

Δεύτερο Φυλλάδιο Εργασίας Στοχαστικές Διαδικασίες (ΠΜΣ)

Τμήμα Στατιστικής και Αναλογιστικών - Χρηματοοικονομικών
Μαθηματικών

Πανεπιστήμιο Αιγαίου
Διδάσκων: Νίκος Χαλιδιάς

- (1) Αποδείξτε την άσκηση 228, το θεώρημα 230, το θεώρημα 231 και το λήμμα 233.
- (2) Έστω η αλυσίδα με σύνολο καταστάσεων το $S = \{1, 2, 3\}$ και πίνακα μετάβασης τον

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.6 & 0 \end{pmatrix}$$

Αν η αρχική κατανομή είναι η $m^{(0)} = (1/7, 2/7, 3/7, 1/7)$ υπολογίστε την $m^{(n)}$. Για να το κάνετε αυτό υπολογίστε πρώτα το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα με τον τρόπο που περιγράφεται στις σημειώσεις και στη συνέχεια υπολογίστε την νιοστή δύναμη του πίνακα. Το ζητούμενο αποτέλεσμα θα το πάρετε χρησιμοποιώντας το κατάλληλο θεώρημα που έχετε αποδείξει στο πρώτο θέμα. Εξηγήστε γιατί, εν γένει, είναι προτιμότερο να χρησιμοποιούμε το ελάχιστο πολυώνυμο αντί για το χαρακτηριστικό για τον παραπάνω υπολογισμό.

Το σημαντικότερο, ίσως, ερώτημα στη μελέτη των Μαρκοβιανών αλυσίδων είναι ο υπολογισμός των πιθανοτήτων $(P^n)_{ij}$. Αν μας ζητείται να τις υπολογίσουμε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τότε χρειαζόμαστε την νιοστή δύναμη του πίνακα μετάβασης. Αυτό μπορεί να είναι εφικτό σε πίνακες πεπερασμένης διάστασης μέσω της προηγούμενης διαδικασίας αλλά σε πίνακες άπειρης διάστασης πρέπει να εφαρμοσθούν άλλες τεχνικές. Αν αυτό δεν είναι δυνατό τότε το μόνο που μπορούμε να κάνουμε είναι να υπολογίσουμε τις πιθανότητες $(P^n)_{ij}$ για μεγάλα $n \in \mathbb{N}$ μέσω της εύρεσης του ορίου τους καθώς το $n \rightarrow \infty$.

- (3) Εξηγήστε το παράδειγμα 327 χωρίς το κομμάτι που αναφέρεται στους μέσους χρόνους απορρόφησης.
- (4) Να υπολογισθούν οι οριακές πιθανότητες της αλυσίδας με σύνολο καταστάσεων $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ και πίνακα μετάβασης

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 & 4/5 & 0 \\ 1/5 & 0 & 1/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix}$$

Χρησιμοποιήστε την παρατήρηση 317 για να υπολογίσετε ευκολότερα τις πιθανότητες h_i^j . Επίσης χρησιμοποιήστε κατάλληλα την έννοια της υπο-αλυσίδας για τον χαρακτηρισμό των καταστάσεων.

- (5) Υπολογίστε τις οριακές πιθανότητες του τυχαίου περιπάτου χρησιμοποιώντας την έννοια της στάσιμης κατανομής.
- (6) Να υπολογισθούν οι πιθανότητες $P(X_n = j | X_0 = i)$ για μεγάλα $n \in \mathbb{N}$ της αλυσίδας με σύνολο καταστάσεων το $S = \{1, 2, 3, 4\}$ και πίνακα μετάβασης τον

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 2/4 \end{pmatrix}$$

Εφαρμόστε το εργοδικό θεώρημα 353 ($f_{ij} = h_i^j$) στην παραπάνω αλυσίδα. Παρατηρήστε ότι η ακολουθία $(P^n)_{ij}$ έχει δυο συγκλίνουσες υπακολουθίες και διαπιστώστε ότι το αποτέλεσμα του εργοδικού θεωρήματος είναι απλώς ο μέσος όρος των ορίων των υπακολουθιών. Επομένως, η εύρεση όλων των ορίων των υπακολουθιών της $(P^n)_{ij}$ είναι ισχυρότερο αποτέλεσμα από αυτό του εργοδικού θεωρήματος.