αντιπαραγώγου μιας συνάρτησης. Είναι πολύ εύκολο να αποδειχθεί ότι το σύνολο των αντιπαραγώγων μιας συνάρτησης είναι το σύνολο $F+c$ με c σταθερά. Το προηγούμενο θεώρημα μαζί με το επόμενο (δεύτερο θεμελιώδες θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού) μας λύνουν τα χέρια για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων.* $\square$

ΘΕΩΡΗΜΑ 171 (ΔΕΥΤΕΡΟ ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑ) *Αν η f είναι συνεχής στο $[a,b]$, τότε*

$$\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a),$$

όπου G μια οποιαδήποτε αντιπαράγωγος της f στο $[a,b]$.

Στην πραγματικότητα αρκεί η f να είναι ολοκληρώσιμη στο (a,b) και η G μια οποιαδήποτε αντιπαράγωγος της f.

Σημειώστε ότι συχνά στην βιβλιογραφία γράφουμε το εξής

$$\int_a^b f(x)dx = \Big[G(x)\Big]_a^b \text{ ή } \int_a^b f(x)dx = G(x)\Big|_a^b$$

εννοώντας την ισότητα $\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a)$ του παραπάνω θεωρήματος.

ΘΕΩΡΗΜΑ 172 (ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ)
Έστω δυο παραγωγίσιμες συναρτήσεις f και g στο ίδιο διάστημα $[a,b]$. Τότε

$$\int_a^b f^{'}(x)g(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g^{'}(x)dx$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 173 (ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΗΣ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ)
Έστω μια συνεχής συνάρτηση f στο διάστημα $[a,b]$ και έστω δυο συνεχείς συναρτήσεις $\phi : [c,d] \to [a,b]$ και $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε $f(\phi(t))\phi^{'}(t) = g(t)$ όπου επιπλέον η ϕ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη. Τότε

$$\int_c^d g(t)dt = \int_{\phi(c)}^{\phi(d)} f(x)dx \quad (\text{ΠΡΩΤΗ ΜΟΡΦΗ})$$

Αν, επιπλέον, η ϕ είναι γνησίως μονότονη στο $[c,d]$ και $(\phi^{'} \circ \phi^{-1})(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [a,b]$, τότε

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} g(t)dt \quad (\text{ΔΕΥΤΕΡΗ ΜΟΡΦΗ})$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 174 *Η συνάρτηση e^{-t^2} δεν έχει αντιπαράγωγο σε κλειστή μορφή επομένως το ολοκλήρωμα*

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt \tag{6}$$

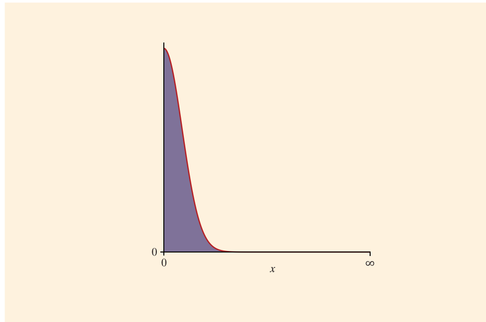
υπολογίζεται με προσεγγιστικές τεχνικές και η τιμή του συμβολίζεται με $\mathrm{erf}(x)$. *Δηλαδή, ενώ η* $\mathrm{erf}(x)$ *είναι μια «κανονική» συνάρτηση (ονομάζεται συνάρτηση σφάλματος) κατά τα άλλα (και μάλιστα η αντιπαράγωγος της $\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-t^2}$) δεν γράφεται σε κλειστό συναρτησιακό τύπο.*

Μπορούμε να θεωρήσουμε ως δεδομένο ότι,

$$\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

και επομένως εύκολα προκύπτει ότι

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$$



Σχήμα 23: Με κόκκινο χρώμα είναι το γράφημα της συνάρτησης e^{-x^2} ενώ με μπλε είναι το εμβαδό που σχηματίζει.

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε για παράδειγμα το ολοκλήρωμα

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-(t-2)^2}dt$$

*θα ήταν βολικό να το μετατρέψουμε στην μορφή του 6 και έπειτα να χρησιμοποιήσουμε μαθηματικό λογισμικό το οποίο υπολογίζει ικανοποιητικά αυτό το ολοκλήρωμα. Για να γίνει η μετατροπή θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα της αντικατάστασης 173 (***ΠΡΩΤΗ ΜΟΡΦΗ***). Στην περίπτωση μας έχουμε* $g(t) = e^{-(t-2)^2}$ $f(x) = e^{-x^2}$ *και* $\phi(t) = t - 2$ *οπότε είναι προφανές ότι*

$g(t) = f(\phi(t))\phi^{'}(t)$. *Από το θεώρημα 173 έχουμε ότι*

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x g(t)dt \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\phi(0)}^{\phi(x)} f(r)dr \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{-2}^{x-2} e^{-r^2}dr \\
&= \mathrm{erf}(x-2) - \mathrm{erf}(-2)
\end{aligned}$$

Γενικότερα, αν $f(x) = e^{-x^2}$ *και για μια συνάρτηση* $g(t)$ *υπάρχει συνάρτηση* $\phi(t)$ *συνεχώς παραγωγίσιμη τέτοια ώστε* $g(t) = f(\phi(t))\phi^{'}(t)$ *σε κάποιο διάστημα, τότε*

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x g(t)dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\phi(0)}^{\phi(x)} f(r)dr = \mathrm{erf}(\phi(x)) - \mathrm{erf}(\phi(0))$$

Οπότε το ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}dt &= \frac{2\sigma\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}\frac{1}{\sigma\sqrt{2}}dt \\
&= \frac{2\sigma\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_{\phi(0)}^{\phi(x)} f(r)dr \\
&= \sigma\sqrt{2}\Big(\operatorname{erf}(\phi(x)) - \operatorname{erf}(\phi(0))\Big)
\end{aligned}$$

όπου $\phi(t) = \frac{t-m}{\sigma\sqrt{2}}$.

Το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}dt = \int_{-\infty}^{m} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}dt + \int_{m}^{\infty} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}dt$$

Όμως

$$\int_m^x e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}dt = \sigma\sqrt{2}\int_{\phi(m)}^{\phi(x)} e^{-r^2}dr = \sigma\sqrt{2}\int_0^{\phi(x)} e^{-r^2}dr$$

και

$$\int_{-x}^m e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}dt = \sigma\sqrt{2}\int_{\phi(-x)}^{\phi(m)} e^{-r^2}dr = \sigma\sqrt{2}\int_{\phi(-x)}^{0} e^{-r^2}dr$$

όπου $\phi(t) = \frac{t-m}{\sigma\sqrt{2}}$. *Επειδή*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt = \lim_{x \to +\infty} \Big(\int_{-x}^{m} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dr + \int_{m}^{x} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dr \Big)$$

τότε χρησιμοποιώντας το

$$\int_{0}^{\infty} e^{-r^2} dr = \int_{-\infty}^{0} e^{-r^2} dr = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

και το ότι $\phi(x) \to +\infty$ *και* $\phi(-x) \to -\infty$ *καθώς* $x \to +\infty$ *προκύπτει ότι*

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt = 1$$

Στην συνέχεια θα υπολογίσουμε το ορισμένο ολοκλήρωμα

$$\int_{1}^{2} \frac{e^{-x}}{2\sqrt{x}} dx$$

Παρότι η ολοκληρωτέα ποσότητα δεν είναι της μορφής $R(x, \sqrt{x})$ *όπου* $R(x, y)$ *ρητή συνάρτηση, η παρουσία του όρου* $\sqrt{x}$ *μας προτρέπει να δοκιμάσουμε την αντικατάσταση* $t = \sqrt{x}$ *(και επομένως* $x = t^2$*). Σχηματίζουμε την ποσότητα* $f(\phi(t))\phi^{'}(t)$ *όπου* $f(x) = \frac{e^{-x}}{2\sqrt{x}}$ *και*

$\phi(t) = t^2$ *και έχουμε* $f(\phi(t))\phi'(t) = e^{-t^2}$ *επομένως, σύμφωνα με το* *173* *(*ΔΕΥΤΕΡΗ ΜΟΡΦΗ*), προκύπτει ότι*

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{e^{-x}}{2\sqrt{x}}dx &= \int_{\phi^{-1}(1)}^{\phi^{-1}(2)} f(\phi(t))\phi'(t)dt \\ &= \int_1^{\sqrt{2}} e^{-t^2}dt \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\Big(\mathrm{erf}(\sqrt{2}) - \mathrm{erf}(1)\Big)\end{aligned}$$

$\square$

Για άλλα ολοκληρώματα για τα οποία δεν υπάρχει σε κλειστή μορφή η αντιπαράγωγος μπορεί να δει κανείς το Nonelementary Integrals.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 175 *Να υπολογισθεί το ορισμένο ολοκλήρωμα*

$$\int_0^{\frac{a}{2}} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

ΛΥΣΗ. Θα υπολογίσουμε πρώτα το αόριστο ολοκλήρωμα και έπειτα θα χρησιμοποιήσουμε το δεύτερο θεμελιώδες θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού για να υπολογίσουμε το ορισμένο. Η ολοκληρωτέα ποσότητα είναι συνεχής στο διάστημα $(-a, a)$ επομένως και στο διάστημα $\left(0, \frac{a}{2}\right)$ στο οποίο είναι ορισμένο το ολοκλήρωμα. Ακολουθώντας την διαδικασία εύρεσης της αντιπαραγώγου της ολοκληρωτέας ποσότητας έχουμε ότι

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c.$$

Χρησιμοποιώντας τώρα το θεώρημα 171 έχουμε

$$\int_0^{\frac{a}{2}} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{1}{2} - \arcsin 0 = \frac{\pi}{6}.$$

□

Ασκηση 176 *Να υπολογισθεί το ορισμένο ολοκλήρωμα*

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x + 1}{3 \sin x + \sin^3 x} dx$$

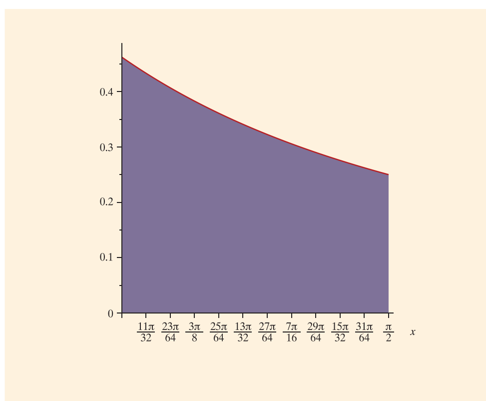
Λυση. Η ολοκληρωτέα ποσότητα είναι συνεχής παντού εκτός από τα σημεία $x = k\pi$ με $k = 0, 1, 2, \cdots$.

Στο διάστημα ολοκλήρωσης δεν υπάρχουν σημεία ασυνέχειας οπότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την αντιπαράγωγο που έχουμε ήδη υπολογίσει η οποία είναι η

$$F(x) = \frac{1}{3}\ln(1-\cos x) - \frac{1}{4}\ln(2-\cos x) - \frac{1}{12}\ln(\cos x + 2) + c$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα 171 έχουμε ότι

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x + 1}{3\sin x + \sin^3 x} dx = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0.177$$



Σχήμα 24: Με κόκκινο χρώμα είναι το γράφημα της συνάρτησης ενώ με μπλε είναι το εμβαδό που σχηματίζει.

$\square$

ΑΣΚΗΣΗ 177 *Να υπολογισθεί το ορισμένο ολοκλήρωμα*

$$\int_a^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{\sqrt{-2x^2+x+1}}$$

όπου $a \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$.

ΛΥΣΗ. Είχαμε υπολογίσει μια αντιπαράγωγο της ολοκληρωτέας ποσότητας η οποία είναι η

$$F(x) = \begin{cases} \sqrt{2}\arctan\frac{1-\sqrt{-2x^2+x+1}}{x\sqrt{2}}, & \text{όταν } x \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \cup (0,1), \\ -\sqrt{2}\arctan\frac{1}{2\sqrt{2}}, & \text{όταν } x = 0 \end{cases}$$

Οπότε

$$\int_a^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{\sqrt{-2x^2+x+1}} = F\left(\frac{1}{3}\right) - F\left(a\right)$$

Υπολογίστε το ίδιο ολοκλήρωμα (με την αντικατάσταση $x = \phi(t) = \frac{1-2t}{t^2+2}$) χρησιμοποιώντας το 173 και δώστε ιδιαίτερη προσοχή στην αυστηρότητα των μαθηματικών συλλογισμών. Θα διαπιστώσετε ότι πάλι πρέπει να δοθεί ιδιαίτερη προσοχή στην αντίστροφη της συνάρτησης $\phi(t)$ και αυτό φαίνεται καλύτερα αν στο κάτω όριο του ολοκληρώματος διαλέξουμε $a = 0$.

$\square$

Η φόρμουλα του Stirling

Υπολογίζουμε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x dx$$

Οπότε

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x dx$$

Συνεχίζοντας με τον τρόπο αυτό, έχουμε

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \sin^{2m} x dx &= \frac{2m-1}{2m}\frac{2m-3}{2m-2}\cdots\frac{1}{2}\frac{\pi}{2},\\ \int_0^{\pi/2} \sin^{2m+1} x dx &= \frac{2m}{2m+1}\frac{2m-2}{2m-1}\cdots\frac{2}{3}\end{aligned}$$

Διαιρώντας τις σχέσεις αυτές προκύπτει ότι

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdots\frac{2m\cdot 2m}{(2m-1)(2m+1)}\frac{\int_0^{\pi/2}\sin^{2m} x dx}{\int_0^{\pi/2}\sin^{2m+1} x dx}$$

Το τελευταίο κλάσμα στο δεξί μέλος συγκλίνει στην μονάδα καθώς το $m \to \infty$. Πράγματι, για $0 < x < \frac{\pi}{2}$

έχουμε ότι

$$0 < \int_0^{\pi/2} \sin^{2m+1} x dx \leq \int_0^{\pi/2} \sin^{2m} x dx \leq \int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1} x dx$$

Διαιρώντας κατά μέλη με το

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2m+1} x dx$$

και χρησιμοποιώντας την σχέση

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x dx$$

προκύπτει ότι

$$1 \leq \frac{\int_0^{\pi/2} \sin^{2m} x dx}{\int_0^{\pi/2} \sin^{2m+1} x dx} \leq 1 + \frac{1}{2m}$$

άρα έχουμε το ζητούμενο όριο. Τελικά, ισχύει η ισότητα

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{m\to\infty} \frac{2}{1}\frac{2}{3} \cdots \frac{2m}{2m-1}\frac{2m}{2m+1} \quad \text{(γινόμενο του Wallis)}$$

Στην συνέχεια το παραπάνω όριο το γράφουμε ως εξής,

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{m\to\infty} \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdots (2m-2)^2}{3^2 \cdot 5^2 \cdots (2m-1)^2} 2m$$

Αρα

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \lim_{m\to\infty} \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdots (2m-2)^2}{(2m-1)!} \sqrt{2m}$$
$$= \lim_{m\to\infty} \frac{(2^2 \cdot 1^2)(2^2 \cdot 2^2) \cdots (2^2 \cdot m^2)}{(2m)! \sqrt{2m}}$$

και επομένως

$$\sqrt{\pi} = \lim_{m\to\infty} \frac{(m!)^2 2^{2m}}{(2m)! \sqrt{m}} \quad (\texttt{τύπος του Wallis}) \ (7)$$

Με την βοήθεια του γινομένου Wallis αποδεικνύεται η ανισότητα Stirling.

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{4n}\right) \ (\texttt{φόρμουλα του Stirlin}$$

Η Λογαριθμική και η Εκθετική Συνάρτηση

Η n-οστή δύναμη ενός θετικού πραγματικού αριθμού x ορίζεται ως

$$x^n := \underbrace{x \cdots x}_{n \text{ φορές}}$$

Ενώ με αρνητικό εκθέτη ορίζεται

$$x^{-n} := \frac{1}{x^n}$$

Τέλος, η n-οστή δύναμη μιας αρνητικής ποσότητας x ορίζεται ως

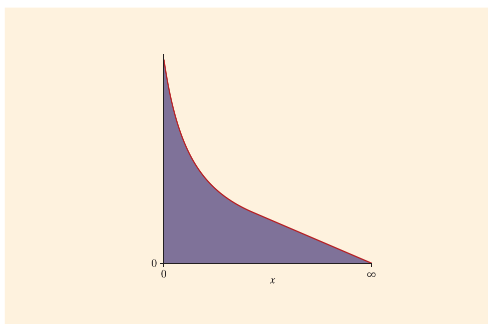
$$x^n := (-1)^n |x|^n$$

Σε αυτή την ενότητα θα γενικεύσουμε την έννοια της δύναμης θετικών πραγματικών αριθμών έτσι ώστε να ορίζεται για εκθέτες που ανήκουν στο $\mathbb{R}$. Για να γίνει αυτό θα ορίσουμε μια νέα συνάρτηση, την λογαριθμική και έπειτα την αντίστροφή της, την εκθετική. Θα δείξουμε ότι η εκθετική συνάρτηση είναι η γενίκευση που χρειαζόμαστε.

ΟΡΙΣΜΟΣ 178 *Αν $x > 0$ τότε ο φυσικός λογάριθμος ορίζεται ως*

$$\ln x = \log x = \int_1^x \frac{1}{t}dt$$

Στο σχήμα 25 φαίνεται το γράφημα της συνάρτησης $\frac{1}{x}$ καθώς και το εμβαδόν που σχηματίζει.



Σχήμα 25: Με κόκκινο χρώμα είναι το γράφημα της συνάρτησης $\frac{1}{x}$ ενώ με μπλε είναι το εμβαδό που σχηματίζει.

ΘΕΩΡΗΜΑ 179 *Αν $x, y \in \mathbb{R}^+$ και $a \in \mathbb{Z}$ τότε*

- $\ln(xy) = \ln x + \ln y$
- $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$

- $\ln(x^a) = a\ln(x)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Από το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού έχουμε ότι $\ln'(x) = \frac{1}{x}$. Έστω $y > 0$ και $f(x) = \ln(xy)$. Τότε $f'(x) = \frac{1}{x}$ άρα και $f'(x) = \ln'(x)$ επομένως υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τ.ω. $f(x) = \ln(x) + c$ για κάθε $x > 0$. Για $x = 1$ έχουμε $\ln(1y) = \ln(1) + c = c$. Αρα $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ για κάθε $x, y > 0$.

Για την δεύτερη ταυτότητα θα πάρουμε $x = 1/y$ στην προηγούμενη σχέση, $\ln(1) = \ln(1/y) + \ln(y)$. Όμως $\ln(1) = 0$ άρα $\ln(1/y) = -\ln(y)$. Τώρα είναι εύκολο να πάρουμε το αποτέλεσμα.

Για την τελευταία ιδιότητα θα χρησιμοποιήσουμε την πρώτη ιδιότητα και υποθέτουμε αρχικά ότι $a \in \mathbb{N}$. Προκύπτει ότι,

$$\ln x^a = \ln \underbrace{x \cdots x}_{a \text{ φορές}} = \underbrace{\ln x + \cdots + \ln x}_{a \text{ φορές}} = a \ln x$$

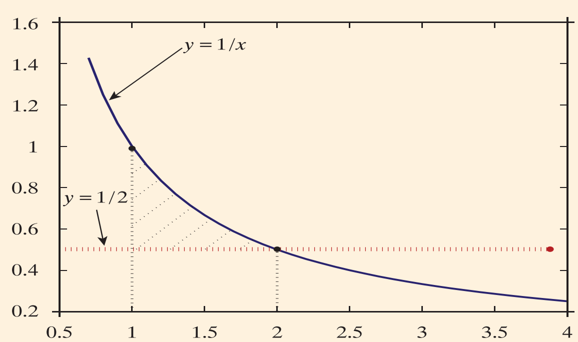
Στην περίπτωση που $-a \in \mathbb{N}$ τότε γράφουμε

$$\ln x^a = \ln \frac{1}{x^{-a}}$$

και ακολουθούμε την ίδια απόδειξη όπως πριν, χρησιμοποιώντας τώρα και την δεύτερη ιδιότητα του φυσικού λογαρίθμου. □

Την τρίτη ιδιότητα του λογαρίθμου θα την γενικεύσουμε παρακάτω και για την περίπτωση όπου $a \in \mathbb{R}$.

Η συνάρτηση ln είναι συνεχής και $1-1$ αφού είναι γνησίως αύξουσα. Θα αποδείξουμε ότι το πεδίο τιμών της $\ln x$ είναι όλο το $\mathbb{R}$.



Σχήμα 26: Το $\ln 2$ ως εμβαδόν χωρίου

Πράγματι, αν πάρουμε το εμβαδόν του ορθογωνίου με βάση το $[1,2]$ και ύψος το $1/2$ διαπιστώνουμε ότι είναι μικρότερο του $\ln 2$ (δείτε το $\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{t} dt$ ως εμβαδόν της $1/t$ στο διάστημα $[1, 2]$, σχήμα 26). Ο-πότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $\ln 2^n = n \ln 2 > \frac{n}{2}$ και $\ln 2^{-n} < -\frac{n}{2}$ (χρησιμοποιήσαμε την τρίτη ιδιότητα του φυσικού λογαρίθμου). Επομένως προκύπτει ότι (λόγω συνέχειας της $\ln x$ λαμβάνει όλες τις ενδιάμεσες τιμές)

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \text{ και } \lim_{x \to \infty} \ln x = +\infty$$

Αρα, η ln είναι $1 - 1$ και επί του $\mathbb{R}$ επομένως αντι-στρέφεται.

ΟΡΙΣΜΟΣ 180 *Ορίζουμε σαν εκθετική συνάρτηση την αντίστροφη της* $\ln$ *και συμβολίζεται με* $\exp(x)$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 181 *Συμβολίζουμε με* e *τον αριθμό* $\exp(1)$. *Επίσης ορίζουμε* $e^x = \exp(x)$. *Τον* e *τον ονομάζουμε βάση και το* x *εκθέτη.*

Ο συμβολισμός e^x μας παραπέμπει σε δύναμη πραγ-ματικού αριθμού κάτι το οποίο όμως θα το αποδείξου-με αργότερα, δεν είναι προφανές. Προς το παρόν με τον συμβολισμό αυτό δηλώνουμε απλώς την αντίστροφη της $\ln x$. Σημειώστε ότι $e^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ και αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι είναι αντίστροφη της $\ln x : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$. Αφού η $\ln x$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη (και μάλιστα με παράγωγο διάφορη του μηδενός) τότε και η αντίστροφή της είναι το ίδιο.

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα για την εύρεση της παραγώγου της αντίστροφης συνάρτησης αποδεικνύεται ότι $(e^x)' = e^x$ και επομένως και το ολοκλήρωμα της εκθετικής είναι επίσης η εκθετική. Πράγματι, χρησιμοποιήστε το θεώρημα 103 επιλέγοντας $f(x) = \ln x$ και $f^{-1}(x) = e^x$. Επίσης, από τον ορισμό του φυσικού λογαρίθμου προκύπτει ότι $\ln 1 = 0$. Λόγω του ότι οι $\ln x$, e^x είναι αντίστροφες προκύπτει ότι $e^0 = 1$.

Ορισμος 182 *Αν $a > 0$ τότε για κάθε πραγματικό αριθμό x ορίζουμε $a^x = e^{x \ln a}$. Επίσης, ορίζουμε $0^x = 0$ όταν $x > 0$.*

Προφανώς, $a^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$. Η παράγωγος του a^x μπορεί να υπολογισθεί παραγωγίζοντας την $e^{x \ln a}$ και είναι

$a^x \ln a$. Η ιδιότητα του φυσικού λογαρίθμου $\ln x^a = a \ln x$ που αποδείξαμε για $a \in \mathbb{N}$ γενικεύεται τώρα και για $a \in \mathbb{R}$ αφού $\ln x^a = \ln e^{a \ln x} = a \ln x$. Αν $x > 0$ τότε καθώς $a \to 0$ βλέπουμε ότι $a^x = e^{x \ln a} \to 0$ συνεπώς είναι λογικό να ορίσουμε ως $0^x = 0$ όταν $x > 0$.

Παρακάτω θα αποδείξουμε ότι η εκθετική συνάρτηση είναι πράγματι αυτή που χρειαζόμαστε για την γενίκευση δύναμης θετικού αριθμού το οποίο δεν είναι προφανές. Για παράδειγμα, είναι προφανές ότι $1^x = 1$; Αν το x είναι ακέραιος και χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό της δύναμης πραγματικού αριθμού

$$1^x = \underbrace{1 \cdots 1}_{x\text{–φορές}}$$

τότε είναι προφανές. Αν το $x \notin \mathbb{Z}$ τότε δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτόν τον ορισμό. Μπορούμε να δοκιμάσουμε τον δεύτερο ορισμό (μέσω της λογαριθμικής) για να δούμε τι αποτέλεσμα δίνει. Σύμφωνα με τον ορισμό 182, έχουμε $1^x = e^{x \ln 1} = e^0 = 1$. Βλέπουμε (για πρώτη φορά) ότι οι δυο ορισμοί συμπίπτουν όταν ο εκθέτης είναι ακέραιος και η βάση είναι η μονάδα.

ΟΡΙΣΜΟΣ 183 *Η συνάρτηση a^x σαν $1-1$ (ως γνησίως μονότονη όταν $a \neq 1$) έχει αντίστροφη την οποία και συμβολίζουμε με $\log_a(x)$.*

Ως αντίστροφη της a^x έχουμε ότι $\log_a x : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ (για $a \neq 1$). Μπορούμε να υπολογίσουμε την ποσότητα $\log_a(x)$ με βάση των φυσικό λογάριθμο και θα αποδείξουμε ότι $\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$. Έχουμε

$$\log_a x = y \Leftrightarrow x = a^y$$

Από την άλλη μεριά έχουμε

$$\frac{\ln x}{\ln a} = z \Leftrightarrow x = e^{z \ln a} \Leftrightarrow x = a^z$$

Αρα $a^y = a^z \Leftrightarrow y = z$.

Από την σχέση αυτή υπολογίζουμε την παράγωγο της $\log_a x$ και επίσης μπορούμε να αποδείξουμε εύκολα ότι η $\log_a x$ ικανοποιεί τις ίδιες ιδιότητες με την $\ln x$.

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω μπορούμε να αποδείξουμε τις ιδιότητες τις εκθετικής συνάρτησης, δηλαδή για οποιοδήποτε $a > 0$ ισχύει ότι

- $a^{x+y} = a^x a^y$. Πράγματι,

$$a^{x+y} = a^{\log_a a^x + \log_a a^y} = a^{\log_a a^x a^y} = a^x a^y$$

- $(a^x)^y = a^{xy}$. Πράγματι, αν $b = a^x$ τότε
$$(a^x)^y = b^y = e^{y\ln b} = e^{y\ln a^x} = e^{xy\ln a} = a^{xy}$$
- $(ab)^x = a^x b^x$ με $a, b \in \mathbb{R}^+$ και $x \in \mathbb{R}$. Πράγματι,
$$(ab)^x = e^{x\ln(ab)} = e^{x\ln a + x\ln b} = e^{x\ln a}e^{x\ln b} = a^x b^x$$

Σημειώστε ότι $a^0 = e^{0\cdot\ln a} = 1$ και ότι $\log_a a = \frac{\ln a}{\ln a} = 1$. Επίσης από την πρώτη ιδιότητα της εκθετικής συνάρτησης προκύπτει ότι
$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$
αφού
$$a^0 = a^{x-x} = a^x a^{-x} = 1$$

Η συνάρτηση $f(x) = x^t$ όπου $t \in \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}^+$ και αυτό προκύπτει από τον ορισμό της, δηλαδή $x^t = e^{t\ln x}$. Όσον αφορά την παράγωγο έχουμε ότι $(x^t)' = tx^{t-1}$ με $t \in \mathbb{R}$. Αυτό προκύπτει εύκολα χρησιμοποιώντας τον ορισμό 182 (και μόνο) $x^t = e^{t\ln x}$ και παραγωγίζοντας το δεξί μέλος ως προς x.

Τώρα είμαστε σε θέση να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση a^x πράγματι παίζει τον ρόλο της εκθετικής και μάλιστα με εκθέτη πραγματικό αριθμό. Θα το αποδείξουμε αυτό δείχνοντας αρχικά ότι συμπίπτει με τον ορισμό της (ακέραιης) δύναμης πραγματικού αριθμού. Σύμφωνα με την πρώτη ιδιότητα της a^x έχουμε για $x \in \mathbb{N}$,

$$a^x := e^{x \ln a} = e^{\overbrace{\ln a + \cdots + \ln a}^{x \text{ φορές}}} = \underbrace{e^{\ln a} \cdots e^{\ln a}}_{x \text{ φορές}} = \underbrace{a \cdots a}_{x \text{ φορές}}$$

Η n-οστή ρίζα ενός πραγματικού αριθμού, η οποία συμβολίζεται με $\sqrt[n]{a}$ όπου $n \in \mathbb{N}$ και $a \in \mathbb{R}^+$ ορίζεται ως η μοναδική θετική ρίζα της $x^n = a$. Εύκολα διαπιστώνουμε χρησιμοποιώντας την δεύτερη ιδιότητα της εκθετικής συνάρτησης ότι η $a^{1/n} = e^{\frac{1}{n} \ln a}$ είναι ρίζα της παραπάνω εξίσωσης αφού

$$\left(e^{\frac{1}{n} \ln a}\right)^n = e^{\ln a} = a$$

Επομένως, όταν $q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ με $m, n \in \mathbb{N}$ τότε η εκθετική συνάρτηση συμπίπτει με την ρητή δύναμη πραγματικού αριθμού, δηλαδή $\sqrt[n]{x^m} = e^{q \ln x}$. Παρομοίως για τις αρνητικές δυνάμεις, αφού έχουμε αποδείξει ότι $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$.

Κάθε πραγματικός αριθμός y προσεγγίζεται από μια ακολουθία ρητών αριθμών, άρα

$$q_k = \frac{m_k}{n_k} \to y \quad \text{καθώς } k \to \infty$$

Έχουμε αποδείξει ότι

$$\sqrt[n_k]{x^{m_k}} = e^{q_k \ln x}$$

Λόγω συνέχειας της εκθετικής συνάρτησης e^x προκύπτει ότι

$$e^{q_k \ln x} \to e^{y \ln x} = x^y \quad \text{καθώς } k \to \infty$$

Αυτό όμως σημαίνει ότι και

$$\sqrt[n_k]{x^{m_k}} \to e^{y \ln x} = x^y \quad \text{καθώς } k \to \infty$$

Σημειώστε ότι η τελευταία σύγκλιση δεν είναι προφανής αλλά στηρίζεται στο γεγονός ότι η εκθετική είναι συνεχής συνάρτηση ως αντίστροφη του φυσικού λογαρίθμου.

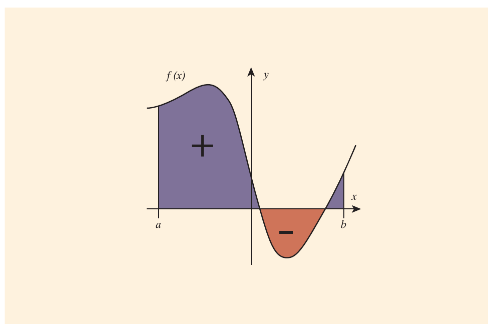
Συμπερασματικά, ο δεύτερος ορισμός (με χρήση του λογαρίθμου) γενικεύει τον πρώτο διότι συμπίπτει με τον πρώτο ορισμό όταν ο εκθέτης είναι ακέραιος και επιπλέον ορίζεται στην περίπτωση που ο εκθέτης $x \notin \mathbb{N}$. Παρόλα αυτά αν κάποιος θέλει να ορίσει το εκθετικό μιας αρνητικής ποσότητας στο $\mathbb{R}$ μπορεί να το κάνει μόνο με τον πρώτο ορισμό και για ακέραιο εκθέτη. Στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$ θα μπορούσαμε να γράψουμε

$$(-a)^x = e^{ix\pi} a^x$$

όπου $a \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}$ και $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ με $i^2 = -1$.

Εφαρμογές του Ορισμένου Ολοκληρώματος

Σε αυτή την ενότητα θα ασχοληθούμε με εφαρμογές του ορισμένου ολοκληρώματος. Πιο συγκεκριμένα, θα μελετήσουμε εμβαδά χωρίων που βρίσκονται ανάμεσα σε γνωστές συναρτήσεις. Θα δούμε ότι ένας ικανοποιητικός τρόπος για να υπολογίζουμε εμβαδά, είναι το ορισμένο ολοκλήρωμα. Ας ξεκινήσουμε με δύο



Σχήμα 27: Εμβαδόν μιας συνάρτησης

προτάσεις και έπειτα βλέπουμε πως χρησιμοποιούνται στην πράξη.

Προταση 184 *Αν μια συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ τότε το εμβαδόν του χωρίου $E(f)$ που* *βρίσκεται μεταξύ του γραφήματος της f, του άξονα $0x$ και των ευθειών $x = a$ και $x = b$, είναι*

$$\varepsilon(E(f)) = \int_a^b |f(x)|dx.$$

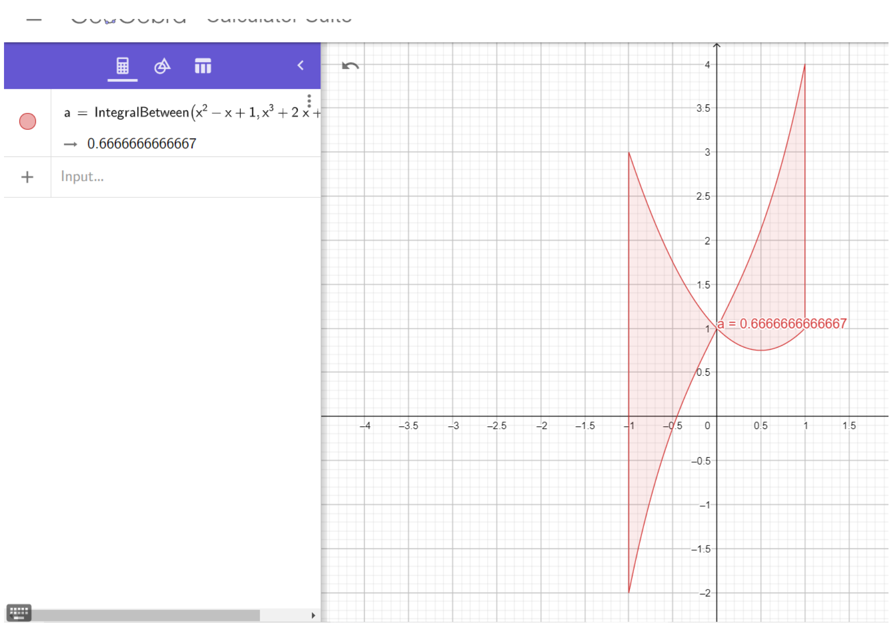
Από αυτή την πρόταση διαπιστώνουμε ότι μας ενδιαφέρει να μετράμε το εμβαδόν που περικλείει το γράφημα μιας συνάρτησης με τον άξονα των x (δείτε σχήμα 27) ανεξάρτητα από το πρόσημο της συνάρτησης. Γι΄ αυτό τον λόγο ολοκληρώνουμε το απόλυτο της f διότι θα μπορούσε να παίρνει θετικές και αρνητικές τιμές με τέτοιο τρόπο ώστε το ολοκλήρωμα να ήταν 0, παρόλο που θα είχε θετικό εμβαδόν. Στις εφαρμογές για να υπολογίσουμε τα αντίστοιχα ολοκληρώματα είναι χρήσιμο να γνωρίζουμε το πρόσημο της συνάρτησης για να ολοκληρώνουμε στα αντίστοιχα διαστήματα.

Ας δούμε και άλλη μια πρόταση, λίγο γενικότερη από την προηγούμενη.

Προταση 185 *Αν οι f, g είναι ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$ τότε το εμβαδόν του χωρίου $E(f, g)$ που βρίσκεται μεταξύ των γραφημάτων των f και g και των ευθειών*

$x = a$ *και* $x = b$ *δίνεται από τον τύπο*

$$\varepsilon(E(f,g)) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$



Σχήμα 28: Το εμβαδό που σχηματίζουν οι συναρτήσεις $x^2 - x + 1$ και $x^3 + 2x + 1$ στο διάστημα $[-1, 1]$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 186 *Να υπολογισθεί το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου ακτίνας* a.

ΛΥΣΗ. Ο κυκλικός τομέας περικλείεται από μια καμπύλη η οποία δεν είναι συνάρτηση. Όμως, λόγω συμμετρίας, μπορούμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν του μισού κυκλικού τομέα (τον θετικό για παράδειγμα). Το συνολικό εμβαδόν θα είναι τότε το διπλάσιο του μισού. Ο θετικός κυκλικός τομέας περικλείεται από την συνάρτηση $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}, \quad x \in [-a, a]$. Επομένως το εμβαδόν είναι

$$E = 2 \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx = \cdots = \pi a^2.$$

$\square$

ΑΣΚΗΣΗ 187 *Να υπολογισθεί το εμβαδόν της ελλείψεως με άξονες a, b, δηλαδή $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.*

ΛΥΣΗ. Η συνάρτηση που δίνει το τόξο $-\widehat{aba}$ είναι η $f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$. Αρα το εμβαδόν της ελλείψεως είναι

$$E = 4 \int_{0}^{a} \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} dx = \cdots = \pi ab,$$

Εδώ, ως γνωστόν, θέτουμε $x = a \sin t$. $\square$

ΑΣΚΗΣΗ 188 *Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου, που βρίσκεται μεταξύ των γραφημάτων των συναρτήσε-*

ων $f(x) = x + 1$ *και* $g(x) = x^2 - x$ *και των ευθειών* $x = 0$ *και* $x = 2$.

ΛΥΣΗ. Ως γνωστόν το εμβαδόν υπολογίζεται από το ολοκλήρωμα

$$E = \int_0^2 |f(x) - g(x)| dx.$$

Όμως για να το υπολογίσουμε θα βρούμε το πρόσημο της διαφοράς των συναρτήσεων έτσι ώστε να βγάλουμε το απόλυτο. Έτσι θα δούμε σε ποιο διάστημα η $f(x) - g(x)$ είναι θετική και σε ποιο αρνητική. Όμως $f(x) - g(x) = 1 + 2x - x^2$. Οι ρίζες του πολυωνύμου είναι $1 + \sqrt{2}, \quad 1 - \sqrt{2}$. Γνωρίζουμε ότι το συγκεκριμένο πολυώνυμο είναι θετικό εντός των ριζών, άρα και στο $[0, 2]$. Επομένως διώχνουμε το απόλυτο και υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα.

$$E = \int_0^2 [x + 1 - (x^2 - x)] dx = \int_0^2 (1 + 2x - x^2) dx = \cdots = \frac{10}{3}.$$

$\square$

ΑΣΚΗΣΗ 189 *Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου, που βρίσκεται μεταξύ των γραφημάτων των συναρτήσεων $f(x) = |x|$ και $g(x) = [x]$ και των ευθειών $x = -2$ και $x = 2$.*

ΛΥΣΗ. Γνωρίζουμε την εξής ανισότητα

$$[x] \leq x \leq [x] + 1,$$

για το ακέραιο μέρος ενός αριθμού. Επίσης γνωρίζουμε ότι $|x| \geq x$ για κάθε πραγματικό αριθμό. Αρα $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [-2, 2]$. Βγάλαμε το απόλυτο της διαφοράς των συναρτήσεων αλλά μένουν ακόμη κάποιες δυσκολίες. Για παράδειγμα πρέπει να βγάλουμε το απόλυτο της $|x|$. Αυτό γίνεται πολύ εύκολα αν ολοκληρώσουμε στα διαστήματα $[-2, 0]$, $[0, 2]$. Όμως θα ολοκληρώσουμε και την συνάρτηση g για την οποία δεν έχουμε κάποια αντιπαράγωγο. Γνωρίζουμε όμως την τιμή της για κάθε διάστημα της μορφής $[k, k+1]$ με k να ανήκει στους φυσικούς αριθμούς, η οποία είναι k. Αρα, για τους παραπάνω λόγους θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα ως εξής

$$\begin{aligned} E &= \int_{-2}^{2}(|x| - [x])dx \\ &= \int_{-2}^{-1}(-x+2)dx + \int_{-1}^{0}(-x+1)dx \\ &\quad + \int_{0}^{1}(x-0)dx + \int_{1}^{2}(x-1)dx = 6. \end{aligned}$$

$\square$

ΑΣΚΗΣΗ 190 *Να υπολογισθεί το εμβαδόν που περικλείεται από την καμπύλη της* $y = x^2 - 3x + 2$ *και τον άξονα των* x.

ΛΥΣΗ. Σε αυτή την περίπτωση δεν μας δίνονται οι ευθείες που θα καθορίσουν τα όρια ολοκλήρωσης. Θα υπολογίσουμε το πεπερασμένο εμβαδόν μεταξύ της συνάρτησης και τον άξονα των x. Η συνάρτηση y καθώς το $x \to \pm\infty$ πηγαίνει στο $+\infty$. Ακόμη, υπολογίζοντας την παράγωγο και μηδενίζοντας τη, διαπιστώνουμε ότι έχει ένα ακρότατο, το $x = \frac{3}{2}$ και υπολογίζοντας και την δεύτερη στο σημείο αυτό βλέπουμε ότι είναι σημείο ελαχίστου. Επίσης η συνάρτηση μηδενίζεται στα σημεία $x = 1, \quad x = 2$ άρα το πεπερασμένο εμβαδόν βρίσκεται ανάμεσα στις ευθείες $x = 1, \ \ x = 2$ ενώ σε αυτό το διάστημα η συνάρτηση είναι αρνητική. Αρα το εμβαδόν είναι

$$E = \int_1^2 |x^2 - 3x + 2| dx = \int_1^2 (-x^2 + 3x - 2) dx = \cdots = \frac{1}{6}.$$

□

ΑΣΚΗΣΗ 191 *Να υπολογισθεί το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ της καμπύλης $y = x^3$ και της ευθείας $y = 4x$.*

ΛΥΣΗ. Αρχικά θα βρούμε τις ευθείες που περικλείεται το εμβαδόν. Παρατηρούμε ότι η διαφορά των δύο συναρτήσεων πηγαίνει στο $\pm\infty$ καθώς το $x \to \pm\infty$. Αρα το εμβαδόν θα είναι ανάμεσα στην μικρότερη ρίζα και στην μεγαλύτερη, δηλαδή στο $[-2, 2]$. Πράγματι, οι ρίζες του $x^3 - 4x = 0$ είναι οι $-2, 0, 2$.

Τώρα θα βρούμε το πρόσημο της συνάρτησης στο διάστημα αυτό για να διώξουμε το απόλυτο. Παρατηρούμε ότι για $x \in [0, 2], \quad x^3 \leq 4x$ και για $x \in [-2, 0], \ \ x^3 \geq 4x$.

Αρα το εμβαδόν δίνεται από

$$E_1 = \int_0^2 (4x - x^3)dx = \cdots = 4,$$
$$E_2 = \int_{-2}^0 (x^3 - 4x)dx = \cdots = 4.$$

Οπότε το συνολικό εμβαδόν είναι $E = E_1 + E_2 = 8$.

□

Το ορισμένο ολοκλήρωμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό του μήκους μιας καμπύλης αλλά και τον υπολογισμό εμβαδών επιφανειών και όγκων στερεών.

Για παράδειγμα ισχύει το επόμενο θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 192 *Αν η συνάρτηση f έχει συνεχή παράγωγο f' στο κλειστό και φραγμένο διάστημα $[a, b]$ τότε το μήκος της καμπύλης της f στο $[a, b]$ δίνεται από το ολοκλήρωμα*

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + |f'(x)|^2} dx$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 193 *Να βρεθεί το μήκος της καμπύλης $f(x) = x$ στο διάστημα $[0, 1]$.*

ΛΥΣΗ. Διαπιστώνουμε ότι ικανοποιείται το προηγούμενο θεώρημα άρα το μήκος της καμπύλης θα είναι

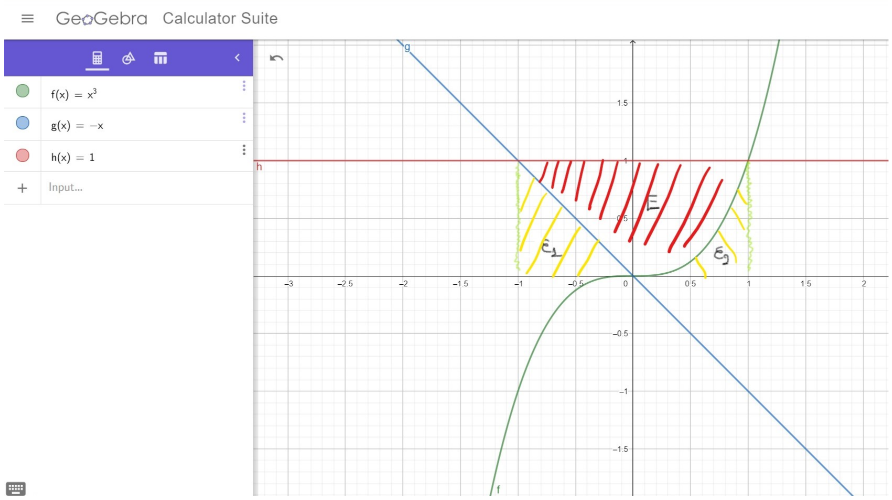
$$S = \int_0^1 \sqrt{1+1}dx = \sqrt{2}$$

Συγκρίνετε το αποτέλεσμα με το Πυθαγόρειο Θεώρημα. □

Το ορισμένο ολοκλήρωμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εύρεση όγκου εκ περιστροφής. Ισχύει το επόμενο θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 194 *Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο $[a, b]$ και για κάθε $x \in [a, b]$ έχουμε ότι $f(x) \geq 0$ και $g(x) \geq 0$ (ή $f(x) \leq 0$ και $g(x) \leq 0$) τότε ο όγκος του στερεού από περιστροφή του χωρίου που σχηματίζουν οι δυο συναρτήσεις στο $[a, b]$ με άξονα περιστροφής τον άξονα των x δίνεται από το ολοκλήρωμα*

$$V = \pi \int_a^b |f^2(x) - g^2(x)|dx$$



Σχήμα 29: Αν θέλουμε να υπολογίσουμε το εμβαδό που σχηματίζεται μεταξύ των συναρτήσεων $f(x) = x^3$, $g(x) = -x$ και $h(x) = 1$ (δηλαδή αυτό με το κόκκινο χρώμα) μπορούμε να υπολογίσουμε το εμβαδό που σχηματίζει η συνάρτηση $g(x) = -x$ με τον άξονα των x (δηλαδή $\varepsilon_1 = \int_{-1}^{0} |g(x)|dx$), το εμβαδό που σχηματίζει η $f(x) = x^3$ με τον άξονα των x στο διάστημα $[0, 1]$ (δηλαδή $\varepsilon_2 = \int_0^1 |f(x)|dx$) και να αφαιρέσουμε το άθροισμα των δυο αυτών αεμβαδών από το εμβαδό του ορθογώνιου παραλληλογράμου με βάση το διάστημα $[-1, 1]$ και ύψος ίσο με 1.

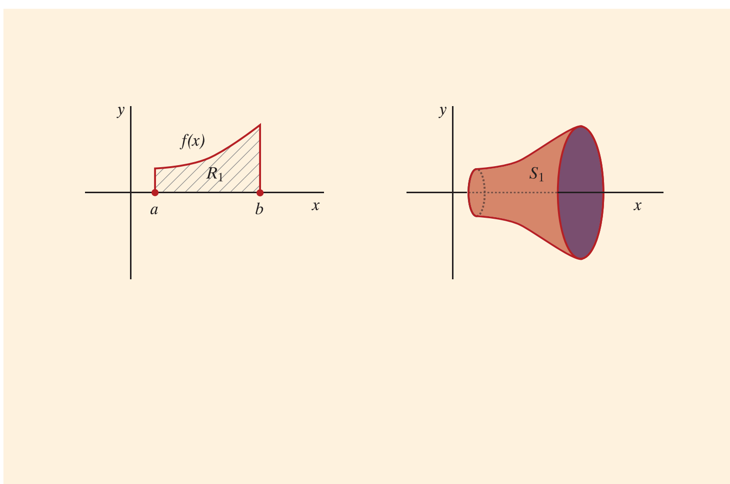
Αν μια συνάρτηση περιστραφεί γύρω από τον άξονα των x θα σχηματίσει μια επιφάνεια με κάποιο εμβαδό. Ισχύει το επόμενο θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 195 *Αν η συνάρτηση f έχει συνεχή παράγωγο f' στο $[a, b]$ και υπάρχουν το πολύ πεπερα-*

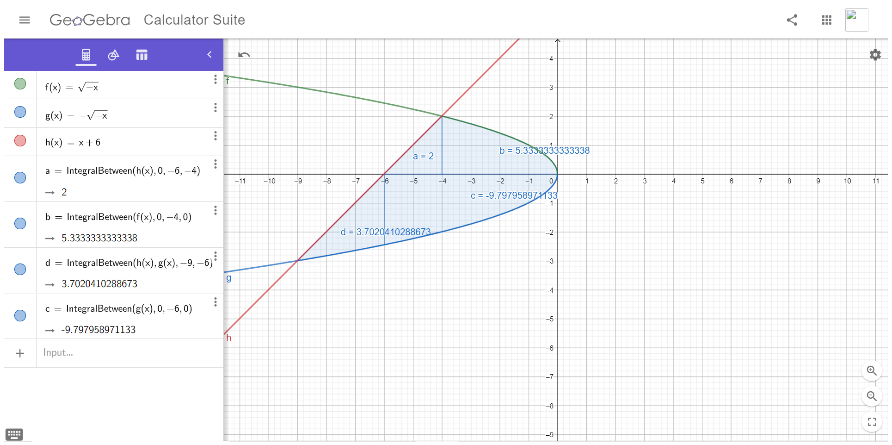
σμένου πλήθους ρίζες της f στο $[a, b]$ τότε το εμβαδό της επιφάνειας από περιστροφή της καμπύλης της f στο $[a, b]$ με άξονα περιστροφής των άξονα των x δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$E = 2\pi \int_a^b |f(x)|\sqrt{1 + |f'(x)|^2}dx$$

Στο σχήμα 30 βλέπουμε τον όγκο εκ περιστροφής καθώς και την επιφάνεια εκ περιστροφής που σχηματίζει μια συνάρτηση f όταν περιστραφεί γύρω από τον άξονα των x.



Σχήμα 30: Όγκος και επιφάνεια εκ Περιστροφής



Σχήμα 31: Το εμβαδόν που σχηματίζεται μεταξύ των συναρτήσεων $f(x) = \sqrt{-x}$, $g(x) = -\sqrt{-x}$ και $h(x) = x + 6$. Με την εντολή IntegralBetween στο Geogebra θα δείτε το εμβαδόν που σχηματίζουν δυο συναρτήσεις.

Ακολουθίες Αριθμών

Σε αυτή την ενότητα θα αναφερθούμε στις ακολουθίες πραγματικών αριθμών. Μια ακολουθία πραγματικών αριθμών είναι μια απεικόνιση από το σύνολο των φυσικών αριθμών στο σύνολο των πραγματικών, δηλαδή μια συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Μια ακολουθία συμβολίζεται συνήθως ως a_n, x_n κ.λ.π.

ΟΡΙΣΜΟΣ 196 *Μια ακολουθία λέγεται αύξουσα όταν* $a_n \leq a_{n+1}$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$. *Αντίστοιχα φθίνουσα αν αντιστρέψουμε την παραπάνω ανισότητα.*

ΟΡΙΣΜΟΣ 197 *Μια ακολουθία* a_n *λέγεται φραγμένη από κάτω όταν υπάρχει* $c \in \mathbb{R}$ *τ.ω.* $c \leq a_n$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$. *Αντίστοιχα ονομάζεται φραγμένη από πάνω αν αντιστρέψουμε την προηγούμενη ανισότητα. Τέλος ονομάζεται φραγμένη αν είναι κάτω και άνω φραγμένη.*

Έστω μια ακολουθία a_n. Ο δείκτης n «τρέχει» σε όλο το $\mathbb{N}$, παίρνει δηλαδή όλες τις τιμές, ξεκινώντας από το 1 ως το άπειρο. Ας πάρουμε ένα υποσύνολο του

$\mathbb{N}$ με άπειρα στοιχεία, για παράδειγμα το σύνολο των ζυγών αριθμών, το οποίο είναι το $\{2, 4, 6, \cdots\}$. Το σύνολο αυτό είναι το πεδίο τιμών μιας ακολουθίας, για παράδειγμα $x_n = 2n$. Τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε μια καινούρια ακολουθία, την a_{x_n}. Η x_n έχει τιμές φυσικούς αριθμούς και έτσι έχουμε το δικαίωμα να δίνουμε την x_n σαν όρισμα στην a_n. Παρατηρούμε όμως ότι η διαφορά της a_{x_n} από την a_n είναι μόνο το γεγονός ότι το πεδίο τιμών της πρώτης είναι υποσύνολο της δεύτερης. Την ακολουθία a_{x_n} την ονομάζουμε **υπακολουθία** της a_n. Υπάρχουν και άλλες υπακολουθίες, π.χ. αν διαλέξουμε τους περιττούς αριθμούς ή μια οποιαδήποτε άλλη αύξουσα ακολουθία θετικών ακέραιων αριθμών. Σημειώστε ότι αν a_{x_n} είναι μια υπακολουθία της a_n τότε $x_n \to +\infty$ καθώς $n \to +\infty$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 198 (ΟΡΙΟ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΣ) *Έστω μια ακολουθία πραγματικών αριθμών a_n.*

- *Θα λέμε ότι η ακολουθία a_n συγκλίνει στον αριθμό $a \in \mathbb{R}$* **ανν**

  $$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n > n_0,\ |a_n - a| < \varepsilon.$$

  Συμβολίζεται με

  $$\lim a_n = a$$

- *Θα λέμε ότι η ακολουθία a_n αποκλίνει στο $+\infty$ (αντίστοιχα στο $-\infty$) όταν για κάθε $M > 0$ υπάρχει αρκετά μεγάλο $N > 0$ έτσι ώστε $a_n > M$ (αντίστοιχα $a_n < -M$) όταν $n > N$. Συμβολίζεται με*

  $$\lim a_n = \pm\infty$$

Αν μια ακολουθία έχει εξάρτηση και από άλλη μεταβλητή εκτός από το n είναι σκόπιμο να γράφουμε $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ προκειμένου να δηλώσουμε ξεκάθαρα σε ποια μεταβλητή αναφέρεται το όριο.

ΠΡΟΤΑΣΗ 199 *Η ακολουθία $a_n = \frac{1}{n}$ συγκλίνει στο 0, η ακολουθία $a_n = n$ αποκλίνει στο $+\infty$ ενώ η ακολουθία $a_n = (-1)^n$ δεν συγκλίνει σε κανέναν αριθμό αλλά ούτε και αποκλίνει στο $\pm\infty$.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 200 *Αν μια ακολουθία συγκλίνει τότε το όριο είναι μοναδικό.*

ΘΕΩΡΗΜΑ 201 *Η ακολουθία a_n συγκλίνει σε κάποιον αριθμό $a \in \mathbb{R}$* **ανν** *κάθε υπακολουθία της είναι συγκλίνουσα και συγκλίνει στον ίδιο αριθμό. Παρόμοια, η ακολουθία a_n αποκλίνει στο $\pm\infty$* **ανν** *κάθε υπακολουθία της αποκλίνει με τον ίδιο τρόπο.*

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 202 *Αν σε μια ακολουθία μπορούμε να βρούμε δυο υπακολουθίες οι οποίες συγκλίνουν σε διαφορετικά όρια τότε προφανώς η ακολουθία δεν συγκλίνει διότι αν συνέκλινε θα έπρεπε κάθε υπακολουθία της να συγκλίνει στον ίδιο αριθμό σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα. Για παράδειγμα η ακολουθία $a_n = (-1)^n$*

δεν συγκλίνει διότι η ακολουθία των άρτιων συγκλίνει στην μονάδα ενώ η ακολουθία των περιττών στο -1. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 203 *Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη. Το αντίστροφο δεν ισχύει.*

Οι ακολουθίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την εξέταση της συνέχειας σε ένα σημείο μιας συνάρτησης. Ισχύει το παρακάτω θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 204 *Μια συνάρτηση* f *είναι συνεχής στο σημείο* x_0 **ανν** *για κάθε ακολουθία* $a_n \to x_0$ *ισχύει ότι* $f(a_n) \to f(x_0)$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 205 *Έστω δύο συγκλίνουσες ακολουθίες* a_n, b_n *με* $a_n \to a$ *και* $b_n \to b$ *και* $k \in \mathbb{R}$. *Τότε,*

(i) $a_n + b_n \to a + b$,

(ii) *για κάθε συνεχή* f *στο* a *ισχύει ότι* $f(a_n) \to f(a)$

(iii) $a_n b_n \to ab$,

(iv) $ka_n \to ka$,

(v) αν $b \neq 0$ τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $b_n \neq 0$ για κάθε $n \geq n_0$ και τότε $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$

limsup και liminf

Σε κάθε ακολουθία μπορούμε να κατασκευάσουμε άπειρες υπακολουθίες οι οποίες εν γένει μπορεί να συγκλίνουν (ή να αποκλίνουν) σε διαφορετικά όρια.

Αν a_n είναι μια ακολουθία τότε θέτουμε

$$b_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, \cdots\} \quad \text{και} \quad c_n = \inf\{a_n, a_{n+1}, \cdots,\}$$

Προφανώς η ακολουθία b_n είναι φθίνουσα ενώ η c_n αύξουσα και μάλιστα $c_n \leq b_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε ως $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\limits_n b_n$ και $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\limits_n c_n$ οπότε ισχύει ότι $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n \leq \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$. Μπορεί να αποδειχθεί ότι υπάρχει υπακολουθία της a_n που συγκλίνει στο $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ και υπακολουθία της a_n που συγκλίνει στο $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ και μάλιστα όλες οι συγκλίνουσες (ή αποκλίνουσες στο $\pm\infty$) υπακολουθίες της a_n συγκλίνουν σε κάποιον αριθμό (συμπεριλαμβανομένων και των $\pm\infty$) στο διάστημα $[\liminf\limits_{n\to\infty} a_n, \ \limsup\limits_{n\to\infty} a_n]$. Για ευκολία λοιπόν δίνουμε τον παρακάτω ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ **206** *Έστω μια ακολουθία a_n. Συμβολίζου-*

με με $\limsup_{n\to\infty} a_n$ *το μεγαλύτερο όριο (συμπεριλαμβανομένων των* $\pm\infty$*) υπακολουθίας της* a_n*. Παρομοίως, με* $\liminf_{n\to\infty} a_n$ *συμβολίζουμε το μικρότερο όριο υπακολουθίας της* a_n*.*

Προφανώς, αν a_{n_k} είναι μια οποιαδήποτε υπακολουθία της a_n τότε εξ ορισμού ισχύει ότι

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$$

Έχουμε λοιπόν το εξής πόρισμα χρησιμοποιώντας το θεώρημα 201.

ΠΟΡΙΣΜΑ 207 *Μια ακολουθία* a_n *συγκλίνει στο* $a \in \mathbb{R}$ **ανν**

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = a$$

Παρόμοια, η ακολουθία a_n *αποκλίνει στο* $\pm\infty$ **ανν**

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$$

Ιδιότητες των limsup και liminf

(i) $\limsup_{n\to\infty}(-a_n) = -\liminf_{n\to\infty} a_n$

(ii)

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n &\leq \liminf_{n\to\infty}(a_n + b_n) \\ \limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) &\leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n\end{aligned}$$

(iii) Αν $a_n \geq 0$ και $b_n \geq 0$ τότε

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} a_n \cdot \liminf_{n\to\infty} b_n &\leq \liminf_{n\to\infty}(a_n b_n) \leq \limsup_{n\to\infty}(a_n b_n) \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} a_n \cdot \limsup_{n\to\infty} b_n\end{aligned}$$

(iv) Αν $a_n \leq b_n$ τότε

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \liminf_{n\to\infty} b_n \quad \text{και} \quad \limsup_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} b_n$$

(v) Αν $f(x)$ είναι αύξουσα και συνεχής συνάρτηση τότε

$$\limsup_{n\to\infty} f(a_n) = f(\limsup_{n\to\infty} a_n)$$

ενώ αν είναι φθίνουσα και συνεχής τότε

$$\limsup_{n\to\infty} f(a_n) = f(\liminf_{n\to\infty} a_n)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 208 *Έστω η ακολουθία*

$$a_n = \frac{n^2}{1+n^2}\sin\frac{2\pi n}{3}$$

Αν διαλέξουμε την υπακολουθία a_{3k} *βλέπουμε ότι* $\lim\limits_{k\to\infty} a_{3k} = 0$*. Αυτό σημαίνει ότι και κάθε υπακολουθία της* a_{3k} *συγκλίνει στο* 0*. Διαλέγοντας* $n = 3k-1$ *έχουμε ότι η υπακολουθία* $a_{n_k} = a_{3k-1}$ *συγκλίνει στο* $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ *και επομένως το ίδιο συμβαίνει και με όλες τις υπακολουθίες της* a_{3k-1}*. Τέλος, διαλέγοντας* $n = 3k-2$ *τότε η υπακολουθία* a_{3k-2} *συγκλίνει στον αριθμό* $\frac{\sqrt{3}}{2}$ *και επομένως το ίδιο συμβαίνει και με όλες τις υπακολουθίες της* a_{3k-2}*. Οποιαδήποτε υπακολουθία της* a_n *είτε θα είναι υπακολουθία κάποιας από τις* a_{3k}*,* a_{3k-1}*,* a_{3k-2} *είτε με ανάμεικτους όρους από αυτές τις υπακολουθίες. Επομένως, δεν υπάρχει υπακολουθία με όριο μεγαλύτερο του* $\frac{\sqrt{3}}{2}$ *ή μικρότερο του* $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ *επομένως αυτά είναι τα* $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ *και* $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ *αντίστοιχα.* □

Συχνά, για να υπολογίσουμε το όριο μιας ακολουθίας αρκεί να την φράξουμε από πάνω και από κάτω από ακολουθίες με γνωστό όρια. Αν τα όρια αυτά συμπίπτουν τότε και η ενδιάμεση ακολουθία συγκλίνει στο ίδιο όριο. Αυτό το αποδεικνύουμε στην παρακάτω πρόταση.

ΠΡΟΤΑΣΗ 209 *Έστω τρεις ακολουθίες a_n, b_n, c_n τ.ω. $a_n \leq b_n \leq c_n$ και $a_n, c_n \to k$. Τότε και $b_n \to k$.*

ΘΕΩΡΗΜΑ 210 *Κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία συγκλίνει. Συγκεκριμένα, αν η a_n είναι αύξουσα και άνω φραγμένη τότε*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_n a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

Παρόμοια για φθίνουσα.

Πολλές φορές είναι ευκολότερο να εργαζόμαστε σε συναρτήσεις για να πάρουμε αποτελέσματα για τις αντίστοιχες ακολουθίες παρά στις ακολουθίες απευθείας. Είναι πιο εύκολο για παράδειγμα (και τα μαθηματικά εργαλεία περισσότερα) να εξετάσουμε αν μια συνάρτηση είναι αύξουσα κάτι το οποίο είναι χρήσιμο για την εφαρμογή του θεωρήματος 210. Για τον λόγο αυτό συσχετίζουμε την συμπεριφορά μιας ακολουθίας και της αντίστοιχης συνάρτησης στο παρακάτω θεώρημα.

Θεωρημα 211 *Έστω μια συνάρτηση $f(x)$ και η ακολουθία $a_n = f(n)$. Αν $\lim_{x\to\infty} f(x) = a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ τότε και $a_n \to a$. Αν η f είναι αύξουσα (φθίνουσα) τότε και η ακολουθία είναι αύξουσα (φθίνουσα) αλλά το αντίστροφο δεν ισχύει.*

Εφαρμόζοντας το θεώρημα 211 αποδεικνύουμε τα παρακάτω αποτελέσματα.

Προταση 212 *Αν $a_n = \sqrt[n]{n}$ και $b_n = \sqrt[n]{a}$ τότε $a_n, b_n \to 1$.*

Αποδειξη. Θα αποδείξουμε ότι η $a_n \to 1$. Κατασκευάζουμε την συνάρτηση $f(x) = x^{1/x}$ και έπειτα την $g(x) = \ln f(x)$. Θα δείξουμε ότι

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$$

και επομένως

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$$

το οποίο σημαίνει χρησιμοποιώντας το προηγούμενο θεώρημα ότι $a_n \to 1$. Έχουμε

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = 0$$

έχοντας χρησιμοποιήσει τον κανόνα L'Hospital.

Συνεχίζοντας θα αποδείξουμε ότι $b_n \to 1$. Θέτουμε $f(x) = a^{\frac{1}{x}}$ και έπειτα $g(x) = \ln f(x)$. Εύκολα προκύπτει ότι

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$$

Αρα $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$ και επομένως $b_n \to 1$. □

Προταση 213 *Αν* $0 < \theta < 1$ *τότε* $\theta^n \to 0$.

Αποδειξη. Θέτουμε $f(x) = \theta^x$ και $g(x) = \ln f(x)$. Θα εξετάσουμε το όριο της $g(x)$ καθώς $x \to \infty$. Παρατηρήστε ότι $\ln\theta < 0$ διότι $\theta \in (0,1)$. Επομένως

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = -\infty$$

Αυτό σημαίνει ότι

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

και επομένως $\theta^n \to 0$. □

Πρόταση 214 *Η ακολουθία* $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ *συγκλίνει στον αριθμό e και γενικά η* $a_n = \left(1+\frac{k}{n}\right)^n$ *συγκλίνει στον* e^k *για κάθε* $k \in \mathbb{R}$. *Επιπλέον, η ακολουθία* $a_n = \left(1+\frac{k}{n}\right)^n$ *είναι αύξουσα για κάθε* $n > -k$.

Απόδειξη. Παρόλο που η ακολουθία a_n είναι καλά ορισμένη για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $k \in \mathbb{R}$ η αντίστοιχη συνάρτηση (όπου n το x) είναι καλά ορισμένη όταν $x \in (-k, \infty)$.
Θέτουμε

$$f(x) = \left(1+\frac{k}{x}\right)^x, \qquad x \in (-k, \infty)$$

και έπειτα $g(x) = \ln f(x)$. Θα εξετάσουμε το όριο της $g(x)$ καθώς $x \to \infty$. Θέλουμε να υπολογίσουμε το όριο

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+\frac{k}{x})}{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+ky)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{k}{1+ky}}{1} = k$$

Θέσαμε για ευκολία $y = \frac{1}{x}$ και χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα L'Hospital. Οπότε εύκολα παίρνουμε ότι

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = e^k$$

και άρα $a_n \to e^k$.

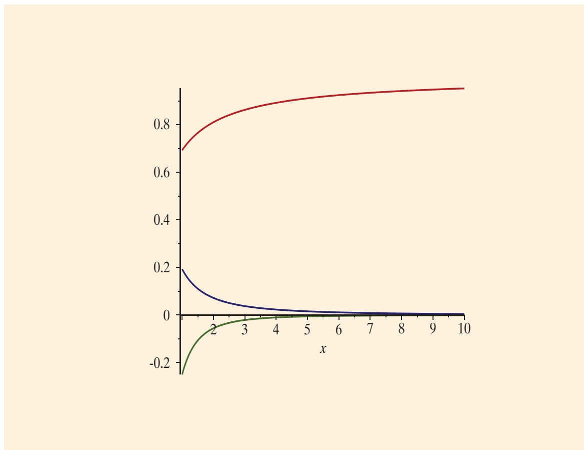
Στην συνέχεια θα αποδείξουμε ότι η ακολουθία $a_n = \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n$ είναι αύξουσα για κάθε $n \geq -k$. Πρέπει να αποδείξουμε ότι η $g(x) = x \ln(1 + \frac{k}{x})$ είναι αύξουσα συνάρτηση. Η πρώτη παράγωγος της g είναι

$$g^{'}(x) = \ln\left(1 + \frac{k}{x}\right) - \frac{k}{x(1 + \frac{k}{x})}$$

Για να είναι αύξουσα η g αρκεί η $g^{'}$ να είναι θετική. Υπολογίζουμε και την δεύτερη παράγωγο της g και έχουμε

$$g^{''}(x) = -\frac{k^2}{x^3(1 + \frac{k}{x})^2}$$

η οποία είναι αρνητική στο διάστημα $(0, +\infty) \cap (-k, +\infty)$ και επομένως η $g^{'}$ είναι φθίνουσα στο ίδιο διάστημα και εύκολα βλέπουμε ότι τείνει στο μηδέν καθώς $x \to \infty$. Αυτό σημαίνει ότι η $g^{'}$ είναι μη αρνητική στο διάστημα $(0, +\infty) \cap (-k, +\infty)$ και αυτό με την σειρά του ότι η g είναι αύξουσα σε αυτό το διάστημα και τελικά το ίδιο συμβαίνει και με την ακολουθία a_n για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και ταυτόχρονα $n > -k$. $\square$



Σχήμα 32: Οι συναρτήσεις $g, g^{'}, g^{''}$ με κόκκινο, μπλε και πράσινο χρώμα αντίστοιχα.

Άσκηση 215 *Έστω η ακολουθία*

$$a_n = n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right)$$

με $a > 0$. *Να αποδειχθεί ότι* $\lim a_n = \ln a$.

Λύση. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = x\left(\sqrt[x]{a} - 1\right) = \frac{a^y - 1}{y}$ θέτοντας $y = \frac{1}{x}$. Θα υπολογίσουμε το όριο της ποσότητας $\frac{a^y-1}{y}$ καθώς $y \to 0$. Χρησιμοποιώντας το κανόνα του L'Hospital έχουμε ότι

$$\frac{a^y-1}{y} \to \ln a \text{ καθώς } y \to 0$$

Αρα $a_n \to \ln a$. $\square$

ΟΡΙΣΜΟΣ 216 *Μια ακολουθία $\{a_n\}$ λέγεται* ***ακολουθία Cauchy*** *αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένας φυσικός αριθμός N τ.ω. για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$ αν $m, n \geq N$ τότε $|a_n - a_m| \leq \varepsilon$.*

ΘΕΩΡΗΜΑ 217 *Σε κάθε ακολουθία a_n υπάρχει μια μονότονη υπακολουθία.*

ΘΕΩΡΗΜΑ 218 *Μια ακολουθία $\{a_n\}$ συγκλίνει* ***ανν*** *είναι ακολουθία Cauchy.*

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 219 *Έστω $a_n \to a$ και*

$$b_n = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \quad (\text{αριθμητικός μέσος})$$

Θα αποδείξουμε ότι $b_n \to a$. *Υποθέτουμε για ευκολία ότι* $a = 0$ *οπότε αφού* $a_n \to 0$ *τότε για κάθε* $\varepsilon > 0$ *μπορούμε να βρούμε* m *τ.ω.*

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \textit{όταν } n > m$$

Όμως

$$|b_n| \leq \frac{|a_1 + \cdots + a_m|}{n} + \frac{|a_{m+1}| + \cdots + |a_n|}{n} < \frac{k}{n} + \frac{\varepsilon}{2}$$

όπου $k = |a_1 + \cdots + a_m|$. *Διαλέγουμε* $N > m$ *τ.ω.*

$$\frac{k}{n} < \frac{\varepsilon}{2} \; \textit{όταν } n > N$$

οπότε προκύπτει ότι $|b_n| < \varepsilon$ *επομένως ικανοποιείται ο ορισμός της σύγκλισης ακολουθίας αριθμών. Αν* $a \neq 0$ *τότε εργαζόμαστε στην ακολουθία* $a_n - a \to 0$ *και δουλεύουμε παρομοίως.*

Στην συνέχεια θα εξετάσουμε τον **γεωμετρικό μέσο**, *δηλαδή*

$$c_n = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \quad (\textbf{γεωμετρικός μέσος})$$

Θα υποθέσουμε ότι $a_n > 0$ *για κάθε* n *και ότι* $a_n \to a \neq 0$. *Ο λογάριθμος της* c_n *είναι ως εξής*

$$\ln c_n = \frac{\ln a_1 + \cdots + \ln a_n}{n}$$

Όμως $\ln a_n \to \ln a$ *και επομένως η ακολουθία* $\ln c_n$ *είναι στην πραγματικότητα ο αριθμητικός μέσος της* $\ln a_n$ *άρα* $\ln c_n \to \ln a$ *ή αλλιώς* $c_n \to a$. □

Το (μερικώς) αντίστροφο του αριθμητικού μέσου όρου είναι το αποτέλεσμα της επόμενης άσκησης.

ΑΣΚΗΣΗ 220 *Αν η ακολουθία* a_n *είναι μονότονη και* $a \in \mathbb{R}$ *τέτοιο ώστε*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = a$$

τότε να αποδειχθεί ότι και $\lim a_n = a$.

ΛΥΣΗ. Θα υποθέσουμε ότι η ακολουθία είναι αύξουσα και χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $a_n \geq 0$.

Θέτουμε

$$s_n = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

Έχουμε υποθέσει ότι η s_n συγκλίνει επομένως είναι φραγμένη, δηλαδή υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $|s_n| \leq M$. Επίσης

$$2ns_{2n} = a_1 + \cdots + a_{2n} \geq a_n + \cdots + a_{2n} \geq (n+1)a_n \geq na_n$$

οπότε $0 \leq a_n \leq 2s_{sn} \leq 2M$. Αρα η ακολουθία a_n είναι αύξουσα και άνω φραγμένη επομένως συγκλίνει σε κάποιον αριθμό $b \in \mathbb{R}$. Αν $b \neq a$ τότε θα πρέπει να ισχύει ότι $s_n \to b$ (δες προηγούμενο παράδειγμα). Επομένως υποχρεωτικά $b = a$. $\square$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 221 *Θα υπολογίσουμε το όριο της ακολουθίας*

$$a_n = \frac{1 + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt[n]{n}}{n}$$

Γνωρίζουμε ότι $\sqrt[n]{n} \to 1$ *και επομένως ο αριθμητικός μέσος όρος θα συγκλίνει στην μονάδα, δηλαδή* $a_n \to 1$. $\square$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 222 *Έστω μια ακολουθία* x_n *και έστω ότι η ακολουθία* $a_n = x_{n+1} - x_n$ *συγκλίνει στον αριθμό* *α. Θα αποδείξουμε ότι*

$$\lim \frac{x_n}{n} = a$$

Πράγματι, αφού

$$\frac{(x_{n+1} - x_n) + (x_n - x_{n-1}) + \cdots + (x_2 - x_1)}{n} \to a$$

έπεται ότι

$$-\frac{x_1}{n} + \frac{x_{n+1}}{n} \to a$$

ή αλλιώς

$$\frac{x_{n+1}}{n} \to a$$

Όμως

$$\frac{x_{n+1}}{n} = \frac{x_{n+1}}{n+1}\frac{n+1}{n} \to a$$

προκύπτει ότι

$$\frac{x_n}{n} \to a$$

$\square$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 223 *Θα υπολογίσουμε το όριο της ακολουθίας*

$$\sqrt[n]{\frac{n!}{5 \cdot 9 \cdots (4n+1)}}$$

Ισχύει ότι

$$\sqrt[n]{\frac{n!}{5 \cdot 9 \cdots (4n+1)}} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{5}{1} \cdot \frac{9}{2} \cdots \frac{4n+1}{n}}}$$

Επειδή $\frac{4n+1}{n} \to 4$ *και λόγω του γεωμετρικού μέσου όρου προκύπτει ότι το ζητούμενο όριο είναι το* $\frac{1}{4}$. $\square$

Ακολουθίες που ορίζονται με αναδρομικό τύπο

Μερικές φορές, μας δίνεται μια ακολουθία η οποία ορίζεται αναδρομικά μέσω κάποιας σχέσης, για παράδειγμα $a_{n+1} = f(a_n)$. Αν η ακολουθία συγκλίνει, έστω στο L, τότε το L θα είναι ρίζα της εξίσωσης $L - f(L) = 0$ αν η f είναι συνεχής. Συνήθως, στις αναδρομικές ακολουθίες, προσπαθούμε να αποδείξουμε ότι είναι μονότονη και άνω ή κάτω φραγμένη (αν είναι αύξουσα άνω φράγμενη και κάτω φραγμένη αν είναι φθίνουσα). Οπότε θα έχει όριο το οποίο αναγκαστικά θα είναι ρίζα της παραπάνω εξίσωσης.

Τα βήματα που ακολουθούμε, συνήθως, είναι τα εξής

(i) Βρίσκουμε τα πιθανά όρια L υποθέτοντας ότι η ακολουθία συγκλίνει. Πιθανόν να υπάρχουν περισσότερες από μια ρίζες της εξίσωσης $L = f(L)$.

(ii) Προσπαθούμε να αποδείξουμε επαγωγικά ότι η ακολουθία είναι μονότονη.

(iii) Αν είναι αύξουσα, βρίσκουμε το μικρότερο (αν υπάρχει) από τα πιθανά όρια της ακολουθίας το οποίο φράσσει από πάνω την ακολουθία. Αν είναι φθίνουσα βρίσκουμε το μεγαλύτερο (αν υπάρχει) από τα πιθανά όρια της ακολουθίας το οποίο φράσσει από κάτω την ακολουθία.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 224 *Έστω η ακολουθία a_n που ορίζεται από τον αναδρομικό τύπο*

$$a_{n+1} = \left(\sqrt{2}\right)^{a_n}, \quad a_0 = 1$$

Η ακολουθία λαμβάνει θετικές τιμές επομένως, αν συγκλίνει, το όριο θα είναι ένας θετικός αριθμός. Αν συγκλίνει τότε θα ισχύει ότι $\lim a_{n+1} = \lim a_n = L$ και το L θα είναι ρίζα της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{2}^x - x$. Μελετούμε την συνάρτηση $f(x) = \sqrt{2}^x - x$ η οποία έχει ελάχιστο στο σημείο $x = -\frac{\ln\ln\sqrt{2}}{\ln\sqrt{2}}$ όπου λαμβάνει αρνητική τιμή. Επιπλέον, είναι φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, -\frac{\ln\ln\sqrt{2}}{\ln\sqrt{2}})$ και αύξουσα στο $(-\frac{\ln\ln\sqrt{2}}{\ln\sqrt{2}}, \infty)$ και επομένως μηδενίζεται σε ακριβώς δυο σημεία, στα σημεία $x = 2$ και $x = 4$ όπως μπορούμε να δούμε χρησιμο-

ποιώντας το Geogebra. Τα δυο αυτά σημεία είναι τα πιθανά όρια της ακολουθίας.

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι είναι αύξουσα. Πράγματι, για $n = 1$ έχουμε ότι $a_1 = \sqrt{2} \leq \left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}} = a_2$. Υποθέτουμε ότι ισχύει για κάποιο k, δηλαδή $a_k \leq a_{k+1}$. Θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για $k + 1$. Πράγματι, $a_{k+1} = \left(\sqrt{2}\right)^{a_k} \leq \left(\sqrt{2}\right)^{a_{k+1}} = a_{k+2}$. Τέλος θα αποδείξουμε ότι $a_n \leq 2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (το 2 είναι μια ρίζα της εξίσωσης $L = \sqrt{2}^L$). Για $n = 1$ έχουμε ότι $\sqrt{2} < 2$ άρα ισχύει. Υποθέτουμε ότι ισχύει για κάποιο k, δηλαδή $a_k \leq 2$ και θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για $k + 1$. Πράγματι, $a_{k+1} = \left(\sqrt{2}\right)^{a_k} \leq \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$.

Τελικά το όριο της ακολουθίας είναι το 2 αφού είναι αύξουσα και φραγμένη από το 2. $\square$

ΑΣΚΗΣΗ 225 *Έστω $0 \leq a \leq 1$. Θέτουμε $a_1 = 0$ και $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}(a - a_n^2)$. Να αποδειχθεί ότι η ακολουθία a_n είναι αύξουσα και ότι $\lim a_n = \sqrt{a}$.*

ΛΥΣΗ. Θα αποδείξουμε ότι η ακολουθία είναι αύξουσα και άνω φραγμένη. Αυτό σημαίνει ότι συγκλίνει.

Πράγματι,

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a + 1 - (1 - 2a_n + a_n^2)) = \frac{1}{2}((a+1) - (1 - a_n)^2) \leq \frac{a+1}{2} \leq 1$$

επομένως είναι άνω φραγμένη.

Στην συνέχεια θα αποδείξουμε ότι είναι αύξουσα χρησιμοποιώντας επαγωγή. Αφού $a_2 = \frac{a}{2} \geq 0 = a_1$ έχουμε ότι ισχύει για $n = 1$. Υποθέτουμε ότι ισχύει $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ για κάποιο n. Θα αποδείξουμε ότι και $a_{n+1} \geq a_n$.

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \left(a_n + \frac{1}{2}(a - a_n^2)\right) - \left(a_{n-1} + \frac{1}{2}(a - a_{n-1}^2)\right) \\ &= (a_n - a_{n-1}) - \frac{1}{2}(a_n^2 - a_{n-1}^2) \\ &= (a_n - a_{n-1})\left(1 - \frac{a_n + a_{n-1}}{2}\right) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Λόγω του ότι είναι αύξουσα και άνω φραγμένη συγκλίνει. Αυτό σημαίνει ότι $\lim a_n = \lim a_{n+1} = b$ και επομένως $b = b + \frac{1}{2}(a - b^2)$. Άρα $b = \sqrt{a}$. $\square$

ΑΣΚΗΣΗ 226 *Έστω η ακολουθία με αναδρομικό τύπο $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1}$ και $a_1 = 1$. Να αποδειχθεί ότι*

$$\lim a_n = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$$

ΛΥΣΗ. Θα αποδείξουμε αρχικά ότι είναι αύξουσα ακολουθία. Πράγματι, $a_2 = \sqrt{2} \geq a_1 = 1$. Υποθέτουμε ότι $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ για κάποιο n. Θα αποδείξουμε ότι $a_{n+1} \geq a_n$.

Έχουμε ότι

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{a_n + 1} - \sqrt{a_{n-1} + 1} = \frac{a_n - a_{n-1}}{\sqrt{a_n + 1} + \sqrt{a_{n-1} + 1}} \geq 0$$

Στην συνέχεια θα αποδείξουμε ότι είναι άνω φραγμένη. Λόγω του ότι είναι αύξουσα προκύπτει ότι

$$a_n \leq \sqrt{a_n + 1}$$

ή αλλιώς

$$a_n^2 - a_n - 1 \leq 0$$

Δηλαδή

$$\left(a_n - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \left(a_n - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \leq 0$$

Επομένως θα πρέπει να ισχύει ότι

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} \leq a_n \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Δηλαδή η ακολουθία είναι φραγμένη. Αυτό σημαίνει ότι συγκλίνει, δηλαδή $\lim a_{n+1} = \lim a_n = b$ με b τέτοιο ώστε $b = \sqrt{b+1}$. Τελικά προκύπτει ότι $b = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. □

Μερικά χρήσιμα αποτελέσματα είναι τα παρακάτω.

ΛΗΜΜΑ 227 (Κυριαρχημένης Σύγκλισης) *Έστω a_{nk} μϵ $n, k \in \mathbb{N}$ πραγματικοί αριθμοί και b_k μη αρνητικοί ακολουθία αριθμών τέτοια ώστϵ*

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k < \infty$$

και

$$|a_{nk}| \leq b_k$$

Αν $\lim_{n\to\infty} a_{nk} = a_k$ *τότε*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

ΛΗΜΜΑ 228 (Fatou) *Έστω* a_{nk} *μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί. Τότε*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \liminf_{n\to\infty} a_{nk} \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 229 *Αν θέλουμε να αποδείξουμε ότι μια ακολουθία συγκλίνει στο μηδέν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε εκτός των άλλων και εργαλεία από τις σειρές ακολουθιών. Όπως θα δούμε παρακάτω, αν η σειρά μιας ακολουθίας συγκλίνει τότε η αντίστοιχη ακολουθία τείνει στο μηδέν. Θα δώσουμε διάφορα κριτήρια σύγκλισης σειρών τα οποία μπορούμε κάλλιστα να εφαρμόσουμε για να εξετάσουμε αν μια ακολουθία συγκλίνει στο μηδέν.* □

Ένα κλασικό κριτήριο για το αν μια ακολουθία συγκλίνει στο 0 ή αποκλίνει στο άπειρο είναι το παρακάτω.

ΘΕΩΡΗΜΑ 230 (ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΛΟΓΟΥ ΚΑΙ n-ΟΣΤΗΣ ΡΙΖΑΣ)
Αν

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = p < 1 \text{ ή } \quad \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = p < 1$$

τότε $a_n \to 0$. *Αν*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = p > 1 \quad \text{ ή } \quad \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = p > 1$$

τότε και $|a_n| \to \infty$.

ΑΣΚΗΣΗ 231 *Να αποδειχθεί ότι*

$$\lim(1+n+n^2)^{\frac{1}{n}} = 1, \quad \lim(2^n+3^n)^{\frac{1}{n}} = 3, \quad \lim \frac{\ln n}{n} = 0$$

(**Υπόδειξη**: Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα 211).

ΑΣΚΗΣΗ 232 *Να αποδειχθεί ότι*

$$\lim \frac{a^n}{n!} = 0, \ \text{ για κάθε } a \in \mathbb{R}$$

(**Υπόδειξη**: Χρησιμοποιήστε το θεώρημα 230).

Άσκηση 233 *Να εξεταστούν ως προς την σύγκλιση οι ακολουθίες*

$$\frac{n}{2^n}, \quad \frac{2^n}{n^2}, \quad \frac{n!}{n^n}$$

(**Υπόδειξη**: Χρησιμοποιήστε το θεώρημα 230).

Άσκηση 234 *Μελετήστε την ακολουθία που ορίζεται αναδρομικά ως εξής:* $0 < a_1 < 1$ *και* $a_{n+1} = 1 - \sqrt{1 - a_n}$.

Άσκηση 235 *Να υπολογισθεί το όριο της ακολουθίας*

$$a_n = \left(1 + \frac{k}{b_n}\right)^{b_n}, \qquad \text{όπου } b_n \to +\infty, \quad k \in \mathbb{R}$$

Άσκηση 236 *Υπολογίστε το όριο της ακολουθίας*

$$a_n = \frac{c_k n^k + \cdots + c_1 n + c_0}{b_r n^r + \cdots + b_1 n + b_0}$$

όπου $c_0, \cdots, c_k, b_0, \cdots, b_r \in \mathbb{R}$ *για όλες τις πιθανές τιμές* $r, k \in \mathbb{N}$.

Άσκηση 237 *Υπολογίστε τα όρια των ακολουθιών*

$$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}, \quad a_n = \ln(n+1) - \ln n, \quad a_n = \frac{\sqrt{n}\sin(n!e^n)}{n+1}$$

Θεώρημα Taylor και εφαρμογές στην προσέγγιση ριζών συνάρτησης

ΘΕΩΡΗΜΑ 238 *Αν η συνάρτηση f έχει συνεχείς παραγώγους μέχρι τάξεως n στο διάστημα $[a,b]$ και η $f^{(n+1)}(x)$ υπάρχει στο ανοικτό (a,b) τότε για κάθε $x_0, x \in [a,b]$ υπάρχει ξ μεταξύ του x_0 και x τ.ω.*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Λέμε ότι έχουμε το ανάπτυγμα Taylor της f γύρω από το σημείο x_0.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 239 *Έστω η $f(x) = e^x$. Είναι γνωστό ότι $f^{(n)}(x) = e^x$ όπου με $f^{(n)}(x)$ εννοούμε την νιοστή παράγωγο της συνάρτησης. Η συγκεκριμένη συνάρτηση ικανοποιεί τις προυποθέσεις του προηγούμενου θεωρήματος επομένως μπορούμε να επιλέξουμε $x_0 = 0$ και να γράψουμε*

$$\begin{aligned} e^x &= e^0 + \frac{e^0}{1!}x + \frac{e^0}{2!}x^2 + \frac{e^\xi}{3!}x^3 \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{e^\xi}{3!}x^3, \quad \xi \in (0,x) \end{aligned}$$

Για την συγκεκριμένη συνάρτηση, επειδή έχει παραγώγους όλων των τάξεων, μπορούμε να συνεχίσουμε το ανάπτυγμα μέχρι όποιον όρο θέλουμε.

Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το $e^{\frac{1}{3}}$. *Αυτό μπορούμε να το κάνουμε μέσω κατάλληλου αναπτύγματος Taylor. Είδαμε ότι υπάρχει* $\xi \in (0, 1/3)$ *τέτοιο ώστε*

$$e^{1/3} = 1 + 1/3 + 1/18 + \frac{e^{\xi}}{3!}(1/27)$$

Επομένως

$$|e^{1/3} - (1 + 1/3 + 1/18)| = \frac{e^{\xi}}{3!}(1/27) \leq \frac{1}{54}$$

Αυτό σημαίνει ότι ο αριθμός $1+1/3+1/18$ *είναι σχετικά κοντά στον ζητούμενο αριθμό. Αν θέλουμε να αυξήσουμε την ακρίβεια του υπολογισμού μας θα πρέπει να αναπτύξουμε κατά Taylor σε περισσότερους όρους.*

$\square$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ **240** *Έστω η συνάρτηση*

$$f(x) = xe^x - (1 + e^x)\ln(1 + e^x), \quad x \in (0, +\infty)$$

Θα υπολογίσουμε το όριο της συνάρτησης καθώς $x \to \infty$ *χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα Taylor αφού υπολογίσουμε τις παραγώγους* $f^{'}$ *και* $f^{''}$ *και αποδείξουμε ότι είναι αρνητικές για κάθε* $x \in (0, +\infty)$. *Η πρώτη παράγωγος είναι*

$$f^{'}(x) = e^x\left(x - \ln(1+e^x)\right)$$

η οποία είναι αρνητική για κάθε $x \in (0, +\infty)$. *Η δεύτερη παράγωγος είναι*

$$f^{''}(x) = e^x\left(x - \ln(1+e^x) + \frac{1}{1+e^x}\right)$$

η οποία είναι αρνητική για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Αναπτύσσουμε γύρω από την μονάδα την $f(x)$ *κατά σειρά Taylor και έχουμε*

$$f(x) = f(1) + f^{'}(1)\frac{(x-1)}{1!} + f^{''}(\xi)\frac{(x-1)^2}{2!}, \quad \xi \in (1, x)$$

Επειδή $f^{''}(\xi)\frac{(x-1)^2}{2!} \leq 0$ *για κάθε* $x > 1$ *και για κάθε* $\xi \in (1, +\infty)$ *προκύπτει ότι*

$$f(x) \leq f(1) + f^{'}(1)\frac{(x-1)}{1!}$$

Λαμβάνοντας το όριο της $f(x)$ καθώς $x \to +\infty$ με βάση την παραπάνω ανισότητα προκύπτει ότι

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

παρατηρώντας ότι $f^{'}(1) \leq 0$. □

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 241 *Το αποτέλεσμα του προηγούμενου παραδείγματος ισχύει γενικότερα για κάθε συνάρτηση η οποία έχει αρνητική πρώτη και δεύτερη παράγωγο. Παρόμοια, αν μια συνάρτηση έχει θετική πρώτη και δεύτερη παράγωγο τότε το όριο καθώς $x \to +\infty$ θα είναι το $+\infty$.* □

Μια εφαρμογή της σειράς Taylor μιας συνάρτησης είναι η κατασκευή προσεγγιστικών μεθόδων. Θα παρουσιάσουμε στην συνέχεια την μέθοδο του Νεύτωνα για τον υπολογισμό ρίζας μιας συνάρτησης.

Έστω η συνάρτηση f η οποία έχει μια ρίζα, την x^*. Έστω ότι μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα 238 στην f τότε έχουμε

$$0 = f(x^*) = f(x_n) + (x^* - x_n)f^{'}(x_n) + \frac{1}{2}(x^* - x_n)^2 f^{''}(\xi),\ \xi \in (x_n, x^*)$$

για κάποιο σημείο x_n. Επειδή δεν γνωρίζουμε αν το x_n είναι μικρότερο ή όχι του x^* όταν γράφουμε $\xi \in (x_n, x^*)$ εννοούμε ότι το ξ είναι μεταξύ του x_n και του x^*. Αρα

$$x^* = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{1}{2}(x^* - x_n)^2 \frac{f''(\xi)}{f'(x_n)}$$

Επειδή το σημείο ξ δεν είναι γνωστό δεν μπορούμε να υπολογίσουμε με ακρίβεια το x^*. Αν υποθέσουμε όμως ότι το x_n είναι πολύ κοντά στο x^* τότε ο όρος $\frac{1}{2}(x^* - x_n)^2 \frac{f''(\xi)}{f'(x_n)}$ θα είναι πολύ μικρός οπότε παραλείποντας τον μπορούμε να πούμε ότι η ποσότητα $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ θα είναι ακόμη πιο κοντά στην ρίζα της f. Με αυτό το σκεπτικό κατασκευάσαμε μια ακολουθία σημείων, την x_n, η οποία κάτω από προϋποθέσεις συγκλίνει πράγματι στην ρίζα της f. Τις απαιτούμενες προϋποθέσεις καθώς και την απόδειξη της σύγκλισης θα την δούμε στο επόμενο θεώρημα.

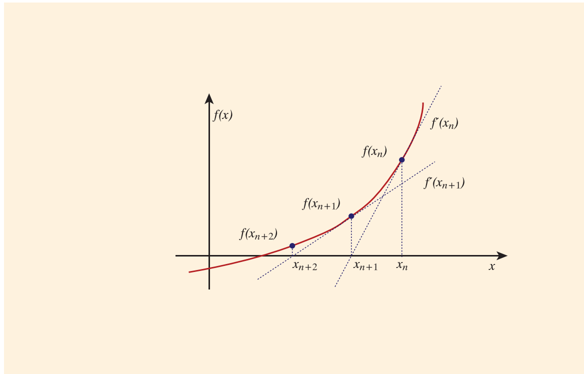
ΘΕΩΡΗΜΑ 242 (Μέθοδος του Νεύτωνα) *Έστω x^* απλή ρίζα της συνάρτησης f, δηλαδή $f(x^*) = 0$ και $f'(x^*) \neq 0$. Υποθέτουμε ότι η f είναι δυο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα που περιέχει το x^*. Τότε υπάρχει ένα κλειστό διάστημα I που περιέχει το x^* τέτοιο ώστε για κάθε $x_0 \in I$ η ακολουθία x_n που ορίζεται ως εξής,*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad \text{(Μέθοδος του Νεύτωνα)}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots \tag{9}$$

να συγκλίνει στο x^*. Επιπλέον,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^2} = \frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}$$

Όπως παρατηρούμε, για να έχει αποτέλεσμα η μέθοδος του Νεύτωνα θα πρέπει να επιλέξουμε την αρχική τιμή της ακολουθίας κοντά στο x^*. Για τον λόγο αυτό θα παρουσιάσουμε μια άλλη μέθοδο, την μέθοδο της διχοτόμησης, η οποία είναι πολύ πιο αργή από αυτή



Σχήμα 33

του Νεύτωνα αλλά θα μας δώσει σε μερικά βήματα μια καλή αρχική τιμή για να την χρησιμοποιήσουμε στην μέθοδο του Νεύτωνα.

Υποθέτουμε ότι η $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και τέτοια ώστε $f(a)f(b) \leq 0$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $[a, b]$. Επιλέγουμε $c = \frac{a+b}{2}$ δηλαδή το μέσο του διαστήματος και υπολογίζουμε το $f(c)$. Τότε είτε $f(c) = 0$ είτε $f(a)f(c) \leq 0$ είτε $f(c)f(b) \leq 0$. Στην πρώτη περίπτωση έχουμε ήδη υπολογίσει την ρίζα. Στις άλλες δυο περιπτώσεις έχουμε υπο-διπλασιάσει το διάστημα στο οποίο βρίσκεται η ρίζα. Συνεχίζουμε με αυτό τον τρόπο έτσι ώστε το μήκος του διαστήματος να γίνει αρκετά μικρό.

ΘΕΩΡΗΜΑ 243 (Μέθοδος της Διχοτόμησης) *Έστω $f \in C([a,b])$ και $f(a)f(b) \leq 0$. Έστω x_n η ακολουθία προσεγγίσεων που παράγει η μέθοδος της διχοτόμησης. Τότε είτε $x_N = x^*$ για κάποιο N, είτε $x_n \to x^*$ καθώς $n \to \infty$. Επιπλέον*

$$|x^* - x_n| \leq \frac{b-a}{2^n}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

Με την μέθοδο της διχοτόμησης επιλέγουμε εκ των προτέρων το n για να υπολογίσουμε την ρίζα της συνάρτησης με μια ζητούμενη ακρίβεια. Μπορούμε π.χ. να εφαρμόσουμε την μέθοδο της διχοτόμησης για να υπολογίσουμε την ρίζα της συνάρτησης με ακρίβεια ενός ή δυο δεκαδικών ψηφίων και αυτή την προσέγγιση να την χρησιμοποιήσουμε ως αρχική τιμή στην μέθοδο του Νεύτωνα. Αυτό το κάνουμε διότι η μέθοδος του Νεύτωνα είναι ταχύτερη. Ένα σημαντικό πλεονέκτημα όμως της μεθόδου της διχοτόμησης είναι ότι δεν απαιτείται από την συνάρτηση να είναι παραγωγίσιμη παρά μόνο συνεχής. Έτσι σε μερικές περιπτώσεις ίσως είναι η μοναδική μέθοδος προσέγγισης ρίζας συνάρτησης.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 244 *Θα υπολογίσουμε την ρίζα της συνάρτησης* $f(x) = x^3 - 2x - 5$ *στο διάστημα* $[2, 3]$ *χρησιμοποιώντας τις παραπάνω τεχνικές. Όπως έχουμε διαπιστώσει, η μέθοδος του Νεύτωνα είναι ταχύτερη από την μέθοδο της διχοτόμησης αρκεί η αρχική τιμή να είναι αρκετά κοντά στην ζητούμενη ρίζα. Για τον λόγο αυτό συνήθως εφαρμόζουμε την μέθοδο της διχοτόμησης για μερικά βήματα έτσι ώστε να πάρουμε μια προσέγγιση η οποία στην συνέχεια θα χρησιμοποιηθεί ως αρχική τιμή στην μέθοδο του Νεύτωνα.*

Έχουμε ότι $f(2) = -1$ *και* $f(3) = 16$. *Θέτουμε* $x_1 = \frac{2+3}{2} = 2.5$ *και υπολογίζουμε το* $f(2.5) = 5.625$. *Αρα η ρίζα βρίσκεται στο διάστημα* $[2, 2.5]$. *Στην συνέχεια θέτουμε* $x_2 = \frac{2+2.5}{2} = 2.25$ *και υπολογίζουμε το* $f(2.25) = 0.21$ *και επομένως η ρίζα βρίσκεται στο διάστημα* $[2, 2.25]$. *Θέτουμε* $x_3 = \frac{2+2.25}{2} = 2.125$ *και χρησιμοποιούμε αυτό τον αριθμό ως αρχική τιμή στην μέθοδο του Νεύτωνα έτσι ώστε να φτάσουμε γρηγορότερα σε μια καλή προσέγγιση της ρίζας.*

Η μέθοδος του Νεύτωνα στην προκειμένη περίπτωση είναι η κατασκευή της ακολουθίας αριθμών

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots, \quad x_0 = 2.125$$

Έτσι προκύπτει ότι $x_1 = 2.106805099$, $x_2 = 2.099557030$, $x_3 = 2.096608257$, $x_4 = 2.095398617$ *και* $x_5 = 2.094900735$. *Διαπιστώνουμε ότι έχουν σταθεροποιηθεί τα δυο πρώτα δεκαδικά ψηφία. Μπορούμε να συνεχίσουμε τις επαναλήψεις για να έχουμε ακόμη μεγαλύτερη ακρίβεια.* $\square$