Μιχάλης Παπαδημητράκης

Ανάλυση

Πραγματικές Συναρτήσεις μιας Μεταβλητής

Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά Συγγράμματα και Βοηθήματα
www.kallipos.gr

HEALLINK
Σύνδεσμος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΕΣΠΑ 2007-2013
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Ανάλυση
Πραγματικές Συναρτήσεις μιας Μεταβλητής

Συγγραφή

Μιχάλης Παπαδημητράκης

Κριτικός αναγνώστης

Ιωάννης Σαραντόπουλος

ISBN: 978-960-603-403-9

ΣΥΝΔΕΣΜΟΣ ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΩΝ

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Ηρώων Πολυτεχνείου 9, 15780 Ζωγράφου

www.kallipos.gr

Στη Μαρία

και

στα παιδιά μας, Μυρτώ-Ασπασία και Δημήτρη.

Προκαταρκτικά.

Το αντικείμενο αυτού του βιβλίου είναι οι **πραγματικοί αριθμοί** και οι **πραγματικές συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής**. Αφού εκτεθούν οι βασικές ιδιότητες των (πραγματικών) αριθμών, δηλαδή η **Ιδιότητα Supremum** και τα πορίσματά της, εισάγονται οι έννοιες του ορίου ακολουθίας και του ορίου συνάρτησης, η έννοια της συνεχούς συνάρτησης και οι έννοιες της παραγώγου και του ολοκληρώματος. Ακολουθεί η μελέτη των σειρών αριθμών, των ακολουθιών συναρτήσεων, των σειρών συναρτήσεων και των γενικευμένων ολοκληρωμάτων. Ανάμεσα στις σειρές συναρτήσεων και στα γενικευμένα ολοκληρώματα περιλαμβάνεται μια σύντομη μελέτη των μετρικών χώρων. Το βιβλίο τελειώνει με το ζήτημα της **αξιωματικής θεμελίωσης** των πραγματικών αριθμών.

Το επίπεδο του βιβλίου *δεν είναι στοιχειώδες*, διότι ασχολείται με τη βαθύτερη ιδιότητα των πραγματικών αριθμών, την Ιδιότητα Supremum, και αποδεικνύει όλα τα βασικά πορίσματα της ιδιότητας αυτής. Για παράδειγμα, αποδεικνύονται η ύπαρξη ριζών των θετικών αριθμών, το θεώρημα των Bolzano - Weierstrass για ακολουθίες, τα βασικά θεωρήματα για συνεχείς συναρτήσεις, θεμελιώνεται η έννοια του ολοκληρώματος και αποδεικνύεται η ολοκληρωσιμότητα των συνεχών συναρτήσεων.

Το επίπεδο του βιβλίου *δεν είναι ούτε εύκολο*: είναι αρκετά πυκνογραμμένο και απαιτεί συγκέντρωση. Οι αναγνώστες (κυρίως φοιτητές) πρέπει να δώσουν μεγάλη έμφαση στην ακριβή διατύπωση των εννοιών, στην κατανόηση και, κυρίως, στην αναπαραγωγή των αποδείξεων των κυριότερων αποτελεσμάτων και, οπωσδήποτε, στη μαθηματικά αυστηρή επίλυση θεωρητικών ασκήσεων.

Θα ήθελα να κάνω κάποια σχόλια για το περιεχόμενο.

1. Τονίζεται η έννοια της περιοχής σε σχέση με την έννοια του ορίου ακολουθίας. Επίσης, δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στις εκφράσεις “από κάποιον n και πέρα” και “για άπειρους n”. Αντιστοίχως, δίνεται έμφαση στις εκφράσεις “κοντά στο ξ” και “σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο ξ” σε σχέση με την έννοια του ορίου συνάρτησης.

2. Οι *αναλυτικοί ορισμοί* των τριγωνομετρικών συναρτήσεων, μέσω δυναμοσειρών αλλά και μέσω ολοκληρωμάτων, παρουσιάζονται στο κεφάλαιο 10 και αποδεικνύονται οι γνωστές ιδιότητες αυτών των συναρτήσεων. Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις χρησιμοποιούνται, όμως, ελεύθερα στα προηγούμενα κεφάλαια ως παραδείγματα.

3. Το ολοκλήρωμα Riemann ορίζεται αρχικά μέσω των αθροισμάτων Darboux και βάσει αυτού του ορισμού αποδεικνύονται οι διάφορες ιδιότητές του. Κατόπιν, παρουσιάζεται και ο ορισμός μέσω των αθροισμάτων Riemann και αποδεικνύεται η ισοδυναμία των δύο ορισμών. Παρά το ότι τα αθροίσματα Riemann συνδέονται πιο άμεσα και φυσιολογικά με τις εφαρμογές των ολοκληρωμάτων, προτάσσω τα αθροίσματα Darboux διότι μου φαίνεται ότι οι αποδείξεις των περισσότερων ιδιοτήτων του ολοκληρώματος είναι λίγο απλούστερες αν βασιστούν στα αθροίσματα Darboux απ’ ότι αν βασιστούν στα αθροίσματα Riemann.

4. Η μελέτη των μετρικών χώρων είναι πολύ σύντομη. Θεωρήθηκε απαραίτητη για δύο λόγους. Πρώτον, για να παρουσιαστεί η κοινή γενίκευση των δύο εννοιών “απόστασης” που εμφανίζονται στα προηγούμενα κεφάλαια: της Ευκλείδειας απόστασης ανάμεσα στα σημεία του $\mathbb{R}$ και της ομοιόμορφης απόστασης ανάμεσα σε συναρτήσεις (στα κεφάλαια για ακολουθίες και σειρές συναρτήσεων). Η έμφαση δίνεται ακριβώς στους Ευκλείδειους χώρους $\mathbb{R}^d$ και στους χώρους συναρτήσεων με την ομοιόμορφη μετρική. Ο δεύτερος λόγος μελέτης των μετρικών χώρων και, ειδικώτερα, των Ευκλείδειων χώρων είναι ότι στα γενικευμένα ολοκληρώματα *με παράμετρο* εμφανίζεται η έννοια της (ομοιόμορφης) συνέχειας συναρτήσεων δύο πραγματικών μεταβλητών. Τέλος, ανάμεσα στα θέματα μετρικών χώρων υπάρχει και μια μικρή ενότητα για την έννοια της συνεκτικότητας η οποία χρειάζεται στα μαθήματα Μιγαδικής Ανάλυσης.

5. Ο χρόνος δεν επαρκεί για να διδαχτούν όλα τα θέματα αυτού του βιβλίου και πρέπει να γίνει *επιλογή* ποιων, από όσα διδαχτούν, θα γίνουν οι αποδείξεις στον πίνακα. Μάλιστα, μερικά τέτοια θέματα (η διαδοχική άθροιση διπλών σειρών, το θεώρημα του Riemann για αναδιατάξεις σειρών,

το μεγαλύτερο μέρος του κεφαλαίου για τα γενικευμένα ολοκληρώματα, η αξιωματική θεμελίωση κ.τ.λ.) υπάρχουν μόνο για να τα διαβάσει όποιος αναγνώστης δείξει ιδιαίτερο ενδιαφέρον.

6. Στο δέκατο τρίτο κεφάλαιο εκτίθεται η *αξιωματική θεμελίωση των πραγματικών αριθμών θεωρώντας δεδομένους τους φυσικούς και τα Αξιώματα του Peano*. Αυτή είναι, πιστεύω, η φυσιολογική μέθοδος. Η παρουσίαση βασίζεται στο βιβλίο Foundations of Analysis του E. Landau με πολλές δικές μου παρεμβάσεις και προσαρμογές. Η μετάβαση από τους (θετικούς) ρητούς στους (θετικούς) πραγματικούς βασίζεται στη μέθοδο των *τομών του Dedekind*. Εκτίθενται, όμως, και οι μέθοδοι των ακολουθιών Cauchy και των εγκιβωτισμένων διαστημάτων, συνοπτικά και χωρίς αποδείξεις.

7. Για αρκετά θέματα παρουσιάζονται αρκετές αποδείξεις είτε στο κυρίως κείμενο της θεωρίας είτε υπο μορφή ασκήσεων. Για παράδειγμα, για το κριτήριο του Cauchy για σύγκλιση ακολουθιών υπάρχουν τέσσερις αποδείξεις.

8. Υπάρχουν μερικά θέματα, τα οποία δύσκολα βρίσκει κανείς σε βιβλία και, μάλιστα, τέτοιου επιπέδου. Για παράδειγμα: η ακριβής αιτιολόγηση του ότι δεν ορίζονται δυνάμεις αρνητικών αριθμών με μη-ακέραιους εκθέτες, η σύνδεση ανάμεσα στις έννοιες της μέσης τιμής συνάρτησης και της μέσης τιμής αριθμών και μια διεξοδική ανάπτυξη της ολοκλήρωσης ρητών παραστάσεων τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Υπάρχουν, επίσης, πολλά προχωρημένα θέματα στη μορφή ασκήσεων. Δύο τέτοια θέματα είναι: η κατασκευή συνάρτησης συνεχούς και πουθενά παραγωγίσιμης και το ότι μια συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν το σύνολο των σημείων ασυνέχειάς της έχει μηδενικό μέτρο.

9. Το βιβλίο περιέχει εύκολες, μέτριες και δύσκολες ασκήσεις. Όμως, δεν υπάρχουν "εξυπνακίστικες" ασκήσεις (τουλάχιστον, συνειδητά). Δηλαδή, δεν υπάρχουν ασκήσεις τις οποίες σκοτώνεται κανείς για να τις λύσει αλλά που η λύση τους δεν έχει κάτι να προσφέρει πέρα από την "επιβεβαίωση" ενός υψηλού IQ. Προσπάθησα να συμπεριλάβω ασκήσεις οι οποίες ελέγχουν την κατανόηση των εννοιών και διδάσκουν μεθόδους Ανάλυσης. Τουλάχιστον, όσες από τις ασκήσεις είναι δύσκολες υπάρχουν μόνο διότι πιστεύω ότι έχουν να προσφέρουν κάτι ουσιαστικό.

10. Στο δέκατο τέταρτο κεφάλαιο υπάρχουν λύσεις (πολλές φορές παραπάνω από μία) ή υποδείξεις λύσης των περισσοτέρων ασκήσεων του βιβλίου. Για περισσότερα δείτε στην αρχή του δέκατου τέταρτου κεφαλαίου.

11. Τα παρακάτω βιβλία διαμόρφωσαν, άλλο λιγότερο και άλλο περισσότερο, την άποψή μου για τα θέματα αυτού του βιβλίου και κατ' επέκταση τη μορφή που αυτά πήραν σ' αυτό το βιβλίο:

Mathematical Analysis, T. Apostol.

Differential and Integral Calculus, R. Courant.

The Theory of Functions of Real Variables, L. Graves.

Foundations of Analysis, E. Landau.

Principles of Mathematical Analysis, W. Rudin.

The Theory of Functions, E. C. Titchmarsh.

Το χρέος μου προς αυτά είναι μεγάλο. Για παράδειγμα, το βιβλίο του Graves έχει παλιομοδίτικο και δύσκολο συμβολισμό και μπορεί να θεωρείται πια ξεπερασμένο, αλλά από αυτό έμαθα κάποια λεπτά και διαφωτιστικά σημεία της ομοιόμορφης σύγκλισης ακολουθίας συναρτήσεων.
Εκτός από αυτά τα έξι βιβλία, έχω συγκεντρώσει στο τέλος κάθε κεφαλαίου έναν κατάλογο βιβλίων τον οποίο χωρίζω σε βασική και σε συμπληρωματική βιβλιογραφία. Για κάθε βιβλίο αναφέρω τα κεφάλαιά του τα οποία είναι (με μεγάλη προσέγγιση) σχετικά με το αντίστοιχο κεφάλαιο του ανά χείρας βιβλίου.
Προσοχή: δεν υπάρχει βιβλίο το οποίο ταυτίζεται με το βιβλίο αυτό. Ο αναγνώστης θα συμβουλευτεί την βιβλιογραφία για να δει τα ζητήματα από μία - λίγο ή πολύ - διαφορετική σκοπιά ή για να μάθει επεκτάσεις των διαφόρων μεθόδων και αποτελεσμάτων.

Για να πάρει την παρούσα μορφή του το βιβλίο αυτό έχει γραφτεί, με το χέρι και με τον υπολογιστή, διορθωθεί και ξαναδιορθωθεί άπειρες φορές και συμπυκνώνει εξαιρετικά πολύ κόπο. Επειδή, όμως, είναι σαφές ότι κι αυτή η μορφή απέχει αρκετά από το να είναι βέλτιστη, είναι απείρως ευπρόσδεκτες οποιεσδήποτε επισημάνσεις λαθών αλλά και παρατηρήσεις ως προς το στυλ παρουσίασης ή την επιλογή των θεμάτων.

Μιχάλης Παπαδημητράκης
Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών Πανεπιστημίου Κρήτης
Δεκέμβριος 2015.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Οι πραγματικοί αριθμοί.

1.1 Τα σύνολα $\mathbb{R}$ και $\overline{\mathbb{R}}$.

Το σύνολο των πραγματικών αριθμών το συμβολίζουμε $\mathbb{R}$. Τα σύνολα των φυσικών, των ακεραίων και των ρητών τα συμβολίζουμε, αντιστοίχως, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ και $\mathbb{Q}$. Προσέξτε: δεχόμαστε ως σύνολο των φυσικών το $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Δηλαδή, δεν θεωρούμε φυσικό τον ακέραιο 0.

Στο βιβλίο αυτό όταν λέμε "αριθμός" ή "σύνολο" εννοούμε "πραγματικός αριθμός" ή "υποσύνολο του $\mathbb{R}$" εκτός αν υπάρχει διευκρίνηση για κάτι διαφορετικό.[1]

Από τις αλγεβρικές ιδιότητες των αριθμών θα αναφέρουμε μόνο δύο βασικές ταυτότητες και δύο ανισότητες.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.1. *Έστω $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.*
[α] *Για κάθε x, y ισχύει*

$$y^n - x^n = (y - x)(y^{n-1} + y^{n-2}x + \cdots + yx^{n-2} + x^{n-1}). \tag{1.1}$$

[β] *Ισχύει*

$$nx^{n-1}(y - x) \leq y^n - x^n \leq ny^{n-1}(y - x) \qquad \text{αν } \ 0 \leq x \leq y. \tag{1.2}$$

Απόδειξη. [α] Πολλαπλασιάζουμε τις δύο παρενθέσεις και διαγράφουμε όμοιους όρους.
[β] Με την υπόθεση $0 \leq x \leq y$ παρατηρούμε ότι, αν στην δεύτερη παρένθεση στη δεξιά μεριά της (1.1) αντικαταστήσουμε κάθε x με το y, τότε το άθροισμα στην παρένθεση αυξάνεται (με την ευρεία έννοια) και καθένας από τους n όρους της γίνεται y^{n-1} ενώ, αν αντικαταστήσουμε κάθε y με το x, τότε το άθροισμα στην παρένθεση φθίνει (με την ευρεία έννοια) και καθένας από τους n όρους της γίνεται x^{n-1}. □

ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ ΤΟΥ BERNOULLI. *Έστω $n \in \mathbb{N}$. Ισχύει*

$$(a + 1)^n \geq na + 1 \qquad \text{αν } \ a \geq -1.$$

Απόδειξη. [2] Αν $a \geq 0$, θέτουμε $y = a + 1$ και $x = 1$ στην αριστερή ανισότητα (1.2) ενώ, αν $-1 \leq a \leq 0$, θέτουμε $y = 1$ και $x = a + 1$ στην δεξιά ανισότητα (1.2). □

ΔΙΩΝΥΜΙΚΟΣ ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ NEWTON. *Έστω $n \in \mathbb{N}$. Για κάθε x, y ισχύει*

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k}.$$

[1] Στο κεφάλαιο 11 θα γίνεται ευρύτερη χρήση του όρου "σύνολο".
[2] Άλλες δύο αποδείξεις της ανισότητας του Bernoulli είναι στην άσκηση 1.1.5 και στο παράδειγμα 5.4.6.

Απόδειξη. [3] Αν αναπτύξουμε το γινόμενο

$$(x+y)^n = (x+y)\cdots(x+y) \qquad (n \ \text{φορές})$$

χρησιμοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα, θα βρούμε ένα άθροισμα όρων καθένας από τους οποίους είναι ένα γινόμενο n όρων το οποίο προκύπτει παίρνοντας από κάθε παρένθεση είτε τον x είτε τον y και πολλαπλασιάζοντάς τους. Δηλαδή, για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ με $0 \le k \le n$ σχηματίζουμε το γινόμενο $x^k y^{n-k}$ παίρνοντας τον x από k από τις παρενθέσεις και τον y από τις υπόλοιπες $n-k$ παρενθέσεις. Τώρα, για κάθε συγκεκριμένο $k \in \mathbb{Z}$ με $0 \le k \le n$, το πλήθος των όμοιων όρων $x^k y^{n-k}$ που θα προκύψουν στο συνολικό άθροισμα είναι ίσο με το πλήθος των τρόπων επιλογής από τις n συνολικές παρενθέσεις εκείνων των k παρενθέσεων που θα μας δώσουν τους k παράγοντες x. Όμως, το πλήθος των τρόπων επιλογής k αντικειμένων από n αντικείμενα ισούται με τον λεγόμενο **διωνυμικό συντελεστή**

$$\tbinom{n}{k} = \tfrac{n!}{k!(n-k)!} = \tfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$

Άρα για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ με $0 \le k \le n$ υπάρχουν $\binom{n}{k}$ όμοιοι όροι $x^k y^{n-k}$. □

Σημειώνουμε, επίσης, ότι η απόλυτη τιμή $|x|$ εκφράζει το *μέγεθος* του x καθώς και την *απόσταση* του x από τον 0. Και, γενικότερα, η $|x-y|$ εκφράζει την *απόσταση*[4] ανάμεσα στους x και y. Όσο μικρότερη είναι η $|x-y|$ τόσο κοντύτερα είναι ο x στον y.

Τέλος, ας θυμηθούμε μερικές βασικές ανισοτικές σχέσεις για την απόλυτη τιμή.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.2. [α] *Αν $a>0$, τότε ισχύουν οι ισοδυναμίες:*

$$|x| \le a \quad \text{αν και μόνο αν} \quad -a \le x \le a.$$

$$|x| < a \quad \text{αν και μόνο αν} \quad -a < x < a.$$

[β] *Για κάθε x, y ισχύει η* **τριγωνική ανισότητα***:*

$$|x \pm y| \le |x| + |y|.$$

Απόδειξη. Διακρίνουμε περιπτώσεις σχετικά με το αν οι x και y είναι ≥ 0 ή ≤ 0. Κατά τα άλλα, η απόδειξη είναι στοιχειώδης. □

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.1. *Ορίζουμε το* **επεκτεταμένο** $\mathbb{R}$, *δηλαδή το σύνολο*

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

Δεχόμαστε ότι το $+\infty$ είναι μεγαλύτερο από κάθε αριθμό, ότι το $-\infty$ είναι μικρότερο από κάθε αριθμό και ότι το $-\infty$ είναι μικρότερο από το $+\infty$. Δηλαδή:

$$-\infty < x, \qquad x < +\infty, \qquad -\infty < +\infty.$$

Ορίζουμε τα αντίθετα

$$-(+\infty) = -\infty\,, \qquad -(-\infty) = +\infty\,.$$

Ορίζουμε τα αθροίσματα

$$(+\infty) + x = +\infty, \qquad x + (+\infty) = +\infty, \qquad (+\infty) + (+\infty) = +\infty,$$

[3] Άλλες δύο αποδείξεις του διωνυμικού τύπου του Newton είναι στην άσκηση 1.1.5 και στο παράδειγμα 5.4.8. Πάντως, η πιο ουσιαστική απόδειξη είναι αυτή εδώ.

[4] Αυτή είναι η λεγόμενη Ευκλείδεια απόσταση ανάμεσα στα σημεία της ευθείας. Η έννοια αυτή επεκτείνεται ως Ευκλείδεια απόσταση ανάμεσα στα σημεία του επιπέδου και ανάμεσα στα σημεία του χώρου και, ακόμη περισσότερο, ανάμεσα στα σημεία του d-διάστατου Ευκλείδειου χώρου. Επίσης, υπάρχει και η έννοια της απόστασης ανάμεσα σε συναρτήσεις την οποία θα δούμε στα κεφάλαια 9 και 10. Όλες αυτές οι έννοιες της απόστασης θα μελετηθούν με ενιαίο τρόπο στη γενικότητά τους στο κεφάλαιο 11 των μετρικών χώρων.

$$(-\infty)+x=-\infty, \qquad x+(-\infty)=-\infty, \qquad (-\infty)+(-\infty)=-\infty.$$

Όμως, δεν ορίζεται αποτέλεσμα για τις παραστάσεις

$$(+\infty)+(-\infty), \qquad (-\infty)+(+\infty)$$

και αυτές οι παραστάσεις χαρακτηρίζονται **απροσδιόριστες μορφές αθροίσματος**.
Ορίζουμε τις διαφορές

$$(+\infty)-x=+\infty, \qquad x-(-\infty)=+\infty, \qquad (+\infty)-(-\infty)=+\infty,$$

$$(-\infty)-x=-\infty, \qquad x-(+\infty)=-\infty, \qquad (-\infty)-(+\infty)=-\infty.$$

Δεν ορίζεται αποτέλεσμα για τις παραστάσεις

$$(+\infty)-(+\infty), \qquad (-\infty)-(-\infty)$$

και χαρακτηρίζονται **απροσδιόριστες μορφές διαφοράς**.
Ορίζουμε τα γινόμενα

$$(\pm\infty)x=\pm\infty, \quad x(\pm\infty)=\pm\infty \qquad \text{αν } x>0,$$

$$(\pm\infty)x=\mp\infty, \quad x(\pm\infty)=\mp\infty \qquad \text{αν } x<0,$$

$$(\pm\infty)(\pm\infty)=+\infty, \qquad (\pm\infty)(\mp\infty)=-\infty.$$

Δεν ορίζεται αποτέλεσμα για τις παραστάσεις

$$(\pm\infty)0, \qquad 0(\pm\infty)$$

και χαρακτηρίζονται **απροσδιόριστες μορφές γινομένου**.
Ορίζουμε τα αντίστροφα

$$\tfrac{1}{+\infty}=0, \qquad \tfrac{1}{-\infty}=0.$$

Δεν ορίζεται αποτέλεσμα για την παράσταση

$$\tfrac{1}{0}$$

και χαρακτηρίζεται **απροσδιόριστη μορφή αντιστρόφου**.
Ορίζουμε τους λόγους

$$\tfrac{\pm\infty}{x}=\pm\infty \quad \text{αν } x>0, \qquad \tfrac{\pm\infty}{x}=\mp\infty \quad \text{αν } x<0, \qquad \tfrac{x}{\pm\infty}=0.$$

Δεν ορίζεται αποτέλεσμα για τις παραστάσεις

$$\tfrac{x}{0}, \qquad \tfrac{\pm\infty}{0}, \qquad \tfrac{\pm\infty}{\pm\infty}, \qquad \tfrac{\pm\infty}{\mp\infty}$$

και χαρακτηρίζονται **απροσδιόριστες μορφές λόγου**.
Τέλος,[5] *ορίζουμε τις απόλυτες τιμές*

$$|+\infty|=+\infty, \qquad |-\infty|=+\infty.$$

Βάσει της επέκτασης της έννοιας της *ανισότητας* από το $\mathbb{R}$ στο $\overline{\mathbb{R}}$ αιτιολογείται η χρήση των συμβόλων $(a,+\infty)$, $[a,+\infty)$, $(-\infty,b)$, $(-\infty,b]$ και $(-\infty,+\infty)$ για τα αντίστοιχα διαστήματα $\{x\,|\,x>a\}$, $\{x\,|\,x\geq a\}$, $\{x\,|\,x<b\}$, $\{x\,|\,x\leq b\}$ και $\mathbb{R}$, δηλαδή για τα λεγόμενα *μη-φραγμένα διαστήματα*. Στο $\overline{\mathbb{R}}$ έχουμε, επιπλέον, και τα διαστήματα $(a,+\infty]$, $[a,+\infty]$, $[-\infty,b)$, $[-\infty,b]$, $[-\infty,+\infty)$, $(-\infty,+\infty]$, $[-\infty,+\infty]$.

[5] Κάποιοι επιπλέον ανάλογοι ορισμοί σε σχέση με την πράξη της δύναμης θα δούμε στους ορισμούς 1.10 και 2.13.

Οι επεκτάσεις των αλγεβρικών πράξεων από το $\mathbb{R}$ στο $\overline{\mathbb{R}}$ δεν είναι αυθαίρετες. Όλοι οι παραπάνω τύποι ανάγονται στην εμπειρική αντίληψή μας για τις έννοιες του "μεγάλου" (θετικού ή αρνητικού) και του "μικρού" (θετικού ή αρνητικού) και για τις μεταξύ τους σχέσεις. Για παράδειγμα, η εμπειρία υπαγορεύει ότι το άθροισμα δύο πολύ μεγάλων θετικών ποσοτήτων είναι πολύ μεγάλη θετική ποσότητα και αυτό αιτιολογεί το να ορίσουμε ότι $(+\infty)+(+\infty)=+\infty$. Από την εμπειρία μας, και πάλι, γνωρίζουμε ότι η διαφορά δύο πολύ μεγάλων θετικών ποσοτήτων μπορεί να είναι είτε πολύ μεγάλη θετική ποσότητα είτε πολύ μεγάλη αρνητική ποσότητα είτε *οποιαδήποτε* ενδιάμεση ποσότητα. Αυτό δικαιολογεί το ότι δεν ορίζεται συγκεκριμένο αποτέλεσμα για το $(+\infty)-(+\infty)$ και τον χαρακτηρισμό του ως *απροσδιόριστη μορφή*. Επίσης, το γινόμενο μιας πολύ μεγάλης θετικής ποσότητας και μιας πολύ μικρής ποσότητας (θετικής ή αρνητικής) μπορεί να είναι είτε πολύ μεγάλη θετική ποσότητα είτε πολύ μεγάλη αρνητική ποσότητα είτε *οποιαδήποτε*, ακόμη και πολύ μικρή, ενδιάμεση ποσότητα. Αυτό δικαιολογεί το ότι δεν ορίζεται αποτέλεσμα για το $(+\infty)0$ και τον χαρακτηρισμό του, επίσης, ως *απροσδιόριστη μορφή*.

Σύμβολα όπως το a ή το A δηλώνουν, συνήθως, αριθμούς ή σύνολα αριθμών. Αν, όμως, γράψουμε, για παράδειγμα, $a\in(-3,+\infty]$ θα εννοούμε ότι το a μπορεί να πάρει και την τιμή $+\infty$. Και αν γράψουμε $A\subseteq[-\infty,2]$ θα εννοούμε ότι το σύνολο A μπορεί να περιέχει και το $-\infty$.

Ασκήσεις.

1.1.1. [6] Αν $a\leq x\leq b$ και $a\leq y\leq b$, αποδείξτε ότι $|x-y|\leq b-a$ και διατυπώστε το γεωμετρικό νόημα αυτής της ανισότητας.

1.1.2. Αν $x\leq y<0$ και $z\leq w<0$, αποδείξτε ότι $0<yw\leq xz$. Βασίστε την απόδειξή σας στο ότι: αν $a,b\geq 0$, τότε $ab\geq 0$.

1.1.3. [α] Έστω $b_1,\ldots,b_n>0$. Αν $l\leq\frac{a_1}{b_1},\ldots,\frac{a_n}{b_n}\leq u$, αποδείξτε ότι $l\leq\frac{a_1+\cdots+a_n}{b_1+\cdots+b_n}\leq u$.
[β][7] Έστω $\nu_1,\ldots,\nu_n\in\mathbb{N}$. Αν $l\leq y_1,\ldots,y_n\leq u$, αποδείξτε ότι $l\leq\frac{\nu_1y_1+\cdots+\nu_ny_n}{\nu_1+\cdots+\nu_n}\leq u$.
Γενικότερα, έστω $w_1,\ldots,w_n>0$ και $w_1+\cdots+w_n=1$. Αν $l\leq y_1,\ldots,y_n\leq u$, αποδείξτε ότι $l\leq w_1y_1+\cdots+w_ny_n\leq u$.

1.1.4. Για καθεμιά από τις παρακάτω ανισότητες γράψτε στη μορφή ένωσης διαστημάτων το σύνολο των x για τους οποίους η ανισότητα είναι αληθής: $|x+1|>2$, $|x-1|<|x+1|$, $\frac{x}{x+2}>\frac{x+3}{3x+1}$, $(x-2)^2\geq 4$, $|x^2-7x|>x^2-7x$, $\frac{(x-1)(x+4)}{(x-7)(x+5)}>0$, $\frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}\leq 0$.
Για καθένα από τα επόμενα σύνολα βρείτε *μία* ανισότητα με μεταβλητή x ώστε το σύνολο αυτό να είναι το σύνολο των x για τους οποίους η ανισότητα είναι αληθής: $(-\infty,3]$, $(2,+\infty)$, $(3,7)$, $(-\infty,-2)\cup(1,4)\cup(7,+\infty)$, $[-2,4]\cup[6,+\infty)$, $[-1,4)\cup(4,8]$, $(-\infty,-2]\cup[1,4)\cup[7,+\infty)$.

1.1.5. Αποδείξτε την ανισότητα του Bernoulli και τον διωνυμικό τύπο του Newton με επαγωγή.

1.2 Supremum και infimum.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.2. *Έστω μη-κενό σύνολο A.*
Το A χαρακτηρίζεται **άνω φραγμένο** *αν υπάρχει u με την ιδιότητα να ισχύει $x\leq u$ για κάθε $x\in A$. Κάθε u με την ιδιότητα αυτή χαρακτηρίζεται* **άνω φράγμα** *του A.*

[6] Το περιεχόμενο αυτής της "ανώδυνης" άσκησης είναι πιο χρήσιμο απ' ό,τι δείχνει.

[7] Η **μέση τιμή** οποιωνδήποτε αριθμών $y_1,\ldots,y_n$, όπου ο κάθε y_k εμφανίζεται ν_k φορές, είναι ο λόγος του συνολικού αθροίσματος των αριθμών προς το συνολικό πλήθος τους, δηλαδή ο αριθμός

$$\frac{\nu_1y_1+\cdots+\nu_ny_n}{\nu_1+\cdots+\nu_n}=\frac{\nu_1}{\nu_1+\cdots+\nu_n}\,y_1+\cdots+\frac{\nu_n}{\nu_1+\cdots+\nu_n}\,y_n=w_1y_1+\cdots+w_ny_n,$$

όπου κάθε $w_k=\frac{\nu_k}{\nu_1+\cdots+\nu_n}$ είναι η **σχετική συχνότητα** ή **σχετικό βάρος** του αντίστοιχου y_k, δηλαδή η αναλογία του αριθμού εμφανίσεων του y_k προς τον συνολικό αριθμό εμφανίσεων των $y_1,\ldots,y_n$. Γενικότερα, αν $w_1,\ldots,w_n>0$ και $w_1+\cdots+w_n=1$, οι αριθμοί $w_1,\ldots,w_n$ ονομάζονται **βάρη** και ο $w_1y_1+\cdots+w_ny_n$ ονομάζεται **μέση τιμή** των $y_1,\ldots y_n$ ως προς αυτά τα βάρη.

Το A χαρακτηρίζεται **κάτω φραγμένο** *αν υπάρχει l με την ιδιότητα να ισχύει $l \leq x$ για κάθε $x \in A$. Κάθε l με την ιδιότητα αυτή χαρακτηρίζεται* **κάτω φράγμα** *του A.*

Τέλος, το A χαρακτηρίζεται **φραγμένο** *αν είναι άνω φραγμένο και κάτω φραγμένο, δηλαδή αν υπάρχουν l και u με την ιδιότητα να ισχύει $l \leq x \leq u$ για κάθε $x \in A$.*

Προσέξτε: αν ο u είναι άνω φράγμα του A, τότε κάθε $u' \geq u$ είναι κι αυτός άνω φράγμα του A. Επίσης, αν ο l είναι κάτω φράγμα του A, τότε κάθε $l' \leq l$ είναι κι αυτός κάτω φράγμα του A.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.3. [α] *Έστω ότι ισχύει $l \leq x$ για κάθε $x > a$. Τότε $l \leq a$.*
[β] *Έστω ότι ισχύει $u \geq x$ για κάθε $x < b$. Τότε $u \geq b$.*

Απόδειξη. [α] Υποθέτουμε (για να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι $a < l$. Θεωρούμε τον αριθμό $x = \frac{a+l}{2}$ για τον οποίο ισχύει $a < x < l$. Υπάρχει, επομένως, αριθμός $x > a$ για τον οποίο δεν ισχύει $l \leq x$. Αυτό είναι, σύμφωνα με την υπόθεσή μας, άτοπο.

[β] Ομοίως, υποθέτουμε ότι $u < b$. Θεωρούμε τον αριθμό $x = \frac{u+b}{2}$ για τον οποίο ισχύει $u < x < b$. Υπάρχει, επομένως, αριθμός $x < b$ για τον οποίο δεν ισχύει $u \geq x$. Αυτό είναι άτοπο. □

Παράδειγμα 1.2.1. Είναι προφανές ότι κάθε $l \leq a$ είναι κάτω φράγμα καθενός από τα διαστήματα $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$, (a, b), $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$. Αναρωτιόμαστε αν υπάρχουν και άλλοι l οι οποίοι είναι κάτω φράγματα αυτών των διαστημάτων.
Ας δούμε την περίπτωση των διαστημάτων $[a, b]$, $[a, b)$, $[a, +\infty)$. Αν ο l είναι κάτω φράγμα ενός από αυτά τα διαστήματα, τότε πρέπει να ισχύει $l \leq a$, διότι ο a είναι στοιχείο αυτών των διαστημάτων. Άρα τα κάτω φράγματα και των τριών αυτών διαστημάτων είναι οι αριθμοί $l \leq a$ και κανένας άλλος.
Τώρα πάμε στην περίπτωση των διαστημάτων $(a, b]$, (a, b), $(a, +\infty)$. Έστω ότι ο l είναι κάτω φράγμα ενός από αυτά τα διαστήματα. Τώρα ο a δεν είναι στοιχείο κανενός από αυτά τα διαστήματα, οπότε δεν μπορούμε να συμπεράνουμε *αμέσως* ότι $l \leq a$. Και προχωράμε ως εξής. Αρχικά βλέπουμε ότι, όποιο κι αν είναι το διάστημα που έχουμε επιλέξει, ο l είναι αυτομάτως κάτω φράγμα του $(a, +\infty)$. Αυτό, φυσικά, σημαίνει ότι ισχύει $l \leq x$ για κάθε $x > a$. Τώρα, όμως, η πρόταση 1.3 λέει ότι $l \leq a$. Άρα τα κάτω φράγματα και των διαστημάτων $(a, b]$, (a, b), $(a, +\infty)$ είναι οι αριθμοί $l \leq a$ και κανένας άλλος.
Βλέπουμε, λοιπόν, ότι καθένα από τα διαστήματα $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$, (a, b), $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$ έχει ένα *μέγιστο* κάτω φράγμα, τον a, και οι αριθμοί $l \leq a$ είναι όλα τα κάτω φράγματά του. Το σύνολο των κάτω φραγμάτων καθενός από αυτά τα διαστήματα είναι το διάστημα $(-\infty, a]$.

Παράδειγμα 1.2.2. Όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, είναι προφανές ότι κάθε $u \geq b$ είναι άνω φράγμα καθενός από τα διαστήματα $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$, (a, b), $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$. Μπορούμε να αποδείξουμε, με "συμμετρικό" τρόπο, ότι κανένας άλλος αριθμός δεν είναι άνω φράγμα οποιουδήποτε από αυτά τα διαστήματα. Αυτό είναι άμεσο για τα $[a, b]$, $(a, b]$, $(-\infty, b]$ και είναι πόρισμα της πρότασης 1.3 για τα $[a, b)$, (a, b), $(-\infty, b)$. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι καθένα από αυτά τα διαστήματα έχει ένα *ελάχιστο* άνω φράγμα, τον b, και οι αριθμοί $u \geq b$ είναι όλα τα άνω φράγματά του. Το σύνολο των άνω φραγμάτων καθενός από αυτά τα διαστήματα είναι το διάστημα $[b, +\infty)$.

Παράδειγμα 1.2.3. Τα διαστήματα $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, +\infty)$ δεν είναι άνω φραγμένα και τα διαστήματα $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$, $(-\infty, +\infty)$ δεν είναι κάτω φραγμένα.

Παράδειγμα 1.2.4. Το σύνολο $\mathbb{N}$ είναι κάτω φραγμένο και, επειδή ο 1 είναι το ελάχιστο στοιχείο του, τα κάτω φράγματα του $\mathbb{N}$ είναι όλοι οι $l \leq 1$ και κανένας άλλος. Δηλαδή, ο 1 είναι το *μέγιστο* κάτω φράγμα του $\mathbb{N}$ και το σύνολο των κάτω φραγμάτων του $\mathbb{N}$ είναι το $(-\infty, 1]$.
Στην επόμενη ενότητα θα αποδείξουμε ότι το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο.

Στα παραδείγματα 1.2.1, 1.2.2 και 1.2.3 όλα τα σύνολα είναι διαστήματα. Το σύνολο του παραδείγματος 1.2.4 δεν είναι διάστημα. Πρέπει να έχουμε συνεχώς κατά νου ότι υπάρχουν σύνολα τα οποία δεν είναι διαστήματα. Όταν διαβάζουμε κάτι (πρόταση, θεώρημα, άσκηση κ.τ.λ.) το οποίο αναφέρεται σε κάποια σύνολα, δεν πρέπει να επιτρέπουμε στον εαυτό μας να υποθέτει ως δεδομένο ότι τα σύνολα αυτά είναι διαστήματα. Το να σχηματίζουμε την συγκεκριμένη εικόνα διαστήματος για ένα αφηρημένο σύνολο πολλές φορές βοηθά την σκέψη μας, αλλά επίσης πολλές φορές είναι παραπλανητικό και οδηγεί σε εσφαλμένες απλοϊκές "αποδείξεις". Έχοντας αυτήν την παρατήρηση κατά νου, προχωράμε παρακάτω.

Η ΙΔΙΟΤΗΤΑ SUPREMUM. *Κάθε μη-κενό, άνω φραγμένο σύνολο έχει ελάχιστο άνω φράγμα.*

Η *ιδιότητα supremum* είναι η σημαντικότερη και βαθύτερη ιδιότητα του $\mathbb{R}$. Η ιδιότητα αυτή, όπως θα βλέπουμε διαρκώς από εδώ και πέρα, *είναι η βάση για να αποδειχτούν όλα τα σημαντικά αποτελέσματα της Ανάλυσης.*

Δεν θα αποδείξουμε τώρα την ιδιότητα supremum. Η απόδειξή της εντάσσεται στο πλαίσιο της *αξιωματικής θεμελίωσης* του $\mathbb{R}$ και προκύπτει από τον τρόπο με τον οποίο *δημιουργείται* το σύνολο $\mathbb{R}$ από το υποσύνολό του $\mathbb{N}$. Με όλα αυτά τα ζητήματα, δηλαδή την δημιουργία του $\mathbb{R}$ από το $\mathbb{N}$ και την απόδειξη της ιδιότητας supremum, ασχολείται το κεφάλαιο 13.

Τώρα, με βάση την ιδιότητα supremum, θα αποδείξουμε τη "συμμετρική" ιδιότητα infimum. Θα δείτε ότι η απόδειξη βασίζεται σε μια απλή ιδέα: *η "συμμετρία" ως προς τον* 0 *αντιστρέφει τις ανισοτικές σχέσεις ή, με άλλα λόγια, τα "πάνω" γίνονται "κάτω" και τα "κάτω" γίνονται "πάνω".*

Η ΙΔΙΟΤΗΤΑ INFIMUM. *Κάθε μη-κενό, κάτω φραγμένο σύνολο έχει μέγιστο κάτω φράγμα.*

Απόδειξη. Έστω μη-κενό, κάτω φραγμένο σύνολο A.
Θεωρούμε το σύνολο
$$-A = \{-x \,|\, x \in A\}.$$
Τα σύνολα A και $-A$ είναι "συμμετρικά" ως προς τον 0. Δηλαδή, τα στοιχεία του ενός συνόλου είναι τα αντίθετα των στοιχείων του άλλου συνόλου.
Το A είναι μη-κενό, οπότε και το $-A$ είναι μη-κενό.
Επίσης, αν l είναι ένα οποιοδήποτε κάτω φράγμα του A, τότε ο $-l$ είναι άνω φράγμα του $-A$, οπότε το $-A$ είναι άνω φραγμένο.
Επειδή, λοιπόν, το $-A$ είναι μη-κενό και άνω φραγμένο, από την ιδιότητα supremum συνεπάγεται ότι έχει ελάχιστο άνω φράγμα και έστω u_0 το ελάχιστο άνω φράγμα του $-A$.
Επειδή ο u_0 είναι άνω φράγμα του $-A$, ο $-u_0$ είναι κάτω φράγμα του A.
Αν υπήρχε κάτω φράγμα l του A μεγαλύτερο του $-u_0$, τότε το $-l$ θα ήταν άνω φράγμα του $-A$ μικρότερο του u_0. Αυτό είναι άτοπο διότι ο u_0 είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του $-A$. Άρα δεν υπάρχει κάτω φράγμα l του A μεγαλύτερο του $-u_0$.
Άρα ο $-u_0$ είναι το μέγιστο κάτω φράγμα του A. □

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.3. *Το* **μέγιστο κάτω φράγμα** *ενός μη-κενού και κάτω φραγμένου συνόλου A ονομάζεται και* **infimum** *του A.*

Το **ελάχιστο άνω φράγμα** *ενός μη-κενού και άνω φραγμένου συνόλου A ονομάζεται και* **supremum** *του A.*

Το infimum και το supremum του A συμβολίζονται, αντιστοίχως,
$$\inf A \quad \text{ή} \quad \text{g.l.b.}\, A \qquad\qquad \sup A \quad \text{ή} \quad \text{l.u.b.}\, A.$$

Παράδειγμα 1.2.5. Όπως είδαμε στα παραδείγματα 1.2.1 και 1.2.2, όλα τα διαστήματα $[a,b]$, (a,b), $(a,b]$, $[a,b)$ $(-\infty,b]$, $(-\infty,b)$ έχουν το ίδιο supremum, τον b, και όλα τα διαστήματα $[a,b]$, (a,b), $(a,b]$, $[a,b)$, $(a,+\infty)$, $[a,+\infty)$ έχουν το ίδιο infimum, τον a.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.4. *Αν το σύνολο A έχει ελάχιστο ή μέγιστο στοιχείο, τότε αυτό ονομάζεται, αντιστοίχως, και* **minimum** *ή* **maximum** *του A.*

Το minimum και το maximum του A συμβολίζονται, αντιστοίχως,
$$\min A \qquad \max A.$$

Από τα διαστήματα $[a,b]$ και $[a,b)$ καταλαβαίνουμε ότι κάποια μη-κενά, άνω φραγμένα σύνολα έχουν maximum και κάποια άλλα δεν έχουν maximum. Πάντως, κάθε μη-κενό, άνω φραγμένο σύνολο έχει οπωσδήποτε supremum.

Παράδειγμα 1.2.6. Αν ένα σύνολο A έχει maximum, τότε $\sup A = \max A$, δηλαδή το supremum του A ταυτίζεται με το maximum του A.
Πράγματι, κάθε στοιχείο του A είναι μικρότερο ή ίσο του $\max A$, οπότε το $\max A$ είναι άνω φράγμα του A. Επίσης, επειδή το $\max A$ είναι *στοιχείο* του A δεν μπορεί να υπάρχει άνω φράγμα του A μικρότερο του $\max A$. Άρα το $\max A$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A.
Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι, αν ένα σύνολο A έχει minimum, τότε $\inf A = \min A$, δηλαδή το infimum του A ταυτίζεται με το minimum του A.
Το $A = \{0\} \cup [2,3] \cup \{4\}$ έχει $\min A = 0$ και $\max A = 4$. Άρα $\inf A = 0$ και $\sup A = 4$.

Παράδειγμα 1.2.7. $\min \mathbb{N} = 1$, οπότε $\inf \mathbb{N} = 1$. Όμως, το $\mathbb{N}$ δεν έχει μέγιστο στοιχείο: κανένας $n \in \mathbb{N}$ δεν μπορεί να είναι μέγιστο στοιχείο του $\mathbb{N}$ διότι ο $n+1 \in \mathbb{N}$ είναι μεγαλύτερος του n.
Βέβαια, το ότι το $\mathbb{N}$ δεν έχει μέγιστο στοιχείο δεν σημαίνει ότι το $\mathbb{N}$ δεν έχει άνω φράγμα και κατ' επέκταση supremum. Το ότι το $\mathbb{N}$ δεν έχει μέγιστο στοιχείο σημαίνει ότι δεν έχει άνω φράγμα το οποίο να είναι συγχρόνως και στοιχείο του. Θα μπορούσε, όμως, το $\mathbb{N}$ να έχει άνω φράγμα κάποιον μη-φυσικό αριθμό. Αυτό θα το ξεκαθαρίσουμε στην επόμενη ενότητα.

Παράδειγμα 1.2.8. Το $A = \{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$ έχει $\max A = 1$, οπότε $\sup A = 1$. Τώρα, το A *δεν έχει* ελάχιστο στοιχείο: κανένας $\frac{1}{n} \in A$ δεν είναι ελάχιστο στοιχείο του A διότι ο $\frac{1}{n+1} \in A$ είναι μικρότερος του $\frac{1}{n}$. Όμως, επειδή το A είναι κάτω φραγμένο με κάτω φράγμα, για παράδειγμα, τον 0, το A *έχει* infimum. Θα υπολογίσουμε το $\inf A$ στην επόμενη ενότητα.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.5. *Αν το μη-κενό σύνολο A δεν είναι κάτω φραγμένο, ορίζουμε* $\inf A = -\infty$.
Αν το μη-κενό σύνολο A δεν είναι άνω φραγμένο, ορίζουμε $\sup A = +\infty$.

Αιτιολογούμε (προσέξτε: *δεν αποδεικνύουμε*) τον ορισμό. Αν το A δεν είναι άνω φραγμένο, δεν έχει ως άνω φράγμα κανέναν *αριθμό*. Όμως, το $+\infty$ συμβολίζει μια "ποσότητα" μεγαλύτερη από κάθε αριθμό, οπότε μπορεί να θεωρηθεί ως το μοναδικό, και, επομένως, το ελάχιστο, "άνω φράγμα" του A.

Παρατηρήστε ότι *κάθε μη-κενό σύνολο A έχει supremum και infimum*. Αν το A είναι άνω φραγμένο, το supremum του είναι αριθμός και, αν δεν είναι άνω φραγμένο, το supremum του είναι $+\infty$. Ομοίως, αν το A είναι κάτω φραγμένο, το infimum του είναι αριθμός και, αν δεν είναι κάτω φραγμένο, το infimum του είναι $-\infty$. Επίσης, για κάθε μη-κενό σύνολο A ισχύει

$$\inf A \leq \sup A.$$

Πράγματι, για κάθε $x \in A$ ισχύει $\inf A \leq x$ και $x \leq \sup A$ επειδή, ακριβώς, το $\inf A$ είναι κάτω φράγμα του A και το $\sup A$ είναι άνω φράγμα του A.

Γενικά, όταν γράφουμε $\sup A$, χωρίς άλλη ιδιαίτερη διευκρίνηση, θα εννοούμε ότι αυτό είναι αριθμός ή $+\infty$. Επίσης, όταν γράφουμε $\inf A$ θα εννοούμε ότι αυτό είναι αριθμός ή $-\infty$.

Τα επόμενα θα μας βοηθήσουν να σχηματίσουμε καλύτερη "εικόνα" των ποσοτήτων $\sup A$ και $\inf A$. Δείτε το σχήμα 1.

Το $\sup A$ χαρακτηρίζεται από τις εξής δύο ιδιότητες (i) και (ii):

(i) *Δεν υπάρχει κανένα στοιχείο του A μεγαλύτερο του* $\sup A$.

Αυτό είναι προφανές στην περίπτωση που είναι $\sup A = +\infty$ και, αν το $\sup A$ είναι αριθμός, αυτό προκύπτει από το ότι το $\sup A$ είναι άνω φράγμα του A.
Η ιδιότητα (i) διατυπώνεται, ισοδύναμα, ως εξής:

$$\text{Για κάθε } x \in A \text{ ισχύει } x \leq \sup A.$$

(ii) *Όσο θέλουμε κοντά στο* $\sup A$ *υπάρχει στοιχείο του A.*

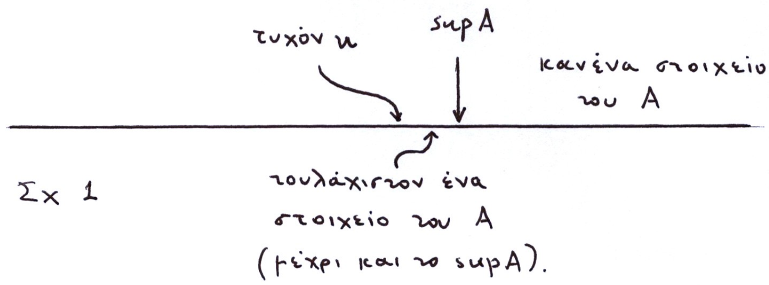
Πράγματι, στην περίπτωση sup $A = +\infty$ πάρτε οποιονδήποτε αριθμό u, όσο μεγάλο θέλετε. Τότε ο u δεν είναι άνω φράγμα του A (διότι το A δεν είναι άνω φραγμένο), οπότε υπάρχει $x \in A$ ώστε $u < x$. Άρα όσο θέλουμε κοντά στο $+\infty$ υπάρχει στοιχείο του A.
Στην περίπτωση που το sup A είναι αριθμός πάρτε έναν οποιονδήποτε $\epsilon > 0$, όσο μικρό θέλετε. Τότε ο sup $A - \epsilon$ δεν είναι άνω φράγμα του A (διότι ο sup A είναι το μικρότερο άνω φράγμα του A), οπότε υπάρχει $x \in A$ ώστε sup $A - \epsilon < x$ και, επομένως (λόγω του (i)),

$$\sup A - \epsilon < x \leq \sup A.$$

Άρα υπάρχει x στο A, του οποίου η απόσταση από τον sup A είναι μικρότερη από τον προεπιλεγμένο ϵ. Άρα όσο θέλουμε κοντά στον sup A υπάρχει στοιχείο του A.
Η ιδιότητα (ii) διατυπώνεται, ισοδύναμα, ως εξής:

Για κάθε $u < \sup A$ υπάρχει $x \in A$ ώστε να ισχύει $u < x \leq \sup A$.

Γιατί λέμε ότι οι ιδιότητες (i) και (ii) *χαρακτηρίζουν* το supremum του συνόλου A; Το λέμε διότι, όπως είδαμε, το sup A έχει αυτές τις ιδιότητες, αλλά και, *αντιστρόφως*, αν έχουμε κάποιο στοιχείο του $\overline{\mathbb{R}}$ με αυτές τις δύο ιδιότητες, τότε το στοιχείο αυτό είναι αναγκαστικά το sup A. Πράγματι, έστω ότι ο αριθμός u έχει τις ιδιότητες (i) και (ii). Η ιδιότητα (i) του u (*Δεν υπάρχει κανένα στοιχείο του A μεγαλύτερο του u.*) λέει, προφανώς, ότι ο u είναι άνω φράγμα του A. Η ιδιότητα (ii) του u (*Όσο θέλουμε κοντά στον u υπάρχει στοιχείο του A.*) λέει ότι δεν υπάρχει άνω φράγμα του A μικρότερο από τον u. Διότι, αν υπήρχε $u' < u$ ο οποίος είναι άνω φράγμα του A, τότε στο διάστημα ανάμεσα στους u' και u δεν θα υπήρχε κανένα στοιχείο του A και άρα ο u δεν θα είχε την ιδιότητα (ii). Στην περίπτωση που το $u = +\infty$ έχει τις ιδιότητες (i) και (ii), τότε πάλι η ιδιότητα (ii) του $+\infty$ λέει ότι το A δεν έχει κανένα άνω φράγμα και άρα δεν είναι άνω φραγμένο, οπότε sup $A = +\infty$.



Ομοίως, το inf A χαρακτηρίζεται από τις εξής δύο ιδιότητες (i) και (ii):
(i) *Δεν υπάρχει κανένα στοιχείο του A μικρότερο του* inf A.

Για κάθε $x \in A$ ισχύει $\inf A \leq x$.

(ii) *Όσο θέλουμε κοντά στο* inf A *υπάρχει στοιχείο του A.*

Για κάθε $l > \inf A$ υπάρχει $x \in A$ ώστε να ισχύει $\inf A \leq x < l$.

Τώρα θα δούμε μια λίγο απρόσμενη εφαρμογή της ύπαρξης των supremum και infimum ενός συνόλου.

Έστω ότι το σύνολο A είναι οποιοδήποτε *διάστημα*. Γνωρίζουμε ότι το A έχει την εξής ιδιότητα: για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ και για κάθε x ώστε $x_1 < x < x_2$ ισχύει $x \in A$. Με άλλα λόγια: *ένα διάστημα περιέχει κάθε στοιχείο που είναι ανάμεσα σε δύο στοιχεία του.* Η πρόταση 1.4 λέει ότι, από τα μη-κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}$, η ιδιότητα αυτή χαρακτηρίζει τα διαστήματα.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.4. *Έστω μη-κενό σύνολο A με την εξής ιδιότητα: για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ και για κάθε x με $x_1 < x < x_2$ ισχύει $x \in A$. Τότε το A είναι διάστημα.*

Απόδειξη. Έστω
$$u = \sup A, \qquad l = \inf A,$$
οπότε $-\infty \leq l \leq u \leq +\infty$. Τότε, προφανώς, $A \subseteq [l, u]$.
Έστω $x \in (l, u)$. Τότε ο x δεν είναι κάτω φράγμα ούτε άνω φράγμα του A, οπότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x < x_2$. Βάσει της υπόθεσης, συνεπάγεται $x \in A$. Επομένως, $(l, u) \subseteq A$.
Από τη διπλή σχέση $(l, u) \subseteq A \subseteq [l, u]$ προκύπτουν ακριβώς τέσσερις περιπτώσεις:
$$A = (l, u) \quad \text{ή} \quad A = [l, u] \quad \text{ή} \quad A = (l, u] \quad \text{ή} \quad A = [l, u).$$
Σε κάθε περίπτωση το A είναι διάστημα και, μάλιστα, με άκρα τα $\inf A$ και $\sup A$. □

Ασκήσεις.

1.2.1. Αποδείξτε ότι $\max\{x, y\} = \frac{x+y+|x-y|}{2}$ και $\min\{x, y\} = \frac{x+y-|x-y|}{2}$.

1.2.2. Αποδείξτε ότι το διάστημα $(a, +\infty)$ δεν είναι άνω φραγμένο και ότι το $[a, b)$ δεν έχει μέγιστο στοιχείο.

1.2.3. Αν ισχύει $l \leq a + \epsilon$ για κάθε $\epsilon > 0$, αποδείξτε ότι $l \leq a$.
Αν ισχύει $|a - b| \leq \epsilon$ για κάθε $\epsilon > 0$, αποδείξτε ότι $a = b$.

1.2.4. Αν ισχύει $a \leq \frac{\epsilon}{1-\epsilon}$ για κάθε ϵ με $0 < \epsilon < 1$, αποδείξτε ότι $a \leq 0$.

1.2.5. Έστω $\inf A = \inf B$ και $\sup A = \sup B$. Συνεπάγεται $A = B$;

1.2.6. Έστω μη-κενό σύνολο A. Αποδείξτε ότι το κλειστό διάστημα $[\inf A, \sup A]$ είναι το *ελάχιστο* κλειστό διάστημα στο $\overline{\mathbb{R}}$ το οποίο περιέχει το A.

1.2.7. Υπάρχει *ελάχιστο* ανοικτό διάστημα το οποίο να περιέχει ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$;

1.2.8. Έστω μη-κενό σύνολο A. Περιγράψτε (με τύπο) συναρτήσει του $\sup A$ το σύνολο των άνω φραγμάτων του A, διακρίνοντας τις περιπτώσεις: $\sup A = +\infty$ και $\sup A < +\infty$. Κάντε το ίδιο σε σχέση με το σύνολο των κάτω φραγμάτων του A και με το $\inf A$.

1.2.9. Έστω μη-κενό σύνολο A. Αποδείξτε ότι $\sup A \in A$ αν και μόνο αν το A έχει μέγιστο στοιχείο. Κάντε το ίδιο για το $\inf A$ και για το ελάχιστο στοιχείο του A.

1.2.10. Έχοντας υπ' όψη και τα παραδείγματα $A = [0, 2]$, $A = [0, 2)$, $A = [0, 1] \cup \{2\}$, απαντήστε, γενικά, για ένα μη-κενό, άνω φραγμένο σύνολο A και για τον $u = \sup A$ στα εξής ερωτήματα:
Είναι σωστό ότι ισχύει $A \cap (u - \epsilon, u] \neq \emptyset$ για κάθε $\epsilon > 0$;
Είναι σωστό ότι ισχύει $A \cap (u - \epsilon, u) \neq \emptyset$ για κάθε $\epsilon > 0$;
Ποιά είναι η απάντηση στα προηγούμενα ερωτήματα αν υποθέσουμε, επιπλέον, ότι $u \notin A$;
Προσαρμόστε όλα τα προηγούμενα στην περίπτωση του $l = \inf A$.

1.2.11. Έστω μη-κενό σύνολο A και αριθμός u.
Αποδείξτε ότι $\sup A \leq u$ αν και μόνο αν ισχύει $x \leq u$ για κάθε $x \in A$.
Αποδείξτε ότι $u \leq \sup A$ αν και μόνο αν για κάθε $\gamma < u$ υπάρχει $x \in A$ ώστε $\gamma < x$.
Προσαρμόστε όλα τα προηγούμενα για το $\inf A$ και αριθμό l.

1.2.12. Έστω μη-κενά σύνολα A, B.

[α] Αποδείξτε ότι $\sup A \leq \inf B$ αν και μόνο αν ισχύει $x \leq y$ για κάθε $x \in A$, $y \in B$.

[β] Πρώτον, μερικά παραδείγματα.
Δείτε ότι τα σύνολα $A = (-\infty, 0], B = [0, +\infty)$ έχουν την ιδιότητα να ισχύει $x \leq y$ για κάθε $x \in A$, $y \in B$. Κατόπιν, βρείτε το σύνολο όλων των ξ με την ιδιότητα να ισχύει $x \leq \xi \leq y$ για κάθε $x \in A$, $y \in B$.
Κάντε το ίδιο για τα $A = (-\infty, 0]$, $B = (0, +\infty)$, για τα $A = (-4, -2)$, $B = (-2, +\infty)$ και για τα $A = (-\infty, 0)$, $B = [1, 13]$.
Τώρα, γενικά, έστω ότι ισχύει $x \leq y$ για κάθε $x \in A$, $y \in B$. Περιγράψτε (με τύπο) συναρτήσει των $\sup A$, $\inf B$ το σύνολο όλων των ξ με την ιδιότητα να ισχύει $x \leq \xi \leq y$ για κάθε $x \in A$, $y \in B$.

[γ] Έστω ότι ισχύει $x \leq y$ για κάθε $x \in A$, $y \in B$ και έστω ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχουν $x \in A$, $y \in B$ ώστε $y - x \leq \epsilon$. Αποδείξτε ότι $\sup A = \inf B$ και ότι υπάρχει *μοναδικός* ξ με την ιδιότητα να ισχύει $x \leq \xi \leq y$ για κάθε $x \in A$, $y \in B$. Ποιός είναι αυτός ο ξ;

[δ] Έστω ότι ισχύει $0 < x \leq y$ για κάθε $x \in A$, $y \in B$ και έστω ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχουν $x \in A$, $y \in B$ ώστε $\frac{y}{x} \leq 1 + \epsilon$. Αποδείξτε ότι $\sup A = \inf B$ και ότι υπάρχει ακριβώς ένας ξ με την ιδιότητα να ισχύει $x \leq \xi \leq y$ για κάθε $x \in A$, $y \in B$.

1.2.13. Έστω μη-κενά σύνολα A, B ώστε $A \cup B = \mathbb{R}$ και ώστε να ισχύει $x < y$ για κάθε $x \in A$, $y \in B$. Παρατηρήστε ότι τα A, B είναι συμπληρωματικά και ότι το A είναι αριστερά του B. Αποδείξτε ότι υπάρχει ξ ώστε είτε $A = (-\infty, \xi)$, $B = [\xi, +\infty)$ είτε $A = (-\infty, \xi]$, $B = (\xi, +\infty)$.

1.2.14. Έστω μη-κενά σύνολα A, B. Αποδείξτε ότι $\sup A \leq \sup B$ αν και μόνο αν για κάθε $x \in A$ και κάθε $\gamma < x$ υπάρχει $y \in B$ ώστε $y > \gamma$.

1.2.15. Έστω μη-κενά σύνολα A, B ώστε $A \subseteq B$. Αποδείξτε ότι $\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$.

1.2.16. [α] Έστω μη-κενά σύνολα A, B.
Αποδείξτε ότι $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$ και $\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$.
Αν, επιπλέον, το $A \cap B$ δεν είναι κενό, αποδείξτε ότι $\sup(A \cap B) \leq \min\{\sup A, \sup B\}$ και ότι $\inf(A \cap B) \geq \max\{\inf A, \inf B\}$.
Ισχύει πάντοτε ότι $\sup(A \cap B) = \min\{\sup A, \sup B\}$ ή ότι $\inf(A \cap B) = \max\{\inf A, \inf B\}$;

[β] Για το μη-κενό σύνολο A ορίζουμε $-A = \{-x \,|\, x \in A\}$.
Αποδείξτε ότι $\sup(-A) = -\inf A$ και $\inf(-A) = -\sup A$.

[γ] Για μη-κενά σύνολα A, B ορίζουμε $A + B = \{x + y \,|\, x \in A, y \in B\}$.
Ποιό είναι το $A + B$ αν $A = [3, 5]$, $B = [1, 7]$ καθώς και αν $A = (3, 5)$, $B = (1, 7)$;
Αποδείξτε ότι $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$ και $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

[δ] Για μη-κενά σύνολα A, B ορίζουμε $A \cdot B = \{xy \,|\, x \in A, y \in B\}$.
Ποιό είναι το $A \cdot B$ αν $A = [3, 5]$, $B = [1, 7]$, αν $A = (3, 5)$, $B = (1, 7)$ αλλά και αν $A = (-1, 5)$, $B = (-2, 7)$;
Αν $A, B \subseteq (0, +\infty)$, αποδείξτε ότι $\inf(A \cdot B) = \inf A \inf B$ και $\sup(A \cdot B) = \sup A \sup B$.

1.2.17. Ποιά πιστεύετε ότι είναι τα κάτω φράγματα και τα άνω φράγματα του $\emptyset$; Επομένως, πώς θα ορίζατε τα $\inf \emptyset$, $\sup \emptyset$; Θα ίσχυε τότε η ανισότητα $\inf \emptyset \leq \sup \emptyset$;

1.2.18. [8] [α] Έστω συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ αύξουσα στο $[a, b]$. Αν $f(a) > a$ και $f(b) < b$, αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε $f(\xi) = \xi$.

[β] Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ και έστω ότι για κάθε $x \in I$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $f(x') \leq f(x) \leq f(x'')$ για κάθε $x', x'' \in (x - \delta, x + \delta) \cap I$ με $x' \leq x \leq x''$. Αποδείξτε ότι η f είναι αύξουσα στο I.

[8] Αυτήν την άσκηση θα τήν ξαναδούμε ως άσκηση 2.4.16.

1.3 Άμεσα πορίσματα της Ιδιότητας Supremum.

Ξαναδείτε τα παραδείγματα 1.2.4 και 1.2.7.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.1. *Το* $\mathbb{N}$ *δεν είναι άνω φραγμένο και, επομένως,* $\sup \mathbb{N} = +\infty$.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε (για να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι το $\mathbb{N}$ είναι άνω φραγμένο, οπότε το $\sup \mathbb{N}$ είναι αριθμός.
Ο αριθμός $\sup \mathbb{N} - 1$ δεν είναι άνω φράγμα του $\mathbb{N}$, οπότε υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\sup \mathbb{N} - 1 < n$. Συνεπάγεται $\sup \mathbb{N} < n + 1$ και καταλήγουμε σε άτοπο, διότι $n + 1 \in \mathbb{N}$. □

Το θεώρημα 1.1 συνεπάγεται το εξής:

Η ΑΡΧΙΜΗΔΕΙΑ ΙΔΙΟΤΗΤΑ. *Αν* $l > 0$, *τότε υπάρχει* $n \in \mathbb{N}$ *ώστε* $0 < \frac{1}{n} < l$.

Πράγματι, αν $l > 0$, θεωρούμε τον αριθμό $\frac{1}{l}$ και, επειδή το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{l} < n$ ή, ισοδύναμα, $0 < \frac{1}{n} < l$.

Παράδειγμα 1.3.1. Ξαναδείτε το παράδειγμα 1.2.8.
Το σύνολο $A = \{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$ έχει $\inf A = 0$.
Πράγματι, αφ' ενός ο 0 είναι κάτω φράγμα του A αφ' ετέρου από την Αρχιμήδεια ιδιότητα προκύπτει ότι κανένας $l > 0$ δεν είναι κάτω φράγμα του A. Επομένως, το μέγιστο κάτω φράγμα του A είναι ο 0.

Η πρόταση 1.5 λέει ότι *κάθε αριθμός είναι ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς ακεραίους.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.5. *Για κάθε* x *υπάρχει μοναδικός* $k \in \mathbb{Z}$ *ώστε* $k \leq x < k + 1$.

Απόδειξη. Έστω αριθμός x.
Σύμφωνα με το θεώρημα 1.1 υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $n > x$ και υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε $m > -x$. Θέτουμε $l = -m$, οπότε οι l, n είναι ακέραιοι και

$$l < x < n.$$

Ας θεωρήσουμε ότι ισχύει η επαγωγική υπόθεση:

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, *αν ισχύει η ανισότητα* $k \leq x$, *τότε ισχύει και η ανισότητα* $k + 1 \leq x$.

Τότε από την αρχή της επαγωγής και από το ότι η ανισότητα $k \leq x$ ισχύει για $k = l$, συμπεραίνουμε ότι η ανισότητα $k \leq x$ ισχύει για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ με $k \geq l$. Αυτό, όμως, δεν είναι σωστό διότι η ανισότητα $k \leq x$ δεν ισχύει για τον $k = n$.
Επομένως, η αρχική επαγωγική υπόθεση δεν είναι σωστή, οπότε υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$ ώστε $k \leq x$ και $k + 1 > x$, δηλαδή ώστε $k \leq x < k + 1$.
Τώρα θα δούμε ότι ο ακέραιος k με την ιδιότητα $k \leq x < k + 1$ είναι μοναδικός.
Έστω $k \leq x < k+1$ και $k' \leq x < k' + 1$ για κάποιους $k, k' \in \mathbb{Z}$. Τότε $k < k' + 1$ και $k' < k + 1$, οπότε $-1 < k' - k < 1$. Επειδή $k' - k \in \mathbb{Z}$, συνεπάγεται $k' - k = 0$, οπότε $k' = k$. □

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.6. *Ο* $k \in \mathbb{Z}$ *για τον οποίο ισχύει* $k \leq x < k + 1$, *η ύπαρξη και η μοναδικότητα του οποίου εξασφαλίζεται από την πρόταση 1.5, ονομάζεται* **ακέραιο μέρος** *του* x *και συμβολίζεται* $[x]$.

Δηλαδή,

$$[x] \in \mathbb{Z} \quad \text{και} \quad [x] \leq x < [x] + 1.$$

Παράδειγμα 1.3.2. $[3] = 3$, $[-3] = -3$, $[3.5] = 3$, $[-3.5] = -4$.

Το επόμενο αποτέλεσμα λέει ότι *κάθε ανοικτό διάστημα, οσοδήποτε μικρό, περιέχει τουλάχιστον έναν ρητό*. Η ιδιότητα αυτή των ρητών, δηλαδή το να περιέχει οποιοδήποτε δοσμένο ανοικτό διάστημα κάποιον από αυτούς, ονομάζεται *πυκνότητα των ρητών* (στο $\mathbb{R}$) ή *πυκνότητα του* $\mathbb{Q}$ (στο $\mathbb{R}$). Λίγο πιο μετά θα δούμε ότι την ίδια ιδιότητα έχουν και οι άρρητοι.

ΠΥΚΝΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΡΗΤΩΝ. *Για κάθε a, b με $a < b$ υπάρχει ρητός r ώστε $a < r < b$.*

Απόδειξη. Επειδή $b - a > 0$, συνεπάγεται, σύμφωνα με την Αρχιμήδεια ιδιότητα, ότι υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n} < b - a$. Επομένως, $na + 1 < nb$, οπότε

$$na < [na] + 1 \leq na + 1 < nb.$$

Τότε για τον ρητό $r = \frac{[na]+1}{n}$ ισχύει $a < r < b$. $\square$

Ασκήσεις.

1.3.1. Ξαναδείτε την άσκηση 1.2.3.
Αν ισχύει $l \leq a + \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, αποδείξτε ότι $l \leq a$.
Αν ισχύει $|a - b| \leq \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, αποδείξτε ότι $a = b$.

1.3.2. Βρείτε τα infimum και supremum των συνόλων $\{(-1)^n n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$, $\mathbb{N} \cup \{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$, $\{(-1)^n - \frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$, $\{\frac{1}{2n} \,|\, n \in \mathbb{N}\} \cup \{1 - \frac{1}{2n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$, $\bigcup_{n=1}^{+\infty} [2n-1, 2n]$, $\bigcup_{n=1}^{+\infty} [\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}]$.

1.3.3. Βρείτε το infimum και το supremum του $(a, b) \cap \mathbb{Q} = \{r \in \mathbb{Q} \,|\, a < r < b\}$.

1.3.4. Ξαναδείτε την άσκηση 1.2.12.
Τα σύνολα $A = \{-\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ ικανοποιούν την υπόθεση ότι ισχύει $x \leq y$ για κάθε $x \in A$, $y \in B$. Βρείτε το σύνολο όλων των ξ με την ιδιότητα να ισχύει $x \leq \xi \leq y$ για κάθε $x \in A$, $y \in B$. Κάντε το ίδιο για τα $A = \{r \in \mathbb{Q} \,|\, r < 0\}$, $B = \{r \in \mathbb{Q} \,|\, r > 0\}$.

1.3.5. Αν ισχύει $r \geq a$ για κάθε $r \in \mathbb{Q}$ με $r > b$, αποδείξτε ότι $b \geq a$.
Αν $\{r \in \mathbb{Q} \,|\, r < a\} = \{r \in \mathbb{Q} \,|\, r < b\}$, αποδείξτε ότι $a = b$.
Αν $\{r \in \mathbb{Q} \,|\, r < a\} \cap \{r \in \mathbb{Q} \,|\, r > b\} = \emptyset$, αποδείξτε ότι $a \leq b$.
Αν $\{r \in \mathbb{Q} \,|\, r \leq a\} \cup \{r \in \mathbb{Q} \,|\, r \geq b\} = \mathbb{Q}$, αποδείξτε ότι $b \leq a$.

1.4 Ρίζες, δυνάμεις, λογάριθμοι.

Υπενθυμίζουμε τους ορισμούς των δυνάμεων με *ακέραιο* εκθέτη.
Αν $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$ (δηλαδή, αν $n \in \mathbb{N}$), ορίζουμε τη δύναμη a^n με τον γνωστό τρόπο:

$$a^n = a \cdots a \quad (n \text{ φορές}).$$

Αν $n \in \mathbb{Z}$, $n \leq -1$ και $a \neq 0$, ορίζουμε:

$$a^n = \frac{1}{a \cdots a \ \ (-n \text{ φορές})}.$$

Τέλος, αν $n = 0$ και $a \neq 0$, ορίζουμε:

$$a^0 = 1.$$

Οι βασικές ιδιότητες των δυνάμεων με ακέραιους εκθέτες εκτίθενται στην άσκηση 1.4.3 και όλες έχουν απλές αλγεβρικές αποδείξεις γνωστές από το λύκειο. Το μοναδικό ουσιαστικό στοιχείο αυτών των αποδείξεων είναι το σωστό μέτρημα των παραγόντων των διαφόρων γινομένων. Θα τις θεωρήσουμε γνωστές.

1.4.1 Ρίζες.

Όμως, δεν θα θεωρήσουμε γνωστές τις δυνάμεις με μη-ακέραιους εκθέτες και, ειδικώτερα, τις ρίζες παρά το ότι στο λύκειο μαθαίνουμε να χειριζόμαστε αλγεβρικά όλες αυτές τις παραστάσεις. Ο λόγος είναι ότι στον ορισμό τους παίζει ουσιαστικό ρόλο η ιδιότητα supremum.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.2. *Έστω $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Για κάθε $y \geq 0$ υπάρχει μοναδικός $x \geq 0$ ώστε $x^n = y$.*

Απόδειξη. [9] Έστω $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ και $y \geq 0$.
Θεωρούμε το σύνολο

$$X = \{x \,|\, x \geq 0, x^n \leq y\}.$$

Πρώτον, είναι προφανές ότι $0 \in X$, οπότε το X είναι μη-κενό. Κατόπιν, από το $y + 1 \geq 1$ συνεπάγεται $(y+1)^n \geq y+1 > y$. Άρα για κάθε $x \in X$ ισχύει $x^n \leq y < (y+1)^n$ και, επομένως, $x < y + 1$. Άρα το X είναι άνω φραγμένο με άνω φράγμα τον $y + 1$.
Επειδή το X είναι μη-κενό και άνω φραγμένο, το $\sup X$ είναι αριθμός. Θέτουμε

$$\xi = \sup X.$$

Προφανώς, $\xi \geq 0$, διότι $0 \in X$. Θα αποδείξουμε ότι $\xi^n = y$.
Έστω $\xi^n < y$. Τότε $\frac{y-\xi^n}{n(\xi+1)^{n-1}} > 0$ και θεωρούμε έναν οποιονδήποτε $\epsilon > 0$ αρκετά μικρό ώστε $\epsilon \leq 1$ και $\epsilon \leq \frac{y-\xi^n}{n(\xi+1)^{n-1}}$. Από την ανισότητα (1.2) συνεπάγεται

$$(\xi+\epsilon)^n - \xi^n \leq n(\xi+\epsilon)^{n-1}\big((\xi+\epsilon)-\xi\big) = n(\xi+\epsilon)^{n-1}\epsilon \leq n(\xi+1)^{n-1}\epsilon \leq y - \xi^n.$$

Άρα $(\xi+\epsilon)^n \leq y$, οπότε $\xi + \epsilon \in X$. Άτοπο, διότι ο ξ είναι άνω φράγμα του X. Άρα $\xi^n \geq y$.
Έστω $\xi^n > y$. Τότε $\frac{\xi^n - y}{n\xi^{n-1}} > 0$ και θεωρούμε έναν οποιονδήποτε $\epsilon > 0$ αρκετά μικρό ώστε $\epsilon \leq \frac{\xi^n-y}{n\xi^{n-1}}$. Με λίγες πράξεις βλέπουμε ότι συνεπάγεται $\epsilon \leq \xi$ και, πάλι από την ανισότητα (1.2), συνεπάγεται

$$\xi^n - (\xi-\epsilon)^n \leq n\xi^{n-1}\big(\xi - (\xi-\epsilon)\big) = n\xi^{n-1}\epsilon \leq \xi^n - y.$$

Άρα $y \leq (\xi-\epsilon)^n$. Άρα για κάθε $x \in X$ ισχύει $x^n \leq y \leq (\xi-\epsilon)^n$ και, επομένως, $x \leq \xi - \epsilon$. Άρα ο $\xi - \epsilon$ είναι άνω φράγμα του X. Αυτό είναι άτοπο, διότι ο ξ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του X. Άρα $\xi^n \leq y$.
Από τις ανισότητες $\xi^n \geq y$ και $\xi^n \leq y$ συνεπάγεται $\xi^n = y$.
Αποδείξαμε, λοιπόν, την ύπαρξη μη-αρνητικής λύσης της $x^n = y$ στη γενική περίπτωση $y \geq 0$.
Μένει να αποδείξουμε τη μοναδικότητα της μη-αρνητικής λύσης της $x^n = y$. Αυτό είναι εύκολο: αν $\xi_1, \xi_2 \geq 0$, ${\xi_1}^n = y$ και ${\xi_2}^n = y$, τότε ${\xi_1}^n = {\xi_2}^n$, οπότε $\xi_1 = \xi_2$. □

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.7. *Έστω $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Για κάθε $y \geq 0$, η μη-αρνητική λύση της εξίσωσης $x^n = y$, την ύπαρξη και τη μοναδικότητα της οποίας εξασφαλίζει το θεώρημα 1.2, ονομάζεται n-**οστή ρίζα** του y και συμβολίζεται*

$$\sqrt[n]{y}.$$

Αν $n = 2$, τότε η $\sqrt[2]{y}$ συμβολίζεται και $\sqrt{y}$.

Τονίζουμε ότι η *$\sqrt[n]{y}$ ορίζεται μόνο για μη-αρνητικούς αριθμούς y*. Επίσης, είναι σαφές από τον ορισμό της n-οστής ρίζας (ως μη-αρνητική λύση της εξίσωσης $x^n = y$) ότι $\sqrt[n]{0} = 0$ και ότι ισχύει $\sqrt[n]{y} > 0$ για κάθε $y > 0$.

Τώρα, θεωρώντας δεδομένη την ύπαρξη μοναδικής μη-αρνητικής λύσης της εξίσωσης $x^n = y$ για $y \geq 0$, θεωρούμε γνωστά από το λύκειο τα εξής. Αν ο n είναι άρτιος, τότε η εξίσωση $x^n = y$ έχει (i) ακριβώς δύο λύσεις, τους $\sqrt[n]{y}$ και $-\sqrt[n]{y}$, αν $y > 0$, (ii) ακριβώς μία λύση, τον 0, αν $y = 0$, και (iii) καμία λύση, αν $y < 0$. Αν ο n είναι περιττός, τότε η εξίσωση $x^n = y$ έχει (i) ακριβώς

[9] Αργότερα, στο παράδειγμα 4.4.20 θα ξαναααποδείξουμε την ύπαρξη της n-οστής ρίζας $\sqrt[n]{y}$ ενός οποιουδήποτε μη-αρνητικού αριθμού y. Άλλη μία απόδειξη υπάρχει στην άσκηση 2.4.12.

μία λύση, τον $\sqrt[n]{y}$, αν $y > 0$, (ii) ακριβώς μία λύση, τον 0, αν $y = 0$, και (iii) ακριβώς μία λύση, τον $-\sqrt[n]{-y}$, αν $y < 0$. Όλα αυτά αποδεικνύονται πολύ εύκολα.

Σ' αυτό το σημείο πρέπει να συνειδητοποιήσουμε το εξής. *Στο λύκειο δεν αποδεικνύεται η ύπαρξη των ριζών* $\sqrt[n]{y}$. Ο λόγος είναι ότι στο λύκειο δεν μαθαίνουμε τίποτα για την βάση αυτής της απόδειξης, δηλαδή την ιδιότητα supremum. Στο λύκειο απλώς *δεχόμαστε* ότι οι ρίζες υπάρχουν και απλώς μαθαίνουμε να χειριζόμαστε αλγεβρικά αυτούς τους αριθμούς. Όποιος επιθυμεί μπορεί να δει την άσκηση 1.4.4 και να αποδείξει εύκολα, με αλγεβρικό τρόπο, τις βασικές ιδιότητες των ριζών. Στα παρακάτω αυτές τις ιδιότητες θα τις θεωρούμε γνωστές.

Το θεώρημα 1.2 μπορεί να "διαβαστεί" και με άλλο τρόπο. Γνωρίζουμε ότι, αν $n \in \mathbb{N}$, η συνάρτηση με τύπο x^n είναι γνησίως αύξουσα (και, επομένως, ένα-προς-ένα) στο $[0, +\infty)$ και έχει τιμές στο $[0, +\infty)$. Αυτά είναι στοιχειώδη. Το θεώρημα 1.2 λέει ότι η συνάρτηση x^n με πεδίο ορισμού το $[0, +\infty)$ είναι και *επί* του $[0, +\infty)$. Δηλαδή, η $y = x^n$ εκφράζει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία ανάμεσα στο πεδίο ορισμού της, το $[0, +\infty)$, και στο σύνολο τιμών της, το $[0, +\infty)$. Τώρα, σύμφωνα με τον ορισμό των ριζών, η $x = \sqrt[n]{y}$ εκφράζει την αντίστροφη αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία με πεδίο ορισμού το $[0, +\infty)$ και σύνολο τιμών το $[0, +\infty)$. Δηλαδή, οι συναρτήσεις $y = x^n$ (περιορισμένη στο $[0, +\infty)$) και $x = \sqrt[n]{y}$ είναι αντίστροφες. Και, επειδή η $y = x^n$ είναι γνησίως αύξουσα, η $x = \sqrt[n]{y}$ είναι κι αυτή γνησίως αύξουσα.

Ας δούμε τώρα ένα χρήσιμο - και βαθύ - κριτήριο για το αν μια ρίζα είναι ρητός ή άρρητος. Το περιλαμβάνουμε αν και η απόδειξή του είναι καθαρά αλγεβρικής φύσης.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.6. *Έστω φυσικοί n, k. Τότε ο $\sqrt[n]{k}$ είναι ρητός αν και μόνο αν ο k είναι n-οστή δύναμη φυσικού. Με άλλα λόγια, αν ο $\sqrt[n]{k}$ είναι ρητός, τότε είναι φυσικός.*

Απόδειξη. Έστω ότι ο k είναι n-οστή δύναμη φυσικού, δηλαδή ότι υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε $k = m^n$. Τότε ο $\sqrt[n]{k} = m$ είναι φυσικός και, επομένως, ρητός.
Αντιστρόφως, έστω ότι ο $\sqrt[n]{k}$ είναι ρητός, δηλαδή $\sqrt[n]{k} = \frac{m}{l}$, όπου $m, l \in \mathbb{N}$. Κάνοντας απλοποίηση, αν χρειάζεται, μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι m, l δεν έχουν κοινό διαιρέτη > 1.
Από την $\sqrt[n]{k} = \frac{m}{l}$ συνεπάγεται $l^n k = m^n$. Γνωρίζουμε ότι, αν ένας φυσικός διαιρεί το γινόμενο δύο φυσικών και δεν έχει κοινούς διαιρέτες > 1 με έναν από τους δύο αριθμούς, τότε διαιρεί τον άλλον. Τώρα, ο l διαιρεί τον $l^n k$, οπότε διαιρεί τον $m^n = m^{n-1}m$. Επειδή ο l δεν έχει κοινούς διαιρέτες > 1 με τον m, ο l διαιρεί τον $m^{n-1} = m^{n-2}m$. Για το ίδιο λόγο, ο l διαιρεί τον $m^{n-2} = m^{n-3}m$. Συνεχίζοντας επαγωγικά, καταλήγουμε στο ότι ο l διαιρεί τον $m^0 = 1$. Άρα $l = 1$, οπότε $k = m^n$ και ο k είναι n-οστή δύναμη φυσικού. □

Τώρα θα δούμε, επιτέλους, ότι το $\mathbb{R}$ δεν αποτελείται μόνο από ρητούς.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.7. *Το $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ δεν είναι κενό.*

Απόδειξη. Επειδή, προφανώς, ο 2 δεν είναι τετράγωνο φυσικού, από την πρόταση 1.6 συνεπάγεται ότι ο $\sqrt{2}$ δεν είναι ρητός. □

Παρατηρήστε ότι η ύπαρξη έστω και ενός αρρήτου βασίζεται στο θεώρημα 1.2 του οποίου η απόδειξη βασίζεται, με τη σειρά της, στην ιδιότητα supremum.

Το επόμενο αποτέλεσμα λέει ότι *κάθε ανοικτό διάστημα, οσοδήποτε μικρό, περιέχει τουλάχιστον έναν άρρητο*. Η ιδιότητα αυτή των αρρήτων ονομάζεται *πυκνότητα των αρρήτων* (*στο* $\mathbb{R}$) ή *πυκνότητα του* $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (*στο* $\mathbb{R}$).

ΠΥΚΝΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΑΡΡΗΤΩΝ. *Για κάθε a, b με $a < b$ υπάρχει άρρητος x ώστε $a < x < b$.*

Απόδειξη. Έστω $a < b$.
Θεωρούμε οποιονδήποτε *άρρητο* c, για παράδειγμα τον $c = \sqrt{2}$. Επειδή $a - c < b - c$, υπάρχει ρητός r ώστε $a - c < r < b - c$. Τότε ο $r + c$ είναι άρρητος και $a < r + c < b$. □

1.4.2 Δυνάμεις με ρητούς μη-ακέραιους εκθέτες.

Τώρα θα ασχοληθούμε για λίγο με τον ορισμό των δυνάμεων με μη-ακέραιο εκθέτη αρχίζοντας με την περίπτωση *ρητού μη-ακέραιου* εκθέτη.

ΛΗΜΜΑ 1.1. *Έστω $y > 0$, $m, k \in \mathbb{Z}$, $n, l \in \mathbb{N}$, $n, l \geq 2$ ώστε $\frac{m}{n} = \frac{k}{l}$. Τότε $(\sqrt[n]{y})^m = (\sqrt[l]{y})^k$.*

Απόδειξη. Θέτουμε $c = (\sqrt[n]{y})^m$ και $d = (\sqrt[l]{y})^k$, οπότε πρέπει να αποδείξουμε ότι $c = d$.
Τώρα, λόγω ιδιοτήτων των δυνάμεων με ακέραιους εκθέτες,

$$c^{nk} = (\sqrt[n]{y})^{mnk} = \big((\sqrt[n]{y})^n\big)^{mk} = y^{mk}, \qquad d^{ml} = (\sqrt[l]{y})^{kml} = \big((\sqrt[l]{y})^l\big)^{mk} = y^{mk}$$

και, επομένως,

$$c^{nk} = d^{ml}. \tag{1.3}$$

Τώρα, γνωρίζουμε ότι $nk = ml$.
Αν $nk = ml \neq 0$, από την (1.3) συνεπάγεται $c = d$.
Αν $nk = ml = 0$ ή, ισοδύναμα, $m = k = 0$, τότε η ισότητα $(\sqrt[n]{y})^m = (\sqrt[l]{y})^k = 1$ είναι προφανής. □

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.8. *Τώρα, έστω $y > 0$ και $r \in \mathbb{Q}$ ώστε ο r να μην είναι ακέραιος. Υπάρχουν άπειρα ζεύγη αριθμών $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 2$ ώστε $r = \frac{m}{n}$. Όμως, σύμφωνα με το λήμμα 1.1, ο αριθμός $(\sqrt[n]{y})^m$ είναι ο ίδιος για κάθε τέτοιο ζεύγος. Επομένως, μπορούμε να ορίσουμε και ορίζουμε*

$$y^r = (\sqrt[n]{y})^m,$$

χρησιμοποιώντας ένα οποιοδήποτε ζεύγος $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 2$ ώστε $r = \frac{m}{n}$.
Τέλος, αν $r \in \mathbb{Q}$ με $r > 0$, ορίζουμε

$$0^r = 0.$$

Από τον ορισμό είναι σαφές ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 2$ ισχύει $y^{1/n} = \sqrt[n]{y}$ για κάθε $y \geq 0$. Άρα οι ρίζες είναι ειδικές περιπτώσεις δυνάμεων με ρητούς εκθέτες.

Επίσης, είναι σαφές ότι ισχύει $y^r > 0$ για κάθε $y > 0$ και για κάθε ρητό r.

Στην άσκηση 1.4.5 διατυπώνονται οι βασικές ιδιότητες των δυνάμεων με ρητούς εκθέτες. Όλες οι ιδιότητες αποδεικνύονται με αλγεβρικό τρόπο, εύκολα, με χρήση των αντίστοιχων ιδιοτήτων των δυνάμεων με ακέραιους εκθέτες και των ιδιοτήτων των ριζών. Κι αυτές τις ιδιότητες θα τις θεωρούμε γνωστές.

Όπως και στην περίπτωση των ριζών, τονίζουμε ότι *η δύναμη y^r με ρητό μη-ακέραιο εκθέτη r ορίζεται μόνο για μη-αρνητικούς αριθμούς y και, μάλιστα, αν $r \leq 0$, η δύναμη y^r ορίζεται μόνο για θετικούς y.*

1.4.3 Δυνάμεις με άρρητους εκθέτες.

Τέλος, έστω ότι ο x είναι άρρητος και έστω $y > 1$. Θεωρούμε το σύνολο

$$X = \{y^r \,|\, r \in \mathbb{Q}, r < x\}.$$

Το X είναι μη-κενό αφού μπορούμε να πάρουμε οποιονδήποτε ρητό $r < x$ (για παράδειγμα, τον $r = [x]$) και τότε ο αντίστοιχος y^r ανήκει στο X. Είναι εύκολο να δούμε ότι το X είναι και άνω φραγμένο. Πράγματι, για κάθε $r \in \mathbb{Q}$ με $r < x$ ισχύει $r < [x] + 1$ και, επομένως, $y^r < y^{[x]+1}$ (λόγω των ιδιοτήτων των δυνάμεων με ρητούς εκθέτες). Άρα ο $y^{[x]+1}$ είναι άνω φράγμα του X. Άρα το $\sup X$ είναι αριθμός.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.9. [10] *Αν $y > 1$ και ο x είναι άρρητος, ορίζουμε*

$$y^x = \sup\{y^r \,|\, r \in \mathbb{Q}, r < x\}.$$

[10] Δεύτερος ορισμός της δύναμης με άρρητο εκθέτη υπάρχει στην άσκηση 2.4.20.

Κατόπιν, αν $y = 1$ και ο x είναι άρρητος, ορίζουμε

$$1^x = 1.$$

Αν $0 < y < 1$ και ο x είναι άρρητος, τότε $\frac{1}{y} > 1$, οπότε έχει ορισθεί ο $(\frac{1}{y})^x$ και ορίζουμε

$$y^x = \frac{1}{(1/y)^x}.$$

Τέλος, αν ο x είναι άρρητος και $x > 0$, ορίζουμε

$$0^x = 0.$$

Επομένως, συνυπολογίζοντας τους προηγούμενους σχετικούς ορισμούς, έχουμε τα εξής. *Αν $y < 0$, τότε ο y^x ορίζεται αν και μόνο αν ο x είναι ακέραιος.*[11] *Αν $y = 0$, τότε ο y^x ορίζεται αν και μόνο αν ο x είναι θετικός. Αν $y > 0$, τότε ο y^x ορίζεται για κάθε x.*

ΛΗΜΜΑ 1.2. *Έστω $y > 1$. Για κάθε $b > 1$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $1 < y^{1/n} < b$.*

Απόδειξη. Αν $y > 1$ και $b > 1$, τότε, επειδή $\frac{b-1}{y-1} > 0$, από την Αρχιμήδεια ιδιότητα συνεπάγεται ότι υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $0 < \frac{1}{n} < \frac{b-1}{y-1}$. Από την ανισότητα (1.2) συνεπάγεται, για έναν τέτοιον n, ότι

$$b^n - 1 \geq n(b-1) > y - 1$$

και, επομένως, $y^{1/n} < b$. Η ανισότητα $1 < y^{1/n}$ είναι προφανής. □

ΛΗΜΜΑ 1.3. *Έστω $x \in \mathbb{Q}$ και $y > 1$. Τότε $y^x = \sup\{y^r \,|\, r \in \mathbb{Q}, r < x\}$.*

Απόδειξη. Έστω $x \in \mathbb{Q}$ και $y > 1$.
Αν $r \in \mathbb{Q}$ και $r < x$, τότε $y^r < y^x$. Άρα ο y^x είναι άνω φράγμα του συνόλου $\{y^r \,|\, r \in \mathbb{Q}, r < x\}$.
Έστω a οποιοδήποτε άνω φράγμα του συνόλου $\{y^r \,|\, r \in \mathbb{Q}, r < x\}$.
Επειδή τα στοιχεία του συνόλου είναι θετικοί αριθμοί, συνεπάγεται $a > 0$.
Έστω (για να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι $a < y^x$, οπότε $\frac{y^x}{a} > 1$. Τότε, σύμφωνα με το λήμμα 1.2, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $1 < y^{1/n} < \frac{y^x}{a}$ και, επομένως, $a < y^{x-(1/n)}$. Αυτό, όμως, είναι άτοπο διότι $x - \frac{1}{n} \in \mathbb{Q}$ και $x - \frac{1}{n} < x$ και, επομένως, ο $y^{x-(1/n)}$ ανήκει στο $\{y^r \,|\, r \in \mathbb{Q}, r < x\}$.
Άρα $y^x \leq a$.
Άρα ο y^x είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του συνόλου $\{y^r \,|\, r \in \mathbb{Q}, r < x\}$. □

Παρατηρήστε ότι το λήμμα 1.3 *αποδεικνύει* την ισότητα $y^x = \sup\{y^r \,|\, r \in \mathbb{Q}, r < x\}$ στην περίπτωση που ο x είναι ρητός. Όμως, στην περίπτωση που ο x είναι άρρητος η ίδια ισότητα *δεν αποδεικνύεται*: απλώς χρησίμευσε για να *οριστεί* ο αριθμός y^x.

ΛΗΜΜΑ 1.4. [α] *Έστω $r \in \mathbb{Q}$ και $r < x_1 + x_2$. Τότε υπάρχουν $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ ώστε $r_1 < x_1$ και $r_2 < x_2$ και $r_1 + r_2 = r$.*
[β] *Έστω $x_1, x_2 > 0$, $r \in \mathbb{Q}$ και $0 < r < x_1x_2$. Τότε υπάρχουν $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ ώστε $0 < r_1 < x_1$ και $0 < r_2 < x_2$ και $r_1r_2 = r$.*

Απόδειξη. [α] Έστω $r \in \mathbb{Q}$ και $r < x_1 + x_2$.
Τότε $r - x_1 < x_2$, οπότε υπάρχει $r_2 \in \mathbb{Q}$ ώστε $r - x_1 < r_2 < x_2$. Θέτουμε $r_1 = r - r_2$, οπότε $r_1 \in \mathbb{Q}$. Προφανώς, $r_1 < x_1$ και $r_2 < x_2$ και $r_1 + r_2 = r$.
[β] Έστω $x_1, x_2 > 0$, $r \in \mathbb{Q}$ και $0 < r < x_1x_2$.
Τότε $0 < \frac{r}{x_1} < x_2$, οπότε υπάρχει $r_2 \in \mathbb{Q}$ ώστε $0 < \frac{r}{x_1} < r_2 < x_2$. Θέτουμε $r_1 = \frac{r}{r_2}$, οπότε $r_1 \in \mathbb{Q}$. Προφανώς, $0 < r_1 < x_1$ και $0 < r_2 < x_2$ και $r_1r_2 = r$. □

Στην πρόταση 1.8 αποδεικνύονται οι βασικές ιδιότητες των δυνάμεων. Όλες οι ιδιότητες αποδεικνύονται χρησιμοποιώντας τις αντίστοιχες ιδιότητες των δυνάμεων με ρητούς εκθέτες.

[11] Αργότερα, στην υποενότητα 4.3.1, θα δούμε γιατί δεν ορίζονται οι δυνάμεις y^x με μη-ακέραιο εκθέτη όταν $y < 0$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.8. [α] *Έστω* $y, y_1, y_2 > 0$. *Τότε* ${y_1}^x {y_2}^x = (y_1 y_2)^x$, $y^{x_1} y^{x_2} = y^{x_1+x_2}$, $(y^{x_1})^{x_2} = y^{x_1 x_2}$.
[β] *Έστω* $x_1 < x_2$. *Αν* $y > 1$, *τότε* $y^{x_1} < y^{x_2}$. *Αν* $0 < y < 1$, *τότε* $y^{x_1} > y^{x_2}$.
[γ] *Έστω* $0 < y_1 < y_2$. *Αν* $x > 0$, *τότε* ${y_1}^x < {y_2}^x$. *Αν* $x < 0$, *τότε* ${y_1}^x > {y_2}^x$.

Απόδειξη. [α] Στα παρακάτω θα χρησιμοποιήσουμε ελεύθερα τις εξής δύο παρατηρήσεις.
(i) *Αν* $y > 1$, *τότε ισχύει* $y^r \leq y^x$ *για κάθε* $r \in \mathbb{Q}$ *με* $r < x$.
(Διότι γνωρίζουμε ότι ο y^x είναι άνω φράγμα του συνόλου $\{y^r \,|\, r \in \mathbb{Q}, r < x\}$.)
(ii) *Αν* $y > 1$ *και ισχύει* $y^r \leq a$ *για κάθε* $r \in \mathbb{Q}$ *με* $r < x$, *τότε* $y^x \leq a$.
(Διότι, βάσει της υπόθεσης, ο a είναι άνω φράγμα του συνόλου $\{y^r \,|\, r \in \mathbb{Q}, r < x\}$ και διότι γνωρίζουμε ότι ο y^x είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του ίδιου συνόλου.)
Απόδειξη της πρώτης ισότητας.
Έστω $y_1, y_2 > 1$.
Έστω οποιοσδήποτε $r \in \mathbb{Q}$ με $r < x$. Τότε $(y_1 y_2)^r = {y_1}^r {y_2}^r \leq {y_1}^x {y_2}^x$. Άρα $(y_1 y_2)^x \leq {y_1}^x {y_2}^x$.
Έστω οποιοιδήποτε $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ με $r_1, r_2 < x$. Θέτουμε $r = \max\{r_1, r_2\} \in \mathbb{Q}$, οπότε $r < x$, και τότε ${y_1}^{r_1} {y_2}^{r_2} \leq {y_1}^r {y_2}^r = (y_1 y_2)^r \leq (y_1 y_2)^x$. Άρα ισχύει ${y_1}^{r_1} \leq \frac{(y_1 y_2)^x}{{y_2}^{r_2}}$. Άρα ${y_1}^x \leq \frac{(y_1 y_2)^x}{{y_2}^{r_2}}$.
Συνεπάγεται ${y_2}^{r_2} \leq \frac{(y_1 y_2)^x}{{y_1}^x}$ και, επομένως, ${y_2}^x \leq \frac{(y_1 y_2)^x}{{y_1}^x}$. Άρα ${y_1}^x {y_2}^x \leq (y_1 y_2)^x$.
Από τις $(y_1 y_2)^x \leq {y_1}^x {y_2}^x$ και ${y_1}^x {y_2}^x \leq (y_1 y_2)^x$ προκύπτει ${y_1}^x {y_2}^x = (y_1 y_2)^x$.
Όλες οι άλλες περιπτώσεις προκύπτουν αλγεβρικά από την περίπτωση που εξετάσαμε.
Απόδειξη της δεύτερης ισότητας.
Έστω $y > 1$.
Έστω οποιοιδήποτε $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ με $r_1 < x_1$ και $r_2 < x_2$. Τότε $y^{r_1} y^{r_2} = y^{r_1+r_2} \leq y^{x_1+x_2}$ και, επομένως, $y^{r_1} \leq \frac{y^{x_1+x_2}}{y^{r_2}}$. Άρα $y^{x_1} \leq \frac{y^{x_1+x_2}}{y^{r_2}}$. Συνεπάγεται $y^{r_2} \leq \frac{y^{x_1+x_2}}{y^{x_1}}$ και, επομένως, $y^{x_2} \leq \frac{y^{x_1+x_2}}{y^{x_1}}$. Άρα $y^{x_1} y^{x_2} \leq y^{x_1+x_2}$.
Έστω οποιοσδήποτε $r \in \mathbb{Q}$ με $r < x_1 + x_2$. Τότε υπάρχουν $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ ώστε $r_1 < x_1$ και $r_2 < x_2$ και $r_1 + r_2 = r$. Άρα ισχύει $y^r = y^{r_1+r_2} = y^{r_1} y^{r_2} \leq y^{x_1} y^{x_2}$. Άρα $y^{x_1+x_2} \leq y^{x_1} y^{x_2}$.
Από τις $y^{x_1} y^{x_2} \leq y^{x_1+x_2}$ και $y^{x_1+x_2} \leq y^{x_1} y^{x_2}$ προκύπτει $y^{x_1} y^{x_2} = y^{x_1+x_2}$.
Όλες οι άλλες περιπτώσεις προκύπτουν αλγεβρικά από την περίπτωση που εξετάσαμε.
Απόδειξη της τρίτης ισότητας.
Έστω $y > 1$ και $x_1, x_2 > 0$.
Έστω οποιοιδήποτε $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ με $r_1 < x_1$ και $r_2 < x_2$. Θεωρούμε $r_1', r_2' \in \mathbb{Q}$ με $r_1 \leq r_1'$ και $r_2 \leq r_2'$ και $0 < r_1' < x_1$ και $0 < r_2' < x_2$. Τότε $(y^{r_1'})^{r_2'} = y^{r_1' r_2'} \leq y^{x_1 x_2}$ και, επομένως, $y^{r_1} \leq y^{r_1'} \leq (y^{x_1 x_2})^{1/r_2'}$. Άρα $y^{x_1} \leq (y^{x_1 x_2})^{1/r_2'}$. Επειδή $y^{x_1} \geq y^{r_1'} > 1$, συνεπάγεται $(y^{x_1})^{r_2} \leq (y^{x_1})^{r_2'} \leq y^{x_1 x_2}$ και, επομένως, $(y^{x_1})^{x_2} \leq y^{x_1 x_2}$.
Έστω οποιοσδήποτε $r \in \mathbb{Q}$ με $r < x_1 x_2$. Θεωρούμε $r' \in \mathbb{Q}$ με $r \leq r'$ και $0 < r' < x_1 x_2$. Τότε υπάρχουν $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ ώστε $0 < r_1 < x_1$ και $0 < r_2 < x_2$ και $r_1 r_2 = r'$. Άρα $y^r \leq y^{r'} = y^{r_1 r_2} = (y^{r_1})^{r_2} \leq (y^{x_1})^{r_2} \leq (y^{x_1})^{x_2}$. Άρα $y^{x_1 x_2} \leq (y^{x_1})^{x_2}$.
Από τις $(y^{x_1})^{x_2} \leq y^{x_1 x_2}$ και $y^{x_1 x_2} \leq (y^{x_1})^{x_2}$ προκύπτει $(y^{x_1})^{x_2} = y^{x_1 x_2}$.
Όλες οι άλλες περιπτώσεις προκύπτουν αλγεβρικά από την περίπτωση που εξετάσαμε.
[β] Έστω $x_1 < x_2$ και $y > 1$.
Θεωρούμε $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ ώστε $x_1 < r_1 < r_2 < x_2$. Τότε για κάθε $r \in \mathbb{Q}$ με $r < x_1$ ισχύει $y^r \leq y^{r_1}$. Άρα $y^{x_1} \leq y^{r_1}$. Από την άλλη μεριά, ισχύει $y^{r_1} < y^{r_2} \leq y^{x_2}$. Άρα $y^{x_1} < y^{x_2}$.
Η περίπτωση $0 < y < 1$ προκύπτει αλγεβρικά από την περίπτωση που εξετάσαμε.
[γ] Έστω $0 < y_1 < y_2$ και $x > 0$.
Τότε $1 < \frac{y_2}{y_1}$ και, από το [β], $1 = (\frac{y_2}{y_1})^0 < (\frac{y_2}{y_1})^x$ και, από το [α], ${y_1}^x < {y_1}^x (\frac{y_2}{y_1})^x = (y_1 \frac{y_2}{y_1})^x = {y_2}^x$.
Η περίπτωση $x < 0$ προκύπτει αλγεβρικά από την περίπτωση που εξετάσαμε. □

Ξεχωρίζουμε δύο από τις ιδιότητες των δυνάμεων.
Η πρώτη είναι η εξής. Αν $y > 1$, τότε η y^x είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση του x στο $\mathbb{R}$

και, αν $0 < y < 1$, τότε η y^x είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση του x στο $\mathbb{R}$.

Η δεύτερη, ανάλογη ιδιότητα είναι η εξής. Αν $x > 0$, τότε η y^x είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση του y στο $[0, +\infty)$ και, αν $x < 0$, τότε η y^x είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση του y στο $(0, +\infty)$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.10. *Ορίζουμε τις δυνάμεις*

$$a^{+\infty} = +\infty \quad \text{αν } a > 1, \qquad a^{+\infty} = 0 \quad \text{αν } 0 \le a < 1,$$

$$a^{-\infty} = 0 \quad \text{αν } a > 1, \qquad a^{-\infty} = +\infty \quad \text{αν } 0 < a < 1,$$

$$(+\infty)^b = +\infty \quad \text{αν } b > 0 \text{ ή } b = +\infty, \qquad (+\infty)^b = 0 \quad \text{αν } b < 0 \text{ ή } b = -\infty.$$

Δεν ορίζεται αποτέλεσμα για τις παραστάσεις

$$0^0, \qquad 1^{+\infty}, \qquad 1^{-\infty}, \qquad (+\infty)^0, \qquad 0^{-\infty}$$

και χαρακτηρίζονται **απροσδιόριστες μορφές δύναμης**.

Οι παραπάνω απροσδιόριστες μορφές δύναμης δεν είναι τόσο γνωστές όσο οι απροσδιόριστες μορφές των πιο απλών πράξεων και τις οποίες είδαμε στον ορισμό 1.1. Όμως, παρουσιάζονται, όπως θα δούμε, συχνά στον υπολογισμό ορίων και η επιπόλαιη χρήση αυτών των παραστάσεων καταλήγει σε λάθη.

1.4.4 Λογάριθμοι.

Εδώ, στο τελευταίο μέρος αυτής της ενότητας, θα δούμε τον ορισμό των λογαρίθμων.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.3. *Έστω $a > 0$, $a \neq 1$. Τότε για κάθε $y > 0$ υπάρχει μοναδικός x ώστε $a^x = y$.*

Απόδειξη. Έστω $a > 1$ και $y > 1$.
Θεωρούμε το σύνολο

$$X = \{x \,|\, a^x \le y\}.$$

Προφανώς, $0 \in X$. Επίσης, σύμφωνα με το λήμμα 1.2, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $a^n > y$. Τότε, για κάθε $x \in X$ ισχύει $a^x \le y \le a^n$, οπότε $x \le n$. Άρα το X είναι μη-κενό και άνω φραγμένο, οπότε το $\sup X$ είναι αριθμός.
Θέτουμε

$$\xi = \sup X.$$

Θα αποδείξουμε ότι $a^\xi = y$.
Έστω $a^\xi < y$. Σύμφωνα με το λήμμα 1.2 υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $a^{1/n} < \frac{y}{a^\xi}$. Τότε $a^{\xi+(1/n)} < y$, οπότε $\xi + \frac{1}{n} \in X$. Αυτό είναι άτοπο διότι ο ξ είναι άνω φράγμα του X. Άρα $a^\xi \ge y$.
Έστω $a^\xi > y$. Από το λήμμα 1.2, και πάλι, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $a^{1/n} < \frac{a^\xi}{y}$. Τότε $y < a^{\xi-(1/n)}$, οπότε για κάθε $x \in X$ ισχύει $a^x \le y < a^{\xi-(1/n)}$ και, επομένως, $x < \xi - \frac{1}{n}$. Άρα ο $\xi - \frac{1}{n}$ είναι άνω φράγμα του X. Αυτό είναι άτοπο διότι ο ξ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του X. Άρα $a^\xi \le y$.
Από τις $a^\xi \ge y$ και $a^\xi \le y$ συνεπάγεται $a^\xi = y$.
Οι αποδείξεις στις άλλες περιπτώσεις ανάγονται στο αποτέλεσμα της πρώτης περίπτωσης ως εξής.
Αν $a > 1$ και $y = 1$, τότε η $a^x = y$ έχει την προφανή λύση $x = 0$.
Αν $a > 1$ και $0 < y < 1$, τότε, επειδή $\frac{1}{y} > 1$, υπάρχει η ώστε $a^\eta = \frac{1}{y}$ και, επομένως, για τον $\xi = -\eta$ ισχύει $a^\xi = a^{-\eta} = y$.
Τέλος, αν $0 < a < 1$ και $y > 0$, τότε, επειδή $\frac{1}{a} > 1$, υπάρχει η ώστε $(\frac{1}{a})^\eta = y$, οπότε για τον $\xi = -\eta$ ισχύει $a^\xi = a^{-\eta} = y$.
Απομένει να αποδείξουμε ότι η λύση της εξίσωσης $a^x = y$ είναι μοναδική: αν $a^{\xi_1} = y$ και $a^{\xi_2} = y$, τότε $a^{\xi_1} = a^{\xi_2}$, οπότε $\xi_1 = \xi_2$. $\square$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.11. [12] *Αν $y > 0$ και $a > 0$, $a \neq 1$, τότε η λύση της $a^x = y$, η ύπαρξη και η μοναδικότητα της οποίας εξασφαλίζεται από το θεώρημα 1.3, ονομάζεται* **λογάριθμος** *του y με* **βάση** *a και συμβολίζεται*

$$\log_a y.$$

Έστω $a > 1$. Τότε, όπως έχουμε ήδη αναφέρει, η συνάρτηση $y = a^x$ έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, +\infty)$ και είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, +\infty)$. Οι τιμές της $y = a^x$ είναι θετικές. Τώρα, το θεώρημα 1.3 λέει ότι το σύνολο τιμών της είναι ακριβώς το $(0, +\infty)$. Δηλαδή, η $y = a^x$ εκφράζει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία ανάμεσα στο $(-\infty, +\infty)$ και στο $(0, +\infty)$. Και, σύμφωνα με τον ορισμό των λογαρίθμων, η $x = \log_a y$ εκφράζει την αντίστροφη αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία ανάμεσα στο $(0, +\infty)$ και στο $(-\infty, +\infty)$. Επειδή η $y = a^x$ είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση του x στο $(-\infty, +\infty)$, η $x = \log_a y$ είναι κι αυτή γνησίως αύξουσα συνάρτηση του y στο $(0, +\infty)$.

Αν $0 < a < 1$, ισχύουν όσα είπαμε για την περίπτωση $a > 1$ με μία διαφορά. Η $y = a^x$ είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση του x στο $(-\infty, +\infty)$ με σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$ και η $x = \log_a y$ είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση του y στο $(0, +\infty)$ με σύνολο τιμών το $(-\infty, +\infty)$. Και πάλι, οι δύο συναρτήσεις είναι αντίστροφες.

Η πρόταση 1.9 περιγράφει όλες τις βασικές ιδιότητες των λογαρίθμων.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.9. *Έστω $a, b > 0$, $a, b \neq 1$.*

[α] $\log_a(y_1 y_2) = \log_a y_1 + \log_a y_2$ *για κάθε $y_1, y_2 > 0$.*

[β] $\log_a(y^z) = z \log_a y$ *για κάθε $y > 0$ και κάθε z.*

[γ] $\log_b y = \frac{\log_a y}{\log_a b}$ *για κάθε $y > 0$.*

[δ] $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$.

[ε] *Έστω $0 < y_1 < y_2$. Αν $a > 1$, τότε $\log_a y_1 < \log_a y_2$. Αν $0 < a < 1$, τότε $\log_a y_1 > \log_a y_2$.*

Απόδειξη. [α] Ορίζουμε $x_1 = \log_a y_1$ και $x_2 = \log_a y_2$, οπότε $a^{x_1} = y_1$ και $a^{x_2} = y_2$. Τότε $a^{x_1+x_2} = a^{x_1} a^{x_2} = y_1 y_2$, οπότε $\log_a(y_1 y_2) = x_1 + x_2 = \log_a y_1 + \log_a y_2$.

[β] Ορίζουμε $x = \log_a y$, οπότε $a^x = y$. Τότε $a^{zx} = (a^x)^z = y^z$ και, επομένως, $\log_a(y^z) = zx = z \log_a y$.

[γ] Ορίζουμε $x = \log_b y$ και $w = \log_a b$, οπότε $b^x = y$ και $a^w = b$. Άρα $a^{wx} = (a^w)^x = b^x = y$. Άρα $\log_a y = wx = \log_a b \log_b y$.

[δ] Η $\log_a 1 = 0$ προκύπτει από την $a^0 = 1$ και η $\log_a a = 1$ από την $a^1 = a$.

[ε] Ορίζουμε $x_1 = \log_a y_1$ και $x_2 = \log_a y_2$, οπότε $y_1 = a^{x_1}$ και $y_2 = a^{x_2}$. Τότε $a^{x_1} < a^{x_2}$ και, αν $a > 1$, συνεπάγεται $x_1 < x_2$ ενώ, αν $0 < a < 1$, συνεπάγεται $x_1 > x_2$. □

Ασκήσεις.

1.4.1. Βρείτε το infimum και το supremum του $(a, b) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \,|\, a < x < b\}$.

1.4.2. Έστω οποιοσδήποτε *άρρητος* a και το σύνολο $A = \{r \in \mathbb{Q} \,|\, r < a\}$. Παρατηρήστε ότι $A \subseteq \mathbb{Q}$ και ότι το A είναι μη-κενό και άνω φραγμένο στο $\mathbb{Q}$. Δηλαδή, υπάρχει $u \in \mathbb{Q}$ (για παράδειγμα, ο $u = [a] + 1$) ώστε να ισχύει $r \leq u$ για κάθε $r \in A$.

Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει αριθμός στο $\mathbb{Q}$, ο οποίος να είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A. Συμπεράνατε ότι το $\mathbb{Q}$ δεν έχει την ιδιότητα supremum.

1.4.3. [α] Αν $a, b > 0$ και $m, n \in \mathbb{Z}$, αποδείξτε ότι $a^n b^n = (ab)^n$, $a^m a^n = a^{m+n}$, $(a^m)^n = a^{mn}$.

[β] Έστω $m, n \in \mathbb{Z}$ και $m < n$. Αν $a > 1$, αποδείξτε ότι $a^m < a^n$. Αν $0 < a < 1$, αποδείξτε ότι $a^n < a^m$.

[γ] Έστω $0 < a < b$ και $n \in \mathbb{Z}$. Αν $n > 0$, αποδείξτε ότι $0 < a^n < b^n$. Αν $n < 0$, αποδείξτε ότι $0 < b^n < a^n$.

[12] Δεύτερος ορισμός του λογαρίθμου υπάρχει στην άσκηση 2.4.21.

1.4.4. Έστω $n, m \in \mathbb{N}$ και $n, m \geq 2$.
[α] Αν $y, y_1, y_2 \geq 0$, αποδείξτε ότι $\sqrt[n]{y_1 y_2} = \sqrt[n]{y_1}\,\sqrt[n]{y_2}$ και $\sqrt[n]{\sqrt[m]{y}} = \sqrt[nm]{y}$.
[β] Έστω $n < m$. Αν $y > 1$, αποδείξτε ότι $\sqrt[m]{y} < \sqrt[n]{y}$. Αν $0 < y < 1$, αποδείξτε ότι $\sqrt[n]{y} < \sqrt[m]{y}$.
[γ] Έστω $0 \leq y_1 < y_2$. Αποδείξτε ότι $\sqrt[n]{y_1} < \sqrt[n]{y_2}$.

1.4.5. Έστω $r, r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$.
[α] Αν $y, y_1, y_2 > 0$, αποδείξτε ότι ${y_1}^r {y_2}^r = (y_1 y_2)^r$, $y^{r_1} y^{r_2} = y^{r_1 + r_2}$, $(y^{r_1})^{r_2} = y^{r_1 r_2}$.
[β] Έστω $r_1 < r_2$. Αν $y > 1$, αποδείξτε ότι $y^{r_1} < y^{r_2}$. Αν $0 < y < 1$, αποδείξτε ότι $y^{r_1} > y^{r_2}$.
[γ] Έστω $0 < y_1 < y_2$. Αν $r > 0$, αποδείξτε ότι ${y_1}^r < {y_2}^r$. Αν $r < 0$, αποδείξτε ότι ${y_1}^r > {y_2}^r$.

1.4.6. Έστω $y > 1$. Αποδείξτε ότι $y^x = \inf\{y^r \mid r \in \mathbb{Q}, x < r\}$.

1.4.7. Αποδείξτε ότι οι $\sqrt{3}$, $\sqrt[7]{129}$ και $\sqrt[3]{2} + \sqrt{5}$ είναι άρρητοι.

1.4.8. [13] [α] Έστω $n, k, m \in \mathbb{N}$ ώστε οι k, m να μην έχουν κοινό διαιρέτη > 1. Αποδείξτε ότι ο $\sqrt[n]{k/m}$ είναι ρητός αν και μόνο αν καθένας από τους k, m είναι n-οστή δύναμη φυσικού.
[β] Έστω $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ και έστω ότι οι $k, m \in \mathbb{Z}$ δεν έχουν κοινό διαιρέτη > 1. Αν ο $\frac{k}{m}$ είναι ρίζα του πολυωνύμου $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$, αποδείξτε ότι ο k διαιρεί τον a_0 και ο m διαιρεί τον a_n.

1.4.9. Έστω $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geq 2$. Βρείτε συνθήκη, σχετική με τους πρώτους παράγοντες των m, n, η οποία να είναι ισοδύναμη με το ότι ο $\log_m n$ είναι ρητός.

[13] Δύο γενικεύσεις της πρότασης 1.6.

Βασική βιβλιογραφία.

Apostol, T. (1974) *Mathematical Analysis, Ch 1.* Addison-Wesley.

Bartle, R. (1967) *The Elements of Real Analysis, Ch I.* Wiley.

Bartle, R. & Sherbert, D. (2011) *Introduction to Real Analysis, Ch 2.* Wiley.

Beals, R. (2004) *Analysis, an Introduction, Ch 2.* Cambridge Univ. Press.

Beardon, A. (1997) *Limits: a New Approach to Real Analysis, Ch 2.* Springer.

Berberian, S. (1994) *A First Course in Real Analysis, Ch 1-2.* Springer.

Davidson, K. & Donsig, A. (2010) *Real Analysis and Applications, Ch 2.* Springer.

Ghorpade, S. & Limaye, B. (2006) *A Course in Calculus and Real Analysis, Ch 1.* Springer.

Grauert, H. & Lieb, I. (1967) *Differential- und Integralrechnung, Band I, Kap I.* Springer.

Hayes Jr, C. (1964) *Concepts of Real Analysis, Ch 2.* Wiley.

Krantz, S. (2013) *Real Analysis and Foundations, Ch 2.* Chapman and Hall.

Landau, E. (2001) *Differential and Integral Calculus, Introduction.* American Math. Society & Chelsea.

Lang, S. (1997) *Undergraduate Analysis, Ch I.* Springer.

Protter, M. (1998) *Basic Elements of Real Analysis, Ch 1, 3.* Springer.

Rosenlicht, M. (1986) *Introduction to Analysis, Ch II.* Dover.

Ross, K. (2013) *Elementary Analysis, Ch 1.* Springer.

Rudin, W. (1976) *Principles of Mathematical Analysis, Ch 1.* McGraw-Hill.

Spivak, M. (1994) *Calculus, Ch 1-2, 8, 28.* Cambridge Univ. Press.

Stoll, M. (2000) *Introduction to Real Analysis, Ch 1.* Pearson.

Συμπληρωματική βιβλιογραφία.

Brand, L. (2006) *Advanced Calculus, Ch 1-2.* Dover.

Buck, R. & Buck, E. (2003) *Advanced Calculus, Ch 1.* Waveland Press.

Courant, R. & John, F. (1989) *Introduction to Calculus and Analysis, Vol I, Ch 1.* Springer.

Dieudonné, J. (1969) *Foundations of Modern Analysis, Vol 1, Ch 2.* Academic Press.

Goffman, C. (1966) *Introduction to Real Analysis, Ch 1.* Harper and Row.

Goffman, C. (1953) *Real Functions, Ch 4.* Rinehart.

Goldberg, R. (1976) *Methods of Real Analysis, Ch 1.* Wiley.

Nikolsky, S. (1977) *A Course of Mathematical Analysis, Vol 1, Ch 2.* Mir Publishers.

Pugh, C. (2015) *Real Mathematical Analysis, Ch 1.* Springer.

Smirnov, V. I. (1964) *A Course of Higher Mathematics, Vol 1, Ch I.* Pergammon Press.

Κεφάλαιο 2

Ακολουθίες και όρια ακολουθιών.

2.1 Ακολουθίες.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.1. *Χαρακτηρίζουμε* **ακολουθία (πραγματικών αριθμών)** *κάθε συνάρτηση* $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *με πεδίο ορισμού το* $\mathbb{N}$ *και πραγματικές τιμές. Για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *η αντίστοιχη τιμή* $x(n)$ *της συνάρτησης συμβολίζεται, παραδοσιακά,* x_n. *Δηλαδή, για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *θέτουμε*

$$x_n = x(n).$$

Μπορούμε να πούμε, κάπως απλοϊκά, ότι ακολουθία είναι οποιαδήποτε άπειρη επιλογή αριθμών με συγκεκριμένη σειρά ο καθένας: ο πρώτος αριθμός x_1, ο δεύτερος x_2, ο τρίτος x_3 κ.τ.λ. Οι επιλεγμένοι αριθμοί, δηλαδή οι τιμές της ακολουθίας/συνάρτησης ονομάζονται **όροι** της ακολουθίας. Ο όρος x_{n+1} χαρακτηρίζεται **επόμενος** του x_n και ο x_{n-1} **προηγούμενος** του x_n. Η ανεξάρτητη μεταβλητή n, η οποία διατρέχει το $\mathbb{N}$, ονομάζεται **δείκτης** και *δείχνει* τη σειρά επιλογής των όρων της ακολουθίας. Αντί του συναρτησιακού συμβόλου $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ χρησιμοποιούμε, παραδοσιακά, τα σύμβολα

$$(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \quad \text{ή} \quad (x_n) \quad \text{ή} \quad (x_n)_{n=1}^{+\infty}.$$

Μπορούμε, φυσικά, να χρησιμοποιούμε κι άλλα γράμματα, εκτός των x, n, για να συμβολίσουμε ακολουθίες: (y_n), (x_k), (z_m) κ.τ.λ.

Στο εξής θα κάνουμε, χάριν συντομίας, μια άτυπη σύμβαση. *Κάθε φορά που κάποιο σύμβολο, όπως τα* n, m, k, *εμφανίζεται ως δείκτης όρου οποιασδήποτε ακολουθίας, θα εννοείται ότι το σύμβολο αυτό δηλώνει φυσικό αριθμό (μερικές φορές θα επιτρέπεται και η τιμή* 0*), έστω κι αν δεν αναφέρουμε ρητά ότι* $n \in \mathbb{N}$ *ή* $m \in \mathbb{N}$ *ή* $k \in \mathbb{N}$.

Παράδειγμα 2.1.1. Η ακολουθία $(\frac{1}{n})$ ή $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots)$.

Παράδειγμα 2.1.2. Η ακολουθία (n) ή $(1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots)$.

Παράδειγμα 2.1.3. Η ακολουθία (1) ή $(1, 1, 1, \dots, 1, \dots)$.

Παράδειγμα 2.1.4. Η ακολουθία $((-1)^{n-1})$ ή $(1, -1, 1, -1, \dots, 1, -1, \dots)$.

Παράδειγμα 2.1.5. Η ακολουθία $\left(\frac{1}{10^n}\right)$ ή $(\frac{1}{10}, \frac{1}{10^2}, \frac{1}{10^3}, \dots, \frac{1}{10^n}, \dots)$.

Παράδειγμα 2.1.6. Η ακολουθία με n-οστό όρο ίσο με το πλήθος των θετικών διαιρετών του n, δηλαδή η ακολουθία $(1, 2, 2, 3, 2, 4, 2, 4, 3, 4, 2, \dots)$. Δεν υπάρχει απλός τύπος για τον n-οστό όρο της ακολουθίας.

Παράδειγμα 2.1.7. Η ακολουθία $(m - n)_{n=1}^{+\infty}$ ή $(m - 1, m - 2, m - 3, \dots, m - n, \dots)$.

Παράδειγμα 2.1.8. Η ακολουθία $(m - n)_{m=1}^{+\infty}$ ή $(1 - n, 2 - n, 3 - n, \dots, m - n, \dots)$.

Στα δύο τελευταία παραδείγματα βλέπουμε ότι μερικές φορές χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε το σύμβολο $(x_n)_{n=1}^{+\infty}$, αντί του απλούστερου (x_n), για να δηλώσουμε ποιός, ανάμεσα σε διάφορα γράμματα, είναι ο δείκτης της ακολουθίας.

Προσέξτε: μια ακολουθία είναι συνάρτηση και όχι το σύνολο τιμών της. Με πιο απλά λόγια, μια ακολουθία είναι διαδοχική επιλογή αριθμών και όχι το σύνολο των αριθμών αυτών. Το σύνολο των όρων της ακολουθίας $(1)_{n=1}^{+\infty}$ είναι το μονοσύνολο $\{1\}$. Η ακολουθία, όμως, είναι η διαδοχική επιλογή $(1, 1, 1, \ldots)$. Το πλήθος των όρων μιας ακολουθίας είναι πάντοτε άπειρο, ενώ άλλες ακολουθίες έχουν άπειρο σύνολο όρων και άλλες έχουν πεπερασμένο σύνολο όρων. Επίσης, δύο διαφορετικές ακολουθίες μπορεί να έχουν το ίδιο σύνολο όρων. Για παράδειγμα, οι $(1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots)$, $(1, 1, -1, 1, 1, -1, 1, 1, -1, \ldots)$ είναι διαφορετικές ακολουθίες αλλά και οι δύο έχουν σύνολο όρων το $\{-1, 1\}$. Οι $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots)$, $(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \ldots)$ είναι διαφορετικές ακολουθίες αλλά και οι δύο έχουν σύνολο όρων το $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.2. *Μια ακολουθία (x_n) χαρακτηρίζεται* **αύξουσα** *αν ισχύει $x_{n+1} \geq x_n$ για κάθε n,* **γνησίως αύξουσα** *αν ισχύει $x_{n+1} > x_n$ για κάθε n,* **φθίνουσα** *αν ισχύει $x_{n+1} \leq x_n$ για κάθε n και* **γνησίως φθίνουσα** *αν ισχύει $x_{n+1} < x_n$ για κάθε n.*

Η (x_n) χαρακτηρίζεται **μονότονη** *αν είναι αύξουσα ή φθίνουσα και* **γνησίως μονότονη** *αν είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.*

Η (x_n) χαρακτηρίζεται **σταθερή** *αν όλοι οι όροι της είναι ίσοι μεταξύ τους, δηλαδή αν υπάρχει c ώστε να ισχύει $x_n = c$ για κάθε n. Φυσικά, μια τέτοια ακολουθία συμβολίζεται (c) ή $(c, c, c, \ldots, c, \ldots)$.*

Μια σταθερή ακολουθία είναι αύξουσα και φθίνουσα. Στα παραδείγματα 2.1.1, 2.1.5, 2.1.7 οι ακολουθίες είναι γνησίως φθίνουσες, στα παραδείγματα 2.1.2, 2.1.8 οι ακολουθίες είναι γνησίως αύξουσες, στο παράδειγμα 2.1.3 η ακολουθία είναι σταθερή και στα παραδείγματα 2.1.4, 2.1.6 οι ακολουθίες δεν είναι μονότονες.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.3. *Μια ακολουθία (x_n) χαρακτηρίζεται* **άνω φραγμένη** *αν το σύνολο των όρων της είναι άνω φραγμένο, δηλαδή αν υπάρχει u με την ιδιότητα: ισχύει $x_n \leq u$ για κάθε n. Κάθε τέτοιος u χαρακτηρίζεται* **άνω φράγμα** *της (x_n).*

Μια ακολουθία (x_n) χαρακτηρίζεται **κάτω φραγμένη** *αν το σύνολο των όρων της είναι κάτω φραγμένο, δηλαδή αν υπάρχει l με την ιδιότητα: ισχύει $l \leq x_n$ για κάθε n. Κάθε τέτοιος l χαρακτηρίζεται* **κάτω φράγμα** *της (x_n).*

Μια ακολουθία (x_n) χαρακτηρίζεται **φραγμένη** *αν είναι άνω και κάτω φραγμένη, δηλαδή αν υπάρχουν l και u με την ιδιότητα: ισχύει $l \leq x_n \leq u$ για κάθε n.*

Παρατηρούμε ότι, αν ο u είναι άνω φράγμα της ακολουθίας (x_n), τότε κάθε $u' \geq u$ είναι άνω φράγμα της και, αν ο l είναι κάτω φράγμα της (x_n), τότε κάθε $l' \leq l$ είναι κάτω φράγμα της.

Παράδειγμα 2.1.9. Κάθε σταθερή ακολουθία (c) είναι φραγμένη.

Παράδειγμα 2.1.10. Οι ακολουθίες $(\frac{1}{n})$, $\big(\frac{(-1)^{n-1}}{n}\big)$, $(\frac{n-1}{n})$, $((-1)^{n-1})$ είναι φραγμένες αφού όλοι οι όροι τους ανήκουν στο διάστημα $[-1, 1]$.

Παράδειγμα 2.1.11. Η ακολουθία $\big(\frac{(1+(-1)^{n-1})n}{2}\big)$ ή $(1, 0, 3, 0, 5, 0, 7, 0, \ldots)$ είναι κάτω φραγμένη αλλά όχι άνω φραγμένη. Προφανώς, κάθε $l \leq 0$ είναι κάτω φράγμα της ακολουθίας. Από την άλλη μεριά, αν υπήρχε άνω φράγμα της ακολουθίας αυτής, το σύνολο των περιττών φυσικών θα ήταν άνω φραγμένο. Αυτό δεν ισχύει και η ακολουθία δεν είναι άνω φραγμένη.

Παράδειγμα 2.1.12. Η ακολουθία $(-1, 0, -3, 0, -5, 0, -7, 0, \ldots)$, δηλαδή η αντίθετη της προηγούμενης, είναι άνω φραγμένη αλλά όχι κάτω φραγμένη. Αν κάποιος l ήταν κάτω φράγμα της, δηλαδή αν όλοι οι όροι της ήταν $\geq l$, τότε όλοι οι όροι της προηγούμενης ακολουθίας θα ήταν $\leq -l$, οπότε η προηγούμενη ακολουθία θα ήταν άνω φραγμένη.

Παράδειγμα 2.1.13. Η ακολουθία $((-1)^{n-1}n)$ ή $(1, -2, 3, -4, 5, -6, \dots)$ δεν είναι άνω φραγμένη ούτε κάτω φραγμένη. Πράγματι, αν η ακολουθία ήταν άνω φραγμένη, το σύνολο των περιττών φυσικών θα ήταν άνω φραγμένο και, αν η ακολουθία ήταν κάτω φραγμένη, το σύνολο των άρτιων φυσικών θα ήταν άνω φραγμένο.

Έστω ότι η ακολουθία (x_n) είναι φραγμένη, δηλαδή ότι υπάρχουν l, u ώστε να ισχύει

$$l \leq x_n \leq u$$

για κάθε n. Με άλλα λόγια, ισχύει $x_n \in [l, u]$ για κάθε n. Τώρα, όμως, μπορούμε να βρούμε ένα συμμετρικό ως προς τον 0 διάστημα $[-M, M]$ το οποίο να περιέχει το διάστημα $[l, u]$, οπότε ισχύει

$$-M \leq x_n \leq M$$

ή, ισοδύναμα, $|x_n| \leq M$ για κάθε n. Δηλαδή, αν μια ακολουθία (x_n) είναι φραγμένη, τότε υπάρχει M ώστε να ισχύει $|x_n| \leq M$ για κάθε n. Το αντίστροφο είναι κι αυτό σωστό: αν υπάρχει M ώστε να ισχύει $|x_n| \leq M$ για κάθε n, τότε ισχύει $-M \leq x_n \leq M$ για κάθε n, οπότε ο M είναι άνω φράγμα και ο $-M$ είναι κάτω φράγμα της (x_n). Επομένως:

Η ακολουθία (x_n) είναι φραγμένη αν και μόνο αν υπάρχει M ώστε να ισχύει $|x_n| \leq M$ για κάθε n.

Ας υποθέσουμε ότι κάποια συγκεκριμένη ιδιότητα ισχύει ή όχι ανάλογα με τις τιμές που παίρνει ο φυσικός n. Για παράδειγμα: "ο n διαιρεί τον 234" ή "ο 4 διαιρεί τον n" ή "$n^2 - n > 8$" ή "$x_n < x_{n+1}$" για κάποια συγκεκριμένη ακολουθία (x_n).

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.4. *Λέμε ότι μια συγκεκριμένη ιδιότητα, η οποία εξαρτάται από τον φυσικό n,* **ισχύει τελικά** *ή, ισοδύναμα, ότι* **ισχύει από κάποιον** n **και πέρα** *αν υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει η ιδιότητα αυτή για κάθε $n \geq n_0$.*

Αν ο n είναι ο δείκτης μιας συγκεκριμένης ακολουθίας (x_n) και η ιδιότητα για την οποία μιλάμε αναφέρεται στους όρους της (x_n), τότε λέμε ότι η (x_n) έχει *τελικά* ή, ισοδύναμα, *από κάποιον n και πέρα* την ιδιότητα αυτή. Τέτοιες ιδιότητες είναι για παράδειγμα οι: $x_{n+1} \leq x_n$, $x_{n+1} > x_n$, $x_n \leq u$, $x_n = c$. Αν μια από αυτές ισχύει τελικά, λέμε ότι η (x_n) είναι, αντιστοίχως, *τελικά φθίνουσα, τελικά γνησίως αύξουσα, τελικά άνω φραγμένη με άνω φράγμα τον u, τελικά σταθερή c.*

Παράδειγμα 2.1.14. Η ακολουθία $(1, \frac{2}{3}, 7, -2, -1, -1, -1, -1, \dots)$ είναι τελικά σταθερή, διότι είναι σταθερή από τον πέμπτο όρο και πέρα.

Παράδειγμα 2.1.15. Η ακολουθία $(n^2 - 14n + 8)$ είναι τελικά γνησίως αύξουσα. Πράγματι, ο $n^2 - 14n + 8 = (n-7)^2 - 41$ αυξάνεται γνησίως για $n \geq 7$ ενώ, αντιθέτως, οι αρχικοί επτά όροι φθίνουν γνησίως.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε δύο ιδιότητες που εξαρτώνται από τον φυσικό n και ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν ${n_0}'$, ${n_0}''$ ώστε η πρώτη ιδιότητα να ισχύει για κάθε $n \geq {n_0}'$ και η δεύτερη ιδιότητα να ισχύει για κάθε $n \geq {n_0}''$. Θεωρούμε τον

$$n_0 = \max\{{n_0}', {n_0}''\}.$$

Επειδή $n_0 \geq {n_0}'$, η πρώτη ιδιότητα ισχύει για κάθε $n \geq n_0$. Επίσης, επειδή $n_0 \geq {n_0}''$, η δεύτερη ιδιότητα ισχύει κι αυτή για κάθε $n \geq n_0$. Άρα ισχύουν *και οι δύο* ιδιότητες για κάθε $n \geq n_0$. Το σχήμα που περιγράψαμε διατυπώνεται ως εξής:

Αν μια ιδιότητα ισχύει τελικά και μια άλλη ιδιότητα ισχύει τελικά κι αυτή, τότε ισχύουν τελικά και οι δύο, ταυτόχρονα, ιδιότητες.

Παράδειγμα 2.1.16. Ισχύει $n^2 - 3n \geq 37$ για κάθε $n \geq 8$. Επίσης, ισχύει $\frac{2n+1}{n+1} > \frac{25}{13}$ για κάθε $n \geq 13$. Άρα ισχύει $n^2 - 3n \geq 37$ *και* $\frac{2n+1}{n+1} > \frac{25}{13}$ για κάθε $n \geq \max\{8, 13\} = 13$.

Το προηγούμενο συμπέρασμα αληθεύει και για τρεις ή τέσσερις ή, γενικά, *πεπερασμένου πλήθους* ιδιότητες: αντί να θεωρήσουμε τον μέγιστο από δύο φυσικούς, τους $n_0{}', n_0{}''$, θα θεωρήσουμε τον μέγιστο από τρεις ή τέσσερις αντίστοιχους φυσικούς, έναν για κάθε ιδιότητα. Δεν μπορούμε, όμως, να επεκτείνουμε το παραπάνω επιχείρημα σε άπειρες ιδιότητες διότι άπειροι φυσικοί μπορεί να μην έχουν μέγιστο!

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.5. *Το νόημα του ότι μια ιδιότητα* **ισχύει για άπειρους** n *είναι σαφές.*

Παράδειγμα 2.1.17. Ισχύει $(-1)^{n-1} > 0$ για άπειρους n, αφού ισχύει για κάθε περιττό n. Ομοίως, ισχύει και η αντίθετη ιδιότητα $(-1)^{n-1} \leq 0$ για άπειρους n, αφού ισχύει για κάθε άρτιο n.

Το παράδειγμα αυτό δείχνει ότι μπορεί μια ιδιότητα να ισχύει για άπειρους n αλλά να μην είναι σωστό ότι ισχύει από κάποιον n και πέρα. Από την άλλη μεριά, αν μια ιδιότητα ισχύει από κάποιον n και πέρα, τότε, προφανώς, αυτή ισχύει για άπειρους n.

Ασκήσεις.

2.1.1. Αν μια ακολουθία είναι αύξουσα και φθίνουσα, αποδείξτε ότι είναι σταθερή.

2.1.2. Βρείτε το σύνολο των όρων της ακολουθίας $\left(\frac{a+b}{2} + (-1)^{n-1}\frac{a-b}{2}\right)$.
Αν $m \in \mathbb{N}$, βρείτε το σύνολο των όρων της ακολουθίας $\left(n - m[\frac{n}{m}]\right)_{n=1}^{+\infty}$. Θεωρήστε πρώτα τις περιπτώσεις $m = 1, 2, 3$.

2.1.3. Οι έξι πρώτοι όροι μιας άγνωστης ακολουθίας είναι: $1, 4, 9, 16, 25, 36$. Ο έβδομος πρέπει να είναι ο 49; ο 24; ή μπορεί να είναι οποιοσδήποτε αριθμός;

2.1.4. Αποδείξτε ότι κάθε αύξουσα ακολουθία είναι κάτω φραγμένη και ότι κάθε φθίνουσα ακολουθία είναι άνω φραγμένη.

2.1.5. Το *άθροισμα δύο ακολουθιών* (x_n) και (y_n) είναι η ακολουθία $(x_n + y_n)$. Αποδείξτε ότι το άθροισμα δύο αυξουσών ή δύο φθινουσών ακολουθιών είναι, αντιστοίχως, αύξουσα ή φθίνουσα ακολουθία. Αποδείξτε ότι το άθροισμα δύο άνω φραγμένων ή δύο κάτω φραγμένων ακολουθιών είναι, αντιστοίχως, άνω φραγμένη ή κάτω φραγμένη ακολουθία.
Το *γινόμενο δύο ακολουθιών* (x_n) και (y_n) είναι η ακολουθία $(x_n y_n)$. Διατυπώστε και αποδείξτε τα ανάλογα με τα παραπάνω αποτελέσματα, υποθέτοντας, επιπλέον, ότι ισχύει $x_n, y_n \geq 0$ για κάθε n.

2.1.6. Ποιές από τις $((-1)^{n-1}n)$, $\left(\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)$, $\left(\frac{18-n}{n^2+n+1}\right)$, $\left(\frac{13^n}{n!}\right)$, $\left(\frac{n^{30}}{2^n}\right)$, $\left(2[\frac{n}{2}]\right)$, $\left(n - 3[\frac{n}{3}]\right)$ είναι *τελικά* μονότονες; τελικά άνω φραγμένες; τελικά κάτω φραγμένες ακολουθίες;

2.1.7. Αποδείξτε ότι μια ιδιότητα ισχύει για άπειρους n αν και μόνο αν για κάθε k υπάρχει κάποιος $n > k$ για τον οποίο η ιδιότητα ισχύει.
Αποδείξτε ότι μια ιδιότητα ισχύει για άπειρους n αν και μόνο αν είναι λάθος ότι η αντίθετη ιδιότητα ισχύει τελικά.

2.1.8. Αποδείξτε ότι, αν μια ακολουθία είναι τελικά άνω φραγμένη ή τελικά κάτω φραγμένη, τότε είναι, αντιστοίχως, άνω φραγμένη ή κάτω φραγμένη. Με άλλα λόγια, το να είναι ή όχι μια ακολουθία άνω φραγμένη ή κάτω φραγμένη δεν εξαρτάται από τους αρχικούς όρους της.

2.1.9. Έστω ότι το σύνολο των όρων μιας ακολουθίας (x_n) είναι πεπερασμένο. Αποδείξτε ότι υπάρχει c ώστε να ισχύει $x_n = c$ για άπειρους n.

2.1.10. [1] Έστω a, b, p, q, όπου οι p, q δεν είναι και οι δύο 0, και ακολουθία (x_n) που ορίζεται από τους δύο πρώτους όρους $x_1 = a$ και $x_2 = b$ και από τον αναδρομικό τύπο $x_{n+2} = px_{n+1} + qx_n$.

[1] Εδώ περιγράφεται ο υπολογισμός του n-οστού όρου ακολουθίας που ορίζεται με τον γενικό *γραμμικό αναδρομικό τύπο* δεύτερης τάξης.

(i) Έστω $p \neq 0$, $q = 0$. Αποδείξτε ότι ισχύει $x_n = bp^{n-2}$ για κάθε $n \geq 2$.

(ii) Έστω $p = 0$, $q \neq 0$. Αποδείξτε ότι ισχύει $x_n = aq^{\frac{n-1}{2}}$ για κάθε περιττό n και $x_n = bq^{\frac{n-2}{2}}$ για κάθε άρτιο n.

(iii) Έστω $p \neq 0$, $q \neq 0$.

Αν η εξίσωση $x^2 = px + q$ έχει δύο πραγματικές λύσεις, τις ρ_1, ρ_2, βρείτε κ, λ ώστε να ισχύει $x_n = \kappa {\rho_1}^{n-1} + \lambda {\rho_2}^{n-1}$ για κάθε n.

Αν η εξίσωση $x^2 = px + q$ έχει μόνο μία πραγματική λύση, την ρ, βρείτε κ, λ ώστε να ισχύει $x_n = \kappa\rho^{n-1} + \lambda(n-1)\rho^{n-1}$ για κάθε n.

Αν η εξίσωση $x^2 = px + q$ έχει δύο συζυγείς μιγαδικές λύσεις, βρείτε κ, λ, ρ και $\theta \in [0, 2\pi)$ ώστε να ισχύει $x_n = \kappa\rho^{n-1}\cos((n-1)\theta) + \lambda\rho^{n-1}\sin((n-1)\theta)$ για κάθε n.

Υπολογίστε τον n-οστό όρο καθεμιάς από τις τέσσερις ακολουθίες[2] που ορίζονται με πρώτους όρους $x_1 = x_2 = 1$ και με τους αναδρομικούς τύπους $x_{n+2} = 3x_n$, $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$, $x_{n+2} = 2x_{n+1} - x_n$, $x_{n+2} = x_{n+1} - x_n$.

2.1.11. Ποιοί αρχικοί όροι (και με τι περιορισμούς) χρειάζονται για να ορισθεί η ακολουθία (x_n) με τον αναδρομικό τύπο $x_{n+1} = x_1 + \cdots + x_n$; Απαντήστε στην ίδια ερώτηση για καθέναν από τους αναδρομικούς τύπους $x_{n+3} = \frac{x_n x_{n+2}}{x_{n+1}}$, $x_{n+1} = 1 - \frac{1}{x_n}$ και $x_{n+1} = 2 - \frac{1}{x_n}$.

2.2 Όρια ακολουθιών, περιοχές.

Παράδειγμα 2.2.1. Οι διαδοχικοί όροι της ακολουθίας $(\frac{1}{n})$ είναι οι:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{100}, \frac{1}{101}, \ldots, \frac{1}{100000}, \ldots, \frac{1}{100000000}, \ldots.$$

Είναι σαφές ότι, αν ο δείκτης n γίνει "αρκετά μεγάλος", το μέγεθος του αντίστοιχου όρου $\frac{1}{n}$ της ακολουθίας θα γίνει "όσο θέλουμε μικρό" ή, πιο παραστατικά, το σημείο $\frac{1}{n}$ θα πλησιάσει "όσο θέλουμε κοντά" το σημείο 0.

Παράδειγμα 2.2.2. Οι διαδοχικοί όροι της ακολουθίας $(\frac{n-1}{n})$ είναι οι:

$$0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots, \frac{99}{100}, \frac{100}{101}, \ldots, \frac{99999}{100000}, \ldots, \frac{99999999}{100000000}, \ldots.$$

Πάλι, αν ο δείκτης n γίνει "αρκετά μεγάλος", τότε η απόσταση του αντίστοιχου όρου $\frac{n-1}{n}$ από τον αριθμό 1 θα γίνει "όσο θέλουμε μικρή". Πράγματι, η απόσταση του $\frac{n-1}{n}$ από τον 1 είναι ίση με $|\frac{n-1}{n} - 1| = \frac{1}{n}$ και, όπως είδαμε στο προηγούμενο παράδειγμα, αν ο n γίνει "αρκετά μεγάλος", ο αντίστοιχος $\frac{1}{n}$ θα γίνει "όσο θέλουμε μικρός".

Στα παραδείγματα αυτά είδαμε δύο ακολουθίες (x_n) με την εξής κοινή ιδιότητα:

Αν ο δείκτης n γίνει "αρκετά μεγάλος", η απόσταση του x_n από κάποιον x θα γίνει "όσο θέλουμε μικρή".

Επεξήγηση. Όταν λέμε ότι η απόσταση του x_n από τον x θα γίνει "όσο θέλουμε μικρή" εννοούμε ότι η $|x_n - x|$ θα γίνει "μικρότερη από οποιονδήποτε θετικό αριθμό". Όταν λέμε "αν ο n γίνει αρκετά μεγάλος" εννοούμε "αν ο n γίνει μεγαλύτερος από κάποιον κατάλληλο αριθμό". Μπορούμε, λοιπόν, να διατυπώσουμε πιο καθαρά την ιδιότητα που εξετάζουμε ως εξής:

Η $|x_n - x|$ θα γίνει μικρότερη από οποιονδήποτε θετικό αριθμό αν ο n γίνει μεγαλύτερος από κάποιον κατάλληλο αριθμό.

Ας δούμε ξανά το:

Παράδειγμα 2.2.1. Έστω η ακολουθία $(\frac{1}{n})$.

Η απόσταση του $\frac{1}{n}$ από τον 0 είναι ίση με $|\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n}$ και, όπως έχουμε ήδη πει, θα γίνει μικρότερη από οποιονδήποτε θετικό αριθμό αν ο n γίνει μεγαλύτερος από κάποιον κατάλληλο φυσικό.

[2] Η δεύτερη ακολουθία είναι η γνωστή ακολουθία Fibonnaci και οι εφτά αρχικοί όροι της είναι οι $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13$.

Τί σημαίνει αυτό;
Ας πάρουμε έναν οποιονδήποτε μικρό θετικό αριθμό, για παράδειγμα τον 0.000132. Μπορούμε να εξασφαλίσουμε ότι η απόσταση $\frac{1}{n}$ θα γίνει μικρότερη από τον 0.000132 αν ο n γίνει μεγαλύτερος από κάποιον κατάλληλο φυσικό; Με άλλα λόγια, ρωτάμε: *μεγαλύτερος από ποιόν φυσικό πρέπει να γίνει ο n ώστε η απόσταση $\frac{1}{n}$ να γίνει μικρότερη από τον* 0.000132; Αυτό είναι εύκολο: για να γίνει $\frac{1}{n} < 0.000132$ αρκεί να γίνει $n > \frac{1000000}{132} = 7575.75\ldots$. Ποιοί φυσικοί αριθμοί n είναι $> \frac{1000000}{132}$; Παρατηρούμε ότι ο φυσικός 7576 είναι $> \frac{1000000}{132}$ και, επομένως, αν ο n γίνει ≥ 7576, τότε η απόσταση $\frac{1}{n}$ θα γίνει < 0.000132. Ας πάρουμε, για δεύτερο παράδειγμα τον μικρό θετικό αριθμό 0.0000000000132. Με τους ίδιους συλλογισμούς βλέπουμε ότι, αν ο n γίνει ≥ 75757575758, τότε η απόσταση $\frac{1}{n}$ θα γίνει < 0.0000000000132. Αυτήν την διαδικασία μπορούμε, αν θέλουμε, να τήν επαναλάβουμε πολλές φορές: κάθε φορά θα επιλέγουμε έναν πολύ μικρό θετικό αριθμό (όπως τους 0.000132 και 0.0000000000132) και κατόπιν θα βρίσκουμε έναν κατάλληλο φυσικό (όπως τους 7576 και 75757575758). Δεν θέλουμε, όμως, κάτι τέτοιο. Αυτό που χρειάζεται είναι να αποδείξουμε ότι για *κάθε* θετικό αριθμό υπάρχει κάποιος αντίστοιχος κατάλληλος φυσικός. Οι θετικοί αριθμοί είναι άπειροι και, όσες φορές κι αν επαναλάβουμε την παραπάνω διαδικασία, ποτέ δεν θα τελειώσουμε. Γι αυτό πρέπει να θεωρήσουμε όχι συγκεκριμένους θετικούς αριθμούς αλλά τον *γενικό θετικό αριθμό* με ένα γενικό σύμβολο, για παράδειγμα το σύμβολο ϵ, και να αποδείξουμε ότι υπάρχει κάποιος αντίστοιχος κατάλληλος φυσικός, ας τόν συμβολίσουμε n_0, ώστε, αν ο n γίνει $\geq n_0$, τότε η απόσταση $\frac{1}{n}$ θα γίνει $< \epsilon$. Αυτό, όμως, είναι ακριβώς το περιεχόμενο της Αρχιμήδειας ιδιότητας: *για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει κάποιος φυσικός n_0 ώστε ο $\frac{1}{n_0}$ και, επομένως, όλοι οι $\frac{1}{n_0}, \frac{1}{n_0+1}, \frac{1}{n_0+2}, \ldots$ να είναι $< \epsilon$.*
Είναι φανερό (και από τα παραδείγματα με τους δύο συγκεκριμένους ϵ που εξετάσαμε) ότι η τιμή του n_0 εξαρτάται από την τιμή του ϵ. Μπορούμε να υπολογίσουμε έναν n_0 (συναρτήσει του ϵ) από τον οποίο και πέρα ισχύει $\frac{1}{n} < \epsilon$; Θα κάνουμε ό,τι κάναμε για τα συγκεκριμένα παραδείγματα. Γράφουμε την $\frac{1}{n} < \epsilon$ ισοδύναμα ως $n > \frac{1}{\epsilon}$ (δηλαδή, λύνουμε ως προς n) και χρησιμοποιούμε το εξής απλό λήμμα.

ΛΗΜΜΑ 2.1. *Αν $a \geq 0$, τότε ο $n_0 = [a] + 1$ είναι ο ελάχιστος φυσικός $n > a$. Αν $a < 0$, τότε ο $n_0 = 1$ είναι ο ελάχιστος φυσικός $n > a$.*

Απόδειξη. Προφανής. □

Για παράδειγμα: ο ελάχιστος φυσικός $n > -3$ είναι ο 1, ο ελάχιστος φυσικός $n > \frac{8}{3}$ είναι ο $3 = [\frac{8}{3}] + 1$ και ο ελάχιστος φυσικός $n > 2$ είναι και πάλι ο $3 = 2 + 1 = [2] + 1$.
Άρα (επειδή $\frac{1}{\epsilon} \geq 0$) ο n_0 που ψάχνουμε είναι ο $n_0 = [\frac{1}{\epsilon}] + 1$. Εργαζόμενοι με τον γενικό θετικό ϵ, (εκτός από το ότι αυτό είναι το σωστό) έχουμε καταφέρει να βρούμε και έναν γενικό τύπο για έναν κατάλληλο n_0 συναρτήσει του ϵ, οπότε για κάθε συγκεκριμένο ϵ μπορούμε να υπολογίζουμε αμέσως έναν αντίστοιχο κατάλληλο n_0.

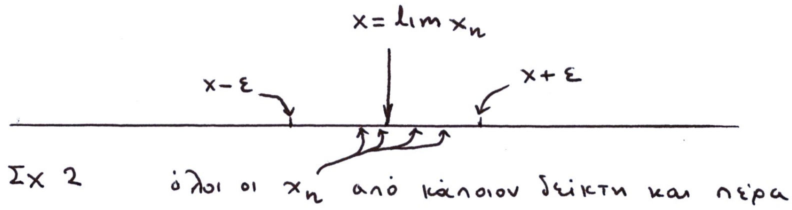
Βάσει της προηγούμενης συζήτησης, δίνουμε τον εξής γενικό ορισμό. Δείτε το σχήμα 2.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.6. *Λέμε ότι η ακολουθία (x_n)* **συγκλίνει** *στον αριθμό x ή ότι η (x_n)* **τείνει** *στον x ή ότι ο x είναι* **όριο** *της (x_n) αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $|x_n - x| < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Συνοπτικά: η (x_n) συγκλίνει στον x αν για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει τελικά $|x_n - x| < \epsilon$.*
Το ότι η (x_n) συγκλίνει στον x το συμβολίζουμε

$$x_n \to x \quad ή \quad \lim x_n = x \quad ή \quad \lim_{n\to+\infty} x_n = x.$$

Αν η (x_n) δεν συγκλίνει σε κανέναν αριθμό, λέμε ότι η (x_n) **αποκλίνει**.

Μπορούμε να πούμε, κάπως πιο παραστατικά, ότι *η ακολουθία (x_n) συγκλίνει στον x αν ο n-οστός όρος x_n πλησιάζει απεριόριστα τον x όταν ο n γίνεται κατάλληλα μεγάλος.*



Αξίζει να διατυπώσουμε τον προηγούμενο ορισμό με τα σύμβολα της μαθηματικής λογικής:

$$x_n \to x \;\Leftrightarrow\; \big[\; \forall \epsilon > 0 \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall n \in \mathbb{N} \;\; (n \ge n_0 \;\;\Rightarrow\;\; |x_n - x| < \epsilon) \;\big]$$

Για να αποδείξουμε ότι $x_n \to x$ θεωρούμε τον τυχόντα και γενικό $\epsilon > 0$ και προσπαθούμε να αποδείξουμε την ύπαρξη ενός n_0 (ο οποίος εξαρτάται από τον ϵ) τέτοιου ώστε

$$\text{το } n \ge n_0 \text{ συνεπάγεται } (\Rightarrow) \text{ το } |x_n - x| < \epsilon$$

ή, ισοδύναμα, ώστε

$$\text{το } |x_n - x| < \epsilon \text{ συνεπάγεται } \textit{από } (\Leftarrow) \text{ το } n \ge n_0.$$

Η ιδέα είναι να ξεκινήσουμε από τη σχέση $|x_n - x| < \epsilon$ και να περάσουμε σε μια επόμενη σχέση και από αυτήν να περάσουμε σε μια επόμενη σχέση και ούτω καθ' εξής μέχρι να φτάσουμε στην τελική σχέση $n \ge n_0$. Με άλλα λόγια: *να λύσουμε ως προς n την αρχική σχέση*. Το λογικό σχήμα έχει ως εξής:

$$|x_n - x| < \epsilon \;\;\Leftarrow\;\; P_1 \;\;\Leftarrow\;\; \cdots\cdots \;\;\Leftarrow\;\; P_m \;\;\Leftarrow\;\; n \ge n_0,$$

όπου $P_1, \dots, P_m$ είναι οι ενδιάμεσες σχέσεις. Κάθε φορά που περνάμε από μια προηγούμενη σχέση σε μια επόμενη σχέση πρέπει να προσέχουμε δύο πράγματα: η προηγούμενη σχέση να συνεπάγεται *από* την επόμενη σχέση και η επόμενη σχέση να είναι απλούστερη από την προηγούμενη σχέση. Πολλές φορές συμβαίνει δύο διαδοχικές σχέσεις να είναι ισοδύναμες, αλλά αυτό δεν πειράζει. Το να συνεπάγεται η προηγούμενη σχέση την επόμενη μας είναι αδιάφορο. Αυτό που μας ενδιαφέρει είναι να ισχύει οπωσδήποτε η αντίστροφη συνεπαγωγή.

Ας ξαναδούμε το παράδειγμα 2.2.1 πιο συνοπτικά.

Παράδειγμα 2.2.1. Θα αποδείξουμε ότι

$$\tfrac{1}{n} \to 0.$$

Έστω $\epsilon > 0$. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $|\frac{1}{n} - 0| < \epsilon$ για κάθε $n \ge n_0$. Ή, με άλλη διατύπωση, το $|\frac{1}{n} - 0| < \epsilon$ να συνεπάγεται από το $n \ge n_0$.
Τώρα, το $|\frac{1}{n} - 0| < \epsilon$ συνεπάγεται από (είναι ισοδύναμο με) το $\frac{1}{n} < \epsilon$ κι αυτό συνεπάγεται από (είναι ισοδύναμο με) το $n > \frac{1}{\epsilon}$. Με σύμβολα:

$$|\tfrac{1}{n} - 0| < \epsilon \;\;\Leftarrow\;\; \tfrac{1}{n} < \epsilon \;\;\Leftarrow\;\; n > \tfrac{1}{\epsilon}.$$

Τώρα, το θεώρημα 1.1 αποδεικνύει ότι *πράγματι υπάρχει* n_0 ώστε $n_0 > \frac{1}{\epsilon}$. Φυσικά, τότε η ανισότητα $n > \frac{1}{\epsilon}$ ισχύει όχι μόνο για τον n_0 αλλά και για κάθε $n \ge n_0$. Άρα υπάρχει n_0 ώστε από το $n \ge n_0$ να συνεπάγεται το $n > \frac{1}{\epsilon}$ και από αυτό να συνεπάγεται το $|\frac{1}{n} - 0| < \epsilon$. Με σύμβολα:

$$n \ge n_0 \;\;\Rightarrow\;\; n > \tfrac{1}{\epsilon} \;\;\Rightarrow\;\; \tfrac{1}{n} < \epsilon \;\;\Rightarrow\;\; |\tfrac{1}{n} - 0| < \epsilon.$$

Μπορούμε (αν και δεν είναι υποχρεωτικό) να βρούμε *συγκεκριμένο* n_0. Πράγματι, επειδή $\frac{1}{\epsilon} \ge 0$, ο $n_0 = [\frac{1}{\epsilon}] + 1$ είναι ο ελάχιστος $n > \frac{1}{\epsilon}$. Άρα, με αυτόν τον n_0 ή και με οποιονδήποτε μεγαλύτερο n_0, ισχύει $|\frac{1}{n} - 0| < \epsilon$ για κάθε $n \ge n_0$.

Παράδειγμα 2.2.3. Θα αποδείξουμε ότι η σταθερή ακολουθία (c) συγκλίνει στον c. Δηλαδή

$$c \to c.$$

Έστω $\epsilon > 0$. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει n_0 ώστε το $|c - c| < \epsilon$ να συνεπάγεται από το $n \geq n_0$. Το $|c-c| < \epsilon$ συνεπάγεται από (είναι ισοδύναμο με) το $0 < \epsilon$. Προφανώς, το $0 < \epsilon$ ισχύει για κάθε n (ακριβώς επειδή είναι σωστό και επειδή είναι ανεξάρτητο του n). Επομένως, με οποιονδήποτε n_0 (για παράδειγμα, τον $n_0 = 1$), ισχύει $|c - c| < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$.

Παράδειγμα 2.2.4. Θα αποδείξουμε ότι η ακολουθία $((-1)^{n-1})$ δεν συγκλίνει σε κανέναν αριθμό. Έστω (για να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι η $((-1)^{n-1})$ συγκλίνει σε κάποιον x. Τότε για *κάθε* $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε από το $n \geq n_0$ να συνεπάγεται το $|(-1)^{n-1} - x| < \epsilon$. Όμως, όποιος κι αν είναι ο n_0, υπάρχουν *άρτιοι και περιττοί* $n \geq n_0$. Άρα, από τους άρτιους $n \geq n_0$ συνεπάγεται $|-1-x| < \epsilon$ και από τους περιττούς $n \geq n_0$ συνεπάγεται $|1 - x| < \epsilon$. Το $|-1-x| < \epsilon$ ισοδυναμεί με το $-1 \in (x - \epsilon, x + \epsilon)$ και το $|1 - x| < \epsilon$ ισοδυναμεί με το $1 \in (x - \epsilon, x + \epsilon)$. Άρα, για κάθε $\epsilon > 0$ οι -1, 1 ανήκουν και οι δύο στο διάστημα $(x - \epsilon, x + \epsilon)$. Αυτό, όμως, είναι αδύνατο αν $0 < \epsilon \leq 1$, διότι τότε το συγκεκριμένο ανοικτό διάστημα έχει μήκος ≤ 2, και καταλήγουμε σε άτοπο.

Παράδειγμα 2.2.5. Θα αποδείξουμε ότι $\frac{(-1)^{n-1}}{n} \to 0$.
Έστω $\epsilon > 0$. Το $\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n} - 0\right| < \epsilon$ συνεπάγεται από (είναι ισοδύναμο με) το $\frac{1}{n} < \epsilon$ και αυτό συνεπάγεται από (είναι ισοδύναμο με) το $n > \frac{1}{\epsilon}$. Τώρα, γνωρίζουμε ότι υπάρχει $n_0 > \frac{1}{\epsilon}$. Με έναν τέτοιο n_0, από το $n \geq n_0$ συνεπάγεται το $n > \frac{1}{\epsilon}$ και από αυτό συνεπάγεται το $|\frac{1}{n} - 0| < \epsilon$.

Παράδειγμα 2.2.6. Θα αποδείξουμε ότι $\frac{n^2+1}{2n^3-n} \to 0$.
Έστω $\epsilon > 0$. Το $\left|\frac{n^2+1}{2n^3-n} - 0\right| < \epsilon$ συνεπάγεται από (είναι ισοδύναμο με) το $\frac{n^2+1}{2n^3-n} < \epsilon$ και αυτό συνεπάγεται από (είναι ισοδύναμο με) το $2n^3 - n > \frac{1}{\epsilon}(n^2 + 1)$. Τώρα, αντιλαμβανόμαστε ότι η τελευταία ανισότητα είναι δύσκολο να λυθεί ως προς n, οπότε κάνουμε κάτι λίγο διαφορετικό. Παρατηρούμε (μεγαλώνοντας τον αριθμητή και μικραίνοντας τον παρονομαστή) ότι

$$\tfrac{n^2+1}{2n^3-n} \leq \tfrac{n^2+n^2}{2n^3-n^3} = \tfrac{2}{n},$$

οπότε το $\frac{n^2+1}{2n^3-n} < \epsilon$ συνεπάγεται από (όμως, *δεν είναι ισοδύναμο* με) το $\frac{2}{n} < \epsilon$ και αυτό συνεπάγεται από (είναι ισοδύναμο με) το $n > \frac{2}{\epsilon}$. Και τελειώνουμε όπως σε προηγούμενα παραδείγματα. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει $n_0 > \frac{2}{\epsilon}$. Με έναν τέτοιον n_0, από το $n \geq n_0$ συνεπάγεται το $n > \frac{2}{\epsilon}$ και από αυτό συνεπάγεται το $\left|\frac{n^2+1}{2n^3-n} - 0\right| < \epsilon$.
Προσέξτε την "αντικατάσταση" του $\frac{n^2+1}{2n^3-n}$ με το μεγαλύτερό του, *αλλά απλούστερο*, $\frac{2}{n}$. Αυτό αποτελεί συγκεκριμένη υλοποίηση μιας γενικότερης τεχνικής, πολύ χρήσιμης σε τέτοιες καταστάσεις, η οποία βασίζεται στο ότι:

$$\text{Αν } \ a \leq b, \ \text{ τότε το } \ a < \epsilon \ \text{ συνεπάγεται από το } \ b < \epsilon.$$

Η τεχνική συνίσταται στη μετάβαση από την ανισότητα $a < \epsilon$ στην ανισότητα $b < \epsilon$. Εφαρμόζουμε αυτήν την τεχνική, προσέχοντας ο b να είναι μεγαλύτερος ή ίσος του a αλλά και απλούστερος από τον a.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.7. *Λέμε ότι η ακολουθία (x_n)* **αποκλίνει** *στο $+\infty$ ή ότι η (x_n)* **τείνει** *στο $+\infty$ ή ότι το $+\infty$ είναι* **όριο** *της (x_n) αν για κάθε $M > 0$ υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $x_n > M$ για κάθε $n \geq n_0$.*
Πιο συνοπτικά: η (x_n) αποκλίνει στο $+\infty$ αν για κάθε $M > 0$ ισχύει τελικά $x_n > M$.
Αν η (x_n) αποκλίνει στο $+\infty$, γράφουμε

$$x_n \to +\infty \quad \text{ή} \quad \lim x_n = +\infty \quad \text{ή} \quad \lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty.$$

Επίσης, λέμε ότι η ακολουθία (x_n) **αποκλίνει** *στο $-\infty$ ή ότι η (x_n)* **τείνει** *στο $-\infty$ ή ότι το $-\infty$ είναι* **όριο** *της (x_n) αν για κάθε $M > 0$ υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $x_n < -M$ για κάθε $n \geq n_0$.*

Πιο συνοπτικά: η (x_n) αποκλίνει στο $-\infty$ αν για κάθε $M > 0$ ισχύει τελικά $x_n < -M$.
Αν η (x_n) αποκλίνει στο $-\infty$, γράφουμε

$$x_n \to -\infty \quad \text{ή} \quad \lim x_n = -\infty \quad \text{ή} \quad \lim_{n\to+\infty} x_n = -\infty.$$

Μπορούμε να πούμε, πιο παραστατικά, ότι: *η ακολουθία (x_n) αποκλίνει στο $+\infty$ αν ο n-οστός όρος x_n πλησιάζει απεριόριστα το $+\infty$ όταν ο n γίνεται κατάλληλα μεγάλος.* Ανάλογη διατύπωση υπάρχει για την απόκλιση στο $-\infty$.

Ας διατυπώσουμε και αυτούς τους ορισμούς με τα σύμβολα της μαθηματικής λογικής:

$$x_n \to +\infty \;\Leftrightarrow\; \big[\; \forall M > 0 \;\exists n_0 \in \mathbb{N} \;\forall n \in \mathbb{N} \;(n \ge n_0 \;\Rightarrow\; x_n > M) \;\big]$$

$$x_n \to -\infty \;\Leftrightarrow\; \big[\; \forall M > 0 \;\exists n_0 \in \mathbb{N} \;\forall n \in \mathbb{N} \;(n \ge n_0 \;\Rightarrow\; x_n < -M) \;\big]$$

Παράδειγμα 2.2.7. Θα αποδείξουμε ότι

$$n \to +\infty.$$

Έστω $M > 0$. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει n_0 ώστε το $n > M$ να συνεπάγεται από το $n \ge n_0$.
Η κατάσταση είναι ξεκάθαρη. Σύμφωνα με το θεώρημα 1.1, υπάρχει $n_0 > M$. Προφανώς, η ανισότητα $n > M$ ισχύει όχι μόνο για τον n_0 αλλά και για κάθε $n \ge n_0$. Άρα υπάρχει n_0 ώστε από το $n \ge n_0$ να συνεπάγεται το $n > M$.
Μπορούμε (χωρίς να είναι υποχρεωτικό) να θεωρήσουμε τον $n_0 = [M] + 1$ και βλέπουμε ότι, με αυτόν τον n_0 ή και με οποιονδήποτε μεγαλύτερο n_0, ισχύει $n > M$ για κάθε $n \ge n_0$.

Παράδειγμα 2.2.8. Θα αποδείξουμε ότι η ακολουθία $((-1)^{n-1}n)$ ή $(1, -2, 3, -4, 5, -6, \dots)$ ούτε αποκλίνει στο $+\infty$ ούτε αποκλίνει στο $-\infty$.

Έστω (για να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι η ακολουθία αποκλίνει στο $+\infty$. Τότε για κάθε $M > 0$ υπάρχει n_0 ώστε το $(-1)^{n-1}n > M$ να συνεπάγεται από το $n \ge n_0$. Όμως, όποιος κι αν είναι ο n_0, υπάρχουν άρτιοι και περιττοί $n \ge n_0$. Τότε από τους άρτιους $n \ge n_0$ συνεπάγεται $-n > M$ και από τους περιττούς $n \ge n_0$ συνεπάγεται $n > M$. Τώρα, το $-n > M$ είναι, προφανώς, αδύνατο, οπότε καταλήγουμε σε άτοπο.
Με τον ίδιο τρόπο, το ότι η ακολουθία αποκλίνει στο $-\infty$ οδηγεί σε άτοπο.

Παράδειγμα 2.2.9. Θα αποδείξουμε ότι $\frac{n^3+n}{n^2+3} \to +\infty$.

Έστω $M > 0$. Το $\frac{n^3+n}{n^2+3} > M$ συνεπάγεται από το $n^3+n > Mn^2+3M$. Επειδή η ανισότητα αυτή είναι δύσκολο να λυθεί ως προς n, επιστρέφουμε στην $\frac{n^3+n}{n^2+3} > M$ και αντικαθιστούμε το $\frac{n^3+n}{n^2+3}$ με κάτι *μικρότερο*. Παρατηρούμε (μικραίνοντας τον αριθμητή και μεγαλώνοντας τον παρονομαστή) ότι

$$\tfrac{n^3+n}{n^2+3} \ge \tfrac{n^3}{n^2+3n^2} = \tfrac{n}{4}.$$

Άρα το $\frac{n^3+n}{n^2+3} > M$ συνεπάγεται από το $\frac{n}{4} > M$ και αυτό συνεπάγεται από το $n > 4M$. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει n_0 ώστε $n_0 > 4M$ και, τότε, με έναν τέτοιο n_0, από το $n \ge n_0$ συνεπάγεται το $n > 4M$ και από αυτό συνεπάγεται το $\frac{n^3+n}{n^2+3} > M$.
Προσέξτε την "αντικατάσταση" του $\frac{n^3+n}{n^2+3}$ με τον μικρότερό του, *αλλά απλούστερο*, $\frac{n}{4}$. Αυτό είναι συγκεκριμένο παράδειγμα μιας γενικότερης τεχνικής, η οποία βασίζεται στο ότι:

$$\text{Αν } \; a \ge b, \;\; \text{τότε το } \; a > M \; \text{ συνεπάγεται από το } \; b > M.$$

Η τεχνική συνίσταται στη μετάβαση από την ανισότητα $a > M$ στην ανισότητα $b > M$. Εφαρμόζουμε αυτήν την τεχνική, προσέχοντας ο b να είναι μικρότερος ή ίσος του a αλλά και απλούστερος από τον a.[3]

[3] Παρατηρήστε ότι συναντήσαμε την ίδια ακριβώς τεχνική στο παράδειγμα 2.2.6.

Χρησιμοποιούμε τη λέξη “όριο” και τα σύμβολα $\to$, $\lim$, $\lim_{n\to+\infty}$ σε όλες τις περιπτώσεις που η ακολουθία έχει όριο, είτε συγκλίνει σε αριθμό είτε αποκλίνει σε ένα από τα $\pm\infty$. Χρησιμοποιούμε το ρήμα “συγκλίνει” όταν το όριο είναι αριθμός και το ρήμα “αποκλίνει” σε κάθε άλλη περίπτωση, δηλαδή όταν το όριο δεν υπάρχει ή υπάρχει και είναι ένα από τα $\pm\infty$. Όταν γράφουμε $\lim_{n\to+\infty} x_n$, χωρίς άλλη διευκρίνηση, εννοούμε ότι το όριο είναι στοιχείο του $\overline{\mathbb{R}}$.

Τώρα θα ξαναδιατυπώσουμε τους ορισμούς του ορίου ακολουθίας με διαφορετικό τρόπο, αφού εισαγάγουμε την έννοια της *περιοχής*.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.8. *Έστω $\epsilon > 0$. Το διάστημα $(x-\epsilon, x+\epsilon)$ ονομάζεται ϵ-**περιοχή** του x.*
*Το $(\frac{1}{\epsilon}, +\infty]$ ονομάζεται ϵ-**περιοχή** του $+\infty$ και το $[-\infty, -\frac{1}{\epsilon})$ ονομάζεται ϵ-**περιοχή** του $-\infty$.*
Συμβολίζουμε

$$N_x(\epsilon) = (x-\epsilon, x+\epsilon), \qquad N_{+\infty}(\epsilon) = (\tfrac{1}{\epsilon}, +\infty], \qquad N_{-\infty}(\epsilon) = [-\infty, -\tfrac{1}{\epsilon}).$$

Μέσω των αντίστροφων τύπων $M = \frac{1}{\epsilon}$, $\epsilon = \frac{1}{M}$ βλέπουμε ότι μπορούμε να γράφουμε τις περιοχές του $+\infty$ είτε με τη μορφή $(\frac{1}{\epsilon}, +\infty]$ είτε με τη μορφή $(M, +\infty]$ και τις περιοχές του $-\infty$ να τις γράφουμε είτε με τη μορφή $[-\infty, -\frac{1}{\epsilon})$ είτε με τη μορφή $[-\infty, -M)$.

Είναι σημαντικό να κατανοήσουμε ότι:

Όταν ο ϵ μικραίνει και το $x \in \overline{\mathbb{R}}$ μένει αμετάβλητο, τότε η αντίστοιχη περιοχή $N_x(\epsilon)$ μικραίνει.

Ο ϵ αποτελεί το “μέτρο” της εγγύτητας στο x των στοιχείων της περιοχής $N_x(\epsilon)$. Όσο πιο μικρός είναι ο ϵ τόσο πιο μικρή είναι η $N_x(\epsilon)$ και τόσο πιο κοντά στο x είναι τα στοιχεία της $N_x(\epsilon)$. Μάλιστα, μπορούμε να δούμε εύκολα τα εξής.

Αν $l < x$, δηλαδή το x (αριθμός ή $+\infty$) είναι δεξιά του l, τότε μπορούμε να βρούμε έναν αρκετά μικρό $\epsilon > 0$ ώστε ολόκληρη η περιοχή $N_x(\epsilon)$ να είναι δεξιά του l.
Συμμετρικά, αν $x < u$, δηλαδή το x (αριθμός ή $-\infty$) είναι αριστερά του u, τότε μπορούμε να βρούμε έναν αρκετά μικρό $\epsilon > 0$ ώστε ολόκληρη η περιοχή $N_x(\epsilon)$ να είναι αριστερά του u.
Και, τέλος, αν $l < x < u$, δηλαδή ο x (αριθμός) είναι ανάμεσα στους l, u, τότε μπορούμε να βρούμε έναν αρκετά μικρό $\epsilon > 0$ ώστε ολόκληρη η περιοχή $N_x(\epsilon)$ να είναι ανάμεσα στους l, u.

Παρατηρήστε ότι η ανισότητα $|x_n - x| < \epsilon$ στον ορισμό του $x_n \to x$ γράφεται, ισοδύναμα, $x - \epsilon < x_n < x + \epsilon$ ή, ισοδύναμα, $x_n \in (x-\epsilon, x+\epsilon)$ ή, ισοδύναμα, $x_n \in N_x(\epsilon)$.
Ομοίως, οι ανισότητες $x_n > M$ και $x_n < -M$ που αναφέρονται στους ορισμούς των $x_n \to \pm\infty$ γράφονται, ισοδύναμα, $x_n \in (M, +\infty]$ και $x_n \in [-\infty, -M)$ ή, ισοδύναμα, $x_n \in N_{+\infty}(\epsilon)$ και $x_n \in N_{-\infty}(\epsilon)$, όπου $\epsilon = \frac{1}{M}$.[4]

Μετά από αυτήν την παρατήρηση μπορούμε να διατυπώσουμε *και τους τρεις* ορισμούς ορίων ως *έναν ενιαίο* ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.9. *Έστω $x \in \overline{\mathbb{R}}$. Τότε $x_n \to x$ αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $x_n \in N_x(\epsilon)$ για κάθε $n \geq n_0$ ή, ισοδύναμα, αν για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει τελικά $x_n \in N_x(\epsilon)$.*

Βλέπουμε, λοιπον, ότι με την έννοια της περιοχής μπορούμε να ενοποιήσουμε τους τρεις ορισμούς ορίων σε έναν. Αν, σε μια συγκεκριμένη κατάσταση, η φύση των επιχειρημάτων δεν απαιτεί να διακρίνουμε περιπτώσεις ως προς το αν ένα όριο είναι αριθμός ή ένα από τα $\pm\infty$, τότε θα χρησιμοποιούμε τις περιοχές.[5]

Ασκήσεις.

2.2.1. Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς, αποδείξτε τα όρια: $\frac{1}{n+8} \to 0$, $\frac{3n+1}{2n+5} \to \frac{3}{2}$, $\frac{1}{\sqrt{n}+5} \to 0$, $2n^2 - n \to +\infty$, $\frac{n}{2n^2-1} \to 0$, $n^2 - 7n \to +\infty$, $\frac{n^4-n^2+1}{n^2+3} \to +\infty$, $2^n - 2^{n/2} \to +\infty$, $\frac{1}{5^n-4^n} \to 0$.

[4] Είναι δεδομένο ότι οι όροι μιας ακολουθίας είναι αριθμοί, οπότε δεν κινδυνεύουμε να θεωρήσουμε ότι ο x_n μπορεί να πάρει την τιμή $+\infty$ ή την τιμή $-\infty$ όταν γράφουμε $x_n \in N_{+\infty}(\epsilon) = (\frac{1}{\epsilon}, +\infty]$ ή $x_n \in N_{-\infty}(\epsilon) = [-\infty, -\frac{1}{\epsilon})$.

[5] Κάπως πιο σημαντικό ρόλο θα παίξουν οι περιοχές στο επόμενο κεφάλαιο σε σχέση με τα όρια συναρτήσεων, όπου οι περιπτώσεις ορίων είναι πολύ περισσότερες.

2.2.2. Αποδείξτε τους ισχυρισμούς μετά από τον ορισμό 2.8.

2.2.3. Έστω $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$, $x \neq y$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε $N_x(\epsilon) \cap N_y(\epsilon) = \emptyset$.

2.2.4. Έστω $x \in \overline{\mathbb{R}}$.
Αποδείξτε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει φυσικός n ώστε $N_x(\frac{1}{n}) \subseteq N_x(\epsilon)$.
Αποδείξτε ότι $\bigcap_{\epsilon>0} N_x(\epsilon) = \{x\}$ ή, με άλλα λόγια, το μοναδικό στοιχείο που ανήκει σε όλες τις περιοχές του x είναι το ίδιο το x.
Αποδείξτε ότι $\bigcap_{n=1}^{+\infty} N_x(\frac{1}{n}) = \{x\}$.

2.2.5. Έστω $x_n \to x$. Για κάθε $\epsilon > 0$ έστω $n_0(\epsilon)$ ο *ελάχιστος* n_0 ώστε να ισχύει $x_n \in N_x(\epsilon)$ για κάθε $n \geq n_0$. Αποδείξτε ότι, αν $0 < \epsilon' < \epsilon$, τότε $n_0(\epsilon') \geq n_0(\epsilon)$.

2.2.6. [6] Αποδείξτε ότι η ακολουθία (x_n) *δεν συγκλίνει* στο x αν και μόνο αν υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε να ισχύει $x_n \notin N_x(\epsilon)$ για άπειρους n.

2.2.7. [7] Έστω $\epsilon_0 > 0$. Αποδείξτε ότι $x_n \to x$ αν και μόνο αν για κάθε ϵ με $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ ισχύει τελικά $x_n \in N_x(\epsilon)$.

2.2.8. Έστω ότι για την ακολουθία (x_n) και τον x ισχύει ότι: υπάρχει n_0 ώστε για κάθε $\epsilon > 0$ να ισχύει $|x_n - x| < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Να αντιπαραβάλετε με τον ορισμό του $x_n \to x$. Αποδείξτε ότι η (x_n) είναι τελικά σταθερή.

2.2.9. [α] Έστω ότι το σύνολο των όρων της ακολουθίας (x_n) είναι πεπερασμένο. Αποδείξτε ότι, αν $x_n \to x$, τότε η (x_n) είναι τελικά σταθερή και ότι ο x είναι ένας από τους όρους της.
[β] Έστω ακολουθία (x_n) ώστε να ισχύει $x_n \in \mathbb{Z}$ για κάθε n. Αν $x_n \to x$, αποδείξτε ότι η (x_n) είναι τελικά σταθερή και ότι $x \in \mathbb{Z}$.

2.2.10. Έστω x και ακολουθία (x_n).
[α] Προφανώς, αν για *κάποιον* $\epsilon > 0$ ισχύει τελικά $|x_n - x| < \epsilon$, τότε για *τον ίδιο* ϵ ισχύει τελικά $|x_n - x| \leq \epsilon$. Το αντίστροφο δεν αληθεύει. Παράδειγμα: $x_n = (-1)^{n-1}$, $x = 0$, $\epsilon = 1$.
Αποδείξτε τον εξής ισοδύναμο ορισμό ορίου: $x_n \to x$ αν και μόνο αν για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει τελικά $|x_n - x| \leq \epsilon$.
[β] Προφανώς, αν για *κάποιον* $M > 0$ ισχύει τελικά $x_n > M$, τότε για *τον ίδιο* M ισχύει τελικά $x_n \geq M$. Το αντίστροφο δεν αληθεύει. Παράδειγμα: $x_n = 1$, $M = 1$.
Αποδείξτε τον εξής ισοδύναμο ορισμό ορίου: $x_n \to +\infty$ αν και μόνο αν για κάθε $M > 0$ ισχύει τελικά $x_n \geq M$.

2.3 Ιδιότητες σχετικές με όρια ακολουθιών.

Η πρόταση 2.1 λέει ότι *το αν έχει όριο ή όχι μια ακολουθία καθώς και η τιμή του ορίου της, στην περίπτωση που αυτή έχει όριο, δεν εξαρτώνται από τους αρχικούς όρους της.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.1. *Έστω δύο ακολουθίες οι οποίες ταυτίζονται από κάποιους όρους τους και πέρα. Αν η μία από τις δύο ακολουθίες έχει κάποιο όριο, τότε και η άλλη έχει το ίδιο όριο.*

Απόδειξη. Το ότι οι ακολουθίες (x_n), (y_n) ταυτίζονται από κάποιους όρους τους και πέρα σημαίνει ότι υπάρχουν k_0, m_0 ώστε να ισχύει

$$x_{k_0} = y_{m_0}, \quad x_{k_0+1} = y_{m_0+1}, \quad x_{k_0+2} = y_{m_0+2}, \ \ldots \ . \tag{2.1}$$

[6] Η αναλυτική διατύπωση της *άρνησης* του ορίου.

[7] Ισοδύναμος ορισμός ορίου. Το συμπέρασμα είναι ότι *στον ορισμό του ορίου μπορούμε να περιοριστούμε σε $\epsilon > 0$ οι οποίοι δεν ξεπερνούν έναν αυθαίρετα προεπιλεγμένο $\epsilon_0 > 0$.*

Υποθέτουμε ότι $x_n \to a \in \overline{\mathbb{R}}$.
Έστω $\epsilon > 0$. Τότε ισχύει $x_n \in N_a(\epsilon)$ από κάποιον δείκτη και πέρα. Λόγω της (2.1) είναι προφανές ότι ισχύει και $y_n \in N_a(\epsilon)$ από κάποιον δείκτη και πέρα. Πράγματι, έστω ότι ισχύει $x_n \in N_a(\epsilon)$ από τον n_0 και πέρα. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.
Πρώτη περίπτωση. Αν $n_0 \leq k_0$, τότε ισχύει $x_n \in N_a(\epsilon)$ από τον k_0 και πέρα και, επομένως, ισχύει $y_n \in N_a(\epsilon)$ από τον m_0 και πέρα.
Δεύτερη περίπτωση. Αν $n_0 > k_0$, τότε γράφουμε $n_0 = k_0 + p$ και βλέπουμε αμέσως ότι ισχύει $y_n \in N_a(\epsilon)$ από τον $m_0 + p$ και πέρα.
Άρα $y_n \to a$. □

Παράδειγμα 2.3.1. Δείτε τις ακολουθίες $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots)$, $(-2, 5, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots)$. Έχουμε αποδείξει ότι η πρώτη συγκλίνει στον 0. Τώρα παρατηρούμε ότι οι δύο ακολουθίες ταυτίζονται, ξεκινώντας από τον τέταρτο όρο της πρώτης και από τον τρίτο όρο της δεύτερης. Άρα και η δεύτερη ακολουθία συγκλίνει στον 0.

Παράδειγμα 2.3.2. Η ακολουθία (x_n) γράφεται $(x_1, x_2, x_3, \dots)$. Η ακολουθία (x_{n+1}) γράφεται $(x_2, x_3, x_4, \dots)$ και η ακολουθία (x_{n+2}) γράφεται $(x_3, x_4, x_5, \dots)$. Γενικότερα, η ακολουθία (x_{n+m}) γράφεται $(x_{1+m}, x_{2+m}, x_{3+m}, \dots)$. Σύμφωνα με την πρόταση 2.1,

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x \quad \text{αν και μόνο αν} \quad \lim_{n\to+\infty} x_{n+m} = x.$$

Για παράδειγμα: $\frac{1}{n+3} \to 0$ επειδή $\frac{1}{n} \to 0$.

2.3.1 Από ανισότητες ορίων σε ανισότητες όρων.

Η πρόταση 2.2 είναι απλή αλλά βασική: *συμπεραίνει ανισοτικές σχέσεις για τους όρους μιας ακολουθίας από ανάλογες ανισοτικές σχέσεις για το όριο της ακολουθίας.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.2. *Έστω $x_n \to x \in \overline{\mathbb{R}}$ και αριθμοί u, l.*
[α] *Αν $x > u$, τότε ισχύει τελικά $x_n > u$.*
[β] *Αν $x < l$, τότε ισχύει τελικά $x_n < l$.*
[γ] *Αν $u < x < l$, τότε ισχύει τελικά $u < x_n < l$.*

Απόδειξη. [α] Θεωρούμε έναν $\epsilon > 0$ αρκετά μικρό ώστε ολόκληρη η περιοχή $N_x(\epsilon)$ να είναι δεξιά του u. Επειδή ισχύει τελικά $x_n \in N_x(\epsilon)$, συνεπάγεται ότι ισχύει τελικά $x_n > u$.
[β] Θεωρούμε έναν $\epsilon > 0$ αρκετά μικρό ώστε ολόκληρη η περιοχή $N_x(\epsilon)$ να είναι αριστερά του l. Επειδή ισχύει τελικά $x_n \in N_x(\epsilon)$, συνεπάγεται ότι ισχύει τελικά $x_n < l$.
[γ] Θεωρούμε έναν $\epsilon > 0$ αρκετά μικρό ώστε ολόκληρη η περιοχή $N_x(\epsilon)$ να είναι ανάμεσα στους u, l. Επειδή ισχύει τελικά $x_n \in N_x(\epsilon)$, συνεπάγεται ότι ισχύει τελικά $u < x_n < l$.
Με δεύτερο τρόπο. Από τα [α] και [β] συνεπάγεται ότι ισχύει τελικά $x_n > u$ και ότι ισχύει τελικά $x_n < l$. Άρα ισχύει τελικά $x_n > u$ και $x_n < l$ και, επομένως, $u < x_n < l$. □

Η πρόταση 2.3 εκφράζει τη **μοναδικότητα του ορίου**. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να μιλάμε για **το** όριο μιας ακολουθίας.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.3. *Καμιά ακολουθία δεν έχει δύο διαφορετικά όρια.*

Απόδειξη. Έστω ότι η ακολουθία (x_n) έχει δύο διαφορετικά όρια a, b.
Τότε μπορούμε να βρούμε έναν $\epsilon > 0$ αρκετά μικρό ώστε οι περιοχές $N_a(\epsilon)$ και $N_b(\epsilon)$ να μην έχουν κανένα κοινό στοιχείο. Τότε ισχύει τελικά $x_n \in N_a(\epsilon)$ και, επίσης, ισχύει τελικά $x_n \in N_b(\epsilon)$. Άρα ισχύει τελικά $x_n \in N_a(\epsilon)$ και $x_n \in N_b(\epsilon)$ και καταλήγουμε σε άτοπο.
Με δεύτερο τρόπο. Υποθέτουμε πάλι ότι η (x_n) έχει δύο διαφορετικά όρια a, b και θεωρούμε έναν οποιονδήποτε c ανάμεσα στους a, b. Από τα [α] και [β] της πρότασης 2.2 συνεπάγεται ότι ισχύει τελικά $x_n < c$ και ότι ισχύει τελικά $x_n > c$. Άρα ισχύει τελικά $x_n < c$ και $x_n > c$ και καταλήγουμε πάλι σε άτοπο. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.4. [α] *Αν $x_n \to x \in \mathbb{R}$, τότε η (x_n) είναι φραγμένη.*

[β] *Αν $x_n \to +\infty$, τότε η (x_n) είναι κάτω φραγμένη αλλά όχι άνω φραγμένη.*

[γ] *Αν $x_n \to -\infty$, τότε η (x_n) είναι άνω φραγμένη αλλά όχι κάτω φραγμένη.*

Απόδειξη. [α] Θεωρούμε μια οποιαδήποτε περιοχή του x, για παράδειγμα την $(x-1, x+1)$. Τότε όλοι οι όροι της (x_n) από κάποιον δείκτη n_0 και πέρα ανήκουν στο διάστημα $(x-1, x+1)$. Τώρα, από τους όρους της (x_n) μπορεί να βρίσκονται εκτός του διαστήματος $(x-1, x+1)$ μόνο κάποιοι από τους $x_1, \ldots, x_{n_0-1}$. Επειδή το πλήθος τους είναι πεπερασμένο, μπορούμε να μεγαλώσουμε, αν χρειάζεται, το διάστημα $(x-1, x+1)$ και να βρούμε ένα διάστημα $[l, u]$ το οποίο περιέχει *όλους* τους όρους της (x_n). Άρα η (x_n) είναι φραγμένη.

[β] Θεωρούμε μια οποιαδήποτε περιοχή του $+\infty$, για παράδειγμα την $(1, +\infty]$. Τότε όλοι οι όροι της (x_n) από κάποιον δείκτη n_0 και πέρα ανήκουν στο διάστημα $(1, +\infty]$. Άρα από τους όρους της (x_n) μπορεί να βρίσκονται εκτός του διαστήματος $(1, +\infty]$ μόνο κάποιοι από τους $x_1, \ldots, x_{n_0-1}$. Επειδή το πλήθος τους είναι πεπερασμένο, μπορούμε να μεγαλώσουμε, αν χρειάζεται, το διάστημα $(1, +\infty]$ και να βρούμε ένα διάστημα $[l, +\infty]$ το οποίο περιέχει *όλους* τους όρους της (x_n). Άρα η (x_n) είναι κάτω φραγμένη.
Τέλος, για κάθε l ισχύει τελικά $x_n > l$. Άρα κανένας l δεν είναι άνω φράγμα της (x_n), οπότε η (x_n) δεν είναι άνω φραγμένη.

[γ] Όπως στο [β]. □

Παράδειγμα 2.3.3. Η ακολουθία $((-1)^{n-1})$ είναι φραγμένη αλλά δεν συγκλίνει. Άρα δεν αληθεύει το αντίστροφο στην πρόταση 2.4[α].

Παράδειγμα 2.3.4. Γνωρίζουμε ότι η ακολουθία $\big(\frac{(1+(-1)^{n-1})n}{2}\big)$, δηλαδή η $(1, 0, 3, 0, 5, 0, 7, \ldots)$, είναι κάτω φραγμένη και όχι άνω φραγμένη. Όμως, η ακολουθία δεν αποκλίνει στο $+\infty$, διότι τότε θα έπρεπε, σύμφωνα με την πρόταση 2.2, να είναι τελικά οι όροι της > 1, το οποίο δεν είναι σωστό. Ομοίως, η ακολουθία $(-1, 0, -3, 0, -5, 0, -7, \ldots)$ είναι άνω φραγμένη, όχι κάτω φραγμένη και δεν αποκλίνει στο $-\infty$. Άρα τα αντίστροφα στην πρόταση 2.4[β,γ] δεν αληθεύουν.

2.3.2 Από ανισότητες όρων σε ανισότητες ορίων.

Η πρόταση 2.5 είναι κι αυτή απλή αλλά βασική: *συμπεραίνει ανισοτικές σχέσεις για το όριο μιας ακολουθίας από ανάλογες ανισοτικές σχέσεις για τους όρους της ακολουθίας.* Τα πρώτα δύο συμπεράσματα της πρότασης 2.5 είναι ακριβώς ισοδύναμα με τα πρώτα δύο συμπεράσματα της πρότασης 2.2. Τα αναφέρουμε σε ξεχωριστή πρόταση με τη νέα μορφή τους, διότι με αυτήν τη μορφή προκύπτει πολλές φορές η ανάγκη εφαρμογής τους. Το τρίτο συμπέρασμα της πρότασης 2.5 αποτελεί ένα χρήσιμο κριτήριο μη-ύπαρξης ορίου: *αν δύο συγκεκριμένοι αριθμοί χωρίζουν κάποιους άπειρους όρους μιας ακολουθίας από κάποιους άλλους άπειρους όρους της ίδιας ακολουθίας, τότε η ακολουθία δεν έχει όριο.*[8]

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.5. [α] *Αν ισχύει $x_n \geq l$ για άπειρους n και $x_n \to x \in \overline{\mathbb{R}}$, τότε $x \geq l$.*

[β] *Αν ισχύει $x_n \leq u$ για άπειρους n και $x_n \to x \in \overline{\mathbb{R}}$, τότε $x \leq u$.*

[γ] *Αν $u < l$ και ισχύει $x_n \leq u$ για άπειρους n και $x_n \geq l$ για άπειρους n, τότε η (x_n) δεν έχει όριο.*

Απόδειξη. [α] Αν ήταν $x < l$, τότε, σύμφωνα με την πρόταση 2.2, θα ίσχυε τελικά $x_n < l$, οπότε θα ίσχυε $x_n \geq l$ για το πολύ πεπερασμένους n και έτσι θα καταλήγαμε σε άτοπο. Άρα $x \geq l$.

[β] Ομοίως.

[γ] Αν η (x_n) είχε όριο, τότε, λόγω των [α] και [β], το όριο αυτό θα ήταν $\leq u$ και $\geq l$ και, επομένως, θα ίσχυε $l \leq u$ και θα καταλήγαμε σε άτοπο. Άρα η (x_n) δεν έχει όριο. □

Παράδειγμα 2.3.5. Αν $x_n \to x \in \overline{\mathbb{R}}$ και ισχύει $x_n \in [l, u]$ για άπειρους n, τότε $x \in [l, u]$.

[8] Ισχύει και το αντίστροφο. Δείτε την άσκηση 2.5.15.

Παράδειγμα 2.3.6. Η ακολουθία $((-1)^{n-1}n)$, δηλαδή η $(1,-2,3,-4,5,-6,\dots)$, δεν έχει όριο, αφού άπειροι όροι της είναι ≥ 1 και άπειροι όροι της είναι ≤ -1.

Παράδειγμα 2.3.7. Η ακολουθία $\big(n-3[\frac{n}{3}]\big)$, δηλαδή η $(1,2,0,1,2,0,1,2,0,\dots)$, δεν έχει όριο, διότι άπειροι όροι της είναι ≥ 2 και άπειροι όροι της είναι ≤ 0.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.6. *Αν ισχύει $x_n \leq y_n$ για άπειρους n και $x_n \to x \in \overline{\mathbb{R}}$ και $y_n \to y \in \overline{\mathbb{R}}$, τότε $x \leq y$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε (για να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι $y < x$.
Θεωρούμε έναν οποιονδήποτε a ώστε $y < a < x$. Τότε ισχύει τελικά $y_n < a$ και ισχύει τελικά $a < x_n$. Επομένως, ισχύει τελικά $y_n < a$ και $a < x_n$. Άρα ισχύει τελικά $y_n < x_n$ και, επομένως, ισχύει $x_n \leq y_n$ για το πολύ πεπερασμένους n. Άτοπο.
Άρα $x \leq y$. □

Παράδειγμα 2.3.8. Ισχύει $-\frac{1}{n} < \frac{1}{n}$ για κάθε n και $-\frac{1}{n} \to 0$ και $\frac{1}{n} \to 0$.
Το παράδειγμα αυτό δείχνει ότι, αν ισχύει $x_n < y_n$ για άπειρους n και $x_n \to x \in \overline{\mathbb{R}}$ και $y_n \to y \in \overline{\mathbb{R}}$, τότε *δεν* συνεπάγεται $x < y$. Από το ότι ισχύει $x_n < y_n$ για άπειρους n συνεπάγεται ότι ισχύει $x_n \leq y_n$ για άπειρους n και συμπεραίνουμε ότι $x \leq y$. Άρα $x < y$ ή $x = y$ και δεν μπορούμε να αποκλείσουμε καμιά από τις δύο αυτές περιπτώσεις.

Οι προτάσεις 2.7 και 2.8 είναι πολύ χρήσιμες για την απόδειξη ύπαρξης αλλά και τον υπολογισμό του ορίου μιας ακολουθίας: η μέθοδος είναι να συγκρίνουμε την ακολουθία με άλλες κατάλληλες ακολουθίες των οποίων γνωρίζουμε (ή βρίσκουμε πιο εύκολα) τα όρια.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.7. *Έστω ότι ισχύει τελικά $x_n \leq y_n$.*
[α] *Αν $x_n \to +\infty$, τότε $y_n \to +\infty$.*
[β] *Αν $y_n \to -\infty$, τότε $x_n \to -\infty$.*

Απόδειξη. [α] Έστω $M > 0$. Τότε ισχύει τελικά $x_n > M$ και, επειδή ισχύει τελικά $y_n \geq x_n$, συνεπάγεται ότι ισχύει τελικά $x_n > M$ και $y_n \geq x_n$. Άρα ισχύει τελικά $y_n > M$. Επομένως, $y_n \to +\infty$.
[β] Ομοίως. □

Παράδειγμα 2.3.9. Ισχύει $2n + (-1)^n n = 2n \pm n \geq n$ για κάθε n και $n \to +\infty$. Επομένως, $2n + (-1)^n n \to +\infty$.

Παράδειγμα 2.3.10. Ισχύει $\frac{n^2+2n+1}{n+2} \geq n$ για κάθε n και $n \to +\infty$. Άρα $\frac{n^2+2n+1}{n+2} \to +\infty$.

Παράδειγμα 2.3.11. Ισχύει $n! \geq n$ για κάθε n. Άρα $n! \to +\infty$.

Η πρόταση 2.8 εκφράζει τη λεγόμενη **ιδιότητα παρεμβολής**.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.8. *Έστω ότι ισχύει τελικά $x_n \leq y_n \leq z_n$. Αν $x_n \to a$ και $z_n \to a$, τότε $y_n \to a$.*

Απόδειξη. Έστω $\epsilon > 0$. Τότε ισχύει τελικά $x_n \in (a-\epsilon, a+\epsilon)$ και, επίσης, ισχύει τελικά $z_n \in (a-\epsilon, a+\epsilon)$. Άρα ισχύει τελικά $x_n, z_n \in (a-\epsilon, a+\epsilon)$ και, επειδή ο y_n είναι ανάμεσα στους x_n, z_n, ισχύει τελικά $y_n \in (a-\epsilon, a+\epsilon)$. Άρα $y_n \to a$. □

Παράδειγμα 2.3.12. Ισχύει $-\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}$ για κάθε n. Επειδή $-\frac{1}{n} \to 0$ και $\frac{1}{n} \to 0$, συνεπάγεται $\frac{(-1)^n}{n} \to 0$.

Παράδειγμα 2.3.13. Ισχύει $0 \leq \frac{n-2[n/2]}{n} \leq \frac{1}{n}$ για κάθε n. Επειδή $0 \to 0$ και $\frac{1}{n} \to 0$, συνεπάγεται $\frac{n-2[n/2]}{n} \to 0$.

2.3.3 Αλγεβρικοί κανόνες ορίων.

Ο επόμενος ορισμός περιγράφει κάποιους βασικούς τρόπους με τους οποίους δημιουργούμε νέες ακολουθίες από ήδη υπάρχουσες.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.10. *Η* **αντίθετη** *ακολουθία μιας ακολουθίας (x_n) είναι η ακολουθία $(-x_n)$.*
Το **άθροισμα** *δύο ακολουθιών (x_n) και (y_n) είναι η ακολουθία $(x_n + y_n)$.*
Η **διαφορά** *δύο ακολουθιών (x_n) και (y_n) είναι η ακολουθία $(x_n - y_n)$. Επειδή $x_n - y_n = x_n + (-y_n)$, η διαφορά των (x_n) και (y_n) είναι η ίδια ακολουθία με το άθροισμα της (x_n) και της αντίθετης της (y_n).*
Το **γινόμενο** *δύο ακολουθιών (x_n) και (y_n) είναι η ακολουθία $(x_n y_n)$.*
Το **γινόμενο** *αριθμού λ και ακολουθίας (x_n) είναι η ακολουθία (λx_n). Προφανώς, η ακολουθία (λx_n) είναι η ίδια με το γινόμενο της σταθερής ακολουθίας (λ) και της (x_n)*
Η **αντίστροφη** *μιας ακολουθίας (x_n) είναι η ακολουθία $\left(\frac{1}{x_n}\right)$.*
Για να ορίζεται η ακολουθία $\left(\frac{1}{x_n}\right)$ πρέπει να ισχύει $x_n \neq 0$ για κάθε n.
Ο **λόγος** *δύο ακολουθιών (x_n) και (y_n) είναι η ακολουθία $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$. Επειδή $\frac{x_n}{y_n} = x_n \frac{1}{y_n}$, ο λόγος των (x_n) και (y_n) είναι η ίδια ακολουθία με το γινόμενο της (x_n) και της αντίστροφης της (y_n).*
Για να ορίζεται η ακολουθία $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ πρέπει να ισχύει $y_n \neq 0$ για κάθε n.
Η **απόλυτη τιμή** *μιας ακολουθίας (x_n) είναι η ακολουθία $(|x_n|)$.*

Η επόμενη πρόταση περιέχει τους λεγόμενους **αλγεβρικούς κανόνες ορίων**.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.9. *Έστω $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$ και αριθμός λ.*
[α] *Αν $x_n \to x$, τότε $-x_n \to -x$.*
[β] *Αν $x_n \to x$, τότε $|x_n| \to |x|$.*
[γ] *Αν $x_n \to x$ και $y_n \to y$ και το $x + y$ δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε $x_n + y_n \to x + y$.*
[δ] *Αν $x_n \to x$ και $y_n \to y$ και το $x - y$ δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε $x_n - y_n \to x - y$.*
[ε] *Αν $x_n \to x$ και $y_n \to y$ και το xy δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε $x_n y_n \to xy$.*
[στ] *Αν $x_n \to x$ και το λx δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε $\lambda x_n \to \lambda x$.*
[ζ] *Έστω ότι ισχύει $x_n \neq 0$ για κάθε n. Αν $x_n \to x$ και το $\frac{1}{x}$ δεν είναι απροσδιόριστη μορφή (δηλαδή, αν $x \neq 0$), τότε $\frac{1}{x_n} \to \frac{1}{x}$.*
[η] *Έστω ότι ισχύει $y_n \neq 0$ για κάθε n. Αν $x_n \to x$ και $y_n \to y$ και το $\frac{x}{y}$ δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε $\frac{x_n}{y_n} \to \frac{x}{y}$.*

Απόδειξη. [α] Έστω $x_n \to x$ και $x \in \mathbb{R}$. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει τελικά $|x_n - x| < \epsilon$ και, επομένως,

$$|(-x_n) - (-x)| = |x_n - x| < \epsilon.$$

Άρα $-x_n \to -x$.
Έστω $x_n \to +\infty$. Τότε για κάθε $M > 0$ ισχύει τελικά $x_n > M$ και, επομένως, $-x_n < -M$. Άρα $-x_n \to -\infty$, οπότε $-x_n \to -(+\infty)$.
Έστω $x_n \to -\infty$. Τότε για κάθε $M > 0$ ισχύει τελικά $x_n < -M$ και, επομένως, $-x_n > M$. Άρα $-x_n \to +\infty$, οπότε $-x_n \to -(-\infty)$.
[β] Έστω $x_n \to x$ και $x \in \mathbb{R}$. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει τελικά $|x_n - x| < \epsilon$ και, επομένως,

$$\big||x_n| - |x|\big| \leq |x_n - x| < \epsilon.$$

Άρα $|x_n| \to |x|$.
Έστω $x_n \to +\infty$. Τότε για κάθε $M > 0$ ισχύει τελικά $x_n > M$ και, επομένως, $|x_n| > M$. Άρα $|x_n| \to +\infty$, οπότε $|x_n| \to |+\infty|$.
Έστω $x_n \to -\infty$. Τότε για κάθε $M > 0$ ισχύει τελικά $x_n < -M$ και, επομένως, $|x_n| > M$. Άρα $|x_n| \to +\infty$, οπότε $|x_n| \to |-\infty|$.

[γ] Έστω $x_n \to x$ και $y_n \to y$ και $x, y \in \mathbb{R}$. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει τελικά $|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2}$ και, επίσης, ισχύει τελικά $|y_n - y| < \frac{\epsilon}{2}$, οπότε ισχύουν τελικά και οι δύο αυτές ανισότητες, οπότε ισχύει τελικά

$$|(x_n + y_n) - (x + y)| = |(x_n - x) + (y_n - y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Άρα $x_n + y_n \to x + y$.
Έστω $x_n \to +\infty$ και $y_n \to y$ και $y \in (-\infty, +\infty]$. Τότε η (y_n) είναι κάτω φραγμένη, οπότε υπάρχει l ώστε να ισχύει $y_n > l$ για κάθε n. Τώρα, για κάθε $M > 0$ ισχύει τελικά $x_n > M - l$ και, επομένως, ισχύει τελικά

$$x_n + y_n > (M - l) + l = M.$$

Άρα $x_n + y_n \to +\infty$, οπότε $x_n + y_n \to x + y$.
Όλες οι άλλες περιπτώσεις προκύπτουν από την τελευταία περίπτωση και από το [α].

[δ] Άμεση συνέπεια των [α] και [γ].

[ε] Έστω $x_n \to x$ και $y_n \to y$ και $x, y \in \mathbb{R}$. Τότε η (y_n) είναι φραγμένη, οπότε υπάρχει $M \geq 0$ ώστε να ισχύει $|y_n| \leq M$ για κάθε n. Τώρα, για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει τελικά $|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2M+1}$ και, επίσης, ισχύει τελικά $|y_n - y| < \frac{\epsilon}{2|x|+1}$, οπότε ισχύουν τελικά και οι δύο αυτές ανισότητες, οπότε ισχύει τελικά

$$|x_n y_n - xy| = |(x_n - x)y_n + x(y_n - y)| \leq |x_n - x||y_n| + |x||y_n - y| \leq \tfrac{\epsilon M}{2M+1} + \tfrac{|x|\epsilon}{2|x|+1} < \epsilon.$$

Άρα $x_n y_n \to xy$.
Έστω $x_n \to +\infty$ και $y_n \to y$ και $y \in (0, +\infty]$. Θεωρούμε έναν οποιονδήποτε l ώστε $0 < l < y$. Τότε ισχύει τελικά $l < y_n$. Τώρα, για κάθε $M > 0$ ισχύει τελικά $x_n > \frac{M}{l}$ και, επομένως, ισχύει τελικά

$$x_n y_n > \tfrac{M}{l} l = M.$$

Άρα $x_n y_n \to +\infty$, οπότε $x_n y_n \to xy$.
Όλες οι άλλες περιπτώσεις προκύπτουν από την τελευταία περίπτωση και από το [α].

[στ] Άμεση συνέπεια του [ε].

[ζ] Έστω $x_n \to x$ και $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ και έστω ότι ισχύει $x_n \neq 0$ για κάθε n. Τότε $|x_n| \to |x|$. Επειδή $|x| > 0$, θεωρούμε έναν οποιονδήποτε l ώστε $0 < l < |x|$ και τότε ισχύει τελικά $|x_n| > l$. Τώρα, για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει τελικά $|x_n - x| < |x| l \epsilon$ και, επομένως, ισχύει τελικά

$$\left|\tfrac{1}{x_n} - \tfrac{1}{x}\right| = \tfrac{|x_n - x|}{|x||x_n|} < \tfrac{|x| l \epsilon}{|x| l} = \epsilon.$$

Άρα $\frac{1}{x_n} \to \frac{1}{x}$.
Έστω $x_n \to +\infty$. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει τελικά $x_n > \frac{1}{\epsilon}$ και, επομένως,

$$\left|\tfrac{1}{x_n} - 0\right| = \tfrac{1}{x_n} < \epsilon.$$

Άρα $\frac{1}{x_n} \to 0$, οπότε $\frac{1}{x_n} \to \frac{1}{+\infty}$.
Η περίπτωση $x_n \to -\infty$ προκύπτει από την τελευταία περίπτωση και από το [α].

[η] Άμεση συνέπεια των [ε] και [ζ]. □

Παράδειγμα 2.3.14. Αν $x_n \to x$, $x \in \mathbb{R}$ και $k \in \mathbb{N}$, τότε ${x_n}^k \to x^k$.
Πράγματι, ${x_n}^k = x_n \cdots x_n \, (k \text{ φορές}) \to x \cdots x \, (k \text{ φορές}) = x^k$.
Για παράδειγμα, από το $\frac{n-1}{n} \to 1$ συνεπάγεται το $(\frac{n-1}{n})^3 \to 1^3 = 1$.
Αν $x_n \to +\infty$, τότε, με την ίδια απόδειξη, ${x_n}^k \to +\infty$. Ομοίως, αν $x_n \to -\infty$, τότε ${x_n}^k \to +\infty$, αν ο k είναι άρτιος, και ${x_n}^k \to -\infty$, αν ο k είναι περιττός.
Τέλος, από τα δύο τελευταία και από τον κανόνα αντιστρόφου (ή από τον κανόνα αντιστρόφου και

από το πρώτο), συμπεραίνουμε ότι, αν $x_n \to \pm\infty$, τότε σε κάθε περίπτωση $\frac{1}{{x_n}^k} \to 0$.
Ειδικότερα:

$$n^k \to \begin{cases} +\infty, & \text{αν } k \in \mathbb{Z},\, k > 0 \\ 0, & \text{αν } k \in \mathbb{Z},\, k < 0 \end{cases}$$

Παράδειγμα 2.3.15. $\left|(-1)^{n-1}\right| = 1 \to 1$ ενώ η ακολουθία $((-1)^{n-1})$ δεν έχει όριο. Δηλαδή, το αντίστροφο της πρότασης 2.9[β] δεν ισχύει.
Αν, όμως, $x = 0$, τότε το αντίστροφο ισχύει: $x_n \to 0$ αν και μόνο αν $|x_n| \to |0| = 0$.
Πράγματι, οι ανισότητες $|x_n - 0| < \epsilon$ και $\big||x_n| - 0\big| < \epsilon$ που εμφανίζονται στους ορισμούς των ορίων $x_n \to 0$ και $|x_n| \to 0$ είναι ισοδύναμες.

Παράδειγμα 2.3.16. Έστω πολυώνυμο $a_0 + a_1x + \cdots + a_kx^k$ τουλάχιστον πρώτου βαθμού. Δηλαδή, έστω $k \geq 1$ και $a_k \neq 0$.
Τότε γράφουμε

$$a_0 + a_1n + \cdots + a_kn^k = n^k\big(a_0\tfrac{1}{n^k} + a_1\tfrac{1}{n^{k-1}} + \cdots + a_{k-1}\tfrac{1}{n} + a_k\big).$$

Το όριο της παρένθεσης είναι a_k, διότι κάθε όρος της εκτός του τελευταίου έχει όριο 0. Επίσης, $n^k \to +\infty$. Άρα

$$a_0 + a_1n + \cdots + a_kn^k \to a_k(+\infty) = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } a_k > 0 \\ -\infty, & \text{αν } a_k < 0 \end{cases}$$

Παρατηρήστε ότι η τιμή του ορίου εξαρτάται μόνο από τον μεγιστοβάθμιο όρο του πολυωνύμου.
Δηλαδή, $\lim_{n\to+\infty}(a_0 + a_1n + \cdots + a_kn^k) = \lim_{n\to+\infty} a_kn^k$.
Μερικά συγκεκριμένα παραδείγματα: $3n^2 - 5n + 2 \to +\infty$ και $-\frac{1}{2}n^5 + 4n^4 - n^3 \to -\infty$.
Ακόμη: $-2n^5 - 2n^2 + n - 7 \to -\infty$, οπότε $(-2n^5 - 2n^2 + n - 7)^8 \to +\infty$.
Επίσης: $-n^3 + 2n - 1 \to -\infty$, οπότε $(-n^3 + 2n - 1)^5 \to -\infty$.

Παράδειγμα 2.3.17. Έστω ρητή παράσταση $\frac{a_0+a_1x+\cdots+a_kx^k}{b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m}$, όπου $a_k \neq 0$, $b_m \neq 0$.
Γράφουμε

$$\tfrac{a_0+a_1n+\cdots+a_kn^k}{b_0+b_1n+\cdots+b_mn^m} = \tfrac{n^k}{n^m}\big(a_0\tfrac{1}{n^k} + \cdots + a_{k-1}\tfrac{1}{n} + a_k\big)\big/\big(b_0\tfrac{1}{n^m} + \cdots + b_{m-1}\tfrac{1}{n} + b_m\big).$$

Είδαμε προηγουμένως ότι τα όρια του αριθμητή και του παρονομαστή του τελευταίου λόγου είναι ίσα με a_k και b_m. Επειδή $\frac{n^k}{n^m} = n^{k-m}$, προκύπτει ότι

$$\tfrac{a_0+a_1n+\cdots+a_kn^k}{b_0+b_1n+\cdots+b_mn^m} \to \begin{cases} (a_k/b_m)(+\infty), & \text{αν } k > m \\ a_k/b_m, & \text{αν } k = m \\ 0, & \text{αν } k < m \end{cases}$$

Βλέπουμε ότι η τιμή του ορίου εξαρτάται μόνο από τους μεγιστοβάθμιους όρους του αριθμητή και του παρονομαστή.
Για παράδειγμα: $\frac{n^3-2n^2+n+1}{2n^2-3n-1} \to +\infty$, $\frac{-n^2+n}{n+2} \to -\infty$, $\frac{n^4-n^3}{n^4+1} \to 1$ και $\frac{-n^2+n+4}{n^3+n^2+5n+6} \to 0$.
Επίσης: $\frac{-2n^3+n^2+n+1}{2n+3} \to -\infty$, οπότε $\left(\frac{-2n^3+n^2+n+1}{2n+3}\right)^7 \to -\infty$.
Και: $\frac{n^3+n+7}{-3n^3+n^2+1} \to -\frac{1}{3}$, οπότε $\left(\frac{n^3+n+7}{-3n^3+n^2+1}\right)^3 \to -\frac{1}{27}$.

Παράδειγμα 2.3.18. Θα αποδείξουμε ότι

$$n^a \to \begin{cases} +\infty, & \text{αν } a > 0 \\ 0, & \text{αν } a < 0 \end{cases}$$

Έστω $a > 0$. Θεωρούμε $M > 0$ και θα αποδείξουμε ότι υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $n^a > M$ για κάθε $n \geq n_0$.

Τώρα, το $n^a > M$ συνεπάγεται από το $n > M^{1/a}$. Σύμφωνα με το θεώρημα 1.1, υπάρχει $n_0 > M^{1/a}$. Προφανώς, η ανισότητα $n > M^{1/a}$ ισχύει όχι μόνο για τον n_0 αλλά και για κάθε $n \geq n_0$. Άρα, με έναν τέτοιο n_0, ισχύει $n > M^{1/a}$ και, επομένως, $n^a > M$ για κάθε $n \geq n_0$.
Μπορούμε (χωρίς να είναι υποχρεωτικό) να θεωρήσουμε τον $n_0 = [M^{1/a}] + 1$ και βλέπουμε ότι, με αυτόν τον n_0 ή και με οποιονδήποτε μεγαλύτερο n_0, ισχύει $n > M^{1/a}$ για κάθε $n \geq n_0$.

Έστω $a < 0$. Μπορούμε, όπως πριν, να αποδείξουμε ότι $n^a \to 0$ βάσει του ορισμού, αλλά μπορούμε επίσης να χρησιμοποιήσουμε το προηγούμενο όριο: είναι $-a > 0$ και, επομένως, $n^a = \frac{1}{n^{-a}} \to \frac{1}{+\infty} = 0$.

Παράδειγμα 2.3.19. Θεωρούμε την ακολουθία $(a, a^2, a^3, a^4, \dots)$, δηλαδή την (a^n). Η ακολουθία αυτή είναι γνωστή από το λύκειο: είναι η **γεωμετρική πρόοδος** με λόγο a.

Αν $a = 1$, προκύπτει η σταθερή ακολουθία (1) η οποία συγκλίνει στον 1. Επίσης, αν $a = 0$, προκύπτει η σταθερή ακολουθία (0) η οποία συγκλίνει στον 0.

Αν $a \leq -1$, οι όροι της (a^n) είναι $a \leq -1$, $a^2 \geq 1$, $a^3 \leq -1$, $a^4 \geq 1$, $\dots$. Δηλαδή, η ακολουθία έχει άπειρους όρους ≤ -1 και άπειρους όρους ≥ 1 και, επομένως, δεν έχει όριο.

Έστω $a > 1$. Από την ανισότητα του Bernoulli συνεπάγεται ότι ισχύει

$$a^n \geq n(a-1) + 1$$

για κάθε n. Επειδή $n(a-1) + 1 \to +\infty$, συνεπάγεται $a^n \to +\infty$.
Μπορούμε, επίσης, να βασιστούμε στον ορισμό του ορίου. Θεωρούμε $M > 0$ και θα βρούμε n_0 ώστε να ισχύει $a^n > M$ για κάθε $n \geq n_0$. Τώρα, το $a^n > M$ συνεπάγεται από το $n > \log_a M$. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει $n_0 > \log_a M$ και, με έναν τέτοιο n_0, συνεπάγεται ότι ισχύει $n > \log_a M$ και, επομένως, $a^n > M$ για κάθε $n \geq n_0$.

Τέλος, έστω $0 < |a| < 1$. Τότε $\frac{1}{|a|} > 1$, οπότε από την προηγούμενη περίπτωση συνεπάγεται $|a^n| = \frac{1}{(1/|a|)^n} \to \frac{1}{+\infty} = 0$. Άρα $a^n \to 0$.

Συμπέρασμα:[9]

$$a^n \begin{cases} \to +\infty, & \text{αν } a > 1 \\ \to 1, & \text{αν } a = 1 \\ \to 0, & \text{αν } -1 < a < 1 \\ \text{δεν έχει όριο}, & \text{αν } a \leq -1 \end{cases}$$

Παράδειγμα 2.3.20. Η ακολουθία $(1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1} + a^n)$ ονομάζεται ακολουθία των **γεωμετρικών αθροισμάτων** με λόγο a. Το αποτέλεσμα είναι:

$$1 + a + a^2 + \cdots + a^n \begin{cases} \to +\infty, & \text{αν } a \geq 1 \\ \to 1/(1-a), & \text{αν } -1 < a < 1 \\ \text{δεν έχει όριο}, & \text{αν } a \leq -1 \end{cases}$$

Αν $a \geq 1$, τότε

$$1 + a + a^2 + \cdots + a^n \geq 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 = n + 1.$$

Επειδή $n + 1 \to +\infty$, συνεπάγεται $1 + a + a^2 + \cdots + a^n \to +\infty$.
Οι υπόλοιπες περιπτώσεις βασίζονται στο όριο της γεωμετρικής προόδου. Αν $-1 < a < 1$, τότε

$$1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \tfrac{a^{n+1}-1}{a-1} \to \tfrac{0-1}{a-1} = \tfrac{1}{1-a}.$$

Έστω $a \leq -1$. Είδαμε ότι ισχύει $a^{n+1} = 1 + (a-1)(1 + a + a^2 + \cdots + a^n)$ για κάθε n. Αν υποθέσουμε ότι $1 + a + a^2 + \cdots + a^n \to x \in \overline{\mathbb{R}}$, τότε $a^{n+1} \to 1 + (a-1)x$. Όμως, η (a^{n+1}) δεν έχει όριο. Άρα η $(1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1} + a^n)$ δεν έχει όριο.

[9] Η άσκηση 2.4.9 περιέχει δεύτερη απόδειξη του ορίου της γεωμετρικής προόδου καθώς και των ακολουθιών στα παραδείγματα 2.3.22, 2.3.23, 2.3.24 και 2.3.25.

Παράδειγμα 2.3.21. Θα αποδείξουμε ότι

$$\log_a n \to \begin{cases} +\infty, & \text{αν } a > 1 \\ -\infty, & \text{αν } 0 < a < 1 \end{cases}$$

Έστω $a > 1$. Θεωρούμε $M > 0$ και θα δούμε ότι υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $\log_a n > M$ για κάθε $n \geq n_0$. Επειδή $a > 1$, το $\log_a n > M$ συνεπάγεται από το $n > a^M$. Όμως, γνωρίζουμε ότι υπάρχει n_0 ώστε $n_0 > a^M$ και, τότε, με έναν τέτοιο n_0, ισχύει $\log_a n > M$ και, επομένως, $n > a^M$ για κάθε $n \geq n_0$.
Έστω $0 < a < 1$. Τότε $\frac{1}{a} > 1$, οπότε $\log_a n = -\log_{1/a} n \to -(+\infty) = -\infty$.

Ας δούμε τώρα μερικά λίγο πιο δύσκολα - αλλά χρήσιμα - παραδείγματα ορίων.

Παράδειγμα 2.3.22. Θα αποδείξουμε ότι

$$\sqrt[n]{a} \to 1 \qquad \text{αν } \ a > 0.$$

Η περίπτωση $a = 1$ είναι απλή: $\sqrt[n]{1} = 1 \to 1$.
Έστω $a > 1$. Από την ανισότητα του Bernoulli συνεπάγεται ότι ισχύει $(1+\frac{a-1}{n})^n \geq 1+n\frac{a-1}{n} = a$ και, επομένως, $1 \leq \sqrt[n]{a} \leq 1 + \frac{a-1}{n}$ για κάθε n. Με παρεμβολή, $\sqrt[n]{a} \to 1$.
Αν $0 < a < 1$, τότε $\frac{1}{a} > 1$, οπότε $\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{1/a}} \to \frac{1}{1} = 1$.

Παράδειγμα 2.3.23. Θα αποδείξουμε ότι

$$\sqrt[n]{n} \to 1.$$

Από την ανισότητα του Bernoulli συνεπάγεται ότι ισχύει $(1 + \frac{\sqrt{n}-1}{n})^n \geq 1 + n\frac{\sqrt{n}-1}{n} = \sqrt{n}$ και, επομένως, $1 \leq \sqrt[n]{n} \leq (1 + \frac{\sqrt{n}-1}{n})^2 < (1 + \frac{1}{\sqrt{n}})^2$ για κάθε n. Άρα $\sqrt[n]{n} \to 1$.

Η πρόταση 2.10 εκφράζει το λεγόμενο **κριτήριο λόγου για ακολουθίες** και είναι πολύ χρήσιμη για τον υπολογισμό κάποιων "περίεργων" ορίων.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.10. [10] *Έστω ότι ισχύει $x_n > 0$ για κάθε n.*
[α] *Αν $0 < b < 1$ και αν ισχύει τελικά $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq b$, τότε $x_n \to 0$.*
[β] *Αν $b > 1$ και αν ισχύει τελικά $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq b$, τότε $x_n \to +\infty$.*
[γ] *Αν $0 \leq a < 1$ και αν $\frac{x_{n+1}}{x_n} \to a$, τότε $x_n \to 0$.*
[δ] *Αν $a > 1$ και αν $\frac{x_{n+1}}{x_n} \to a$, τότε $x_n \to +\infty$.*

Απόδειξη. Όπως θα φανεί στην απόδειξη, *πίσω και από τα τέσσερα όρια κρύβεται μια "σύγκριση" με κατάλληλη γεωμετρική πρόοδο.*
[α] Σύμφωνα με την υπόθεση, υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq b$ για κάθε $n \geq n_0$. Τότε για κάθε $n \geq n_0 + 1$ ισχύει

$$0 < x_n = \tfrac{x_n}{x_{n-1}} \tfrac{x_{n-1}}{x_{n-2}} \cdots \tfrac{x_{n_0+2}}{x_{n_0+1}} \tfrac{x_{n_0+1}}{x_{n_0}} x_{n_0} \leq b\, b \cdots b\, b\, x_{n_0} = b^{n-n_0} x_{n_0} = \tfrac{x_{n_0}}{b^{n_0}} b^n = c\, b^n,$$

όπου $c = \frac{x_{n_0}}{b^{n_0}}$. Επειδή $0 < b < 1$, συνεπάγεται $b^n \to 0$. Άρα $x_n \to 0$.
[β] Σύμφωνα με την υπόθεση, υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq b$ για κάθε $n \geq n_0$. Τότε για κάθε $n \geq n_0 + 1$ ισχύει

$$x_n = \tfrac{x_n}{x_{n-1}} \tfrac{x_{n-1}}{x_{n-2}} \cdots \tfrac{x_{n_0+2}}{x_{n_0+1}} \tfrac{x_{n_0+1}}{x_{n_0}} x_{n_0} \geq b\, b \cdots b\, b\, x_{n_0} = b^{n-n_0} x_{n_0} = \tfrac{x_{n_0}}{b^{n_0}} b^n = c\, b^n,$$

όπου $c = \frac{x_{n_0}}{b^{n_0}}$. Επειδή $b > 1$, συνεπάγεται $b^n \to +\infty$. Άρα $x_n \to +\infty$.
[γ] Θεωρούμε έναν οποιονδήποτε b ώστε $a < b < 1$. Τότε ισχύει τελικά $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq b$ και από το [α] συνεπάγεται $x_n \to 0$.
[δ] Θεωρούμε έναν οποιονδήποτε b ώστε $a > b > 1$. Τότε ισχύει τελικά $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq b$ και από το [β] συνεπάγεται $x_n \to +\infty$. □

[10] Μια χρήσιμη επέκταση αυτής της πρότασης είναι στην άσκηση 2.4.11.

Παράδειγμα 2.3.24. Θα αποδείξουμε ότι

$$\frac{a^n}{n^k} \to +\infty \qquad \text{αν } \ a > 1 \ \text{ και } \ k \in \mathbb{N}.$$

Είναι $\frac{a^{n+1}/(n+1)^k}{a^n/n^k} = a\big(\frac{n}{n+1}\big)^k \to a$ και $a > 1$. Άρα $\frac{a^n}{n^k} \to +\infty$.
Το αποτέλεσμα αυτό διατυπώνεται ως εξής:
Οποιαδήποτε γεωμετρική πρόοδος (a^n) *με λόγο* $a > 1$ *αυξάνεται πιο γρήγορα από οποιαδήποτε δύναμη* (n^k).

Παράδειγμα 2.3.25. Θα αποδείξουμε ότι

$$\frac{a^n}{n!} \to 0.$$

Αν $a = 0$, τότε, προφανώς, $\frac{a^n}{n!} = 0 \to 0$.
Έστω $a \neq 0$. Τότε $\frac{|a|^{n+1}/(n+1)!}{|a|^n/n!} = \frac{|a|}{n+1} \to 0$. Άρα $\frac{|a|^n}{n!} \to 0$ και, επομένως, $\frac{a^n}{n!} \to 0$. Δηλαδή:
Οποιαδήποτε γεωμετρική πρόοδος (a^n) *με λόγο* $a > 1$ *αυξάνεται πιο αργά από το παραγοντικό* $(n!)$.

Τα αποτελέσματα στην πρόταση 2.11 είναι κάπως γενικότερα από ανάλογα αποτελέσματα της πρότασης 2.9 και είναι χρήσιμο να τα έχουμε υπ' όψη μας.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.11. [α] *Αν* $x_n \to +\infty$ *και η* (y_n) *είναι κάτω φραγμένη, τότε* $x_n + y_n \to +\infty$.
Αν $x_n \to -\infty$ *και η* (y_n) *είναι άνω φραγμένη, τότε* $x_n + y_n \to -\infty$.
[β] *Αν* $x_n \to 0$ *και η* (y_n) *είναι φραγμένη, τότε* $x_n y_n \to 0$.
[γ] *Αν* $x_n \to +\infty$ *και η* (y_n) *έχει τελικά θετικό κάτω φράγμα, τότε* $x_n y_n \to +\infty$.
Αν $x_n \to -\infty$ *και η* (y_n) *έχει τελικά θετικό κάτω φράγμα, τότε* $x_n y_n \to -\infty$.
[δ] *Έστω ότι ισχύει* $x_n \neq 0$ *για κάθε* n.
Αν $x_n \to 0$ *και η* (x_n) *είναι τελικά θετική, τότε* $\frac{1}{x_n} \to +\infty$.
Αν $x_n \to 0$ *και η* (x_n) *είναι τελικά αρνητική, τότε* $\frac{1}{x_n} \to -\infty$.
[ε] *Έστω ότι ισχύει* $x_n \neq 0$ *για κάθε* n. *Αν* $|x_n| \to +\infty$, *τότε* $\frac{1}{x_n} \to 0$.

Απόδειξη. [α] Έστω $x_n \to +\infty$ και έστω ότι η (y_n) είναι κάτω φραγμένη, οπότε υπάρχει αριθμός l ώστε να ισχύει $y_n \geq l$ για κάθε n. Τότε για κάθε $M > 0$ ισχύει τελικά $x_n > M - l$ και, επομένως, $x_n + y_n > (M - l) + l = M$. Άρα $x_n + y_n \to +\infty$.
Το δεύτερο αποτέλεσμα προκύπτει άμεσα από το πρώτο.
[β] Έστω $x_n \to 0$ και έστω ότι η (y_n) είναι φραγμένη, οπότε υπάρχει αριθμός $M \geq 0$ ώστε να ισχύει $|y_n| \leq M$ για κάθε n. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει τελικά $|x_n| < \frac{\epsilon}{M+1}$ και, επομένως,

$$|x_n y_n| = |x_n||y_n| \leq \frac{\epsilon M}{M+1} < \epsilon.$$

Άρα $x_n y_n \to 0$.
[γ] Έστω $x_n \to +\infty$ και έστω ότι η (y_n) έχει τελικά θετικό κάτω φράγμα, οπότε υπάρχει αριθμός $l > 0$ ώστε να ισχύει τελικά $y_n \geq l$. Τότε για κάθε $M > 0$ ισχύει τελικά $x_n > \frac{M}{l}$ και, επομένως, ισχύει τελικά $x_n y_n > \frac{M}{l} l = M$. Άρα $x_n y_n \to +\infty$.
Το δεύτερο αποτέλεσμα προκύπτει άμεσα από το πρώτο.
[δ] Έστω $x_n \to 0$ και έστω ότι ισχύει τελικά $x_n > 0$. Τότε για κάθε $M > 0$ ισχύει τελικά $|x_n - 0| < \frac{1}{M}$. Άρα ισχύει τελικά $0 < x_n < \frac{1}{M}$ και, επομένως, $\frac{1}{x_n} > M$. Άρα $\frac{1}{x_n} \to +\infty$.
Το δεύτερο αποτέλεσμα προκύπτει άμεσα από το πρώτο.
[ε] Έστω ότι ισχύει $x_n \neq 0$ για κάθε n και $|x_n| \to +\infty$. Τότε $\frac{1}{|x_n|} \to 0$ και, επομένως, $\frac{1}{x_n} \to 0$. □

Παράδειγμα 2.3.26. Αν η (x_n) είναι φραγμένη, τότε $\frac{x_n}{n} \to 0$.
Για παράδειγμα, $\frac{1+(-1)^{n-1}}{n} \to 0$. Επίσης: $\frac{n-3[n/3]}{n} \to 0$ και $\frac{\sin n}{n} \to 0$.

Παράδειγμα 2.3.27. Για την ακολουθία $\big((-1)^{n-1}n\big)$ ισχύει $\big|(-1)^{n-1}n\big| = n \to +\infty$. Άρα $\frac{1}{(-1)^{n-1}n} \to 0$. Πράγματι, $\frac{1}{(-1)^{n-1}n} = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \to 0$. Παρατηρήστε ότι η αρχική ακολουθία $\big((-1)^{n-1}n\big)$ δεν έχει όριο.

Τι γίνεται αν $x = 0$ στην πρόταση 2.9[ζ]; Θα δούμε το επόμενο παράδειγμα ως ευκαιρία για να κάνουμε κάποια σχόλια για τη φύση της απροσδιόριστης μορφής $\frac{1}{0}$.

Παράδειγμα 2.3.28. Ισχύει $\frac{(-1)^{n-1}}{n} \to 0$, αλλά η αντίστροφη ακολουθία $\big((-1)^{n-1}n\big)$ δεν έχει όριο.

Ποιό ακριβώς είναι το πρόβλημα με το παράδειγμα 2.3.28; Το πρόβλημα είναι η εναλλαγή προσήμων των όρων της ακολουθίας $\big(\frac{(-1)^{n-1}}{n}\big)$ και, μάλιστα, όχι ακριβώς η εναλλαγή προσήμων των διαδοχικών όρων αλλά το ότι υπάρχουν άπειροι θετικοί όροι και άπειροι αρνητικοί όροι. Αν μια ακολουθία (x_n) έχει όριο μηδέν και είναι τελικά θετική, τότε γνωρίζουμε ότι η $\big(\frac{1}{x_n}\big)$ έχει όριο $+\infty$. Ομοίως, αν μια (x_n) έχει όριο μηδέν και είναι τελικά αρνητική, τότε η $\big(\frac{1}{x_n}\big)$ έχει όριο $-\infty$. Από την άλλη μεριά, έστω ότι η (x_n) δεν είναι τελικά θετική ούτε τελικά αρνητική, δηλαδή ότι έχει άπειρους θετικούς όρους και άπειρους αρνητικούς όρους. Από το $x_n \to 0$ συνεπάγεται το $|x_n| \to 0$ και από αυτό συνεπάγεται το $\frac{1}{|x_n|} \to +\infty$. Άρα ισχύει τελικά $\frac{1}{|x_n|} \geq 1$, οπότε, λόγω της υπόθεσης για τα πρόσημα των όρων, ισχύει $\frac{1}{x_n} \geq 1$ για άπειρους n και ισχύει $\frac{1}{x_n} \leq -1$ για άπειρους n. Άρα η ακολουθία $\big(\frac{1}{x_n}\big)$ δεν έχει όριο.

Μπορούμε, επομένως, να συμπεράνουμε ότι:

Η παράσταση $\frac{1}{0}$ είναι απροσδιόριστη μορφή αν και μόνο αν το 0 εκφράζει το όριο μιας ακολουθίας η οποία συγκλίνει στον 0 και δεν είναι τελικά θετική ούτε τελικά αρνητική.

Αν με το σύμβολο $0+$ εκφράσουμε το όριο μιας ακολουθίας η οποία συγκλίνει στον 0 και είναι τελικά θετική και με το σύμβολο $0-$ εκφράσουμε το όριο μιας ακολουθίας η οποία συγκλίνει στον 0 και είναι τελικά αρνητική, τότε μπορούμε να δώσουμε τον εξής ορισμό, ο οποίος *εκφράζει συμβολικά το περιεχόμενο της πρότασης 2.11[δ]*.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.11. *Ορίζουμε*

$$\frac{1}{0+} = +\infty, \qquad \frac{1}{0-} = -\infty.$$

Ο ορισμός αυτός θα μπορούσε να περιέχεται στον ορισμό 1.1 και συμφωνεί απολύτως με την εμπειρία: αν μια ποσότητα είναι πολύ μικρή θετική, τότε η αντίστροφη ποσότητα είναι πολύ μεγάλη θετική και, αν μια ποσότητα είναι πολύ μικρή αρνητική, τότε η αντίστροφη ποσότητα είναι πολύ μεγάλη αρνητική.

Τέλος, θα διατυπώσουμε την πρόταση 2.12, αλλά θα τήν αποδείξουμε στην ενότητα 4.3. Η τυπική θέση της είναι εδώ, αλλά η απόδειξή της (αν και θα μπορούσε να γίνει στο σημείο αυτό) ταιριάζει καλύτερα στο πλαίσιο των εννοιών του ορίου και της συνέχειας συνάρτησης. Ας θυμηθούμε από τον ορισμό 1.10 τις απροσδιόριστες μορφές της δύναμης a^b. Αυτές είναι οι 0^0, $1^{+\infty}$, $1^{-\infty}$, $(+\infty)^0$ και $0^{-\infty}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.12. *Η* **δύναμη** *ακολουθίας (x_n) με εκθέτη την ακολουθία (y_n) είναι η ακολουθία $\big({x_n}^{y_n}\big)$.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.12. *Έστω $x_n > 0$ για κάθε n. Αν $x_n \to x \in \overline{\mathbb{R}}$ και $y_n \to y \in \overline{\mathbb{R}}$ και αν η δύναμη x^y δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε ${x_n}^{y_n} \to x^y$. Ακόμη, αν $x_n \to 0$ και $y_n \to -\infty$, τότε ${x_n}^{y_n} \to +\infty$.*

Παράδειγμα 2.3.29. Βάσει της πρότασης 2.12, μπορεί να αποδειχθεί το όριο $\sqrt[n]{a} \to 1$ όταν $a > 0$. Πράγματι, θεωρούμε τη σταθερή ακολουθία (a) και την ακολουθία $\big(\frac{1}{n}\big)$. Τότε $a \to a$ και $\frac{1}{n} \to 0$, οπότε $\sqrt[n]{a} = a^{1/n} \to a^0 = 1$.

Παράδειγμα 2.3.30. Η γεωμετρική πρόοδος (a^n) στις περιπτώσεις $a > 1$ και $0 < a < 1$ μπορεί, επίσης, να ενταχθεί στο πλαίσιο της πρότασης 2.12. Θεωρούμε τη σταθερή ακολουθία (a) και την ακολουθία (n). Επειδή $a \to a$ και $n \to +\infty$, συνεπάγεται $a^n \to a^{+\infty}$, το οποίο είναι ίσο είτε με $+\infty$, αν $a > 1$, είτε με 0, αν $0 < a < 1$.

Παράδειγμα 2.3.31. Το όριο $\sqrt[n]{n} \to 1$ *δεν* αποδεικνύεται με την πρόταση 2.12. Αν θεωρήσουμε τις ακολουθίες (n) και $(\frac{1}{n})$, τότε $n \to +\infty$ και $\frac{1}{n} \to 0$, αλλά η δύναμη $(+\infty)^0$ είναι απροσδιόριστη μορφή.

Παρά το ότι η παράσταση $0^{-\infty}$ είναι, όπως είπαμε, απροσδιόριστη μορφή, η τελευταία περίπτωση της πρότασης 2.12 μας οδηγεί στον επόμενο ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.13. *Ορίζουμε*

$$(0+)^{-\infty} = +\infty.$$

Ασκήσεις.

2.3.1. Βρείτε τα όρια των ακολουθιών $\big(\frac{(n+1)^{27}(n+3)^{79}}{(2n+1)^{106}}\big)$, $\big(\frac{-n^3+(-1)^n n^2+1}{3n^2+2(-1)^{n-1}n}\big)$, $\big(\frac{n(n+1)}{n+4} - \frac{4n^3}{4n^2+1}\big)$, $((1-n)^5 + n^4)$, $\big((\frac{-n^3+n+1}{3n^2+3n+1})^9\big)$, $\big(\frac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}\big)$, $(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$, $(\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2+1})$.

2.3.2. Βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια των ακολουθιών $(1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n)$, $\big(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\big)$, $(1 - 2 + 2^2 + \cdots + (-1)^n 2^n)$, $\big(\frac{2^7}{3^7} + \frac{2^8}{3^8} + \cdots + \frac{2^{n+6}}{3^{n+6}}\big)$, $\big(\frac{2^n}{3^n} + \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}} + \cdots + \frac{2^{2n}}{3^{2n}}\big)$.

2.3.3. Βρείτε τα όρια των ακολουθιών $\big(\frac{2-1}{2+1}\frac{3-1}{3+1}\cdots\frac{n-1}{n+1}\big)$, $\big(\frac{2^3-1}{2^3+1}\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdots\frac{n^3-1}{n^3+1}\big)$.

2.3.4. Αποδείξτε ότι για κάθε $x \neq -1$ η ακολουθία $(\frac{x^n-1}{x^n+1})$ έχει όριο και υπολογίστε το.
Αποδείξτε ότι για κάθε x η ακολουθία $(\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1})$ έχει όριο και υπολογίστε το.

2.3.5. Για ποιές τιμές του x υπάρχει το $\lim_{n\to+\infty} \frac{(x+1)^{2n}}{(2x+1)^n}$;

2.3.6. Έστω $x \neq 1$ και έστω ότι ισχύει $x_n \neq 1$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι $x_n \to x$ αν και μόνο αν $\frac{x_n}{1-x_n} \to \frac{x}{1-x}$.

2.3.7. [11] Αποδείξτε ότι $\frac{3+(-1)^n}{2n} \to 0$, ότι ισχύει $\frac{3+(-1)^n}{2n} > 0$ για κάθε n και ότι η ακολουθία $\big(\frac{3+(-1)^n}{2n}\big)$ δεν είναι φθίνουσα.
Αποδείξτε ότι $\frac{(3-(-1)^{n-1})n}{2} \to +\infty$ και ότι η ακολουθία $\big(\frac{(3-(-1)^{n-1})n}{2}\big)$ δεν είναι αύξουσα.

2.3.8. Βρείτε το όριο της (x_n) αν ισχύει τελικά $n^2 - 2n < n^2 x_n \leq n^2 + 3$.
Κάντε το ίδιο για καθεμιά από τις σχέσεις: $n + 1 \leq 2nx_n \leq n + 2x_n + 3$, $n^2 + nx_n \leq 15n$ και ${n^2 x_n}^2 - 2n(n-1)x_n + n^2 - 2n - 3 \leq 0$.

2.3.9. Έστω $x_n \to x \in \overline{\mathbb{R}}$ και $y_n \to y \in \overline{\mathbb{R}}$. Αν $x < y$, αποδείξτε ότι ισχύει τελικά $x_n < y_n$.

2.3.10. Έστω $x_n \to x \in \overline{\mathbb{R}}$ και $y_n \to y \in \overline{\mathbb{R}}$ και $x \neq y$. Αν $|x - y| > a$, αποδείξτε ότι ισχύει τελικά $|x_n - y_n| > a$.

2.3.11. Γνωρίζουμε ότι, αν ισχύει $x_n \in [l, u]$ για άπειρους n και $x_n \to x$, τότε $x \in [l, u]$. Υπάρχει παρόμοιο συμπέρασμα για το όριο x της (x_n), αν ισχύει $x_n \in (l, u)$ για άπειρους n; Ποιό είναι το γενικό συμπέρασμα σ' αυτήν την περίπτωση;

2.3.12. Χρησιμοποιώντας την πρόταση 2.5[γ], αποδείξτε ότι δεν υπάρχουν τα όρια των ακολουθιών $\big(2^{(-1)^{n-1}}\big)$, $\big((1 + \frac{(-1)^{n-1}}{2})^n\big)$, $\big((-1)^{n-1} + \frac{10}{n^3}\big)$, $\big((-1)^{n-1}\frac{n}{n+1}\big)$.

[11] Αν κάποιοι θετικοί αριθμοί πλησιάζουν τον 0 ή απομακρύνονται προς το $+\infty$, έχουμε την *αυθόρμητη* αλλά *εσφαλμένη* τάση να θεωρούμε ότι αυτοί, αντιστοίχως, φθίνουν ή αυξάνονται.

2.3.13. Αποδείξτε ότι $2n+(-1)^{n-1}n \to +\infty$, $2^{-2n+(-1)^{n-1}n} \to 0$, $\big(\frac{1}{2}+\frac{(-1)^{n-1}}{4}\big)^n \to 0$.

2.3.14. Αποδείξτε ότι $\big[\frac{3n^2-n+1}{n+2}\big] \to +\infty$, $\frac{[\sqrt{n}]}{\sqrt{n}} \to 1$ και $\frac{n+2}{3n^2-n+1}\big[\frac{3n^2-n+1}{n+2}\big] \to 1$.

2.3.15. Αποδείξτε ότι $(1+\frac{1}{n})^{n^2} \to +\infty$, $(1-\frac{1}{n^2})^n \to 1$, $(1+\frac{1}{n^2})^n \to 1$.

2.3.16. [12] Αποδείξτε ότι $[nx] \to \begin{cases} +\infty, & \text{αν } x>0 \\ 0, & \text{αν } x=0 \\ -\infty, & \text{αν } x<0 \end{cases}$ $[nx]-[ny] \to \begin{cases} +\infty, & \text{αν } x>y \\ 0, & \text{αν } x=y \\ -\infty, & \text{αν } x<y \end{cases}$

$$nx-[ny] \begin{cases} \to +\infty, & \text{αν } x>y \\ \to 0, & \text{αν } x=y\in\mathbb{Z} \\ \to -\infty, & \text{αν } x<y \\ \text{δεν έχει όριο}, & \text{αν } x=y\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z} \end{cases}$$

2.3.17. Αποδείξτε ότι $\frac{(3n)!}{(n!)^3} \to +\infty$.

2.3.18. Έστω $0\le a\le b\le c$. Αποδείξτε ότι $\sqrt[n]{a^n+b^n} \to b$, $\sqrt[n]{a^n+b^n+c^n} \to c$.

2.3.19. Αποδείξτε ότι $\sqrt[n]{n^3} \to 1$, $\sqrt[n]{n^4+3n^2+n+1} \to 1$.

2.3.20. Για κάθε a, αποδείξτε ότι $\frac{[a]+[2a]+\cdots+[na]}{n^2} \to \frac{a}{2}$.

2.3.21. Αποδείξτε ότι $\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n} \to 1$ και $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \to 1$.

2.3.22. Αποδείξτε ότι $\lim_{m\to+\infty}\big(\lim_{n\to+\infty}(\cos m!\pi x)^{2n}\big) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x\in\mathbb{Q} \\ 0, & \text{αν } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$

2.3.23. Ποιά είναι τα πιθανά όρια της ακολουθίας (x_n) αν ικανοποιεί οποιονδήποτε από τους παρακάτω αναδρομικούς τύπους: $x_{n+1}=-x_n+2$, $x_{n+3}=x_n-3$, $x_{n+1}={x_n}^2-2$, $x_{n+2}=-{x_n}^2+2$, $x_{n+1}={x_n}^2+3$, $x_{n+2}=x_{n+1}+{x_n}^3$;

2.3.24. Αν $x_n\to x$ και $y_n\to y$, αποδείξτε ότι $\max\{x_n,y_n\}\to\max\{x,y\}$ και $\min\{x_n,y_n\}\to\min\{x,y\}$.

2.3.25. Βρείτε το λάθος: $n\frac{1}{n}=\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}$ (n φορές) $\to 0+\cdots+0$ (n φορές) $=n0=0$.
Βρείτε το λάθος: $(1+\frac{1}{n})^n=(1+\frac{1}{n})\cdots(1+\frac{1}{n})$ (n φορές) $\to 1\cdots1$ (n φορές) $=1^n=1$.
Ποιά είναι η σχέση των δύο "ορίων" με την πρόταση 2.9[γ,ε];

2.3.26. Έστω $x_1>0$ και $x_{n+1}\ge x_1+\cdots+x_n$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Αν $0<a<2$, αποδείξτε ότι $\frac{x_n}{a^n}\to+\infty$. Για την περίπτωση $a=2$ εξετάστε την ακολουθία (2^n).

2.3.27. Βρείτε ακολουθίες (x_n), (y_n) που δεν έχουν όριο ώστε η (x_n+y_n) να έχει όριο.
Βρείτε (x_n), (y_n) που δεν έχουν όριο ώστε η (x_ny_n) να έχει όριο.

2.3.28. Αν η (x_n+y_n) έχει όριο και μια από τις (x_n), (y_n) έχει όριο, αποδείξτε ότι, υπό κάποια προϋπόθεση, και η άλλη έχει όριο.
Αν η (x_ny_n) έχει όριο και μια από τις (x_n), (y_n) έχει όριο, αποδείξτε ότι, υπό κάποια προϋπόθεση, και η άλλη έχει όριο.

[12] Με την περίπτωση $x=y\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ του τελευταίου ορίου ασχολείται η άσκηση 2.7.18.

2.3.29. [13] Βρείτε ακολουθίες (x_n), (y_n) ώστε $x_n \to +\infty$, $y_n \to -\infty$ και η $(x_n + y_n)$ (i) να έχει όριο έναν οποιονδήποτε $c \in \overline{\mathbb{R}}$ (ii) να μην έχει όριο.

Βρείτε ακολουθίες (x_n), (y_n) ώστε $x_n \to 0$, $y_n \to +\infty$ και η $(x_n y_n)$ (i) να έχει όριο έναν οποιονδήποτε $c \in \overline{\mathbb{R}}$ (ii) να μην έχει όριο.

Βρείτε ακολουθίες (x_n), (y_n) ώστε $x_n \to 0$, $y_n \to 0$ και η $(\frac{x_n}{y_n})$ (i) να έχει όριο έναν οποιονδήποτε $c \in \overline{\mathbb{R}}$ (ii) να μην έχει όριο.

Βρείτε ακολουθίες (x_n), (y_n) ώστε $x_n \to +\infty$, $y_n \to +\infty$ και η $(\frac{x_n}{y_n})$ (i) να έχει όριο έναν οποιονδήποτε $c \in [0, +\infty]$ (ii) να μην έχει όριο. Είναι δυνατόν η $(\frac{x_n}{y_n})$ να έχει όριο $c \in [-\infty, 0)$;

2.3.30. [14] Βρείτε ακολουθίες (x_n), (y_n) ώστε $x_n \to +\infty$, $y_n \to 0$ και η $\left({x_n}^{y_n}\right)$ (i) να έχει όριο έναν οποιονδήποτε $c \in [0, +\infty]$ (ii) να μην έχει όριο. Είναι δυνατόν η $\left({x_n}^{y_n}\right)$ να έχει όριο $c \in [-\infty, 0)$;

Βρείτε ακολουθίες (x_n), (y_n) ώστε $x_n \to 0$, $y_n \to 0$ και η $\left({x_n}^{y_n}\right)$ (i) να έχει όριο έναν οποιονδήποτε $c \in [0, +\infty]$ (ii) να μην έχει όριο. Είναι δυνατόν η $\left({x_n}^{y_n}\right)$ να έχει όριο $c \in [-\infty, 0)$;

Βρείτε ακολουθίες (x_n), (y_n) ώστε $x_n \to 0$, $y_n \to -\infty$ και η $\left({x_n}^{y_n}\right)$ (i) να έχει όριο έναν οποιονδήποτε $c \in \{+\infty, -\infty\}$ (ii) να μην έχει όριο. Είναι δυνατόν η $\left({x_n}^{y_n}\right)$ να έχει όριο $c \in \mathbb{R}$;

2.3.31. Βρείτε ακολουθίες (x_n), (y_n) ώστε να ισχύει $x_n, y_n > 0$ για κάθε n, $x_n \to 0$, $y_n \to +\infty$ και η $(x_n y_n)$ να μην έχει όριο.

2.3.32. Αποδείξτε ότι για κάθε x υπάρχει ακολουθία ρητών (r_n) ώστε $r_n \to x$.

Αποδείξτε ότι για κάθε x υπάρχει ακολουθία αρρήτων (t_n) ώστε $t_n \to x$.

Αποδείξτε ότι για κάθε x υπάρχει *γνησίως αύξουσα* ακολουθία ρητών (r_n) και *γνησίως φθίνουσα* ακολουθία ρητών (s_n) ώστε $r_n \to x$ και $s_n \to x$. Τα ίδια γίνονται και με ακολουθίες αρρήτων.

2.3.33. Έστω μη-κενό σύνολο A.

Αποδείξτε ότι υπάρχει ακολουθία στο A με όριο το $\sup A$ και ότι δεν υπάρχει ακολουθία στο A με όριο μεγαλύτερο του $\sup A$. Διατυπώστε και αποδείξτε το ανάλογο αποτέλεσμα για το $\inf A$.

Για καθένα από τα $[0, 2]$, $[0, 2)$, $\{2\}$, $[0, 1] \cup \{2\}$ βρείτε διάφορες ακολουθίες στο σύνολο οι οποίες συγκλίνουν στο supremum του συνόλου. Παρατηρήστε ότι για το πρώτο, το τρίτο και το τέταρτο σύνολο υπάρχει ως επιλογή ο απλούστερος τύπος ακολουθίας (δηλαδή μια σταθερή ακολουθία) η οποία, όμως, δεν υφίσταται ως επιλογή για το δεύτερο σύνολο. Παρατηρήστε, επίσης, ότι για το τρίτο σύνολο υπάρχει μία μόνο επιλογή ακολουθίας, ενώ για το τέταρτο σύνολο οι μόνες επιλογές είναι οι τελικά σταθερές ακολουθίες.

Για καθένα από τα σύνολα $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$, $(0, 1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$, $(0, 2) \cap \mathbb{Q}$ βρείτε δύο όσο το δυνατό πιο απλές ακολουθίες στο σύνολο, μία με όριο το supremum και μία με όριο το infimum του συνόλου.

2.3.34. Έστω μη-κενό σύνολο A και u άνω φράγμα του A. Αποδείξτε ότι $u = \sup A$ αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία στο A με όριο τον u. Προσαρμόστε το συμπέρασμα αυτό για το $\inf A$ και για κάτω φράγμα l του A.

2.3.35. Έστω μη-κενό σύνολο A.

Αν $\sup A \in A$ βρείτε μια όσο το δυνατό πιο απλή ακολουθία στο A με όριο το $\sup A$.

Αν $\sup A \notin A$, αποδείξτε ότι υπάρχει *γνησίως αύξουσα* ακολουθία στο A με όριο το $\sup A$.

Προσαρμόστε τα προηγούμενα για το $\inf A$.

2.3.36. Έστω $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ και έστω ότι ισχύει $x_n \geq 0$ για κάθε n.

Αν $x_n \to x$, αποδείξτε ότι $\sqrt[k]{x_n} \to \sqrt[k]{x}$.

Αν $x_n \to +\infty$, αποδείξτε ότι $\sqrt[k]{x_n} \to +\infty$.

Μην χρησιμοποιήσετε την πρόταση 2.12.

[13] Μελέτη των απροσδιόριστων μορφών.

[14] Μελέτη των απροσδιόριστων μορφών δύναμης. Συνεχίζεται στην άσκηση 2.4.10.

2.3.37. Έστω ότι ισχύει $|x_n - x_m| \geq 1$ για κάθε n, m με $n \neq m$. Αποδείξτε ότι $|x_n| \to +\infty$. Έχει η (x_n) όριο; Εξετάστε ως παραδείγματα τις ακολουθίες (n), $(-n)$, $((-1)^{n-1}n)$.

2.3.38. Αν $x_n \to x$ και ισχύει $x_n \leq x$ για κάθε n, αποδείξτε ότι $\sup\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\} = x$.
Αν $x < y$ και ισχύει $x_n < y$ για κάθε n και $x_n \to x$, αποδείξτε ότι $\sup\{x_n | n \in \mathbb{N}\} < y$.

2.3.39. Αν $x_n \to x$, αποδείξτε ότι για κάθε k ισχύει $\inf\{x_n \,|\, n \geq k\} \leq x \leq \sup\{x_n \,|\, n \geq k\}$.

2.3.40. Έστω $x_n \to x$.
Αποδείξτε ότι η ακολουθία (x_n) έχει μέγιστο όρο αν και μόνο αν υπάρχει k ώστε $x_k \geq x$.
Αποδείξτε ότι η ακολουθία (x_n) έχει ελάχιστο όρο αν και μόνο αν υπάρχει k ώστε $x_k \leq x$.

2.3.41. [15] [α] Αποδείξτε το **θεώρημα του Cesáro**: *Αν* $x_n \to x \in \overline{\mathbb{R}}$, *τότε* $\frac{x_1+\cdots+x_n}{n} \to x$.
Αν ισχύει $x_n = (-1)^{n-1}$ για κάθε n, αποδείξτε ότι $\frac{x_1+\cdots+x_n}{n} \to 0$.
Αν ισχύει $x_n = \frac{1+(-1)^n}{2} n$ για κάθε n, αποδείξτε ότι $\frac{x_1+\cdots+x_n}{n} \to +\infty$.
Και οι δύο προηγούμενες ακολουθίες (x_n) δεν έχουν όριο. Συμπεράνατε ότι δεν ισχύει το αντίστροφο του θεωρήματος του Cesáro.
[β] Αν $a_{n+1} - a_n \to a \in \overline{\mathbb{R}}$, αποδείξτε ότι $\frac{a_n}{n} \to a$.
Βρείτε τα όρια των ακολουθιών $\left(\frac{a^n}{n}\right)$ και $\left(\frac{\log_a n}{n}\right)$ με $a > 1$.
[γ] Αποδείξτε την γενίκευση του θεωρήματος του Cesáro: [16] *Έστω ακολουθίες* (x_n), (y_n) *ώστε να ισχύει* $y_n > 0$ *για κάθε* n *και* $y_1 + \cdots + y_n \to +\infty$. *Αν* $\frac{x_n}{y_n} \to l \in \overline{\mathbb{R}}$, *τότε* $\frac{x_1+\cdots+x_n}{y_1+\cdots+y_n} \to l$.
[δ][17] Αν ισχύει $x_n > 0$ για κάθε n και $x_n \to x \in [0, +\infty]$, αποδείξτε ότι $\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \to x$.
[ε] Αν ισχύει $a_n > 0$ για κάθε n και $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to a \in [0, +\infty]$, αποδείξτε ότι $\sqrt[n]{a_n} \to a$.
Βρείτε τα όρια των ακολουθιών $(\sqrt[n]{n})$, $(\sqrt[n]{n!})$ και $\left(\sqrt[n]{(2n)!/(n!)^2}\right)$.

2.3.42. [α] Για κάθε n θεωρούμε $k_n \in \mathbb{N}$ και αριθμούς $\theta_{n,1}, \ldots, \theta_{n,k_n}$ με τις ιδιότητες:
(i) Υπάρχει κάποιος M ώστε να ισχύει $|\theta_{n,1}| + \cdots + |\theta_{n,k_n}| \leq M$ για κάθε n,
(ii) $\theta_{n,1} + \cdots + \theta_{n,k_n} \to 1$,
(iii) για κάθε k ισχύει $\theta_{n,k} \to 0$ (όπου θεωρούμε $\theta_{n,k} = 0$ για τους n για τους οποίους $k_n < k$).
Αποδείξτε ότι, αν $x_n \to x$, τότε $\theta_{n,1}x_1 + \cdots + \theta_{n,k_n}x_{k_n} \to x$.
[β] Αν $x_n \to x$, αποδείξτε ότι $\frac{1}{2^n}x_1 + \frac{1}{2^{n-1}}x_2 + \cdots + \frac{1}{2^2}x_{n-1} + \frac{1}{2}x_n \to x$.

2.4 Μονότονες ακολουθίες.

Το θεώρημα 2.1 είναι πολύ σημαντικό. Το κυριότερο συμπέρασμά του είναι ότι κάθε *μονότονη* ακολουθία *έχει* όριο και ότι, αν μια μονότονη ακολουθία είναι φραγμένη, τότε το όριό της είναι αριθμός και, αν μια μονότονη ακολουθία δεν είναι φραγμένη, τότε το όριό της είναι ένα από τα $\pm\infty$. Τέτοιο συμπέρασμα δεν ισχύει για μη-μονότονες ακολουθίες: η ακολουθία $((-1)^{n-1})$ αν και είναι φραγμένη δεν έχει όριο και η $((-1)^{n-1}n)$ αν και δεν είναι φραγμένη δεν έχει όριο.

Βάσει του θεωρήματος 2.1 μπορούμε να συμπεράνουμε για μια δοσμένη ακολουθία ότι έχει όριο αρκεί μόνο να ελέγξουμε ότι είναι μονότονη.

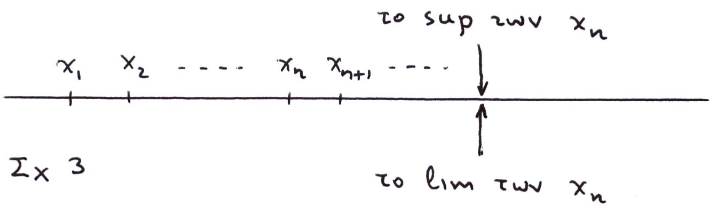
ΘΕΩΡΗΜΑ 2.1. [18] *Κάθε μονότονη ακολουθία έχει όριο. Πιο συγκεκριμένα:*
[α] *Αν η ακολουθία* (x_n) *είναι αύξουσα, τότε* $\lim_{n\to+\infty} x_n = \sup\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$.
Δηλαδή: η (x_n) *είτε δεν είναι άνω φραγμένη, οπότε αποκλίνει στο* $+\infty$, *είτε είναι άνω φραγμένη,*

[15] Η άσκηση αυτή συνεχίζεται στην άσκηση 2.7.13.
[16] Έχουμε το θεώρημα του Cesáro όταν $y_n = 1$ για κάθε n.
[17] Στην άσκηση 4.3.3 θα δούμε πώς αυτό ανάγεται στο [α] μέσω ιδιοτήτων της λογαριθμικής και της εκθετικής συνάρτησης.
[18] Για την ακριβή σχέση αυτού του θεωρήματος με την ιδιότητα supremum δείτε την άσκηση 2.4.17.

οπότε συγκλίνει. Και στις δύο περιπτώσεις το όριό της ισούται με το ελάχιστο άνω φράγμα του συνόλου των όρων της.

[β] *Αν η ακολουθία (x_n) είναι φθίνουσα, τότε* $\lim_{n\to+\infty} x_n = \inf\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$.
Δηλαδή: η (x_n) είτε δεν είναι κάτω φραγμένη, οπότε αποκλίνει στο $-\infty$, είτε είναι κάτω φραγμένη, οπότε συγκλίνει. Και στις δύο περιπτώσεις το όριό της ισούται με το μέγιστο κάτω φράγμα του συνόλου των όρων της.

Δείτε το σχήμα 3.



Σx 3

Απόδειξη. [α] Θεωρούμε το μη-κενό σύνολο $\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$. Αν αυτό είναι άνω φραγμένο (δηλαδή αν η ακολουθία είναι άνω φραγμένη) τότε το supremum του είναι αριθμός ενώ, αν δεν είναι άνω φραγμένο (δηλαδή αν η ακολουθία δεν είναι άνω φραγμένη) τότε το supremum του είναι το $+\infty$.
Έστω ότι η ακολουθία (x_n) δεν είναι άνω φραγμένη. Τότε

$$\sup\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\} = +\infty$$

και θα αποδείξουμε ότι $x_n \to +\infty$.
Έστω $M > 0$. Επειδή ο M δεν είναι άνω φράγμα του $\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$, υπάρχει n_0 ώστε $x_{n_0} > M$.
Επειδή η (x_n) είναι αύξουσα, ισχύει

$$x_n \geq x_{n_0} > M$$

για κάθε $n \geq n_0$. Άρα $x_n \to +\infty$.
Έστω ότι η ακολουθία (x_n) είναι άνω φραγμένη. Ορίζουμε

$$x = \sup\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$$

και θα αποδείξουμε ότι $x_n \to x$.
Έστω $\epsilon > 0$. Επειδή $x - \epsilon < x$, ο $x - \epsilon$ δεν είναι άνω φράγμα του $\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$. Άρα υπάρχει n_0 ώστε $x - \epsilon < x_{n_0}$. Επειδή η (x_n) είναι αύξουσα, ισχύει

$$x - \epsilon < x_{n_0} \leq x_n$$

για κάθε $n \geq n_0$. Ακόμη, επειδή ο x είναι άνω φράγμα του $\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$, ισχύει

$$x_n \leq x < x + \epsilon$$

για κάθε n. Άρα ισχύει

$$x - \epsilon < x_n < x + \epsilon$$

για κάθε $n \geq n_0$. Άρα $x_n \to x$.
[β] Ομοίως. □

Ας δούμε ένα χρήσιμο συμπλήρωμα του θεωρήματος 2.1. Αν μια ακολουθία (x_n) είναι αύξουσα και άνω φραγμένη, τότε, σύμφωνα με το θεώρημα 2.1, η (x_n) συγκλίνει και το όριό της, έστω x, είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του συνόλου των όρων της. Επομένως, ισχύει $x_n \leq x$ για κάθε n. Αν, επιπλέον, η (x_n) δεν είναι τελικά σταθερή, τότε ισχύει $x_n < x$ για κάθε n.

Πράγματι, αν ήταν $x_{n_0} = x$ για κάποιον n_0, τότε (επειδή η ακολουθία είναι αύξουσα) θα ίσχυε $x = x_{n_0} \leq x_n \leq x$ για κάθε $n \geq n_0$ και, επομένως, η ακολουθία θα ήταν τελικά σταθερή. Ειδικώτερα, αν η (x_n) είναι γνησίως αύξουσα, τότε ισχύει $x_n < x$ για κάθε n. Τα ανάλογα ισχύουν για φθίνουσες ακολουθίες. Συμπέρασμα:

Αν η ακολουθία (x_n) είναι αύξουσα και $x_n \to x$, τότε ισχύει $x_n \leq x$ για κάθε n. Αν, επιπλέον, η (x_n) δεν είναι τελικά σταθερή (και, ειδικώτερα, αν είναι γνησίως αύξουσα), τότε ισχύει $x_n < x$ για κάθε n.

Αν η ακολουθία (x_n) είναι φθίνουσα και $x_n \to x$, τότε ισχύει $x_n \geq x$ για κάθε n. Αν, επιπλέον, η (x_n) δεν είναι τελικά σταθερή (και, ειδικώτερα, αν είναι γνησίως φθίνουσα), τότε ισχύει $x_n > x$ για κάθε n.

Το θεώρημα 2.1 δεν παρέχει τρόπο υπολογισμού του ορίου μονότονης ακολουθίας. Όμως, εκμεταλλευόμενοι την πληροφορία ότι μια ακολουθία *έχει* όριο, μπορεί να καταφέρουμε με κάποιο τρόπο (ανάλογα με την περίπτωση) να υπολογίσουμε και την τιμή του ορίου.[19]

Παράδειγμα 2.4.1. Έστω ακολουθία (x_n) η οποία καθορίζεται από τον πρώτο όρο $x_1 = 1$ και από τον αναδρομικό τύπο

$$x_{n+1} = \tfrac{3x_n+6}{x_n+4} \qquad \text{για } \ n \geq 1.$$

Οι αρχικοί όροι της ακολουθίας είναι οι

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \tfrac{9}{5}, \quad x_3 = \tfrac{57}{29}, \quad x_4 = \tfrac{345}{173}.$$

Για να ορίζεται, πράγματι, μια τέτοια ακολουθία πρέπει να βεβαιωθούμε ότι κανείς όρος της δεν θα πάρει την τιμή -4, διότι σε μια τέτοια περίπτωση δεν θα μπορούσε να υπολογιστεί ο αμέσως επόμενος όρος. Εύκολα βλέπουμε, όμως, ότι ισχύει

$$x_n \geq 0$$

για κάθε n. Πράγματι, ισχύει $x_1 = 1 \geq 0$ και, αν υποτεθεί ότι ισχύει $x_n \geq 0$, τότε, προφανώς, από τον αναδρομικό τύπο θα ισχύει και $x_{n+1} \geq 0$.

Από τους αρχικούς όρους υποψιαζόμαστε ότι η ακολουθία μπορεί να είναι αύξουσα, οπότε εξετάζουμε την διαφορά $x_{n+1} - x_n$ ως εξής:

$$x_{n+1} - x_n = \tfrac{3x_n+6}{x_n+4} - \tfrac{3x_{n-1}+6}{x_{n-1}+4} = \tfrac{6(x_n - x_{n-1})}{(x_n+4)(x_{n-1}+4)}.$$

Βλέπουμε ότι το πρόσημο της διαφοράς $x_{n+1}-x_n$ είναι ανεξάρτητο του n και, επειδή $x_2-x_1 > 0$, συνεπάγεται ότι ισχύει $x_{n+1} - x_n > 0$ για κάθε n. Άρα η (x_n) είναι γνησίως αύξουσα.

Από την σχέση $x_{n+1} > x_n$ και τον αναδρομικό τύπο έχουμε ότι ισχύει $\frac{3x_n+6}{x_n+4} > x_n$ και, επομένως, ${x_n}^2 + x_n - 6 < 0$ ή, ισοδύναμα, $-3 < x_n < 2$ για κάθε n. Δηλαδή, η (x_n) εκτός από γνησίως αύξουσα είναι και φραγμένη και, επομένως, συγκλίνει.

Έστω, λοιπόν, ότι $x_n \to x$. Από το ότι ισχύει $x_n \geq 0$ για κάθε n συνεπάγεται $x \geq 0$ και, τώρα, από τον αναδρομικό τύπο συνεπάγεται

$$x = \tfrac{3x+6}{x+4}.$$

Άρα $x = -3$ ή $x = 2$ και, επειδή $x \geq 0$, συμπεραίνουμε ότι $x = 2$. Δηλαδή, $x_n \to 2$.

Μάλιστα, επειδή η (x_n) είναι γνησίως αύξουσα, συνεπάγεται ότι ισχύει $x_n < 2$ για κάθε n.

Υπάρχουν και άλλοι τρόποι χειρισμού αυτού του παραδείγματος. Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες:

Δεύτερος τρόπος: Αφού αποδείξουμε ότι ισχύει $x_n \geq 0$ για κάθε n και ότι η (x_n) είναι αύξουσα (όπως παραπάνω), συμπεραίνουμε ότι η (x_n) έχει όριο. Αν $x_n \to +\infty$, τότε, επειδή από τον αναδρομικό τύπο συνεπάγεται ότι ισχύει $x_{n+1} = \frac{3+(6/x_n)}{1+(4/x_n)}$ για κάθε n, βρίσκουμε $+\infty = 3$, το οποίο είναι άτοπο. Άρα η (x_n) είναι φραγμένη και, όπως παραπάνω, αποδεικνύουμε ότι $x_n \to 2$.

[19] Δείτε, για παράδειγμα, την άσκηση 2.3.23.

Τρίτος τρόπος: Παρατηρούμε τους πρώτους όρους. Είναι $x_1 = 1$, $x_2 = 1.8$, $x_3 = 1.9655...$ και $x_4 = 1.994219\ldots$. Έτσι υποψιαζόμαστε ότι η (x_n) συγκλίνει στον 2, ότι είναι γνησίως αύξουσα και ότι ισχύει $x_n < 2$ για κάθε n. Αποδεικνύουμε με επαγωγή την τρίτη σχέση και, κατόπιν, και με τη βοήθεια του αναδρομικού τύπου, αποδεικνύουμε ότι η (x_n) είναι γνησίως αύξουσα και ότι συγκλίνει στον 2.

Ακολουθούν δύο πάρα πολύ σημαντικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 2.4.2. Θα αποδείξουμε ότι η ακολουθία $\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)$ συγκλίνει.
Θέτουμε $x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ για κάθε n.
Είναι φανερό ότι ισχύει

$$x_{n+1} = 1 + \tfrac{1}{1!} + \tfrac{1}{2!} + \cdots + \tfrac{1}{n!} + \tfrac{1}{(n+1)!} = x_n + \tfrac{1}{(n+1)!} > x_n$$

για κάθε n, οπότε η (x_n) είναι γνησίως αύξουσα.
Τώρα, εύκολα βλέπουμε ότι ισχύει

$$n! \geq 2^{n-1}$$

για κάθε n. Πράγματι, για $n = 1$ η ανισότητα ισχύει ως ισότητα και για $n \geq 2$ είναι $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \geq 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2 = 2^{n-1}$.
Επομένως,

$$x_n \leq 1 + \tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2} + \cdots + \tfrac{1}{2^{n-1}} = 1 + \tfrac{1-(1/2^n)}{1-(1/2)} < 1 + \tfrac{1}{1-(1/2)} = 3.$$

για κάθε n. Άρα η (x_n) είναι και άνω φραγμένη και, επομένως, συγκλίνει.

Παράδειγμα 2.4.3. Θα αποδείξουμε ότι η ακολουθία $\left((1 + \frac{1}{n})^n\right)$ συγκλίνει και, μάλιστα, ότι το όριό της ταυτίζεται με το όριο της προηγούμενης ακολουθίας.[20]
Θέτουμε $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ για κάθε n.
Βάσει του διωνυμικού τύπου του Newton με $x = \frac{1}{n}$ και $y = 1$, έχουμε

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + \tbinom{n}{1}\tfrac{1}{n} + \tbinom{n}{2}\tfrac{1}{n^2} + \cdots + \tbinom{n}{k}\tfrac{1}{n^k} + \cdots + \tbinom{n}{n}\tfrac{1}{n^n} \\ &= 1 + \tfrac{1}{1!} + \tfrac{1}{2!}(1 - \tfrac{1}{n}) + \cdots + \tfrac{1}{k!}(1 - \tfrac{1}{n})(1 - \tfrac{2}{n}) \cdots (1 - \tfrac{k-1}{n}) \\ &\quad + \cdots + \tfrac{1}{n!}(1 - \tfrac{1}{n}) \cdots (1 - \tfrac{n-1}{n}). \end{aligned} \tag{2.2}$$

και, ομοίως, για τον $n+1$,

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 1 + \tbinom{n+1}{1}\tfrac{1}{n+1} + \tbinom{n+1}{2}\tfrac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \tbinom{n+1}{k}\tfrac{1}{(n+1)^k} + \cdots + \tbinom{n+1}{n}\tfrac{1}{(n+1)^n} \\ &\quad + \tbinom{n+1}{n+1}\tfrac{1}{(n+1)^{n+1}} \\ &= 1 + \tfrac{1}{1!} + \tfrac{1}{2!}(1 - \tfrac{1}{n+1}) + \cdots + \tfrac{1}{k!}(1 - \tfrac{1}{n+1})(1 - \tfrac{2}{n+1}) \cdots (1 - \tfrac{k-1}{n+1}) \\ &\quad + \cdots + \tfrac{1}{n!}(1 - \tfrac{1}{n+1}) \cdots (1 - \tfrac{n-1}{n+1}) + \tfrac{1}{(n+1)!}(1 - \tfrac{1}{n+1}) \cdots (1 - \tfrac{n-1}{n+1})(1 - \tfrac{n}{n+1}). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Τώρα συγκρίνουμε τα τελικά αθροίσματα στις (2.2) και (2.3). Για κάθε k με $2 \leq k \leq n$, ο k-οστός όρος στο τελικό άθροισμα της (2.2) είναι μικρότερος από τον k-οστό όρο στο τελικό άθροισμα της (2.3), διότι για να περάσουμε από τον πρώτο στον δεύτερο αντικαθιστούμε σε κάθε παρένθεση του πρώτου τον παρονομαστή n με τον παρονομαστή $n+1$. Επίσης, το τελικό άθροισμα της (2.3) έχει έναν επιπλέον *θετικό* όρο, αυτόν που αντιστοιχεί στον $k = n+1$. Άρα

$$a_n < a_{n+1}$$

για κάθε n, οπότε η ακολουθία (a_n) είναι γνησίως αύξουσα.
Θεωρούμε πάλι $x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ για κάθε n, όπως στο προηγούμενο παράδειγμα.

[20] Ένας εναλλακτικός τρόπος χειρισμού της ακολουθίας αυτής είναι στην άσκηση 2.4.4.

Γνωρίζουμε ότι η (x_n) συγκλίνει και ότι ισχύει $x_n < 3$ για κάθε n.
Επειδή όλες οι παρενθέσεις στο τελικό άθροισμα της (2.2) είναι > 0 και < 1, ισχύει

$$a_n \leq 1 + \tfrac{1}{1!} + \tfrac{1}{2!} + \cdots + \tfrac{1}{k!} + \cdots + \tfrac{1}{n!} = x_n < 3 \tag{2.4}$$

για κάθε n. Άρα η ακολουθία (a_n) είναι, εκτός από γνησίως αύξουσα, και άνω φραγμένη και, επομένως, συγκλίνει. Ας συμβολίσουμε a το όριο της (a_n). Δηλαδή

$$a_n \to a.$$

Τώρα σταθεροποιούμε, προσωρινά, τον k στο τελικό άθροισμα της (2.2) και, παραλείποντας τους (θετικούς) όρους μετά από τον k-οστό, βρίσκουμε

$$a_n \geq 1 + \tfrac{1}{1!} + \tfrac{1}{2!}(1 - \tfrac{1}{n}) + \cdots + \tfrac{1}{k!}(1 - \tfrac{1}{n})(1 - \tfrac{2}{n}) \cdots (1 - \tfrac{k-1}{n}).$$

Παίρνοντας όρια καθώς $n \to +\infty$, βρίσκουμε (με τον σταθεροποιημένο k)

$$a \geq 1 + \tfrac{1}{1!} + \tfrac{1}{2!} + \cdots + \tfrac{1}{k!} = x_k.$$

Αυτό ισχύει, λοιπόν, για κάθε k και, με αλλαγή συμβολισμού, $a \geq x_n$ για κάθε n. Από αυτό και από την (2.4) συνεπάγεται ότι ισχύει

$$a_n \leq x_n \leq a$$

για κάθε n και, επειδή $a_n \to a$, συνεπάγεται

$$x_n \to a.$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.14. *Σύμφωνα με τα παραδείγματα 2.4.2 και 2.4.3, οι ακολουθίες* $\big(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\big)$ *και* $\big((1+\frac{1}{n})^n\big)$ *συγκλίνουν στον ίδιο αριθμό. Το κοινό όριο των δύο ακολουθιών το συμβολίζουμε με το γράμμα* e*. Δηλαδή, ορίζουμε*

$$e = \lim_{n\to+\infty} \big(1 + \tfrac{1}{n}\big)^n = \lim_{n\to+\infty} \big(1 + \tfrac{1}{1!} + \tfrac{1}{2!} + \cdots + \tfrac{1}{n!}\big).$$

Πρέπει να τονιστεί ότι ο αριθμός e *ορίζεται* να είναι το κοινό όριο των δύο συγκεκριμένων ακολουθιών $\big(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\big)$ και $\big((1 + \frac{1}{n})^n\big)$. *Δεν αποδεικνύεται* ότι ο e είναι ίσος με το όριο των δύο ακολουθιών, διότι ο e δεν είναι κάποιος εκ των προτέρων γνωστός αριθμός.

Επειδή η ακολουθία $((1 + \frac{1}{n})^n)$ είναι γνησίως αύξουσα, ισχύει $(1 + \frac{1}{n})^n < e$ για κάθε n. Ομοίως, ισχύει $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} < e$ για κάθε n.

Τώρα, ας πούμε δύο λόγια για την όχι τόσο γνωστή απροσδιόριστη μορφή $1^{+\infty}$ (δείτε τον ορισμό 1.10). Στην περίπτωση $x_n \to 1$ και $y_n \to +\infty$ συχνά καταλήγει κανείς στο λανθασμένο συμπέρασμα: ${x_n}^{y_n} \to 1$. Η "λογική διαδρομή" φαίνεται να είναι η: ${x_n}^{y_n} \to 1^{y_n} = 1 \to 1$ ή κάτι τέτοιο. *Δείτε, όμως, πώς το όριο* $(1 + \frac{1}{n})^n \to e$ *ακυρώνει ένα τέτοιο συμπέρασμα*. Πράγματι, έχουμε $1 + \frac{1}{n} \to 1$ και $n \to +\infty$ αλλά *δεν* συνεπάγεται $(1 + \frac{1}{n})^n \to 1$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.15. *Ονομάζουμε* **φυσικούς λογαρίθμους** *τους λογαρίθμους με βάση τον* e *και χρησιμοποιούμε για κάθε* $y > 0$*, αντί του* $\log_e y$*, τα απλούστερα σύμβολα*

$$\log y \quad \textit{ή} \quad \ln y.$$

Η πρόταση 2.13 είναι, φυσικά, εξειδίκευση της πρότασης 1.9.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.13. [α] $\log(y_1 y_2) = \log y_1 + \log y_2$ *για κάθε* $y_1, y_2 > 0$.
[β] $\log(y^z) = z \log y$ *για κάθε* $y > 0$ *και κάθε* z.
[γ] $\log_a y = \frac{\log y}{\log a}$ *για κάθε* $y > 0$ *και κάθε* $a > 0$, $a \neq 1$.
[δ] $\log 1 = 0$, $\log e = 1$.
[ε] *Αν* $0 < y_1 < y_2$*, τότε* $\log y_1 < \log y_2$.

Έχουμε ακόμη δύο σημαντικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 2.4.4. Θα αποδείξουμε ότι[21]

$$1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\cdots+\tfrac{1}{n}\to+\infty.$$

Θέτουμε $x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ για κάθε n.
Ισχύει $x_{n+1}-x_n=\frac{1}{n+1}>0$ για κάθε n, οπότε η (x_n) είναι αύξουσα και, επομένως, έχει όριο. Παρατηρούμε ότι για κάθε n ισχύει

$$x_{2n}-x_n=\tfrac{1}{n+1}+\cdots+\tfrac{1}{n+n}\geq\tfrac{1}{n+n}+\cdots+\tfrac{1}{n+n}=n\,\tfrac{1}{n+n}=\tfrac{1}{2}.$$

Αν το όριο της (x_n) είναι αριθμός x, τότε, επειδή η (x_n) είναι αύξουσα, συνεπάγεται ότι ισχύει $x_n\leq x_{2n}\leq x$ για κάθε x. Επειδή $x_n\to x$, συνεπάγεται $x_{2n}\to x$. Άρα $x_{2n}-x_n\to x-x=0$ και καταλήγουμε σε άτοπο, αφού ισχύει $x_{2n}-x_n\geq\frac{1}{2}$ για κάθε n.
Άρα $x_n\to+\infty$.
Υπάρχει άλλος ένας τρόπος να αποδείξουμε ότι $x_n\to+\infty$ τον οποίο αξίζει να μνημονεύσουμε. Αρχικά παρατηρούμε ότι για κάθε φυσικό n υπάρχει μοναδικός ακέραιος $k\geq 0$ έτσι ώστε $2^k\leq n<2^{k+1}$. Δηλαδή, ο n είναι ανάμεσα σε δύο διαδοχικές δυνάμεις του 2. Πράγματι, η ανισότητα αυτή ισοδυναμεί με την $k\leq\log_2 n<k+1$, οπότε ο ακέραιος που ζητάμε είναι ο $k=[\log_2 n]$. Τώρα, με αυτόν τον k, έχουμε

$$\begin{aligned}x_n&=1+\tfrac{1}{2}+(\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4})+(\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{8})+\cdots+(\tfrac{1}{2^{k-1}+1}+\cdots+\tfrac{1}{2^k})+\tfrac{1}{2^k+1}+\cdots+\tfrac{1}{n}\\&\geq 1+\tfrac{1}{2}+(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4})+(\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{8})+\cdots+(\tfrac{1}{2^k}+\cdots+\tfrac{1}{2^k})\\&=1+\tfrac{1}{2}+2\tfrac{1}{4}+4\tfrac{1}{8}+\cdots+2^{k-1}\tfrac{1}{2^k}\\&=1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}+\cdots+\tfrac{1}{2}=1+\tfrac{k}{2}.\end{aligned}$$

Άρα ισχύει

$$x_n\geq 1+\tfrac{1}{2}[\log_2 n]>1+\tfrac{1}{2}(\log_2 n-1)=\tfrac{1}{2}\log_2 n+\tfrac{1}{2}$$

για κάθε n και, επειδή $\log_2 n\to+\infty$, συνεπάγεται $x_n\to+\infty$.

Παράδειγμα 2.4.5. Θα αποδείξουμε ότι[22]

$$\text{Η ακολουθία}\quad\big(1+\tfrac{1}{2^2}+\tfrac{1}{3^2}+\cdots+\tfrac{1}{n^2}\big)\quad\text{συγκλίνει.}$$

Θέτουμε $x_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$ για κάθε n.
Ισχύει $x_{n+1}-x_n=\frac{1}{(n+1)^2}>0$ για κάθε n, οπότε η (x_n) είναι αύξουσα. Παρατηρούμε ότι ισχύει

$$x_n\leq 1+\tfrac{1}{1\cdot 2}+\tfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\tfrac{1}{(n-1)n}=1+(\tfrac{1}{1}-\tfrac{1}{2})+(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3})+\cdots+(\tfrac{1}{n-1}-\tfrac{1}{n})=2-\tfrac{1}{n}<2$$

για κάθε n. Άρα η (x_n) είναι και άνω φραγμένη και, επομένως, συγκλίνει.

ΕΓΚΙΒΩΤΙΣΜΕΝΑ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΑ. *Έστω ακολουθία διαστημάτων $[a_1,b_1]$, $[a_2,b_2]$, … ώστε να ισχύει $[a_{n+1},b_{n+1}]\subseteq[a_n,b_n]$ για κάθε n. Ισοδύναμα, έστω αύξουσα ακολουθία (a_n) και φθίνουσα ακολουθία (b_n) ώστε να ισχύει $a_n\leq b_n$ για κάθε n. Τότε:*
(i) οι ακολουθίες (a_n) και (b_n) συγκλίνουν.
(ii) υπάρχει τουλάχιστον ένας x ώστε να ισχύει $a_n\leq x\leq b_n$ για κάθε n.
(iii) υπάρχει μοναδικός x με την ιδιότητα που αναφέρεται στο (ii) αν και μόνο αν $b_n-a_n\to 0$.
Στην περίπτωση (iii), οι (a_n), (b_n) έχουν το ίδιο όριο και ο μοναδικός x είναι το κοινό όριο των δύο ακολουθιών.

[21] Άλλοι τρόποι αντιμετώπισης της ακολουθίας αυτής είναι στις ασκήσεις 2.5.4, 2.6.2 και 7.3.20 και στα παραδείγματα 8.2.7, 8.2.10 και 8.3.1. Σχετικές είναι και οι ασκήσεις 2.4.6, 6.4.11.

[22] Για εναλλακτικούς τρόπους δείτε τα παραδείγματα 2.6.1, 8.2.7 και 8.2.10 και τις ασκήσεις 6.4.11, 7.3.20 και 8.2.1.

Απόδειξη. Επειδή η (a_n) είναι αύξουσα και η (b_n) είναι φθίνουσα, ισχύει

$$a_1 \leq a_n \leq b_n \leq b_1$$

για κάθε n, οπότε η (a_n) είναι, εκτός από αύξουσα, άνω φραγμένη (από τον b_1 για παράδειγμα) και η (b_n) είναι, εκτός από φθίνουσα, κάτω φραγμένη (από τον a_1 για παράδειγμα). Άρα και οι δύο ακολουθίες συγκλίνουν και έστω

$$a_n \to a, \qquad b_n \to b.$$

Επειδή ισχύει $a_n \leq b_n$ για κάθε n, συνεπάγεται $a \leq b$. Λόγω της μονοτονίας των δύο ακολουθιών, ισχύει

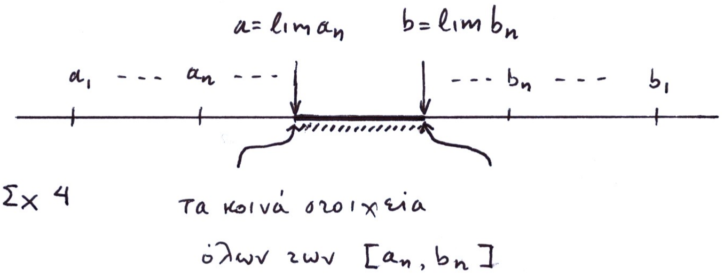
$$a_n \leq a \leq b \leq b_n$$

για κάθε n.
Για κάθε $x \in [a, b]$ ισχύει $a_n \leq a \leq x \leq b \leq b_n$ για κάθε n. Αντιστρόφως, αν για κάποιον x ισχύει $a_n \leq x \leq b_n$ για κάθε n, τότε $a \leq x \leq b$, δηλαδή $x \in [a, b]$.
Άρα οι x για τους οποίους ισχύει $a_n \leq x \leq b_n$ για κάθε n είναι ακριβώς τα στοιχεία του διαστήματος $[a, b]$. Επομένως, υπάρχει μοναδικός τέτοιος x αν και μόνο αν το διάστημα $[a, b]$ είναι μονοσύνολο ή, ισοδύναμα, $a = b$ ή, ισοδύναμα, $b_n - a_n \to 0$. Στην περίπτωση αυτή ο μοναδικός x είναι ο $x = a = b$. $\square$

Το $a_n \leq x \leq b_n$ είναι, φυσικά, ισοδύναμο με το $x \in [a_n, b_n]$. Επομένως, το να ισχύει $a_n \leq x \leq b_n$ για κάθε n σημαίνει ότι ο x ανήκει σε όλα τα διαστήματα $[a_n, b_n]$, δηλαδή στην τομή των διαστημάτων αυτών. Άρα μέσα στην απόδειξη της προηγούμενης πρότασης βρίσκεται το εξής συμπέρασμα:
Αν τα διαστήματα $[a_n, b_n]$ είναι εγκιβωτισμένα, τότε

$$\textstyle\bigcap_{n=1}^{+\infty}[a_n, b_n] = [a, b],$$

όπου $a = \lim_{n\to+\infty} a_n$ και $b = \lim_{n\to+\infty} b_n$. Δείτε το σχήμα 4.



Σχ 4

Παράδειγμα 2.4.6. Έστω $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$. Θεωρούμε οποιονδήποτε $x \in [0, 1)$, δηλαδή

$$0 \leq x < 1. \tag{2.5}$$

Προφανώς, ο x ανήκει σε ακριβώς ένα από τα p διαδοχικά διαστήματα

$$\big[0, \tfrac{1}{p}\big), \big[\tfrac{1}{p}, \tfrac{2}{p}\big), \ldots, \big[\tfrac{p-1}{p}, 1\big)$$

καθένα από τα οποία έχει μήκος $\frac{1}{p}$. Πώς βρίσκουμε σε ποιό από αυτά τα διαστήματα ανήκει ο x; Γράφουμε $\frac{k}{p} \leq x < \frac{k+1}{p}$ και λύνουμε ως προς $k = 0, 1, \ldots, p-1$. Πράγματι, έχουμε, ισοδύναμα, $k \leq px < k+1$ και, επομένως, η λύση είναι $k = [px]$. Για να ελέγξουμε αν όντως ο συγκεκριμένος k είναι ένας από τους $0, 1, \ldots, p-1$ παρατηρούμε ότι από την υπόθεση (2.5) συνεπάγεται $0 \leq$

$px < p$, οπότε το ακέραιο μέρος του px είναι ένας από τους $0, 1, \ldots, p-1$.
Θέτουμε $x_1 = [px]$ (δηλαδή τον k που βρήκαμε) και έχουμε ότι

$$\frac{x_1}{p} \leq x < \frac{x_1}{p} + \frac{1}{p} \qquad \text{για κάποιον } x_1 \in \{0, 1, \ldots, p-1\}. \tag{2.6}$$

Τώρα, χωρίζουμε το διάστημα $[\frac{x_1}{p}, \frac{x_1}{p} + \frac{1}{p})$, το οποίο έχει μήκος $\frac{1}{p}$, στα p διαδοχικά διαστήματα

$$\big[\tfrac{x_1}{p}, \tfrac{x_1}{p} + \tfrac{1}{p^2}\big), \big[\tfrac{x_1}{p} + \tfrac{1}{p^2}, \tfrac{x_1}{p} + \tfrac{2}{p^2}\big), \ldots, \big[\tfrac{x_1}{p} + \tfrac{p-1}{p^2}, \tfrac{x_1}{p} + \tfrac{1}{p}\big)$$

καθένα από τα οποία έχει μήκος $\frac{1}{p^2}$. Ο x ανήκει σε ακριβώς ένα από αυτά τα διαστήματα και, όπως πριν, γράφουμε $\frac{x_1}{p} + \frac{k}{p^2} \leq x < \frac{x_1}{p} + \frac{k+1}{p^2}$ και βρίσκουμε $k \leq p^2x - px_1 < k+1$, δηλαδή $k = [p^2x - px_1]$. Από την (2.6) συνεπάγεται $0 \leq p^2x - px_1 < p$ και, επομένως, το ακέραιο μερος του $p^2x - px_1$ είναι ένας από τους $0, 1, \ldots, p-1$.
Θέτουμε $x_2 = [p^2x - px_1]$ (δηλαδή τον k που βρήκαμε) και έχουμε ότι

$$\frac{x_1}{p} + \frac{x_2}{p^2} \leq x < \frac{x_1}{p} + \frac{x_2}{p^2} + \frac{1}{p^2} \qquad \text{για κάποιους } x_1, x_2 \in \{0, 1, \ldots, p-1\}.$$

Συνεχίζουμε επαγωγικά. Έστω ότι στο n-οστό στάδιο έχουμε καταλήξει στο ότι

$$\frac{x_1}{p} + \cdots + \frac{x_n}{p^n} \leq x < \frac{x_1}{p} + \cdots + \frac{x_n}{p^n} + \frac{1}{p^n} \qquad \text{για κάποιους } x_1, \ldots, x_n \in \{0, 1, \ldots, p-1\}. \tag{2.7}$$

Χωρίζουμε το διάστημα $[\frac{x_1}{p} + \cdots + \frac{x_n}{p^n}, \frac{x_1}{p} + \cdots + \frac{x_n}{p^n} + \frac{1}{p^n})$, το οποίο έχει μήκος $\frac{1}{p^n}$, σε p διαδοχικά διαστήματα της μορφής $[\frac{x_1}{p} + \cdots + \frac{x_n}{p^n} + \frac{k}{p^{n+1}}, \frac{x_1}{p} + \cdots + \frac{x_n}{p^n} + \frac{k+1}{p^{n+1}})$ με $k = 0, 1, \ldots, p-1$, καθένα από τα οποία έχει μήκος $\frac{1}{p^{n+1}}$. Ο x ανήκει σε ακριβώς ένα από αυτά τα διαστήματα και για να το βρούμε γράφουμε $\frac{x_1}{p} + \cdots + \frac{x_n}{p^n} + \frac{k}{p^{n+1}} \leq x < \frac{x_1}{p} + \cdots + \frac{x_n}{p^n} + \frac{k+1}{p^{n+1}}$ και βρίσκουμε $k \leq p^{n+1}x - p^nx_1 - \cdots - px_n < k+1$ δηλαδή $k = [p^{n+1}x - p^nx_1 - \cdots - px_n]$. Από την (2.7) συνεπάγεται $0 \leq p^{n+1}x - p^nx_1 - \cdots - px_n < p$, οπότε το ακέραιο μερος του $p^{n+1}x - p^nx_1 - \cdots - px_n$ είναι ένας από τους $0, 1, \ldots, p-1$.
Θέτουμε $x_{n+1} = [p^{n+1}x - p^nx_1 - \cdots - px_n]$ και έχουμε ότι

$$\frac{x_1}{p} + \cdots + \frac{x_{n+1}}{p^{n+1}} \leq x < \frac{x_1}{p} + \cdots + \frac{x_{n+1}}{p^{n+1}} + \frac{1}{p^{n+1}} \qquad \text{για κάποιους } x_1, \ldots, x_{n+1} \in \{0, 1, \ldots, p-1\}.$$

Άρα, με αυτόν τον τρόπο, από τον οποιονδήποτε $x \in [0, 1)$ ορίζονται τρεις ακολουθίες: η (x_n), η (s_n) και η (t_n). Οι δύο τελευταίες ορίζονται για κάθε n με τους τύπους:

$$s_n = \frac{x_1}{p} + \cdots + \frac{x_n}{p^n}, \qquad t_n = \frac{x_1}{p} + \cdots + \frac{x_n}{p^n} + \frac{1}{p^n}.$$

Είδαμε ότι, για κάθε n, ο x_n είναι ένας από τους ακεραίους $0, 1, \ldots, p-1$ και ότι ισχύει

$$s_n \leq x < t_n \tag{2.8}$$

για κάθε n. Επίσης, από τον τρόπο κατασκευής των ακολουθιών αυτών έχουμε ότι κάθε διάστημα $[s_n, t_n)$ περιέχει το επόμενο διάστημα $[s_{n+1}, t_{n+1})$. Δηλαδή, η (s_n) είναι αύξουσα και η (t_n) είναι φθίνουσα. Αυτό μπορούμε να το ελέγξουμε ανεξάρτητα και ως εξής:

$$s_{n+1} = s_n + \frac{x_{n+1}}{p^{n+1}} \geq s_n\,, \quad t_{n+1} = \big(t_n - \frac{1}{p^n}\big) + \big(\frac{x_{n+1}}{p^{n+1}} + \frac{1}{p^{n+1}}\big) \leq t_n - \frac{1}{p^n} + \frac{p-1}{p^{n+1}} + \frac{1}{p^{n+1}} = t_n.$$

Επομένως, οι ακολουθίες (s_n) και (t_n) ικανοποιούν τις υποθέσεις της πρότασης με τα εγκιβωτισμένα διαστήματα. Μάλιστα, είναι

$$t_n - s_n = \frac{1}{p^n} \to 0,$$

οπότε οι (s_n), (t_n) συγκλίνουν στον ίδιο αριθμό. Ποιό είναι αυτό το κοινό όριο; Μα από την (2.8) αμέσως συνεπάγεται ότι

$$s_n \to x, \qquad t_n \to x.$$

Η ακολουθία (x_n) έχει μία επιπλέον αξιοσημείωτη ιδιότητα: *δεν είναι τελικά σταθερή* $p-1$.
Ας υποθέσουμε (για να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $x_n = p-1$ για κάθε $n \geq n_0$. Τότε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει

$$t_{n+1} = \big(t_n - \tfrac{1}{p^n}\big) + \big(\tfrac{x_{n+1}}{p^{n+1}} + \tfrac{1}{p^{n+1}}\big) = t_n - \tfrac{1}{p^n} + \tfrac{p-1}{p^{n+1}} + \tfrac{1}{p^{n+1}} = t_n.$$

Άρα η (t_n) είναι τελικά σταθερή και, επειδή $t_n \to x$, ισχύει τελικά $t_n = x$. Αυτό αντιφάσκει με την (2.8).

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.16. *Η (x_n) ονομάζεται ακολουθία των p-**αδικών ψηφίων** του x.*
*Η (s_n) ονομάζεται ακολουθία των p-**αδικών προσεγγίσεων (καθ' έλλειψιν)** του x και η (t_n) ακολουθία των p-**αδικών προσεγγίσεων καθ' υπεροχήν** του x.*

Μερικές απλές περιπτώσεις είναι:
η περίπτωση $p = 2$ με τα δυαδικά ψηφία $0, 1$,
η περίπτωση $p = 3$ με τα τριαδικά ψηφία $0, 1, 2$,
η περίπτωση $p = 10$ με τα δεκαδικά ψηφία $0, 1, \ldots, 9$ και
η περίπτωση $p = 16$ με τα δεκαεξαδικά ψηφία $0, 1, \ldots, 14, 15$.

Η ακολουθία των p-αδικών προσεγγίσεων θα μελετηθεί πληρέστερα στην υποενότητα 8.2.2.

Ασκήσεις.

2.4.1. Βρείτε τα όρια των ακολουθιών $\big(\frac{2^n n!}{n^n}\big)$ και $\big(\frac{4^n n!}{n^n}\big)$.

2.4.2. Με τα σύμβολα του παραδείγματος 2.4.2, αποδείξτε ότι για κάθε $n \geq 4$ ισχύει $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \leq x_n \leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$ και συμπεράνατε ότι $2 < \frac{32}{12} \leq e \leq \frac{35}{12} < 3$. Προσπαθήστε να βρείτε με παρόμοιο τρόπο ακόμη καλύτερες εκτιμήσεις για την αριθμητική τιμή του e.

2.4.3. [23] Με επαγωγή ως προς τον k, αποδείξτε ότι $(1 + \frac{k}{n})^n \to e^k$ (όταν $n \to +\infty$, φυσικά) για κάθε $k \in \mathbb{N}$.
Να αποδείξετε το όριο $(1 + \frac{k}{n})^n \to e^k$ γενικότερα για $k \in \mathbb{Z}$.

2.4.4. [24] Αποδείξτε ότι η ακολουθία $\big((1 + \frac{1}{n})^n\big)$ είναι αύξουσα, με δεύτερο τρόπο, ως εξής: μετατρέψτε την ανισότητα $(1 + \frac{1}{n})^n \leq (1 + \frac{1}{n+1})^{n+1}$ σε $\frac{n}{n+1} \leq \big(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\big)^{n+1} = \big(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\big)^{n+1}$ και αποδείξτε την τελευταία με την ανισότητα του Bernoulli.
Αποδείξτε με όμοιο τρόπο ότι η ακολουθία $\big((1 + \frac{1}{n})^{n+1}\big)$ είναι φθίνουσα.
Συνδυάζοντας τα προηγούμενα με την πρόταση για τα εγκιβωτισμένα διαστήματα, αποδείξτε ότι οι δύο ακολουθίες συγκλίνουν και ότι έχουν το ίδιο όριο, το οποίο συμβολίζουμε e.
Πολλαπλασιάστε τις ανισότητες $(\frac{k+1}{k})^k \leq e \leq (\frac{k+1}{k})^{k+1}$ για $k = 1, 2, \ldots, n-1$ και αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{n^n}{n!} \leq e^{n-1} \leq \frac{n^{n+1}}{n!}$ για κάθε n.
Αποδείξτε το ενδιαφέρον όριο[25] $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \to \frac{1}{e}$ και από αυτό το[26] $\sqrt[n]{n!} \to +\infty$.

2.4.5. Αποδείξτε ότι ισχύει $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \leq \log_2 n + 1$ για κάθε n, παραλλάσσοντας την δεύτερη απόδειξη στο παράδειγμα 2.4.4.

2.4.6. Δείτε την άσκηση 2.4.4 και θεωρήστε τις ακολουθίες (a_n) και (b_n) με $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \log n$ και $b_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι η (a_n) είναι γνησίως αύξουσα, ότι η (b_n) είναι γνησίως φθίνουσα και ότι οι δύο ακολουθίες συγκλίνουν στον ίδιο αριθμό.[27]

[23] Η άσκηση αυτή συνεχίζεται στην άσκηση 2.5.3.
[24] Δεύτερη προσέγγιση στον αριθμό e.
[25] Θα ξαναδούμε αυτό το όριο στην άσκηση 7.3.19.
[26] Το όριο αυτό υπάρχει και στην άσκηση 2.3.41 και, κυρίως, στο παράδειγμα 8.3.7.
[27] Το κοινό όριο των δύο αυτών ακολουθιών ονομάζεται **σταθερά του Euler** και συμβολίζεται γ. Θα ξαναδούμε το θέμα αυτό στις ασκήσεις 6.4.11 και 7.3.20.

2.4.7. Μιμηθείτε την εργασία στα παραδείγματα 2.4.2 και 2.4.3 και αποδείξτε ότι, αν $t > 0$, τότε οι ακολουθίες $\big(1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n}{n!}\big)$ και $\big((1 + \frac{t}{n})^n\big)$ συγκλίνουν και έχουν το ίδιο όριο.[28]

2.4.8. [α] Έστω $x_1 = 1$ και ότι ισχύει $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{{x_n}^2}$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι η ακολουθία (x_n) είναι αύξουσα και βρείτε το όριό της.

[β] Έστω $x_1 > 0$ και ότι ισχύει $x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι, ανάλογα με την τιμή του x_1, η ακολουθία (x_n) είναι αύξουσα ή φθίνουσα και βρείτε το όριό της.

[γ] Έστω ότι ισχύει $7x_{n+1} = {x_n}^3 + 6$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι, ανάλογα με την τιμή του x_1, η ακολουθία (x_n) είναι αύξουσα ή φθίνουσα και βρείτε το όριό της.

[δ] Έστω $x_1 > 0$ και ότι ισχύει $x_{n+1} = \frac{6+6x_n}{7+x_n}$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι, ανάλογα με την τιμή του x_1, η ακολουθία (x_n) είναι αύξουσα ή φθίνουσα και βρείτε το όριό της.

[ε] Έστω ότι ισχύει $x_{n+1} = 2 - \frac{1}{x_n}$ για κάθε n. Αν $x_1 = 1$, αποδείξτε ότι η ακολουθία (x_n) είναι σταθερή. Αν $x_1 > 1$, αποδείξτε ότι η (x_n) είναι φθίνουσα και βρείτε το όριό της. Αν $x_1 < 1$ και ισχύει $x_1 \neq \frac{k-1}{k}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, αποδείξτε ότι η (x_n) είναι *τελικά* φθίνουσα και βρείτε το όριό της. Τί συμπεραίνετε αν ισχύει $x_1 = \frac{k-1}{k}$ για κάποιον $k \in \mathbb{N}$;

[στ] Έστω $x_1, x_2 > 0$ και ότι ισχύει $x_{n+2} = x_{n+1} + 2x_n$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι η ακολουθία $(\frac{x_{n+1}}{x_n})$ έχει όριο και υπολογίστε το.

[ζ] Έστω ότι ισχύει $x_{n+1} = \sin x_n$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι η ακολουθία (x_n) είναι φραγμένη και, από τον δεύτερο όρο και πέρα, μονότονη και βρείτε το όριό της.

2.4.9. [29] [α] Αν $a > 1$, αποδείξτε ότι η ακολουθία (a^n) είναι αύξουσα και, χρησιμοποιώντας τη σχέση $a^{n+1} = aa^n$, ότι $a^n \to +\infty$. Μελετήστε με τον ίδιο τρόπο και την περίπτωση $0 < a < 1$.

[β] Αν $a > 1$ και $k \in \mathbb{N}$, αποδείξτε ότι η ακολουθία $(\frac{a^n}{n^k})$ είναι τελικά αύξουσα και, χρησιμοποιώντας τη σχέση $\frac{a^{n+1}}{(n+1)^k} = a\frac{n^k}{(n+1)^k}\frac{a^n}{n^k}$, ότι $\frac{a^n}{n^k} \to +\infty$.

[γ] Αν $a > 1$, αποδείξτε ότι η ακολουθία $(\sqrt[n]{a})$ είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη και, χρησιμοποιώντας τη σχέση $\big(\sqrt[2n]{a}\big)^2 = \sqrt[n]{a}$, ότι $\sqrt[n]{a} \to 1$. Τί γίνεται στις περιπτώσεις $a = 1$, $0 < a < 1$;

[δ] Αποδείξτε ότι η ακολουθία $(\sqrt[n]{n})$ είναι φθίνουσα από τον τρίτο όρο της και πέρα και κάτω φραγμένη και ότι $\sqrt[n]{n} \to 1$.

[ε] Αποδείξτε ότι η ακολουθία $(\frac{a^n}{n!})$ είναι τελικά φθίνουσα και, με τη σχέση $\frac{a^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{a^n}{n!}\frac{a}{n+1}$, ότι $\frac{a^n}{n!} \to 0$.

2.4.10. [30] Βρείτε ακολουθίες (x_n), (y_n) ώστε $x_n \to 1$, $y_n \to +\infty$ και η $\big({x_n}^{y_n}\big)$ (i) να έχει όριο έναν οποιονδήποτε $c \in [0, +\infty]$ (ii) να μην έχει όριο. Είναι δυνατόν η $\big({x_n}^{y_n}\big)$ να έχει όριο $c \in [-\infty, 0)$;

Βρείτε ακολουθίες (x_n), (y_n) ώστε $x_n \to 1$, $y_n \to -\infty$ και η $\big({x_n}^{y_n}\big)$ (i) να έχει όριο έναν οποιονδήποτε $c \in [0, +\infty]$ (ii) να μην έχει όριο. Είναι δυνατόν η $\big({x_n}^{y_n}\big)$ να έχει όριο $c \in [-\infty, 0)$;

2.4.11. [α] Αν ο b δεν είναι αρνητικός ακέραιος, αποδείξτε ότι $\frac{1}{b+1} + \frac{1}{b+2} + \frac{1}{b+3} + \cdots + \frac{1}{b+n} \to +\infty$.

[β][31] Αποδείξτε με την αρχή της επαγωγής ότι $(1 + a_1)\cdots(1 + a_n) \geq 1 + a_1 + \cdots + a_n$, αν $a_1, \ldots, a_n \geq 0$, και $(1 - a_1)\cdots(1 - a_n) \geq 1 - a_1 - \cdots - a_n$, αν $0 \leq a_1, \ldots, a_n \leq 1$.

Αν ο b δεν είναι αρνητικός ακέραιος, βρείτε το $\lim_{n\to+\infty} \frac{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}{(b+1)(b+2)\cdots(b+n)}$, διακρίνοντας περιπτώσεις $a = b$, $a > b$, $a < b$.

[γ] Έστω ότι ισχύει $x_n > 0$ για κάθε n.

Αν $c < 0$ και αν ισχύει τελικά $n\big(\frac{x_{n+1}}{x_n} - 1\big) \leq c$, αποδείξτε ότι $x_n \to 0$.

Αν $c > 0$ και αν ισχύει τελικά $n\big(\frac{x_{n+1}}{x_n} - 1\big) \geq c$, αποδείξτε ότι $x_n \to +\infty$.

---

[28] Η συνέχεια στην άσκηση 2.5.5.

[29] Άλλες αποδείξεις για τα παραδείγματα 2.3.19 και 2.3.22, 2.3.23, 2.3.24 και 2.3.25.

[30] Μελέτη των απροσδιόριστων μορφών δύναμης. Συνέχεια της άσκησης 2.3.30.

[31] Η πρώτη και η δεύτερη ανισότητα είναι γενικεύσεις της ανισότητας $(1 + a)^n \geq 1 + na$ του Bernoulli για $a \geq 0$ και για $-1 \leq a \leq 0$, αντιστοίχως.

Αν $d < 0$ και αν $n\left(\frac{x_{n+1}}{x_n} - 1\right) \to d$, αποδείξτε ότι $x_n \to 0$.
Αν $d > 0$ και αν $n\left(\frac{x_{n+1}}{x_n} - 1\right) \to d$, αποδείξτε ότι $x_n \to +\infty$.
Δείτε ότι αυτά τα τέσσερα αποτελέσματα είναι επεκτάσεις των αντίστοιχων αποτελεσμάτων της πρότασης 2.10.

Εφαρμόστε τα προηγούμενα για να αποδείξετε ότι $\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2} \to 0$. Μπορείτε να το αποδείξετε χρησιμοποιώντας την πρόταση 2.10;

2.4.12. [32] Έστω $y \geq 0$ και $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Ορίζουμε ακολουθία (x_n) με οποιονδήποτε $x_1 > 0$ και με τον αναδρομικό τύπο $x_{n+1} = \frac{k-1}{k} x_n + \frac{1}{k} \frac{y}{x_n{}^{k-1}}$ για κάθε n.
Αποδείξτε ότι ισχύει $x_n > 0$ για κάθε n.
Αποδείξτε, χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Bernoulli, ότι ισχύει $x_n{}^k \geq y$ για κάθε $n \geq 2$ και, κατόπιν, ότι ισχύει $x_{n+1} \leq x_n$ για κάθε $n \geq 2$.
Συμπεράνατε ότι η (x_n) συγκλίνει και ότι, αν $x = \lim_{n\to+\infty} x_n$, τότε $x^k = y$ και $x \geq 0$.

2.4.13. Έστω ότι ισχύει $x_{n+1} \leq \frac{x_n + x_{n+2}}{2}$ για κάθε n.[33]
Έστω, επιπλέον, η (x_n) είναι φραγμένη. Αποδείξτε ότι η ακολουθία $(x_n - x_{n+1})$ είναι φθίνουσα και ότι $x_n - x_{n+1} \to 0$. Αποδείξτε ότι η (x_n) είναι φθίνουσα. Αποδείξτε ότι η (x_n) συγκλίνει.
Αν η (x_n) δεν είναι φραγμένη, αποδείξτε ότι, και πάλι, έχει όριο.

2.4.14. Έστω $0 < a \leq b$.
Αν $x_1 = a$ και $y_1 = b$ και ισχύει $x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$ και $y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$ για κάθε n, αποδείξτε ότι η (x_n) είναι αύξουσα, η (y_n) φθίνουσα, ότι ισχύει $x_n \leq y_n$ για κάθε n και ότι οι (x_n), (y_n) συγκλίνουν στο ίδιο όριο, έστω $\mathrm{GA}\,(a, b)$.[34]
Αν $w_1 = a$ και $z_1 = b$ και ισχύει $w_{n+1} = \frac{2w_n z_n}{w_n + z_n}$ και $z_{n+1} = \sqrt{w_n z_n}$ για κάθε n, αποδείξτε ότι η (w_n) είναι αύξουσα, η (z_n) φθίνουσα, ότι ισχύει $w_n \leq z_n$ για κάθε n και ότι οι (w_n), (z_n) συγκλίνουν στο ίδιο όριο, έστω $\mathrm{HG}\,(a, b)$.[35]
Ποιά είναι η σχέση διάταξης ανάμεσα στους $a, b, \mathrm{HG}\,(a, b), \mathrm{GA}\,(a, b)$ και στον αρμονικό μέσο $\mathrm{H}\,(a, b) = \frac{2ab}{a+b}$, τον γεωμετρικό μέσο $\mathrm{G}\,(a, b) = \sqrt{ab}$ και τον αριθμητικό μέσο $\mathrm{A}\,(a, b) = \frac{a+b}{2}$;

2.4.15. Έστω ότι ισχύει $x_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι η ακολουθία $(n x_n{}^2)$ είναι αύξουσα και ότι η $\left((n + \frac{1}{2}) x_n{}^2\right)$ είναι φθίνουσα. Αποδείξτε ότι και οι δύο ακολουθίες συγκλίνουν και έχουν το ίδιο όριο.

2.4.16. Λύστε με δεύτερο τρόπο την άσκηση 1.2.18.

2.4.17. Έστω ότι κάθε αύξουσα και άνω φραγμένη ακολουθία συγκλίνει. Ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα, αποδείξτε ότι ισχύει η ιδιότητα supremum.[36]
Αποδείξτε ότι κάθε φθίνουσα και κάτω φραγμένη ακολουθία συγκλίνει. Αποδείξτε ότι $\frac{1}{2^n} \to 0$.
Τώρα, έστω μη-κενό και άνω φραγμένο σύνολο A.
Θεωρήστε $x_1 \in A$ και άνω φράγμα y_1 του A. Το $[x_1, y_1]$ περιέχει ένα στοιχείο του A και ένα άνω φράγμα του A. Αν το $\frac{x_1+y_1}{2}$ είναι άνω φράγμα του A, πάρτε $x_2 = x_1$, $y_2 = \frac{x_1+y_1}{2}$, αν όχι, πάρτε $x_2 = \frac{x_1+y_1}{2}$, $y_2 = y_1$. Αποδείξτε ότι το $[x_2, y_2]$ περιέχει ένα στοιχείο του A και ένα άνω φράγμα του A. Συνεχίζοντας αυτήν την διαδικασία επ' άπειρον, δημιουργείται ακολουθία διαστημάτων $[x_1, y_1]$, $[x_2, y_2]$, $\ldots$ ώστε να ισχύει $[x_{n+1}, y_{n+1}] \subseteq [x_n, y_n]$ και $y_n - x_n = \frac{y_1 - x_1}{2^{n-1}}$ για κάθε n και ώστε κάθε $[x_n, y_n]$ να περιέχει ένα $a_n \in A$ και ένα άνω φράγμα u_n του A. Αποδείξτε ότι υπάρχει u ώστε $x_n \to u$, $y_n \to u$ και, επίσης, $a_n \to u$, $u_n \to u$. Αποδείξτε ότι ο u είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A.

[32] Δεύτερη απόδειξη του θεωρήματος 1.2.
[33] Μια τέτοια ακολουθία (x_n) χαρακτηρίζεται **κυρτή**. Αν ισχύει η αντίθετη ανισότητα για κάθε n, η ακολουθία χαρακτηρίζεται **κοίλη**.
[34] Ο $\mathrm{GA}\,(a, b)$ ονομάζεται γεωμετρικός-αριθμητικός μέσος των a, b.
[35] Ο $\mathrm{HG}\,(a, b)$ ονομάζεται αρμονικός-γεωμετρικός μέσος των a, b.
[36] Άρα η ιδιότητα supremum είναι ισοδύναμη με την ιδιότητα: *κάθε αύξουσα και άνω φραγμένη ακολουθία συγκλίνει.*

2.4.18. [37] Έστω διάστημα I, όχι μονοσύνολο.

Υποθέστε (για να καταλήξετε σε άτοπο) ότι υπάρχει ακολουθία (a_n) ώστε $I = \{a_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$. Θεωρήστε $[x_1, y_1] \subseteq I$ ώστε $y_1 - x_1 > 0$ και $a_1 \notin [x_1, y_1]$. Θεωρήστε $[x_2, y_2] \subseteq [x_1, y_1]$ ώστε $y_2 - x_2 > 0$ και $a_2 \notin [x_2, y_2]$. Συνεχίζοντας αυτήν την διαδικασία επ' άπειρον, δημιουργείται ακολουθία διαστημάτων $[x_1, y_1]$, $[x_2, y_2]$, $\ldots$ ώστε να ισχύει $[x_{n+1}, y_{n+1}] \subseteq [x_n, y_n]$ και $a_n \notin [x_n, y_n]$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι υπάρχει ξ ώστε να ισχύει $\xi \in [x_n, y_n]$ και, επομένως, $\xi \neq a_n$ για κάθε n. Καταλήξτε σε αντίφαση και συμπεράνατε ότι το I είναι υπεραριθμήσιμο.

2.4.19. [38] Έστω κύκλος K με ακτίνα 1 και, για κάθε $n \geq 2$, ένα κανονικό πολύγωνο με 2^n πλευρές εγγεγραμμένο στον K και ένα κανονικό πολύγωνο με 2^n πλευρές περιγεγραμμένο στον K. Έστω p_n και q_n τα μήκη του εσωτερικού και του εξωτερικού, αντιστοίχως, πολυγώνου.

Παρατηρήστε ότι $p_2 = 4\sqrt{2}$ και $q_2 = 8$ και αποδείξτε γεωμετρικά τους αναδρομικούς τύπους $p_{n+1} = 2p_n\big(2 + \big(4 - \frac{{p_n}^2}{4^n}\big)^{1/2}\big)^{-1/2}$ και $q_{n+1} = 4q_n\big(2 + \big(4 + \frac{{q_n}^2}{4^n}\big)^{1/2}\big)^{-1}$ για κάθε $n \geq 2$.

Αποδείξτε γεωμετρικά ότι ισχύει $q_n = p_n\big(1 - \frac{{p_n}^2}{4^{n+1}}\big)^{-1/2}$ για κάθε $n \geq 2$.

Αποδείξτε ότι η (p_n) είναι αύξουσα, η (q_n) φθίνουσα και ότι ισχύει $p_n < q_n$ για κάθε $n \geq 2$.

Αποδείξτε ότι οι (p_n), (q_n) συγκλίνουν στον ίδιο αριθμό.[39]

2.4.20. [40] Γνωρίζουμε ότι για κάθε x υπάρχει αύξουσα ακολουθία ρητών (r_n) ώστε $r_n \to x$. Για παράδειγμα, μια τέτοια ακολουθία είναι η ακολουθία των p-αδικών προσεγγίσεων του x ή η ακολουθία που αναφέρεται στην άσκηση 2.3.32.

Θεωρήστε ότι δεν έχουν οριστεί οι δυνάμεις με άρρητο εκθέτη.

Έστω $y > 1$ και ο x είναι άρρητος. Θεωρήστε οποιαδήποτε αύξουσα ακολουθία ρητών (r_n) με $r_n \to x$ και αποδείξτε ότι η ακολουθία (y^{r_n}) συγκλίνει. Αποδείξτε ότι για κάθε (όχι αναγκαστικά αύξουσα) ακολουθία ρητών (r_n) με $r_n \to x$ το όριο της (y^{r_n}) υπάρχει και ότι το όριο αυτό είναι ανεξάρτητο της ακολουθίας ρητών (r_n) με $r_n \to x$. Ορίσατε $y^x = \lim_{n\to+\infty} y^{r_n}$ με οποιαδήποτε ακολουθία ρητών (r_n) με $r_n \to x$.

Έστω $y > 1$ και ο x είναι ρητός. Αποδείξτε ότι $y^x = \lim_{n\to+\infty} y^{r_n}$ για κάθε ακολουθία ρητών (r_n) με $r_n \to x$.

Έστω $0 \leq y \leq 1$ και ο x είναι άρρητος. Ορίσατε την δύναμη y^x βάσει της προηγούμενης περίπτωσης (όπως στον αντίστοιχο ορισμό 1.9).

Αποδείξτε την πρόταση 1.8 βάσει των προηγουμένων.

2.4.21. [α] Έστω $y > 0$.

Αν οι r_1, r_2 είναι ρητοί με $r_1 < r_2$ και $r_1, r_2 \neq 0$, αποδείξτε ότι $\frac{y^{r_1}-1}{r_1} \leq \frac{y^{r_2}-1}{r_2}$.

Αν $x_1 < x_2$ και $x_1, x_2 \neq 0$, αποδείξτε ότι $\frac{y^{x_1}-1}{x_1} \leq \frac{y^{x_2}-1}{x_2}$.

[β][41] Έστω $y > 0$.

Αποδείξτε ότι η ακολουθία $\big(n(\sqrt[n]{y} - 1)\big)$ είναι φθίνουσα και ότι συγκλίνει.

Θεωρήστε ότι δεν έχουν οριστεί οι λογάριθμοι θετικών αριθμών.

Ορίσατε $\log y = \lim_{n\to+\infty} n(\sqrt[n]{y} - 1)$.

Αποδείξτε ότι ισχύει $\log y = \lim_{n\to+\infty} \frac{y^{x_n}-1}{x_n}$ για κάθε ακολουθία (x_n) με $x_n \to 0$ και $x_n \neq 0$ για κάθε n.

---

[37] Ας θυμηθούμε ότι ένα σύνολο A, όχι αναγκαστικά υποσύνολο του $\mathbb{R}$, χαρακτηρίζεται **αριθμήσιμο** αν υπάρχει συνάρτηση $a : \mathbb{N} \to A$ η οποία είναι επί του A. Χρησιμοποιώντας τον παραδοσιακό συμβολισμό $a_n = a(n)$, μπορούμε να πούμε ότι το A είναι αριθμήσιμο αν μπορεί να γραφτεί $A = \{a_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ ή, ισοδύναμα, αν το A είναι το σύνολο των όρων κάποιας ακολουθίας. Αν ένα σύνολο A δεν είναι αριθμήσιμο, τότε χαρακτηρίζεται **υπεραριθμήσιμο**.

[38] Ο κλασσικός γεωμετρικός ορισμός του μήκους περιφέρειας κύκλου και του αριθμού π.

[39] Μια από τις μαθηματικές παραδοχές ή διαπιστώσεις της κλασσικής αρχαιότητας ήταν ότι το μήκος της περιφέρειας του κύκλου K, το οποίο, παραδοσιακά, συμβολίζεται 2π, είναι ανάμεσα στα μήκη των εσωτερικών και των εξωτερικών πολυγώνων. Δηλαδή, ισχύει $p_n \leq 2\pi \leq q_n$ για κάθε $n \geq 2$. Συμπεράνατε ότι $p_n \to 2\pi$ και $q_n \to 2\pi$.

[40] Εναλλακτικός ορισμός της δύναμης με άρρητο εκθέτη.

[41] Εναλλακτικός ορισμός του λογαρίθμου.

Αποδείξτε την πρόταση 2.13 (εκτός του [γ]) βάσει των προηγουμένων.
Έστω $a > 0$, $a \neq 1$ και $y > 0$. Ορίσατε $\log_a y = \frac{\log y}{\log a}$ και αποδείξτε την πρόταση 1.9.

2.4.22. Αν έχουμε μια ακολουθία εγκιβωτισμένων ανοικτών διαστημάτων, υπάρχει πάντοτε κάποιος αριθμός κοινός σε όλα τα διαστήματα;

2.5 Υποακολουθίες.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.17. *Έστω ακολουθία (x_n). Επιλέγουμε άπειρες τιμές $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k, \dots$ του δείκτη n ώστε $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \cdots$. Μετά επιλέγουμε τους αντίστοιχους όρους της (x_n). Δηλαδή από τους $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ επιλέγουμε τους $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots$. Αυτοί οι αριθμοί αποτελούν μια άπειρη επιλογή αριθμών με συγκεκριμένη σειρά: πρώτος ο x_{n_1}, δεύτερος ο x_{n_2} και ούτω καθ' εξής. Άρα οι αριθμοί αυτοί αποτελούν τους όρους μιας νέας ακολουθίας, της (x_{n_k}). Επειδή οι όροι της νέας ακολουθίας είναι κάποιοι από τους όρους της αρχικής, η (x_{n_k}) χαρακτηρίζεται* **υποακολουθία** *της (x_n).*

Τονίζουμε ότι, λόγω της συνθήκης $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \cdots$, η σειρά επιλογής των όρων της υποακολουθίας είναι *ομόρροπη* με τη σειρά επιλογής που έχουν αυτοί οι όροι ως όροι της αρχικής ακολουθίας.

Παράδειγμα 2.5.1. Επιλέγοντας τους $n_1 = 2$, $n_2 = 5$, $n_3 = 6$, $n_4 = 9$, $n_5 = 13$, μπορούμε να αρχίσουμε μια υποακολουθία της (x_n) με τους όρους $x_2, x_5, x_6, x_9, x_{13}$.
Όμως, με τους $n_1 = 2$, $n_2 = 5$, $n_3 = 6$, $n_4 = 10$, $n_5 = 8$ δεν επιτρέπεται να σχηματιστεί υποακολουθία της (x_n). Η σειρά επιλογής των $x_2, x_5, x_6, x_{10}, x_8$ δεν είναι ομόρροπη με τη σειρά επιλογής που έχουν ως όροι της (x_n) : ο x_{10} ακολουθεί τον x_8 στην (x_n) (με ενδιάμεσο τον x_9) οπότε ο x_{10} πρέπει να ακολουθεί τον x_8 και στην υποακολουθία.

Μερικά πιο συγκεκριμένα παραδείγματα υποακολουθιών.

Παράδειγμα 2.5.2. Επιλέγοντας $n_k = 2k$ για κάθε k, ορίζεται η **υποακολουθία των άρτιων δεικτών** της (x_n), δηλαδή η υποακολουθία (x_{2k}) ή $(x_2, x_4, x_6, x_8, x_{10}, \dots)$.

Παράδειγμα 2.5.3. Επιλέγοντας $n_k = 2k-1$ για κάθε k, ορίζεται η **υποακολουθία των περιττών δεικτών** της (x_n), δηλαδή η υποακολουθία (x_{2k-1}) ή $(x_1, x_3, x_5, x_7, x_9, \dots)$.

Παράδειγμα 2.5.4. Επιλέγοντας $n_k = k$ για κάθε k, παίρνουμε την ίδια την αρχική ακολουθία (x_k) ή $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \dots)$. Άρα μια από τις υποακολουθίες της (x_n) είναι η ίδια η (x_n).

Παράδειγμα 2.5.5. Επιλέγοντας $n_k = 2^{k-1}$ για κάθε k, ορίζουμε την υποακολουθία $(x_{2^{k-1}})$ ή $(x_1, x_2, x_4, x_8, x_{16}, \dots)$.

Πρέπει να θυμόμαστε ότι *ο δείκτης μιας υποακολουθίας (x_{n_k}) είναι ο k*. Καθώς ο k μεταβάλλεται διατρέχοντας *όλους* τους φυσικούς $1, 2, 3, \dots$, ο αντίστοιχος n_k μεταβάλλεται *γνησίως αυξανόμενος* διατρέχοντας *κάποιους* από τους δείκτες της αρχικής ακολουθίας (x_n).

Επίσης, πρέπει να γίνει κατανοητό ότι *το να έχουμε μια υποακολουθία μιας ακολουθίας (x_n) σημαίνει απλώς να έχουμε "άπειρους όρους" της (x_n)*. Είναι, φυσικά, προφανές ότι οι όροι μιας υποακολουθίας της (x_n) είναι άπειροι όροι της (x_n). Από την άλλη μεριά, αν έχουμε άπειρους όρους της (x_n), τότε από αυτούς ορίζεται μια υποακοουθία της (x_n) ως εξής. Θεωρούμε από αυτούς τους όρους της (x_n) τον όρο με τον μικρότερο δείκτη και αυτόν τον δείκτη τον συμβολίζουμε n_1. Κατόπιν, αφού εξαιρέσουμε τον x_{n_1}, θεωρούμε από αυτούς τους όρους της (x_n) τον όρο με τον μικρότερο δείκτη και αυτόν τον δείκτη τον συμβολίζουμε n_2. Κατόπιν, αφού εξαιρέσουμε τους x_{n_1} και x_{n_2}, θεωρούμε από αυτούς τους όρους της (x_n) τον όρο με τον μικρότερο δείκτη και αυτόν τον δείκτη τόν συμβολίζουμε n_3 και ούτω καθ' εξής. Έτσι δημιουργούμε μια υποακολουθία (x_{n_k}) της (x_n) και οι όροι της είναι οι άπειροι όροι της (x_n) από τους οποίους ξεκινήσαμε.

ΛΗΜΜΑ 2.2. *Έστω $n_k \in \mathbb{N}$ και $n_k < n_{k+1}$ για κάθε k. Τότε ισχύει $n_k \geq k$ για κάθε k.*

Απόδειξη. Η $n_1 \geq 1$ είναι σωστή διότι $n_1 \in \mathbb{N}$. Έστω ότι ισχύει $n_k \geq k$ για κάποιον k. Επειδή $n_{k+1} > n_k$ και $n_k, n_{k+1} \in \mathbb{N}$, συνεπάγεται $n_{k+1} \geq n_k + 1$ και, επομένως, $n_{k+1} \geq k + 1$.
Άρα ισχύει $n_k \geq k$ για κάθε k. □

Από το λήμμα 2.2 βλέπουμε αμέσως ότι για τους δείκτες που σχηματίζουν μια υποακολουθία ισχύει
$$n_k \to +\infty.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.14. *Αν μια ακολουθία έχει όριο, τότε κάθε υποακολουθία της έχει το ίδιο όριο.*

Απόδειξη. Έστω $x_n \to x \in \overline{\mathbb{R}}$ και υποακολουθία (x_{n_k}) της (x_n). Θα αποδείξουμε ότι $x_{n_k} \to x$.
Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $x_n \in N_x(\epsilon)$ για κάθε $n \geq n_0$. Πριν από λίγο είδαμε ότι $n_k \to +\infty$. Άρα από μια τιμή του k και πέρα ισχύει $n_k \geq n_0$ και, επομένως, $x_{n_k} \in N_x(\epsilon)$.
Άρα $x_{n_k} \to x$. □

Η πρόταση 2.14 εφαρμόζεται, συνήθως, ως εξής: *αν μια ακολουθία έχει δύο υποακολουθίες με διαφορετικά όρια, τότε η ακολουθία δεν έχει όριο.*[42]

Παράδειγμα 2.5.6. Η ακολουθία $((-1)^{n-1})$ δεν έχει όριο.
Πράγματι, για την υποακολουθία των περιττών δεικτών ισχύει $(-1)^{(2k-1)-1} = 1 \to 1$ και για την υποακολουθία των άρτιων δεικτών ισχύει $(-1)^{(2k)-1} = -1 \to -1$.

Η πρόταση 2.15 είναι χρήσιμη σε αρκετές περιπτώσεις.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.15. *Έστω $x \in \overline{\mathbb{R}}$ και $x_{2k} \to x$ και $x_{2k-1} \to x$. Τότε $x_n \to x$.*

Απόδειξη. Έστω $\epsilon > 0$. Επειδή $x_{2k} \to x$, συνεπάγεται ότι ισχύει $x_n \in N_x(\epsilon)$ για κάθε άρτιο n από κάποιον άρτιο δείκτη n' και πέρα. Επίσης, επειδή $x_{2k-1} \to x$, συνεπάγεται ότι ισχύει $x_n \in N_x(\epsilon)$ για κάθε περιττό n από κάποιον περιττό δείκτη n'' και πέρα. Τώρα είναι φανερό ότι ισχύει $x_n \in N_x(\epsilon)$ για κάθε n από κάποιον δείκτη (τον μεγαλύτερο από τους n' και n'') και πέρα.
Άρα $x_n \to x$. □

Παράδειγμα 2.5.7. Θα αποδείξουμε ότι[43]

$$\text{Η ακολουθία} \quad \left(1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\tfrac{1}{n}\right) \quad \text{συγκλίνει.}$$

Θέτουμε $x_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ για κάθε n.
Ισχύει $x_{2k+2} - x_{2k} = \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} > 0$ για κάθε k. Επίσης, ισχύει

$$x_{2k} = 1 - (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}) - (\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{5}) - \cdots - (\tfrac{1}{2k-2} - \tfrac{1}{2k-1}) - \tfrac{1}{2k} < 1$$

για κάθε k, διότι κάθε παρένθεση είναι θετική. Άρα η υποακολουθία (x_{2k}) είναι γνησίως αύξουσα και άνω φραγμένη και, επομένως, συγκλίνει.
Ομοίως, ισχύει $x_{2k+1} - x_{2k-1} = -\frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} < 0$ για κάθε k. Επίσης, ισχύει

$$x_{2k-1} = (1 - \tfrac{1}{2}) + (\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}) + \cdots + (\tfrac{1}{2k-3} - \tfrac{1}{2k-2}) + \tfrac{1}{2k-1} > 0$$

για κάθε k, διότι κάθε παρένθεση είναι θετική. Άρα η υποακολουθία (x_{2k-1}) είναι γνησίως φθίνουσα και κάτω φραγμένη και, επομένως, συγκλίνει.
Τέλος,
$$x_{2k} - x_{2k-1} = -\tfrac{1}{2k} \to 0,$$

[42] Ισχύει και το αντίστροφο. Δείτε την άσκηση 2.5.15.
[43] Για εναλλακτικές αποδείξεις δείτε τις ασκήσεις 2.6.3 και 6.4.11 και το παράδειγμα 8.3.9.

οπότε οι (x_{2k}), (x_{2k-1}) συγκλίνουν στο ίδιο όριο. Άρα η (x_n) συγκλίνει.
Αν x είναι το όριο της (x_n), τότε αξίζει να παρατηρήσουμε τη διάταξη των όρων της:

$$x_2 < x_4 < \ldots < x_{2k} < x_{2k+2} < \ldots < x < \ldots < x_{2k+1} < x_{2k-1} < \ldots < x_3 < x_1.$$

Αυτό συμβαίνει επειδή η (x_{2k}) είναι γνησίως αύξουσα και συγκλίνει στον x και, ομοίως, η (x_{2k-1}) είναι γνησίως φθίνουσα και συγκλίνει στον x. Παρατηρήστε, επίσης, ότι τα διαστήματα $[x_2, x_1]$, $[x_4, x_3]$, $[x_6, x_5]$, $\ldots$ είναι εγκιβωτισμένα και ότι το όριο x είναι ο μοναδικός αριθμός που περιέχεται σε όλα αυτά τα διαστήματα.

Γνωρίζουμε ότι κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη. Το αντίστροφο δεν ισχύει. Για παράδειγμα, η ακολουθία $((-1)^{n-1})$ είναι φραγμένη αλλά δεν συγκλίνει. Όμως, η $((-1)^{n-1})$, παρόλο που δεν συγκλίνει, έχει τουλάχιστον μία υποακολουθία που συγκλίνει: η υποακολουθία των περιττών δεικτών συγκλίνει στον 1 και η υποακολουθία των άρτιων δεικτών συγκλίνει στον -1. Θα δούμε τώρα ότι αυτό το φαινόμενο παρατηρείται όχι μόνο στην ακολουθία $((-1)^{n-1})$ αλλά και σε κάθε φραγμένη ακολουθία. Αυτό είναι το περιεχόμενο του επόμενου θεωρήματος, ενός από τα σημαντικότερα θεωρήματα της Ανάλυσης.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΩΝ BOLZANO - WEIERSTRASS. *Κάθε φραγμένη ακολουθία έχει τουλάχιστον μία συγκλίνουσα υποακολουθία.*

Απόδειξη. [44] Έστω ακολουθία (x_n) και l, u ώστε να ισχύει $l \leq x_n \leq u$ για κάθε n. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει κάποια υποακολουθία της (x_n) η οποία συγκλίνει, περιγράφοντας έναν "αλγόριθμο" επιλογής των διαδοχικών όρων της υποακολουθίας: του πρώτου όρου της, κατόπιν του δεύτερου όρου της, κατόπιν του τρίτου όρου της και ούτω καθ' εξής.
Χωρίζουμε το $[l, u]$ στα δύο ισομήκη διαστήματα $[l, \frac{l+u}{2}]$, $[\frac{l+u}{2}, u]$. Επειδή όλοι οι (άπειροι) όροι της (x_n) ανήκουν στο $[l, u]$, τουλάχιστον ένα από τα δύο υποδιαστήματα περιέχει άπειρους όρους της (x_n). Επιλέγουμε ένα τέτοιο υποδιάστημα και το συμβολίζουμε $[l_1, u_1]$. Άρα $[l_1, u_1] \subseteq [l, u]$, $u_1 - l_1 = \frac{u-l}{2}$ και το $[l_1, u_1]$ περιέχει άπειρους όρους της (x_n). Επιλέγουμε κάποιον όρο της (x_n) από αυτούς (τους άπειρους) που ανήκουν στο $[l_1, u_1]$: έστω $x_{n_1} \in [l_1, u_1]$.
Χωρίζουμε το $[l_1, u_1]$ στα δύο ισομήκη διαστήματα $[l_1, \frac{l_1+u_1}{2}]$, $[\frac{l_1+u_1}{2}, u_1]$. Επειδή το $[l_1, u_1]$ περιέχει άπειρους όρους της (x_n), ένα τουλάχιστον από τα δύο υποδιαστήματα περιέχει άπειρους όρους της (x_n). Επιλέγουμε ένα τέτοιο υποδιάστημα και το συμβολίζουμε $[l_2, u_2]$ (ακριβώς όπως στο πρώτο βήμα). Άρα $[l_2, u_2] \subseteq [l_1, u_1]$, $u_2 - l_2 = \frac{u_1-l_1}{2}$ και το $[l_2, u_2]$ περιέχει άπειρους όρους της (x_n). Επιλέγουμε κάποιον όρο της (x_n) από αυτούς (τους άπειρους) που ανήκουν στο $[l_2, u_2]$: έστω $x_{n_2} \in [l_2, u_2]$. *Προσέχουμε, όμως, ώστε να είναι* $n_2 > n_1$. Αυτό *είναι* εφικτό, ακριβώς επειδή υπάρχουν άπειροι όροι της (x_n) στο $[l_2, u_2]$.
Χωρίζουμε το $[l_2, u_2]$ στα δύο ισομήκη διαστήματα $[l_2, \frac{l_2+u_2}{2}]$, $[\frac{l_2+u_2}{2}, u_2]$. Επειδή το $[l_2, u_2]$ περιέχει άπειρους όρους της (x_n), ένα τουλάχιστον από τα δύο υποδιαστήματα περιέχει άπειρους όρους της (x_n). Επιλέγουμε ένα τέτοιο υποδιάστημα και το συμβολίζουμε $[l_3, u_3]$. Άρα $[l_3, u_3] \subseteq [l_2, u_2]$, $u_3 - l_3 = \frac{u_2-l_2}{2}$ και το $[l_3, u_3]$ περιέχει άπειρους όρους της (x_n). Επιλέγουμε κάποιον όρο της (x_n) από αυτούς (τους άπειρους) που ανήκουν στο $[l_3, u_3]$: έστω $x_{n_3} \in [l_3, u_3]$. Προσέχουμε, όμως, ώστε να είναι $n_3 > n_2$.
Συνεχίζουμε αυτήν τη διαδικασία επ' άπειρον.
Επιλέγουμε έτσι, διαδοχικά, διαστήματα $[l_k, u_k]$ για κάθε k ώστε να ισχύει

$$[l_{k+1}, u_{k+1}] \subseteq [l_k, u_k], \qquad u_{k+1} - l_{k+1} = \frac{u_k - l_k}{2}$$

για κάθε k. Επίσης, επιλέγουμε όρους x_{n_k} της (x_n) για κάθε k ώστε να ισχύει

$$n_{k+1} > n_k, \qquad x_{n_k} \in [l_k, u_k]$$

[44] Δεύτερη απόδειξη υπάρχει στην άσκηση 2.5.9.

για κάθε k.
Από το ότι ισχύει $u_{k+1}-l_{k+1}=\frac{u_k-l_k}{2}$ για κάθε k προκύπτει ότι ισχύει $u_k-l_k=\frac{u-l}{2^k}$ για κάθε k, οπότε

$$u_k-l_k\to 0.$$

Σύμφωνα με την πρόταση με τα εγκιβωτισμένα διαστήματα, οι (l_k), (u_k) συγκλίνουν στον ίδιο αριθμό. Έστω $l_k\to x$ και $u_k\to x$. Επειδή ισχύει $n_{k+1}>n_k$ για κάθε k, η (x_{n_k}) είναι υποακολουθία της (x_n) και, επειδή ισχύει $l_k\le x_{n_k}\le u_k$ για κάθε k, συνεπάγεται $x_{n_k}\to x$. □

Γνωρίζουμε ότι κάθε ακολουθία που αποκλίνει στο $+\infty$ δεν είναι άνω φραγμένη. Το αντίστροφο δεν ισχύει. Η $(1,0,3,0,5,0,7,\dots)$ δεν είναι άνω φραγμένη αλλά δεν αποκλίνει στο $+\infty$. Όμως, στο ίδιο παράδειγμα, παρόλο που η ακολουθία δεν αποκλίνει στο $+\infty$, υπάρχει κάποια υποακολουθία της που αποκλίνει στο $+\infty$: δείτε την υποακολουθία των περιττών δεικτών, την $(1,3,5,7,\dots)$. Αυτό το φαινόμενο ισχύει γενικότερα.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.16. [α] *Κάθε ακολουθία που δεν είναι άνω φραγμένη έχει τουλάχιστον μία υποακολουθία που αποκλίνει στο* $+\infty$.
[β] *Κάθε ακολουθία που δεν είναι κάτω φραγμένη έχει τουλάχιστον μία υποακολουθία που αποκλίνει στο* $-\infty$.

Απόδειξη. [45] [α] Έστω ακολουθία (x_n) όχι άνω φραγμένη.
Αρχικά θα αποδείξουμε ότι για κάθε u υπάρχουν άπειροι όροι της (x_n) που είναι $>u$. Έστω[46] (για να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι υπάρχει u ώστε μόνο πεπερασμένου πλήθους όροι της (x_n) είναι $>u$. Τότε όλοι οι όροι της (x_n) από κάποιον δείκτη n_0 και πέρα ανήκουν στο διάστημα $(-\infty,u]$. Άρα από τους όρους της (x_n) μπορεί να βρίσκονται εκτός του διαστήματος $(-\infty,u]$ μόνο κάποιοι από τους $x_1,\dots,x_{n_0-1}$. Επειδή το πλήθος τους είναι πεπερασμένο, μπορούμε να μεγαλώσουμε, αν χρειάζεται, το διάστημα $(-\infty,u]$ και να βρούμε ένα διάστημα $(-\infty,u']$ το οποίο περιέχει *όλους* τους όρους της (x_n). Άρα η (x_n) είναι άνω φραγμένη. Άτοπο.
Τώρα θα αποδείξουμε ότι υπάρχει υποακολουθία της (x_n) που αποκλίνει στο $+\infty$, περιγράφοντας “αλγοριθμικά” την επιλογή των όρων της.
Υπάρχουν άπειροι όροι της (x_n) που είναι >1. Επιλέγουμε έναν τέτοιο όρο: έστω $x_{n_1}>1$.
Υπάρχουν άπειροι όροι της (x_n) που είναι >2. Επιλέγουμε έναν τέτοιο όρο: έστω $x_{n_2}>2$. Φροντίζουμε, όμως, να είναι $n_2>n_1$. Αυτό είναι εφικτό διότι υπάρχουν *άπειροι* όροι >2.
Υπάρχουν άπειροι όροι της (x_n) που είναι >3. Επιλέγουμε έναν τέτοιο όρο: έστω $x_{n_3}>3$ με $n_3>n_2$.
Συνεχίζουμε αυτήν τη διαδικασία επ’ άπειρον.
Βρίσκουμε έτσι διαδοχικά όρους x_{n_k} της (x_n) ώστε να ισχύει $n_{k+1}>n_k$ και $x_{n_k}>k$ για κάθε k. Άρα η (x_{n_k}) είναι υποακολουθία της (x_n) και $x_{n_k}\to+\infty$.
[β] Ομοίως. □

Ασκήσεις.

2.5.1. Έστω $a<b<c<d$. Βρείτε μια *πολύ απλή* ακολουθία που να έχει τέσσερις (εκτός των άλλων) υποακολουθίες ώστε η πρώτη να συγκλίνει στον a, η δεύτερη στον b, η τρίτη στον c και η τέταρτη στον d. Πρώτα περιγράψτε τον τρόπο επιλογής των διαδοχικών όρων της ακολουθίας και μετά γράψτε τον τύπο της.

2.5.2. Έστω ότι η ακολουθία (x_n) έχει μια οποιαδήποτε από τις ιδιότητες: (γνησίως) αύξουσα, (γνησίως) φθίνουσα, άνω φραγμένη, κάτω φραγμένη, φραγμένη. Αποδείξτε ότι κάθε υποακολουθία (x_{n_k}) της (x_n) έχει την ίδια ιδιότητα.

[45] Δεύτερη απόδειξη υπάρχει στην άσκηση 2.5.9.
[46] Το επιχείρημα είναι αυτό που χρειάζεται για την απόδειξη της πρότασης 2.4[γ] και έχουμε δει το “συμμετρικό” του στην απόδειξη της πρότασης 2.4[β].

2.5.3. Εφαρμόστε τα αποτελέσματα των ασκήσεων 2.3.36 και 2.4.3 για να αποδείξετε το όριο $(1+\frac{p}{qn})^n \to \sqrt[q]{e^p}$ για κάθε $p \in \mathbb{Z}$ και $q \in \mathbb{N}$ με $q \geq 2$. Δηλαδή, $(1+\frac{r}{n})^n \to e^r$ για κάθε $r \in \mathbb{Q}$.
Έστω άρρητος x. Έστω $\epsilon > 0$. Σύμφωνα με τον ορισμό της δύναμης e^x, αποδείξτε ότι υπάρχουν $r, s \in \mathbb{Q}$ ώστε $r < x < s$ και $e^x - \epsilon < e^r < e^s < e^x + \epsilon$. Τέλος, αποδείξτε ότι ισχύει τελικά $e^x - \epsilon < (1+\frac{r}{n})^n < (1+\frac{x}{n})^n < (1+\frac{s}{n})^n < e^x + \epsilon$ και συμπεράνατε ότι $(1+\frac{x}{n})^n \to e^x$.

2.5.4. Αν η ακολουθία (x_n) έχει όριο και αν υπάρχει υποακολουθία (x_{n_k}) ώστε $x_{n_k} \to x \in \overline{\mathbb{R}}$, αποδείξτε ότι $x_n \to x$.
Αν η ακολουθία (x_n) είναι μονότονη και αν υπάρχει υποακολουθία (x_{n_k}) ώστε $x_{n_k} \to x \in \overline{\mathbb{R}}$, αποδείξτε ότι $x_n \to x$.
Έστω[47] $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ για κάθε n. Από το παράδειγμα 2.4.4 γνωρίζουμε ότι ισχύει $x_{2n} - x_n \geq \frac{1}{2}$ για κάθε n. Αποδείξτε με επαγωγή ότι ισχύει $x_{2^k} \geq \frac{k}{2} + 1$ για κάθε k και, βάσει των προηγουμένων, συμπεράνατε ότι $x_n \to +\infty$.

2.5.5. Συμπληρώνοντας την άσκηση 2.4.7, αποδείξτε ότι, αν $t \leq 0$, τότε οι ακολουθίες $\big(1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n}{n!}\big)$ και $\big((1+\frac{t}{n})^n\big)$ συγκλίνουν και έχουν το ίδιο όριο.

2.5.6. [α] Έστω $x_1 > 0$ και ότι ισχύει $x_{n+1} = 1 + \frac{2}{x_n}$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι οι υποακολουθίες (x_{2k}), (x_{2k-1}) είναι μονότονες και φραγμένες. Αποδείξτε ότι η ακολουθία (x_n) συγκλίνει και βρείτε το όριό της.
[β] Έστω $x_1 > 0$ και ότι ισχύει $x_{n+1} = 1 + \frac{3}{1+x_n}$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι οι υποακολουθίες (x_{2k}), (x_{2k-1}) είναι μονότονες και φραγμένες. Αποδείξτε ότι η ακολουθία (x_n) συγκλίνει και βρείτε το όριό της.
[γ] Έστω $0 < p < 1$ και ότι ισχύει $x_{n+2} = (1-p)x_{n+1} + px_n$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι οι υποακολουθίες (x_{2k}), (x_{2k-1}) είναι μονότονες και φραγμένες. Αποδείξτε ότι η (x_n) συγκλίνει. Βρείτε τύπο για τον x_n συναρτήσει του n, βρίσκοντας πρώτα τύπο για τον $y_n = x_{n+1} - x_n$ συναρτήσει του n. Βρείτε το όριο της (x_n).

2.5.7. Έστω $a, b, x \in \overline{\mathbb{R}}$ και $a \neq b$. Έστω ότι $x_{2k} \to a$ και $x_{2k-1} \to b$ και ότι υπάρχει υποακολουθία (x_{n_k}) ώστε $x_{n_k} \to x$. Αποδείξτε ότι η (x_{n_k}) έχει άπειρους όρους κοινούς είτε με την (x_{2k}) είτε με την (x_{2k-1}). Μπορεί η (x_{n_k}) να έχει άπειρους όρους κοινούς και με την (x_{2k}) και με την (x_{2k-1}); Αποδείξτε ότι $x = a$ ή $x = b$.

2.5.8. [α] Έστω $x \in \overline{\mathbb{R}}$ και $x_{3k} \to x$ και $x_{3k-1} \to x$ και $x_{3k-2} \to x$. Προσαρμόζοντας την απόδειξη της πρότασης 2.15, αποδείξτε ότι $x_n \to x$. Γενικεύστε.
Έστω $a, b, c, x \in \overline{\mathbb{R}}$, $a \neq b$, $a \neq c$, $b \neq c$. Έστω ότι $x_{3k} \to a$ και $x_{3k-1} \to b$ και $x_{3k-2} \to c$ και ότι υπάρχει υποακολουθία (x_{n_k}) ώστε $x_{n_k} \to x$. Αποδείξτε ότι $x = a$ ή $x = b$ ή $x = c$.
[β] Έστω ότι διαμερίζουμε το $\mathbb{N}$ σε *πεπερασμένου πλήθους* άπειρα υποσύνολά του και έστω ακολουθία (x_n). Παίρνοντας δείκτες από καθένα από τα παραπάνω υποσύνολα του $\mathbb{N}$, διαμερίζουμε την ακολουθία σε αντίστοιχες πεπερασμένου πλήθους υποακολουθίες. Αν όλες αυτές οι υποακολουθίες έχουν το ίδιο όριο, αποδείξτε ότι και η (x_n) έχει το ίδιο όριο.
Το αποτέλεσμα αυτό δεν ισχύει αν διαμερίσουμε το $\mathbb{N}$ σε *άπειρου πλήθους* άπειρα υποσύνολά του. Να ένα παράδειγμα.
Κάθε $n \in \mathbb{N}$ γράφεται με μοναδικό τρόπο ως $n = 2^{m-1}k$ με $m \in \mathbb{N}$ και περιττό $k \in \mathbb{N}$. Άρα το $\mathbb{N}$ διαμερίζεται στα εξής υποσύνολά του: $A^{(m)} = \{2^{m-1}k \,|\, k \text{ περιττός φυσικός}\}$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$. Το $A^{(1)}$ αποτελείται από τους περιττούς φυσικούς, το $A^{(2)}$ από τους φυσικούς που είναι διπλάσιοι των περιττών, το $A^{(3)}$ από τους φυσικούς που είναι τετραπλάσιοι των περιττών κ.τ.λ. Τώρα, ορίζουμε $x_n = \frac{1}{k}$ αν $n = 2^{m-1}k$ για κάποιον $m \in \mathbb{N}$ και κάποιον περιττό $k \in \mathbb{N}$. Η ακολουθία (x_n) διαμερίζεται στις αντίστοιχες υποακολουθίες: $(x_k^{(m)})_{k=1}^{+\infty}$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$, όπου, για κάθε

[47] Δεύτερη προσέγγιση της ακολουθίας του παραδείγματος 2.4.4. Δείτε και τις ασκήσεις 2.6.2 και 7.3.20 και τα παραδείγματα 8.2.7, 8.2.10 και 8.3.1 καθώς και τις ασκήσεις 2.4.6 και 6.4.11.

$m \in \mathbb{N}$, είναι $x_k^{(m)} = \frac{1}{k}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Προφανώς, καθεμιά από αυτές τις ακολουθίες έχει όριο 0. Αποδείξτε ότι η (x_n) δεν έχει όριο 0, θεωρώντας την υποακολουθία $(x_{2^{m-1}3})_{m=1}^{+\infty}$.

2.5.9. Έστω οποιαδήποτε ακολουθία (x_n). Ένας όρος x_n χαρακτηρίζεται *φωτισμένος* αν για κάθε $m > n$ ισχύει $x_m < x_n$.[48]

Αν η (x_n) έχει άπειρους φωτισμένους όρους, αποδείξτε ότι οι όροι αυτοί σχηματίζουν γνησίως φθίνουσα υποακολουθία της (x_n). Αν η (x_n) δεν έχει άπειρους φωτισμένους όρους, αποδείξτε ότι η (x_n) έχει κάποια αύξουσα υποακολουθία.

Συμπεράνατε ότι κάθε ακολουθία έχει τουλάχιστον μία μονότονη υποακολουθία.

Δώστε δεύτερη απόδειξη του θεωρήματος των Bolzano - Weierstrass.

2.5.10. Αποδείξτε ότι μια ακολουθία (x_n) έχει μια ιδιότητα για άπειρους n αν και μόνο αν υπάρχει υποακολουθία (x_{n_k}) η οποία έχει την ίδια ιδιότητα για *κάθε* k.

2.5.11. [49] Αν το σύνολο των όρων μιας ακολουθίας είναι *πεπερασμένο*, αποδείξτε ότι υπάρχει σταθερή υποακολουθία της.

2.5.12. Αποδείξτε ότι η ακολουθία (x_n) έχει όριο $x \in \overline{\mathbb{R}}$ αν και μόνο αν κάθε υποακολουθία της (x_n) έχει υποακολουθία με όριο x.

Δείτε αν είναι σωστό το: η ακολουθία (x_n) έχει όριο αν και μόνο αν κάθε υποακολουθία της (x_n) έχει υποακολουθία με όριο.

2.5.13. Έστω ότι ισχύει $x_n < x$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι $\sup\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\} = x$ αν και μόνο αν υπάρχει γνησίως αύξουσα υποακολουθία της (x_n) που συγκλίνει στον x.

Θεωρήστε την ακολουθία $(\frac{1}{n})$. Είναι $\sup\{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\} = 1$. Όμως, κάθε υποακολουθία της $(\frac{1}{n})$ συγκλίνει στον 0, το όριο της $(\frac{1}{n})$, οπότε δεν υπάρχει υποακολουθία που συγκλίνει στον 1. Αντιφάσκει αυτό με το προηγούμενο γενικό αποτέλεσμα;

2.5.14. Έστω ακολουθία (x_n) και υποακολουθία (x_{n_k}). Αποδείξτε ότι κάθε υποακολουθία της (x_{n_k}) είναι υποακολουθία και της (x_n).

2.5.15. Αν η ακολουθία (x_n) δεν έχει όριο, αποδείξτε ότι υπάρχουν δύο υποακολουθίες της με διαφορετικά όρια. Να αντιπαραβάλετε με την πρόταση 2.14.

Αν η (x_n) δεν έχει όριο, αποδείξτε ότι υπάρχουν l, u ώστε $u < l$ και ώστε να ισχύει $x_n \leq u$ για άπειρους n και $x_n \geq l$ για άπειρους n. Να αντιπαραβάλετε με την πρόταση 2.5[γ].

2.5.16. [α] Έστω $x_n \to x$ και ότι ισχύει $x_n \neq x$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι η ακολουθία (x_n) δεν έχει καμιά σταθερή υποακολουθία.

[β] Έστω φραγμένη ακολουθία (r_n) χωρίς καμιά σταθερή υποακολουθία, ώστε να ισχύει $r_n = \frac{p_n}{q_n}$ με $p_n \in \mathbb{Z}$ και $q_n \in \mathbb{N}$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι $q_n \to +\infty$.

[γ] Έστω άρρητος x και ακολουθία (r_n) ώστε $r_n \to x$ και ώστε να ισχύει $r_n = \frac{p_n}{q_n}$ με $p_n \in \mathbb{Z}$ και $q_n \in \mathbb{N}$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι $q_n \to +\infty$ και ότι $p_n \to x(+\infty)$.

2.6 Η Ιδιότητα Πληρότητας.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.18. *Η ακολουθία (x_n) χαρακτηρίζεται* **ακολουθία Cauchy** *αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $|x_n - x_m| < \epsilon$ για κάθε $n, m \geq n_0$. Αυτό το διατυπώνουμε:*

$$\lim_{n,m\to+\infty}(x_n - x_m) = 0.$$

Με άλλα λόγια: *η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy αν οι όροι της πλησιάζουν απεριόριστα ο ένας τον άλλο όταν οι δείκτες τους γίνονται κατάλληλα μεγάλοι.*

---

[48] Ο όρος x_n είναι πιο ψηλά από όλους τους επόμενους όρους και άρα φωτίζεται όταν ο ήλιος ανατέλλει από το $+\infty$.

[49] Δείτε την άσκηση 2.1.9.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.17. *Αν η ακολουθία (x_n) συγκλίνει, τότε είναι ακολουθία Cauchy.*

Απόδειξη. Έστω $x_n \to x$. Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2}$ για κάθε $n \geq n_0$. Επομένως, αλλάζοντας απλώς το σύμβολο από n σε m, ισχύει $|x_m - x| < \frac{\epsilon}{2}$ για κάθε $m \geq n_0$. Άρα ισχύει

$$|x_n - x_m| = |(x_n - x) - (x_m - x)| \leq |x_n - x| + |x_m - x| < \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

για κάθε $n, m \geq n_0$.
Άρα η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy. □

Το κριτήριο του Cauchy είναι το αντίστροφο της πρότασης 2.17.

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΤΟΥ CAUCHY. *Αν η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy, τότε συγκλίνει.*

Απόδειξη. [50] Έστω ότι η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy.
Τότε υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $|x_n - x_m| < 1$ για κάθε $n, m \geq n_0$. Ειδικώτερα (θεωρώντας $m = n_0$), για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $|x_n - x_{n_0}| < 1$, οπότε

$$|x_n| = |(x_n - x_{n_0}) + x_{n_0}| \leq |x_n - x_{n_0}| + |x_{n_0}| < 1 + |x_{n_0}|.$$

Επομένως, αν θέσουμε $M = 1 + |x_{n_0}|$, έχουμε ότι από έναν δείκτη και πέρα οι όροι της (x_n) είναι στο διάστημα $[-M, M]$, οπότε η (x_n) είναι φραγμένη.
Επειδή η (x_n) είναι φραγμένη, έχει, σύμφωνα με το θεώρημα των Bolzano - Weierstrass, υποακολουθία (x_{n_k}) η οποία συγκλίνει. Έστω

$$x_{n_k} \to x.$$

Θα αποδείξουμε ότι $x_n \to x$.
Έστω $\epsilon > 0$. Υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει

$$|x_n - x_m| < \tfrac{\epsilon}{2} \qquad \text{για κάθε } \; n, m \geq n_0.$$

Τώρα παίρνουμε έναν οποιονδήποτε $n \geq n_0$ και τόν κρατάμε, προσωρινά, σταθερό.
Επειδή $n_k \to +\infty$, συνεπάγεται ότι ισχύει τελικά $n_k \geq n_0$ και, επομένως, ισχύει τελικά

$$|x_n - x_{n_k}| < \tfrac{\epsilon}{2}. \tag{2.9}$$

Επίσης, επειδή $x_{n_k} \to x$, συνεπάγεται ότι ισχύει τελικά

$$|x_{n_k} - x| < \tfrac{\epsilon}{2}. \tag{2.10}$$

Άρα ισχύουν τελικά ταυτόχρονα οι (2.9) και (2.10). Οπότε μπορούμε να πάρουμε κάποιον αρκετά μεγάλο k για τον οποίο ισχύουν οι (2.9) και (2.10) και με έναν τέτοιο k βρίσκουμε

$$|x_n - x| = |(x_n - x_{n_k}) + (x_{n_k} - x)| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x| < \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Επειδή ισχύει $|x_n - x| < \epsilon$ για τον οποιονδήποτε $n \geq n_0$, συνεπάγεται ότι $x_n \to x$. □

Η χρησιμότητα του κριτηρίου του Cauchy είναι παρόμοια με τη χρησιμότητα του θεωρήματος 2.1. Αν θέλουμε να αποδείξουμε ότι η ακολουθία (x_n) συγκλίνει και δεν γνωρίζουμε το υποψήφιο όριο x της (x_n), αντί να μελετήσουμε τις αποστάσεις $|x_n - x|$ των όρων της ακολουθίας απο τον άγνωστο x, μελετάμε τις αποστάσεις $|x_n - x_m|$ μεταξύ των όρων της ακολουθίας. Πρέπει, βέβαια, να λάβουμε υπ' όψη ότι το κριτήριο του Cauchy δεν προσδιορίζει το όριο μιας ακολουθίας Cauchy.

[50] Άλλες τρεις αποδείξεις υπάρχουν στις ασκήσεις 2.6.6, 2.6.7 και 2.7.14.

Παράδειγμα 2.6.1. Έστω η ακολουθία (x_n) με τύπο $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$ για κάθε n. Θα αποδείξουμε, με δεύτερο τρόπο (δείτε το παράδειγμα 2.4.5.[51]) ότι η (x_n) συγκλίνει.
Έστω $m > n$. Τότε

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &= \tfrac{1}{(n+1)^2} + \tfrac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \tfrac{1}{(m-1)^2} + \tfrac{1}{m^2} \\ &< \tfrac{1}{n(n+1)} + \tfrac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \tfrac{1}{(m-2)(m-1)} + \tfrac{1}{(m-1)m} \\ &= (\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n+1}) + (\tfrac{1}{n+1} - \tfrac{1}{n+2}) + \cdots + (\tfrac{1}{m-2} - \tfrac{1}{m-1}) + (\tfrac{1}{m-1} - \tfrac{1}{m}) = \tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{m} < \tfrac{1}{n}. \end{aligned}$$

Τώρα, έστω $\epsilon > 0$. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $\frac{1}{n_0} < \epsilon$. Τότε από το $m > n \geq n_0$ συνεπάγεται $|x_n - x_m| < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \epsilon$.
Άρα η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy και, επομένως, συγκλίνει.

Το κριτήριο του Cauchy εκφράζει την *ιδιότητα πληρότητας* του $\mathbb{R}$.

ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΠΛΗΡΟΤΗΤΑΣ. *Κάθε ακολουθία Cauchy συγκλίνει.*

Η ιδιότητα πληρότητας αποδείχτηκε βάσει του θεωρήματος των Bolzano - Weierstrass, η απόδειξη του οποίου ανάγεται, τελικά, στην ιδιότητα supremum.

Ασκήσεις.

2.6.1. Έστω ότι οι (x_n), (y_n) είναι ακολουθίες Cauchy. Αποδείξτε, με τον ορισμό, ότι οι (x_n+y_n), $(x_n y_n)$ είναι ακολουθίες Cauchy.

2.6.2. [52] Αν ισχύει $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ για κάθε n, από το παράδειγμα 2.4.4 γνωρίζουμε ότι ισχύει $x_{2n} - x_n \geq \frac{1}{2}$ για κάθε n. Είναι η (x_n) ακολουθία Cauchy; Συμπεράνατε ότι $x_n \to +\infty$.

2.6.3. [53] Έστω ότι ισχύει $x_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ για κάθε n.
Αποδείξτε ότι ισχύει $|x_n - x_m| = \left|\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{(-1)^{m-n-1}}{m}\right| \leq \frac{1}{n+1}$ για κάθε n, m με $n < m$. Συμπεράνατε ότι η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy και ότι συγκλίνει.

2.6.4. [α] Έστω $0 < M < 1$ και έστω ότι ισχύει τελικά $|x_n - x_{n+1}| \leq cM^n$. Αποδείξτε ότι υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $|x_n - x_m| \leq c\frac{M^n}{1-M}$ για κάθε n, m με $n_0 \leq n < m$. Αποδείξτε ότι η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy. Αν x είναι το όριο της (x_n), αποδείξτε ότι ισχύει τελικά $|x_n - x| \leq c\frac{M^n}{1-M}$.
[β] Έστω $0 < M < 1$ και έστω ότι ισχύει τελικά $|x_{n+1} - x_{n+2}| \leq M|x_n - x_{n+1}|$.[54] Αποδείξτε ότι η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy. Αν x είναι το όριο της (x_n), αποδείξτε ότι υπάρχει $c \geq 0$ ώστε να ισχύει τελικά $|x_n - x| \leq c\frac{M^n}{1-M}$.
[γ] Έστω $x_1 > 0$ και ότι ισχύει $x_{n+1} = 1 + \frac{3}{1+x_n}$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι η ακολουθία (x_n) συγκλίνει και βρείτε το όριό της. Βρείτε και μια εκτίμηση για την απόσταση του n-οστού όρου x_n από το όριο της ακολουθίας.
[δ] Έστω $0 < |\kappa| < 1$ και ότι ισχύει $x_{n+1} = a + \kappa \sin x_n$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι η (x_n) συγκλίνει και βρείτε το όριό της. Βρείτε μια εκτίμηση για την απόσταση του n-οστού όρου x_n από το όριο της ακολουθίας.

2.6.5. Έστω ότι ισχύει η Αρχιμήδεια ιδιότητα και η ιδιότητα πληρότητας. Αποδείξτε, όπως περιγράφεται παρακάτω, ότι ισχύει η ιδιότητα supremum.[55]

[51] Δείτε και τα παραδείγματα 8.2.7 και 8.2.10 και τις ασκήσεις 6.4.11, 7.3.20 και 8.2.1.
[52] Άλλη προσέγγιση για την ακολουθία του παραδείγματος 2.4.4. Δείτε και τις ασκήσεις 2.5.4 και 7.3.20 και τα παραδείγματα 8.2.7, 8.2.10 και 8.3.1 και τις ασκήσεις 2.4.6 και 6.4.11.
[53] Άλλη προσέγγιση του παραδείγματος 2.5.7. Δείτε και την άσκηση 6.4.11 και το παράδειγμα 8.3.9.
[54] Τότε η (x_n) χαρακτηρίζεται **γνησίως συστολική**. Αν $0 \leq M \leq 1$, η ακολουθία χαρακτηρίζεται **συστολική**.
[55] Άρα η ιδιότητα supremum είναι ισοδύναμη με την σύζευξη της ιδιότητας πληρότητας και της Αρχιμήδειας ιδιότητας.

Δείτε την άσκηση 2.4.17 και τα βήματα στην απόδειξη του αποτελέσματός της. Παραλείψτε το αρχικό βήμα, δηλαδή μην αποδείξετε ότι κάθε φθίνουσα και κάτω φραγμένη ακολουθία συγκλίνει. Αποδείξτε ότι $\frac{1}{2^n} \to 0$ και, μετά, επαναλάβατε όλα τα επόμενα βήματα παρατηρώντας ότι οι (x_n), (y_n) είναι ακολουθίες Cauchy. Συμπεράνατε ότι κάθε μη-κενό και άνω φραγμένο σύνολο έχει ελάχιστο άνω φράγμα.

2.6.6. [56] Έστω ακολουθία Cauchy (x_n).

Αποδείξτε ότι υπάρχει $[a_1, b_1]$ ώστε $b_1 - a_1 < 1$ και ώστε να ισχύει τελικά $x_n \in [a_1, b_1]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $[a_2, b_2] \subseteq [a_1, b_1]$ ώστε $b_2 - a_2 < \frac{1}{2}$ και ώστε να ισχύει τελικά $x_n \in [a_2, b_2]$. Επαναλαμβάνοντας αυτήν την διαδικασία επ' άπειρον, δημιουργούνται διαστήματα $[a_k, b_k]$ για κάθε k ώστε να ισχύει $[a_{k+1}, b_{k+1}] \subseteq [a_k, b_k]$ και $b_k - a_k < \frac{1}{k}$ για κάθε k και ώστε να ισχύει τελικά $x_n \in [a_k, b_k]$ για κάθε k. Συμπεράνατε ότι υπάρχει x ώστε να ισχύει $x \in [a_k, b_k]$ για κάθε k και, τέλος, ότι $x_n \to x$.

2.6.7. [57] Έστω ακολουθία Cauchy (x_n).

Θεωρήστε $l_n = \inf\{x_k \,|\, k \geq n\}$ και $u_n = \sup\{x_k \,|\, k \geq n\}$ για κάθε n και αποδείξτε ότι ισχύει $l_n \leq u_n$ και $l_n \leq l_{n+1}$ και $u_{n+1} \leq u_n$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι $u_n - l_n \to 0$ και συμπεράνατε ότι υπάρχει x ώστε $l_n \to x$ και $u_n \to x$. Αποδείξτε ότι ισχύει $l_n \leq x_n \leq u_n$ για κάθε n, οπότε $x_n \to x$.

2.7 Ανώτατο όριο και κατώτατο όριο ακολουθίας.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.19. *Έστω ακολουθία (x_n) και $x \in \overline{\mathbb{R}}$. Το x χαρακτηρίζεται* **υποακολουθιακό όριο** *της ακολουθίας (x_n) αν η (x_n) έχει κάποια υποακολουθία με όριο x.*

Παράδειγμα 2.7.1. Αν μια ακολουθία (x_n) έχει όριο, τότε κάθε υποακολουθία της έχει το ίδιο όριο, οπότε το όριό της είναι το μοναδικό υποακολουθιακό όριό της. Για παράδειγμα, η ακολουθία $(\frac{1}{n})$ έχει μοναδικό υποακολουθιακό όριο τον 0 και η ακολουθία $(-n)$ το $-\infty$.

Παράδειγμα 2.7.2. Η ακολουθία (x_n) με $x_n = (-1)^{n-1}$ για κάθε n έχει τουλάχιστον δύο υποακολουθιακά όρια, τους -1 και 1. Η υποακολουθία (x_{2k}) έχει όριο -1 και η υποακολουθία (x_{2k-1}) έχει όριο 1.
Ας θεωρήσουμε ένα οποιοδήποτε υποακολουθιακό όριο x της (x_n). Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει υποακολουθία (x_{n_k}) της (x_n) με όριο x.
Επειδή οι υποακολουθίες (x_{2k}) και (x_{2k-1}) αποτελούν και οι δύο μαζί ολόκληρη την (x_n), η (x_{n_k}) έχει είτε άπειρους όρους της κοινούς με την (x_{2k}) είτε άπειρους όρους της κοινούς με την (x_{2k-1}).
Αν η (x_{n_k}) έχει άπειρους όρους της κοινούς με την (x_{2k}), οι (x_{n_k}) και (x_{2k}) έχουν μια κοινή υποακολουθία η οποία, ως υποακολουθία της (x_{n_k}), πρέπει να έχει όριο x και, ως υποακολουθία της (x_{2k}), πρέπει να έχει όριο -1 και, επομένως, θα είναι $x = -1$.
Ομοίως, αν η (x_{n_k}) έχει άπειρους όρους της κοινούς με την (x_{2k-1}), θα είναι $x = 1$.
Άρα, αν το x είναι υποακολουθιακό όριο της (x_n), τότε είναι $x = 1$ ή $x = -1$. Άρα τα μοναδικά υποακολουθιακά όρια της (x_n) είναι οι -1 και 1.

Παράδειγμα 2.7.3. Ομοίως, η ακολουθία $\left(\frac{(-1)^{n-1}+1}{2}n\right)$ έχει μοναδικά υποακολουθιακά όρια τον 0 και το $+\infty$.

Σύμφωνα με το θεώρημα των Bolzano - Weierstrass και την πρόταση 2.16, κάθε ακολουθία έχει τουλάχιστον ένα υποακολουθιακό όριο: αν είναι φραγμένη, τότε έχει τουλάχιστον ένα υποακολουθιακό όριο το οποίο είναι αριθμός ενώ, αν δεν είναι φραγμένη, τότε ένα τουλάχιστον από τα $\pm\infty$ είναι υποακολουθιακό όριό της. Άρα το σύνολο των υποακολουθιακών ορίων κάθε ακολουθίας είναι μη-κενό.

[56] Δεύτερη απόδειξη του κριτηρίου του Cauchy.
[57] Τρίτη απόδειξη του κριτηρίου του Cauchy.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.2. *Κάθε ακολουθία έχει ένα μέγιστο υποακολουθιακό όριο και ένα ελάχιστο υποακολουθιακό όριο.*

Απόδειξη. Πρώτη περίπτωση: η (x_n) δεν είναι άνω φραγμένη.
Τότε το $+\infty$ είναι υποακολουθιακό όριο της (x_n) και είναι, προφανώς, το μέγιστο υποακολουθιακό όριο της (x_n).
Δεύτερη περίπτωση: η (x_n) έχει ως μοναδικό υποακολουθιακό όριο το $-\infty$.
Τότε το $-\infty$ είναι, προφανώς, το μέγιστο υποακολουθιακό όριο της (x_n).
Τρίτη περίπτωση: η (x_n) είναι άνω φραγμένη και έχει υποακολουθιακό όριο $\neq -\infty$.
Επειδή η (x_n) είναι άνω φραγμένη, υπάρχει αριθμός u ώστε να ισχύει $x_n \leq u$ για κάθε n. Τότε κάθε υποακολουθία της (x_n) ικανοποιεί την ίδια ανισότητα και, επομένως, κάθε υποακολουθιακό όριο της (x_n) είναι $\leq u$. Άρα η υπόθεση αυτής της περίπτωσης συνεπάγεται ότι η (x_n) έχει υποακολουθιακό όριο $\neq -\infty$ και ότι κάθε τέτοιο υποακολουθιακό όριο είναι $\leq u$. Άρα το σύνολο L των *πραγματικών* υποακολουθιακών ορίων της (x_n), δηλαδή το

$$L = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \text{ είναι υποακολουθιακό όριο της } (x_n)\}.$$

είναι μη-κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Άρα το L έχει supremum το οποίο είναι αριθμός και θέτουμε

$$\overline{x} = \sup L.$$

Θα αποδείξουμε ότι ο $\overline{x}$ είναι υποακολουθιακό όριο της (x_n). Τότε θα συμπεράνουμε ότι ο $\overline{x}$ ανήκει στο L, οπότε είναι το μέγιστο στοιχείο του L και, επομένως, είναι το μέγιστο υποακολουθιακό όριο της (x_n).
Έστω οποιοσδήποτε $\epsilon > 0$. Επειδή $\overline{x} = \sup L$, υπάρχει $x \in L$ ώστε $\overline{x} - \epsilon < x \leq \overline{x}$ και, επομένως, $\overline{x} - \epsilon < x < \overline{x} + \epsilon$. Επειδή $x \in L$, υπάρχει υποακολουθία της (x_n) με όριο x. Άρα οι όροι της υποακολουθίας τελικά ανήκουν στο διάστημα $(\overline{x} - \epsilon, \overline{x} + \epsilon)$ και, επομένως, υπάρχουν άπειροι όροι της (x_n) μέσα στο διάστημα $(\overline{x} - \epsilon, \overline{x} + \epsilon)$. Αυτό το συμπέρασμα θα το εφαρμόσουμε διαδοχικά για $\epsilon = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$.
Επειδή υπάρχουν άπειροι όροι της (x_n) μέσα στο διάστημα $(\overline{x} - 1, \overline{x} + 1)$, επιλέγουμε έναν, έστω τον x_{n_1}, ώστε

$$\overline{x} - 1 < x_{n_1} < \overline{x} + 1.$$

Επειδή υπάρχουν άπειροι όροι της (x_n) μέσα στο διάστημα $(\overline{x} - \frac{1}{2}, \overline{x} + \frac{1}{2})$, επιλέγουμε έναν, έστω τον x_{n_2}, ώστε

$$\overline{x} - \tfrac{1}{2} < x_{n_2} < \overline{x} + \tfrac{1}{2} \qquad \text{και } \ n_2 > n_1.$$

Επειδή υπάρχουν άπειροι όροι της (x_n) μέσα στο διάστημα $(\overline{x} - \frac{1}{3}, \overline{x} + \frac{1}{3})$, επιλέγουμε έναν, έστω τον x_{n_3}, ώστε

$$\overline{x} - \tfrac{1}{3} < x_{n_3} < \overline{x} + \tfrac{1}{3} \qquad \text{και } \ n_3 > n_2.$$

Συνεχίζοντας επαγωγικά, είναι φανερό ότι δημιουργείται μια υποακολουθία (x_{n_k}) της (x_n) έτσι ώστε να ισχύει

$$\overline{x} - \tfrac{1}{k} < x_{n_k} < \overline{x} + \tfrac{1}{k} \qquad \text{για κάθε } \ k$$

και, επομένως,

$$x_{n_k} \to \overline{x}.$$

Άρα ο $\overline{x}$ είναι υποακολουθιακό όριο και, επομένως, το μέγιστο υποακολουθιακό όριο της (x_n).
Δεν υπάρχει άλλη περίπτωση, οπότε έχουμε αποδείξει ότι σε κάθε περίπτωση η (x_n) έχει μέγιστο υποακολουθιακό όριο.
Με συμμετρικό τρόπο αποδεικνύεται ότι η (x_n) έχει και ελάχιστο υποακολουθιακό όριο. □

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.20. [58] *Το* **μέγιστο υποακολουθιακό όριο** *μιας ακολουθίας* (x_n) *ονομάζεται και* **ανώτατο όριο** *της* (x_n) *και συμβολίζεται*

$$\limsup_{n\to+\infty} x_n \quad ή \quad \limsup x_n \quad ή \quad \overline{\lim}\, x_n.$$

Το **ελάχιστο υποακολουθιακό όριο** *μιας ακολουθίας* (x_n) *ονομάζεται και* **κατώτατο όριο** *της* (x_n) *και συμβολίζεται*

$$\liminf_{n\to+\infty} x_n \quad ή \quad \liminf x_n \quad ή \quad \underline{\lim}\, x_n.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.18. [α] *Το* $\overline{\lim}\, x_n$ *έχει τις εξής δύο ιδιότητες:*
(i) *Αν* $\overline{\lim}\, x_n < x$*, τότε ισχύει τελικά* $x_n < x$*.*
(ii) *Αν* $x < \overline{\lim}\, x_n$*, τότε ισχύει* $x < x_n$ *για άπειρους* n*.*
[β] *Το* $\underline{\lim}\, x_n$ *έχει τις εξής δύο ιδιότητες:*
(i) *Αν* $x < \underline{\lim}\, x_n$*, τότε ισχύει τελικά* $x < x_n$*.*
(ii) *Αν* $\overline{\lim}\, x_n < x$*, τότε ισχύει* $x_n < x$ *για άπειρους* n*.*

Απόδειξη. [α] (i) Έστω $\overline{\lim}\, x_n < x$ και έστω ότι δεν είναι σωστό ότι ισχύει τελικά $x_n < x$.
Τότε υπάρχουν άπειροι όροι της (x_n) οι οποίοι είναι $\geq x$. Άρα υπάρχει υποακολουθία της (x_n) όλοι οι όροι της οποίας είναι $\geq x$. Άρα υπάρχει υποακολουθία της συγκεκριμένης υποακολουθίας και, επομένως, υποακολουθία της (x_n) όλοι οι όροι της οποίας είναι $\geq x$ και η οποία έχει όριο. Το όριο αυτό πρέπει να είναι $\geq x$, οπότε υπάρχει υποακολουθιακό όριο της (x_n) το οποίο είναι $\geq x$. Αυτό είναι άτοπο, διότι $\overline{\lim}\, x_n < x$ και το $\overline{\lim}\, x_n$ είναι το μέγιστο υποακολουθιακό όριο της (x_n).
(ii) Έστω $x < \overline{\lim}\, x_n$. Επειδή το $\overline{\lim}\, x_n$ είναι υποακολουθιακό όριο της (x_n), υπάρχει υποακολουθία της (x_n) με όριο το $\overline{\lim}\, x_n$. Τότε οι όροι της υποακολουθίας είναι τελικά $> x$, οπότε υπάρχουν άπειροι όροι της (x_n) οι οποίοι είναι $> x$.
[β] Ομοίως. □

Γνωρίζουμε ότι δεν έχουν όλες οι ακολουθίες όριο. Πρέπει, όμως, να τονιστεί ότι, σύμφωνα με όσα έχουμε πει σ' αυτήν την ενότητα *κάθε ακολουθία έχει ανώτατο όριο και κατώτατο όριο*.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.19. *Έστω οποιαδήποτε ακολουθία* (x_n)*.*
[α] $\underline{\lim}\, x_n \leq \overline{\lim}\, x_n$.
[β] *Η* (x_n) *έχει όριο αν και μόνο αν* $\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n$*. Επίσης, στην περίπτωση που η* (x_n) *έχει όριο, ισχύει* $\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n = \lim x_n$*.*

Απόδειξη. [α] Προφανές, αφού το $\underline{\lim}\, x_n$ είναι το ελάχιστο υποακολουθιακό όριο και το $\overline{\lim}\, x_n$ είναι το μέγιστο υποακολουθιακό όριο της (x_n).
[β] Έστω ότι η (x_n) έχει όριο.
Τότε το $\lim x_n$ είναι το μοναδικό και, επομένως, το μέγιστο και το ελάχιστο υποακολουθιακό όριο της (x_n). Άρα $\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n = \lim x_n$. (Αυτό το είδαμε και στο παράδειγμα 2.7.1.)
Αντιστρόφως, έστω $\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n$.
Αν $\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n = +\infty$, τότε από το (i) της πρότασης 2.18[β] συνεπάγεται ότι για κάθε x ισχύει τελικά $x < x_n$ και, επομένως, $\lim x_n = +\infty$.
Αν $\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n = -\infty$, τότε από το (i) της πρότασης 2.18[α] συνεπάγεται ότι για κάθε x ισχύει τελικά $x_n < x$ και, επομένως, $\lim x_n = -\infty$.
Τέλος, έστω $\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n = x \in \mathbb{R}$. Τότε από το (i) της πρότασης 2.18[α] συνεπάγεται ότι για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει τελικά $x_n < x + \epsilon$ και από το (i) της πρότασης 2.18[β] συνεπάγεται ότι για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει τελικά $x - \epsilon < x_n$. Άρα για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει τελικά $x - \epsilon < x_n < x + \epsilon$. Άρα $\lim x_n = x$. □

[58] Για έναν εναλλακτικό ορισμό του ανώτατου ορίου και του κατώτατου ορίου ακολουθίας δείτε την άσκηση 2.7.15 και τις αντίστοιχες υποσημειώσεις.

Ασκήσεις.

2.7.1. Έστω $a < b < c$ και οι ακολουθίες $(a, b, a, b, a, b, a, b, \dots)$ και $(a, b, c, a, b, c, a, b, c, \dots)$. Βρείτε τα $\overline{\lim}$ και $\underline{\lim}$ των ακολουθιών αυτών καθώς και όλα τα υποακολουθιακά όριά τους.

2.7.2. Βρείτε, μέσω των ορισμών τους, τα $\overline{\lim}$, $\underline{\lim}$ των ακολουθιών: $(\frac{n+1}{n})$, $(\frac{n^2+n+1}{n+3})$, $((-2)^n)$, $\big(2^{(-1)^{n-1}n}\big)$, $\big((-1)^{n-1}(1-\frac{1}{n})\big)$, $\big((-1)^{n-1}(1+\frac{1}{n})\big)$, $\big(2^{n-3[n/3]}\big)$, $\big(\sin\frac{2n\pi}{3}\big)$.

2.7.3. Αποδείξτε ότι $\overline{\lim}\, x_n = +\infty$ αν και μόνο αν η (x_n) δεν είναι άνω φραγμένη.

Αποδείξτε ότι $\overline{\lim}\, x_n = -\infty$ αν και μόνο αν $x_n \to -\infty$.

Ποιά είναι τα αντίστοιχα αποτελέσματα για το $\underline{\lim}\, x_n$;

2.7.4. Αποδείξτε ότι $\underline{\lim}\, x_n = -\overline{\lim}(-x_n)$.

2.7.5. Αν ισχύει τελικά $x_n \leq y_n$, αποδείξτε ότι $\underline{\lim}\, x_n \leq \underline{\lim}\, y_n$ και $\overline{\lim}\, x_n \leq \overline{\lim}\, y_n$.

2.7.6. Έστω ότι ισχύει τελικά $a_n \leq b_n \leq c_n$. Αν $\overline{\lim}\, c_n \leq \underline{\lim}\, a_n$, αποδείξτε ότι οι ακολουθίες (a_n), (b_n), (c_n) έχουν το ίδιο όριο.

2.7.7. Αποδείξτε ότι $\underline{\lim}\, x_n + \underline{\lim}\, y_n \leq \underline{\lim}(x_n + y_n)$ και $\overline{\lim}(x_n + y_n) \leq \overline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, y_n$ αν δεν προκύπτει απροσδιόριστη μορφή.

Αποδείξτε ότι $\underline{\lim}\, x_n\, \underline{\lim}\, y_n \leq \underline{\lim}(x_n y_n)$ και $\overline{\lim}(x_n y_n) \leq \overline{\lim}\, x_n\, \overline{\lim}\, y_n$ αν ισχύει τελικά $x_n > 0$ και $y_n > 0$ και δεν προκύπτει απροσδιόριστη μορφή.

Αν $t > 0$, αποδείξτε ότι $\overline{\lim}(tx_n) = t\ \overline{\lim}\, x_n$ και $\underline{\lim}(tx_n) = t\ \underline{\lim}\, x_n$. Τί γίνεται αν $t < 0$;

2.7.8. Αν η ακολουθία (y_n) έχει όριο και δεν προκύπτουν απροσδιόριστες μορφές, αποδείξτε ότι $\overline{\lim}(x_n + y_n) = \overline{\lim}\, x_n + \lim y_n$ και $\underline{\lim}(x_n + y_n) = \underline{\lim}\, x_n + \lim y_n$.

Αν ισχύει τελικά $x_n, y_n > 0$, η ακολουθία (y_n) έχει όριο και δεν προκύπτουν απροσδιόριστες μορφές, αποδείξτε ότι $\overline{\lim}(x_n y_n) = \overline{\lim}\, x_n \lim y_n$ και $\underline{\lim}(x_n y_n) = \underline{\lim}\, x_n \lim y_n$.

2.7.9. Αν $m \in \mathbb{N}$, αποδείξτε ότι οι ακολουθίες (x_n), (x_{n+m}) έχουν τα ίδια υποακολουθιακά όρια.

2.7.10. Έστω (x_{n_k}) υποακολουθία της (x_n).

Δείτε την άσκηση 2.5.14 και αποδείξτε ότι κάθε υποακολουθιακό όριο της (x_{n_k}) είναι υποακολουθιακό όριο και της (x_n).

Αποδείξτε ότι $\underline{\lim}\, x_n \leq \underline{\lim}\, x_{n_k} \leq \overline{\lim}\, x_{n_k} \leq \overline{\lim}\, x_n$.

2.7.11. [α] Αποδείξτε ότι ο $x \in \overline{\mathbb{R}}$ είναι υποακολουθιακό όριο της ακολουθίας (x_n) αν και μόνο αν για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει $x_n \in N_x(\epsilon)$ για άπειρους n.

[β] Έστω $X \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ το σύνολο των υποακολουθιακών ορίων της ακολουθίας (x_n). Αν (y_n) είναι οποιαδήποτε ακολουθία στο X και $y_n \to y \in \overline{\mathbb{R}}$, αποδείξτε ότι $y \in X$.

Έστω $a < b < c \leq d$. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει ακολουθία (x_n) με σύνολο υποακολουθιακών ορίων το $[a, b) \cup [c, d]$ ή το $[a, b] \cap \mathbb{Q}$.

2.7.12. Αποδείξτε ότι η (x_n) έχει μέγιστο όρο αν και μόνο αν υπάρχει k ώστε $x_k \geq \overline{\lim}\, x_n$.

Αποδείξτε ότι η (x_n) έχει ελάχιστο όρο αν και μόνο αν υπάρχει k ώστε $x_k \leq \underline{\lim}\, x_n$.

2.7.13. [α] Αποδείξτε ότι $\underline{\lim}\, x_n \leq \underline{\lim}\, \frac{x_1+\cdots+x_n}{n} \leq \overline{\lim}\, \frac{x_1+\cdots+x_n}{n} \leq \overline{\lim}\, x_n$.

Πώς από αυτό προκύπτει ως άμεση συνέπεια το θεώρημα του Cesáro στην άσκηση 2.3.41[α];

[β] Αν ισχύει $x_n > 0$ για κάθε n, αποδείξτε ότι $\underline{\lim}\, x_n \leq \underline{\lim}\, \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \overline{\lim}\, \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \overline{\lim}\, x_n$.

[γ] Αν ισχύει $y_n > 0$ για κάθε n και $y_1 + \cdots + y_n \to +\infty$, αποδείξτε ότι $\underline{\lim}\, \frac{x_n}{y_n} \leq \underline{\lim}\, \frac{x_1+\cdots+x_n}{y_1+\cdots+y_n} \leq \overline{\lim}\, \frac{x_1+\cdots+x_n}{y_1+\cdots+y_n} \leq \overline{\lim}\, \frac{x_n}{y_n}$.

2.7.14. [59] Έστω ακολουθία Cauchy (x_n).

Έστω $\underline{x} = \underline{\lim}\, x_n \in \overline{\mathbb{R}}$ και $\overline{x} = \overline{\lim}\, x_n \in \overline{\mathbb{R}}$. Από την απόδειξη του κριτηρίου του Cauchy κρατάμε ότι η (x_n) είναι φραγμένη, οπότε $\underline{x}, \overline{x} \in \mathbb{R}$. Έστω $\underline{x} < \overline{x}$. Θεωρήστε l, u ώστε $\underline{x} < l < u < \overline{x}$. Τότε ισχύει $x_m < l$ για άπειρους m και $x_n > u$ για άπειρους n. Άρα ισχύει $x_n - x_m > u - l$ για άπειρους n, m. Αποδείξτε ότι αυτό είναι άτοπο. Συμπεράνατε ότι $\underline{x} = \overline{x}$, οπότε η (x_n) συγκλίνει.

2.7.15. Έστω ακολουθία (x_n). Θέτουμε $u_n = \sup\{x_k \mid k \geq n\}$, $l_n = \inf\{x_k \mid k \geq n\}$ για κάθε n. Παρατηρήστε ότι ισχύει $l_n \leq u_n$ για κάθε n.

Αν η (x_n) δεν είναι άνω φραγμένη, αποδείξτε ότι ισχύει $u_n = +\infty$ για κάθε n.

Αν η (x_n) είναι άνω φραγμένη, αποδείξτε ότι ισχύει $u_n \in \mathbb{R}$ και $u_{n+1} \leq u_n$ για κάθε n, οπότε η (u_n) έχει όριο στο $[-\infty, +\infty)$. Αποδείξτε ότι $u_n \to \overline{\lim}\, x_n$.[60]

Αν η (x_n) δεν είναι κάτω φραγμένη, αποδείξτε ότι ισχύει $l_n = -\infty$ για κάθε n.

Αν η (x_n) είναι κάτω φραγμένη, αποδείξτε ότι ισχύει $l_n \in \mathbb{R}$ και $l_n \leq l_{n+1}$ για κάθε n, οπότε η (l_n) έχει όριο στο $(-\infty, +\infty]$. Αποδείξτε ότι $l_n \to \underline{\lim}\, x_n$.[61]

2.7.16. Δείτε την πρόταση 2.18.

[α] Αποδείξτε ότι το $\overline{\lim}\, x_n$ είναι ο μοναδικός αριθμός $\overline{x}$ που έχει τις εξής δύο ιδιότητες: (i) αν $\overline{x} < x$, τότε ισχύει τελικά $x_n < x$ και (ii) αν $x < \overline{x}$, τότε ισχύει $x < x_n$ για άπειρους n. Διατυπώστε και αποδείξτε τα αντίστοιχα για το $\underline{\lim}\, x_n$.

[β] Αν ισχύει τελικά $x_n < x$, αποδείξτε ότι $\overline{\lim}\, x_n \leq x$. Αν ισχύει $x < x_n$ για άπειρους n, αποδείξτε ότι $x \leq \overline{\lim}\, x_n$. Διατυπώστε και αποδείξτε τα αντίστοιχα για το $\underline{\lim}\, x_n$.

2.7.17. Έστω ακολουθία (x_n) με την ιδιότητα: $x_{n+1} - x_n \to 0$. Φυσικά, κάθε συγκλίνουσα ακολουθία έχει αυτήν την ιδιότητα και ένα παράδειγμα ακολουθίας με αυτήν την ιδιότητα και με όριο $+\infty$ είναι η $(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n})$.

Αν $\underline{x} = \underline{\lim}\, x_n$ και $\overline{x} = \overline{\lim}\, x_n$, αποδείξτε ότι το σύνολο των υποακολουθιακών ορίων της (x_n) είναι ολόκληρο το διάστημα $[\underline{x}, \overline{x}] \subseteq \overline{\mathbb{R}}$.

Θεωρήστε την ακολουθία $(0, 1, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{3}{4}, \frac{2}{4}, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1, \frac{5}{6}, \frac{4}{6}, \frac{3}{6}, \frac{2}{6}, \frac{1}{6}, 0, \dots)$. Ποιό είναι το σύνολο των υποακολουθιακών ορίων της;

Βρείτε ακολουθία (x_n) ώστε $x_{n+1} - x_n \to 0$ και ώστε το σύνολο των υποακολουθιακών ορίων της να είναι το $\overline{\mathbb{R}}$.

2.7.18. [α][62] Έστω άρρητος $a > 0$. Θεωρήστε την ακολουθία (x_n) με $x_n = na - [na]$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι το σύνολο των υποακολουθιακών ορίων της (x_n) είναι το $[0, 1]$.

[β] Έστω άρρητος $a > 0$. Θεωρήστε την ακολουθία (x_n) με $x_n = \sin(na\pi)$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι το σύνολο των υποακολουθιακών ορίων της (x_n) είναι το $[-1, 1]$.

[59] Τέταρτη απόδειξη του κριτηρίου του Cauchy.

[60] Αυτός είναι ένας εναλλακτικός ισοδύναμος ορισμός του ανώτατου ορίου: $\overline{\lim}\, x_n = +\infty$, αν η (x_n) δεν είναι άνω φραγμένη, και $\overline{\lim}\, x_n = \lim u_n$, αν η (x_n) είναι άνω φραγμένη.

[61] Ο "συμμετρικός" εναλλακτικός ισοδύναμος ορισμός του κατώτατου ορίου: $\underline{\lim}\, x_n = -\infty$, αν η (x_n) δεν είναι κάτω φραγμένη, και $\underline{\lim}\, x_n = \lim l_n$, αν η (x_n) είναι κάτω φραγμένη.

[62] Συνέχεια της άσκησης 2.3.16.

Βασική βιβλιογραφία.

Bartle, R. (1967) *The Elements of Real Analysis, Ch III.* Wiley.
Bartle, R. & Sherbert, D. (2011) *Introduction to Real Analysis, Ch 3.* Wiley.
Beals, R. (2004) *Analysis, an Introduction, Ch 3.* Cambridge Univ. Press.
Beardon, A. (1997) *Limits: a New Approach to Real Analysis, Ch 7, 11.* Springer.
Berberian, S. (1994) *A First Course in Real Analysis, Ch 2-3.* Springer.
Brand, L. (2006) *Advanced Calculus, Ch 2.* Dover.
Buck, R. & Buck, E. (2003) *Advanced Calculus, Ch 1.* Waveland Press.
Courant, R. (1988) *Differential and Integral Calculus, Vol I, Ch I.* Wiley.
Courant, R. & John, F. (1989) *Introduction to Calculus and Analysis, Vol I, Ch 1.* Springer.
Davidson, K. & Donsig, A. (2010) *Real Analysis and Applications, Ch 2.* Springer.
Ghorpade, S. & Limaye, B. (2006) *A Course in Calculus and Real Analysis, Ch 2.* Springer.
Goldberg, R. (1976) *Methods of Real Analysis, Ch 2.* Wiley.
Grauert, H. & Lieb, I. (1967) *Differential- und Integralrechnung, Band I, Kap II.* Springer.
Hardy, G. (2008) *A Course of Pure Mathematics, Ch IV.* Cambridge Univ. Press.
Hayes Jr, C. (1964) *Concepts of Real Analysis, Ch 4-5.* Wiley.
Krantz, S. (2013) *Real Analysis and Foundations, Ch 3.* Chapman and Hall.
Landau, E. (2001) *Differential and Integral Calculus, Ch 1-2.* American Math. Society & Chelsea.
Lang, S. (1997) *Undergraduate Analysis, Ch II.* Springer.
Nikolsky, S. (1977) *A Course of Mathematical Analysis, Vol 1, Ch 3.* Mir Publishers.
Protter, M. (1998) *Basic Elements of Real Analysis, Ch 2.* Springer.
Ross, K. (2013) *Elementary Analysis, Ch 2.* Springer.
Stoll, M. (2000) *Introduction to Real Analysis, Ch 2.* Pearson.

Συμπληρωματική βιβλιογραφία.

Beardon, A. (1997) *Limits: a New Approach to Real Analysis, Ch 3-4.* Springer.
Gleason, A. (1991) *Fundamentals of Abstract Analysis, Ch 12.* Taylor and Francis.
Goffman, C. (1966) *Introduction to Real Analysis, Ch 2.* Harper and Row.
Goffman, C. (1953) *Real Functions, Ch 4.* Rinehart.
Graves, L. (2009) *The Theory of Functions of Real Variables, Ch II-III.* Dover.
Rosenlicht, M. (1986) *Introduction to Analysis, Ch III.* Dover.
Rudin, W. (1976) *Principles of Mathematical Analysis, Ch 3.* McGraw-Hill.
Smirnov, V. (1964) *A Course of Higher Mathematics, Vol 1, Ch I.* Pergammon Press.
Spivak, M. (1994) *Calculus, Ch 22.* Cambridge Univ. Press.

Κεφάλαιο 3

Όρια συναρτήσεων.

3.1 Συναρτήσεις, περιοχές και σημεία συσσώρευσης.

3.1.1 Οι βασικές συναρτήσεις.

Θεωρούμε συναρτήσεις f με πεδία ορισμού και σύνολα τιμών τα οποία είναι υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Θα χρησιμοποιούμε τον γνωστό συμβολισμό

$$f : A \to \mathbb{R},$$

όπου $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι το πεδίο ορισμού της f. Αν γνωρίζουμε τον τύπο $f(x)$ της f και δεν αναφέρεται το πεδίο ορισμού της, θα γράφουμε "η συνάρτηση $f(x)$" ή "η συνάρτηση $y = f(x)$" και θα θεωρούμε ως πεδίο ορισμού το μέγιστο σύνολο το οποίο είναι συμβατό με τον τύπο της συνάρτησης, δηλαδή το σύνολο των x για τους οποίους έχει νόημα ο τύπος $f(x)$. Αν το A είναι υποσύνολο αυτού του μέγιστου συνόλου θα λέμε "η συνάρτηση $f(x)$ για $x \in A$" ή "η συνάρτηση $f(x)$ στο σύνολο A".

Παράδειγμα 3.1.1. Η **σταθερή** συνάρτηση c έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, +\infty)$ και σύνολο τιμών το μονοσύνολο $\{c\}$.
Ειδικές περιπτώσεις είναι η σταθερή συνάρτηση 1 και η σταθερή συνάρτηση 0.

Παράδειγμα 3.1.2. Η συνάρτηση **δύναμη**

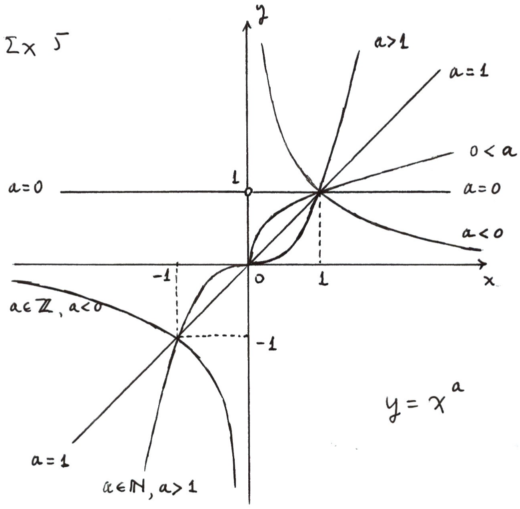
$$x^a.$$

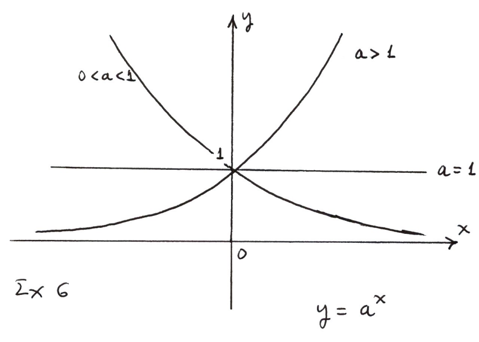
Δείτε το σχήμα 5.
Αν $a \in \mathbb{N}$, τότε το πεδίο ορισμού της x^a είναι το $(-\infty, +\infty)$. Αν ο a είναι περιττός, τότε η x^a είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, +\infty)$ και έχει σύνολο τιμών το $(-\infty, +\infty)$. Αν ο a είναι άρτιος, τότε η x^a είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ με αντίστοιχο σύνολο τιμών το $[0, +\infty)$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ με αντίστοιχο σύνολο τιμών το $[0, +\infty)$.

Αν $a \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, τότε το πεδίο ορισμού της x^a είναι το $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Αν $a = 0$, τότε η x^0 είναι σταθερή 1 στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ και έχει σύνολο τιμών το $\{1\}$. Αν ο a είναι αρνητικός περιττός, τότε η x^a είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$ με αντίστοιχο σύνολο τιμών το $(-\infty, 0)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$ με αντίστοιχο σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$. Αν ο a είναι αρνητικός άρτιος, τότε η x^a είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0)$ με αντίστοιχο σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$ με αντίστοιχο σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$.
Προσέξτε: η x^0 έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ ενώ η σταθερή συνάρτηση 1 έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, +\infty)$. *Εκτός από τον* $x = 0$, οι δύο συναρτήσεις έχουν την ίδια σταθερή τιμή 1. Στον $x = 0$ η x^0 δεν ορίζεται.

Αν $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ και $a > 0$, τότε το πεδίο ορισμού της x^a είναι το $[0, +\infty)$. Η x^a είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ με σύνολο τιμών το $[0, +\infty)$.

Τέλος, αν $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ και $a < 0$, τότε το πεδίο ορισμού της x^a είναι το $(0, +\infty)$. Η x^a είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$ με σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$.





Παράδειγμα 3.1.3. Κάθε **πολυωνυμική** συνάρτηση

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.
Κάθε **ρητή** συνάρτηση

$$R(x) = \frac{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m}$$

έχει πεδίο ορισμού το αντίστοιχο $\mathbb{R}\setminus\{\xi_1, \ldots, \xi_k\}$, όπου $\xi_1, \ldots, \xi_k$ είναι οι ρίζες του πολυωνύμου $b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m$. Αν, για παράδειγμα, οι ρίζες έχουν την διάταξη $\xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_{k-1} < \xi_k$, τότε το πεδίο ορισμού είναι η ένωση $(-\infty, \xi_1) \cup (\xi_1, \xi_2) \cup \ldots \cup (\xi_{k-1}, \xi_k) \cup (\xi_k, +\infty)$.

Παράδειγμα 3.1.4. Η **εκθετική** συνάρτηση

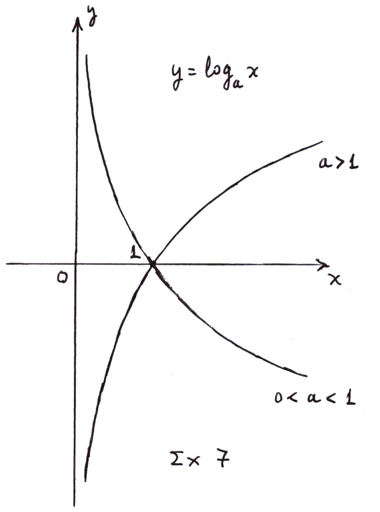
$$a^x \quad \text{ή} \quad \exp_a x.$$

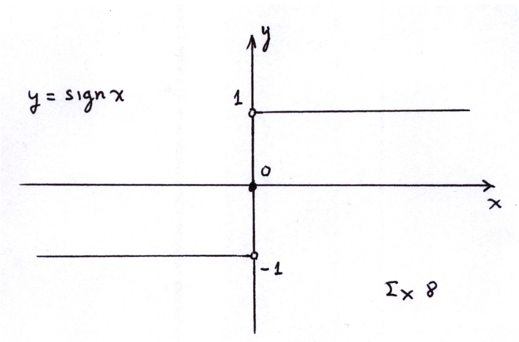
Δείτε το σχήμα 6.
Αν $a = e$, συνήθως συμβολίζουμε $\exp x$ αντί $\exp_e x$.
Αν $a > 1$, η a^x είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, +\infty)$ με σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$.
Αν $0 < a < 1$, η a^x είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, +\infty)$ με σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$.
Αν $a = 1$, η a^x είναι σταθερή 1 στο $(-\infty, +\infty)$. Αν $a = 0$, η a^x είναι σταθερή 0 στο $(0, +\infty)$. Τέλος, αν $a < 0$, το πεδίο ορισμού της a^x είναι το $\mathbb{Z}$. Αυτές οι τελευταίες περιπτώσεις, δηλαδή $a = 1$ και $a \leq 0$, δεν έχουν ιδιαίτερη σημασία ως συναρτήσεις του x.

Παράδειγμα 3.1.5. Η **λογαριθμική** συνάρτηση

$$\log_a x.$$

Δείτε το σχήμα 7.
Αν $a = e$, συνήθως συμβολίζουμε $\log x$ ή $\ln x$ αντί $\log_e x$.
Αν $a > 1$, η $\log_a x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ με σύνολο τιμών το $(-\infty, +\infty)$.
Αν $0 < a < 1$, η $\log_a x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$ με σύνολο τιμών το $(-\infty, +\infty)$.
Αν $a > 0$, $a \neq 1$, οι συναρτήσεις $y = a^x$ και $x = \log_a y$ είναι αντίστροφες. Δηλαδή, για κάθε $x \in (-\infty, +\infty)$ και $y \in (0, +\infty)$ ισχύει $y = a^x$ αν και μόνο αν $x = \log_a y$.





Παράδειγμα 3.1.6. Η συνάρτηση **πρόσημο** με τύπο

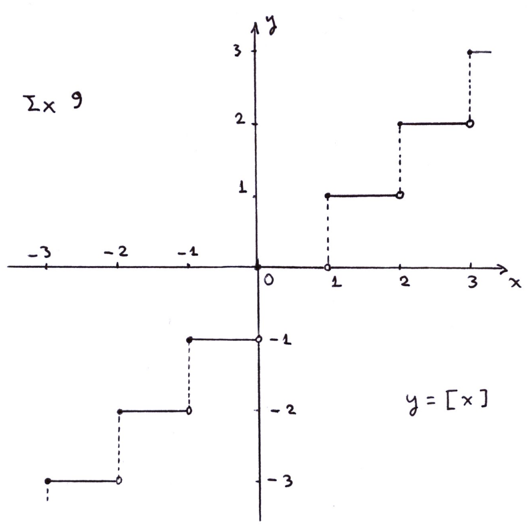
$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & \text{αν } x > 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \\ -1, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$

Δείτε το σχήμα 8.
Το πεδίο ορισμού της $\operatorname{sign} x$ είναι το $\mathbb{R}$, ενώ της συνάρτησης $\frac{x}{|x|}$ είναι το $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Πάντως στο κοινό πεδίο ορισμού, δηλαδή για $x \neq 0$, οι δύο συναρτήσεις ταυτίζονται.

Παράδειγμα 3.1.7. Η συνάρτηση **ακέραιο μέρος** με τύπο

$$[x]$$

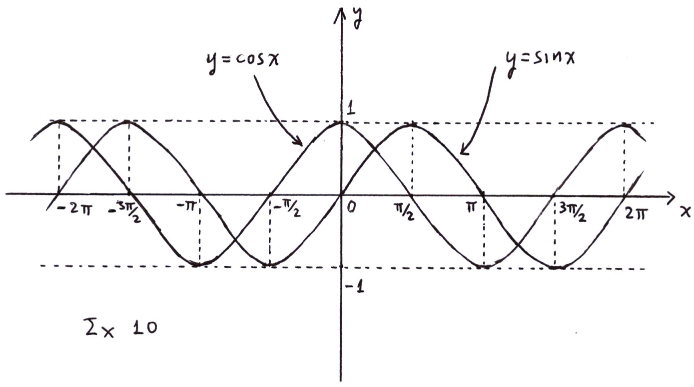
έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και είναι αύξουσα (αλλά όχι γνησίως αύξουσα) στο $\mathbb{R}$. Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, η συνάρτηση αυτή είναι σταθερή $[x] = n$ στο αντίστοιχο διάστημα $[n, n+1)$. Δείτε το σχήμα 9.



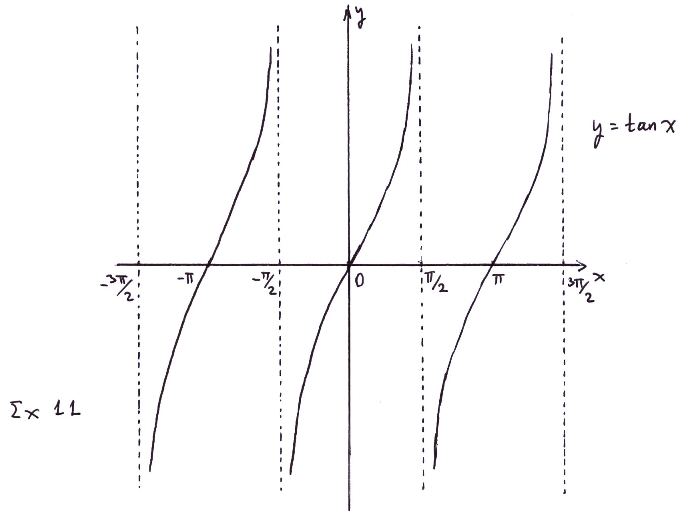
Παράδειγμα 3.1.8. Τέλος, έχουμε τις τέσσερις **τριγωνομετρικές συναρτήσεις**. Αυτές είναι οι

$$\cos x, \qquad \sin x, \qquad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ οι δύο πρώτες, το $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$ η τρίτη και το $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$ η τέταρτη. Δείτε τα σχήματα 10 και 11.



Σx 10



Σx 11

Οι συναρτήσεις αυτές είναι γνωστές από το λύκειο και έχουν οριστεί με “γεωμετρικό” τρόπο. Οι “γεωμετρικοί” ορισμοί των τριγωνομετρικών συναρτήσεων δεν θεωρούνται αποδεκτοί από την Ανάλυση και θα δούμε στην ενότητα 10.4 κάποιους “αναλυτικούς” ορισμούς τους. Μέχρι τότε μπορούμε να χρησιμοποιούμε ως παραδείγματα τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις με κάποιες γνωστές από το λύκειο ιδιότητές τους.

Θα θεωρήσουμε γνωστές μόνο μερικές βασικές αλγεβρικού τύπου ιδιότητες των τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Τις περιγράφουμε παρακάτω.

Κατ’αρχάς έχουμε κάποιες ενδεικτικές τιμές των $\cos x$ και $\sin x$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$:

$$\begin{aligned} &\cos 0 = 1, \quad \cos\tfrac{\pi}{2} = 0, \quad \cos\pi = -1, \quad \cos\tfrac{3\pi}{2} = 0, \quad \cos 2\pi = 1, \\ &\sin 0 = 0, \quad \sin\tfrac{\pi}{2} = 1, \quad \sin\pi = 0, \quad \sin\tfrac{3\pi}{2} = -1, \quad \sin 2\pi = 0. \end{aligned}$$

Κατόπιν έχουμε τις βασικές αλγεβρικές σχέσεις

$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y, \qquad \sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$$

για κάθε x, y και

$$(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$$

για κάθε x. Απο την τελευταία προκύπτει αμέσως ότι

$$|\sin x| \le 1, \qquad |\cos x| \le 1$$

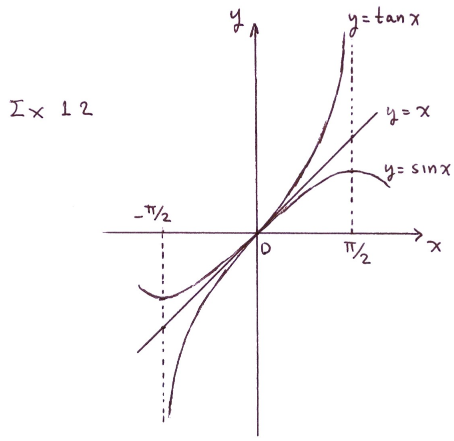
για κάθε x. Έχουμε ακόμη ότι

$$\cos(x+2\pi) = \cos x, \qquad \sin(x+2\pi) = \sin x$$

για κάθε x. Αυτό σημαίνει ότι οι $\cos x$ και $\sin x$ είναι περιοδικές με περίοδο 2π.
Για κάθε ακέραιο k έχουμε τα εξής. Η $\cos x$ είναι θετική στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi)$ και αρνητική στο διάστημα $(\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi)$ και η $\sin x$ είναι θετική στο διάστημα $(2k\pi, \pi+2k\pi)$ και αρνητική στο διάστημα $(\pi+2k\pi, 2\pi+2k\pi)$. Επίσης, η $\cos x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(2k\pi, \pi+2k\pi)$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(\pi+2k\pi, 2\pi+2k\pi)$ και η $\sin x$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi)$.
Οι $\tan x$ και $\cot x$ είναι περιοδικές με περίοδο π και για κάθε ακέραιο k ισχύουν τα εξής. Η $\tan x$ είναι αρνητική στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2}+k\pi, k\pi)$ και θετική στο διάστημα $(k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$ και η $\cot x$ είναι θετική στο διάστημα $(k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$ και αρνητική στο διάστημα $(\frac{\pi}{2}+k\pi, \pi+k\pi)$. Επίσης, η $\tan x$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$ και η $\cot x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(k\pi, \pi+k\pi)$.
Δύο ακόμη γνωστές και χρήσιμες ανισοτικές σχέσεις είναι οι

$$|\sin x| \leq |x| \quad \text{για κάθε } x, \qquad |x| \leq |\tan x| \quad \text{για } |x| < \tfrac{\pi}{2}.$$

Δείτε το σχήμα 12.



Από όλες τις προηγούμενες ιδιότητες θα αποδεικνύουμε σιγά - σιγά στα επόμενα κεφάλαια τις υπόλοιπες ιδιότητες των τριγωνομετρικών συναρτήσεων σχετικά με τα όριά τους, τις παραγώγους τους και τα ολοκληρώματά τους. Μόλις φτάσουμε στην ενότητα 10.4 και δούμε τους "αναλυτικούς" ορισμούς, τότε, βάσει αυτών των ορισμών, θα αποδείξουμε εξ αρχής όλες τις ιδιότητες των τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

3.1.2 Σημεία συσσώρευσης.

Ας ξαναθυμηθούμε από τον ορισμό 2.8 τις περιοχές των σημείων του $\overline{\mathbb{R}}$. Αν $\xi \in \mathbb{R}$ και $\delta > 0$, συμβολίζουμε

$$N_\xi(\delta) = (\xi - \delta, \xi + \delta).$$

Αν $\xi = \pm\infty$ και $\delta > 0$, συμβολίζουμε

$$N_{-\infty}(\delta) = [-\infty, -\tfrac{1}{\delta}), \qquad N_{+\infty}(\delta) = (\tfrac{1}{\delta}, +\infty].$$

Σε κάθε περίπτωση το διάστημα $N_\xi(\delta)$ ονομάζεται δ-*περιοχή* του ξ.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.1. *Το $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ χαρακτηρίζεται* **σημείο συσσώρευσης** *του συνόλου A αν για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $x \in A \cap N_\xi(\delta)$ με $x \neq \xi$.*

Πιο απλά, μπορούμε να πούμε ότι το $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ είναι σημείο συσσώρευσης του συνόλου A αν *σε οσοδήποτε μικρή περιοχή του ξ υπάρχουν σημεία του A διαφορετικά από το ξ*. Ή, αλλιώς, ότι το

$\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ είναι σημείο συσσώρευσης του συνόλου A αν *όσο θέλουμε κοντά στο ξ υπάρχουν σημεία του A διαφορετικά από το ξ*. Ή, αλλιώς, ότι το $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ είναι σημείο συσσώρευσης του συνόλου A αν *υπάρχουν σημεία του A διαφορετικά από το ξ τα οποία πλησιάζουν απεριόριστα το ξ*.

Πιο συγκεκριμένα: (i) ο $\xi \in \mathbb{R}$ είναι σημείο συσσώρευσης του A αν για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $x \in A$ ώστε $0 < |x - \xi| < \delta$, (ii) το $+\infty$ είναι σημείο συσσώρευσης του A αν για κάθε $N > 0$ υπάρχει $x \in A$ ώστε $x > N$ και (iii) το $-\infty$ είναι σημείο συσσώρευσης του A αν για κάθε $N > 0$ υπάρχει $x \in A$ ώστε $x < -N$.

Και ξανά: (i) ο $\xi \in \mathbb{R}$ είναι σημείο συσσώρευσης του A αν για κάθε $\delta > 0$, οσοδήποτε μικρό, υπάρχει σημείο του A στην ένωση $(\xi - \delta, \xi) \cup (\xi, \xi + \delta)$, (ii) το $+\infty$ είναι σημείο συσσώρευσης του A αν για κάθε $N > 0$, οσοδήποτε μεγάλο, υπάρχει σημείο του A στο $(N, +\infty)$ και (iii) το $-\infty$ είναι σημείο συσσώρευσης του A αν για κάθε $N > 0$, οσοσδήποτε μεγάλο, υπάρχει σημείο του A στο $(-\infty, -N)$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.2. *Έστω $\xi \in A$. Ο ξ χαρακτηρίζεται* **μεμονωμένο σημείο** *του A αν δεν είναι σημείο συσσώρευσης του A ή, ισοδύναμα, αν υπάρχει $\delta > 0$ ώστε το μοναδικό στοιχείο του A που ανήκει στην $N_\xi(\delta)$ είναι ο ξ, δηλαδή $A \cap (\xi - \delta, \xi + \delta) = \{\xi\}$.*

Παράδειγμα 3.1.9. Έστω $a < b$. Κάθε αριθμός $\xi \in [a, b]$, συμπεριλαμβανομένων των a και b, είναι σημείο συσσώρευσης του διαστήματος (a, b). Επίσης, κανένα $\xi \notin [a, b]$ δεν είναι σημείο συσσώρευσης του (a, b). Επομένως, το σύνολο των σημείων συσσώρευσης του διαστήματος (a, b) είναι το διάστημα $[a, b]$.
Ομοίως, το σύνολο των σημείων συσσώρευσης καθενός από τα διαστήματα $(a, b]$, $[a, b)$, $[a, b]$ είναι το $[a, b]$.

Παράδειγμα 3.1.10. Το σύνολο των σημείων συσσώρευσης καθενός από τα $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$ είναι το $[a, +\infty]$. Ειδικώτερα, τα άκρα a και $+\infty$ είναι σημεία συσσώρευσης των διαστημάτων $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$. Ομοίως, το σύνολο των σημείων συσσώρευσης καθενός από τα $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$ είναι το $[-\infty, b]$. Τέλος, το σύνολο των σημείων συσσώρευσης του $(-\infty, +\infty)$ είναι το $[-\infty, +\infty]$.

Παράδειγμα 3.1.11. Έστω $a < b$. Το δισύνολο $\{a, b\}$ δεν έχει κανένα σημείο συσσώρευσης. Ειδικώτερα, και τα δύο στοιχεία του $\{a, b\}$ είναι μεμονωμένα σημεία του.

Παράδειγμα 3.1.12. Αν $a < b < c$, τότε το σύνολο των σημείων συσσώρευσης του $[a, b) \cup \{c\}$ είναι το $[a, b]$. Ο c είναι μεμονωμένο σημείο του $[a, b) \cup \{c\}$.

Παράδειγμα 3.1.13. Το μοναδικό σημείο συσσώρευσης του $\mathbb{N}$ είναι το $+\infty$. Κάθε στοιχείο του $\mathbb{N}$ είναι μεμονωμένο σημείο του.

Παράδειγμα 3.1.14. Ο 0 είναι το μοναδικό σημείο συσσώρευσης του $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Κάθε στοιχείο του $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ είναι μεμονωμένο σημείο του.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.3. *Αν $\xi \in \mathbb{R}$ και $\delta > 0$, συμβολίζουμε*

$$N_{\xi-}(\delta) = (\xi - \delta, \xi], \qquad N_{\xi+}(\delta) = [\xi, \xi + \delta)$$

και αυτά τα διαστήματα ονομάζονται **αριστερή δ-περιοχή** *και* **δεξιά δ-περιοχή** *του ξ, αντιστοίχως.*

Παρατηρήστε τις απλές σχέσεις: $N_{\xi-}(\delta) \cup N_{\xi+}(\delta) = N_\xi(\delta)$ και $N_{\xi-}(\delta) \cap N_{\xi+}(\delta) = \{\xi\}$. Οι πλευρικές δ-περιοχές έχουν κοινό σημείο μόνο τον ξ και η ένωσή τους είναι η δ-περιοχή.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.4. *Ο $\xi \in \mathbb{R}$ χαρακτηρίζεται* **από αριστερά του σημείο συσσώρευσης** *του συνόλου A αν για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $x \in A \cap N_{\xi-}(\delta)$ με $x \neq \xi$ ή, ισοδύναμα, υπάρχει $x \in A$ ώστε $\xi - \delta < x < \xi$.*
Ο $\xi \in \mathbb{R}$ χαρακτηρίζεται **από δεξιά του σημείο συσσώρευσης** *του συνόλου A αν για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $x \in A \cap N_{\xi+}(\delta)$ με $x \neq \xi$ ή, ισοδύναμα, υπάρχει $x \in A$ ώστε $\xi < x < \xi + \delta$.*

Δηλαδή, ο ξ είναι από δεξιά (αριστερά) του σημείο συσσώρευσης του συνόλου A αν υπάρχουν σημεία του A στην δεξιά (αριστερή) μεριά του ξ τα οποία πλησιάζουν απεριόριστα τον ξ. Ή, αλλιώς, ότι ο ξ είναι από δεξιά (αριστερά) του σημείο συσσώρευσης του συνόλου A αν *όσο θέλουμε κοντά στον ξ και δεξιά (αριστερά) του ξ υπάρχουν σημεία του A.*

Είναι προφανές ότι:

Ο $\xi \in \mathbb{R}$ είναι σημείο συσσώρευσης του συνόλου A αν και μόνο αν είναι είτε από αριστερά του είτε από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A.

Παράδειγμα 3.1.15. Κάθε ξ στο $(a, b]$ είναι από αριστερά του σημείο συσσώρευσης του (a, b) και κάθε ξ στο $[a, b)$ είναι από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του (a, b). Άρα κάθε ξ στο (a, b) είναι από αριστερά του και από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του (a, b).

Παράδειγμα 3.1.16. Ο b είναι μόνο από αριστερά του σημείο συσσώρευσης του (a, b) και είναι μόνο από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του (b, c). Αλλά ο b είναι από αριστερά του και από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του $(a, b) \cup (b, c)$.

Παράδειγμα 3.1.17. Ο 0 είναι μόνο από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του $\{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ και είναι μόνο από αριστερά του σημείο συσσώρευσης του $\{-\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$. Αλλά, ο 0 είναι από αριστερά του και από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του $\{-\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\} \cup \{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$.

Έστω μια ιδιότητα η οποία ισχύει ή όχι ανάλογα με τις τιμές που παίρνει η μεταβλητή x σε κάποιο σύνολο A, δηλαδή *έχει νόημα* στο σύνολο A και ισχύει για κάποιους $x \in A$ ενώ δεν ισχύει για τους υπόλοιπους $x \in A$. Μια τέτοια ιδιότητα μπορεί να είναι η $f(x) > 0$ ή η $f(x) \neq -7$, όπου $f : A \to \mathbb{R}$ είναι μια συγκεκριμένη συνάρτηση. Σ' αυτήν την περίπτωση η ιδιότητα έχει νόημα ακριβώς για τους x που ανήκουν στο πεδίο ορισμού A της f. Για κάποιους x στο πεδίο ορισμού A της f η ιδιότητα ισχύει και για τους υπόλοιπους x στο A η ιδιότητα δεν ισχύει.

Παράδειγμα 3.1.18. Η ανισότητα $\frac{1}{\sqrt{x}} > 2$ έχει νόημα στο διάστημα $(0, +\infty)$, διότι αυτό είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\frac{1}{\sqrt{x}}$. Η ιδιότητα ισχύει στο $(0, \frac{1}{4})$ και δεν ισχύει στο $[\frac{1}{4}, +\infty)$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.5. *Έστω μια ιδιότητα που έχει νόημα στο σύνολο A και $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A. Λέμε ότι η ιδιότητα* **ισχύει κοντά στο** *ξ αν υπάρχει $\delta > 0$ ώστε η ιδιότητα να ισχύει για κάθε $x \in A \cap N_\xi(\delta)$ με $x \neq \xi$.*

Παράδειγμα 3.1.19. Σύμφωνα με το προηγούμενο παράδειγμα, η ανισότητα $\frac{1}{\sqrt{x}} > 2$ έχει νόημα στο $(0, +\infty)$ και ισχύει κοντά στον 0. Μπορείτε να ελέγξετε εύκολα ότι, όποιον αριθμό $M > 0$ κι αν πάρουμε, η ανισότητα $\frac{1}{\sqrt{x}} > M$ ισχύει κοντά στον 0.

Παράδειγμα 3.1.20. Αν $\epsilon > 0$, η διπλή ανισότητα $0 < \frac{1}{x} < \epsilon$ ισχύει κοντά στο $+\infty$, διότι ισχύει στο διάστημα $(\frac{1}{\epsilon}, +\infty)$.

Παράδειγμα 3.1.21. Αν $M > 0$, η ανισότητα $\frac{1}{|x|} > M$ ισχύει κοντά στον 0, διότι ισχύει στο $(-\frac{1}{M}, 0) \cup (0, \frac{1}{M})$. Όμως, δεν είναι σωστό ότι η ανισότητα $\frac{1}{x} > M$ ισχύει κοντά στον 0.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.6. *Έστω μια ιδιότητα που έχει νόημα στο σύνολο A και $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A. Λέμε ότι η ιδιότητα* **ισχύει σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο** *ξ αν για κάθε $\delta > 0$ η ιδιότητα ισχύει για τουλάχιστον έναν $x \in A \cap N_\xi(\delta)$ με $x \neq \xi$.*

Είναι προφανές ότι:

Αν μια ιδιότητα ισχύει κοντά στο ξ, τότε αυτή ισχύει και σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο ξ.

Το αντίστροφο δεν ισχύει εν γένει.

Παράδειγμα 3.1.22. Η ανισότητα $\sin x > 0$ έχει νόημα στο $\mathbb{R}$ και το $+\infty$ είναι σημείο συσσώρευσης του $\mathbb{R}$. Η ανισότητα ισχύει σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο $+\infty$, αφού ισχύει για παράδειγμα στο $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Παρατηρούμε, όμως, ότι και η αντίθετη ανισότητα $\sin x \leq 0$ ισχύει σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο $+\infty$, αφού ισχύει στο $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Άρα είναι λάθος ότι η ανισότητα $\sin x > 0$ ισχύει κοντά στο $+\infty$.

Έστω δύο ιδιότητες οι οποίες έχουν νόημα στο ίδιο σύνολο A αλλά ισχύουν σε, πιθανώς, διαφορετικά υποσύνολα του A και έστω $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A.

Αν δύο ιδιότητες έχουν νόημα στο ίδιο σύνολο και η μία ιδιότητα ισχύει κοντά στο ξ και η άλλη ιδιότητα ισχύει, επίσης, κοντά στο ξ, τότε ισχύουν και οι δύο, ταυτόχρονα, ιδιότητες κοντά στο ξ.

Πράγματι, υπάρχει $\delta' > 0$ ώστε η πρώτη ιδιότητα να ισχύει για κάθε $x \in A \cap N_\xi(\delta')$ με $x \neq \xi$ και υπάρχει $\delta'' > 0$ ώστε η δεύτερη ιδιότητα να ισχύει για κάθε $x \in A \cap N_\xi(\delta'')$ με $x \neq \xi$. Θεωρούμε

$$\delta = \min\{\delta', \delta''\} > 0,$$

οπότε $\delta \leq \delta'$ και $\delta \leq \delta''$. Άρα $N_\xi(\delta) \subseteq N_\xi(\delta')$ και $N_\xi(\delta) \subseteq N_\xi(\delta'')$. Άρα ισχύουν και οι δύο ιδιότητες για κάθε $x \in A \cap N_\xi(\delta)$ με $x \neq \xi$.

Το προηγούμενο συμπέρασμα ισχύει για οποιονδήποτε *πεπερασμένο* αριθμό ιδιοτήτων.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.7. *Έστω μια ιδιότητα η οποία έχει νόημα στο σύνολο A.*
Έστω ότι ο $\xi \in \mathbb{R}$ είναι από αριστερά του σημείο συσσώρευσης του A.
Λέμε ότι η ιδιότητα **ισχύει κοντά στον** ξ **από αριστερά του** *αν υπάρχει $\delta > 0$ ώστε η ιδιότητα να ισχύει για κάθε $x \in A \cap (\xi - \delta, \xi)$.*
Λέμε ότι η ιδιότητα **ισχύει σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στον** ξ **από αριστερά του** *αν για κάθε $\delta > 0$ η ιδιότητα ισχύει για τουλάχιστον έναν $x \in A \cap (\xi - \delta, \xi)$.*
Έστω ότι ο $\xi \in \mathbb{R}$ είναι από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A.
Λέμε ότι η ιδιότητα **ισχύει κοντά στον** ξ **από δεξιά του** *αν υπάρχει $\delta > 0$ ώστε η ιδιότητα να ισχύει για κάθε $x \in A \cap (\xi, \xi + \delta)$.*
Λέμε ότι η ιδιότητα **ισχύει σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στον** ξ **από δεξιά του** *αν για κάθε $\delta > 0$ η ιδιότητα ισχύει για τουλάχιστον έναν $x \in A \cap (\xi, \xi + \delta)$.*

Όλα τα συμπεράσματα για το "κοντά στον ξ" και για το "σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στον ξ" προσαρμόζονται με προφανή τρόπο και στο πλαίσιο των "κοντά στον ξ από δεξιά (αριστερά) του" και "σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στον ξ από δεξιά (αριστερά) του".

Παράδειγμα 3.1.23. Πίσω στο παράδειγμα 3.1.21. Ο 0 είναι από αριστερά του και από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Η ιδιότητα $\frac{1}{|x|} > M$ ισχύει κοντά στον 0 και, ταυτόχρονα, ισχύει κοντά στον 0 από αριστερά του και κοντά στον 0 από δεξιά του. Όμως, η ιδιότητα $\frac{1}{x} > M$ ισχύει κοντά στον 0 από δεξιά του αλλά δεν είναι σωστό ότι ισχύει κοντά στον 0 από αριστερά του και, επομένως, δεν είναι σωστό ότι ισχύει κοντά στον 0.

Παράδειγμα 3.1.24. Η ιδιότητα $\frac{1}{\sqrt{x}} > M$ του παραδείγματος 3.1.19 ισχύει κοντά στον 0 και, ταυτόχρονα, κοντά στον 0 από δεξιά του. Δεν έχει νόημα το να ισχύει κοντά στον 0 από αριστερά του, διότι ο 0 είναι μόνο από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του $(0, +\infty)$, του πεδίου ορισμού της συνάρτησης $\frac{1}{\sqrt{x}}$.

Ασκήσεις.

3.1.1. Έστω $a < b < c$. Βρείτε τα σημεία συσσώρευσης των $(a, b) \cup (b, c)$, $(a, b) \cup \{c + \frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$, $\{(-1)^{n-1}(1 + \frac{1}{n}) \,|\, n \in \mathbb{N}\}$, $\{2^n + \frac{1}{m} \,|\, n, m \in \mathbb{N}\}$, $\{\frac{1}{n} + \frac{1}{mn^2} \,|\, n, m \in \mathbb{N}\}$.

3.1.2. Αποδείξτε ότι το $+\infty$ είναι σημείο συσσώρευσης του A αν και μόνο αν το A δεν είναι άνω φραγμένο. Αποδείξτε ότι το $-\infty$ είναι σημείο συσσώρευσης του A αν και μόνο αν το A δεν είναι κάτω φραγμένο.

3.1.3. Αποδείξτε ότι το $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ είναι σημείο συσσώρευσης του συνόλου A αν και μόνο αν για κάθε $\delta > 0$ η περιοχή $N_\xi(\delta)$ του ξ περιέχει *άπειρα* στοιχεία του A.

3.1.4. Έστω $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ και $A \subseteq B$. Αν το ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A, αποδείξτε ότι είναι σημείο συσσώρευσης και του B.

3.1.5. Αποδείξτε ότι κάθε $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ είναι σημείο συσσώρευσης των συνόλων $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Βρείτε τα σημεία συσσώρευσης των συνόλων $(a, b) \cap \mathbb{Q}$ και $(a, b) \setminus \mathbb{Q}$.

3.1.6. Έστω μη-κενό σύνολο A. Αποδείξτε ότι, αν το sup A δεν ανήκει στο A, τότε είναι σημείο συσσώρευσης του A. Ομοίως, για το inf A.

Βρείτε μη-κενό σύνολο A ώστε το sup A και το inf A να μην είναι σημεία συσσώρευσής του.

3.1.7. Ποιό είναι το σύνολο στο οποίο έχει νόημα και ποιό το σύνολο στο οποίο ισχύει καθεμιά από τις ανισότητες: $\frac{1}{x^2} > 100$, $\frac{x+2}{|x-1|} > 1000$, $-\frac{1}{100} < \frac{1}{x+3} < \frac{1}{100}$; Αποδείξτε ότι η πρώτη ανισότητα ισχύει κοντά στον 0, η δεύτερη κοντά στον 1 και η τρίτη κοντά στα $\pm\infty$.

Ποιό είναι το σύνολο στο οποίο έχει νόημα και ποιό το σύνολο στο οποίο ισχύει καθεμιά από τις ανισότητες: $(-1)^{[1/x]} < 0$, $x - [x] > \frac{1}{2}$, $\sin \frac{1}{x} > \frac{1}{2}$; Αποδείξτε ότι η πρώτη ανισότητα ισχύει σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στον 0, η δεύτερη σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο $+\infty$ και η τρίτη σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στον 0. Αποδείξτε ότι είναι λάθος ότι η πρώτη ανισότητα ισχύει κοντά στον 0, η δεύτερη κοντά στο $+\infty$, η τρίτη κοντά στον 0.

3.1.8. Αποδείξτε ότι το $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ είναι σημείο συσσώρευσης του συνόλου A αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία (x_n) στο A ώστε $x_n \to \xi$ και ώστε να ισχύει $x_n \neq \xi$ για κάθε n.

Αποδείξτε ότι ο $\xi \in \mathbb{R}$ είναι από δεξιά (αριστερά) του σημείο συσσώρευσης του συνόλου A αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία (x_n) στο A ώστε $x_n \to \xi$ και ώστε να ισχύει $x_n > \xi$ ($x_n < \xi$) για κάθε n.

Έστω $\xi \in A$. Αποδείξτε ότι ο ξ είναι μεμονωμένο σημείο του A αν και μόνο αν κάθε ακολουθία (x_n) στο A με όριο ξ είναι τελικά σταθερή.

3.1.9. Έστω ιδιότητα η οποία έχει νόημα στο σύνολο A και $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A.

Αποδείξτε ότι η ιδιότητα ισχύει σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο ξ αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία (x_n) στο A ώστε $x_n \to \xi$, ώστε να ισχύει $x_n \neq \xi$ για κάθε n και ώστε ο x_n να έχει την ιδιότητα για κάθε n.

Αποδείξτε ότι η ιδιότητα ισχύει σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στον ξ από δεξιά (αριστερά) του αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία (x_n) στο A ώστε $x_n \to \xi$, ώστε να ισχύει $x_n > \xi$ ($x_n < \xi$) για κάθε n και ώστε ο x_n να έχει την ιδιότητα για κάθε n.

3.1.10. [α][1] Αποδείξτε ότι κάθε άπειρο και φραγμένο σύνολο έχει τουλάχιστον ένα σημείο συσσώρευσης στο $\mathbb{R}$.

[β] Αποδείξτε ότι κάθε άπειρο σύνολο έχει τουλάχιστον ένα σημείο συσσώρευσης στο $\overline{\mathbb{R}}$.

3.2 Όρια συναρτήσεων.

Τώρα θα δούμε τον συνοπτικό και *ενιαίο* ορισμό του **ορίου συνάρτησης** και, κατόπιν, θα τον εξειδικεύσουμε στις διάφορες περιπτώσεις που παρουσιάζονται.

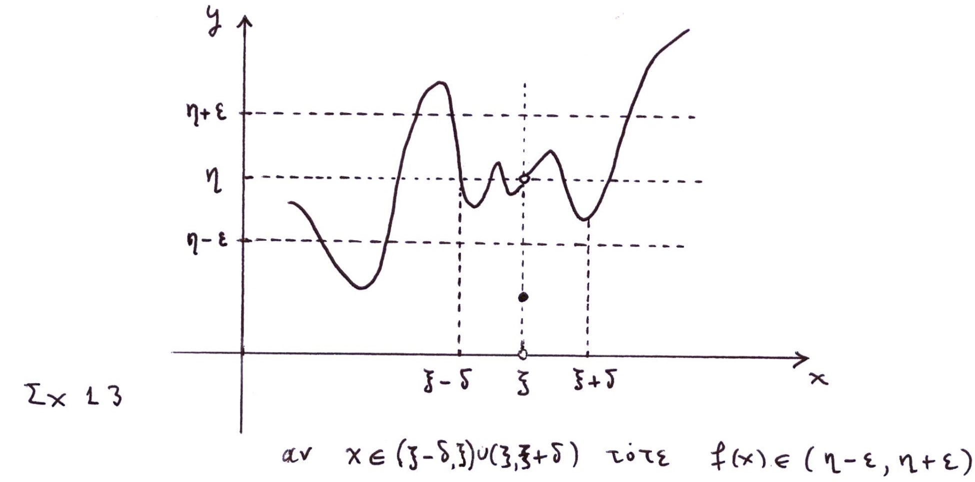
ΟΡΙΣΜΟΣ 3.8. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi, \eta \in \overline{\mathbb{R}}$ εκ των οποίων το ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A. Λέμε ότι η f έχει* **όριο** *η στο ξ αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $f(x) \in N_\eta(\epsilon)$ για κάθε $x \in A \cap N_\xi(\delta)$ με $x \neq \xi$. Πιο συνοπτικά: η f έχει όριο η στο ξ αν για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει $f(x) \in N_\eta(\epsilon)$ κοντά στο ξ.*
Συμβολίζουμε:

$$f(x) \xrightarrow[x \to \xi]{} \eta \quad \text{ή} \quad f(x) \to \eta \ \text{όταν} \ x \to \xi \quad \text{ή} \quad \lim_{x \to \xi} f(x) = \eta.$$

*Εκτός από την έκφραση "έχει όριο η", χρησιμοποιούμε την έκφραση "***τείνει** *στο η" καθώς και τις εκφράσεις "***συγκλίνει** *στον η", αν ο η είναι αριθμός, και "***αποκλίνει** *στο η", αν $\eta = \pm\infty$.*
Αν η f δεν έχει όριο στο ξ, λέμε ότι η f **αποκλίνει**.

[1] Θεώρημα των Bolzano - Weierstrass

Δείτε το σχήμα 13.



Μπορούμε να εκφράσουμε τον ορισμό του ορίου με απλούστερα λόγια ως εξής: *η f έχει όριο η στο ξ αν ο $f(x)$ πλησιάζει απεριόριστα το η όταν ο x έρχεται κατάλληλα κοντά στο ξ παραμένοντας διαφορετικός από το ξ.*

Όταν $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$, το ότι ισχύει $f(x) \in N_\eta(\epsilon)$ για κάθε $x \in A \cap N_\xi(\delta)$ με $x \neq \xi$ μπορούμε να το εκφράσουμε και ως εξής: *η f απεικονίζει το σύνολο $A \cap (N_\xi(\delta) \setminus \{\xi\})$ μέσα στην περιοχή $N_\eta(\epsilon)$ ή, ισοδύναμα,*

$$f\big(A \cap (N_\xi(\delta) \setminus \{\xi\})\big) \subseteq N_\eta(\epsilon).$$

Η διατύπωση του ορισμού του ορίου συνάρτησης με τα σύμβολα της μαθηματικής λογικής έχει ως εξής:

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta \;\Leftrightarrow\; \big[\, \forall\epsilon > 0\; \exists\delta > 0\; \forall x \in A\; \big[\, (x \in N_\xi(\delta) \text{ και } x \neq \xi) \;\Rightarrow\; f(x) \in N_\eta(\epsilon) \,\big]\,\big]$$

Ας δούμε, τώρα, τον ορισμό του ορίου συνάρτησης εξειδικευμένο στις διάφορες περιπτώσεις, ανάλογα με το αν καθένα από τα ξ, η είναι αριθμός ή $\pm\infty$.

Περίπτωση 1: $\xi \in \mathbb{R}$ και $\eta \in \mathbb{R}$.
Η f έχει όριο η στον ξ αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x) - \eta| < \epsilon$ για κάθε $x \in A$ με $0 < |x - \xi| < \delta$.

Περίπτωση 2: $\xi \in \mathbb{R}$ και $\eta = +\infty$.
Η f έχει όριο $+\infty$ στον ξ αν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $f(x) > M$ για κάθε $x \in A$ με $0 < |x - \xi| < \delta$.

Περίπτωση 3: $\xi \in \mathbb{R}$ και $\eta = -\infty$.
Η f έχει όριο $-\infty$ στον ξ αν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $f(x) < -M$ για κάθε $x \in A$ με $0 < |x - \xi| < \delta$.

Περίπτωση 4: $\xi = +\infty$ και $\eta \in \mathbb{R}$.
Η f έχει όριο η στο $+\infty$ αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $N > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x) - \eta| < \epsilon$ για κάθε $x \in A$ με $x > N$.

Περίπτωση 5: $\xi = +\infty$ και $\eta = +\infty$.
Η f έχει όριο $+\infty$ στο $+\infty$ αν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $N > 0$ ώστε να ισχύει $f(x) > M$ για κάθε $x \in A$ με $x > N$.

Περίπτωση 6: $\xi = +\infty$ και $\eta = -\infty$.
Η f έχει όριο $-\infty$ στο $+\infty$ αν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $N > 0$ ώστε να ισχύει $f(x) < -M$ για κάθε $x \in A$ με $x > N$.

Περίπτωση 7: $\xi = -\infty$ και $\eta \in \mathbb{R}$.
Η f έχει όριο η στο $-\infty$ αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $N > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x) - \eta| < \epsilon$ για κάθε $x \in A$ με $x < -N$.

Περίπτωση 8: $\xi = -\infty$ και $\eta = +\infty$.
Η f έχει όριο $+\infty$ στο $-\infty$ αν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $N > 0$ ώστε να ισχύει $f(x) > M$ για κάθε $x \in A$ με $x < -N$.

Περίπτωση 9: $\xi = -\infty$ και $\eta = -\infty$.
Η f έχει όριο $-\infty$ στο $-\infty$ αν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $N > 0$ ώστε να ισχύει $f(x) < -M$ για κάθε $x \in A$ με $x < -N$.

Όταν θα γράφουμε $\lim_{x \to \xi} f(x) = \eta$ χωρίς άλλη διευκρίνηση, θα εννοούμε ότι το όριο η είναι στοιχείο του $\overline{\mathbb{R}}$, αλλά και ότι το ξ είναι στοιχείο του $\overline{\mathbb{R}}$.

Για να έχει νόημα η ύπαρξη ή η μη-ύπαρξη του ορίου $\lim_{x \to \xi} f(x)$ *προϋποτίθεται* ότι το $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ είναι σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού της f. Πρέπει να πούμε ότι οι περισσότερες συναρτήσεις που εμφανίζονται στην πράξη έχουν ως πεδίο ορισμού κάποιο διάστημα, το οποίο δεν είναι μονοσύνολο, ή κάποια πεπερασμένη ένωση τέτοιων διαστημάτων. Σε μια τέτοια περίπτωση ένας ξ αποτελεί σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού αν είναι εσωτερικό σημείο ή άκρο ενός τουλάχιστον από τα διαστήματα που αποτελούν το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Για παράδειγμα, αν το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης f είναι το $(a, b]$, τότε η ύπαρξη ή όχι του $\lim_{x \to \xi} f(x)$ έχει νόημα μόνο για τους ξ που ανήκουν στο $[a, b]$. Ανάλογα, αν το πεδίο ορισμού μιας f είναι το $(a, b) \cup (b, +\infty)$, τότε η ύπαρξη ή όχι του $\lim_{x \to \xi} f(x)$ έχει νόημα μόνο για τα ξ που ανήκουν στο $[a, +\infty]$. Και, αν το πεδίο ορισμού μιας f είναι το $(-\infty, b] \cup \{c\} \cup (d, e]$, όπου $b < c < d$, τότε η ύπαρξη ή όχι του $\lim_{x \to \xi} f(x)$ έχει νόημα μόνο για τα ξ που ανήκουν στο $[-\infty, b] \cup [d, e]$ και όχι για τον c, ο οποίος δεν είναι σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού.

Παράδειγμα 3.2.1. Τώρα θα δούμε παράδειγμα συνάρτησης με σχετικά απλό τύπο αλλά με κάπως περίπλοκο πεδίο ορισμού. Θεωρούμε την συνάρτηση που ορίζεται με τον τύπο

$$f(x) = \big(x \sin \tfrac{1}{x}\big)^{1/2}.$$

Το πεδίο ορισμού A της f προκύπτει λύνοντας την $x \sin \frac{1}{x} \geq 0$ και εύκολα βρίσκουμε ότι

$$A = \big(-\infty, -\tfrac{1}{\pi}\big] \cup \bigcup_{n=1}^{+\infty} \big[-\tfrac{1}{2n\pi}, -\tfrac{1}{(2n+1)\pi}\big] \cup \bigcup_{n=1}^{+\infty} \big[\tfrac{1}{(2n+1)\pi}, \tfrac{1}{2n\pi}\big] \cup \big[\tfrac{1}{\pi}, +\infty\big).$$

Παρατηρούμε ότι το A βρίσκεται και στις δύο μεριές του 0 και αποτελείται από άπειρα συμμετρικά ως προς τον 0 διαστήματα τα οποία προσεγγίζουν απεριόριστα τον 0. Δηλαδή, ο 0 είναι (και από τις δύο μεριές του) σημείο συσσώρευσης του A και, επομένως, έχει νόημα η ύπαρξη ή η μη-ύπαρξη του ορίου $\lim_{x \to 0} f(x)$. Στην επόμενη ενότητα θα δούμε πολύ εύκολα ότι το όριο αυτό υπάρχει και είναι ίσο με 0.
Παρατηρήστε ότι εκτός από τα άπειρα διαστήματα στα οποία είναι ορισμένη η f, *υπάρχουν και άπειρα άλλα συμπληρωματικά διαστήματα και στις δύο μεριές του* 0 *τα οποία προσεγγίζουν απεριόριστα τον* 0 *και στα οποία δεν είναι ορισμένη η* f. *Τα διαστήματα ορισμού και τα διαστήματα μη-ορισμού της* f *εναλλάσσονται διαρκώς πλησιάζοντας τον* 0 *και από τις δύο μεριές του και, επομένως, δεν υπάρχει κανένα διάστημα με άκρο τον* 0, *είτε δεξιά είτε αριστερά του* 0, *στο οποίο να είναι ορισμένη η* f.

Τώρα θα κάνουμε μερικές παρατηρήσεις ανάλογες εκείνων που είχαμε κάνει για τον ορισμό του ορίου ακολουθίας. Για να αποδείξουμε ότι $\lim_{x \to \xi} f(x) = \eta$ όταν $\xi, \eta \in \mathbb{R}$, θεωρούμε έναν τυχόντα $\epsilon > 0$ και προσπαθούμε να αποδείξουμε την ύπαρξη ενός $\delta > 0$ (ο οποίος εξαρτάται από τον ϵ) τέτοιου ώστε

$$\text{το } \ 0 < |x - \xi| < \delta \ \text{ να συνεπάγεται } \ (\Rightarrow) \ \text{ το } \ |f(x) - \eta| < \epsilon$$

ή, ισοδύναμα, ώστε

$$\text{το } \ |f(x) - \eta| < \epsilon \ \text{ να συνεπάγεται } \textit{από} \ (\Leftarrow) \ \text{ το } \ 0 < |x - \xi| < \delta.$$

Φυσικά, για να έχουν νόημα όλα τα παραπάνω, εργαζόμαστε με την υπόθεση ότι *ο x ανήκει και στο πεδίο ορισμού της f*.
Η τακτική που ακολουθούμε είναι να ξεκινήσουμε από την ανισοτική σχέση $|f(x)-\eta|<\epsilon$ και να καταλήξουμε στην $0<|x-\xi|<\delta$ (δηλαδή, να λύσουμε ως προς x) περνώντας από διαδοχικές ενδιάμεσες σχέσεις έτσι ώστε: αφ' ενός κάθε επόμενη σχέση να συνεπάγεται την προηγούμενή της σχέση και αφ' ετέρου κάθε επόμενη σχέση να είναι απλούστερη από την προηγούμενή της σχέση. Σε όλη τη διαδικασία πρέπει η μεταβλητή x να ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

Τα ανάλογα μπορούμε να πούμε και για κάθε άλλη περίπτωση ορίου.

Παράδειγμα 3.2.2. Θα αποδείξουμε ότι $\lim_{x\to 4}(3x+2)=14$.
Έστω $\epsilon>0$. Θα βρούμε $\delta>0$ ώστε για κάθε x με $0<|x-4|<\delta$ να ισχύει $|(3x+2)-14|<\epsilon$. Το $|(3x+2)-14|<\epsilon$ συνεπάγεται από το $|3x-12|<\epsilon$ κι αυτό συνεπάγεται από το $|x-4|<\frac{\epsilon}{3}$. Με σύμβολα:

$$|(3x+2)-14|<\epsilon \;\Leftarrow\; |3x-12|<\epsilon \;\Leftarrow\; |x-4|<\tfrac{\epsilon}{3}.$$

Προφανώς, αν θεωρήσουμε οποιονδήποτε δ ώστε $0<\delta\leq\frac{\epsilon}{3}$, τότε για κάθε x με $0<|x-4|<\delta$ ισχύει $|x-4|<\frac{\epsilon}{3}$ και, λόγω των αντίστροφων συνεπαγωγών, $|(3x+2)-14|<\epsilon$. Με σύμβολα:

$$0<|x-4|<\delta \;\Rightarrow\; |x-4|<\tfrac{\epsilon}{3} \;\Rightarrow\; |3x-12|<\epsilon \;\Rightarrow\; |(3x+2)-14|<\epsilon.$$

Τώρα ένα λίγο πιο περίπλοκο όριο.

Παράδειγμα 3.2.3. Θα αποδείξουμε ότι $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+1}{x-1}=5$.
Έστω $\epsilon>0$. Θα βρούμε $\delta>0$ ώστε να ισχύει $|\frac{x^2+1}{x-1}-5|<\epsilon$ για κάθε $x\neq 1$ με $0<|x-2|<\delta$. Βάζουμε τον περιορισμό $x\neq 1$, διότι ο x πρέπει να ανήκει στο πεδίο ορισμού της $\frac{x^2+1}{x-1}$.
Το $|\frac{x^2+1}{x-1}-5|<\epsilon$ συνεπάγεται από το $\frac{|x^2-5x+6|}{|x-1|}<\epsilon$ κι αυτό συνεπάγεται από το $\frac{|x-2||x-3|}{|x-1|}<\epsilon$. Τώρα διαπιστώνουμε ότι η τελευταία ανισότητα είναι κάπως άβολο να λυθεί ως προς x, οπότε θα εφαρμόσουμε κάποια τεχνική ήδη γνωστή μας από ανάλογες περιπτώσεις με υπολογισμούς ορίων ακολουθιών: θα αντικαταστήσουμε την ποσότητα $\frac{|x-2||x-3|}{|x-1|}$ με κάποια μεγαλύτερη και απλούστερη. Συγχρόνως, επειδή ο παρονομαστής $|x-1|$ μηδενίζεται όταν $x=1$, θα προσπαθήσουμε να πάρουμε τον δ έτσι ώστε από την $0<|x-2|<\delta$ να προκύπτει ότι ο x είναι μακρυά από τον 1. Αυτό *είναι* εφικτό: *αν ο x είναι κοντά στον 2, τότε είναι μακρυά από τον* 1. Πράγματι, αν επιλέξουμε οποιονδήποτε δ ώστε $0<\delta\leq\frac{1}{2}$, τότε από το $0<|x-2|<\delta$ συνεπάγεται το $|x-2|<\frac{1}{2}$ και, επειδή η απόσταση ανάμεσα στους 1 και 2 είναι ίση με 1, συνεπάγεται το $|x-1|>\frac{1}{2}$. Επιπλέον, *αν ο x είναι κοντά στον 2, τότε δεν είναι πολύ μακρυά από τον* 3. Πράγματι, επειδή η απόσταση ανάμεσα στους 3 και 2 είναι ίση με 1, από το $|x-2|<\frac{1}{2}$ συνεπάγεται το $|x-3|<\frac{3}{2}$.
Άρα, αν πάρουμε οποιονδήποτε δ ώστε $0<\delta\leq\frac{1}{2}$, τότε από το $0<|x-2|<\delta$ συνεπάγεται το

$$\frac{|x-2||x-3|}{|x-1|}<\frac{|x-2|(3/2)}{1/2}=3|x-2|.$$

Με άλλα λόγια:

$$0<\delta\leq\tfrac{1}{2}\;:\qquad 0<|x-2|<\delta \;\Rightarrow\; \frac{|x-2||x-3|}{|x-1|}<3|x-2|. \tag{3.1}$$

Τώρα έχουμε ότι από το $|x-2|<\frac{\epsilon}{3}$ συνεπάγεται το $3|x-2|<\epsilon$. Άρα, αν πάρουμε οποιονδήποτε δ ώστε $0<\delta\leq\frac{\epsilon}{3}$, τότε από το $0<|x-2|<\delta$ συνεπάγεται το $3|x-2|<\epsilon$. Δηλαδή:

$$0<\delta\leq\tfrac{\epsilon}{3}\;:\qquad 0<|x-2|<\delta \;\Rightarrow\; 3|x-2|<\epsilon. \tag{3.2}$$

Άρα, συνολικά, αν πάρουμε οποιονδήποτε $\delta>0$ ώστε $\delta\leq\frac{1}{2}$ *και* $\delta\leq\frac{\epsilon}{3}$, τότε συνδυάζουμε τις (3.1) και (3.2) ως εξής: από το $0<|x-2|<\delta$ συνεπάγεται το $\frac{|x-2||x-3|}{|x-1|}<3|x-2|$ (επειδή $\delta\leq\frac{1}{2}$) καθώς και το $3|x-2|<\epsilon$ (επειδή $\delta\leq\frac{\epsilon}{3}$) και, επομένως, το $\frac{|x-2||x-3|}{|x-1|}<\epsilon$. Δηλαδή:

$$0<\delta\leq\min\{\tfrac{1}{2},\tfrac{\epsilon}{3}\}\;:\qquad 0<|x-2|<\delta \;\Rightarrow\; \left\{\begin{array}{c}\frac{|x-2||x-3|}{|x-1|}<3|x-2|\\ 3|x-2|<\epsilon\end{array}\right\} \;\Rightarrow\; \frac{|x-2||x-3|}{|x-1|}<\epsilon.$$

Τώρα θα δούμε μερικά βασικά όρια. Στα δύο πρώτα παρατηρήστε ότι τα επιχειρήματα είναι διατυπωμένα με την ορολογία των περιοχών και δεν ξεχωρίζουμε τις περιπτώσεις $\xi \in \mathbb{R}$ και $\xi = \pm\infty$ (και τις ανάλογες περιπτώσεις για το η).

Παράδειγμα 3.2.4. Έστω η σταθερή συνάρτηση c. Για κάθε $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ ισχύει

$$\lim_{x\to\xi} c = c.$$

Έστω $\epsilon > 0$. Βλέπουμε ότι για *κάθε* x ισχύει $|c - c| = 0 < \epsilon$. Επομένως, μπορούμε να επιλέξουμε οποιονδήποτε $\delta > 0$ (για παράδειγμα, $\delta = 1$) και τότε για κάθε $x \in N_\xi(\delta)$ με $x \neq \xi$ ισχύει $|c - c| = 0 < \epsilon$.

Παράδειγμα 3.2.5. Για κάθε $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$, θα αποδείξουμε ότι

$$\lim_{x\to\xi} x = \xi.$$

Έστω $\epsilon > 0$. Πρέπει να βρούμε $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x \in N_\xi(\delta)$ με $x \neq \xi$ να ισχύει $x \in N_\xi(\epsilon)$. Τώρα, προφανώς, παίρνοντας οποιονδήποτε δ ώστε $0 < \delta \leq \epsilon$ έχουμε ότι $N_\xi(\delta) \subseteq N_\xi(\epsilon)$. Επομένως, για κάθε $x \in N_\xi(\delta)$ με $x \neq \xi$ ισχύει $x \in N_\xi(\epsilon)$.

Παράδειγμα 3.2.6. Θα αποδείξουμε ότι

$$\lim_{x\to+\infty} \tfrac{1}{x} = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} \tfrac{1}{x} = 0.$$

Για το πρώτο όριο, έστω $\epsilon > 0$. Θα βρούμε $N > 0$ ώστε να ισχύει $|\frac{1}{x} - 0| < \epsilon$ για κάθε $x > N$. Το $|\frac{1}{x} - 0| < \epsilon$ συνεπάγεται από το $\frac{1}{|x|} < \epsilon$ κι αυτό συνεπάγεται από το $|x| > \frac{1}{\epsilon}$ κι αυτό συνεπάγεται από το $x > \frac{1}{\epsilon}$. Άρα, αν επιλέξουμε οποιονδήποτε $N \geq \frac{1}{\epsilon}$, τότε για κάθε $x > N$ ισχύει $x > \frac{1}{\epsilon}$ και, επομένως, $|\frac{1}{x} - 0| < \epsilon$.
Για το δεύτερο όριο, έστω $\epsilon > 0$. Θα βρούμε $N > 0$ ώστε να ισχύει $|\frac{1}{x} - 0| < \epsilon$ για κάθε $x < -N$. Το $|\frac{1}{x} - 0| < \epsilon$ συνεπάγεται από το $\frac{1}{|x|} < \epsilon$ κι αυτό συνεπάγεται από το $|x| > \frac{1}{\epsilon}$ κι αυτό συνεπάγεται από το $x < -\frac{1}{\epsilon}$. Άρα, αν επιλέξουμε οποιονδήποτε $N \geq \frac{1}{\epsilon}$, τότε για κάθε $x < -N$ ισχύει $x < -\frac{1}{\epsilon}$ και, επομένως, $|\frac{1}{x} - 0| < \epsilon$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.9. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, ξ από αριστερά του σημείο συσσώρευσης του A και $\eta \in \overline{\mathbb{R}}$. Λέμε ότι η f έχει* **αριστερό πλευρικό όριο** *η στον ξ αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $f(x) \in N_\eta(\epsilon)$ για κάθε $x \in A \cap N_{\xi-}(\delta)$ με $x \neq \xi$. Πιο συνοπτικά: η f έχει αριστερό πλευρικό όριο η στον ξ αν για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει $f(x) \in N_\eta(\epsilon)$ κοντά στον ξ από αριστερά του.*
Συμβολίζουμε:

$$f(x) \xrightarrow[x\to\xi-]{} \eta \quad \text{ή} \quad f(x) \to \eta \ \text{ όταν } \ x \to \xi- \quad \text{ή} \quad \lim_{x\to\xi-} f(x) = \eta.$$

Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, ξ από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A και $\eta \in \overline{\mathbb{R}}$. Λέμε ότι η f έχει **δεξιό πλευρικό όριο** *η στον ξ αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $f(x) \in N_\eta(\epsilon)$ για κάθε $x \in A \cap N_{\xi+}(\delta)$ με $x \neq \xi$. Πιο συνοπτικά: η f έχει δεξιό πλευρικό όριο η στον ξ αν για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει $f(x) \in N_\eta(\epsilon)$ κοντά στον ξ από δεξιά του.*
Συμβολίζουμε:

$$f(x) \xrightarrow[x\to\xi+]{} \eta \quad \text{ή} \quad f(x) \to \eta \ \text{ όταν } \ x \to \xi+ \quad \text{ή} \quad \lim_{x\to\xi+} f(x) = \eta.$$

Με άλλα λόγια: *η f τείνει στο η από τα δεξιά (αριστερά) του ξ αν ο $f(x)$ πλησιάζει απεριόριστα το η όταν ο x έρχεται κατάλληλα κοντά στον ξ παραμένοντας στην δεξιά (αριστερή) μεριά του ξ.*

Για να έχει νόημα η ύπαρξη ή η μη-ύπαρξη του $\lim_{x\to\xi+} f(x)$ *προϋποτίθεται* ότι ο ξ είναι από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού της f ενώ για την ύπαρξη ή την μη-ύπαρξη του

$\lim_{x\to\xi-} f(x)$ *προϋποτίθεται* ότι ο ξ είναι από αριστερά του σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού της f. Θα ξαναπούμε ότι οι περισσότερες συναρτήσεις που εμφανίζονται στην πράξη έχουν ως πεδίο ορισμού κάποιο διάστημα, το οποίο δεν είναι μονοσύνολο, ή κάποια πεπερασμένη ένωση τέτοιων διαστημάτων. Σε μια τέτοια περίπτωση ένας ξ είναι από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού αν είναι *εσωτερικό σημείο ή αριστερό άκρο* ενός τουλάχιστον από τα διαστήματα που αποτελούν το πεδίο ορισμού ενώ ένας ξ είναι από αριστερά του σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού αν είναι *εσωτερικό σημείο ή δεξιό άκρο* ενός τουλάχιστον από τα διαστήματα που αποτελούν το πεδίο ορισμού.

Παράδειγμα 3.2.7. Θα αποδείξουμε ότι

$$\lim_{x\to 0-} \operatorname{sign} x = \lim_{x\to 0-} \tfrac{x}{|x|} = -1, \qquad \lim_{x\to 0+} \operatorname{sign} x = \lim_{x\to 0+} \tfrac{x}{|x|} = 1.$$

Έστω $\epsilon > 0$. Θα βρούμε $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $\left|\frac{x}{|x|} - (-1)\right| < \epsilon$ για κάθε x με $-\delta < x < 0$.
Παρατηρούμε ότι, αν $x < 0$, τότε ισχύει $\frac{x}{|x|} = -1$, οπότε $\left|\frac{x}{|x|} + 1\right| = 0$. Επιλέγουμε *οποιονδήποτε* $\delta > 0$ και τότε για κάθε x με $-\delta < x < 0$ ισχύει $\left|\frac{x}{|x|} + 1\right| < \epsilon$.
Έστω $\epsilon > 0$. Θα βρούμε $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $\left|\frac{x}{|x|} - 1\right| < \epsilon$ για κάθε x με $0 < x < \delta$.
Παρατηρούμε ότι, αν $x > 0$, τότε ισχύει $\frac{x}{|x|} = 1$, οπότε $\left|\frac{x}{|x|} - 1\right| = 0$. Επιλέγουμε *οποιονδήποτε* $\delta > 0$ και τότε για κάθε x με $0 < x < \delta$ ισχύει $\left|\frac{x}{|x|} - 1\right| < \epsilon$.

Παράδειγμα 3.2.8. Θα αποδείξουμε ότι

$$\lim_{x\to 0-} \tfrac{1}{x} = -\infty, \qquad \lim_{x\to 0+} \tfrac{1}{x} = +\infty.$$

Έστω $M > 0$. Θα βρούμε $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $\frac{1}{x} < -M$ για κάθε x με $-\delta < x < 0$.
Το $\frac{1}{x} < -M$ συνεπάγεται από το $-\frac{1}{M} < x < 0$. Θεωρούμε οποιονδήποτε δ ώστε $0 < \delta \leq \frac{1}{M}$ και τότε για κάθε x με $-\delta < x < 0$ ισχύει $-\frac{1}{M} < x < 0$ και, επομένως, $\frac{1}{x} < -M$.
Έστω $M > 0$. Θα βρούμε $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $\frac{1}{x} > M$ για κάθε x με $0 < x < \delta$.
Το $\frac{1}{x} > M$ συνεπάγεται από το $0 < x < \frac{1}{M}$. Θεωρούμε οποιονδήποτε δ ώστε $0 < \delta \leq \frac{1}{M}$ και τότε για κάθε x με $0 < x < \delta$ ισχύει $0 < x < \frac{1}{M}$ και, επομένως, $\frac{1}{x} > M$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.1. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in \mathbb{R}$ από αριστερά του και από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A. Τότε το όριο της f στον ξ υπάρχει αν και μόνο αν και τα δύο πλευρικά όρια της f στον ξ υπάρχουν και είναι ίσα και, σ' αυτήν την περίπτωση,* $\lim_{x\to\xi} f(x) = \lim_{x\to\xi-} f(x) = \lim_{x\to\xi+} f(x)$.

Απόδειξη. Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta \in \overline{\mathbb{R}}$.
Έστω $\epsilon > 0$. Τότε ισχύει $f(x) \in N_\eta(\epsilon)$ κοντά στον ξ. Άρα ισχύει $f(x) \in N_\eta(\epsilon)$ κοντά στον ξ από αριστερά του και κοντά στον ξ από δεξιά του.
Άρα $\lim_{x\to\xi-} f(x) = \eta$ και $\lim_{x\to\xi+} f(x) = \eta$.
Αντιστρόφως, έστω $\lim_{x\to\xi-} f(x) = \lim_{x\to\xi+} f(x) = \eta \in \overline{\mathbb{R}}$.
Έστω $\epsilon > 0$. Τότε ισχύει $f(x) \in N_\eta(\epsilon)$ κοντά στον ξ από αριστερά του και κοντά στον ξ από δεξιά του. Άρα ισχύει $f(x) \in N_\eta(\epsilon)$ κοντά στον ξ.
Άρα $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$. □

Παράδειγμα 3.2.9. Το $\lim_{x\to 0} \operatorname{sign} x = \lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|}$ *δεν* υπάρχει, διότι τα πλευρικά όρια είναι διαφορετικά.

Παράδειγμα 3.2.10. Ομοίως, το $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ *δεν* υπάρχει.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.2. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in \mathbb{R}$.*
[α] *Έστω ότι ο ξ είναι μόνο από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A. Τότε το όριο της f στον ξ υπάρχει αν και μόνο αν το δεξιό πλευρικό όριο της f στον ξ υπάρχει και, σ' αυτήν την περίπτωση,* $\lim_{x\to\xi} f(x) = \lim_{x\to\xi+} f(x)$.

[β] *Έστω ότι ο ξ είναι μόνο από αριστερά του σημείο συσσώρευσης του A. Τότε το όριο της f στον ξ υπάρχει αν και μόνο αν το αριστερό πλευρικό όριο της f στον ξ υπάρχει και, σ' αυτήν την περίπτωση,* $\lim_{x\to\xi} f(x) = \lim_{x\to\xi-} f(x)$.

Απόδειξη. [α] Έστω $\lim_{x\to\xi+} f(x) = \eta \in \overline{\mathbb{R}}$.
Έστω $\epsilon > 0$. Τότε ισχύει $f(x) \in N_\eta(\epsilon)$ κοντά στον ξ από δεξιά του. Άρα ισχύει $f(x) \in N_\eta(\epsilon)$ κοντά στον ξ.
Άρα $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$.
Αντιστρόφως, έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta \in \overline{\mathbb{R}}$.
Έστω $\epsilon > 0$. Τότε ισχύει $f(x) \in N_\eta(\epsilon)$ κοντά στον ξ, οπότε ισχύει $f(x) \in N_\eta(\epsilon)$ κοντά στον ξ από δεξιά του.
Άρα $\lim_{x\to\xi+} f(x) = \eta$.
[β] Ομοίως. □

Παράδειγμα 3.2.11. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\frac{2}{x+|x|}$ είναι το $(0,+\infty)$ και στο $(0,+\infty)$ η $\frac{2}{x+|x|}$ ταυτίζεται με την $\frac{2}{x+x} = \frac{1}{x}$. Επειδή, όπως έχουμε αποδείξει, είναι $\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = +\infty$, συνεπάγεται $\lim_{x\to 0+} \frac{2}{x+|x|} = +\infty$. Τέλος, επειδή ο 0 είναι μόνο από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του $(0,+\infty)$ συμπεραίνουμε ότι $\lim_{x\to 0} \frac{2}{x+|x|} = \lim_{x\to 0+} \frac{2}{x+|x|} = +\infty$.

3.2.1 Ασύμπτωτες ευθείες.

Ας μιλήσουμε λίγο και για τη σχέση του ορίου με το γράφημα μιας συνάρτησης.

Έστω $\xi \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$. Θεωρούμε ότι ο x πλησιάζει τον ξ παραμένοντας διαφορετικός από τον ξ και διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις. (i) Αν $\eta \in \mathbb{R}$, το σημείο $(x, f(x))$ του γραφήματος της f πλησιάζει το σημείο (ξ,η), δηλαδή πλησιάζει σε ύψος η την κατακόρυφη ευθεία με εξίσωση $x = \xi$. (ii) Αν $\eta = +\infty$, το σημείο $(x, f(x))$ ανεβαίνει απεριόριστα ψηλά, οπότε πλησιάζει σε απεριόριστα μεγάλο θετικό ύψος την κατακόρυφη ευθεία $x = \xi$. (iii) Τέλος, αν $\eta = -\infty$, το σημείο $(x, f(x))$ κατεβαίνει απεριόριστα χαμηλά, οπότε πλησιάζει σε απεριόριστα μεγάλο αρνητικό ύψος την κατακόρυφη ευθεία $x = \xi$. Σε κάθε περίπτωση, το σημείο $(x, f(x))$ παραμένει εκτός της ευθείας $x = \xi$, διότι ο x είναι διαφορετικός του ξ.

Στις δύο τελευταίες περιπτώσεις, δηλαδή αν $\xi \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x\to\xi} f(x) = \pm\infty$, η κατακόρυφη ευθεία με εξίσωση $x = \xi$ χαρακτηρίζεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** του γραφήματος της f.

Έχουμε ανάλογες διατυπώσεις για τα πλευρικά όρια στον ξ. Στην περίπτωση του $\lim_{x\to\xi+} f(x)$ η μόνη αλλαγή στα προηγούμενα είναι ότι το σημείο $(x, f(x))$ παραμένει δεξιά της κατακόρυφης ευθείας $x = \xi$ ενώ στην περίπτωση του $\lim_{x\to\xi-} f(x)$ το σημείο $(x, f(x))$ παραμένει αριστερά της κατακόρυφης ευθείας $x = \xi$. Γενικότερα:

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.10. *Η ευθεία με εξίσωση $x = \xi$ χαρακτηρίζεται* **κατακόρυφη ασύμπτωτη** *του γραφήματος της f σε οποιαδήποτε από τις περιπτώσεις:* $\lim_{x\to\xi\pm} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x\to\xi\pm} f(x) = \mp\infty$.

Κατόπιν, έστω $\eta \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \eta$. Τότε, καθώς ο x απομακρύνεται προς τα δεξιά, το σημείο $(x, f(x))$ του γραφήματος της f απομακρύνεται κι αυτό προς τα δεξιά και πλησιάζει την οριζόντια ευθεία με εξίσωση $y = \eta$. Ομοίως, αν $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \eta$, τότε, καθώς ο x απομακρύνεται προς τα αριστερά, το σημείο $(x, f(x))$ απομακρύνεται κι αυτό προς τα αριστερά και πλησιάζει την οριζόντια ευθεία $y = \eta$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.11. *Αν $\eta \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \eta$ ή $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \eta$, τότε η οριζόντια ευθεία με εξίσωση $y = \eta$ χαρακτηρίζεται* **οριζόντια ασύμπτωτη** *στο $+\infty$ ή στο $-\infty$, αντιστοίχως, του γραφήματος της f.*

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.12. *Η ευθεία l με εξίσωση $y = \mu x + \nu$ χαρακτηρίζεται* **(πλάγια) ασύμπτωτη** *ευθεία στο $-\infty$ ή στο $+\infty$ του γραφήματος της f αν, αντιστοίχως,* $\lim_{x\to-\infty}(f(x) - \mu x - \nu) = 0$ *ή* $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - \mu x - \nu) = 0$.

Αυτά σημαίνουν ότι το σημείο $(x, f(x))$ του γραφήματος της f και το αντίστοιχο σημείο $(x, \mu x+\nu)$ της l (ο ίδιος x και στα δύο σημεία) πλησιάζουν το ένα το άλλο καθώς κινούνται προς τα αριστερά ή προς τα δεξιά, αντιστοίχως. Πιο απλά: το γράφημα της συνάρτησης προσεγγίζει την ευθεία l κοντά στο $-\infty$ ή στο $+\infty$.

Παρατηρήστε ότι οι οριζόντιες ασύμπτωτες ευθείες είναι, απλώς, πλάγιες ασύμπτωτες ευθείες με συντελεστή $\mu=0$.

Στην επόμενη ενότητα θα μάθουμε τον τρόπο να βρίσκουμε, όταν υπάρχουν, τις πλάγιες ασύμπτωτες ευθείες του γραφήματος μιας συνάρτησης.

Ασκήσεις.

3.2.1. Έχουν νόημα τα $\lim_{x\to 0-}\frac{1}{x+|x|}$, $\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{3x^2+2x-6}}$, $\lim_{x\to 0}\sqrt{-x^2}$, $\lim_{x\to 3+}\sqrt{18-2x^2}$, $\lim_{x\to 1-}\log(x^2-1)$, $\lim_{x\to -\infty}(x+2)^{6/4}$;
Προσέξτε: η ερώτηση είναι αν *έχουν νόημα* τα όρια και όχι αν υπάρχουν ή ποιά είναι η τιμή τους.
Αποδείξτε ότι τα $\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{\sin x}$, $\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin(1/x)}$, $\lim_{x\to +\infty}\log\sin x$, $\lim_{x\to 0}\log\sin\frac{1}{x}$ έχουν νόημα.

3.2.2. Αποδείξτε βάσει των ορισμών ότι $\lim_{x\to 2}3x=6$, $\lim_{x\to 1}(\frac{1}{x}+1)=2$, $\lim_{x\to 1}x^2=1$, $\lim_{x\to 1}\frac{3x}{(x-1)^2}=+\infty$, $\lim_{x\to 2+}\frac{x}{2-x}=-\infty$, $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-3}{2x+1}=\frac{1}{2}$, $\lim_{x\to\pm\infty}(3x^2+x)=+\infty$.

3.2.3. Έστω $A\subseteq B$ και $\xi\in\overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A, οπότε, σύμφωνα με την άσκηση 3.1.4, το ξ είναι σημείο συσσώρευσης και του B. Έστω $g:B\to\mathbb{R}$ και $\lim_{x\to\xi}g(x)=\eta\in\overline{\mathbb{R}}$. Έστω $f:A\to\mathbb{R}$ ο περιορισμός της g στο A, δηλαδή $f(x)=g(x)$ για κάθε $x\in A$. Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to\xi}f(x)=\eta$.

3.2.4. [2] Έστω $A\cap B=\emptyset$ και $\xi\in\overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A και του B. Αν $f:A\to\mathbb{R}$ και $g:B\to\mathbb{R}$, ορίζουμε $h:A\cup B\to\mathbb{R}$ με τύπο $h(x)=\begin{cases} f(x), & \text{αν } x\in A\\ g(x), & \text{αν } x\in B\end{cases}$ Αποδείξτε ότι το $\lim_{x\to\xi}h(x)$ υπάρχει αν και μόνο αν τα $\lim_{x\to\xi}f(x)$, $\lim_{x\to\xi}g(x)$ υπάρχουν και είναι ίσα και ότι, σ' αυτήν την περίπτωση, $\lim_{x\to\xi}h(x)=\lim_{x\to\xi}f(x)=\lim_{x\to\xi}g(x)$.

3.2.5. [3] Έστω $f:A\to\mathbb{R}$ και $\xi\in\overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A.
Αποδείξτε ότι το $\lim_{x\to\xi}f(x)=\eta$ είναι λάθος αν και μόνο αν υπάρχει $\epsilon>0$ ώστε να ισχύει $f(x)\notin N_\eta(\epsilon)$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο ξ.
Αποδείξτε ότι το $\lim_{x\to\xi}f(x)=\eta$ είναι λάθος αν και μόνο αν υπάρχει $\epsilon>0$ ώστε για κάθε $\delta>0$ να υπάρχει $x\in A\cap N_\xi(\delta)$ με $x\neq\xi$ ώστε $f(x)\notin N_\eta(\epsilon)$.
Εξειδικεύστε (με ανισότητες κ.τ.λ.) στις εννέα περιπτώσεις ορίων.

3.2.6. [4] Έστω $f:A\to\mathbb{R}$ και $\xi\in\overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A και έστω $\epsilon_0>0$. Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to\xi}f(x)=\eta$ αν και μόνο αν για κάθε ϵ με $0<\epsilon\leq\epsilon_0$ ισχύει $f(x)\in N_\eta(\epsilon)$ κοντά στο ξ.

3.2.7. Έστω $f:A\to\mathbb{R}$ και $\xi\in\overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A. Έστω ότι υπάρχει $\delta>0$ ώστε για κάθε $\epsilon>0$ να ισχύει $f(x)\in N_\eta(\epsilon)$ για κάθε $x\in A\cap N_\xi(\delta)$ με $x\neq\xi$. Τί συμπεραίνετε;

3.3 Ιδιότητες σχετικές με όρια συναρτήσεων.

Για όλες τις ιδιότητες ορίων ακολουθιών υπάρχουν αντίστοιχες ιδιότητες ορίων συναρτήσεων. Αυτό είναι φανερό με μια απλή αντιπαραβολή αυτής της ενότητας με την ενότητα 2.3.

[2] Η συνάρτηση h αποτελεί "συγκόλληση" των συναρτήσεων f και g.

[3] Αναλυτικές διατυπώσεις της *άρνησης* του ορίου.

[4] Ισοδύναμος ορισμός του ορίου. Όπως και στην ανάλογη άσκηση 2.2.7 για όρια ακολουθιών: *στον ορισμό του ορίου μπορούμε να περιοριστούμε σε $\epsilon>0$ οι οποίοι δεν ξεπερνούν έναν αυθαίρετα προεπιλεγμένο $\epsilon_0>0$.*

Πριν προχωρήσουμε, θα κάνουμε μια παρατήρηση για τα συμπεράσματα αυτής της ενότητας σε σχέση με πλευρικά όρια. Χάριν συντομίας, όλα τα συμπεράσματα διατυπώνονται για όρια (δηλαδή για $x \to \xi$) αλλά ισχύουν και για πλευρικά όρια (δηλαδή για $x \to \xi+$ και $x \to \xi-$) με την ανάλογη διατύπωση. Απλώς αλλάζουμε το "σημείο συσσώρευσης" σε "από δεξιά (αριστερά) του σημείο συσσώρευσης", το $\lim_{x\to\xi}$ σε $\lim_{x\to\xi+}$ ($\lim_{x\to\xi-}$), το "κοντά στο ξ" σε "κοντά στον ξ από δεξιά (αριστερά) του" και το "σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο ξ" σε "σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στον ξ από δεξιά (αριστερά) του".

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.3. *Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A και έστω ότι οι f, g ταυτίζονται κοντά στο ξ. Αν η μία από τις f, g έχει κάποιο όριο στο ξ, τότε και η άλλη έχει το ίδιο όριο στο ξ.*

Απόδειξη. Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta \in \overline{\mathbb{R}}$.
Έστω $\epsilon > 0$. Τότε ισχύει $f(x) \in N_\eta(\epsilon)$ κοντά στο ξ. Επίσης, ισχύει $f(x) = g(x)$ κοντά στο ξ, οπότε ισχύει $f(x) \in N_\eta(\epsilon)$ και $f(x) = g(x)$ και, επομένως, $g(x) \in N_\eta(\epsilon)$ κοντά στο ξ.
Άρα $\lim_{x\to\xi} g(x) = \eta$. □

Δηλαδή, η οριακή συμπεριφορά μιας συνάρτησης στο ξ δεν επηρεάζεται από τις τιμές της συνάρτησης μακρυά από το ξ αλλά μόνο από τις τιμές της σε μια περιοχή του ξ (χωρίς το ξ), η οποία (περιοχή) μπορεί να είναι *οσοδήποτε μικρή*.

Παράδειγμα 3.3.1. Έστω $f(x) = \begin{cases} 1/x, & \text{αν } 0 < |x| < 10^{-4} \\ x, & \text{αν } x = 0 \text{ ή } |x| \geq 10^{-4} \end{cases}$ Επειδή ισχύει $f(x) = \frac{1}{x}$ κοντά στον 0 και το $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ δεν υπάρχει, συνεπάγεται ότι ούτε το $\lim_{x\to 0} f(x)$ υπάρχει.

Παράδειγμα 3.3.2. Έστω $f(x) = \begin{cases} 1/x, & \text{αν } x > 10^{100} \\ x, & \text{αν } x \leq 10^{100} \end{cases}$ Επειδή ισχύει $f(x) = \frac{1}{x}$ κοντά στο $+\infty$ και $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, συνεπάγεται $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Επειδή ισχύει $f(x) = x$ κοντά στο $-\infty$ και $\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$, συνεπάγεται $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

3.3.1 Από ανισότητες ορίων σε ανισότητες τιμών.

Η πρόταση 3.4 περιγράφει *πώς βγάζουμε συμπεράσματα για ανισοτικές σχέσεις των τιμών μιας συνάρτησης κοντά στο ξ από ανάλογες ανισοτικές σχέσεις του ορίου της στο ξ.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.4. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A και $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta \in \overline{\mathbb{R}}$.*
[α] *Αν $\eta > u$, τότε ισχύει $f(x) > u$ κοντά στο ξ.*
[β] *Αν $\eta < l$, τότε ισχύει $f(x) < l$ κοντά στο ξ.*
[γ] *Αν $u < \eta < l$, τότε ισχύει $u < f(x) < l$ κοντά στο ξ.*

Απόδειξη. [α] Θεωρούμε έναν οποιονδήποτε $\epsilon > 0$ αρκετά μικρό ώστε ολόκληρη η περιοχή $N_\eta(\epsilon)$ να είναι δεξιά του u. Επειδή ισχύει $f(x) \in N_\eta(\epsilon)$ κοντά στο ξ, συνεπάγεται ότι ισχύει $f(x) > u$ κοντά στο ξ.
[β] Θεωρούμε έναν $\epsilon > 0$ αρκετά μικρό ώστε ολόκληρη η περιοχή $N_\eta(\epsilon)$ να είναι αριστερά του l. Επειδή ισχύει $f(x) \in N_\eta(\epsilon)$ κοντά στο ξ, συνεπάγεται ότι ισχύει $f(x) < l$ κοντά στο ξ.
[γ] Θεωρούμε $\epsilon > 0$ αρκετά μικρό ώστε ολόκληρη η περιοχή $N_\eta(\epsilon)$ να είναι ανάμεσα στους u, l. Επειδή ισχύει $f(x) \in N_\eta(\epsilon)$ κοντά στο ξ, συνεπάγεται ότι ισχύει $u < f(x) < l$ κοντά στο ξ. □

Παράδειγμα 3.3.3. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^5+1}{2x^5-x^3+x^2+8x+1}$. Θα μάθουμε λίγο αργότερα να υπολογίζουμε όρια όπως το $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{1}{2} = 0.5$. Αν δεχτούμε αυτό το όριο, και πάρουμε τους αριθμούς 0.4999999 και 0.5000001, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι υπάρχει κάποιος $N > 0$ ώστε να ισχύει $0.4999999 < f(x) < 0.5000001$ στο διάστημα $(-\infty, -N)$. Δηλαδή, οι τιμές της συνάρτησης σε *κάποιο* διάστημα κοντά στο $-\infty$ κυμαίνονται σε ένα πολύ μικρό διάστημα εύρους

± 0.0000001 γύρω από την οριακή τιμή 0.5. Φυσικά, το να βρούμε μια συγκεκριμένη τιμή του N ώστε να ισχύει κάτι τέτοιο απαιτεί ιδιαίτερη εργασία, διότι ο τύπος της συνάρτησης δεν είναι απλός. Αν θέλουμε, μπορούμε να πούμε τα ίδια σχετικά με την κύμανση των τιμών της συνάρτησης κοντά στο $-\infty$, παίρνοντας ένα ακόμη πιο μικρό διάστημα, για παράδειγμα εύρους $\pm 10^{-1000}$ γύρω από την οριακή τιμή 0.5. Βέβαια, τότε ο αντίστοιχος N θα είναι διαφορετικός (και μάλλον πολύ-πολύ μεγαλύτερος) από τον προηγούμενο N.

Η πρόταση 3.5 εκφράζει τη **μοναδικότητα του ορίου**. Επομένως, μπορούμε να μιλάμε για **το** όριο συνάρτησης.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.5. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A. Το όριο της f στο ξ, αν υπάρχει, είναι μοναδικό.*

Απόδειξη. Έστω (για να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι η f έχει δύο διαφορετικά όρια a, b στο ξ. Θεωρούμε έναν $\epsilon > 0$ αρκετά μικρό ώστε οι περιοχές $N_a(\epsilon)$ και $N_b(\epsilon)$ να είναι ξένες. Τότε ισχύει $f(x) \in N_a(\epsilon)$ κοντά στο ξ και ισχύει $f(x) \in N_b(\epsilon)$ κοντά στο ξ. Άρα ισχύει $f(x) \in N_a(\epsilon)$ και $f(x) \in N_b(\epsilon)$ κοντά στο ξ. Άτοπο. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.6. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A.*

[α] *Αν $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta \in \mathbb{R}$, τότε η f είναι φραγμένη κοντά στο ξ.*

[β] *Αν $\lim_{x\to\xi} f(x) = +\infty$, τότε η f είναι κάτω φραγμένη κοντά στο ξ αλλά είναι λάθος ότι είναι άνω φραγμένη κοντά στο ξ.*

[γ] *Αν $\lim_{x\to\xi} f(x) = -\infty$, τότε η f είναι άνω φραγμένη κοντά στο ξ αλλά είναι λάθος ότι είναι κάτω φραγμένη κοντά στο ξ.*

Απόδειξη. [α] Θεωρούμε δύο οποιουσδήποτε αριθμούς l και u ώστε $l < \eta < u$, για παράδειγμα τους $l = \eta - 1$, $u = \eta + 1$. Σύμφωνα με την πρόταση 3.4, ισχύει $l < f(x) < u$ κοντά στο ξ. Άρα η f είναι φραγμένη κοντά στο ξ.

[β] Παίρνουμε οποιονδήποτε l και τότε ισχύει $f(x) > l$ κοντά στο ξ, οπότε η f είναι κάτω φραγμένη κοντά στο ξ.

Επίσης, για κάθε l ισχύει $f(x) > l$ κοντά στο ξ. Αρα κανένας l δεν είναι άνω φράγμα της f κοντά στο ξ, οπότε είναι λάθος ότι η f είναι άνω φραγμένη κοντά στο ξ.

[γ] Ομοίως. □

Παράδειγμα 3.3.4. Ισχύει $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$. Άρα η συνάρτηση $\frac{1}{x}$ είναι φραγμένη κοντά στο $+\infty$. Αυτό *δεν* σημαίνει ότι η $\frac{1}{x}$ είναι φραγμένη στο πεδίο ορισμού της. Η $\frac{1}{x}$ δεν είναι φραγμένη στο $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ούτε καν στο $(0, +\infty)$. *Υπάρχει*, όμως, διάστημα $(N, +\infty)$ στο οποίο η $\frac{1}{x}$ *είναι* φραγμένη. Αυτό ελέγχεται εύκολα επειδή η συνάρτηση έχει απλό τύπο. Για παράδειγμα, ισχύει $0 \leq \frac{1}{x} \leq 1$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$.

3.3.2 Από ανισότητες τιμών σε ανισότητες ορίων.

Η πρόταση 3.7 περιγράφει *πώς βγάζουμε συμπεράσματα για ανισοτικές σχέσεις του ορίου μιας συνάρτησης στο ξ από ανάλογες ανισοτικές σχέσεις των τιμών της κοντά στο ξ*. Τα πρώτα δύο συμπεράσματα της πρότασης 3.7 είναι ισοδύναμα με τα αντίστοιχα συμπεράσματα της πρότασης 3.4. Το τρίτο συμπέρασμα είναι ένα χρήσιμο κριτήριο μη-ύπαρξης ορίου: *αν υπάρχουν δύο αριθμοί που χωρίζουν τις τιμές μιας συνάρτησης σε κάποια σημεία όσο θέλουμε κοντά στο ξ από τις τιμές της σε κάποια άλλα σημεία όσο θέλουμε κοντά στο ξ, τότε η συνάρτηση δεν έχει όριο στο ξ.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.7. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A.*

[α] *Αν ισχύει $f(x) \geq l$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο ξ και $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta \in \overline{\mathbb{R}}$, τότε $\eta \geq l$.*

[β] *Αν ισχύει $f(x) \leq u$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο ξ και $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta \in \overline{\mathbb{R}}$, τότε $\eta \leq u$.*

[γ] *Αν $u < l$ και ισχύει $f(x) \geq l$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο ξ και ισχύει $f(x) \leq u$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο ξ, τότε η f δεν έχει όριο στο ξ.*

Απόδειξη. [α] Αν ήταν $\eta < l$, θα ίσχυε $f(x) < l$ κοντά στο ξ, οπότε δεν θα μπορούσε να ισχύει $f(x) \geq l$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο ξ. Άρα $\eta \geq l$.

[β] Ομοίως.

[γ] Αν η f είχε όριο στο ξ, το όριο αυτό θα ήταν $\geq l$ και $\leq u$ και, επομένως, θα ίσχυε $l \leq u$. Άρα η f δεν έχει όριο στο ξ. □

Παράδειγμα 3.3.5. Αν $\lim_{x \to \xi} f(x) = \eta \in \overline{\mathbb{R}}$ και αν ισχύει $f(x) \in [l, u]$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο ξ, τότε $\eta \in [l, u]$.

Παράδειγμα 3.3.6. Έχουμε ότι

$$\text{τα } \lim_{x \to \pm\infty} \cos x \ \text{ και } \ \lim_{x \to \pm\infty} \sin x \ \text{ δεν υπάρχουν.}$$

Πράγματι, για την μη-ύπαρξη του πρώτου ορίου μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι ισχύει $\cos x \geq 1$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στα $\pm\infty$ και, επίσης, ισχύει $\cos x \leq -1$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στα $\pm\infty$. Συγκεκριμένα, η πρώτη ανισότητα ανισότητα ισχύει για κάθε $2k\pi$ με $k \in \mathbb{Z}$ και η δεύτερη ανισότητα ισχύει για κάθε $(2k + 1)\pi$ με $k \in \mathbb{Z}$. Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται η μη-ύπαρξη και του δεύτερου ορίου.

Τέλος, δεν υπάρχουν ούτε τα όρια $\lim_{x \to 0\pm} \cos \frac{1}{x}$ και $\lim_{x \to 0\pm} \sin \frac{1}{x}$.
Για παράδειγμα, ισχύει $\cos \frac{1}{x} \geq 1$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στον 0 από αριστερά του και από δεξιά του. Επίσης, ισχύει $\cos \frac{1}{x} \leq -1$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στον 0 από αριστερά του και από δεξιά του. Συγκεκριμένα, η πρώτη ανισότητα ισχύει για $\frac{1}{2k\pi}$ με $k \in \mathbb{Z}$ και η δεύτερη ισχύει για $\frac{1}{(2k+1)\pi}$ με $k \in \mathbb{Z}$. Ομοίως για την μη-ύπαρξη των $\lim_{x \to 0\pm} \sin \frac{1}{x}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.8. *Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A. Αν ισχύει $f(x) \leq g(x)$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο ξ και $\lim_{x \to \xi} f(x) = \eta \in \overline{\mathbb{R}}$ και $\lim_{x \to \xi} g(x) = \zeta \in \overline{\mathbb{R}}$, τότε $\eta \leq \zeta$.*

Απόδειξη. Έστω (για να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι $\zeta < \eta$.
Θεωρούμε οποιονδήποτε a ώστε $\zeta < a < \eta$. Τότε ισχύει $g(x) < a$ κοντά στο ξ και ισχύει $a < f(x)$ κοντά στο ξ. Άρα ισχύει $g(x) < a$ και $a < f(x)$ και, επομένως, $g(x) < f(x)$ κοντά στο ξ. Άτοπο. Άρα $\eta \leq \zeta$. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.9. *Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A. Έστω, επίσης, ότι ισχύει $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο ξ.*
[α]. *Αν $\lim_{x \to \xi} f(x) = +\infty$, τότε $\lim_{x \to \xi} g(x) = +\infty$.*
[β] *Αν $\lim_{x \to \xi} g(x) = -\infty$, τότε $\lim_{x \to \xi} f(x) = -\infty$.*

Απόδειξη. [α] Έστω $M > 0$. Τότε ισχύει $f(x) > M$ κοντά στο ξ. Άρα ισχύει $f(x) > M$ και $g(x) \geq f(x)$ και, επομένως, $g(x) > M$ κοντά στο ξ. Άρα $\lim_{x \to \xi} g(x) = +\infty$.

[β] Ομοίως. □

Παράδειγμα 3.3.7. Ισχύει $\frac{x^2+x-1}{x} \geq \frac{x^2}{x} = x$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$ και $\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$. Άρα $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+x-1}{x} = +\infty$.

Η πρόταση 3.10 εκφράζει τη λεγόμενη **ιδιότητα παρεμβολής**.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.10. *Έστω $f, g, h : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A και έστω ότι ισχύει $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ κοντά στο ξ. Αν είναι $\lim_{x \to \xi} f(x) = \lim_{x \to \xi} h(x) = \eta \in \mathbb{R}$, τότε είναι $\lim_{x \to \xi} g(x) = \eta$.*

Απόδειξη. Έστω $\epsilon > 0$. Τότε ισχύει $f(x) \in (\eta - \epsilon, \eta + \epsilon)$ κοντά στο ξ και ισχύει $h(x) \in (\eta - \epsilon, \eta + \epsilon)$ κοντά στο ξ. Άρα ισχύει $f(x), h(x) \in (\eta - \epsilon, \eta + \epsilon)$ κοντά στο ξ και, επειδή ο $g(x)$ είναι ανάμεσα στους $f(x), h(x)$ κοντά στο ξ, συνεπάγεται ότι ισχύει $g(x) \in (\eta - \epsilon, \eta + \epsilon)$ κοντά στο ξ.
Άρα $\lim_{x \to \xi} g(x) = \eta$. □

Παράδειγμα 3.3.8. Ισχύει $-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{x}$ για κάθε $x > 0$ και $\lim_{x\to+\infty}(-\frac{1}{x}) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$. Άρα $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x} = 0$. Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sin x}{x} = 0$ καθώς και ότι $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\cos x}{x} = 0$.

3.3.3 Αλγεβρικοί κανόνες ορίων.

Ο επόμενος ορισμός περιγράφει κάποιους βασικούς τρόπους με τους οποίους δημιουργούμε νέες συναρτήσεις από ήδη υπάρχουσες.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.13. *Η **αντίθετη** συνάρτηση μιας συνάρτησης $f : A \to \mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση $-f : A \to \mathbb{R}$ με τύπο $(-f)(x) = -f(x)$ για κάθε $x \in A$.*
*Το **άθροισμα** δύο συναρτήσεων $f, g : A \to \mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση $f+g : A \to \mathbb{R}$ με τύπο $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ για κάθε $x \in A$.*
*Η **διαφορά** δύο συναρτήσεων $f, g : A \to \mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση $f-g : A \to \mathbb{R}$ με τύπο $(f-g)(x) = f(x)-g(x)$ για κάθε $x \in A$.*
*Το **γινόμενο** δύο συναρτήσεων $f, g : A \to \mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση $fg : A \to \mathbb{R}$ με τύπο $(fg)(x) = f(x)g(x)$ για κάθε $x \in A$.*
*Το **γινόμενο** αριθμού λ και συνάρτησης $f : A \to \mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση $\lambda f : A \to \mathbb{R}$ με τύπο $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ για κάθε $x \in A$.*
*Το **αντίστροφο** μιας συνάρτησης $f : A \to \mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση $\frac{1}{f} : A \to \mathbb{R}$ με τύπο $\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)}$ για κάθε $x \in A$.*
Για να ορίζεται η συνάρτηση $\frac{1}{f} : A \to \mathbb{R}$ πρέπει να ισχύει $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$.
*Ο **λόγος** δύο συναρτήσεων $f, g : A \to \mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση $\frac{f}{g} : A \to \mathbb{R}$ με τύπο $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ για κάθε $x \in A$.*
Για να ορίζεται η συνάρτηση $\frac{f}{g} : A \to \mathbb{R}$ πρέπει να ισχύει $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$.
*Η **απόλυτη τιμή** μιας συνάρτησης $f : A \to \mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση $|f| : A \to \mathbb{R}$ με τύπο $|f|(x) = |f(x)|$ για κάθε $x \in A$.*

Η επόμενη πρόταση περιέχει όλα τα βασικά αποτελέσματα για τις σχέσεις ανάμεσα στα όρια και τις αλγεβρικές πράξεις, δηλαδή τους λεγόμενους **αλγεβρικούς κανόνες ορίων**.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.11. *Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A και $\eta, \zeta \in \overline{\mathbb{R}}$ και αριθμός λ. Θεωρούμε όλα τα παρακάτω όρια όταν $x \to \xi$.*
[α] *Αν $f(x) \to \eta$, τότε $-f(x) \to -\eta$.*
[β] *Αν $f(x) \to \eta$, τότε $|f(x)| \to |\eta|$.*
[γ] *Αν $f(x) \to \eta$, $g(x) \to \zeta$ και το $\eta+\zeta$ δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε $f(x)+g(x) \to \eta+\zeta$.*
[δ] *Αν $f(x) \to \eta$, $g(x) \to \zeta$ και το $\eta-\zeta$ δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε $f(x)-g(x) \to \eta-\zeta$.*
[ε] *Αν $f(x) \to \eta$, $g(x) \to \zeta$ και το $\eta\zeta$ δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε $f(x)g(x) \to \eta\zeta$.*
[στ] *Αν $f(x) \to \eta$ και το $\lambda\eta$ δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε $\lambda f(x) \to \lambda\eta$.*
[ζ] *Έστω ότι ισχύει $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$. Αν $f(x) \to \eta$ και το $\frac{1}{\eta}$ δεν είναι απροσδιόριστη μορφή (δηλαδή αν $\eta \neq 0$), τότε $\frac{1}{f(x)} \to \frac{1}{\eta}$.*
[η] *Έστω ότι ισχύει $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$. Αν $f(x) \to \eta$, $g(x) \to \zeta$ και το $\frac{\eta}{\zeta}$ δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε $\frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{\eta}{\zeta}$.*

Απόδειξη. [α] Έστω $f(x) \to \eta$ και $\eta \in \mathbb{R}$. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει $|f(x)-\eta| < \epsilon$ και, επομένως,

$$|(-f(x)) - (-\eta)| = |f(x)-\eta| < \epsilon$$

κοντά στο ξ. Άρα $-f(x) \to -\eta$.
Έστω $f(x) \to +\infty$. Τότε για κάθε $M > 0$ ισχύει $f(x) > M$ και, επομένως, $-f(x) < -M$ κοντά στο ξ. Άρα $-f(x) \to -\infty$, οπότε $-f(x) \to -(+\infty)$.

Έστω $f(x) \to -\infty$. Τότε για κάθε $M > 0$ ισχύει $f(x) < -M$ και, επομένως, $-f(x) > M$ κοντά στο ξ. Άρα $-f(x) \to +\infty$, οπότε $-f(x) \to -(-\infty)$.

[β] Έστω $f(x) \to \eta$ και $\eta \in \mathbb{R}$. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει $|f(x) - \eta| < \epsilon$ και, επομένως,

$$\big||f(x)| - |\eta|\big| \leq |f(x) - \eta| < \epsilon$$

κοντά στο ξ. Άρα $|f(x)| \to |\eta|$.
Έστω $f(x) \to +\infty$. Τότε για κάθε $M > 0$ ισχύει $f(x) > M$ και, επομένως, $|f(x)| > M$ κοντά στο ξ. Άρα $|f(x)| \to +\infty$, οπότε $|f(x)| \to |+\infty|$.
Έστω $f(x) \to -\infty$. Τότε για κάθε $M > 0$ ισχύει $f(x) < -M$ και, επομένως, $|f(x)| > M$ κοντά στο ξ. Άρα $|f(x)| \to +\infty$, οπότε $|f(x)| \to |-\infty|$.

[γ] Έστω $f(x) \to \eta$ και $g(x) \to \zeta$ και $\eta, \zeta \in \mathbb{R}$. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει $|f(x) - \eta| < \frac{\epsilon}{2}$ και, επίσης, ισχύει $|g(x) - \zeta| < \frac{\epsilon}{2}$ κοντά στο ξ, οπότε ισχύουν και οι δύο αυτές ανισότητες κοντά στο ξ, οπότε ισχύει

$$|(f(x) + g(x)) - (\eta + \zeta)| = |(f(x) - \eta) + (g(x) - \zeta)| \leq |f(x) - \eta| + |g(x) - \zeta| < \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

κοντά στο ξ. Άρα $f(x) + g(x) \to \eta + \zeta$.
Έστω $f(x) \to +\infty$ και $g(x) \to \zeta$ και $\zeta \in (-\infty, +\infty]$. Τότε η g είναι κάτω φραγμένη κοντά στο ξ, οπότε υπάρχει l ώστε να ισχύει $g(x) > l$ κοντά στο ξ. Τώρα, για κάθε $M > 0$ ισχύει $f(x) > M - l$ και, επομένως, ισχύει

$$f(x) + g(x) > (M - l) + l = M$$

κοντά στο ξ. Άρα $f(x) + g(x) \to +\infty$, οπότε $f(x) + g(x) \to \eta + \zeta$.
Όλες οι άλλες περιπτώσεις προκύπτουν από την τελευταία περίπτωση και από το [α].

[δ] Άμεση συνέπεια των [α] και [γ].

[ε] Έστω $f(x) \to \eta$ και $g(x) \to \zeta$ και $\eta, \zeta \in \mathbb{R}$. Τότε η g είναι φραγμένη κοντά στο ξ, οπότε υπάρχει $M \geq 0$ ώστε να ισχύει $|g(x)| \leq M$ κοντά στο ξ. Τώρα, για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει $|f(x) - \eta| < \frac{\epsilon}{2M+1}$ και, επίσης, ισχύει $|g(x) - \zeta| < \frac{\epsilon}{2|\eta|+1}$ κοντά στο ξ, οπότε ισχύουν και οι δύο αυτές ανισότητες κοντά στο ξ, οπότε ισχύει

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - \eta\zeta| &= |(f(x) - \eta)g(x) + \eta(g(x) - \zeta)| \leq |f(x) - \eta||g(x)| + |\eta||g(x) - \zeta| \\ &\leq \tfrac{\epsilon M}{2M+1} + \tfrac{|\eta|\epsilon}{2|\eta|+1} < \epsilon \end{aligned}$$

κοντά στο ξ. Άρα $f(x)g(x) \to \eta\zeta$.
Έστω $f(x) \to +\infty$ και $g(x) \to \zeta$ και $\zeta \in (0, +\infty]$. Θεωρούμε έναν οποιονδήποτε l ώστε $0 < l < \zeta$. Τότε ισχύει $l < g(x)$ κοντά στο ξ. Τώρα, για κάθε $M > 0$ ισχύει $f(x) > \frac{M}{l}$ και, επομένως,

$$f(x)g(x) > \tfrac{M}{l} l = M$$

κοντά στο ξ. Άρα $f(x)g(x) \to +\infty$, οπότε $f(x)g(x) \to \eta\zeta$.
Όλες οι άλλες περιπτώσεις προκύπτουν από την τελευταία περίπτωση και από το [α].

[στ] Άμεση συνέπεια του [ε].

[ζ] Έστω $f(x) \to \eta$ και $\eta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ και έστω ότι ισχύει $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$. Τότε $|f(x)| \to |\eta|$. Επειδή $|\eta| > 0$, θεωρούμε έναν οποιονδήποτε l ώστε $0 < l < |\eta|$ και τότε ισχύει $|f(x)| > l$ κοντά στο ξ. Τώρα, για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει $|f(x) - \eta| < |\eta| l \epsilon$ και, επομένως, ισχύει

$$\big|\tfrac{1}{f(x)} - \tfrac{1}{\eta}\big| = \tfrac{|f(x) - \eta|}{|\eta||f(x)|} < \tfrac{|\eta| l \epsilon}{|\eta| l} = \epsilon$$

κοντά στο ξ. Άρα $\frac{1}{f(x)} \to \frac{1}{\eta}$.
Έστω $f(x) \to +\infty$. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει $f(x) > \frac{1}{\epsilon}$ και, επομένως,

$$\big|\tfrac{1}{f(x)} - 0\big| = \tfrac{1}{f(x)} < \epsilon$$

κοντά στο ξ. Άρα $\frac{1}{f(x)} \to 0$, οπότε $\frac{1}{f(x)} \to \frac{1}{+\infty}$.
Η περίπτωση $f(x) \to -\infty$ προκύπτει από την τελευταία περίπτωση και από το [α].
[η] Άμεση συνέπεια των [ε] και [ζ]. $\square$

Παράδειγμα 3.3.9. $\lim_{x\to 0-} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1 + (-\infty) = -\infty$.

Παράδειγμα 3.3.10. $\lim_{x\to +\infty} \left(-1 + \frac{1}{x}\right) = -1 + 0 = -1$.

Παράδειγμα 3.3.11. $\lim_{x\to 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$.

Παράδειγμα 3.3.12. $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^2+x+1} = \frac{1}{(+\infty)^2+(+\infty)+1} = \frac{1}{+\infty} = 0$.

Παράδειγμα 3.3.13. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x}{x-2} = \frac{1^2+1}{1-2} = -2$.

Παράδειγμα 3.3.14. Αν $\xi \in \mathbb{R}$, τότε

$$\lim_{x\to\xi} x^k = \xi^k \qquad \text{αν} \quad k \in \mathbb{Z},\ k > 0 \quad \text{ή} \quad k \in \mathbb{Z},\ k < 0 \text{ και } \xi \neq 0.$$

Διότι, αν $k \in \mathbb{N}$, από το $\lim_{x\to\xi} x = \xi$ παίρνουμε $\lim_{x\to\xi} x^k = \lim_{x\to\xi}(x\cdots x) = \xi\cdots\xi = \xi^k$.
Αν, επιπλέον, $\xi \neq 0$, από το προηγούμενο συνεπάγεται $\lim_{x\to\xi} \frac{1}{x^k} = \frac{1}{\xi^k}$.

Παράδειγμα 3.3.15. Έστω $k \in \mathbb{N}$.
Επειδή $\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = +\infty$, συνεπάγεται $\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x^k} = \lim_{x\to 0+}(\frac{1}{x})^k = (+\infty)^k = +\infty$.
Επειδή $\lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$, τότε, αν ο k είναι άρτιος, έχουμε $\lim_{x\to 0-} \frac{1}{x^k} = \lim_{x\to 0-}(\frac{1}{x})^k = (-\infty)^k = +\infty$ και, αν ο k είναι περιττός, έχουμε $\lim_{x\to 0-} \frac{1}{x^k} = \lim_{x\to 0-}(\frac{1}{x})^k = (-\infty)^k = -\infty$.
Έχουμε, λοιπόν, αποδείξει ότι

$$\lim_{x\to 0+} x^k = +\infty \quad \text{αν} \ \ k \in \mathbb{Z},\ k < 0 \qquad \lim_{x\to 0-} x^k = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } k \in \mathbb{Z}, k < 0, k \text{ άρτιος} \\ -\infty, & \text{αν } k \in \mathbb{Z}, k < 0, k \text{ περιττός} \end{cases}$$

Επομένως,

$$\lim_{x\to 0} x^k \begin{cases} = +\infty, & \text{αν } k \in \mathbb{Z}, k < 0, k \text{ άρτιος} \\ \text{δεν υπάρχει}, & \text{αν } k \in \mathbb{Z}, k < 0, k \text{ περιττός} \end{cases}$$

Παράδειγμα 3.3.16. Έστω $k \in \mathbb{N}$.
Επειδή $\lim_{x\to +\infty} x = +\infty$, συνεπάγεται $\lim_{x\to +\infty} x^k = (+\infty)^k = +\infty$.
Επειδή $\lim_{x\to -\infty} x = -\infty$, τότε, αν ο k είναι άρτιος, συνεπάγεται $\lim_{x\to -\infty} x^k = (-\infty)^k = +\infty$ και, αν ο k είναι περιττός, συνεπάγεται $\lim_{x\to -\infty} x^k = (-\infty)^k = -\infty$.
Από τα προηγούμενα συνεπάγεται $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^k} = 0$.
Συνοψίζουμε:

$$\lim_{x\to +\infty} x^k = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } k \in \mathbb{Z}, k > 0 \\ 0, & \text{αν } k \in \mathbb{Z}, k < 0 \end{cases} \qquad \lim_{x\to -\infty} x^k = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } k \in \mathbb{Z}, k > 0, k \text{ άρτιος} \\ -\infty, & \text{αν } k \in \mathbb{Z}, k > 0, k \text{ περιττός} \\ 0, & \text{αν } k \in \mathbb{Z}, k < 0 \end{cases}$$

Παράδειγμα 3.3.17. $\lim_{x\to 1} |x-2| = |1-2| = 1$.

Παράδειγμα 3.3.18. $\lim_{x\to 0-} \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right| = |(-\infty) - (+\infty)| = |-\infty| = +\infty$.

Παράδειγμα 3.3.19. $\lim_{x\to +\infty}(x^2 - x) = \lim_{x\to +\infty} x(x-1) = (+\infty)((+\infty) - 1) = +\infty$.
Η εφαρμογή του κανόνα διαφοράς στο $\lim_{x\to +\infty}(x^2 - x)$ καταλήγει σε απροσδιόριστη μορφή.

Παράδειγμα 3.3.20. $\lim_{x\to 0}(\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x}) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}(2 + x) = (+\infty)(2+0) = +\infty$.
Ο κανόνας αθροίσματος δεν εφαρμόζεται στο $\lim_{x\to 0}(\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x})$ διότι δεν υπάρχει το $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$.

Παράδειγμα 3.3.21. $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+1}{x+2}=\lim_{x\to+\infty}x\frac{1-(1/x)+(1/x^2)}{1+(2/x)}=(+\infty)\frac{1-0+0}{1+0}=+\infty$.
Η άμεση εφαρμογή του κανόνα λόγου στο $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+1}{x+2}$ καταλήγει σε απροσδιόριστη μορφή.

Παράδειγμα 3.3.22. Δεν ισχύει το αντίστροφο στην πρόταση 3.11[β].
Πράγματι, $\lim_{x\to0}|\operatorname{sign}x|=\lim_{x\to0}1=1$, αλλά το $\lim_{x\to0}\operatorname{sign}x$ δεν υπάρχει.
Το αντίστροφο ισχύει μόνο στην περίπτωση $\eta=0$.

Παράδειγμα 3.3.23. Έστω πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$.
Τότε

$$\lim_{x\to\xi}P(x)=\lim_{x\to\xi}(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n)=a_0+a_1\xi+\cdots+a_n\xi^n=P(\xi).$$

Έστω ότι η $P(x)$ είναι βαθμού ≥ 1. Γράφουμε

$$P(x)=a_nx^n\big(\tfrac{a_0}{a_n}\tfrac{1}{x^n}+\cdots+\tfrac{a_{n-1}}{a_n}\tfrac{1}{x}+1\big),$$

οπότε $\lim_{x\to\pm\infty}P(x)=\lim_{x\to\pm\infty}a_nx^n$. Δηλαδή, τα όρια $\lim_{x\to\pm\infty}P(x)$ εξαρτώνται μόνο από τον μεγιστοβάθμιο όρο, και

$$\lim_{x\to+\infty}P(x)=a_n(+\infty),\qquad \lim_{x\to-\infty}P(x)=\begin{cases}a_n(+\infty), & \text{αν } n \text{ άρτιος}\\ a_n(-\infty), & \text{αν } n \text{ περιττός}\end{cases}$$

Για παράδειγμα: $\lim_{x\to+\infty}(-5x^3+x^2-4x-12)=-\infty$, $\lim_{x\to-\infty}(-5x^3+x^2-4x-12)=+\infty$, $\lim_{x\to\pm\infty}(7x^4+x^3-x+5)=+\infty$.

Παράδειγμα 3.3.24. Έστω ρητή συνάρτηση $R(x)=\frac{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m}$, όπου $a_n,b_m\neq0$.
Γράφουμε

$$R(x)=\tfrac{a_nx^n}{b_mx^m}\big(\tfrac{a_0}{a_n}\tfrac{1}{x^n}+\cdots+\tfrac{a_{n-1}}{a_n}\tfrac{1}{x}+1\big)\big/\big(\tfrac{b_0}{b_m}\tfrac{1}{x^m}+\cdots+\tfrac{b_{m-1}}{b_m}\tfrac{1}{x}+1\big),$$

οπότε, και πάλι, τα $\lim_{x\to\pm\infty}R(x)$ εξαρτώνται μόνο από τους μεγιστοβάθμιους όρους του αριθμητή και του παρονομαστή και

$$\lim_{x\to+\infty}R(x)=\lim_{x\to+\infty}\tfrac{a_n}{b_m}x^{n-m}=\begin{cases}(a_n/b_m)(+\infty), & \text{αν } n>m\\ a_n/b_m, & \text{αν } n=m\\ 0, & \text{αν } n<m\end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty}R(x)=\lim_{x\to-\infty}\tfrac{a_n}{b_m}x^{n-m}=\begin{cases}(a_n/b_m)(+\infty), & \text{αν } n-m \text{ άρτιος}>0\\ (a_n/b_m)(-\infty), & \text{αν } n-m \text{ περιττός}>0\\ a_n/b_m, & \text{αν } n=m\\ 0, & \text{αν } n<m\end{cases}$$

Για παράδειγμα: $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-x^2+4}{2x^3+1}=\frac12$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^3+4x^2+2}{2x^2+x+1}=-\infty$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-2x+3}{x^4+x^2+1}=0$, $\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2+4}{2x^2-1}=\frac32$, $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-4}{-x^4+2}=0$, $\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^3-1}{2x+1}=-\infty$, $\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^4-2}{2x+1}=-\infty$.
Αν $\xi\in\mathbb{R}$, τότε για το $\lim_{x\to\xi}R(x)$ έχουμε τις εξής περιπτώσεις.
Αν $b_0+b_1\xi+\cdots+b_m\xi^m\neq0$, τότε $\lim_{x\to\xi}R(x)=\frac{a_0+a_1\xi+\cdots+a_n\xi^n}{b_0+b_1\xi+\cdots+b_m\xi^m}=R(\xi)$. Δηλαδή,

$$\lim_{x\to\xi}R(x)=R(\xi).$$

Για παράδειγμα: $\lim_{x\to1}\frac{3x-2}{x^4+2x^3-4}=\frac{3\cdot1-2}{1^4+2\cdot1^3-4}=-1$.
Αν $b_0+b_1\xi+\cdots+b_m\xi^m=0$, τότε το $x-\xi$ διαιρεί το $b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m$. Αν $(x-\xi)^k$

είναι η μέγιστη δύναμη του $x-\xi$ η οποία διαιρεί το $b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m$, τότε μπορούμε να γράψουμε

$$b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m=(x-\xi)^kQ(x),$$

όπου $Q(x)$ είναι κάποιο πολυώνυμο το οποίο δεν διαιρείται από το $x-\xi$ και, επομένως, $Q(\xi)\neq 0$. Τώρα, είτε το $x-\xi$ διαιρεί το $a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ είτε όχι, μπορούμε να γράψουμε

$$a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n=(x-\xi)^lP(x),$$

όπου $l\geq 0$ και $P(x)$ είναι κάποιο πολυώνυμο το οποίο δεν διαιρείται από το $x-\xi$ και, επομένως, $P(\xi)\neq 0$. Συνολικά, λοιπόν, έχουμε ότι

$$R(x)=(x-\xi)^{l-k}\tfrac{P(x)}{Q(x)}$$

και, επειδή $\lim_{x\to\xi}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(\xi)}{Q(\xi)}\neq 0$, συνεπάγεται

$$\lim_{x\to\xi}R(x)\begin{cases}=0, & \text{αν } l>k\\ =(P(\xi)/Q(\xi)), & \text{αν } l=k\\ =(P(\xi)/Q(\xi))(+\infty), & \text{αν } k-l \text{ άρτιος} >0\\ \text{δεν υπάρχει}, & \text{αν } k-l \text{ περιττός} >0\end{cases}$$

Ειδικώτερα,

$$\lim_{x\to\xi-}R(x)=\tfrac{P(\xi)}{Q(\xi)}(-\infty),\quad \lim_{x\to\xi+}R(x)=\tfrac{P(\xi)}{Q(\xi)}(+\infty),\qquad \text{αν } k-l \text{ περιττός} >0.$$

Θα υπολογίσουμε το $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^4-2x^2+1}$.
Ο 1 είναι ρίζα του x^4-2x^2+1, οπότε το x^4-2x^2+1 διαιρείται από το $x-1$. Παραγοντοποιούμε είτε με τον αλγόριθμο της ευκλείδειας διαίρεσης είτε, πιο απλά, γράφοντας

$$x^4-2x^2+1=(x^2-1)^2=(x-1)^2(x+1)^2.$$

Ο 1 είναι ρίζα και του x^3-x^2-x+1, οπότε:

$$x^3-x^2-x+1=(x-1)x^2-(x-1)=(x-1)^2(x+1).$$

Άρα

$$\tfrac{x^3-x^2-x+1}{x^4-2x^2+1}=\tfrac{(x-1)^2(x+1)}{(x-1)^2(x+1)^2}=\tfrac{1}{x+1}$$

για κάθε $x\neq 1,-1$. Επομένως,

$$\lim_{x\to 1}\tfrac{x^3-x^2-x+1}{x^4-2x^2+1}=\lim_{x\to 1}\tfrac{1}{x+1}=\tfrac{1}{1+1}=\tfrac{1}{2}.$$

Τώρα θα υπολογίσουμε το $\lim_{x\to 1}\frac{x^3+4x^2+x-6}{x^3-x^2-x+1}$.
Ο 1 είναι ρίζα του x^3-x^2-x+1 και, όπως πριν, $x^3-x^2-x+1=(x-1)^2(x+1)$.
Ο 1 είναι ρίζα και του x^3+4x^2+x-6, οπότε:

$$\begin{aligned}x^3+4x^2+x-6&=x^3-x^2+5x^2-5x+6x-6=(x-1)x^2+(x-1)5x+(x-1)6\\&=(x-1)(x^2+5x+6).\end{aligned}$$

Το $x-1$ δεν διαιρεί το x^2+5x+6 διότι ο 1 δεν είναι ρίζα του. Άρα

$$\tfrac{x^3+4x^2+x-6}{x^3-x^2-x+1}=\tfrac{(x-1)(x^2+5x+6)}{(x-1)^2(x+1)}=\tfrac{1}{x-1}\tfrac{x^2+5x+6}{x+1}$$

για κάθε $x\neq 1,-1$. Άρα:

$$\lim_{x\to 1+}\tfrac{x^3+4x^2+x-6}{x^3-x^2-x+1}=(+\infty)\tfrac{1^2+5\cdot 1+6}{1+1}=+\infty$$

και

$$\lim_{x\to 1-}\tfrac{x^3+4x^2+x-6}{x^3-x^2-x+1}=(-\infty)\tfrac{1^2+5\cdot 1+6}{1+1}=-\infty.$$

Επομένως, δεν υπάρχει το $\lim_{x\to 1}\frac{x^3+4x^2+x-6}{x^3-x^2-x+1}$.

Παράδειγμα 3.3.25. Έστω ότι η ευθεία με εξίσωση $y = \mu x + \nu$ είναι ασύμπτωτη ευθεία στο $+\infty$ του γραφήματος της f, οπότε $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - \mu x - \nu) = 0$.
Τότε $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)-\mu x-\nu}{x} = \frac{0}{+\infty} = 0$, οπότε $\lim_{x\to+\infty}(\frac{f(x)}{x} - \mu - \frac{\nu}{x}) = 0$ και, επομένως,

$$\mu = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Αυτό, φυσικά, σημαίνει ότι, αν δεν υπάρχει το όριο $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ ή αν υπάρχει αλλά είναι $\pm\infty$, τότε δεν υπάρχει ασύμπτωτη ευθεία στο $+\infty$. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει το όριο αυτό και είναι αριθμός, οπότε η τιμή του είναι η ζητούμενη τιμή του μ. Τώρα, η ζητούμενη τιμή του ν δίνεται από την ισότητα

$$\nu = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - \mu x),$$

στην οποία χρησιμοποιούμε την τιμή του μ την οποία μόλις προσδιορίσαμε. Παρατηρούμε και πάλι ότι, αν δεν υπάρχει το όριο $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - \mu x)$ ή αν υπάρχει αλλά είναι $\pm\infty$, τότε δεν υπάρχει ασύμπτωτη ευθεία στο $+\infty$.
Με την ίδια διαδικασία βρίσκουμε, αν υπάρχει, την πλάγια ασύμπτωτη ευθεία στο $-\infty$.
Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $x + \frac{1}{x}$. Βρίσκουμε διαδοχικά τα $\mu = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}(x + \frac{1}{x}) = 1$ και $\nu = \lim_{x\to+\infty}(x + \frac{1}{x} - 1x) = 0$. Άρα η πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ είναι η ευθεία με εξίσωση $y = 1x + 0 = x$. Επίσης: $\mu = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}(x + \frac{1}{x}) = 1$ και $\nu = \lim_{x\to-\infty}(x + \frac{1}{x} - 1x) = 0$. Άρα η πλάγια ασύμπτωτη ευθεία στο $-\infty$ είναι πάλι η ευθεία με εξίσωση $y = 1x + 0 = x$.

Τα αποτελέσματα στην πρόταση 3.12 είναι κάπως γενικότερα από ανάλογα αποτελέσματα της πρότασης 3.11 και είναι χρήσιμο να τα έχουμε υπ' όψη μας. Το [δ] της πρότασης 3.12 αποτελεί το πραγματικό περιεχόμενο των συμβολικών κανόνων $\frac{1}{0+} = +\infty$ και $\frac{1}{0-} = -\infty$, τους οποίους έχουμε ορίσει στην ενότητα 2.3.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.12. *Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A. Θεωρούμε όλα τα παρακάτω όρια όταν $x \to \xi$.*
[α] *Αν $f(x) \to +\infty$ και η g είναι κάτω φραγμένη κοντά στο ξ, τότε $f(x) + g(x) \to +\infty$.*
Αν $f(x) \to -\infty$ και η g είναι άνω φραγμένη κοντά στο ξ, τότε $f(x) + g(x) \to -\infty$.
[β] *Αν $f(x) \to 0$ και η g είναι φραγμένη κοντά στο ξ, τότε $f(x)g(x) \to 0$.*
[γ] *Αν $f(x) \to +\infty$ και η g έχει θετικό κάτω φράγμα κοντά στο ξ, τότε $f(x)g(x) \to +\infty$.*
Αν $f(x) \to -\infty$ και η g έχει θετικό κάτω φράγμα κοντά στο ξ, τότε $f(x)g(x) \to -\infty$.
[δ] *Έστω ότι ισχύει $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$.*
Αν $f(x) \to 0$ και η f είναι θετική κοντά στο ξ, τότε $\frac{1}{f(x)} \to +\infty$.
Αν $f(x) \to 0$ και η f είναι αρνητική κοντά στο ξ, τότε $\frac{1}{f(x)} \to -\infty$.
[ε] *Έστω ότι ισχύει $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$. Αν $|f(x)| \to +\infty$, τότε $\frac{1}{f(x)} \to 0$.*

Απόδειξη. [α] Έστω $f(x) \to +\infty$ και έστω ότι η g είναι κάτω φραγμένη κοντά στο ξ, οπότε υπάρχει αριθμός l ώστε να ισχύει $g(x) \geq l$ κοντά στο ξ. Τότε για κάθε $M > 0$ ισχύει $f(x) > M - l$ και, επομένως, $f(x) + g(x) > (M - l) + l = M$ κοντά στο ξ. Άρα $f(x) + g(x) \to +\infty$.
Το δεύτερο αποτέλεσμα προκύπτει άμεσα από το πρώτο.
[β] Έστω $f(x) \to 0$ και έστω ότι η g είναι φραγμένη κοντά στο ξ, οπότε υπάρχει αριθμός $M \geq 0$ ώστε να ισχύει $|g(x)| \leq M$ κοντά στο ξ. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει $|f(x)| < \frac{\epsilon}{M+1}$ και, επομένως,

$$|f(x)g(x)| = |f(x)||g(x)| \leq \frac{\epsilon M}{M+1} < \epsilon$$

κοντά στο ξ. Άρα $f(x)g(x) \to 0$.
[γ] Έστω $f(x) \to +\infty$ και έστω ότι η g έχει θετικό κάτω φράγμα κοντά στο ξ, οπότε υπάρχει αριθμός $l > 0$ ώστε να ισχύει $g(x) \geq l$ κοντά στο ξ. Τότε για κάθε $M > 0$ ισχύει $f(x) > \frac{M}{l}$ και, επομένως, $f(x)g(x) > \frac{M}{l}l = M$ κοντά στο ξ. Άρα $f(x)g(x) \to +\infty$.
Το δεύτερο αποτέλεσμα προκύπτει άμεσα από το πρώτο.

[δ] Έστω $f(x) \to 0$ και έστω ότι ισχύει $f(x) > 0$ κοντά στο ξ. Τότε για κάθε $M > 0$ ισχύει $|f(x) - 0| < \frac{1}{M}$ κοντά στο ξ. Άρα ισχύει $0 < f(x) < \frac{1}{M}$ και, επομένως, $\frac{1}{f(x)} > M$ κοντά στο ξ. Άρα $\frac{1}{f(x)} \to +\infty$.
Το δεύτερο αποτέλεσμα προκύπτει άμεσα από το πρώτο.
[ε] Έστω ότι ισχύει $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$ και $|f(x)| \to +\infty$. Τότε $\frac{1}{|f(x)|} \to 0$ και, επομένως, $\frac{1}{f(x)} \to 0$. □

Παράδειγμα 3.3.26. Είναι $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ και η συνάρτηση $x - [x]$ είναι φραγμένη (και, ειδικώτερα, κοντά στο $+\infty$), διότι ισχύει $0 \leq x - [x] < 1$ για κάθε x. Άρα $\lim_{x\to+\infty} \frac{x-[x]}{x} = 0$.

Παράδειγμα 3.3.27. Η συνάρτηση $x - [x]$ είναι κάτω φραγμένη (και, ειδικώτερα, κοντά στο $+\infty$) και $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$. Άρα $\lim_{x\to+\infty}(2x - [x]) = \lim_{x\to+\infty}(x + (x - [x])) = +\infty$.

Παράδειγμα 3.3.28. Ισχύει $\frac{1}{2-\sin x} \geq \frac{1}{3}$ για κάθε x (και, ειδικώτερα, κοντά στο $+\infty$) και, επίσης, $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$. Άρα $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2-\sin x} = +\infty$.

Παράδειγμα 3.3.29. Ισχύει $\lim_{x\to 0} x = 0$ αλλά δεν υπάρχει το $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$. Ο λόγος είναι η εναλλαγή προσήμου της συνάρτησης x αριστερά και δεξιά του 0.

Παράδειγμα 3.3.30. $\lim_{x\to+\infty}(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}) = 0 - 0 = 0$ και ισχύει $\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} > 0$ για κάθε $x > 1$. Άρα $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{(1/x)-(1/x^2)} = +\infty$.

3.3.4 Κανόνας σύνθεσης.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.14. *Η* **σύνθεση** *δύο συναρτήσεων $f : A \to B$ και $g : B \to \mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ με τύπο $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ για κάθε $x \in A$.*

Η πρόταση 3.13 εκφράζει τον λεγόμενο **κανόνα σύνθεσης**.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.13. [5] *Έστω $f : A \to B$, $g : B \to \mathbb{R}$, $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A και $\eta \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του B. Αν $f(x) \to \eta$ όταν $x \to \xi$, αν ισχύει $f(x) \neq \eta$ κοντά στο ξ και αν $g(y) \to \zeta \in \overline{\mathbb{R}}$ όταν $y \to \eta$, τότε $(g \circ f)(x) \to \zeta$ όταν $x \to \xi$.*

Απόδειξη. Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει

$$g(y) \in N_\zeta(\epsilon) \qquad \text{για κάθε } \; y \in B \cap N_\eta(\delta) \; \text{ με } \; y \neq \eta. \tag{3.3}$$

Επειδή $f(x) \to \eta$ όταν $x \to \xi$, ισχύει $f(x) \in N_\eta(\delta)$ κοντά στο ξ. Επειδή, επίσης, ισχύει $f(x) \neq \eta$ κοντά στο ξ και $f(x) \in B$ για κάθε $x \in A$, συνεπάγεται ότι ισχύει

$$f(x) \in B \cap N_\eta(\delta) \; \text{ και } \; f(x) \neq \eta \qquad \text{κοντά στο } \; \xi. \tag{3.4}$$

Από την (3.4) και την (3.3) με $y = f(x)$ συνεπάγεται ότι ισχύει $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) \in N_\zeta(\epsilon)$ κοντά στο ξ.
Άρα $(g \circ f)(x) \to \zeta$ όταν $x \to \xi$. □

Εφαρμόζοντας τον κανόνα σύνθεσης, χρησιμοποιούμε την έκφραση "κάνουμε αλλαγή μεταβλητής από x σε $y = f(x)$" και γράφουμε

$$\lim_{x\to\xi} g\big(f(x)\big) = \lim_{y\to\eta} g(y).$$

Παράδειγμα 3.3.31. Θέλουμε να υπολογίσουμε το $\lim_{x\to 0} \frac{(x^7+1)^4}{(x^7+1)^8+(x^7+1)^{12}+5}$.
Είναι $\lim_{x\to 0}(x^7 + 1) = 1$ και ισχύει $x^7 + 1 \neq 1$ για κάθε $x \neq 0$. Άρα, κάνοντας αλλαγή μεταβλητής από x σε $y = x^7 + 1$, έχουμε

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x^7+1)^4}{(x^7+1)^8+(x^7+1)^{12}+5} = \lim_{y\to 1} \frac{y^4}{y^8+y^{12}+5} = \frac{1}{7}.$$

[5] Θα δούμε μια άλλη μορφή του κανόνα σύνθεσης στην πρόταση 4.10.

Παράδειγμα 3.3.32. Θα υπολογίσουμε το $\lim_{x\to 1}\big(\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{(x-1)^6}+1\big)$.
Είναι $\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}=+\infty$. Κάνοντας αλλαγή μεταβλητής από x σε $y=\frac{1}{(x-1)^2}$, βρίσκουμε

$$\lim_{x\to 1}\big(\tfrac{1}{(x-1)^2}-\tfrac{1}{(x-1)^6}+1\big)=\lim_{y\to+\infty}(y-y^3+1)=-\infty.$$

Παράδειγμα 3.3.33. Θα υπολογίσουμε το $\lim_{x\to+\infty}\big((\frac{x-1}{x^2+x+1})^{-2}+(\frac{x-1}{x^2+x+1})^{-4}\big)$.
Είναι $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x^2+x+1}=0$ και ισχύει $\frac{x-1}{x^2+x+1}\neq 0$ για κάθε $x>1$. Με αλλαγή μεταβλητής από x σε $y=\frac{x-1}{x^2+x+1}$, βρίσκουμε

$$\lim_{x\to+\infty}\big((\tfrac{x-1}{x^2+x+1})^{-2}+(\tfrac{x-1}{x^2+x+1})^{-4}\big)=\lim_{y\to 0}(y^{-2}+y^{-4})=+\infty.$$

Παράδειγμα 3.3.34. Στο παράδειγμα αυτό θα δούμε ότι η υπόθεση ότι “ισχύει $f(x)\neq\eta$ κοντά στο ξ” στην πρόταση 3.13 είναι απαραίτητη.

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ και $g(y)=\begin{cases}0, & \text{αν } y\neq 0\\ 1, & \text{αν } y=0\end{cases}$
Είναι $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$ και $\lim_{y\to 0}g(y)=0$. Δεν είναι σωστό ότι ισχύει $f(x)\neq 0$ κοντά στο $+\infty$, διότι ισχύει $f(x)=0$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο $+\infty$ και, συγκεκριμένα, στα σημεία $n\pi$ για κάθε $n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$.
Τώρα, είναι $(g\circ f)(x)=\begin{cases}0, & \text{αν } x\neq n\pi \text{ για κάθε } n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\\ 1, & \text{αν } x=n\pi \text{ για κάποιον } n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\end{cases}$
Επομένως, το $\lim_{x\to+\infty}(g\circ f)(x)$ δεν υπάρχει, διότι ισχύει $(g\circ f)(x)\leq 0$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο $+\infty$ και ισχύει $(g\circ f)(x)\geq 1$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο $+\infty$.

Ένα τελευταίο σχόλιο για την πρόταση 3.13 σε σχέση με πλευρικά όρια. Οι αλλαγές σε σχέση με τους ξ, η γίνονται όπως περιγράψαμε στην αρχή αυτής της ενότητας. Όμως, σχετικά με τον η πρέπει να προσέξουμε το εξής. Αν υποθέσουμε ότι ο η είναι από δεξιά (αριστερά) του σημείο συσσώρευσης του B και ότι υπάρχει το όριο της g στον η από δεξιά (αριστερά) του, τότε, εκτός από το ότι η f συγκλίνει στον η, πρέπει να υποθέσουμε και ότι ισχύει $f(x)>\eta$ ($f(x)<\eta$) κοντά στο ξ. Για παράδειγμα:
Αν $f:A\to B$, $g:B\to\mathbb{R}$, αν ο ξ είναι από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A και ο η είναι από αριστερά του σημείο συσσώρευσης του B, αν $f(x)\to\eta$ όταν $x\to\xi+$, αν ισχύει $f(x)<\eta$ κοντά στον ξ από δεξιά του και αν $g(y)\to\zeta\in\overline{\mathbb{R}}$ όταν $y\to\eta-$, τότε $(g\circ f)(x)\to\zeta$ όταν $x\to\xi+$.

3.3.5 Τα βασικά όρια.

Θα δούμε τώρα κάποια βασικά όρια σχετικά με την συνάρτηση δύναμη, την εκθετική συνάρτηση, την λογαριθμική συνάρτηση και τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

Παράδειγμα 3.3.35. Στα παραδείγματα 3.3.14, 3.3.15 και 3.3.16 μελετήσαμε τα διάφορα όρια της συνάρτησης x^k όταν ο k είναι ακέραιος. Θα δούμε τώρα την περίπτωση μη-ακέραιου εκθέτη.
Έστω $a\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης x^a είναι το $[0,+\infty)$, αν $a>0$, ή το $(0,+\infty)$, αν $a<0$.
Το πρώτο όριο που θα αποδείξουμε είναι το

$$\lim_{x\to\xi}x^a=\xi^a\qquad\text{αν }\ \xi>0.$$

Έστω $a>0$. Θεωρούμε $\epsilon>0$. Θα βρούμε $\delta>0$ ώστε να ισχύει $|x^a-\xi^a|<\epsilon$ για κάθε $x>0$ με $0<|x-\xi|<\delta$. Ορίζουμε τον

$$\epsilon'=\min\{\epsilon,\xi^a\}>0,$$

οπότε $\epsilon'\leq\epsilon$ και $\epsilon'\leq\xi^a$. Τότε το $|x^a-\xi^a|<\epsilon$ συνεπάγεται από το $|x^a-\xi^a|<\epsilon'$ κι αυτό από το $\xi^a-\epsilon'<x^a<\xi^a+\epsilon'$ κι αυτό από το $(\xi^a-\epsilon')^{1/a}<x<(\xi^a+\epsilon')^{1/a}$. Παρατηρούμε ότι ο ξ βρίσκεται ανάμεσα στους $(\xi^a-\epsilon')^{1/a}$ και $(\xi^a+\epsilon')^{1/a}$. Επιλέγουμε οποιονδήποτε δ ώστε

$$0<\delta\leq\min\big\{\xi-(\xi^a-\epsilon')^{1/a},(\xi^a+\epsilon')^{1/a}-\xi\big\},$$

δηλαδή $\delta > 0$ και όχι μεγαλύτερο από την απόσταση του ξ από τον κοντινότερο προς αυτόν από τους $(\xi^a - \epsilon')^{1/a}$ και $(\xi^a + \epsilon')^{1/a}$. Τότε για κάθε x με $0 < |x - \xi| < \delta$ ισχύει $(\xi^a - \epsilon')^{1/a} < x < (\xi^a + \epsilon')^{1/a}$ και, επομένως, ισχύει $|x^a - \xi^a| < \epsilon$.
Αν $a < 0$, τότε $-a > 0$ και, επομένως, $\lim_{x\to\xi} x^a = \lim_{x\to\xi} \frac{1}{x^{-a}} = \frac{1}{\xi^{-a}} = \xi^a$.
Κατόπιν, έχουμε τα όρια

$$\lim_{x\to+\infty} x^a = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } a > 0 \\ 0, & \text{αν } a < 0 \end{cases} \qquad \lim_{x\to 0+} x^a = \begin{cases} 0, & \text{αν } a > 0 \\ +\infty, & \text{αν } a < 0 \end{cases}$$

Για το πρώτο όριο, έστω $a > 0$. Θεωρούμε $M > 0$ και θα βρούμε $N > 0$ ώστε να ισχύει $x^a > M$ για κάθε $x > N$. Τώρα, βλέπουμε ότι το $x^a > M$ συνεπάγεται από το $x > M^{1/a}$. Επομένως, αν επιλέξουμε οποιονδήποτε $N \geq M^{1/a}$, τότε για κάθε $x > N$ ισχύει $x > M^{1/a}$ και, επομένως, $x^a > M$.
Τα υπόλοιπα όρια μπορούν να αποδειχτούν κι αυτά με βάση τον ορισμό, αλλά θα τα αποδείξουμε από το πρώτο βάσει ιδιοτήτων.
Αν $a < 0$, τότε $-a > 0$ και έχουμε $\lim_{x\to+\infty} x^a = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{-a}} = \frac{1}{+\infty} = 0$.
Αν $a > 0$, τότε $\lim_{x\to 0+} x^a = \lim_{y\to+\infty} (\frac{1}{y})^a = \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{y^a} = \frac{1}{+\infty} = 0$.
Τέλος, αν $a < 0$, τότε $-a > 0$ και είναι $\lim_{x\to 0+} x^a = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{x^{-a}} = \frac{1}{0+} = +\infty$.
Μερικά ειδικότερα παραδείγματα.
(i) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} = \lim_{y\to+\infty} \sqrt{y} = +\infty$.
(ii) Θα αποδείξουμε το $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = 0$. Από το αποτέλεσμα του (i) φαίνεται ότι το όριο αυτό εμπίπτει στην κατηγορία των απροσδιόριστων μορφών $(+\infty) - (+\infty)$. Χρησιμοποιώντας την $a - b = \frac{a^2-b^2}{a+b}$, έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1)-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{1}{(+\infty)+(+\infty)} = 0.$$

(iii) $\lim_{x\to 3}(\frac{x+1}{x^2+1})^{1/5} = \lim_{y\to 2/5} y^{1/5} = (\frac{2}{5})^{1/5}$.

Παράδειγμα 3.3.36. Θεωρούμε πάλι τη συνάρτηση $f(x) = (x \sin\frac{1}{x})^{1/2}$ στο παράδειγμα 3.2.1 με πεδίο ορισμού A (το έχουμε προσδιορίσει) του οποίου σημείο συσσώρευσης είναι ο 0. Ισχύει

$$0 \leq (x \sin\tfrac{1}{x})^{1/2} \leq |x|^{1/2}$$

για κάθε $x \in A$, οπότε με την ιδιότητα παρεμβολής συνεπάγεται $\lim_{x\to 0}(x \sin\frac{1}{x})^{1/2} = 0$.

Παράδειγμα 3.3.37. Θα μελετήσουμε τα όρια της εκθετικής συνάρτησης a^x.
Το πρώτο όριο:

$$\lim_{x\to\xi} a^x = a^\xi.$$

Έστω $a > 1$. Θεωρούμε $\epsilon > 0$ και θα βρούμε $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|a^x - a^\xi| < \epsilon$ για κάθε x με $0 < |x - \xi| < \delta$. Ορίζουμε τον

$$\epsilon' = \min\{\epsilon, \tfrac{a^\xi}{2}\} > 0,$$

οπότε $\epsilon' \leq \epsilon$ και $\epsilon' < a^\xi$. Τώρα, το $|a^x - a^\xi| < \epsilon$ συνεπάγεται από το $|a^x - a^\xi| < \epsilon'$ κι αυτό από το $a^\xi - \epsilon' < a^x < a^\xi + \epsilon'$ κι αυτό από το $\log_a(a^\xi - \epsilon') < x < \log_a(a^\xi + \epsilon')$. Παρατηρούμε ότι ο ξ βρίσκεται ανάμεσα στους $\log_a(a^\xi - \epsilon')$ και $\log_a(a^\xi + \epsilon')$. Αν επιλέξουμε οποιονδήποτε δ ώστε

$$0 < \delta \leq \min\left\{\xi - \log_a(a^\xi - \epsilon'), \log_a(a^\xi + \epsilon') - \xi\right\},$$

τότε για κάθε x με $0 < |x - \xi| < \delta$ ισχύει $\log_a(a^\xi - \epsilon') < x < \log_a(a^\xi + \epsilon')$ και, επομένως, ισχύει $|a^x - a^\xi| < \epsilon$.
Αν $0 < a < 1$, τότε $\frac{1}{a} > 1$, οπότε $\lim_{x\to\xi} a^x = \lim_{x\to\xi} \frac{1}{(1/a)^x} = \frac{1}{(1/a)^\xi} = a^\xi$.

Τέλος, έχουμε τα όρια

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } a > 1 \\ 0, & \text{αν } 0 < a < 1 \end{cases} \qquad \lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} 0, & \text{αν } a > 1 \\ +\infty, & \text{αν } 0 < a < 1 \end{cases}$$

Για το πρώτο όριο, έστω $a > 1$. Θεωρούμε $M > 0$ και θα βρούμε $N > 0$ ώστε να ισχύει $a^x > M$ για κάθε $x > N$. Βλέπουμε ότι το $a^x > M$ συνεπάγεται από το $x > \log_a M$. Οπότε επιλέγουμε οποιονδήποτε $N > 0$ ώστε $N \geq \log_a M$ και τότε για κάθε $x > N$ ισχύει $x > \log_a M$ και, επομένως, ισχύει $a^x > M$.
Αν $0 < a < 1$, τότε $\frac{1}{a} > 1$ και, επομένως, $\lim_{x\to+\infty} a^x = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{(1/a)^x} = \frac{1}{+\infty} = 0$.
Αν $a > 1$, τότε $\lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{y\to+\infty} a^{-y} = \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{a^y} = \frac{1}{+\infty} = 0$.
Τέλος, αν $0 < a < 1$, τότε $\frac{1}{a} > 1$, οπότε $\lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{(1/a)^x} = \frac{1}{0+} = +\infty$.
Αξίζει να γράψουμε ξεχωριστά τα όρια αυτής της ενότητας στην περίπτωση $a = e$, δηλαδή για τη συνήθη εκθετική συνάρτηση:

$$\lim_{x\to\xi} e^x = e^\xi, \qquad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty.$$

Παράδειγμα 3.3.38. Τώρα θεωρούμε τη λογαριθμική συνάρτηση $\log_a x$.
Το πρώτο όριο είναι το:

$$\lim_{x\to\xi} \log_a x = \log_a \xi \qquad \text{αν } \xi > 0.$$

Έστω $a > 1$. Θεωρούμε $\epsilon > 0$ και θα βρούμε $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|\log_a x - \log_a \xi| < \epsilon$ για κάθε $x > 0$ με $0 < |x - \xi| < \delta$. Τώρα, το $|\log_a x - \log_a \xi| < \epsilon$ συνεπαγεται από το $\log_a \xi - \epsilon < \log_a x < \log_a \xi + \epsilon$ κι αυτό από το $\xi a^{-\epsilon} < x < \xi a^\epsilon$. Βλέπουμε ότι ο ξ είναι ανάμεσα στους $\xi a^{-\epsilon}$ και ξa^ϵ. Άρα, αν επιλέξουμε οποιονδήποτε δ ώστε

$$0 < \delta \leq \min\left\{\xi - \xi a^{-\epsilon}, \xi a^\epsilon - \xi\right\},$$

τότε για κάθε x με $0 < |x - \xi| < \delta$ ισχύει $\xi a^{-\epsilon} < x < \xi a^\epsilon$, οπότε ισχύει $|\log_a x - \log_a \xi| < \epsilon$.
Αν $0 < a < 1$, τότε $\frac{1}{a} > 1$, οπότε $\lim_{x\to\xi} \log_a x = -\lim_{x\to\xi} \log_{1/a} x = -\log_{1/a} \xi = \log_a \xi$.
Κατόπιν,

$$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } a > 1 \\ -\infty, & \text{αν } 0 < a < 1 \end{cases} \qquad \lim_{x\to 0+} \log_a x = \begin{cases} -\infty, & \text{αν } a > 1 \\ +\infty, & \text{αν } 0 < a < 1 \end{cases}$$

Για το πρώτο όριο, έστω $a > 1$. Θεωρούμε $M > 0$ και θα βρούμε $N > 0$ ώστε να ισχύει $\log_a x > M$ για κάθε $x > N$. Το $\log_a x > M$ συνεπάγεται από το $x > a^M$. Άρα, αν επιλέξουμε οποιονδήποτε $N \geq a^M$, τότε για κάθε $x > N$ ισχύει $x > a^M$ και, επομένως, ισχύει $\log_a x > M$.
Αν $0 < a < 1$, τότε $\frac{1}{a} > 1$, οπότε $\lim_{x\to+\infty} \log_a x = -\lim_{x\to+\infty} \log_{1/a} x = -\infty$.
Αν $a > 1$, τότε $\lim_{x\to 0+} \log_a x = \lim_{y\to+\infty} \log_a \frac{1}{y} = -\lim_{y\to+\infty} \log_a y = -(+\infty) = -\infty$.
Και, αν $0 < a < 1$, τότε $\frac{1}{a} > 1$, οπότε $\lim_{x\to 0+} \log_a x = -\lim_{x\to 0+} \log_{1/a} x = -(-\infty) = +\infty$.
Επομένως, στην περίπτωση $a = e$, δηλαδή για τη συνήθη λογαριθμική συνάρτηση, έχουμε:

$$\lim_{x\to\xi} \log x = \log \xi \quad \text{αν } \xi > 0, \qquad \lim_{x\to 0+} \log x = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \log x = +\infty.$$

Τώρα θα δούμε ένα σημαντικό παράδειγμα.

Παράδειγμα 3.3.39. Θα αποδείξουμε ότι

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \tfrac{1}{x}\right)^x = e.$$

Γνωρίζουμε από το κεφάλαιο των ακολουθιών ότι $(1+\frac{1}{n})^n \to e$. Συνεπάγεται

$(1+\frac{1}{n+1})^n = (1+\frac{1}{n+1})^{n+1}/(1+\frac{1}{n+1}) \to \frac{e}{1} = e, \quad (1+\frac{1}{n})^{n+1} = (1+\frac{1}{n})^n(1+\frac{1}{n}) \to e\cdot 1 = e.$

Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει

$$e-\epsilon < (1+\tfrac{1}{n+1})^n < e+\epsilon, \qquad e-\epsilon < (1+\tfrac{1}{n})^{n+1} < e+\epsilon$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Τότε για κάθε (όχι κατ' ανάγκη φυσικό) $x > n_0$ συνεπάγεται $[x] \geq n_0$, οπότε

$$e-\epsilon < \big(1+\tfrac{1}{[x]+1}\big)^{[x]} \leq (1+\tfrac{1}{x})^x \leq \big(1+\tfrac{1}{[x]}\big)^{[x]+1} < e+\epsilon.$$

Άρα για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_0 > 0$ ώστε να ισχύει $e-\epsilon < (1+\frac{1}{x})^x < e+\epsilon$ ή, ισοδύναμα, $|(1+\frac{1}{x})^x - e| < \epsilon$ για κάθε $x > n_0$.

Παράδειγμα 3.3.40. Για τα όρια των τριγωνομετρικών συναρτήσεων έχουμε τα εξής.
Από την $|\sin x| \leq |x|$ και την $\cos x - \cos\xi = -2\sin\frac{x-\xi}{2}\sin\frac{x+\xi}{2}$, βρίσκουμε

$$|\cos x - \cos\xi| = 2\big|\sin\tfrac{x-\xi}{2}\big|\big|\sin\tfrac{x+\xi}{2}\big| \leq 2\big|\sin\tfrac{x-\xi}{2}\big| \leq 2\big|\tfrac{x-\xi}{2}\big| = |x-\xi|.$$

Τώρα, έστω $\epsilon > 0$. Θεωρούμε οποιονδήποτε δ ώστε $0 < \delta \leq \epsilon$ και, τότε, για κάθε x με $0 < |x-\xi| < \delta$ ισχύει $|\cos x - \cos\xi| \leq |x-\xi| < \epsilon$. Άρα

$$\lim_{x\to\xi}\cos x = \cos\xi.$$

Με τον ίδιο τρόπο, από την $\sin x - \sin\xi = 2\sin\frac{x-\xi}{2}\cos\frac{x+\xi}{2}$ αποδεικνύουμε ότι $|\sin x - \sin\xi| \leq |x-\xi|$ και, επομένως,

$$\lim_{x\to\xi}\sin x = \sin\xi.$$

Από τον κανόνα λόγου:

$$\lim_{x\to\xi}\tan x = \tan\xi, \qquad \text{αν } \xi \neq \tfrac{\pi}{2}+k\pi \text{ για κάθε } k \in \mathbb{Z}.$$

$$\lim_{x\to\xi}\cot x = \cot\xi, \qquad \text{αν } \xi \neq k\pi \text{ για κάθε } k \in \mathbb{Z}.$$

Επίσης, από τον κανόνα λόγου,

$$\lim_{x\to\xi-}\tan x = +\infty, \quad \lim_{x\to\xi+}\tan x = -\infty \qquad \text{αν } \xi = \tfrac{\pi}{2}+k\pi \text{ για κάποιον } k \in \mathbb{Z}.$$

$$\lim_{x\to\xi-}\cot x = -\infty, \quad \lim_{x\to\xi+}\cot x = +\infty \qquad \text{αν } \xi = k\pi \text{ για κάποιον } k \in \mathbb{Z}.$$

Παράδειγμα 3.3.41. Αξίζει να αποδείξουμε ακόμα δύο πολύ χρήσιμα όρια:

$$\lim_{x\to 0}\tfrac{\sin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0}\tfrac{1-\cos x}{x^2} = \tfrac{1}{2}.$$

Και τα δύο όρια εντάσσονται στην κατηγορία των απροσδιόριστων μορφών $\frac{0}{0}$.
Συνδυάζοντας την ανισότητα $|\sin x| \leq |x|$ και την $|x| \leq |\tan x|$, η οποία ισχύει όταν $|x| < \frac{\pi}{2}$, βλέπουμε ότι ισχύει

$$\cos x \leq \tfrac{\sin x}{x} \leq 1 \qquad \text{για κάθε } x \in (-\tfrac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \tfrac{\pi}{2}).$$

Επειδή $\lim_{x\to 0}\cos x = \cos 0 = 1$, από την ιδιότητα παρεμβολής συνεπάγεται $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.
Για το δεύτερο όριο γράφουμε

$$\lim_{x\to 0}\tfrac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\tfrac{1}{2}\big(\tfrac{\sin(x/2)}{x/2}\big)^2 = \lim_{y\to 0}\tfrac{1}{2}(\tfrac{\sin y}{y})^2 = \tfrac{1}{2}.$$

Με άλλον τρόπο:

$$\lim_{x\to 0}\tfrac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\tfrac{1-(\cos x)^2}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0}\big(\tfrac{\sin x}{x}\big)^2\tfrac{1}{1+\cos x} = 1^2\,\tfrac{1}{1+1} = \tfrac{1}{2}.$$

Παράδειγμα 3.3.42. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos x}=1\cdot\frac{1}{1}=1$.

Παράδειγμα 3.3.43. Για να υπολογίσουμε το $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{\sin(bx)}$ γράφουμε $\frac{\sin(ax)}{\sin(bx)}=\frac{a}{b}\cdot\frac{\sin(ax)/(ax)}{\sin(bx)/(bx)}$. Είναι $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{ax}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1$ και $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(bx)}{bx}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1$. Επομένως, $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{\sin(bx)}=\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{1}=\frac{a}{b}$.

Τέλος, θα διατυπώσουμε την πρόταση 3.14, αλλά θα τήν αποδείξουμε στην ενότητα 4.2.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.15. *Η* **δύναμη** *μιας συνάρτησης $f:A\to\mathbb{R}$, όπου $f(x)>0$ για κάθε $x\in A$, με εκθέτη την συνάρτηση $g:A\to\mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση $f^g:A\to\mathbb{R}$ με τύπο $(f^g)(x)=f(x)^{g(x)}$ για κάθε $x\in A$.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.14. *Έστω $f,g:A\to\mathbb{R}$ και $\xi\in\overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A και $\eta,\zeta\in\overline{\mathbb{R}}$ και έστω ότι ισχύει $f(x)>0$ για κάθε $x\in A$. Τότε για τα όρια όταν $x\to\xi$ έχουμε τα εξής. Αν $f(x)\to\eta$, $g(x)\to\zeta$ και το η^ζ δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε $f(x)^{g(x)}\to\eta^\zeta$. Ακόμη, αν $f(x)\to 0$, $g(x)\to-\infty$, τότε $f(x)^{g(x)}\to+\infty$.*

Η τελευταία περίπτωση της πρότασης 3.14 συμφωνεί με το $(0+)^{-\infty}=+\infty$ του ορισμού 2.13.

Ασκήσεις.

3.3.1. Βρείτε τα $\lim_{x\to 1}\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^4-x^3+x^2-1}$, $\lim_{x\to 1}\frac{x^4-x^3-3x^2+5x-2}{x^4+x^3-4x^2+x+1}$, $\lim_{x\to 1\pm}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^5-3x^4+6x^3-10x^2+9x-3}$.

3.3.2. Βρείτε τα $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3+1}{x^2+1}$, $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(2x+1)^3(3x^2+2)^6}{(x^2+1)(x+4)^{13}}$, $\lim_{x\to 0\pm}(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{|x|})$, $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2-|x|}$.

3.3.3. Βρείτε τα $\lim_{x\to 0}(\frac{2}{\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}})$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x^{-2}+2x^{6/5}-4}{x^{6/5}-2x^{9/8}+2}$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{3/2}-2x^{6/5}}{4x^{4/3}+2}$.

3.3.4. Έστω $a\neq 0$. Βρείτε τα $\lim_{x\to 1\pm}\frac{1}{x^a-1}$, $\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x^a-1)^2}$, $\lim_{x\to 1}\frac{x^{3a}-1}{x^a-1}$.

3.3.5. Βρείτε τα $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$, $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^3}(\sqrt{x+1}-2\sqrt{x}+\sqrt{x-1})$.

3.3.6. Αν $a>0$ και $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{ax^2+bx+c}-Ax-B)=0$, βρείτε τους A,B συναρτήσει των a,b,c και, με τους ίδιους A,B, αποδείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty}x(\sqrt{ax^2+bx+c}-Ax-B)=\frac{4ac-b^2}{8a\sqrt{a}}$.

3.3.7. Βρείτε με τον κανόνα σύνθεσης τα $\lim_{x\to\pm\infty}(\frac{3x^2-7x}{x^2+1})^{1/2}$, $\lim_{x\to 0}(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3})^{1/5}$.

3.3.8. Βρείτε τα $\lim_{x\to\pm\infty}(e^x-e^{2x}+1)$, $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{e^{2x}+e^x+1}{2e^{2x}+1}$, $\lim_{x\to 0\pm}\frac{1}{e^x-1}$, $\lim_{x\to 0}\frac{1}{(e^x-1)^2}$, $\lim_{x\to\pm\infty}\log\frac{e^x}{e^{x/2}+1}$.

3.3.9. Βρείτε τα $\lim_{x\to 0}\frac{\log(2x)}{\log(3x)}$, $\lim_{x\to 1\pm}\frac{1}{\log x}$, $\lim_{x\to 0}\log\frac{1-\log x}{1+(\log x)^2}$.

3.3.10. Για κάθε $\xi\in\mathbb{R}$ βρείτε τα $\lim_{x\to\xi\pm}[x]$. Για ποιούς ξ υπάρχει το $\lim_{x\to\xi}[x]$;
Βρείτε τα $\lim_{x\to\pm\infty}[1/x]$, $\lim_{x\to\pm\infty}x[1/x]$.
Αν $a,b>0$, βρείτε τα $\lim_{x\to 0\pm}(b/x)[x/a]$.

3.3.11. Βρείτε τα $\lim_{x\to 0}x\cot x$, $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}$, $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{(\sin x)^2}$, $\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(3x)}{\sin x}$, $\lim_{x\to 0}\frac{\tan(3x)}{x+\sin x}$, $\lim_{x\to 0}\frac{\cos(8x)-\cos(15x)}{x^2}$, $\lim_{x\to\pm\infty}x\sin\frac{1}{x}$, $\lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos x}{x-(\pi/2)}$, $\lim_{x\to 0}\frac{\cos((\pi/2)\cos x)}{\sin(\sin x)}$.

3.3.12. Βρείτε τα $\lim_{x\to\pm\infty}[x]$, $\lim_{x\to\pm\infty}([x]/x)$, $\lim_{x\to\pm\infty}([x^2]/x)$, $\lim_{x\to+\infty}([x]/x^2)$.
Αν $a,b>0$, βρείτε τα $\lim_{x\to 0\pm}(x/a)[b/x]$.
Αν $n\in\mathbb{N}$, βρείτε τα $\lim_{x\to 0\pm}x\big([1/x]+[2/x]+\cdots+[n/x]\big)$.

3.3.13. Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to 0+}x^a\sin x=\begin{cases}0, & \text{αν } a>-1\\ 1, & \text{αν } a=-1\\ +\infty, & \text{αν } a<-1\end{cases}$

3.3.14. Σχεδιάστε τα γραφήματα των $x\sin x$, $x^2\sin x$, $\sqrt{x}\sin x$ και $\frac{1}{x}\sin x$ και μελετήστε τα όριά τους στα $\pm\infty$.

Σχεδιάστε τα γραφήματα των $x\sin\frac{1}{x}$, $x^2\sin\frac{1}{x}$, $\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}$ και $\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ και μελετήστε τα όριά τους στα $0\pm$.

Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to 0+} x^a\sin\frac{1}{x}\begin{cases}= 0, & \text{αν } a > 0\\ \text{δεν υπάρχει}, & \text{αν } a \leq 0\end{cases}$

3.3.15. Βρείτε τα $\lim_{x\to 1\pm} f(x)$, αν ισχύει $(x-1)f(x) \geq 1$ για κάθε x με $0 < |x-1| < \frac{1}{4}$.

3.3.16. Υπολογίστε τις πιθανές τιμές του $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ αν γνωρίζουμε ότι το όριο αυτό υπάρχει και ότι ισχύει $f(\sqrt{x}) = -3(f(x))^2 + 1$ για κάθε $x > 1$.

3.3.17. Υπολογίζοντας κατάλληλα όρια, απαντήστε στα εξής. Ισχύει $\frac{3x^2+1}{x^2-5} < \frac{301}{100}$ κοντά στο $+\infty$; Ισχύει $\frac{x^8+1}{4x^4-x^2+2x-1} \geq \frac{5}{8}$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στον 1; Ισχύει $x^5 - 7x^3 + x^2 \leq 10^7$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο $+\infty$; Ισχύει $-10^{-8} < \frac{x^4+13x^3+25x^2+33}{x^5+2x+1} < 10^{-7}$ κοντά στο $-\infty$;

3.3.18. Βρείτε, αν υπάρχουν, τις ασύμπτωτες ευθείες - κατακόρυφες και πλάγιες - των γραφημάτων των συναρτήσεων $\frac{1}{x}$, x^2, $\frac{3x^4-5x^2+x-1}{x^3+x^2-2}$, $\frac{1}{1-x^2}$, $\sqrt{x}$, $f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } x \geq 1\\ 3x/(x-1), & \text{αν } x < 1\end{cases}$

3.3.19. Έστω $f : (-1,0)\cup(0,1) \to \mathbb{R}$.

Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to 0} f(|x|) = l$ αν και μόνο αν $\lim_{x\to 0+} f(x) = l$.

Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to 0} f(x^2) = l$ αν και μόνο αν $\lim_{x\to 0+} f(x) = l$.

Βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(1/x)$. Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty} f(1/x) = l$ αν και μόνο αν $\lim_{x\to 0+} f(x) = l$ και ότι $\lim_{x\to-\infty} f(1/x) = l$ αν και μόνο αν $\lim_{x\to 0-} f(x) = l$.

Βρείτε συνάρτηση $f : (-1,0)\cup(0,1) \to \mathbb{R}$ ώστε να υπάρχει το $\lim_{x\to 0} f(|x|)$ και να μην υπάρχει το $\lim_{x\to 0} f(x)$.

3.3.20. Έστω $f : (-1,0)\cup(0,1) \to \mathbb{R}$. Αν $\lim_{x\to 0}\big(f(x) + \frac{1}{f(x)}\big) = 2$, βρείτε το $\lim_{x\to 0} f(x)$.

Έστω $f : (-1,0)\cup(0,1) \to \mathbb{R}$. Αν $\lim_{x\to 0}\big(f(x) + \frac{1}{|f(x)|}\big) = 0$, βρείτε το $\lim_{x\to 0} f(x)$.

3.3.21. Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$, $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A και $\lim_{x\to\xi} f(x) < \lim_{x\to\xi} g(x)$. Αποδείξτε ότι ισχύει $f(x) < g(x)$ κοντά στο ξ.

3.3.22. Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$, $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A. Αν $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta \in \overline{\mathbb{R}}$ και $\lim_{x\to\xi} g(x) = \zeta \in \overline{\mathbb{R}}$, τότε αποδείξτε ότι $\lim_{x\to\xi}\max\{f(x), g(x)\} = \max\{\eta,\zeta\}$ και $\lim_{x\to\xi}\min\{f(x), g(x)\} = \min\{\eta,\zeta\}$.

3.3.23. Δώστε παράδειγμα όπου υπάρχει το όριο $\lim_{x\to\xi}(f(x) + g(x))$ αλλά δεν υπάρχουν τα $\lim_{x\to\xi} f(x)$, $\lim_{x\to\xi} g(x)$.

Δώστε παράδειγμα όπου υπάρχει το $\lim_{x\to\xi} f(x)g(x)$ και όχι τα $\lim_{x\to\xi} f(x)$, $\lim_{x\to\xi} g(x)$.

3.3.24. [6] Βρείτε συναρτήσεις f, g ώστε σε κάποιο ξ να είναι $f(x) \to +\infty$, $g(x) \to -\infty$ και η $f(x) + g(x)$ (i) να έχει όριο έναν οποιονδήποτε $c \in \overline{\mathbb{R}}$ (ii) να μην έχει όριο.

Βρείτε συναρτήσεις f, g ώστε σε κάποιο ξ να είναι $f(x) \to 0$, $g(x) \to +\infty$ και η $f(x)g(x)$ (i) να έχει όριο έναν οποιονδήποτε $c \in \overline{\mathbb{R}}$ (ii) να μην έχει όριο.

Βρείτε συναρτήσεις f, g ώστε σε κάποιο ξ να είναι $f(x) \to 0$, $g(x) \to 0$ και η $\frac{f(x)}{g(x)}$ (i) να έχει όριο έναν οποιονδήποτε $c \in \overline{\mathbb{R}}$ (ii) να μην έχει όριο.

Βρείτε συναρτήσεις f, g ώστε σε κάποιο ξ να είναι $f(x) \to +\infty$, $g(x) \to +\infty$ και η $\frac{f(x)}{g(x)}$ (i) να έχει όριο έναν οποιονδήποτε $c \in [0,+\infty]$ (ii) να μην έχει όριο. Είναι δυνατόν η $\frac{f(x)}{g(x)}$ να έχει όριο $c \in [-\infty, 0)$;

3.3.25. [7] Βρείτε συναρτήσεις f, g ώστε σε κάποιο ξ να είναι $f(x) \to +\infty$, $g(x) \to 0$ και η

[6] Μελέτη των απροσδιόριστων μορφών.

[7] Μελέτη των απροσδιόριστων μορφών δύναμης.

$f(x)^{g(x)}$ (i) να έχει όριο έναν οποιονδήποτε $c \in [0, +\infty]$ (ii) να μην έχει όριο. Είναι δυνατόν η $f(x)^{g(x)}$ να έχει όριο $c \in [-\infty, 0)$;

Βρείτε συναρτήσεις f, g ώστε σε κάποιο ξ να είναι $f(x) \to 0$, $g(x) \to 0$ και η $f(x)^{g(x)}$ (i) να έχει όριο έναν οποιονδήποτε $c \in [0, +\infty]$ (ii) να μην έχει όριο. Είναι δυνατόν η $f(x)^{g(x)}$ να έχει όριο $c \in [-\infty, 0)$;

Βρείτε συναρτήσεις f, g ώστε σε κάποιο ξ να είναι $f(x) \to 0$, $g(x) \to -\infty$ και η $f(x)^{g(x)}$ (i) να έχει όριο έναν οποιονδήποτε $c \in \{+\infty, -\infty\}$ (ii) να μην έχει όριο. Είναι δυνατόν η $f(x)^{g(x)}$ να έχει όριο $c \in \mathbb{R}$;

Βρείτε συναρτήσεις f, g ώστε σε κάποιο ξ να είναι $f(x) \to 1$, $g(x) \to +\infty$ και η $f(x)^{g(x)}$ (i) να έχει όριο έναν οποιονδήποτε $c \in [0, +\infty]$ (ii) να μην έχει όριο. Είναι δυνατόν η $f(x)^{g(x)}$ να έχει όριο $c \in [-\infty, 0)$;

Βρείτε συναρτήσεις f, g ώστε σε κάποιο ξ να είναι $f(x) \to 1$, $g(x) \to -\infty$ και η $f(x)^{g(x)}$ (i) να έχει όριο έναν οποιονδήποτε $c \in [0, +\infty]$ (ii) να μην έχει όριο. Είναι δυνατόν η $f(x)^{g(x)}$ να έχει όριο $c \in [-\infty, 0)$;

3.3.26. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A, $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$ και έστω ότι ισχύει $f(x) \leq \eta$ για κάθε $x \in A$ με $x \neq \xi$. Αποδείξτε ότι $\sup\{f(x) \,|\, x \in A, x \neq \xi\} = \eta$.

3.3.27. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A και $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$. Αποδείξτε ότι $\inf\{f(x) \,|\, x \in A, 0 < |x - \xi| < \delta\} \leq \eta \leq \sup\{f(x) \,|\, x \in A, 0 < |x - \xi| < \delta\}$ για κάθε $\delta > 0$.

3.3.28. Έστω ότι ισχύει $|a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_n \sin nx| \leq |\sin x|$ για κάθε x. Αποδείξτε ότι $|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \leq 1$.

3.3.29. [α] Έστω $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ μονότονη στο $(0, +\infty)$. Αν $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(2x)}{f(x)} = 1$, αποδείξτε ότι για κάθε $a > 0$ είναι $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(ax)}{f(x)} = 1$.

[β] Έστω $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f(2x) = 3f(x)$ για κάθε $x \in (0, \frac{1}{2}]$. Αν η f είναι φραγμένη στο $(0, 1]$, αποδείξτε ότι $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

3.3.30. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A. Αν $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta \in \overline{\mathbb{R}}$ και αν ισχύει $f(x) \neq \eta$ κοντά στο ξ, αποδείξτε ότι το η είναι σημείο συσσώρευσης του συνόλου τιμών $\{f(x) \,|\, x \in A\}$. Να συμπεράνετε ότι στην πρόταση 3.13 κάποια από τις υποθέσεις είναι περιττή.

3.3.31. [α] Βρείτε τις ασύμπτωτες ευθείες - κατακόρυφες και πλάγιες - των γραφημάτων της συνάρτησης $y = \frac{2x+1}{x-1}$ και της αντίστροφής της $x = \frac{y+1}{y-2}$.

[β] Θεωρήστε τη συνάρτηση $y = 2x - \frac{1}{x}$ με πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$. Αποδείξτε ότι το σύνολο τιμών της είναι το $(-\infty, +\infty)$ και ότι η αντίστροφη συνάρτηση είναι η $x = \frac{1}{4}(y + \sqrt{y^2 + 8})$. Βρείτε τις ασύμπτωτες ευθείες - κατακόρυφες και πλάγιες - των γραφημάτων των δύο αυτών συναρτήσεων.

[γ] Γενικότερα, πώς σχετίζονται οι πλάγιες και οι κατακόρυφες ασύμπτωτες μιας συνάρτησης f και της αντίστροφής της f^{-1};

3.4 Όρια συναρτήσεων και ακολουθίες.

Στο θεώρημα 3.1 έχουμε μια συσχέτιση της έννοιας του ορίου συνάρτησης και της έννοιας του ορίου ακολουθίας.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.1. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A. Θεωρούμε και τις ακολουθίες (x_n) στο A με τις ιδιότητες: (i) $x_n \neq \xi$ για κάθε n και (ii) $x_n \to \xi$.*

[α] Αν $f(x) \to \eta \in \overline{\mathbb{R}}$ όταν $x \to \xi$, τότε για κάθε ακολουθία (x_n) στο A με τις ιδιότητες (i), (ii) ισχύει $f(x_n) \to \eta$.

[β] Αντιστρόφως, αν για κάθε ακολουθία (x_n) στο A με τις ιδιότητες (i), (ii) η αντίστοιχη ακολουθία $(f(x_n))$ έχει όριο, τότε η f έχει όριο στο ξ.

Απόδειξη. [α] Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta \in \overline{\mathbb{R}}$ και έστω ακολουθία (x_n) στο A με τις ιδιότητες (i) και (ii).
Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει

$$f(x) \in N_\eta(\epsilon) \qquad \text{για κάθε } \; x \in A \cap N_\xi(\delta) \; \text{ με } \; x \neq \xi. \tag{3.5}$$

Επειδή $x_n \to \xi$, ισχύει τελικά $x_n \in N_\xi(\delta)$. Επειδή ισχύει $x_n \in A$ και $x_n \neq \xi$ για κάθε n, συνεπάγεται ότι ισχύει τελικά

$$x_n \in A \cap N_\xi(\delta) \; \text{ και } \; x_n \neq \xi. \tag{3.6}$$

Από την (3.6) και την (3.5) με $x = x_n$ συνεπάγεται ότι ισχύει τελικά

$$f(x_n) \in N_\eta(\epsilon).$$

Άρα $f(x_n) \to \eta$.
[β] Έστω ότι για κάθε ακολουθία (x_n) στο A με τις ιδιότητες (i), (ii) η αντίστοιχη ακολουθία $(f(x_n))$ έχει όριο στο $\overline{\mathbb{R}}$.
Πρώτα θα αποδείξουμε ότι *υπάρχει* τουλάχιστον μία ακολουθία στο A με τις ιδιότητες (i) και (ii). Πράγματι, επειδή το ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A, για κάθε n υπάρχει κάποιο

$$x_n \in A \cap N_\xi(\tfrac{1}{n}) \; \text{ με } \; x_n \neq \xi.$$

Τώρα, η ακολουθία (x_n) που δημιουργείται με αυτόν τον τρόπο είναι στο A και έχει τις ιδιότητες (i), (ii). Το ότι έχει την ιδιότητα (i) είναι προφανές. Κατόπιν, για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει τελικά $\frac{1}{n} < \epsilon$, οπότε ισχύει τελικά $N_\xi(\frac{1}{n}) \subseteq N_\xi(\epsilon)$ οπότε ισχύει τελικά $x_n \in N_\xi(\epsilon)$. Άρα $x_n \to \xi$.
Τώρα, έστω τυχούσες ακολουθίες $(x_n{}')$, $(x_n{}'')$ στο A με τις ιδιότητες (i), (ii), οπότε οι αντίστοιχες ακολουθίες $(f(x_n{}'))$, $(f(x_n{}''))$ έχουν όρια (*πιθανόν διαφορετικά*) στο $\overline{\mathbb{R}}$. Θεωρούμε τη “μικτή” ακολουθία

$$(x_1{}', x_1{}'', x_2{}', x_2{}'', x_3{}', x_3{}'', \dots),$$

η οποία έχει κι αυτή τις ιδιότητες (i), (ii) (εδώ χρειάζεται η πρόταση 2.15). Άρα η αντίστοιχη ακολουθία

$$\big(f(x_1{}'), f(x_1{}''), f(x_2{}'), f(x_2{}''), f(x_3{}'), f(x_3{}''), \dots\big)$$

έχει όριο στο $\overline{\mathbb{R}}$. Άρα οι $(f(x_n{}'))$, $(f(x_n{}''))$, ως υποακολουθίες της τελευταίας ακολουθίας, έχουν *το ίδιο όριο*.
Άρα υπάρχει $\eta \in \overline{\mathbb{R}}$ ώστε για κάθε (x_n) στο A με τις ιδιότητες (i), (ii) να ισχύει $f(x_n) \to \eta$.
Έστω (για να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι *δεν* ισχύει $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$.
Τότε υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε να είναι λάθος το ότι ισχύει $f(x) \in N_\eta(\epsilon)$ κοντά στο ξ. Αυτό σημαίνει ότι ισχύει $f(x) \notin N_\eta(\epsilon)$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο ξ. Άρα για κάθε n υπάρχει

$$x_n \in A \cap N_\xi(\tfrac{1}{n}) \; \text{ με } \; x_n \neq \xi \; \text{ ώστε } \; f(x_n) \notin N_\eta(\epsilon).$$

Λίγο πιο πάνω αποδείξαμε η ακολουθία (x_n) που σχηματίζεται είναι στο A και έχει τις ιδιότητες (i), (ii). Άρα, σύμφωνα με το συμπέρασμα της προηγούμενης παραγράφου, ισχύει $f(x_n) \to \eta$. Αυτό αντιφάσκει με το ότι ισχύει $f(x_n) \notin N_\eta(\epsilon)$ για κάθε n.
Άρα $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$. □

Παράδειγμα 3.4.1. Από το $\lim_{x\to e}(1 + x^2 - 3x^3) = 1 + e^2 - 3e^3$ προκύπτει το $1 + (1 + \frac{1}{n})^{2n} - 3(1+\frac{1}{n})^{3n} \to 1+e^2-3e^3$. Διότι η ακολουθία $\big((1+\frac{1}{n})^n\big)$ είναι στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης $1 + x^2 - 3x^3$, διότι ισχύει $(1 + \frac{1}{n})^n \neq e$ για κάθε n και διότι $(1 + \frac{1}{n})^n \to e$.

Παράδειγμα 3.4.2. Στο θεώρημα 3.1 η υπόθεση ότι “ισχύει $x_n \neq \xi$ για κάθε n” είναι απαραίτητη. Πράγματι, έστω η $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \neq 0 \\ 1, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ και η (x_n) με τύπο $x_n = \frac{1+(-1)^{n-1}}{n}$ για κάθε n. Τότε $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ και $x_n \to 0$. Δεν είναι σωστό ότι ισχύει $x_n \neq 0$ για κάθε n, διότι ισχύει $x_n = 0$ για κάθε άρτιο n. Τώρα, ισχύει $f(x_n) = 0$ για κάθε περιττό n και $f(x_n) = 1$ για κάθε άρτιο n και, επομένως, η ακολουθία $(f(x_n))$ δεν έχει όριο.

Υπάρχουν και οι παραλλαγές του θεωρήματος 3.1 όπου το “σημείο συσσώρευσης” μετατρέπεται σε “από δεξιά (αριστερά) του σημείο συσσώρευσης”, το $x_n \neq \xi$ μετατρέπεται σε $x_n > \xi$ $(x_n < \xi)$ και το $\lim_{x\to\xi}$ μετατρέπεται σε $\lim_{x\to\xi+}$ $(\lim_{x\to\xi-})$.

Το θεώρημα 3.1 χρησιμοποιείται συνήθως με δύο τρόπους. Όπως κάναμε στο παράδειγμα 3.4.1, γνωρίζοντας ήδη κάποια όρια συναρτήσεων, βγάζουμε συμπεράσματα για όρια ακολουθιών. Επίσης, έστω ότι δεν γνωρίζουμε αν υπάρχει το $\lim_{x\to\xi} f(x)$. Αν βρούμε μία ακολουθία (x_n) στο πεδίο ορισμού της f η οποία έχει όριο ξ, όλοι οι όροι της είναι $\neq \xi$ και η ακολουθία $(f(x_n))$ δεν έχει όριο, συμπεραίνουμε ότι ούτε το $\lim_{x\to\xi} f(x)$ υπάρχει. Ή, αν βρούμε δύο ακολουθίες $(x_n{}')$, $(x_n{}'')$ στο πεδίο ορισμού της f οι οποίες έχουν όριο ξ, όλοι οι όροι τους είναι $\neq \xi$ και οι ακολουθίες $(f(x_n{}'))$ και $(f(x_n{}''))$ έχουν διαφορετικά όρια, συμπεραίνουμε ότι το $\lim_{x\to\xi} f(x)$ δεν υπάρχει.

Παράδειγμα 3.4.3. Θα ξανααποδείξουμε ότι το $\lim_{x\to+\infty}(-1)^{[x]}$ δεν υπάρχει.
Η ακολουθία (n) είναι στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης $(-1)^{[x]}$ και $n \to +\infty$ αλλά η ακολουθία $((-1)^n)$ δεν έχει όριο. Άρα δεν υπάρχει το $\lim_{x\to+\infty}(-1)^{[x]}$.
Με την ακολουθία $(-n)$ αποδεικνύεται ότι και το $\lim_{x\to-\infty}(-1)^{[x]}$ δεν υπάρχει.

Παράδειγμα 3.4.4. Θα ξανααποδείξουμε ότι το $\lim_{x\to+\infty}\sin x$ δεν υπάρχει.
Οι ακολουθίες $(2n\pi)$ και $(\frac{\pi}{2}+2n\pi)$ είναι στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\sin x$ και $2n\pi \to +\infty$ και $\frac{\pi}{2}+2n\pi \to +\infty$. Όμως, $\sin(2n\pi) = 0 \to 0$ και $\sin(\frac{\pi}{2}+2n\pi) = 1 \to 1$. Άρα δεν υπάρχει το $\lim_{x\to+\infty}\sin x$.
Με τις ακολουθίες $(-2n\pi)$ και $(\frac{\pi}{2}-2n\pi)$ αποδεικνύεται ότι δεν υπάρχει το $\lim_{x\to-\infty}\sin x$.
Φυσικά, με κάποιες ανάλογες ακολουθίες αποδεικνύεται ότι δεν υπάρχουν και τα $\lim_{x\to\pm\infty}\cos x$.

Ασκήσεις.

3.4.1. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχουν τα όρια $\lim_{x\to0\pm}(-1)^{[1/x]}$, $\lim_{x\to\pm\infty}(x-[x])$, $\lim_{x\to0\pm}\sin\frac{1}{x}$, $\lim_{x\to0\pm}\cos\frac{1}{x}$, χρησιμοποιώντας κατάλληλες ακολουθίες.

3.4.2. Βρείτε τα όρια των ακολουθιών $\big((\frac{2^n}{4^n+1})^{3/4}\big)$, $\big((\frac{n^3+n+1}{2n^2-1})^{\sqrt{2}}\big)$, $\big((\frac{n^5+1}{2n^6+1})^{1/4}\big)$, $\big(\log\frac{n^2+1}{n^2}\big)$, $\big((\frac{4^n-2^n}{4^n-3^n+2})^{1/5}\big)$, $\big(e^{-n^3/(n+1)}\big)$, $\big(\log\frac{e^{2n}+1}{e^n+1}\big)$, $\big(\frac{(\log n)^2-\log n+2}{-(\log n)^2+\log n-8}\big)$.

3.4.3. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A. Έστω, επίσης, ακολουθία (x_n) στο A ώστε να ισχύει $x_n \neq \xi$ για κάθε n και $x_n \to \xi$.
Αν $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta \in \overline{\mathbb{R}}$ και ισχύει $f(x_n) \geq l$ για άπειρους n, αποδείξτε ότι $\eta \geq l$.
Αν $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta \in \overline{\mathbb{R}}$ και ισχύει $f(x_n) \leq u$ για άπειρους n, αποδείξτε ότι $\eta \leq u$.
Αν $u < l$ και ισχύει $f(x_n) \geq l$ για άπειρους n και $f(x_n) \leq u$ για άπειρους n, αποδείξτε ότι δεν υπάρχει το $\lim_{x\to\xi} f(x)$.

3.4.4. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ περιοδική με περίοδο $\tau > 0$, δηλαδή έστω $f(x+\tau) = f(x)$ για κάθε x. Αποδείξτε ότι, αν υπάρχει ένα από τα $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$, τότε η f είναι σταθερή συνάρτηση.
Αποδείξτε ότι δεν υπάρχουν τα $\lim_{x\to\pm\infty}\cos x$, $\lim_{x\to\pm\infty}\sin x$, $\lim_{x\to\pm\infty}(x-[x])$.

3.4.5. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα 3.1, αποδείξτε όλες τις προτάσεις της ενότητας 3.3 βασισμένοι στις αντίστοιχες προτάσεις της ενότητας 2.3.

3.4.6. [8] Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει $f : (1,+\infty) \to \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f(\sqrt{x}) = -3(f(x))^2+1$ για κάθε $x > 1$ και $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

[8] Δείτε την άσκηση 3.3.16.

3.5 Μονότονες συναρτήσεις.

Το θεώρημα 3.2 είναι ιδιαίτερα σημαντικό, τόσο όσο και το αντίστοιχο θεώρημα 2.1 για μονότονες ακολουθίες. Το θεώρημα 3.2 ουσιαστικά λέει ότι μια συνάρτηση μονότονη κοντά στο ξ από τα δεξιά (αριστερά) του έχει οπωσδήποτε δεξιό (αριστερό) πλευρικό όριο στο ξ και ότι, αν επιπλέον η συνάρτηση είναι φραγμένη κοντά στο ξ από τα δεξιά (αριστερά) του, τότε το όριό της είναι αριθμός ενώ, στην αντίθετη περίπτωση, το όριό της είναι $+\infty$ ή $-\infty$.

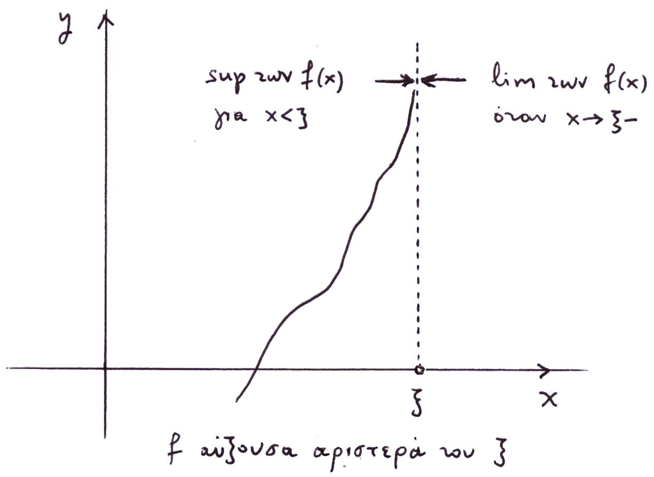
ΘΕΩΡΗΜΑ 3.2. [α] *Έστω $\xi \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $A \subseteq (-\infty, \xi)$, $f : A \to \mathbb{R}$ και έστω ότι το ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A. Αν η f είναι αύξουσα, τότε $\lim_{x\to\xi} f(x) = \sup\{f(x) \,|\, x \in A\}$. Ειδικώτερα, το $\lim_{x\to\xi} f(x)$ είναι είτε αριθμός, αν η f είναι άνω φραγμένη, είτε $+\infty$, αν η f δεν είναι άνω φραγμένη.*

[β] *Με τις υποθέσεις του* [α]*, αν η f είναι φθίνουσα, τότε $\lim_{x\to\xi} f(x) = \inf\{f(x) \,|\, x \in A\}$. Ειδικώτερα, το $\lim_{x\to\xi} f(x)$ είναι είτε αριθμός, αν η f είναι κάτω φραγμένη, είτε $-\infty$, αν η f δεν είναι κάτω φραγμένη.*

[γ] *Έστω $\xi \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $A \subseteq (\xi, +\infty)$, $f : A \to \mathbb{R}$ και έστω ότι το ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A. Αν η f είναι αύξουσα, τότε $\lim_{x\to\xi} f(x) = \inf\{f(x) \,|\, x \in A\}$. Ειδικώτερα, το $\lim_{x\to\xi} f(x)$ είναι είτε αριθμός, αν η f είναι κάτω φραγμένη, είτε $-\infty$, αν η f δεν είναι κάτω φραγμένη.*

[δ] *Με τις υποθέσεις του* [γ]*, αν η f είναι φθίνουσα, τότε $\lim_{x\to\xi} f(x) = \sup\{f(x) \,|\, x \in A\}$. Ειδικώτερα, το $\lim_{x\to\xi} f(x)$ είναι είτε αριθμός, αν η f είναι άνω φραγμένη, είτε $+\infty$, αν η f δεν είναι άνω φραγμένη.*

Δείτε το σχήμα 14.



Σx 14

Απόδειξη. [α] Έστω ότι η f είναι αύξουσα και άνω φραγμένη. Τότε το μη-κενό σύνολο τιμών $\{f(x) \,|\, x \in A\}$ είναι άνω φραγμένο, οπότε το

$$\eta = \sup\{f(x) \,|\, x \in A\}$$

είναι αριθμός. Θα αποδείξουμε ότι $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$.

Έστω $\epsilon > 0$. Ο $\eta - \epsilon$ δεν είναι άνω φράγμα του $\{f(x) \,|\, x \in A\}$, οπότε υπάρχει $x_0 \in A$ ώστε $\eta - \epsilon < f(x_0)$. Επειδή η f είναι αύξουσα, για κάθε $x \in A \cap (x_0, \xi)$ ισχύει

$$f(x) \geq f(x_0) > \eta - \epsilon.$$

Επειδή ο η είναι άνω φράγμα του $\{f(x) \,|\, x \in A\}$, ισχύει

$$f(x) \leq \eta < \eta + \epsilon$$

για κάθε $x \in A$. Άρα ισχύει

$$\eta - \epsilon < f(x) < \eta + \epsilon$$

ή, ισοδύναμα, $|f(x) - \eta| < \epsilon$ για κάθε $x \in A \cap (x_0, \xi)$. Άρα ισχύει $|f(x) - \eta| < \epsilon$ κοντά στο ξ.
Άρα $\lim_{x \to \xi} f(x) = \eta$.
Έστω ότι η f είναι αύξουσα αλλά όχι άνω φραγμένη. Τότε το μη-κενό $\{f(x) \,|\, x \in A\}$ δεν είναι άνω φραγμένο, οπότε

$$\sup\{f(x) \,|\, x \in A\} = +\infty.$$

Θα αποδείξουμε ότι $\lim_{x \to \xi} f(x) = +\infty$.
Έστω $M > 0$. Ο M δεν είναι άνω φράγμα του $\{f(x) \,|\, x \in A\}$, οπότε υπάρχει $x_0 \in A$ ώστε $f(x_0) > M$. Επειδή η f είναι αύξουσα, για κάθε $x \in A \cap (x_0, \xi)$ ισχύει

$$f(x) \geq f(x_0) > M.$$

Άρα ισχύει $f(x) > M$ κοντά στο ξ.
Άρα $\lim_{x \to \xi} f(x) = +\infty$.
[β] - [δ] Ομοίως. □

Στα [α] και [β] του θεωρήματος 3.2, αν $\xi \in \mathbb{R}$, μπορούμε να γράψουμε $\lim_{x \to \xi-} f(x)$ αντί $\lim_{x \to \xi} f(x)$. Ομοίως, στα [γ] και [δ], αν $\xi \in \mathbb{R}$, μπορούμε να γράψουμε $\lim_{x \to \xi+} f(x)$ αντί $\lim_{x \to \xi} f(x)$.

Τώρα, έστω ότι έχουμε την περίπτωση [α] του θεωρήματος 3.2. Είδαμε ότι το $\eta = \lim_{x \to \xi} f(x)$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του συνόλου των τιμών της f, οπότε ισχύει $f(x) \leq \eta$ για κάθε $x \in A$. Αν υποθέσουμε ότι η f δεν είναι κοντά στο ξ σταθερή, τότε ισχύει $f(x) < \eta$ για κάθε $x \in A$. Πράγματι, αν ήταν $f(x_0) = \eta$ για κάποιον $x_0 \in A$, τότε, επειδή η f είναι αύξουσα στο A, θα ίσχυε $\eta = f(x_0) \leq f(x) \leq \eta$ για κάθε $x \in A \cap (x_0, \xi)$, οπότε η f θα ήταν σταθερή η κοντά στο ξ. Ειδικώτερα, αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο A, τότε ισχύει $f(x) < \eta$ για κάθε $x \in A$. Παρόμοια συμπεράσματα έχουμε και στις άλλες περιπτώσεις του θεωρήματος 3.2. Συνοψίζουμε:
Αν η f είναι αύξουσα (φθίνουσα) στο $A \subseteq (-\infty, \xi)$ και $\lim_{x \to \xi} f(x) = \eta$, τότε ισχύει $f(x) \leq \eta$ ($f(x) \geq \eta$) για κάθε $x \in A$. Αν, επιπλέον, η f δεν είναι κοντά στο ξ σταθερή και, ειδικώτερα, είναι γνησίως αύξουσα (γνησίως φθίνουσα) στο A, τότε ισχύει $f(x) < \eta$ ($f(x) > \eta$) για κάθε $x \in A$.

Αν η f είναι αύξουσα (φθίνουσα) στο $A \subseteq (\xi, +\infty)$ και $\lim_{x \to \xi} f(x) = \eta$, τότε ισχύει $f(x) \geq \eta$ ($f(x) \leq \eta$) για κάθε $x \in A$. Αν, επιπλέον, η f δεν είναι κοντά στο ξ σταθερή και, ειδικώτερα, είναι γνησίως αύξουσα (γνησίως φθίνουσα) στο A, τότε ισχύει $f(x) > \eta$ ($f(x) < \eta$) για κάθε $x \in A$.

Παράδειγμα 3.5.1. Αν $a > 0$, θα αποδείξουμε τα $\lim_{x \to +\infty} x^a = +\infty$, $\lim_{x \to 0+} x^a = 0$, γνωρίζοντας ότι η συνάρτηση x^a είναι αύξουσα στο $(0, +\infty)$. Η μονοτονία εγγυάται την ύπαρξη των δύο ορίων καθώς και ότι το πρώτο είναι αριθμός ή $+\infty$ και ότι το δεύτερο είναι αριθμός ή $-\infty$.

Έστω (για να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι $\lim_{x \to +\infty} x^a = \eta \in \mathbb{R}$. Τότε

$$\lim_{x \to +\infty} (2x)^a = \lim_{y \to +\infty} y^a = \eta$$

και, επομένως,

$$\eta = \lim_{x \to +\infty} (2x)^a = \lim_{x \to +\infty} 2^a x^a = 2^a \lim_{x \to +\infty} x^a = 2^a \eta.$$

Άρα $\eta = 0$. Άτοπο, διότι ισχύει $x^a \geq 1^a = 1$ για κάθε $x \geq 1$, οπότε $\eta = \lim_{x \to +\infty} x^a \geq 1$.
Άρα $\lim_{x \to +\infty} x^a = +\infty$.
Επειδή $x^a > 0$ για κάθε $x > 0$, συνεπάγεται $\lim_{x \to 0+} x^a \geq 0$ και, επομένως, το δεύτερο όριο είναι αριθμός μη-αρνητικός: $\lim_{x \to 0+} x^a = \eta \geq 0$. Όπως πριν,

$$\lim_{x \to 0+} (2x)^a = \lim_{y \to 0+} y^a = \eta.$$

Άρα

$$\eta = \lim_{x \to 0+} (2x)^a = \lim_{x \to 0+} 2^a x^a = 2^a \eta$$

και, επομένως, $\eta = 0$.

Ασκήσεις.

3.5.1. [α] Έστω $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ αύξουσα στο $[1, +\infty)$ ώστε να ισχύει $f(n) \geq \sqrt{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Υπάρχει το $\lim_{x \to +\infty} f(x)$; αν ναι, υπολογίστε το.

[β] Έστω $f : (0, 2) \to \mathbb{R}$ φθίνουσα στο $(0, 2)$ ώστε να ισχύει $f(\frac{1}{n}) = 1 - \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Υπάρχει το $\lim_{x \to 0} f(x)$; αν ναι, υπολογίστε το.

[γ] Τί αλλάζει ως προς τα προηγούμενα συμπεράσματα αν δεν υποθέσουμε ότι οι συναρτήσεις f είναι μονότονες;

3.5.2. Έστω $a > 1$.

[α] Χρησιμοποιήστε το ότι ισχύει $\log_a(ax) = 1 + \log_a x$ για κάθε $x > 0$ καθώς και τη μονοτονία της $\log_a x$ και βρείτε τα $\lim_{x \to +\infty} \log_a x$, $\lim_{x \to 0} \log_a x$.

[β] Χρησιμοποιήστε το ότι ισχύει $a^{x+1} = aa^x$ για κάθε x καθώς και τη μονοτονία της a^x και βρείτε τα $\lim_{x \to \pm\infty} a^x$.

3.5.3. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ αύξουσα στο A και $\xi \in \mathbb{R}$ από αριστερά του και από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A.

Αποδείξτε ότι υπάρχουν τα όρια $\eta = \lim_{x \to \xi-} f(x)$ και $\zeta = \lim_{x \to \xi+} f(x)$, ότι είναι αριθμοί και ότι $\eta \leq \zeta$.

Θεωρήστε τους αριθμούς y με την ιδιότητα: ισχύει $f(x') \leq y \leq f(x'')$ για κάθε $x', x'' \in A$ με $x' < \xi < x''$. Αποδείξτε ότι αυτοί οι αριθμοί y είναι ακριβώς τα στοιχεία του διαστήματος $[\eta, \zeta]$.

Προσαρμόστε τα προηγούμενα στην περίπτωση που η f είναι φθίνουσα στο A.

3.5.4. [9] Έστω $\xi \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $A \subseteq (-\infty, \xi)$, $f : A \to \mathbb{R}$ γνησίως αύξουσα στο A και έστω ότι το ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει το $\eta = \lim_{x \to \xi} f(x) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ και ότι ισχύει $f(x) < \eta$ για κάθε $x \in A$. Άρα το σύνολο τιμών $B = \{f(x) \,|\, x \in A\}$ είναι $\subseteq (-\infty, \eta)$. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο A, ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : B \to A$ και είναι γνησίως αύξουσα στο B.

Αποδείξτε[10] ότι το η είναι σημείο συσσώρευσης του B και ότι $\lim_{y \to \eta} f^{-1}(y) = \xi$.

Προσαρμόστε τα προηγούμενα στην περίπτωση που η f είναι γνησίως φθίνουσα στο A καθώς και στην περίπτωση που είναι $A \subseteq (\xi, +\infty)$, το $\xi \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ είναι σημείο συσσώρευσης του A και η f είναι γνησίως μονότονη στο A.

3.5.5. [11] Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A. Το $\eta \in \overline{\mathbb{R}}$ χαρακτηρίζεται **οριακή τιμή** της f στο ξ αν για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει $f(x) \in N_\eta(\epsilon)$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο ξ.

Αποδείξτε ότι το $\eta \in \overline{\mathbb{R}}$ είναι οριακή τιμή της f στο ξ αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία (x_n) στο A ώστε να ισχύει $x_n \neq \xi$ για κάθε n, $x_n \to \xi$ και $f(x_n) \to \eta$.

Αποδείξτε ότι το σύνολο $L \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ των οριακών τιμών της f στο ξ είναι μη-κενό και να ορίσετε $\underline{\lim}_{x \to \xi} f(x) = \inf L$ και $\overline{\lim}_{x \to \xi} f(x) = \sup L$.

Αποδείξτε ότι τα $\underline{\lim}_{x \to \xi} f(x)$ και $\overline{\lim}_{x \to \xi} f(x)$ είναι στοιχεία του L, οπότε είναι η ελάχιστη και η μέγιστη οριακή τιμή της f στο ξ.

Τα $\overline{\lim}_{x \to \xi} f(x)$ και $\underline{\lim}_{x \to \xi} f(x)$ ονομάζονται **ανώτατο όριο** και **κατώτατο όριο** της f στον ξ και συμβολίζονται και $\limsup_{x \to \xi} f(x)$ και $\liminf_{x \to \xi} f(x)$.

Αποδείξτε: (i) αν $\overline{\lim}_{x \to \xi} f(x) < y$, τότε ισχύει $f(x) < y$ κοντά στο ξ, (ii) αν $y < \overline{\lim}_{x \to \xi} f(x)$, τότε ισχύει $y < f(x)$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο ξ.

---

[9] Εδώ περιγράφεται μια σημαντική σχέση ανάμεσα στο όριο συνάρτησης και στο όριο της αντίστροφής της.

[10] Δείτε και την άσκηση 3.3.30.

[11] Το *ανώτατο όριο* και το *κατώτατο όριο* συνάρτησης που θα δούμε εδώ είναι έννοιες ανάλογες των αντίστοιχων εννοιών για ακολουθίες. Η *οριακή τιμή* συνάρτησης είναι έννοια ανάλογη της έννοιας του υποακολουθιακού ορίου ακολουθίας.

Αποδείξτε: (i) αν $y < \underline{\lim}_{x\to\xi} f(x)$, τότε ισχύει $y < f(x)$ κοντά στο ξ, (ii) αν $\underline{\lim}_{x\to\xi} f(x) < y$, τότε ισχύει $f(x) < y$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο ξ.

Αποδείξτε ότι $\underline{\lim}_{x\to\xi} f(x) \leq \overline{\lim}_{x\to\xi} f(x)$.

Αποδείξτε ότι υπάρχει το $\lim_{x\to\xi} f(x)$ αν και μόνο αν $\underline{\lim}_{x\to\xi} f(x) = \overline{\lim}_{x\to\xi} f(x)$ και ότι σ' αυτήν την περίπτωση είναι $\underline{\lim}_{x\to\xi} f(x) = \overline{\lim}_{x\to\xi} f(x) = \lim_{x\to\xi} f(x)$.

Αν υπάρχουν τα πλευρικά όρια $\lim_{x\to\xi+} f(x) = \eta_+$ και $\lim_{x\to\xi-} f(x) = \eta_-$, αποδείξτε ότι $\underline{\lim}_{x\to\xi} f(x) = \min\{\eta_-, \eta_+\}$ και $\overline{\lim}_{x\to\xi} f(x) = \max\{\eta_-, \eta_+\}$.

Βρείτε τα $\underline{\lim}_{x\to 0}$ και $\overline{\lim}_{x\to 0}$ των $[x]$, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\sin\frac{1}{x}$, $x\sin\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$.

Έστω ότι η f είναι άνω φραγμένη κοντά στο ξ, δηλαδή ότι υπάρχει $\delta_0{}' > 0$ ώστε η f να είναι άνω φραγμένη στο $(A \setminus \{\xi\}) \cap N_\xi(\delta_0{}')$. Θεωρήστε τη συνάρτηση $u : (0, \delta_0{}'] \to \mathbb{R}$ με τύπο $u(\delta) = \sup\{f(x) \,|\, x \in (A \setminus \{\xi\}) \cap N_\xi(\delta)\}$ για κάθε $\delta \in (0, \delta_0{}']$. Αποδείξτε ότι η u είναι αύξουσα στο $(0, \delta_0{}']$ και, επομένως, υπάρχει το $\lim_{\delta\to 0} u(\delta)$. Αποδείξτε ότι $\lim_{\delta\to 0} u(\delta) = \overline{\lim}_{x\to\xi} f(x)$.

Έστω ότι δεν ισχύει ότι η f είναι άνω φραγμένη κοντά στο ξ, δηλαδή για κάθε $\delta > 0$ είναι $\sup\{f(x) \,|\, x \in (A \setminus \{\xi\}) \cap N_\xi(\delta)\} = +\infty$. Παρατηρήστε ότι τότε $\overline{\lim}_{x\to\xi} f(x) = +\infty$.

Έστω ότι η f είναι κάτω φραγμένη κοντά στο ξ, δηλαδή υπάρχει $\delta_0{}'' > 0$ ώστε η f να είναι κάτω φραγμένη στο $(A \setminus \{\xi\}) \cap N_\xi(\delta_0{}'')$. Θεωρήστε τη συνάρτηση $l : (0, \delta_0{}''] \to \mathbb{R}$ με τύπο $l(\delta) = \inf\{f(x) \,|\, x \in (A \setminus \{\xi\}) \cap N_\xi(\delta)\}$ για κάθε $\delta \in (0, \delta_0{}'']$. Αποδείξτε ότι η l είναι φθίνουσα στο $(0, \delta_0{}'']$ και, επομένως, υπάρχει το $\lim_{\delta\to 0} l(\delta)$. Αποδείξτε ότι $\lim_{\delta\to 0} l(\delta) = \underline{\lim}_{x\to\xi} f(x)$.

Έστω ότι δεν ισχύει ότι η f είναι κάτω φραγμένη κοντά στο ξ, δηλαδή για κάθε $\delta > 0$ είναι $\inf\{f(x) \,|\, x \in (A \setminus \{\xi\}) \cap N_\xi(\delta)\} = -\infty$. Παρατηρήστε ότι τότε $\underline{\lim}_{x\to\xi} f(x) = -\infty$.

3.6 Το κριτήριο του Cauchy.

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΤΟΥ CAUCHY. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A. Τότε η f έχει όριο στο ξ, το οποίο είναι αριθμός, αν και μόνο αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$ για κάθε $x', x'' \in A \cap N_\xi(\delta)$ με $x', x'' \neq \xi$.*

Απόδειξη. Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta \in \mathbb{R}$.
Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x) - \eta| < \frac{\epsilon}{2}$ για κάθε $x \in A \cap N_\xi(\delta)$ με $x \neq \xi$.
Άρα για κάθε $x', x'' \in A \cap N_\xi(\delta)$ με $x', x'' \neq \xi$ ισχύει

$$|f(x') - f(x'')| \leq |f(x') - \eta| + |f(x'') - \eta| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Αντιστρόφως, έστω ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$ για κάθε $x', x'' \in A \cap N_\xi(\delta)$ με $x', x'' \neq \xi$.
Έστω ακολουθία (x_n) στο A με τις ιδιότητες: (i) ισχύει $x_n \neq \xi$ για κάθε n και (ii) $x_n \to \xi$. Έστω $\epsilon > 0$. Θεωρούμε τον αντίστοιχο δ. Τότε υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $x_n \in A \cap N_\xi(\delta)$ και $x_n \neq \xi$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα για κάθε n, m με $n, m \geq n_0$ ισχύει $|f(x_n) - f(x_m)| < \epsilon$. Άρα η $(f(x_n))$ είναι ακολουθία Cauchy, οπότε συγκλίνει.
Αποδείξαμε ότι για κάθε (x_n) στο A με τις ιδιότητες (i) και (ii) η αντίστοιχη ακολουθία $(f(x_n))$ έχει όριο στο $\mathbb{R}$. Σύμφωνα με το θεώρημα 3.1, το $\lim_{x\to\xi} f(x)$ υπάρχει και είναι αριθμός. $\square$

Το "για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$ για κάθε $x', x'' \in A \cap N_\xi(\delta)$ με $x', x'' \neq \xi$" το διατυπώνουμε

$$\lim_{x',x''\to\xi}(f(x') - f(x'')) = 0.$$

Η χρησιμότητα του κριτηρίου του Cauchy, όπως και του ανάλογου κριτηρίου του Cauchy για ακολουθίες, είναι ότι παρέχει έναν τρόπο απόδειξης της σύγκλισης μιας συνάρτησης όταν δεν γνωρίζουμε εκ των προτέρων την τιμή του υποψήφιου ορίου της. Αντί να μελετήσουμε τις αποστάσεις $|f(x) - \eta|$ των τιμών της f από τον άγνωστο η, μελετάμε τις αποστάσεις $|f(x') - f(x'')|$ μεταξύ των τιμών της f.

Ασκήσεις.

3.6.1. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}$ σημείο συσσώρευσης του A και $\delta > 0$, $M > 0$, $\rho > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x') - f(x'')| \leq M|x' - x''|^\rho$ για κάθε $x', x'' \in A$ με $0 < |x' - \xi| < \delta$ και $0 < |x'' - \xi| < \delta$. Αποδείξτε ότι το $\lim_{x\to\xi} f(x)$ υπάρχει και είναι αριθμός.

3.6.2. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A.

Έστω ότι η f είναι φραγμένη κοντά στο ξ, δηλαδή υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε η f να είναι φραγμένη στο $(A \setminus \{\xi\}) \cap N_\xi(\delta_0)$.
Αποδείξτε ότι $0 \leq \sup\{f(x') - f(x'') \,|\, x', x'' \in (A \setminus \{\xi\}) \cap N_\xi(\delta)\} < +\infty$ για κάθε $\delta \in (0, \delta_0]$.
Ορίζουμε την $\omega^* : (0, \delta_0] \to \mathbb{R}_0^+$ με τύπο $\omega^*(\delta) = \sup\{f(x') - f(x'') \,|\, x', x'' \in (A \setminus \{\xi\}) \cap N_\xi(\delta)\}$ για κάθε $\delta \in (0, \delta_0]$.
Αποδείξτε ότι η ω^* είναι αύξουσα στο $(0, \delta_0]$, ότι υπάρχει το $\lim_{\delta\to 0} \omega^*(\delta)$ και είναι αριθμός ≥ 0.
Ορίζουμε $\omega^*(f; \xi) = \lim_{\delta\to 0} \omega^*(\delta)$.

Έστω ότι δεν ισχύει ότι η f είναι φραγμένη κοντά στο ξ.
Αποδείξτε ότι $\sup\{f(x') - f(x'') \,|\, x', x'' \in (A \setminus \{\xi\}) \cap N_\xi(\delta)\} = +\infty$ για κάθε $\delta > 0$.
Τότε ορίζουμε $\omega^*(f; \xi) = +\infty$.[12]

Αποδείξτε ότι το $\lim_{x\to\xi} f(x)$ υπάρχει και είναι αριθμός αν και μόνο αν $\omega^*(f; \xi) = 0$.

Έστω ότι υπάρχουν τα $\lim_{x\to\xi\pm} f(x)$. Αποδείξτε ότι ένα τουλάχιστον από τα $\lim_{x\to\xi\pm} f(x)$ δεν είναι αριθμός αν και μόνο αν $\omega^*(f; \xi) = +\infty$ και ότι τα $\lim_{x\to\xi\pm} f(x)$ είναι και τα δύο αριθμοί αν και μόνο αν $0 \leq \omega^*(f; \xi) < +\infty$ και τότε σ' αυτήν την περίπτωση είναι $\omega^*(f; \xi) = |\lim_{x\to\xi+} f(x) - \lim_{x\to\xi-} f(x)|$.

Δείτε την άσκηση 3.5.5 και αποδείξτε ότι ένα τουλάχιστον από τα $\overline{\lim}_{x\to\xi} f(x)$, $\underline{\lim}_{x\to\xi} f(x)$ δεν είναι αριθμός αν και μόνο αν $\omega^*(f; \xi) = +\infty$ και ότι τα $\overline{\lim}_{x\to\xi} f(x)$, $\underline{\lim}_{x\to\xi} f(x)$ είναι και τα δύο αριθμοί αν και μόνο αν $0 \leq \omega^*(f; \xi) < +\infty$ και τότε σ' αυτήν την περίπτωση είναι $\omega^*(f; \xi) = \overline{\lim}_{x\to\xi} f(x) - \underline{\lim}_{x\to\xi} f(x)$.
Βρείτε τα $\omega^*(f; 0)$ των $[x]$, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\sin\frac{1}{x}$, $x\sin\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$.

[12]Και στις δύο περιπτώσεις [α], [β], το $\omega^*(f; \xi)$ ονομάζεται **ταλάντωση** της f στο ξ. Μια παραλλαγή της έννοιας της ταλάντωσης σε σημείο θα δούμε στην άσκηση 4.1.16.

Βασική βιβλιογραφία.

Bartle, R. & Sherbert, D. (2011) *Introduction to Real Analysis, Ch 4.* Wiley.
Berberian, S. (1994) *A First Course in Real Analysis, Ch 7.* Springer.
Brand, L. (2006) *Advanced Calculus, Ch 3.* Dover.
Courant, R. (1988) *Differential and Integral Calculus, Vol I, Ch I.* Wiley.
Courant, R. & John, F. (1989) *Introduction to Calculus and Analysis, Vol I, Ch 1.* Springer.
Ghorpade, S. & Limaye, B. (2006) *A Course in Calculus and Real Analysis, Ch 3.* Springer.
Hardy, G. (2008) *A Course of Pure Mathematics, Ch II, V.* Cambridge Univ. Press.
Hayes Jr, C. (1964) *Concepts of Real Analysis, Ch 7.* Wiley.
Krantz, S. (2013) *Real Analysis and Foundations, Ch 6.* Chapman and Hall.
Landau, E. (2001) *Differential and Integral Calculus, Ch 4.* American Math. Society & Chelsea.
Lang, S. (1997) *Undergraduate Analysis, Ch II.* Springer.
Nikolsky, S. (1977) *A Course of Mathematical Analysis, Vol 1, Ch 4.* Mir Publishers.
Protter, M. (1998) *Basic Elements of Real Analysis, Ch 2.* Springer.
Ross, K. (2013) *Elementary Analysis, Ch 3.* Springer.
Spivak, M. (1994) *Calculus, Ch 3-5.* Cambridge Univ. Press.
Stoll, M. (2000) *Introduction to Real Analysis, Ch 4.* Pearson.

Συμπληρωματική βιβλιογραφία.

Beardon, A. (1997) *Limits: a New Approach to Real Analysis, Ch 3.* Springer.
Davidson, K. & Donsig, A. (2010) *Real Analysis and Applications, Ch 5.* Springer.
Goldberg, R. (1976) *Methods of Real Analysis, Ch 4.* Wiley.
Graves, L. (2009) *The Theory of Functions of Real Variables, Ch IV.* Dover.
Smirnov, V. (1964) *A Course of Higher Mathematics, Vol 1, Ch I.* Pergammon Press.

Κεφάλαιο 4

Συνεχείς συναρτήσεις.

4.1 Συνεχείς συναρτήσεις.

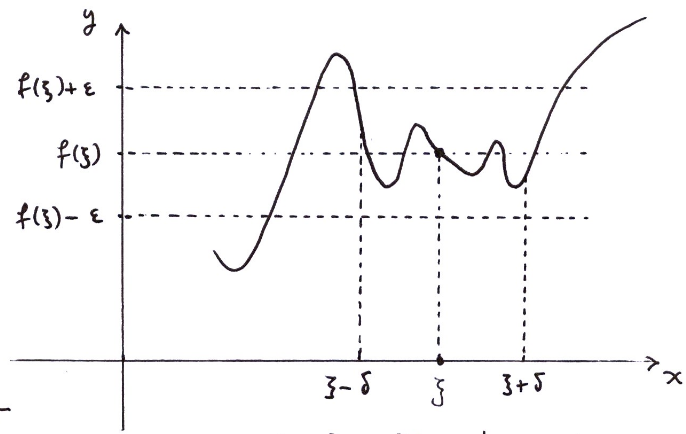
ΟΡΙΣΜΟΣ 4.1. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in A$. Η f χαρακτηρίζεται* **συνεχής** *στον ξ αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$ για κάθε $x \in A$ με $|x - \xi| < \delta$ ή, ισοδύναμα, ώστε να ισχύει $f(x) \in N_{f(\xi)}(\epsilon)$ για κάθε $x \in A \cap N_\xi(\delta)$.*

Με άλλα λόγια: *η f είναι συνεχής στον ξ αν ο $f(x)$ πλησιάζει απεριόριστα τον $f(\xi)$ όταν ο x έρχεται κατάλληλα κοντά στον ξ (χωρίς τον περιορισμό να παραμένει διαφορετικός από τον ξ)*. Ή, κοιτάζοντας το γράφημα της f, λέμε: *η f είναι συνεχής στον ξ αν, καθώς ο x έρχεται κατάλληλα κοντά στον ξ, το σημείο $(x, f(x))$ του γραφήματος της f πλησιάζει απεριόριστα το σημείο $(\xi, f(\xi))$.*

Όταν η f είναι συνεχής στον ξ, το ότι ισχύει $f(x) \in N_{f(\xi)}(\epsilon)$ για κάθε $x \in A \cap N_\xi(\delta)$ μπορούμε να το εκφράσουμε και ως εξής: *η f απεικονίζει το σύνολο $A \cap N_\xi(\delta)$ μέσα στην περιοχή $N_{f(\xi)}(\epsilon)$ ή, ισοδύναμα,*

$$f\big(A \cap N_\xi(\delta)\big) \subseteq N_{f(\xi)}(\epsilon).$$

Δείτε το σχήμα 15.



Σχ 15

αν $x \in (\xi-\delta, \xi+\delta)$ τότε $f(x) \in (f(\xi)-\varepsilon, f(\xi)+\varepsilon)$

Θα διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

Πρώτη περίπτωση: Ο $\xi \in A$ είναι σημείο συσσώρευσης του A.

Έστω ότι η f είναι συνεχής στον ξ. Δηλαδή, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$ για κάθε $x \in A$ με $|x - \xi| < \delta$. Προφανώς, συνεπάγεται ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$ για κάθε $x \in A$ με $0 < |x - \xi| < \delta$. (Αν κάποιοι x έχουν μια ιδιότητα, τότε και οι λιγότεροι x έχουν, επίσης, την ίδια ιδιότητα.) Επομένως, $\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$.

Αντιστρόφως, έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$. Δηλαδή, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$ για κάθε $x \in A$ με $0 < |x - \xi| < \delta$. Παρατηρούμε ότι, αν $x = \xi$, τότε έτσι κι αλλιώς ισχύει $|f(x) - f(\xi)| = |f(\xi) - f(\xi)| = 0 < \epsilon$. Άρα για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει (ο ίδιος με πριν) $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$ για κάθε $x \in A$ με $|x - \xi| < \delta$. (Στην περίπτωση αυτή, γνωρίζουμε ότι οι λιγότεροι x έχουν μια ιδιότητα, αλλά εκ των υστέρων βλέπουμε ότι και οι περισσότεροι x έχουν την ίδια ιδιότητα.) Άρα η f είναι συνεχής στον ξ.

Δεύτερη περίπτωση: Ο $\xi \in A$ δεν είναι σημείο συσσώρευσης του A ή, ισοδύναμα, είναι μεμονωμένο σημείο του A. Δηλαδή, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $A \cap (\xi - \delta, \xi + \delta) = \{\xi\}$.
Τότε, για κάθε $\epsilon > 0$ θεωρούμε τον συγκεκριμένο δ και τότε, προφανώς, για κάθε $x \in A$ με $|x - \xi| < \delta$ ισχύει $x = \xi$, οπότε ισχύει $|f(x) - f(\xi)| = |f(\xi) - f(\xi)| = 0 < \epsilon$. Άρα η f είναι συνεχής στον ξ.

Συνοψίζουμε:

Αν ο $\xi \in A$ είναι σημείο συσσώρευσης του A, τότε η f είναι συνεχής στον ξ αν και μόνο αν $\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$. Αν ο $\xi \in A$ είναι μεμονωμένο σημείο του A, τότε η f είναι, αυτομάτως, συνεχής στον ξ.

Πρέπει να τονιστεί ότι για να έχει νόημα η συνέχεια ή η μη-συνέχεια της f στον ξ *προϋποτίθεται* ότι ο ξ ανήκει στο πεδίο ορισμού της, δηλαδή ότι ορίζεται ο $f(\xi)$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.2. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in A$.*
Η f χαρακτηρίζεται **αριστερά συνεχής** *στον ξ αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$ για κάθε $x \in A$ με $\xi - \delta < x \leq \xi$ ή, ισοδύναμα, ώστε να ισχύει $f(x) \in N_{f(\xi)}(\epsilon)$ για κάθε $x \in A \cap N_{\xi-}(\delta)$.*
Η f χαρακτηρίζεται **δεξιά συνεχής** *στον ξ αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$ για κάθε $x \in A$ με $\xi \leq x < \xi + \delta$ ή, ισοδύναμα, ώστε να ισχύει $f(x) \in N_{f(\xi)}(\epsilon)$ για κάθε $x \in A \cap N_{\xi+}(\delta)$.*

Προσαρμόζοντας με προφανή τρόπο τα προηγούμενα, μπορούμε να αποδείξουμε ότι αν ο ξ είναι από δεξιά (αριστερά) του σημείο συσσώρευσης του A, τότε η f είναι δεξιά (αριστερά) συνεχής στον ξ αν και μόνο αν $\lim_{x\to\xi+} f(x) = f(\xi)$ ($\lim_{x\to\xi-} f(x) = f(\xi)$) και ότι, αν ο ξ δεν είναι από δεξιά (αριστερά) του σημείο συσσώρευσης του A, τότε η f είναι, αυτομάτως, δεξιά (αριστερά) συνεχής στον ξ.

Από τις προτάσεις 3.1 και 3.2 προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα. (i) Αν ο ξ είναι από αριστερά του και από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A, τότε η f είναι συνεχής στον ξ αν και μόνο αν είναι αριστερά και δεξιά συνεχής στον ξ. (ii) Αν ο ξ είναι μόνο από αριστερά του σημείο συσσώρευσης του A, τότε η f είναι συνεχής στον ξ αν και μόνο αν είναι αριστερά συνεχής στον ξ. (iii) Αν ο ξ είναι μόνο από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A, τότε η f είναι συνεχής στον ξ αν και μόνο αν είναι δεξιά συνεχής στον ξ.

Παράδειγμα 4.1.1. Η συνάρτηση x^2 είναι συνεχής στον 3, διότι $\lim_{x\to 3} x^2 = 9 = 3^2$.
Για να αποδείξουμε τη συνέχεια χρησιμοποιήσαμε το όριο της συνάρτησης. Ας δούμε την απόδειξη και με βάση τον ορισμό της συνέχειας.
Θεωρούμε $\epsilon > 0$ και πρέπει να βρούμε κάποιον $\delta > 0$ ώστε για κάθε x με $|x - 3| < \delta$ να ισχύει $|x^2 - 9| < \epsilon$.
Τώρα, το $|x^2 - 9| < \epsilon$ συνεπάγεται από το $|x+3||x-3| < \epsilon$. Δεν είναι δύσκολο να χειριστούμε κατ' ευθείαν αλγεβρικά τις ανισότητες αυτές και να τις "λύσουμε" ως προς τον x, αλλά κάτι τέτοιο είναι και λίγο άβολο, οπότε θα κάνουμε κάτι παρόμοιο με αυτό που κάναμε και στο παράδειγμα 3.2.3. Θα αντικαταστήσουμε το $|x + 3||x - 3|$ με κάτι *μεγαλύτερο και απλούστερο*. Πιο συγκεκριμένα, θα πετύχουμε να ισχύει $|x + 3||x - 3| \leq M|x - 3|$ σε κάποια περιοχή του 3, όπου M θα είναι κάποιος αριθμός ανεξάρτητος του x στην περιοχή αυτή. Για να ισχύει κάτι τέτοιο είναι αρκετό να ισχύει $|x + 3| \leq M$. Αυτό *είναι* εφικτό αφού, αν ο x είναι κοντά στον 3, τότε ο $|x + 3|$ δεν μπορεί να είναι πολύ μεγάλος. Πράγματι, αν πάρουμε οποιονδήποτε $\delta > 0$ ώστε $\delta \leq 1$, τότε για κάθε x με $|x - 3| < \delta$ ισχύει $|x - 3| < 1$ και, επομένως, ισχύει $|x + 3| = |(x - 3) + 6| \leq |x - 3| + 6 < 7$.

Άρα, αν πάρουμε οποιονδήποτε $\delta > 0$ ώστε $\delta \leq 1$, τότε για κάθε x με $|x-3| < \delta$ ισχύει $|x+3||x-3| < 7|x-3|$. Δηλαδή:

$$0 < \delta \leq 1 \ : \qquad |x-3| < \delta \ \Rightarrow \ |x+3||x-3| < 7|x-3|. \tag{4.1}$$

Τώρα βλέπουμε ότι το $7|x-3| < \epsilon$ συνεπάγεται από το $|x-3| < \frac{\epsilon}{7}$. Άρα, αν πάρουμε οποιονδήποτε $\delta > 0$ ώστε $\delta \leq \frac{\epsilon}{7}$, τότε για κάθε x με $|x-3| < \delta$ ισχύει $|x-3| < \frac{\epsilon}{7}$ και, επομένως, $7|x-3| < \epsilon$. Δηλαδή:

$$0 < \delta \leq \tfrac{\epsilon}{7} \ : \qquad |x-3| < \delta \ \Rightarrow \ 7|x-3| < \epsilon. \tag{4.2}$$

Άρα, συνολικά, αν πάρουμε οποιονδήποτε $\delta > 0$ ώστε $\delta \leq 1$ *και* $\delta \leq \frac{\epsilon}{7}$, τότε συνδυάζουμε τις (4.1) και (4.2) ως εξής: για κάθε x με $|x-3| < \delta$ ισχύει $|x+3||x-3| < 7|x-3|$ (διότι $\delta \leq 1$) και $7|x-3| < \epsilon$ (διότι $\delta \leq \frac{\epsilon}{7}$) και, επομένως, ισχύει $|x+3||x-3| < \epsilon$. Δηλαδή:

$$0 < \delta \leq \min\{1, \tfrac{\epsilon}{7}\} \ : \qquad |x-3| < \delta \ \Rightarrow \ \left\{\begin{matrix} |x+3||x-3| < 7|x-3| \\ 7|x-3| < \epsilon \end{matrix}\right\} \ \Rightarrow \ |x+3||x-3| < \epsilon.$$

Παράδειγμα 4.1.2. Η συνάρτηση $\sqrt{-x^2(x+1)}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (-\infty, -1] \cup \{0\}$. Ο 0 είναι μεμονωμένο σημείο του A, οπότε η συνάρτηση είναι συνεχής στον 0.

Παράδειγμα 4.1.3. Ας θεωρήσουμε την συνάρτηση $[x]$.
Έστω $\xi \in \mathbb{Z}$. Η $[x]$ είναι σταθερή $\xi - 1$ στο διάστημα $[\xi-1, \xi)$ αριστερά του ξ, οπότε $\lim_{x\to\xi-}[x] = \lim_{x\to\xi-}(\xi-1) = \xi - 1 \neq [\xi]$. Επίσης, είναι σταθερή ξ στο διάστημα $(\xi, \xi+1)$ δεξιά του ξ, οπότε $\lim_{x\to\xi+}[x] = \lim_{x\to\xi+}\xi = \xi = [\xi]$. Άρα η $[x]$ είναι δεξιά συνεχής αλλά όχι αριστερά συνεχής στον ξ, οπότε δεν είναι συνεχής στον ξ.
Έστω $\xi \notin \mathbb{Z}$. Τότε υπάρχει $n \in \mathbb{Z}$ και, συγκεκριμένα, ο $n = [\xi]$ ώστε $n < \xi < n+1$. Η συνάρτηση είναι σταθερή n στην ένωση $[n, \xi) \cup (\xi, n+1)$, οπότε $\lim_{x\to\xi}[x] = \lim_{x\to\xi} n = n = [\xi]$. Άρα η $[x]$ είναι συνεχής στον ξ.
Άρα η $[x]$ σε κάθε ακέραιο αριθμό δεν είναι συνεχής και σε κάθε άλλο αριθμό είναι συνεχής.

Παράδειγμα 4.1.4. Η σταθερή συνάρτηση c είναι συνεχής σε κάθε $\xi \in \mathbb{R}$, διότι $\lim_{x\to\xi} c = c$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.3. *Η $f : A \to \mathbb{R}$ χαρακτηρίζεται* **συνεχής** *στο A ή, απλώς,* **συνεχής** *αν είναι συνεχής σε κάθε ξ στο πεδίο ορισμού της A.*

Παράδειγμα 4.1.5. Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)$ είναι συνεχής, αφού για κάθε $\xi \in \mathbb{R}$ ισχύει $\lim_{x\to\xi} P(x) = P(\xi)$.

Παράδειγμα 4.1.6. Κάθε ρητή συνάρτηση $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ είναι συνεχής. Πράγματι, για κάθε ξ στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης, δηλαδή για κάθε $\xi \in \mathbb{R}$ ο οποίος δεν είναι ρίζα του πολυωνύμου $Q(x)$, ισχύει $\lim_{x\to\xi} R(x) = R(\xi)$.

Παράδειγμα 4.1.7. Η x^a είναι συνεχής, αφού για κάθε ξ στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης (το οποίο εξαρτάται από τον a) ισχύει $\lim_{x\to\xi} x^a = \xi^a$.

Παράδειγμα 4.1.8. Η a^x είναι συνεχής, αφού για κάθε ξ ισχύει $\lim_{x\to\xi} a^x = a^\xi$.

Παράδειγμα 4.1.9. Η $\log_a x$ είναι συνεχής, αφού για κάθε $\xi > 0$ ισχύει $\lim_{x\to\xi} \log_a x = \log_a \xi$.

Παράδειγμα 4.1.10. Οι συναρτήσεις $\cos x$, $\sin x$ είναι συνεχείς, διότι ισχύει $\lim_{x\to\xi} \cos x = \cos\xi$ και $\lim_{x\to\xi} \sin x = \sin\xi$ για κάθε ξ. Ομοίως, οι συναρτήσεις $\tan x$, $\cot x$ είναι συνεχείς. Για κάθε ξ στο πεδίο ορισμού τους ισχύει $\lim_{x\to\xi} \tan x = \tan\xi$ και $\lim_{x\to\xi} \cot x = \cot\xi$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.4. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $B \subseteq A$. Η f χαρακτηρίζεται* **συνεχής** *στο B αν ο περιορισμός της στο B, δηλαδή η $g : B \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = f(x)$ για $x \in B$, είναι συνεχής στο B.*

Παράδειγμα 4.1.11. Έστω η $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{αν } x < 0 \text{ ή } x > 1 \end{cases}$ με πεδίο ορισμού $\mathbb{R}$.
Η f δεν είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ αφού δεν είναι συνεχής στους 0 και 1. Πράγματι: $\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} 0 = 0 \neq 1 = f(0)$ και $\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} 1 = 1 = f(0)$. Δηλαδή η f είναι δεξιά συνεχής αλλά όχι αριστερά συνεχής στον 0. Ομοίως, η f είναι αριστερά συνεχής αλλά όχι δεξιά συνεχής στον 1.
Θεωρούμε τον περιορισμό της f στο $[0, 1]$, δηλαδή την σταθερή συνάρτηση $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = 1$. Είναι σαφές ότι η g είναι συνεχής στο $[0, 1]$. Άρα η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$.

Εδώ χρειάζεται ένα σχόλιο. Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ μπορεί να μην είναι συνεχής σε κάποιο σημείο $\xi \in A$, αλλά είναι οπωσδήποτε (γιατί;) συνεχής στο μονοσύνολο $\{\xi\}$. Ομολογουμένως, αυτό είναι κάπως περίεργο!

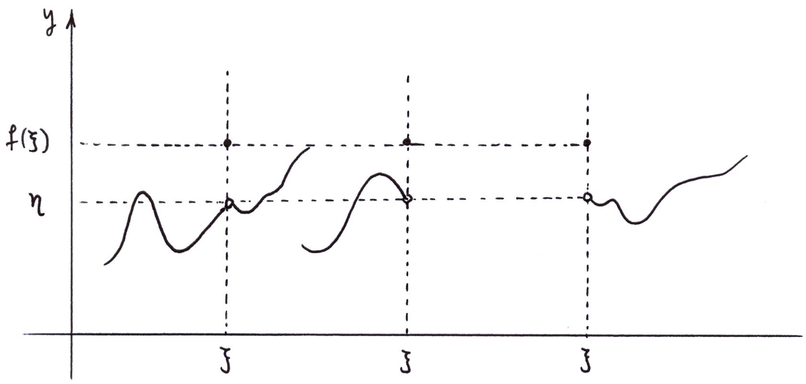
4.1.1 Είδη ασυνεχειών.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.5. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in A$. Αν η f είναι συνεχής στον ξ, λέμε ότι ο ξ είναι* **σημείο συνέχειας** *της f. Αν η f δεν είναι συνεχής στον ξ, λέμε ότι ο ξ είναι* **σημείο ασυνέχειας** *της f ή ότι η f έχει (ή παρουσιάζει)* **ασυνέχεια** *στον ξ.*

Στην περίπτωση που ο ξ είναι *σημείο ασυνέχειας* της f και, επομένως, και *σημείο συσσώρευσης* του A, θα τόν κατατάξουμε σε ακριβώς τρεις κατηγορίες με τρεις αντίστοιχους ορισμούς.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.6. *Έστω ότι υπάρχει το $\eta = \lim_{x\to\xi} f(x)$ και είναι αριθμός αλλά $\eta \neq f(\xi)$. Τότε λέμε ότι ο ξ είναι* **σημείο άρσιμης ασυνέχειας** *της f ή ότι η f παρουσιάζει* **άρσιμη ασυνέχεια** *στον ξ.*

Δείτε το σχήμα 16.



Σχ 16 Άρσιμες ασυνέχειες : $\eta = \lim f(x) \in \mathbb{R}$, $\eta \neq f(\xi)$

Αν ο ξ είναι σημείο άρσιμης ασυνέχειας της f, μπορούμε να αλλάξουμε την τιμή της f στον ξ και μόνο στον ξ έτσι ώστε να δημιουργηθεί μια νέα συνάρτηση συνεχής στον ξ. Πιο συγκεκριμένα, ορίζουμε την $g : A \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{αν } x \in A, x \neq \xi \\ \eta, & \text{αν } x = \xi \end{cases}$$

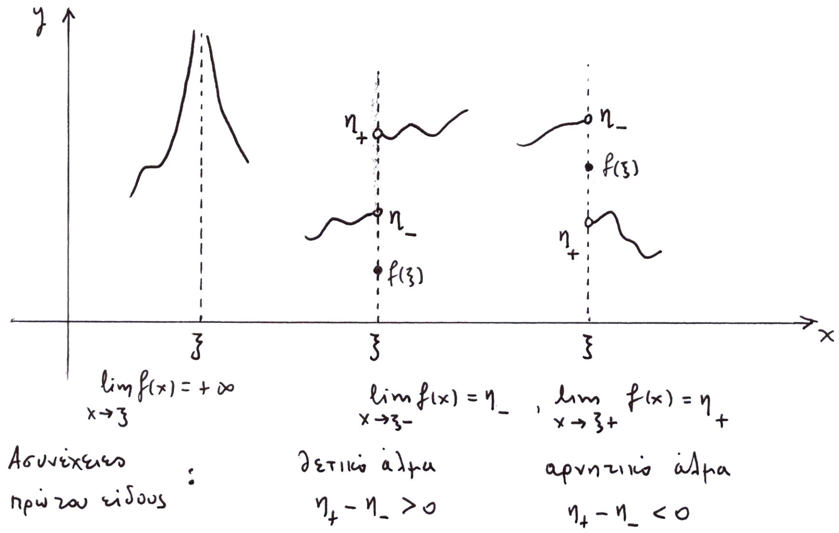
Η g έχει το ίδιο πεδίο ορισμού με την f και διαφέρει από την f μόνο στον ξ. Επειδή $g(x) = f(x)$ για κάθε $x \in A$ με $x \neq \xi$, συνεπάγεται $\lim_{x\to\xi} g(x) = \lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$. Επομένως, επειδή $g(\xi) = \eta$, συνεπάγεται $\lim_{x\to\xi} g(x) = g(\xi)$, οπότε η g είναι συνεχής στον ξ.

Παράδειγμα 4.1.12. Η $f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ παρουσιάζει άρσιμη ασυνέχεια στον 0, διότι το $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}(x+1) = 1$ είναι αριθμός και $f(0) \neq 1$. Η $g(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{αν } x \neq 0 \\ 1, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$

είναι συνεχής στον 0. Παρατηρήστε ότι η g ταυτίζεται με τη συνάρτηση $x+1$ στο $\mathbb{R}$, ενώ η f ταυτίζεται με τη συνάρτηση $x+1$ στο $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.7. *Έστω είτε ότι υπάρχει το $\lim_{x \to \xi} f(x)$ και είναι ίσο με $+\infty$ ή $-\infty$ είτε ότι υπάρχουν τα $\lim_{x \to \xi+} f(x)$ και $\lim_{x \to \xi-} f(x)$ αλλά είναι διαφορετικά. Τότε λέμε ότι ο ξ είναι* **σημείο ασυνέχειας πρώτου είδους** *της f ή ότι η f παρουσιάζει* **ασυνέχεια πρώτου είδους** *στον ξ. Στη δεύτερη υποπερίπτωση το $\lim_{x \to \xi+} f(x) - \lim_{x \to \xi-} f(x)$, που είναι $\neq 0$, ονομάζεται* **άλμα** *της f στον ξ.*

Δείτε το σχήμα 17.



Σχ 17

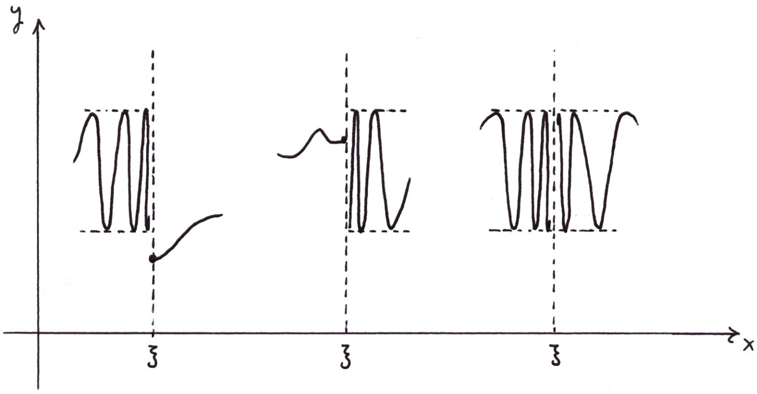
Παράδειγμα 4.1.13. Η $f(x) = \begin{cases} 1/x^2, & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ έχει ασυνέχεια πρώτου είδους στον 0, διότι $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$. Το ίδιο ισχύει για την $f(x) = \begin{cases} 1/\sqrt{x}, & \text{αν } x > 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$

Παράδειγμα 4.1.14. Η $f(x) = \begin{cases} 1/x, & \text{αν } x \neq 0 \\ 1, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ παρουσιάζει ασυνέχεια πρώτου είδους στον 0, διότι $\lim_{x \to 0+} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \to 0-} f(x) = -\infty$, με άλμα στον 0 ίσο με $+\infty - (-\infty) = +\infty$.

Παράδειγμα 4.1.15. Η $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{αν } x \geq 0 \\ x, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$ παρουσιάζει ασυνέχεια πρώτου είδους στον 0, αφού $\lim_{x \to 0+} f(x) = 1$ και $\lim_{x \to 0-} f(x) = 0$. Το άλμα στον 0 είναι ίσο με $1 - 0 = 1$. Η f είναι δεξιά συνεχής αλλά όχι αριστερά συνεχής στον 0.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.8. *Αν ο ξ είναι από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού της f και δεν υπάρχει το $\lim_{x \to \xi+} f(x)$ ή αν ο ξ είναι από αριστερά του σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού της f και δεν υπάρχει το $\lim_{x \to \xi-} f(x)$, τότε λέμε ότι ο ξ είναι* **σημείο ασυνέχειας δεύτερου είδους** *ή* **σημείο ουσιώδους ασυνέχειας** *της f ή ότι η f παρουσιάζει* **ασυνέχεια δεύτερου είδους** *ή* **ουσιώδη ασυνέχεια** *στον ξ.*

Δείτε το σχήμα 18.



Σχ 18 Ασυνέχειες δεύτερου είδους : δεν υπάρχει ένα τουλάχιστον από τα $\lim_{x \to \xi-} f(x)$, $\lim_{x \to \xi+} f(x)$

Παράδειγμα 4.1.16. Η $f(x) = \begin{cases} \sin(1/x), & \text{αν } x > 0 \\ x, & \text{αν } x \leq 0 \end{cases}$ έχει ασυνέχεια δεύτερου είδους στον 0, διότι το $\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} \sin(1/x)$ δεν υπάρχει. Επειδή $\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-} x = 0 = f(0)$, η f είναι αριστερά συνεχής στον 0.

Παράδειγμα 4.1.17. Η $f(x) = \begin{cases} \sin(1/x), & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ έχει ασυνέχεια δεύτερου είδους στον 0, διότι δεν υπάρχει κανένα από τα πλευρικά όρια στον 0.

Παράδειγμα 4.1.18. Η $f(x) = \begin{cases} \sin(1/x), & \text{αν } x > 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ έχει ασυνέχεια δεύτερου είδους στον 0, διότι δεν υπάρχει το δεξιό πλευρικό όριο στον 0.

Δείτε, όμως, και το εξής παράδειγμα.

Παράδειγμα 4.1.19. Η $f(x) = \begin{cases} x\sin(1/x), & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ είναι συνεχής στον 0. Πράγματι, είναι $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x\sin(1/x) = 0 = f(0)$, διότι $\lim_{x \to 0} x = 0$ και η $\sin(1/x)$ είναι φραγμένη.

Αν ο ξ είναι σημείο ασυνέχειας πρώτου ή δεύτερου είδους της f, τότε ο ξ δεν μπορεί να μετατραπεί σε σημείο συνέχειας με απλή αλλαγή της τιμής $f(\xi)$. Αυτό γίνεται μόνο στην περίπτωση που ο ξ είναι σημείο άρσιμης ασυνέχειας.[1]

4.1.2 Ασυνέχειες μονότονων συναρτήσεων.

Για την καλύτερη κατανόηση των παρακάτω θα βοηθούσε ένα προσεκτικό σχέδιο του γραφήματος της f στις διάφορες περιπτώσεις.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.1. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ μονότονη στο A και $\xi \in A$.*

[α] *Έστω ότι ο ξ είναι από αριστερά του και από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A. Τότε ο ξ είναι είτε σημείο συνέχειας είτε σημείο ασυνέχειας πρώτου είδους της f. Στη δεύτερη περίπτωση η f έχει θετικό άλμα στον ξ, αν είναι αύξουσα, και αρνητικό άλμα στον ξ, αν είναι φθίνουσα.*

[β] *Έστω ότι ο ξ είναι μόνο από αριστερά του ή μόνο από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A. Τότε ο ξ είναι είτε σημείο συνέχειας είτε σημείο άρσιμης ασυνέχειας της f.*

[1] Δείτε την άσκηση 4.1.8.

Απόδειξη. [α] Έστω f αύξουσα στο A.
Τότε η f είναι αύξουσα στο $A\cap(-\infty,\xi)$ και άνω φραγμένη στο σύνολο αυτό, αφού ισχύει $f(x)\leq f(\xi)$ για κάθε $x\in A\cap(-\infty,\xi)$. Σύμφωνα με το θεώρημα 3.2, υπάρχει το $\lim_{x\to\xi-}f(x)$ και είναι αριθμός και, μάλιστα,

$$\lim_{x\to\xi-}f(x)\leq f(\xi).$$

Ομοίως, η f είναι αύξουσα και κάτω φραγμένη στο $A\cap(\xi,+\infty)$, αφού ισχύει $f(\xi)\leq f(x)$ για κάθε $x\in A\cap(\xi,+\infty)$. Άρα υπάρχει το $\lim_{x\to\xi+}f(x)$ και είναι αριθμός και

$$f(\xi)\leq\lim_{x\to\xi+}f(x).$$

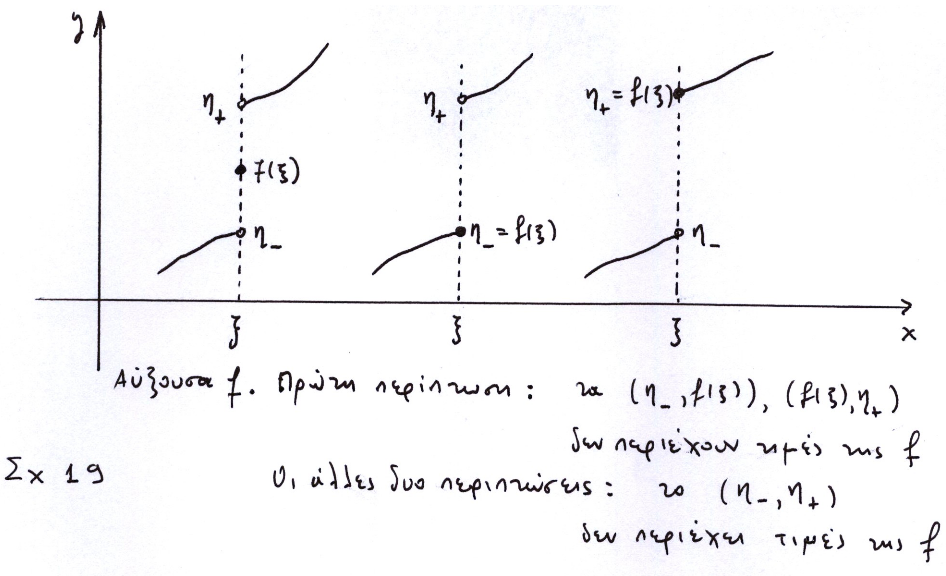
Άρα τα $\lim_{x\to\xi-}f(x)$, $\lim_{x\to\xi+}f(x)$ είναι αριθμοί και

$$\lim_{x\to\xi-}f(x)\leq f(\xi)\leq\lim_{x\to\xi+}f(x).\tag{4.3}$$

Τώρα διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.
Στην πρώτη περίπτωση είναι $\lim_{x\to\xi-}f(x)=\lim_{x\to\xi+}f(x)$, οπότε $\lim_{x\to\xi-}f(x)=f(\xi)=\lim_{x\to\xi+}f(x)$ και, επομένως, η f είναι συνεχής στον ξ.
Στη δεύτερη περίπτωση είναι $\lim_{x\to\xi-}f(x)<\lim_{x\to\xi+}f(x)$, οπότε η f παρουσιάζει ασυνέχεια πρώτου είδους στον ξ με άλμα $\lim_{x\to\xi+}f(x)-\lim_{x\to\xi-}f(x)>0$.
Η απόδειξη είναι ίδια αν η f είναι φθίνουσα στο A : απλώς, τότε όλες οι προηγούμενες ανισότητες αλλάζουν φορά και βρίσκουμε ότι $\lim_{x\to\xi-}f(x)\geq f(\xi)\geq\lim_{x\to\xi+}f(x)$.

[β] Έστω f αύξουσα στο A και ξ μόνο από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A.
Όπως πριν, το $\lim_{x\to\xi+}f(x)$ υπάρχει και είναι αριθμός και $\lim_{x\to\xi+}f(x)\geq f(\xi)$. Επομένως, το $\lim_{x\to\xi}f(x)$ υπάρχει και είναι αριθμός και $\lim_{x\to\xi}f(x)\geq f(\xi)$.
Πάλι έχουμε δύο περιπτώσεις. Στην πρώτη είναι $\lim_{x\to\xi}f(x)=f(\xi)$ και, επομένως, η f είναι συνεχής στον ξ. Στη δεύτερη περίπτωση είναι $\lim_{x\to\xi}f(x)>f(\xi)$, οπότε ο ξ είναι σημείο άρσιμης ασυνέχειας της f.
Η απόδειξη είναι ίδια σε κάθε άλλη περίπτωση. □

Ας μελετήσουμε λίγο παραπάνω την κατάσταση που περιγράφει η πρόταση 4.1, επιμένοντας σε ένα προσεκτικό σχέδιο του γραφήματος της f. Δείτε το σχήμα 19. Αυτά που θα πούμε τώρα θα παίξουν ουσιαστικό ρόλο στην απόδειξη της πρότασης 4.14.[2]



Σχ 19

[2]Δείτε και την άσκηση 4.1.15.

(i) Έστω ότι η $f : A \to \mathbb{R}$ είναι αύξουσα στο A, ο $\xi \in A$ είναι από αριστερά του και από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A και η f *δεν* είναι συνεχής στον ξ, οπότε ο ξ είναι σημείο ασυνέχειας πρώτου είδους. Αν θέσουμε

$$\eta_- = \lim_{x\to\xi-} f(x), \qquad \eta_+ = \lim_{x\to\xi+} f(x),$$

τότε το άλμα της f στον ξ είναι ίσο με $\eta_+ - \eta_- > 0$. Η (4.3) πιο πάνω λέει ότι

$$\eta_- \leq f(\xi) \leq \eta_+.$$

Επίσης, επειδή η f είναι αύξουσα, ισχύει

$$f(x) \leq \eta_- \quad \text{για } x \in A \cap (-\infty, \xi) \qquad \text{και} \qquad \eta_+ \leq f(x) \quad \text{για } x \in A \cap (\xi, +\infty).$$

Άρα η μοναδική τιμή της f η οποία *ενδέχεται* να ανήκει στο ανοικτό διάστημα (η_-, η_+) είναι η $f(\xi)$. Πιο συγκεκριμένα, αν $f(\xi) = \eta_-$ ή $f(\xi) = \eta_+$, τότε το διάστημα (η_-, η_+) δεν περιέχει καμιά τιμή της f και, αν $\eta_- < f(\xi) < \eta_+$, τότε η ένωση $(\eta_-, f(\xi)) \cup (f(\xi), \eta_+)$ δεν περιέχει καμιά τιμή της f.
Με τις ίδιες υποθέσεις αλλά με την f να είναι φθίνουσα αντί αύξουσα, συνεπάγεται $\eta_+ < \eta_-$ και $\eta_+ \leq f(\xi) \leq \eta_-$ και έχουμε όμοια αποτελέσματα: είτε το διάστημα (η_+, η_-) δεν περιέχει καμιά τιμή της f είτε η ένωση $(\eta_+, f(\xi)) \cup (f(\xi), \eta_-)$ δεν περιέχει καμιά τιμή της f.
(ii) Έστω ότι η $f : A \to \mathbb{R}$ είναι αύξουσα στο A, ο $\xi \in A$ είναι μόνο από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A και η f *δεν* είναι συνεχής στον ξ, οπότε ο ξ είναι σημείο άρσιμης ασυνέχειας. Αν θέσουμε $\eta_+ = \lim_{x\to\xi+} f(x)$, αποδείξαμε ότι $f(\xi) < \eta_+$. Επειδή η f είναι αύξουσα, ισχύει $f(x) \leq f(\xi)$ για κάθε $x \in A \cap (-\infty, \xi)$ και $\eta_+ \leq f(x)$ για κάθε $x \in A \cap (\xi, +\infty)$. Άρα το ανοικτό διάστημα $(f(\xi), \eta_+)$ δεν περιέχει καμιά τιμή της f.
Με τις ίδιες υποθέσεις αλλά με την f να είναι φθίνουσα αντί αύξουσα, συνεπάγεται $\eta_+ < f(\xi)$ και το διάστημα $(\eta_+, f(\xi))$ δεν περιέχει καμιά τιμή της f.
Αν η f είναι μονότονη στο A και ο $\xi \in A$ είναι μόνο από αριστερά του σημείο συσσώρευσης του A, τότε, αν θέσουμε $\eta_- = \lim_{x\to\xi-} f(x)$, συμπεραίνουμε ότι, αν η f είναι αύξουσα, το διάστημα $(\eta_-, f(\xi)$ δεν περιέχει καμιά τιμή της f και, αν η f είναι φθίνουσα, το διάστημα $(f(\xi), \eta_-)$ δεν περιέχει καμιά τιμή της f.
Τελικό συμπέρασμα:
Έστω ότι η $f : A \to \mathbb{R}$ είναι μονότονη στο A, ο $\xi \in A$ είναι τουλάχιστον από αριστερά του ή από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A και η f δεν είναι συνεχής στον ξ. Τότε ανάμεσα στις τιμές της f παρεμβάλεται τουλάχιστον ένα ανοικτό διάστημα - του οποίου ένα από τα άκρα είναι ο $f(\xi)$ - το οποίο δεν περιέχει καμιά τιμή της.

Ασκήσεις.

4.1.1. Αποδείξτε βάσει του ορισμού ότι οι x, $2x-3$, x^2, $\frac{1}{x}$, $\sqrt{x}$, $\frac{x^2+1}{x+1}$ είναι συνεχείς στον 1.

4.1.2. Έστω οι $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x \neq 0 \\ 1, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & \text{αν } x < 0 \\ x+1, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$ $f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } x \leq 0 \\ 1/x, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$ $f(x) = \begin{cases} (\sin x)/x, & \text{αν } x \neq 0 \\ 1, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ $f(x) = \begin{cases} (1-\cos x)/x^2, & \text{αν } x \neq 0 \\ 1, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ Ποιές από αυτές είναι συνεχείς ή δεξιά συνεχείς ή αριστερά συνεχείς στον 0;

4.1.3. Θεωρήστε τις συναρτήσεις $[x]$, $x-[x]$, $x-[x]-\frac{1}{2}$, $\left|x-[x]-\frac{1}{2}\right|$, $[x]+\sqrt{x-[x]}$. Σε ποιά σημεία είναι συνεχείς ή δεξιά συνεχείς ή αριστερά συνεχείς; Σχεδιάστε τα γραφήματά τους.

4.1.4. Έστω οι $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x \neq 0 \\ 1, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ $f(x) = \begin{cases} 1/|x|, & \text{αν } x \neq 0 \\ -1, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ $f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } x \leq 0 \\ 1/x, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$ $f(x) = \begin{cases} \sin(1/x), & \text{αν } x > 0 \\ 1, & \text{αν } x \leq 0 \end{cases}$ $f(x) = \begin{cases} (\tan x)/x, & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ Χαρακτηρίστε το είδος ασυνέχειας που παρουσιάζουν στον 0. Σε περίπτωση άρσιμης ασυνέχειας αλλάξτε την τιμή της f στον 0 ώστε να γίνει συνεχής στον 0. Σε περίπτωση άλματος βρείτε το.

4.1.5. Σε ποιά σημεία είναι συνεχής η συνάρτηση $f(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x - n^{-x}}{n^x + n^{-x}}$; Σχεδιάστε το γράφημά της.

4.1.6. Έστω $f : (\xi - \delta, \xi + \delta) \to \mathbb{R}$.
[α] Αποδείξτε ότι, αν η f είναι συνεχής στον ξ, τότε $\lim_{h\to 0}(f(\xi + h) - f(\xi - h)) = 0$.
Από την $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ και τον $\xi = 0$ τί συμπεραίνετε για την ισχύ του αντιστρόφου;
[β] Αποδείξτε ότι, αν η f είναι συνεχής στον ξ, τότε $\lim_{h\to 0}(f(\xi + h) + f(\xi - h) - 2f(\xi)) = 0$.
Με κατάλληλη παραλλαγή του παραδείγματος στο [α] βγάλτε ανάλογο συμπέρασμα για την ισχύ του αντιστρόφου.

4.1.7. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $\xi \in A$ και $\delta > 0$, $M \geq 0$ ώστε να ισχύει $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in A$ με $|x - \xi| < \delta$. Θεωρούμε την $g : A \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = (x - \xi)f(x)$. Αποδείξτε ότι η g είναι συνεχής στον ξ.

4.1.8. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A και έστω ότι ο ξ είναι σημείο ασυνέχειας της f. Αν υπάρχει $\eta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση με τύπο $g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{αν } x \in A, x \neq \xi \\ \eta, & \text{αν } x = \xi \end{cases}$ να είναι συνεχής στον ξ, αποδείξτε ότι ο ξ είναι σημείο άρσιμης ασυνέχειας της f.

4.1.9. Αποδείξτε ότι η $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{αν } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \end{cases}$ είναι ασυνεχής σε κάθε $x \in \mathbb{Z}$ και συνεχής σε κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.
Αποδείξτε ότι η $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{αν } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ είναι ασυνεχής σε κάθε x.
Αποδείξτε ότι η $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \\ x, & \text{αν } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ είναι συνεχής στον 0 και ασυνεχής σε κάθε $x \neq 0$.
Αποδείξτε ότι η $f(x) = \begin{cases} 1/n, & \text{αν } x = m/n \text{ για κάποιους } m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \text{ με } \gcd(m, n) = 1 \\ 0, & \text{αν } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ είναι ασυνεχής σε κάθε $x \in \mathbb{Q}$ και συνεχής σε κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
Χαρακτηρίστε το είδος ασυνέχειας σε κάθε σημείο ασυνέχειας των συναρτήσεων αυτών.

4.1.10. Έστω $A \subseteq B$, $\xi \in A$, $g : B \to \mathbb{R}$ και έστω ότι η $f : A \to \mathbb{R}$ είναι ο περιορισμός της g στο A. Αποδείξτε ότι, αν η g είναι συνεχής στον ξ, τότε και η f είναι συνεχής στον ξ.

4.1.11. [3] Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x(-1)^{[1/x]}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στον 0 και ασυνεχής σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στον 0. Σχεδιάστε το γράφημα αυτής της συνάρτησης.
Ακόμη χειρότερα: η τρίτη συνάρτηση της άσκησης 4.1.9 είναι συνεχής μόνο στον 0 και ασυνεχής σε κάθε $x \neq 0$. Το γράφημα αυτής της συνάρτησης είναι αδύνατο να σχεδιαστεί!

[3] Συνήθως, λέμε ότι το να είναι μια συνάρτηση f συνεχής στον ξ σημαίνει ότι το γράφημά της *"δεν διακόπτεται"* ή *"είναι συνεχές" στο σημείο* $(\xi, f(\xi))$. Όπως φαίνεται σ' αυτήν την άσκηση, αυτή η διατύπωση είναι ασαφής.

4.1.12. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $\xi \in A$ και $\delta > 0$, $M \geq 0$, $\rho > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x) - f(\xi)| \leq M|x-\xi|^\rho$ για κάθε $x \in A$ με $|x - \xi| < \delta$. Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στον ξ.[4]

Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις x, $|x|$, x^2, $\sqrt{|x|}$, $x\sqrt{|x|}$ έχουν την παραπάνω ιδιότητα με $\xi = 0$ και βρείτε τους αντίστοιχους *μέγιστους* εκθέτες ρ. Αποδείξτε ότι οι ίδιες συναρτήσεις έχουν την παραπάνω ιδιότητα με οποιονδήποτε $\xi \neq 0$ και βρείτε τους αντίστοιχους *μέγιστους* εκθέτες ρ. Παρατηρήστε ότι για τις τρεις τελευταίες συναρτήσεις είναι άλλος ο μέγιστος εκθέτης ρ για τον $\xi = 0$ και άλλος για τον οποιονδήποτε $\xi \neq 0$.[5]

4.1.13. Έστω, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ένα πεπερασμένο σύνολο A_n ώστε $A_m \cap A_n = \emptyset$ για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$ με $m \neq n$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 1/n, & \text{αν } x \in A_n \text{ για κάποιον } n \\ 0, & \text{αν } x \notin A_n \text{ για κάθε } n \end{cases}$ Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής σε κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ και ασυνεχής σε κάθε $x \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$.

4.1.14. Έστω μη-κενό σύνολο B. Ορίζουμε $f(x) = \inf\{|x - b| \,|\, b \in B\}$ για κάθε x.[6]

Σχεδιάστε το γράφημα της f στις περιπτώσεις που το B είναι ένα από τα σύνολα $\{a\}$, $[a, b]$, $(a, +\infty)$, $[a, b] \cup [c, d]$, $[a, b] \cup [c, d] \cup [p, q]$ (όπου $a < b < c < d < p < q$), $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$.

Αποδείξτε ότι, γενικά, ισχύει $|f(x') - f(x'')| \leq |x' - x''|$ για κάθε x', x'' και, επομένως, ότι η f είναι συνεχής.

4.1.15. [7] Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ μονότονη στο I.

Αν το σύνολο τιμών της f είναι διάστημα J, αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο I.

Αν, επιπλέον, η $f : I \to J$ είναι γνησίως μονότονη στο I, αποδείξτε ότι και η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : J \to I$ είναι συνεχής στο J.

4.1.16. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in A$.

Έστω ότι η f είναι φραγμένη κοντά στον ξ, δηλαδή υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε η f να είναι φραγμένη στο $A \cap N_\xi(\delta_0)$. Αποδείξτε ότι $0 \leq \sup\{f(x') - f(x'') \,|\, x', x'' \in A \cap N_\xi(\delta)\} < +\infty$ για κάθε $\delta \in (0, \delta_0]$. Ορίζουμε συνάρτηση $\omega : (0, \delta_0] \to \mathbb{R}_0^+$ με τύπο $\omega(\delta) = \sup\{f(x') - f(x'') \,|\, x', x'' \in A \cap N_\xi(\delta)\}$ για κάθε $\delta \in (0, \delta_0]$. Αποδείξτε ότι η ω είναι αύξουσα στο $(0, \delta_0]$, οπότε υπάρχει το $\lim_{\delta \to 0} \omega(\delta)$ και είναι αριθμός ≥ 0. Ορίζουμε $\omega(f; \xi) = \lim_{\delta \to 0} \omega(\delta)$.

Έστω ότι δεν ισχύει ότι η f είναι φραγμένη κοντά στον ξ. Αποδείξτε ότι για κάθε $\delta > 0$ είναι $\sup\{f(x') - f(x'') \,|\, x', x'' \in A \cap N_\xi(\delta)\} = +\infty$. Τότε ορίζουμε $\omega(f; \xi) = +\infty$.[8]

Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στον ξ αν και μόνο αν $\omega(f; \xi) = 0$.

4.1.17. Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ αύξουσα στο I.

Αν $a, b \in I$ και $a < x_1 < \cdots < x_n < b$ και $j_k = \lim_{x \to x_k+} f(x) - \lim_{x \to x_k-} f(x)$ είναι το άλμα της f στον x_k για $k = 1, \ldots, n$, αποδείξτε ότι $j_1 + \cdots + j_n \leq \lim_{x \to b-} f(x) - \lim_{x \to a+} f(x)$.

Αν $a, b \in I$ και $k \in \mathbb{N}$, αποδείξτε ότι το πλήθος των σημείων $x \in (a, b)$, σε καθένα από τα οποία το άλμα της f είναι $\geq \frac{1}{k}$, είναι $\leq k(\lim_{x \to b-} f(x) - \lim_{x \to a+} f(x))$.

Θεωρήστε ακολουθίες (a_m), (b_m) στο I ώστε η (a_m) να είναι γνησίως φθίνουσα με όριο το αριστερό άκρο του I, η (b_m) να είναι γνησίως αύξουσα με όριο το δεξιό άκρο του I και ώστε $a_1 < b_1$. Αριθμήστε τα σημεία του (a_1, b_1) στα οποία το άλμα της f είναι ≥ 1. Κατόπιν αριθμήστε τα σημεία του (a_2, b_2) στα οποία το άλμα της f είναι $\geq \frac{1}{2}$, παραλείποντας τα σημεία που έχετε ήδη

---

[4] Αν η f ικανοποιεί τις παραπάνω υποθέσεις, τότε χαρακτηρίζεται **Hölder-συνεχής** στον ξ με Hölder-εκθέτη ρ. Στην ειδική περίπτωση $\rho = 1$, η f χαρακτηρίζεται **Lipschitz-συνεχής** στον ξ. Για παραλλαγές αυτών των εννοιών δείτε την άσκηση 4.6.3.

[5] Δείτε και την άσκηση 5.6.7.

[6] Ο αριθμός $\inf\{|x - b| \,|\, b \in B\}$ συνήθως συμβολίζεται $\mathrm{dist}(x, B)$ και ονομάζεται **απόσταση** του x από το B.

[7] Μια σημαντική περίπτωση, όπου η συνέχεια μιας συνάρτησης προκύπτει από τη μονοτονία της. Και ένα σημαντικό αποτέλεσμα για τη συνέχεια της αντίστροφης συνάρτησης. Θα το ξαναδούμε στην απόδειξη της πρότασης 4.14 αλλά και σε άλλες ασκήσεις.

[8] Και στις δύο περιπτώσεις, το $\omega(f; \xi)$ ονομάζεται **ταλάντωση** της f στον ξ. Μια παραλλαγή της έννοιας της ταλάντωσης σε σημείο είναι στην άσκηση 3.6.2. Η έννοια της ταλάντωσης σε *διάστημα* είναι στην άσκηση 6.1.3.

αριθμήσει. Κατόπιν αριθμήστε τα σημεία του (a_3, b_3) στα οποία το άλμα της f είναι $\geq \frac{1}{3}$, παραλείποντας τα σημεία που έχετε ήδη αριθμήσει. Συνεχίζοντας επ' άπειρον, αποδείξτε ότι το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της f τα οποία είναι εσωτερικά σημεία του I είναι αριθμήσιμο. Άρα το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της f στο I είναι αριθμήσιμο.

Τί γίνεται αν η $f : I \to \mathbb{R}$ είναι φθίνουσα στο I;

Συζητήστε τη συνάρτηση $[x]$ στο $\mathbb{R}$ και την $[\frac{1}{x}]$ στο διάστημα $(0, +\infty)$ σε σχέση με τα προηγούμενα αποτελέσματα.[9]

4.1.18. [10] Έστω $\xi \in A$, $f : A \to \mathbb{R}$.

Η f χαρακτηρίζεται **άνω ημισυνεχής** στον ξ αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $f(x) < f(\xi) + \epsilon$ για κάθε $x \in A$ με $|x - \xi| < \delta$.

Αποδείξτε ότι, αν ο ξ είναι μεμονωμένο σημείο του A, τότε η f είναι, αυτομάτως, άνω ημισυνεχής στον ξ και, αν ο ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A, τότε η f είναι άνω ημισυνεχής στον ξ αν και μόνο αν $\overline{\lim}_{x\to\xi} f(x) \leq f(\xi)$.

Η f χαρακτηρίζεται **κάτω ημισυνεχής** στον ξ αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $f(x) > f(\xi) - \epsilon$ για κάθε $x \in A$ με $|x - \xi| < \delta$.

Αποδείξτε ότι, αν ο ξ είναι μεμονωμένο σημείο του A, τότε η f είναι, αυτομάτως, κάτω ημισυνεχής στον ξ και, αν ο ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A, τότε η f είναι κάτω ημισυνεχής στον ξ αν και μόνο αν $\underline{\lim}_{x\to\xi} f(x) \geq f(\xi)$.

Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \leq 0 \\ 1, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$ είναι κάτω ημισυνεχής στον 0, ενώ η $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x < 0 \\ 1, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$ είναι άνω ημισυνεχής στον 0.

Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στον ξ αν και μόνο αν είναι κάτω ημισυνεχής και άνω ημισυνεχής στον ξ.

4.2 Ιδιότητες συνεχών συναρτήσεων.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.2. *Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A. Έστω $f(\xi) = g(\xi)$ και έστω ότι οι f, g ταυτίζονται κοντά στον ξ. Αν η μία από τις f, g είναι συνεχής στον ξ, το ίδιο ισχύει και για την άλλη.*

Απόδειξη. Έστω ότι η f είναι συνεχής στον ξ.
Τότε $\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$ και, επειδή οι f, g ταυτίζονται κοντά στον ξ, ισχύει $\lim_{x\to\xi} g(x) = \lim_{x\to\xi} f(x)$, οπότε $\lim_{x\to\xi} g(x) = f(\xi) = g(\xi)$.
Άρα η g είναι συνεχής στον ξ. □

Παράδειγμα 4.2.1. Οι συναρτήσεις $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{αν } x < 1 \\ x^2, & \text{αν } 1 \leq x < 4 \end{cases}$ και x^2 ταυτίζονται στο διάστημα $[1, 4)$. Η x^2 είναι συνεχής στον 2, οπότε και η $f(x)$ είναι συνεχής στον 2. Το ίδιο ισχύει και για κάθε άλλον ξ στο ανοικτό διάστημα $(1, 4)$. Επίσης, η $f(x)$ και η συνάρτηση $x + 1$ ταυτίζονται στο $(-\infty, 1)$. Η $x + 1$ είναι συνεχής σε κάθε ξ στο $(-\infty, 1)$, οπότε και η $f(x)$ είναι συνεχής σε κάθε τέτοιον ξ. Τα επιχειρήματα αυτά, τα οποία βασίζονται στην πρόταση 4.2, δεν ισχύουν για τον $\xi = 1$. Και, πράγματι, η $f(x)$ δεν είναι συνεχής στον $\xi = 1$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.3. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A και έστω ότι η f είναι συνεχής στον ξ.*

[9] Στις ασκήσεις 10.1.23 και 10.1.24 υπάρχουν παραδείγματα συναρτήσεων οι οποίες είναι αύξουσες και έχουν σύνολο σημείων ασυνέχειας το $\mathbb{Q}$ ή και οποιοδήποτε άπειρο αριθμήσιμο σύνολο.

[10] Δείτε την άσκηση 3.5.5.

[α] *Αν* $f(\xi) > u$, *τότε ισχύει* $f(x) > u$ *κοντά στον* ξ.
[β] *Αν* $f(\xi) < l$, *τότε ισχύει* $f(x) < l$ *κοντά στον* ξ.
[γ] *Αν* $u < f(\xi) < l$, *τότε ισχύει* $u < f(x) < l$ *κοντά στον* ξ.

Απόδειξη. Από την πρόταση 3.4 και από το $\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$. □

Παράδειγμα 4.2.2. Η συνάρτηση $\frac{x^8+x^3+1}{x^5+3x^4-x^2+1}$ είναι συνεχής στον 1 και $\frac{1^8+1^3+1}{1^5+3\cdot 1^4-1^2+1} = \frac{3}{4} = 0.75$. Άρα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $0.7499999 < \frac{x^8+x^3+1}{x^5+3x^4-x^2+1} < 0.7500001$ για κάθε $x \in (1-\delta, 1+\delta)$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.4. *Έστω* $f : A \to \mathbb{R}$ *και* $\xi \in A$ *σημείο συσσώρευσης του* A. *Αν η* f *είναι συνεχής στον* ξ, *τότε είναι φραγμένη κοντά στον* ξ.

Απόδειξη. Από την πρόταση 3.6 και από το $\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$. □

Παράδειγμα 4.2.3. Η συνάρτηση $\frac{1}{x(x-1)}$ είναι συνεχής στον $\frac{1}{2}$, οπότε είναι φραγμένη κοντά στον $\frac{1}{2}$. Δηλαδή, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε η $\frac{1}{x(x-1)}$ να είναι φραγμένη στο διάστημα $(\frac{1}{2}-\delta, \frac{1}{2}+\delta)$. Επειδή η συνάρτηση δεν είναι φραγμένη στο διάστημα $(0,1)$, πρέπει να είναι $\delta < \frac{1}{2}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.5. *Έστω* $f : A \to \mathbb{R}$ *και* $\xi \in A$ *σημείο συσσώρευσης του* A.
[α] *Αν η* f *είναι συνεχής στον* ξ *και ισχύει* $f(x) \geq l$ *σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στον* ξ, *τότε* $f(\xi) \geq l$.
[β] *Αν η* f *είναι συνεχής στον* ξ *και ισχύει* $f(x) \leq u$ *σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στον* ξ, *τότε* $f(\xi) \leq u$.
[γ] *Αν* $u < l$ *και ισχύει* $f(x) \geq l$ *σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στον* ξ *και* $f(x) \leq u$ *σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στον* ξ, *τότε η* f *είναι ασυνεχής στον* ξ.

Απόδειξη. Από την πρόταση 3.7 και από το $\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.6. *Έστω* $f, g : A \to \mathbb{R}$ *και* $\xi \in A$ *σημείο συσσώρευσης του* A. *Αν οι* f, g *είναι συνεχείς στον* ξ *και ισχύει* $f(x) \leq g(x)$ *σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στον* ξ, *τότε* $f(\xi) \leq g(\xi)$.

Απόδειξη. Από την πρόταση 3.8 και από τα $\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$ και $\lim_{x\to\xi} g(x) = g(\xi)$. □

Παράδειγμα 4.2.4. Έστω $f : [0,1) \to \mathbb{R}$ συνεχής στον 0 και έστω ότι ισχύει $f(x) \leq x^3$ για κάθε $x \in (0,1)$. Τότε $f(0) \leq 0^3 = 0$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.7. *Έστω* $f, g, h : A \to \mathbb{R}$ *και* $\xi \in A$ *σημείο συσσώρευσης του* A. *Αν οι* f, h *είναι συνεχείς στον* ξ, *αν ισχύει* $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ *σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στον* ξ *και αν* $f(\xi) = g(\xi) = h(\xi)$, *τότε και η* g *είναι συνεχής στον* ξ.

Απόδειξη. Από την πρόταση 3.10 και από τα $\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$, $\lim_{x\to\xi} h(x) = h(\xi)$. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.8. *Έστω* $f, g : A \to \mathbb{R}$, $\xi \in A$, *αριθμός* λ *και έστω ότι οι* f, g *είναι συνεχείς στον* ξ. *Τότε και οι* $f+g, f-g, fg, \lambda f, |f| : A \to \mathbb{R}$ *είναι συνεχείς στον* ξ. *Αν, επιπλέον, ισχύει* $g(x) \neq 0$ *για κάθε* $x \in A$, *τότε και η* $f/g : A \to \mathbb{R}$ *είναι συνεχής στον* ξ.

Απόδειξη. Αν ο ξ δεν είναι σημείο συσσώρευσης του A, τότε όλες οι συναρτήσεις είναι, αυτομάτως, συνεχείς στον ξ. Αν ο ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A, τότε το αποτέλεσμα προκύπτει από την πρόταση 3.11 και από τα $\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$ και $\lim_{x\to\xi} g(x) = g(\xi)$. □

Παράδειγμα 4.2.5. Οι συναρτήσεις $\frac{\sqrt{x}+e^x}{(x-2x^2)\log x}$ και $\frac{x^2+\sqrt{x}}{\sin x+\cos x}$ είναι συνεχείς.

Ας πούμε κάτι ακόμη για την περίπτωση της συνάρτησης f/g. Έστω πάλι $f, g : A \to \mathbb{R}$, $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A και έστω ότι οι f, g είναι συνεχείς στον ξ. Τώρα δεν θα υποθέσουμε ότι ισχύει $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$, οπότε μπορεί να μην ορίζεται η f/g σε ολόκληρο το A. Θα υποθέσουμε, όμως, μόνο ότι $g(\xi) \neq 0$. Τότε από την πρόταση 4.3 συνεπάγεται ότι ισχύει $g(x) \neq 0$ κοντά στον ξ. Δηλαδή, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A \cap (\xi - \delta, \xi + \delta)$. Μάλιστα, η g έχει κοντά στον ξ το ίδιο πρόσημο που έχει και η τιμή $g(\xi)$. Συμπεραίνουμε, επομένως, ότι ορίζεται η $f/g : A \cap (\xi - \delta, \xi + \delta) \to \mathbb{R}$ και είναι συνεχής στον ξ.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.9. *Έστω $f : A \to B$, $g : B \to \mathbb{R}$ και $\xi \in A$. Αν η f είναι συνεχής στον ξ και η g είναι συνεχής στον $\eta = f(\xi)$, τότε η $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στον ξ.*

Απόδειξη. Έστω ότι η f είναι συνεχής στον ξ και η g είναι συνεχής στον $\eta = f(\xi)$.
Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $\delta' > 0$ ώστε να ισχύει

$$|g(y) - g(\eta)| < \epsilon \qquad \text{για κάθε } \ y \in B \ \text{ με } \ |y - \eta| < \delta'. \tag{4.4}$$

Επίσης, για τον ίδιο δ' υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει

$$|f(x) - \eta| = |f(x) - f(\xi)| < \delta' \qquad \text{για κάθε } \ x \in A \ \text{ με } \ |x - \xi| < \delta. \tag{4.5}$$

Από την (4.5) και την (4.4) με $y = f(x)$ (και επειδή $f(x) \in B$) συνεπάγεται ότι για κάθε $x \in A$ με $|x - \xi| < \delta$ ισχύει $|g(f(x)) - g(\eta)| < \epsilon$ και, επομένως, $|(g \circ f)(x) - (g \circ f)(\xi)| < \epsilon$.
Άρα η $g \circ f$ είναι συνεχής στον ξ. □

Παράδειγμα 4.2.6. Οι συναρτήσεις $e^{\sqrt{x}}$, $\sqrt{\log x}$, $\sin\sqrt{x}$ και $\sqrt{\sin x}$ είναι συνεχείς.

Ένα θέμα παρεμφερές με την πρόταση 4.9 αλλά και - ίσως πιο πολύ - με την πρόταση 3.13 είναι ο υπολογισμός του ορίου της σύνθεσης $g \circ f$ στην περίπτωση που το $\eta = \lim_{x\to\xi} f(x)$ είναι *αριθμός* και η g είναι *συνεχής* στον η.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.10. *Έστω $f : A \to B$, $g : B \to \mathbb{R}$, ξ σημείο συσσώρευσης του A. Αν $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta \in B$ και η g είναι συνεχής στον η, τότε $\lim_{x\to\xi}(g \circ f)(x) = g(\eta)$.*

Απόδειξη. Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta \in B$ και ότι η g είναι συνεχής στον η.
Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $\delta' > 0$ ώστε να ισχύει

$$|g(y) - g(\eta)| < \epsilon \qquad \text{για κάθε } \ y \in B \ \text{ με } \ |y - \eta| < \delta'. \tag{4.6}$$

Επίσης, για τον ίδιο δ', υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει

$$|f(x) - \eta| < \delta' \qquad \text{για κάθε } \ x \in A \ \text{ με } \ 0 < |x - \xi| < \delta. \tag{4.7}$$

Τώρα, από την (4.7) και την (4.6) με $y = f(x)$ (και επειδή $f(x) \in B$) συνεπάγεται ότι για κάθε $x \in A$ με $0 < |x - \xi| < \delta$ ισχύει $\big|g\big(f(x)\big) - g(\eta)\big| < \epsilon$ και, επομένως, $|(g \circ f)(x) - g(\eta)| < \epsilon$.
Άρα $\lim_{x\to\xi}(g \circ f)(x) = g(\eta)$. □

Όταν εφαρμόζουμε τον κανόνα σύνθεσης, χρησιμοποιούμε την έκφραση "κάνουμε αλλαγή μεταβλητής από x σε $y = f(x)$" και γράφουμε

$$\lim_{x\to\xi} g\big(f(x)\big) = \lim_{y\to\eta} g(y) = g(\eta).$$

Τώρα, παρατηρούμε ότι τα όρια $\lim_{x\to\xi} g\big(f(x)\big) = g(\eta)$ και $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$ συνδυάζονται στη μορφή

$$\lim_{x\to\xi} g\big(f(x)\big) = g\big(\lim_{x\to\xi} f(x)\big).$$

Όπως είδαμε, αυτή η "εναλλαγή" των συμβόλων $\lim_{x\to\xi}$ και g ισχύει με την προϋπόθεση ότι η g είναι συνεχής στον η, δηλαδή στο όριο της f.

Παράδειγμα 4.2.7. Θα υπολογίσουμε το $\lim_{x\to 0}\frac{(x^7+1)^4}{(x^7+1)^8+(x^7+1)^{12}+5}$.
Είναι $\lim_{x\to 0}(x^7+1)=1$ και η συνάρτηση $\frac{y^4}{y^8+y^{12}+5}$ είναι συνεχής στον 1. Άρα, με αλλαγή μεταβλητής από x σε $y=x^7+1$, βρίσκουμε $\lim_{x\to 0}\frac{(x^7+1)^4}{(x^7+1)^8+(x^7+1)^{12}+5}=\frac{1^4}{1^8+1^{12}+5}=\frac{1}{7}$.

Παράδειγμα 4.2.8. Θα υπολογίσουμε το $\lim_{x\to+\infty}\frac{(\frac{x-1}{x^2+x+1})^5+4(\frac{x-1}{x^2+x+1})^3+1}{3(\frac{x-1}{x^2+x+1})^4+2(\frac{x-1}{x^2+x+1})^2+1}$.
Είναι $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x^2+x+1}=0$ και η $\frac{y^5+4y^3+1}{3y^4+2y^2+1}$ είναι συνεχής στον 0. Άρα, με αλλαγή μεταβλητής από x σε $y=\frac{x-1}{x^2+x+1}$, έχουμε $\lim_{x\to+\infty}\frac{(\frac{x-1}{x^2+x+1})^5+4(\frac{x-1}{x^2+x+1})^3+1}{3(\frac{x-1}{x^2+x+1})^4+2(\frac{x-1}{x^2+x+1})^2+1}=\frac{0^5+4\cdot 0^3+1}{3\cdot 0^4+2\cdot 0^2+1}=1$.

Παράδειγμα 4.2.9. Θα υπολογίσουμε το $\lim_{x\to+\infty}\big((\frac{\sin x}{x})^3+\frac{\sin x}{x}\big)$.
Είναι $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=0$ και η συνάρτηση y^3+y είναι συνεχής στον 0. Άρα, κάνοντας αλλαγή μεταβλητής από x σε $y=\frac{\sin x}{x}$, βρίσκουμε $\lim_{x\to+\infty}\big((\frac{\sin x}{x})^3+\frac{\sin x}{x}\big)=0^3+0=0$.

Ας δούμε κάποιες διαφορές ανάμεσα στις προτάσεις 3.13 και 4.10.
(i) Στην πρόταση 3.13 το όριο της f δεν χρειάζεται να είναι αριθμός ενώ στην πρόταση 4.10 το όριο της f πρέπει να είναι αριθμός. Άρα η πρόταση 4.10 δεν εφαρμόζεται στο παράδειγμα 3.3.32.
(ii) Αν $\lim_{x\to\xi}f(x)=\eta$, μία από τις υποθέσεις της πρότασης 3.13 είναι ότι ισχύει $f(x)\neq\eta$ κοντά στο ξ. Στην πρόταση 4.10 υπάρχει η υπόθεση ότι η g είναι συνεχής στον η. Άρα η πρόταση 4.10 δεν εφαρμόζεται στο παράδειγμα 3.3.33, διότι η συνάρτηση $y^{-2}+y^{-4}$ δεν είναι συνεχής στον 0, και η πρόταση 3.13 δεν εφαρμόζεται στο παράδειγμα 4.2.9, διότι δεν υπάρχει κανένας N ώστε να ισχύει $\frac{\sin x}{x}\neq 0$ για κάθε $x>N$. Τέλος, καμιά από τις δύο προτάσεις δεν εφαρμόζεται στο παράδειγμα 3.3.34, διότι η g δεν είναι συνεχής στον 0 και διότι, και πάλι, δεν υπάρχει κανένας N ώστε να ισχύει $\frac{\sin x}{x}\neq 0$ για κάθε $x>N$.
Το πλεονέκτημα της πρότασης 4.10 σε σχέση με την πρόταση 3.13 είναι ότι, με την προϋπόθεση ότι η g είναι συνεχής στο η, *δεν χρειάζεται να ισχύει $f(x)\neq\eta$ κοντά στο ξ*.

Παράδειγμα 4.2.10. Τώρα είναι ευκαιρία να συμπληρώσουμε το παράδειγμα 3.3.39, αποδεικνύοντας, για κάθε t, ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\big(1+\tfrac{t}{x}\big)^x=e^t.$$

Το παράδειγμα 3.3.39 είναι η περίπτωση $t=1$ του ορίου αυτού. Πάμε στην περίπτωση $t=-1$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}(1-\tfrac{1}{x})^x&=\lim_{x\to+\infty}(\tfrac{x-1}{x})^x=\lim_{y\to+\infty}(\tfrac{y}{y+1})^{y+1}\\&=\lim_{y\to+\infty}(\tfrac{y}{y+1})/(1+\tfrac{1}{y})^y=\tfrac{1}{e}=e^{-1}.\end{aligned}$$

Οι περιπτώσεις $t>0$ και $t<0$ ανάγονται στις $t=1$ και $t=-1$, αντιστοίχως, ως εξής. Αν $t>0$, τότε

$$\lim_{x\to+\infty}(1+\tfrac{t}{x})^x=\lim_{y\to+\infty}(1+\tfrac{1}{y})^{ty}=\lim_{y\to+\infty}\big((1+\tfrac{1}{y})^y\big)^t=\lim_{z\to e}z^t=e^t$$

και, αν $t<0$,

$$\lim_{x\to+\infty}(1+\tfrac{t}{x})^x=\lim_{y\to+\infty}(1-\tfrac{1}{y})^{-ty}=\lim_{y\to+\infty}\big((1-\tfrac{1}{y})^y\big)^{-t}=\lim_{z\to e^{-1}}z^{-t}=e^t.$$

Η περίπτωση $t=0$ είναι, φυσικά, τετριμμένη.

Απόδειξη της πρότασης 3.14. Ορίζουμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)^{g(x)}$ και έστω $f(x)\to\eta$ και $g(x)\to\zeta$.
Υποθέτουμε ότι $0<\eta<+\infty$, $-\infty<\zeta<+\infty$ και θα αποδείξουμε ότι $h(x)\to\eta^\zeta$. Σύμφωνα με την πρόταση 4.10, είναι $\log f(x)\to\log\eta$ και, επομένως, $\log h(x)=g(x)\log f(x)\to\zeta\log\eta$. Πάλι από την πρόταση 4.10, είναι $h(x)=e^{\log h(x)}\to e^{\zeta\log\eta}=\eta^\zeta$.
Για τις περιπτώσεις που απομένουν εφαρμόζουμε τις προτάσεις 3.13 και 4.10.

Αν $0<\eta<1$ και $\zeta=-\infty$, τότε $\log f(x)\to\log\eta$ οπότε $\log h(x)=g(x)\log f(x)\to+\infty$ και, επομένως, $h(x)=e^{\log h(x)}\to+\infty=\eta^\zeta$.

Αν $0<\eta<1$ και $\zeta=+\infty$, τότε $\log f(x)\to\log\eta$ οπότε $\log h(x)=g(x)\log f(x)\to-\infty$ και, επομένως, $h(x)=e^{\log h(x)}\to 0=\eta^\zeta$.

Αν $\eta>1$ και $\zeta=-\infty$, τότε $\log f(x)\to\log\eta$ οπότε $\log h(x)=g(x)\log f(x)\to-\infty$ και, επομένως, $h(x)=e^{\log h(x)}\to 0=\eta^\zeta$.

Αν $\eta>1$ και $\zeta=+\infty$, τότε $\log f(x)\to\log\eta$ οπότε $\log h(x)=g(x)\log f(x)\to+\infty$ και, επομένως, $h(x)=e^{\log h(x)}\to+\infty=\eta^\zeta$.

Αν $\eta=+\infty$ και $0<\zeta\le+\infty$, τότε $\log f(x)\to+\infty$ οπότε $\log h(x)=g(x)\log f(x)\to+\infty$ και, επομένως, $h(x)=e^{\log h(x)}\to+\infty=\eta^\zeta$.

Αν $\eta=+\infty$ και $-\infty\le\zeta<0$, τότε $\log f(x)\to+\infty$ οπότε $\log h(x)=g(x)\log f(x)\to-\infty$ και, επομένως, $h(x)=e^{\log h(x)}\to 0=\eta^\zeta$.

Αν $\eta=0$ και $\zeta=-\infty$, τότε $\log f(x)\to-\infty$ οπότε $\log h(x)=g(x)\log f(x)\to+\infty$ και, επομένως, $h(x)=e^{\log h(x)}\to+\infty$. $\square$

Ασκήσεις.

4.2.1. Βρείτε τα σημεία συνέχειας των συναρτήσεων $\frac{x^2\log x+xe^x}{x-1}$, $x^{3/4}\log(1-x)$, $\log(x^2+1)$, $\log(x^2-5x+6)$, $(e^x-1)^{-1/2}$, $\sqrt{1-\cos x}$, $e^{1/\log x}$, $(1-x+[x])(x-[x])$, $\sqrt{[x]}$, $\sin(\log x)$, $e^{1/\sin x}$, $\log(\sin x)$, $\log(1-\cos x)$.

4.2.2. Έστω $f,g:A\to\mathbb{R}$ συνεχείς στον $\xi\in A$ και έστω ότι ισχύει $f(x)>0$ για κάθε $x\in A$. Αποδείξτε ότι η $f^g:A\to\mathbb{R}$ με τύπο $(f^g)(x)=f(x)^{g(x)}$ είναι συνεχής στον ξ.

Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις x^x, $(x^2-3)^{(x-2)/(x+2)}$, $(\log x)^{\log x}$ είναι συνεχείς. Ποιά είναι τα πεδία ορισμού τους;

4.2.3. Βρείτε τα $\lim_{x\to+\infty}e^{1/x}$, $\lim_{x\to+\infty}e^{[x]/x}$, $\lim_{x\to0}e^{x\sin(1/x)}$, $\lim_{x\to-\infty}\cos\frac{\sin x}{x}$ βάσει της πρότασης 4.10. Σε ποιά από αυτά εφαρμόζεται η πρόταση 3.13;

4.2.4. Έστω $f:A\to\mathbb{R}$ και $\xi\in A$ σημείο συσσώρευσης του A. Αν η f είναι συνεχής στον ξ και ισχύει $f(x)\ge l$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στον ξ και $f(x)\le l$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στον ξ, βρείτε την τιμή του $f(\xi)$.

4.2.5. Έστω $f:(\xi-\delta,\xi+\delta)\to\mathbb{R}$. Αν $\lim_{x\to\xi}f(x)=l$ και $\lim_{h\to0}\frac{f(\xi+h)+f(\xi-h)-2f(\xi)}{|h|}=m\in\mathbb{R}$, αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στον ξ. Τί γίνεται αν δεν υποθέσουμε ότι υπάρχει το $\lim_{x\to\xi}f(x)$ ή αν δεν υποθέσουμε ότι το όριο m είναι αριθμός;

4.2.6. Από τις $f,g:A\to\mathbb{R}$ ορίζουμε τις $\max\{f,g\}:A\to\mathbb{R}$ και $\min\{f,g\}:A\to\mathbb{R}$ με τύπους $\max\{f,g\}(x)=\max\{f(x),g(x)\}$ και $\min\{f,g\}(x)=\min\{f(x),g(x)\}$ για κάθε $x\in A$.

Αποδείξτε ότι, αν οι f, g είναι συνεχείς στον $\xi\in A$, τότε και οι $\max\{f,g\}$ και $\min\{f,g\}$ είναι συνεχείς στον ξ.

4.2.7. Έστω $f,g,h:A\to\mathbb{R}$ συνεχείς στο A. Ορίζουμε $m:A\to\mathbb{R}$ ώστε, για κάθε $x\in A$, ο $m(x)$ να είναι από τους $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ εκείνος που βρίσκεται ανάμεσα στους δύο άλλους.

Αποδείξτε ότι η m είναι συνεχής στο A.

4.2.8. Αποδείξτε ότι η $f(x)=\begin{cases}1, & \text{αν } x\in\mathbb{Q}\\ -1, & \text{αν } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$ είναι ασυνεχής σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}$ ενώ η $|f|$ είναι συνεχής σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}$.

4.2.9. Θεωρήστε την $f(x)=\begin{cases}n, & \text{αν } x=m/n \text{ για κάποιους } m\in\mathbb{Z},\, n\in\mathbb{N} \text{ με } \gcd(m,n)=1\\ 0, & \text{αν } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$

Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει κανένα σημείο κοντά στο οποίο η f να είναι φραγμένη.

4.2.10. [11] Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b]$.

Αν $f(a) = 0$ και $f(b) \neq 0$, αποδείξτε ότι υπάρχει μέγιστη ρίζα της f στο $[a, b]$.

Αν $f(a) \neq 0$ και $f(b) = 0$, αποδείξτε ότι υπάρχει ελάχιστη ρίζα της f στο $[a, b]$.

4.2.11. [12] Έστω διάστημα I το οποίο δεν είναι μονοσύνολο και $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής στο I.

Αν ισχύει $f(r) \geq 0$ για κάθε ρητό $r \in I$, αποδείξτε ότι ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in I$.

Αν ισχύει $f(r) = 0$ για κάθε ρητό $r \in I$, αποδείξτε ότι ισχύει $f(x) = 0$ για κάθε $x \in I$.

Αν η $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[0, 2]$ και ισχύει $f(r) = r^2$ για κάθε ρητό $r \in [0, 2]$, βρείτε τον $f(\sqrt{2})$.

4.2.12. [13] [α] Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ για κάθε x_1, x_2. Αποδείξτε ότι, αν η f έχει τουλάχιστον ένα σημείο συνέχειας, τότε ο τύπος της είναι $f(x) = cx$ για κάποια σταθερά c.

[β] Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f(x_1 + x_2 - x_3) = f(x_1) + f(x_2) - f(x_3)$ για κάθε x_1, x_2, x_3. Αποδείξτε ότι, αν η f έχει τουλάχιστον ένα σημείο συνέχειας, τότε ο τύπος της είναι $f(x) = cx + d$ για κάποιες σταθερές c, d.

[γ] Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f(x_1 + x_2) = f(x_1)f(x_2)$ για κάθε x_1, x_2 και $f(0) \neq 0$. Αποδείξτε ότι, αν η f έχει τουλάχιστον ένα σημείο συνέχειας, τότε ο τύπος της είναι $f(x) = e^{cx}$ για κάποια σταθερά c.

4.2.13. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ περιοδική στο $\mathbb{R}$.

Αποδείξτε ότι, αν η f δεν έχει ελάχιστη θετική περίοδο,[14] τότε το σύνολο των περιόδων της είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$.

Αποδείξτε ότι, αν η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και δεν έχει ελάχιστη θετική περίοδο, τότε είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

Αποδείξτε ότι η μη-σταθερή συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{αν } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ έχει ως περίοδο κάθε μη-μηδενικό ρητό αριθμό.

4.2.14. Έστω συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ άνω φραγμένη στο A. Ορίζουμε συνάρτηση $g : A \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \sup\{f(t) \,|\, t \in A, t \leq x\}$ για κάθε $x \in A$.

Αποδείξτε ότι η g είναι αύξουσα στο A και ότι ισχύει $f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in A$. Αποδείξτε ότι αν μια συνάρτηση $h : A \to \mathbb{R}$ είναι αύξουσα στο A και ισχύει $f(x) \leq h(x)$ για κάθε $x \in A$, τότε ισχύει $g(x) \leq h(x)$ για κάθε $x \in A$. Με άλλα λόγια, η g είναι η μικρότερη από τις συναρτήσεις που είναι αύξουσες στο A και είναι μεγαλύτερες ή ίσες της f στο A.

Αποδείξτε ότι, αν η f είναι συνεχής στον $\xi \in A$, τότε και η g είναι συνεχής στον ξ.

4.2.15. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Ορίζουμε συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(y) = \sup\{x \,|\, f(x) < y\}$ για κάθε y.

Για καθεμιά από τις συναρτήσεις $f(x) = x$, $f(x) = x^3$, $f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{αν } x \leq -1 \\ 0, & \text{αν } -1 \leq x \leq 1 \\ x - 1, & \text{αν } 1 \leq x \end{cases}$ βρείτε την αντίστοιχη συνάρτηση g.

Αποδείξτε ότι ισχύει $f(g(y)) = y$ για κάθε y.

Αν, επιπλέον, η f είναι γνησίως αύξουσα, αποδείξτε ότι η g είναι η αντίστροφη της f.

Αποδείξτε ότι η g είναι αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και αριστερά συνεχής σε κάθε y. Είναι η g δεξιά συνεχής σε κάθε y;

---

[11] Ένα σημαντικό αποτέλεσμα για ρίζες συνεχών συναρτήσεων.

[12] Μια σημαντική άσκηση για την πυκνότητα των ρητών. Θα τήν ξαναδούμε ως άσκηση 4.3.2.

[13] Τρεις σημαντικές “συναρτησιακές εξισώσεις”.

[14] Αν υπάρχει ελάχιστη θετική περίοδος της f, τότε αυτή χαρακτηρίζεται **βασική περίοδος** της f.

4.3 Συνεχείς συναρτήσεις και ακολουθίες.

Το θεώρημα 4.1 ανάγει την έννοια της συνέχειας στην έννοια του ορίου ακολουθίας. Το ανάλογο θεώρημα 3.1 ανάγει την έννοια του ορίου συνάρτησης, επίσης, στην έννοια του ορίου ακολουθίας.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.1. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $\xi \in A$. Η f είναι συνεχής στον ξ αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία (x_n) στο A με την ιδιότητα $x_n \to \xi$ ισχύει $f(x_n) \to f(\xi)$.*

Απόδειξη. Έστω ότι η f είναι συνεχής στον ξ και έστω ακολουθία (x_n) στο A με την ιδιότητα $x_n \to \xi$.
Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει

$$|f(x) - f(\xi)| < \epsilon \qquad \text{για κάθε } \ x \in A \ \text{ με } \ |x - \xi| < \delta. \tag{4.8}$$

Για τον ίδιο δ, ισχύει τελικά

$$|x_n - \xi| < \delta. \tag{4.9}$$

Από την (4.9) και την (4.8) με $x = x_n$ συνεπάγεται ότι ισχύει τελικά

$$|f(x_n) - f(\xi)| < \epsilon.$$

Άρα $f(x_n) \to f(\xi)$.
Τώρα, έστω ότι για κάθε ακολουθία (x_n) στο A με την ιδιότητα $x_n \to \xi$ ισχύει $f(x_n) \to f(\xi)$.
Έστω (για να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι η f δεν είναι συνεχής στον ξ. Τότε υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε για κάθε $\delta > 0$ να υπάρχει $x \in A$ με $|x - \xi| < \delta$ ώστε $|f(x) - f(\xi)| \geq \epsilon$. Εφαρμόζοντας αυτό το τελευταίο με $\delta = \frac{1}{n}$, συνεπάγεται ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει

$$x_n \in A \ \text{ με } \ |x_n - \xi| < \tfrac{1}{n} \ \text{ ώστε } \ |f(x_n) - f(\xi)| \geq \epsilon.$$

Έτσι δημιουργείται ακολουθία (x_n) στο A με την ιδιότητα $x_n \to \xi$ για την οποία, όμως, δεν ισχύει $f(x_n) \to f(\xi)$. Άτοπο.
Άρα η f είναι συνεχής στον ξ. □

Παράδειγμα 4.3.1. Αν $P(x)$ είναι πολυωνυμική συνάρτηση και $x_n \to \xi$, τότε $P(x_n) \to P(\xi)$.

Παράδειγμα 4.3.2. Αν η $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ είναι ρητή συνάρτηση, αν $Q(\xi) \neq 0$ και ισχύει $Q(x_n) \neq 0$ για κάθε n και αν $x_n \to \xi$, τότε $R(x_n) \to R(\xi)$.

Παράδειγμα 4.3.3. Αν $x_n \to \xi$, τότε $e^{x_n} \to e^{\xi}$.

Παράδειγμα 4.3.4. Αν $\xi > 0$ και ισχύει $x_n > 0$ για κάθε n και αν $x_n \to \xi$, τότε $\log x_n \to \log \xi$.

Παράδειγμα 4.3.5. Αν $x_n \to \xi$, τότε $\cos x_n \to \cos \xi$ και $\sin x_n \to \sin \xi$.

Οι σχέσεις $\lim_{n\to+\infty} x_n = \xi$ και $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(\xi)$ συνδυάζονται στην

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f\big(\lim_{n\to+\infty} x_n\big).$$

Δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι αυτή η "εναλλαγή" των συμβόλων $\lim_{n\to+\infty}$ και f ισχύει με την προϋπόθεση ότι η f είναι συνεχής στον ξ, δηλαδή στο όριο της (x_n).

Έχουμε και την ανάλογη παραλλαγή του θεωρήματος 4.1, όπου η συνέχεια αντικαθίσταται με την δεξιά (αριστερή) συνέχεια και υπάρχει η επιπλέον υπόθεση ότι ισχύει $x_n \geq \xi$ ($x_n \leq \xi$) για κάθε n.

Όπως είπαμε, το θεώρημα 4.1 σχετίζεται με το θεώρημα 3.1. Παρατηρήστε ότι, ενώ στο θεώρημα 4.1 δεν χρειάζεται να υποθέσουμε τίποτα για τους όρους της ακολουθίας (πέρα από το ότι ανήκουν στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης) στο θεώρημα 3.1 πρέπει να υποθέσουμε, επιπλέον, ότι όλοι οι όροι της είναι $\neq \xi$.

Παράδειγμα 4.3.6. $\frac{1+(-1)^n}{n} \to 0$ και η $\sin x$ είναι συνεχής στον 0. Άρα $\sin\frac{1+(-1)^n}{n} \to \sin 0 = 0$. Δεν εφαρμόζεται το θεώρημα 3.1, διότι ισχύει $\frac{1+(-1)^n}{n} = 0$ για άπειρους n.

Απόδειξη της πρότασης 2.12. Ορίζουμε $z_n = {x_n}^{y_n}$ και έστω $x_n \to x$ και $y_n \to y$.
Υποθέτουμε ότι $0 < x < +\infty$ και $-\infty < y < +\infty$ και θα αποδείξουμε ότι $z_n \to x^y$. Σύμφωνα με το θεώρημα 4.1, είναι $\log x_n \to \log x$ και, επομένως, $\log z_n = y_n \log x_n \to y \log x$. Πάλι από το θεώρημα 4.1, $z_n = e^{\log z_n} \to e^{y\log x} = x^y$.
Για τις περιπτώσεις που απομένουν εφαρμόζουμε τα θεωρήματα 3.1 και 4.1.

Αν $0 < x < 1$ και $y = -\infty$, τότε $\log x_n \to \log x$ οπότε $\log z_n = y_n \log x_n \to +\infty$ και, επομένως, $z_n = e^{\log z_n} \to +\infty = x^y$.

Αν $0 < x < 1$ και $y = +\infty$, τότε $\log x_n \to \log x$ οπότε $\log z_n = y_n \log x_n \to -\infty$ και, επομένως, $z_n = e^{\log z_n} \to 0 = x^y$.

Αν $x > 1$ και $y = -\infty$, τότε $\log x_n \to \log x$ οπότε $\log z_n = y_n \log x_n \to -\infty$ και, επομένως, $z_n = e^{\log z_n} \to 0 = x^y$.

Αν $x > 1$ και $y = +\infty$, τότε $\log x_n \to \log x$ οπότε $\log z_n = y_n \log x_n \to +\infty$ και, επομένως, $z_n = e^{\log z_n} \to +\infty = x^y$.

Αν $x = +\infty$ και $0 < y \leq +\infty$, τότε $\log x_n \to +\infty$ οπότε $\log z_n = y_n \log x_n \to +\infty$ και, επομένως, $z_n = e^{\log z_n} \to +\infty = x^y$.

Αν $x = +\infty$ και $-\infty \leq y < 0$, τότε $\log x_n \to +\infty$ οπότε $\log z_n = y_n \log x_n \to -\infty$ και, επομένως, $z_n = e^{\log z_n} \to 0 = x^y$.

Αν $x = 0$ και $y = -\infty$, τότε $\log x_n \to -\infty$ οπότε $\log z_n = y_n \log x_n \to +\infty$ και, επομένως, $z_n = e^{\log z_n} \to +\infty$. □

4.3.1 Δυνάμεις αρνητικών αριθμών με μη-ακέραιους εκθέτες.

Στο σημείο αυτό θα δούμε γιατί αποφεύγουμε να ορίσουμε τις δυνάμεις αρνητικών αριθμών με μη-ακέραιους εκθέτες. Θα δούμε ότι, για $a < 0$, δεν είναι δυνατό να ορίσουμε την δύναμη a^x για κάθε τιμή του x σε κάποιο σύνολο A, αν θέλουμε να ικανοποιούνται κάποια "ελάχιστα κριτήρια" και αν θέλουμε το σύνολο A να είναι "στοιχειωδώς μεγάλο". Θα θέλαμε, για παράδειγμα, το A να είναι μεγαλύτερο από το $\mathbb{Z}$ (διότι έχουμε ήδη ορίσει τον a^x για κάθε $x \in \mathbb{Z}$) και το επιθυμητό θα ήταν το A να είναι τουλάχιστον το $\mathbb{Q}$ ή, ιδανικά, να είναι ολόκληρο το $\mathbb{R}$.
Στα παρακάτω θα είναι $a < 0$.
Μια πρώτη λογική απαίτηση ώστε να ορίσουμε τον a^x για κάθε x στο σύνολο A είναι να ικανοποιείται η συνήθης αλγεβρική ιδιότητα $a^x a^y = a^{x+y}$ για κάθε $x, y \in A$. Αυτό συνεπάγεται, ειδικώτερα, ότι το A πρέπει να έχει την ιδιότητα: $x + y \in A$ για κάθε $x, y \in A$.
Έστω $r \in \mathbb{Q}$. Τότε, όπως γνωρίζουμε, υπάρχουν μοναδικοί $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ με $\gcd(m, n) = 1$ ώστε $r = \frac{m}{n}$. Αυτή η γραφή του r ονομάζεται *ανάγωγη μορφή* του. Παρακάτω θα χρειαστούμε τα εξής δύο απλά αποτελέσματα: (i) Αν $r = \frac{m}{n}$ είναι η ανάγωγη μορφή του r και ο n είναι άρτιος, τότε ο m είναι περιττός. (ii) Αν $r = \frac{m'}{n'}$, όπου $m' \in \mathbb{Z}$ και $n' \in \mathbb{N}$, τότε η ανάγωγη μορφή $r = \frac{m}{n}$ του r προκύπτει με απλοποίηση του λόγου $\frac{m'}{n'}$. Άρα ο m είναι διαιρέτης του m' και ο n είναι διαιρέτης του n'. Άρα, αν ο m' είναι περιττός, τότε και ο m είναι περιττός και, αν ο n' είναι περιττός, τότε και ο n είναι περιττός.
Έστω, λοιπόν, $r \in \mathbb{Q}$ και $r = \frac{m}{n}$ η ανάγωγη μορφή του r. Όπως κι αν ορίσουμε τον a^r, πρέπει (λόγω της αναγκαίας αλγεβρικής ιδιότητας) να ισχύει

$$(a^r)^n = a^r \cdots a^r = a^{r+\cdots+r} = a^{nr} = a^m,$$

οπότε ο a^r είναι λύση της εξίσωσης $x^n = a^m$. Παρατηρούμε ότι, αν ο n είναι άρτιος, τότε ο m είναι περιττός, οπότε $(a^r)^n = a^m < 0$, το οποίο είναι άτοπο. Άρα, αν η ανάγωγη μορφή του r έχει άρτιο παρονομαστή, τότε δεν είναι δυνατό να ορισθεί ο a^r. Κατόπιν, παρατηρούμε ότι αν ο n είναι περιττός, τότε η εξίσωση $x^n = a^m$ έχει ακριβώς μία λύση: η λύση αυτή είναι είτε η $\sqrt[n]{a^m}$, αν ο m είναι άρτιος (διότι τότε $a^m > 0$), είτε η $-\sqrt[n]{-a^m}$, αν ο m είναι περιττός (διότι τότε $a^m < 0$).

Συνοψίζουμε: *αν η ανάγωγη μορφή του r έχει άρτιο παρονομαστή, τότε δεν είναι δυνατό να ορισθεί ο a^r και, αν η ανάγωγη μορφή $r = \frac{m}{n}$ του r έχει περιττό παρονομαστή, τότε μπορεί να ορισθεί ο a^r ως η μοναδική λύση της εξίσωσης $x^n = a^m$.*

Τώρα θεωρούμε ως A το σύνολο όλων των ρητών των οποίων η ανάγωγη μορφή έχει περιττό παρονομαστή. Το A περιέχει όλους τους ακεραίους, διότι αν $m \in \mathbb{Z}$, τότε είναι σαφές ότι η ανάγωγη μορφή του m είναι η $m = \frac{m}{1}$ και ο 1 είναι περιττός. Άρα $\mathbb{Z} \subseteq A$. Από την άλλη μεριά, το A είναι γνήσιο υποσύνολο του $\mathbb{Q}$, διότι, για παράδειγμα, ο ρητός $\frac{1}{2}$ δεν ανήκει στο A. Το A έχει και την ιδιότητα που επισημάναμε προηγουμένως. Δηλαδή, αν $r, s \in A$, τότε $r + s \in A$. Πράγματι, έστω $r, s \in A$ και έστω $r = \frac{m}{n}$ και $s = \frac{k}{l}$ οι ανάγωγες μορφές των r, s, οπότε οι n, l είναι περιττοί. Τότε $r + s = \frac{ml+kn}{nl}$ και ο nl είναι περιττός. Άρα, σύμφωνα με μια προηγούμενη παρατήρησή μας, η ανάγωγη μορφή του $r + s$ (που μπορεί να μην είναι η $r + s = \frac{ml+kn}{nl}$) έχει περιττό παρονομαστή, οπότε $r + s \in A$. Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι, αν ορίσουμε τον a^r για κάθε $r \in A$ με τον τρόπο που περιγράψαμε προηγουμένως, τότε *ισχύει* η αλγεβρική ιδιότητα $a^r a^s = a^{r+s}$ για κάθε $r, s \in A$. Θα παραλείψουμε την απόδειξη. Μάλιστα, μπορεί να αποδειχθεί σχετικά εύκολα ότι αν ορίσουμε, όπως παραπάνω, τον a^r *για κάθε* $a < 0$ *και κάθε* $r \in A$, τότε ισχύουν και οι τρεις αλγεβρικές ιδιότητες στην πρόταση 1.8[α].

Το σύνολο A δεν είναι βέβαια όσο "μεγάλο" θα θέλαμε: είναι γνήσιο υποσύνολο του $\mathbb{Q}$. Πάντως, είναι γνήσιο υπερσύνολο του $\mathbb{Z}$ και θα προσέφερε μια ικανοποιητική επέκταση του ορισμού του a^x σε ένα σύνολο μεγαλύτερο του $\mathbb{Z}$ αν, εκτός από το "αλγεβρικό κριτήριο" ικανοποιούνταν και ένα απαραίτητο "αναλυτικό κριτήριο". Το κριτήριο αυτό είναι: η συνάρτηση a^x πρέπει να είναι *συνεχής* στο πεδίο ορισμού της A. Θα δούμε ότι η συνάρτηση a^x με πεδίο ορισμού το A δεν είναι συνεχής και, μάλιστα, είναι ασυνεχής σε *κάθε* σημείο του A.

Έστω $r \in A$ και έστω (για να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι η a^x είναι συνεχής στον r. Έστω $r = \frac{m}{n}$ η ανάγωγη μορφή του r. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$t_k = \frac{2^k m}{2^k n+1}, \qquad s_k = \frac{2^k m+1}{2^k n+1}.$$

Επειδή ο παρονομαστής $2^k n + 1$ είναι περιττός, οι ανάγωγες μορφές των t_k, s_k έχουν περιττούς παρονομαστές, οπότε $t_k, s_k \in A$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Επίσης,

$$t_k \to r, \qquad s_k \to r.$$

Λόγω συνέχειας της a^x στον r, συνεπάγεται ότι

$$a^{t_k} \to a^r, \qquad a^{s_k} \to a^r.$$

Ο αριθμός a^{t_k} είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης $x^{2^k n+1} = a^{2^k m} > 0$, οπότε $a^{t_k} > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Συνεπάγεται

$$a^r \geq 0.$$

Ο αριθμός a^{s_k} είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης $x^{2^k n+1} = a^{2^k m+1} < 0$, οπότε $a^{s_k} < 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Συνεπάγεται

$$a^r \leq 0.$$

Επομένως, $a^r = 0$. Αυτό είναι αδύνατο διότι

$$a^r a^{-r} = a^{r+(-r)} = a^0 = 1.$$

Ίσως αναρωτηθεί κανείς αν είναι δυνατό (με $a < 0$) να ορισθεί ο a^x για κάθε x σε ένα σύνολο A το οποίο, εκτός, από τους ακεραίους, περιέχει και τους αρρήτους. Και πάλι, όμως, βλέπουμε ότι αυτό δεν γίνεται, διότι δεν θα ικανοποιείται τουλάχιστον το "αλγεβρικό κριτήριο": δηλαδή ότι, αν $x, y \in A$, τότε $x + y \in A$. Πράγματι, έστω ότι ισχύει: αν $x, y \in A$, τότε $x + y \in A$. Έστω οποιοσδήποτε ρητός r. Επειδή το A περιέχει τους αρρήτους, πρέπει να είναι $r - \sqrt{2} \in A$ και $\sqrt{2} \in A$, οπότε $r = (r - \sqrt{2}) + \sqrt{2} \in A$. Άρα το A περιέχει όλους τους ρητούς. Αυτό είναι άτοπο,

διότι είδαμε ότι δεν είναι δυνατό να ορισθεί ο a^x για κάθε $x \in \mathbb{Q}$.
Άρα, αφού δεν μπορεί να υπάρχει σύνολο A, το οποίο να είναι "στοιχειωδώς μεγάλο", στο οποίο να ορίζεται η δύναμη a^x, το μόνο που απομένει είναι να ορισθεί ο a^x για μεμονωμένους "λίγους" αριθμούς x πέραν των ακεραίων. Αυτό, όμως, θα ήταν ουσιαστικά άχρηστο, οπότε παραμένουμε στον ορισμό του a^x μόνο για ακέραιους x.

Ασκήσεις.

4.3.1. Βρείτε τα όρια των ακολουθιών $\big((1+\frac{1}{n})^8+4(1+\frac{1}{n})^5+7\big)$, $\big(\exp\frac{1+(-1)^n}{n}\big)$, $\big(\log(1+\frac{1}{n})\big)$, $\big(n\log(1+\frac{1}{n})\big)$, $\big(\exp\frac{3n^4+n-4}{n^4+n^3+4}\big)$, $\big((\frac{n^2+3}{4n^2-3})^{3/2}\big)$, $(\tan\frac{1}{2^n})$, $\big(2^{\log(\cos(1/n))}\big)$.

4.3.2. Αφού δείτε την άσκηση 2.3.32, λύστε με δεύτερο τρόπο την άσκηση 4.2.11.

4.3.3. Λύστε την άσκηση 2.3.41[δ] χρησιμοποιώντας τη συνέχεια της εκθετικής και της λογαριθμικής συνάρτησης και το αποτέλεσμα της άσκησης 2.3.41[α].

4.3.4. Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b]$. Έστω ότι για κάθε $x\in[a,b]$ υπάρχει $x'\in[a,b]$ ώστε $|f(x')|\leq\frac{|f(x)|}{2}$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi\in[a,b]$ ώστε $f(\xi)=0$.

4.3.5. [15] Έστω $f:[a,+\infty)\to[a,+\infty)$ και έστω ότι υπάρχει M ώστε $0\leq M<1$ και ώστε να ισχύει $|f(x')-f(x'')|\leq M|x'-x''|$ για κάθε $x',x''\in[a,+\infty)$. Βάσει της άσκησης 4.1.12, η f είναι συνεχής στο $[a,+\infty)$. Αποδείξτε ότι υπάρχει μοναδικός $\xi\in[a,+\infty)$ ώστε $f(\xi)=\xi$.
Αποδείξτε ότι το προηγούμενο ισχύει με οποιοδήποτε από τα $[a,b]$, $(-\infty,b]$, $(-\infty,+\infty)$ στη θέση του $[a,+\infty)$.

4.3.6. Έστω $f:A\to\mathbb{R}$ και ακολουθία (x_n) στο A ώστε $\overline{\lim}\,x_n\in A$.
Αν η f είναι αύξουσα στο A και συνεχής στο $\overline{\lim}\,x_n$, αποδείξτε ότι $\overline{\lim}\,f(x_n)=f(\overline{\lim}\,x_n)$.
Ποιό είναι το ανάλογο συμπέρασμα για το $\underline{\lim}\,x_n$; Ποιά είναι τα ανάλογα συμπεράσματα αν η f είναι φθίνουσα στο A;

4.4 Τα τρία βασικά θεωρήματα.

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε τις τρεις πιο σημαντικές ιδιότητες των συνεχών συναρτήσεων και, μάλιστα, θα δούμε δύο αποδείξεις για καθεμιά από αυτές. Θα παρατηρήσετε ότι και οι τρεις ιδιότητες αναφέρονται σε συναρτήσεις συνεχείς σε κλειστά και φραγμένα διαστήματα.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΦΡΑΓΜΕΝΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ. *Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b]$. Τότε η f είναι φραγμένη στο $[a,b]$.*

Πρώτη απόδειξη. [16] Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b]$.
Θεωρούμε το σύνολο

$$A=\{x\in[a,b]\,|\,\text{η } f \text{ είναι φραγμένη στο } [a,x]\}.$$

Προφανώς, $a\in A$ αφού η f είναι φραγμένη στο μονοσύνολο $[a,a]$. Επίσης, ο b είναι άνω φράγμα του A αφού, προφανώς, $A\subseteq[a,b]$. Άρα, αν θέσουμε

$$\xi=\sup A,$$

[15] Μια συνάρτηση $f:A\to A$ χαρακτηρίζεται **γνησίως συστολική** στο A αν υπάρχει M ώστε $0\leq M<1$ και ώστε να ισχύει $|f(x')-f(x'')|\leq M|x'-x''|$ για κάθε $x',x''\in A$. Ένας $\xi\in A$ χαρακτηρίζεται **σταθερό σημείο** της f στο A αν $f(\xi)=\xi$. Το αποτέλεσμα της άσκησης ονομάζεται **θεώρημα σταθερού σημείου**. Άλλες παραλλαγές του θεωρήματος σταθερού σημείου είναι στην άσκηση 4.4.10.

[16] Για δύο ακόμη αποδείξεις δείτε τις ασκήσεις 4.4.24 και 4.4.25.

τότε $\xi \in [a,b]$.
Η f είναι συνεχής στον a, οπότε είναι φραγμένη κοντά στον a, οπότε υπάρχει $c \in (a,b]$ ώστε η f να είναι φραγμένη στο $[a,c]$. Άρα $c \in A$, οπότε $a < c \leq \xi \leq b$, οπότε

$$a < \xi \leq b.$$

Η f είναι συνεχής στον ξ, οπότε είναι φραγμένη κοντά στον ξ, οπότε υπάρχει $c \in [a,\xi)$ ώστε η f να είναι φραγμένη στο $[c,\xi]$. Επίσης, επειδή $\xi = \sup A$, υπάρχει $d \in A$ ώστε $c < d \leq \xi$. Τώρα, η f είναι φραγμένη στο $[a,d]$ και στο $[c,\xi]$, οπότε είναι φραγμένη στο $[a,\xi]$. Άρα

$$\xi \in A.$$

Έστω $\xi < b$. Η f είναι συνεχής στον ξ, οπότε είναι φραγμένη κοντά στον ξ, οπότε υπάρχει $c \in (\xi,b]$ ώστε η f να είναι φραγμένη στο $[\xi,c]$. Τώρα, η f είναι φραγμένη στο $[a,\xi]$ και στο $[\xi,c]$, οπότε είναι φραγμένη στο $[a,c]$ και, επομένως, $c \in A$. Άτοπο, διότι $\xi < c$ και ο ξ είναι άνω φράγμα του A.
Άρα $\xi = b$ και, επομένως, η f είναι φραγμένη στο $[a,b]$.
Δεύτερη απόδειξη. Έστω (για να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι η f δεν είναι φραγμένη στο $[a,b]$. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $x_n \in [a,b]$ ώστε

$$|f(x_n)| > n.$$

Έτσι προκύπτει ακολουθία (x_n) στο $[a,b]$ ώστε να ισχύει $|f(x_n)| > n$ για κάθε n και, επομένως,

$$|f(x_n)| \to +\infty. \tag{4.10}$$

Σύμφωνα με το θεώρημα των Bolzano - Weierstrass, υπάρχει υποακολουθία (x_{n_k}) της (x_n) η οποία συγκλίνει. Έστω

$$x_{n_k} \to \xi.$$

Επειδή ισχύει $a \leq x_{n_k} \leq b$ για κάθε k, συνεπάγεται $a \leq \xi \leq b$. Επειδή $\xi \in [a,b]$, η f είναι συνεχής στον ξ, οπότε από το $x_{n_k} \to \xi$ συνεπάγεται

$$f(x_{n_k}) \to f(\xi)$$

και, επομένως, $|f(x_{n_k})| \to |f(\xi)|$. Όμως, από την (4.10) έχουμε $|f(x_{n_k})| \to +\infty$ και καταλήγουμε σε άτοπο. □

Παράδειγμα 4.4.1. Η $f(x) = \begin{cases} 1/x, & \text{αν } 0 < x \leq 1 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ δεν είναι συνεχής ούτε φραγμένη στο $[0,1]$.

Παράδειγμα 4.4.2. Η $f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } 0 < x \leq 1 \\ 1, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ είναι ασυνεχής και φραγμένη στο $[0,1]$.

Παράδειγμα 4.4.3. Η $\frac{1}{x(x-1)}$ είναι συνεχής αλλά όχι φραγμένη στο $(0,1)$.

Παράδειγμα 4.4.4. Η x είναι συνεχής και φραγμένη στο $(-1,1)$.

Παράδειγμα 4.4.5. Η x είναι συνεχής αλλά όχι φραγμένη στο $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 4.4.6. Η $\frac{1}{x^2+1}$ είναι συνεχής και φραγμένη στο $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 4.4.7. Η $x + \frac{1}{x}$ είναι φραγμένη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του $(0,+\infty)$, διότι είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$. Όμως, δεν είναι φραγμένη στο $(0,1]$ ούτε στο $[1,+\infty)$.

Παράδειγμα 4.4.8. Έστω $0 < a < b$. Τότε υπάρχει u ώστε να ορίζεται η συνάρτηση $\log(u - x - \frac{1}{x})$ στο διάστημα $[a, b]$. Πράγματι, η $x + \frac{1}{x}$ ως συνεχής στο $[a, b]$ είναι φραγμένη στο $[a, b]$, οπότε υπάρχει u ώστε να ισχύει $x + \frac{1}{x} < u$ για κάθε $x \in [a, b]$.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΓΙΣΤΗΣ - ΕΛΑΧΙΣΤΗΣ ΤΙΜΗΣ. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b]$. Τότε υπάρχουν $\zeta, \eta \in [a, b]$ ώστε να ισχύει $f(\zeta) \le f(x) \le f(\eta)$ για κάθε $x \in [a, b]$.*

Δείτε το σχήμα 20.

Πρώτη απόδειξη. [17] Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b]$.
Σύμφωνα με το θεώρημα φραγμένης συνάρτησης, η f είναι φραγμένη στο $[a, b]$, οπότε το σύνολο τιμών $\{f(x) \,|\, x \in [a, b]\}$ είναι φραγμένο.
Θέτουμε

$$u = \sup\{f(x) \,|\, x \in [a, b]\}, \tag{4.11}$$

οπότε ο u είναι αριθμός.
Προφανώς, ισχύει $f(x) \le u$ για κάθε $x \in [a, b]$.
Έστω (για να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι ισχύει $f(x) < u$ για κάθε $x \in [a, b]$. Τότε η συνάρτηση $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$g(x) = \tfrac{1}{u - f(x)} \tag{4.12}$$

είναι συνεχής και, επομένως, φραγμένη στο $[a, b]$. Δηλαδή, υπάρχει M ώστε να ισχύει

$$g(x) \le M \tag{4.13}$$

για κάθε $x \in [a, b]$. Από τις (4.12) και (4.13) συνεπάγεται ότι ισχύει

$$f(x) \le u - \tfrac{1}{M}$$

για κάθε $x \in [a, b]$. Άρα ο $u - \frac{1}{M}$ είναι άνω φράγμα του $\{f(x) \,|\, x \in [a, b]\}$. Αυτό, όμως, είναι άτοπο λόγω της (4.11).
Άρα υπάρχει $\eta \in [a, b]$ ώστε $f(\eta) = u$, οπότε ισχύει $f(x) \le f(\eta)$ για κάθε $x \in [a, b]$.
Με τον ίδιο τρόπο, από το infimum του $\{f(x) \,|\, a \le x \le b\}$, προκύπτει η ύπαρξη ενός ζ ώστε να ισχύει $f(\zeta) \le f(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$.
Δεύτερη απόδειξη. Αρχίζουμε όπως και στην πρώτη απόδειξη με τον $u = \sup\{f(x) \,|\, x \in [a, b]\}$.
Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ο $u - \frac{1}{n}$ δεν είναι άνω φράγμα του $\{f(x) \,|\, a \le x \le b\}$, οπότε υπάρχει $x_n \in [a, b]$ ώστε

$$u - \tfrac{1}{n} < f(x_n).$$

Ο u είναι άνω φράγμα του $\{f(x) \,|\, a \le x \le b\}$, οπότε

$$u - \tfrac{1}{n} < f(x_n) \le u.$$

Άρα προκύπτει ακολουθία (x_n) στο $[a, b]$ ώστε να ισχύει $u - \frac{1}{n} < f(x_n) \le u$ για κάθε n, οπότε

$$f(x_n) \to u. \tag{4.14}$$

Σύμφωνα με το θεώρημα των Bolzano - Weierstrass, υπάρχει υποακολουθία (x_{n_k}) η οποία συγκλίνει. Έστω

$$x_{n_k} \to \eta.$$

Επειδή ισχύει $a \le x_{n_k} \le b$ για κάθε k, συνεπάγεται $a \le \eta \le b$, οπότε η f είναι συνεχής στον η. Από το $x_{n_k} \to \eta$ συνεπάγεται

$$f(x_{n_k}) \to f(\eta).$$

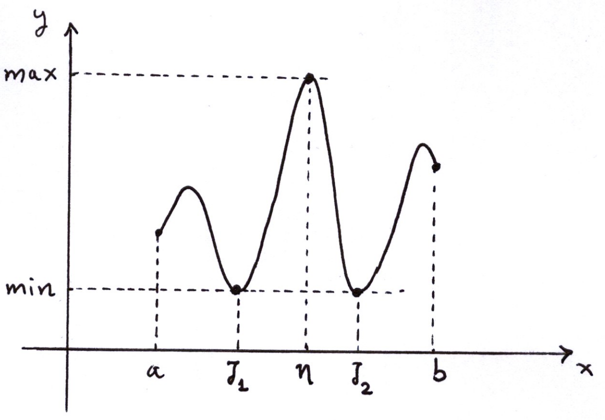
[17] Μια κοινή απόδειξη των θεωρημάτων φραγμένης συνάρτησης και μέγιστης - ελάχιστης τιμής υπάρχει στην άσκηση 4.4.25.

Λόγω της (4.14) συνεπάγεται $f(x_{n_k}) \to u$ και, επομένως,

$$f(\eta) = u,$$

οπότε ισχύει $f(x) \le f(\eta)$ για κάθε $x \in [a, b]$.
Με τον ίδιο τρόπο, από το infimum του $\{f(x) \,|\, a \le x \le b\}$, προκύπτει ο ζ. $\square$

Σχ 20



Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι οι ζ, η στο θεώρημα μέγιστης - ελάχιστης τιμής μπορεί να μην είναι μοναδικοί. Μπορεί να υπάρχουν περισσότεροι από ένας ζ στους οποίους η f έχει την ελάχιστη τιμή της και περισσότεροι από ένας η στους οποίους η f έχει την μέγιστη τιμή της. Επίσης, το θεώρημα μέγιστης - ελάχιστης τιμής δεν αναφέρει τρόπο εύρεσης των ζ, η στους οποίους η f έχει την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της ούτε τρόπο εύρεσης της ελάχιστης και μέγιστης τιμής της. Για τέτοιους υπολογισμούς θα δούμε διάφορες μεθόδους στο κεφάλαιο 5.

Παράδειγμα 4.4.9. Η $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{αν } -1 \le x < 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \\ x-1, & \text{αν } 0 < x \le 1 \end{cases}$ δεν είναι συνεχής στο $[-1, 1]$ και δεν έχει μέγιστη ούτε ελάχιστη τιμή. Είναι, όμως, φραγμένη στο $[-1, 1]$.

Παράδειγμα 4.4.10. Η $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } -1 \le x < 0 \\ 1, & \text{αν } 0 \le x \le 1 \end{cases}$ δεν είναι συνεχής στο $[-1, 1]$ αλλά έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

Παράδειγμα 4.4.11. Η x είναι συνεχής (και φραγμένη) στό $(-1, 1)$ αλλά δεν έχει μέγιστη ούτε ελάχιστη τιμή στό $(-1, 1)$.

Παράδειγμα 4.4.12. Η $f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{αν } -2 < x < -1 \\ -x, & \text{αν } -1 \le x \le 1 \\ x-2, & \text{αν } 1 < x < 2 \end{cases}$ είναι συνεχής στο $(-2, 2)$ και έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

Παράδειγμα 4.4.13. Η $\frac{x|x|}{x^2+1}$ είναι συνεχής (και φραγμένη) στο $\mathbb{R}$ αλλά δεν έχει μέγιστη ούτε ελάχιστη τιμή.

Παράδειγμα 4.4.14. Η $f(x) = \begin{cases} 1/x, & \text{αν } |x| > 1 \\ x, & \text{αν } |x| \le 1 \end{cases}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

Παράδειγμα 4.4.15. Ας δούμε πάλι το παράδειγμα 4.4.8. Δεν υπάρχει κάποιος *ελάχιστος* u ώστε να ορίζεται η συνάρτηση $\log(u - x - \frac{1}{x})$ στο διάστημα $[a, b]$. Πράγματι, επειδή η $x + \frac{1}{x}$ είναι συνεχής στο $[a, b]$, υπάρχει $\eta \in [a, b]$ ώστε να ισχύει $x + \frac{1}{x} \le \eta + \frac{1}{\eta}$ για κάθε $x \in [a, b]$. Άρα ως u μπορούμε να θεωρήσουμε κάθε αριθμό μεγαλύτερο του $\eta + \frac{1}{\eta}$ αλλά όχι τον $\eta + \frac{1}{\eta}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ. *Έστω* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *συνεχής στο* $[a,b]$. *Τότε για κάθε* λ *με την ιδιότητα* $f(a) \le \lambda \le f(b)$ *ή* $f(b) \le \lambda \le f(a)$ *υπάρχει* $\xi \in [a,b]$ *ώστε* $f(\xi) = \lambda$.

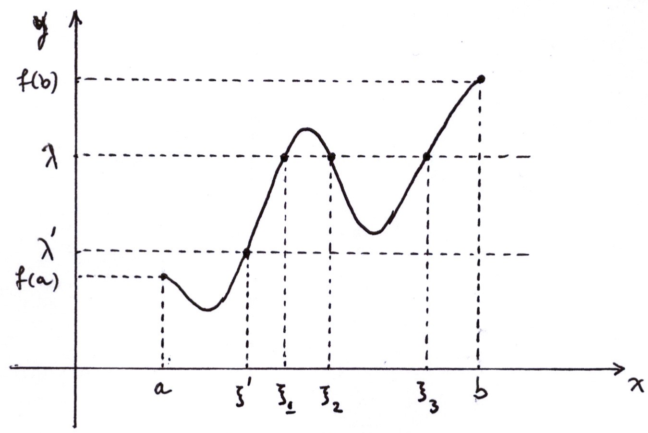
Δείτε το σχήμα 21.

Πρώτη απόδειξη. [18] Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b]$ και $f(a) \le \lambda \le f(b)$.
Θεωρούμε το σύνολο
$$A = \{x \in [a,b] \,|\, f(x) \le \lambda\}.$$
Το A είναι μη-κενό και άνω φραγμένο, αφού $a \in A$ και $A \subseteq [a,b]$. Θέτουμε
$$\xi = \sup A,$$
οπότε $\xi \in [a,b]$ και $A \subseteq [a,\xi]$.
Έστω $f(\xi) > \lambda$. Τότε, προφανώς, $\xi \in (a,b]$. Επειδή η f είναι συνεχής στον ξ, υπάρχει $c \in [a,\xi)$ ώστε να ισχύει $f(x) > \lambda$ για κάθε $x \in (c,\xi]$. Συνεπάγεται $A \subseteq [a,c]$. Άτοπο, διότι $c < \xi$ και $\xi = \sup A$. Άρα $f(\xi) \le \lambda$.
Έστω $f(\xi) < \lambda$. Τότε, προφανώς, $\xi \in [a,b)$. Επειδή η f είναι συνεχής στον ξ, υπάρχει $c \in (\xi,b]$ ώστε να ισχύει $f(x) < \lambda$ για κάθε $x \in [\xi,c)$. Άρα $[\xi,c) \subseteq A$. Άτοπο διότι $A \subseteq [a,\xi]$. Άρα $f(\xi) \ge \lambda$.
Από τις $f(\xi) \le \lambda$ και $f(\xi) \ge \lambda$ συνεπάγεται $f(\xi) = \lambda$.
Άρα υπάρχει $\xi \in [a,b]$ ώστε $f(\xi) = \lambda$.[19]
Η απόδειξη είναι όμοια στην περίπτωση $f(b) \le \lambda \le f(a)$.

Δεύτερη απόδειξη. Έστω $f(a) \le \lambda \le f(b)$.
Θεωρούμε τα ισομήκη διαστήματα $[a, \frac{a+b}{2}]$, $[\frac{a+b}{2}, b]$ και παρατηρούμε ότι είτε $f(a) \le \lambda \le f(\frac{a+b}{2})$ είτε $f(\frac{a+b}{2}) \le \lambda \le f(b)$. Στην πρώτη περίπτωση συμβολίζουμε $a_1 = a$, $b_1 = \frac{a+b}{2}$. Στη δεύτερη περίπτωση συμβολίζουμε $a_1 = \frac{a+b}{2}$, $b_1 = b$. Σε κάθε περίπτωση, είναι $[a_1,b_1] \subseteq [a,b]$, $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$ και $f(a_1) \le \lambda \le f(b_1)$.
Κατόπιν, θεωρούμε τα ισομήκη διαστήματα $[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$, $[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$ και είναι είτε $f(a_1) \le \lambda \le f(\frac{a_1+b_1}{2})$ είτε $f(\frac{a_1+b_1}{2}) \le \lambda \le f(b_1)$. Στην πρώτη περίπτωση συμβολίζουμε $a_2 = a_1$, $b_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$. Στη δεύτερη περίπτωση συμβολίζουμε $a_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$, $b_2 = b_1$. Σε κάθε περίπτωση, είναι $[a_2,b_2] \subseteq [a_1,b_1]$, $b_2 - a_2 = \frac{b_1-a_1}{2}$ και $f(a_2) \le \lambda \le f(b_2)$.
Συνεχίζουμε αυτήν τη διαδικασία επ' άπειρον.
Δημιουργούμε έτσι διαδοχικά διαστήματα $[a_n,b_n]$ για κάθε n ώστε να ισχύει
$$[a_{n+1},b_{n+1}] \subseteq [a_n,b_n], \qquad b_{n+1} - a_{n+1} = \tfrac{b_n-a_n}{2}, \qquad f(a_n) \le \lambda \le f(b_n) \tag{4.15}$$
για κάθε n.
Από τη δεύτερη σχέση (4.15) συνεπάγεται ότι ισχύει $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ για κάθε n και, επομένως,
$$b_n - a_n \to 0.$$
Σύμφωνα με την πρόταση για τα εγκιβωτισμένα διαστήματα, οι (a_n), (b_n) συγκλίνουν στο ίδιο όριο. Έστω
$$a_n \to \xi, \qquad b_n \to \xi.$$
Επειδή $a_n, b_n \in [a,b]$ για κάθε n, συνεπάγεται $\xi \in [a,b]$, οπότε η f είναι συνεχής στον ξ. Άρα
$$f(a_n) \to f(\xi), \qquad f(b_n) \to f(\xi)$$
και, βάσει της τρίτης σχέσης (4.15) συνεπάγεται $f(\xi) = \lambda$.
Αν $f(b) \le \lambda \le f(a)$, η απόδειξη είναι παρόμοια. □

[18] Για μία ακόμη απόδειξη του θεωρήματος ενδιάμεσης τιμής δείτε την άσκηση 4.6.13.

[19] Παρατηρήστε ότι, με τον παραπάνω τρόπο, αποδείχθηκε η ύπαρξη του *μέγιστου* ξ ώστε $f(\xi) = \lambda$. Θεωρώντας το σύνολο $A = \{x \in [a,b] \,|\, f(x) \ge \lambda\}$ και το $\xi = \inf A$, αποδεικνύουμε την ύπαρξη του *ελάχιστου* ξ ώστε $f(\xi) = \lambda$.



Σχ 21 Τρεις τιμές του ξ για τον λ.
Μία τιμή του ξ για τον λ'.

Παρατηρήστε τα εξής σε σχέση με το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής. Αν $f(a) = f(b)$, τότε, αναγκαστικά, $\lambda = f(a) = f(b)$, οπότε η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει δύο προφανείς λύσεις: τους a, b. Επίσης, αν $f(a) \neq f(b)$ και $\lambda = f(a)$ ή $\lambda = f(b)$, τότε η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει μια προφανή λύση: τον a ή τον b, αντιστοίχως. Άρα μόνο αν υποθέσουμε ότι $f(a) < \lambda < f(b)$ ή $f(b) < \lambda < f(a)$ το συμπέρασμα του θεωρήματος ενδιάμεσης τιμής αποκτά ενδιαφέρον. Φυσικά, τότε οι a, b δεν είναι λύσεις της $f(x) = \lambda$, οπότε το συμπέρασμα είναι ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε $f(\xi) = \lambda$. Άρα έχουμε και την εξής ισοδύναμη διατύπωση του θεωρήματος ενδιάμεσης τιμής:

Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b]$. Τότε για κάθε λ με την ιδιότητα $f(a) < \lambda < f(b)$ ή $f(b) < \lambda < f(a)$ υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε $f(\xi) = \lambda$.

Το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής δεν υποδεικνύει *πώς* υπολογίζουμε τον ξ. Επίσης, ο ξ μπορεί να μην είναι μοναδικός: μπορεί να υπάρχουν περισσότεροι από ένας ξ στους οποίους η συνάρτηση έχει την ίδια τιμή λ.

Παράδειγμα 4.4.16. Η $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } 0 < x \leq 1 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ δεν είναι συνεχής στο $[0, 1]$. Κανένας λ στο διάστημα $(f(0), f(1)) = (0, 1)$ δεν είναι τιμή της f.

Παράδειγμα 4.4.17. Η $f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } 0 \leq x < 1/2 \\ x - (1/2), & \text{αν } 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$ δεν είναι συνεχής στο $[0, 1]$, αλλά κάθε λ στο διάστημα $(f(0), f(1)) = (0, \frac{1}{2})$ είναι τιμή της f.

Τώρα θα δούμε τρεις τυπικές εφαρμογές του θεωρήματος ενδιάμεσης τιμής.

Παράδειγμα 4.4.18. Θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση $3x^7 - 1 = x$ έχει τουλάχιστον μία λύση στο διάστημα $[0, 1]$.
Η συνάρτηση $3x^7 - 1 - x$ είναι συνεχής στο $[0, 1]$. Είναι $3 \cdot 0^7 - 1 - 0 = -1$ και $3 \cdot 1^7 - 1 - 1 = 1$ και $-1 < 0 < 1$. Άρα υπάρχει τουλάχιστον ένας $\xi \in (0, 1)$ ώστε $3\xi^7 - 1 - \xi = 0$.

Παράδειγμα 4.4.19. Θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση $x^3 - 5x^2 - 18x + 7 = 0$ έχει τουλάχιστον μία λύση, χωρίς να μας ενδιαφέρει να αποδείξουμε ότι υπάρχει λύση σε συγκεκριμένο διάστημα.
Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 5x^2 - 18x + 7$. Βρίσκουμε μόνοι μας a, b ώστε $a < b$ και ο 0 να είναι ανάμεσα στις τιμές $f(a), f(b)$. Δοκιμάζουμε λίγο - πολύ στην τύχη: $f(0) = 7$, $f(1) = -15$. Άρα υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ ώστε $f(\xi) = 0$.
Μάλιστα, δεν είναι ανάγκη ούτε καν να θεωρήσουμε συγκεκριμένο διάστημα. Αυτό γίνεται (τώρα *όχι στην τύχη*) ως εξής. Επειδή $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, υπάρχει αρκετά μεγάλος αρνητικός a (δεν είναι ανάγκη να βρούμε συγκεκριμένη τιμή) ώστε $f(a) < 0$. Επίσης, επειδή $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, υπάρχει αρκετά μεγάλος θετικός b ώστε $f(b) > 0$. Άρα υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε $f(\xi) = 0$.

Παράδειγμα 4.4.20. Έστω $n \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε οποιονδήποτε $y > 0$.
Επειδή $\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$, υπάρχει $b > 0$ ώστε $b^n > y$. Αλλά και χωρίς αναφορά στο όριο, μπορούμε να θεωρήσουμε οποιονδήποτε $b > \max\{y, 1\}$ και τότε είναι $b > 1$ και $b > y$ και, επομένως, $b^n > b > y$.
Η συνάρτηση x^n είναι συνεχής στο διάστημα $[0, b]$ και είναι $0^n < y < b^n$. Άρα υπάρχει $x \in (0, b)$ ώστε $x^n = y$.
Αποδείξαμε, λοιπόν, με δεύτερο τρόπο το ουσιαστικό μέρος του θεωρήματος 1.2:

Για κάθε $y > 0$ υπάρχει $x > 0$ ώστε $x^n = y$.

Η απόδειξη της μοναδικότητας της λύσης της εξίσωσης $x^n = y$ είναι απλή και γίνεται όπως στην αρχική απόδειξη του θεωρήματος 1.2 και η περίπτωση $y = 0$ είναι στοιχειώδης.

Ιδού, τέλος, δύο πορίσματα του θεωρήματος ενδιάμεσης τιμής.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ BOLZANO. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b]$. Αν $f(a)f(b) < 0$, τότε υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε $f(\xi) = 0$.*

Απόδειξη. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b]$ και $f(a)f(b) < 0$.
Τότε $f(a) < 0 < f(b)$ ή $f(b) < 0 < f(a)$, οπότε υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε $f(\xi) = 0$. □

ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΣΤΑΘΕΡΟΥ ΠΡΟΣΗΜΟΥ. *Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής στο I. Αν ισχύει $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in I$, τότε είτε ισχύει $f(x) > 0$ για κάθε $x \in I$ είτε ισχύει $f(x) < 0$ για κάθε $x \in I$.*

Απόδειξη. Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής στο διάστημα I και έστω ότι ισχύει $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in I$.
Έστω (για να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι υπάρχουν $a, b \in I$ ώστε $f(a) < 0$ και $f(b) > 0$. Επειδή το I είναι διάστημα, το διάστημα $[a, b]$ ή $[b, a]$ είναι υποσύνολο του I, οπότε η f είναι συνεχής στο διάστημα αυτό. Άρα υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ή (b, a) και, επομένως, $\xi \in I$ ώστε $f(\xi) = 0$. Άτοπο.
Άρα είτε ισχύει $f(x) > 0$ για κάθε $x \in I$ είτε ισχύει $f(x) < 0$ για κάθε $x \in I$. □

Αποδείξαμε το θεώρημα του Bolzano βάσει του θεωρήματος ενδιάμεσης τιμής. Μπορούμε, όμως, να κάνουμε και το αντίστροφο.
Πράγματι, έστω ότι ισχύει το θεώρημα του Bolzano και έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b]$ και λ με την ιδιότητα $f(a) \leq \lambda \leq f(b)$ ή $f(b) \leq \lambda \leq f(a)$.
Αν $\lambda = f(a)$ ή $\lambda = f(b)$, τότε υπάρχει $\xi \in [a, b]$ ώστε $f(\xi) = \lambda$: ο a ή ο b, αντιστοίχως. Έστω, λοιπόν, $f(a) < \lambda < f(b)$ ή $f(b) < \lambda < f(a)$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = f(x) - \lambda$ για κάθε $x \in [a, b]$. Η g είναι συνεχής στο $[a, b]$ και είναι $g(a)g(b) < 0$. Άρα υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε $g(\xi) = 0$ και, επομένως, $f(\xi) = \lambda$.
Άρα αποδείξαμε το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής.
Επομένως, *το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής και το θεώρημα του Bolzano είναι ισοδύναμα.*[20]

Τώρα, μπορούμε να κάνουμε την εξής απλή και χρήσιμη γενίκευση του θεωρήματος ενδιάμεσης τιμής:

Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής στο I. Αν κάποιος λ είναι ανάμεσα σε δύο τιμές της f, τότε και ο λ είναι τιμή της f.

Πράγματι, έστω $f(a) \leq \lambda \leq f(b)$ για κάποιους $a, b \in I$. Επειδή το I είναι διάστημα, το διάστημα $[a, b]$ ή $[b, a]$ είναι υποσύνολο του I, οπότε η f είναι συνεχής στο διάστημα αυτό. Άρα υπάρχει $\xi \in [a, b]$ ή $[b, a]$ και, επομένως, $\xi \in I$ ώστε $f(\xi) = \lambda$ και έτσι ο λ είναι τιμή της f.

Ασκήσεις.

4.4.1. Έχει η συνάρτηση $x^2 - x + 1$ μέγιστη ή ελάχιστη τιμή στο διάστημα $(0, 1)$;

[20] Μπορεί, επίσης, να αποδειχτεί ότι *το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής είναι ισοδύναμο με την ιδιότητα σταθερού προσήμου.* Δείτε την άσκηση 4.4.21.

4.4.2. Αποδείξτε ότι η $\sin\frac{1}{x}$ έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο $(0,+\infty)$ και ότι παίρνει και τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της σε άπειρα σημεία του $(0,+\infty)$. Ποιά είναι αυτά τα σημεία;
Αποδείξτε ότι οι $x\sin x$, $\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ δεν είναι άνω φραγμένες ούτε κάτω φραγμένες στο $(0,+\infty)$.
Αποδείξτε ότι η $\frac{1}{1+x}\sin\frac{1}{x}$ είναι φραγμένη αλλά δεν έχει μέγιστη ούτε ελάχιστη τιμή στο $(0,+\infty)$.

4.4.3. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $x^7-3x^6+5x^5+13x^4-x^3-12x^2-5x+1=0$ έχει τουλάχιστον μία λύση στο $[0,1]$.
Αποδείξτε ότι η εξίσωση $\frac{3}{x}+\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{5}{x-3}=0$ έχει τουλάχιστον μία λύση σε καθένα από τα τρία διαστήματα $(0,1)$, $(1,2)$, $(2,3)$.
Αποδείξτε ότι η εξίσωση $e^x=x+2$ έχει τουλάχιστον δύο λύσεις.

4.4.4. Έστω $a_1<b_1<a_2<b_2<\cdots<a_n<b_n$. Αποδείξτε ότι η πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)=2(x-a_1)\cdots(x-a_n)+3(x-b_1)\cdots(x-b_n)$ έχει ακριβώς n πραγματικές ρίζες.

4.4.5. Έστω $f:I\to\mathbb{R}$ συνεχής στο διάστημα I και $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$. Αποδείξτε ότι για κάθε $x_1,\dots,x_n\in I$ υπάρχει $\xi\in I$ ώστε $f(\xi)=\frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{n}$.

4.4.6. Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $[0,1]$ και $f(0)=f(1)$. Για κάθε $k\in\mathbb{N}$ με $k\geq 2$ αποδείξτε ότι υπάρχει $x\in[0,\frac{k-1}{k})$ ώστε $f(x)=f(x+\frac{1}{k})$.

4.4.7. Έστω $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχείς στο $[a,b]$ και έστω ότι ισχύει $f(x)>g(x)$ για κάθε $x\in[a,b]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\rho>0$ ώστε να ισχύει $f(x)\geq g(x)+\rho$ για κάθε $x\in[a,b]$.

4.4.8. Θεωρώντας τη συνεχή συνάρτηση $|f|:[a,b]\to\mathbb{R}$, δώστε δεύτερη λύση της άσκησης 4.3.4.

4.4.9. Έστω $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ συνεχής στο (a,b) και έστω ότι ισχύει $f(x)\in\mathbb{Q}$ για κάθε $x\in(a,b)$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή στο (a,b).

4.4.10. [α] Έστω $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχείς στο $[a,b]$. Αν $f(a)\leq g(a)$ και $f(b)\geq g(b)$, αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi\in[a,b]$ ώστε $f(\xi)=g(\xi)$.
[β][21] Αποδείξτε ότι, αν η $f:[a,b]\to[a,b]$ είναι συνεχής στο $[a,b]$, τότε υπάρχει $\xi\in[a,b]$ ώστε $f(\xi)=\xi$.
[γ] Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής. Αν δεν ισχύει $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ ούτε $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, αποδείξτε ότι υπάρχει ξ ώστε $f(\xi)=\xi$.

4.4.11. Έστω διάστημα I και $f,g:I\to\mathbb{R}$ συνεχείς στο I ώστε να ισχύει $f(x)\neq g(x)$ για κάθε $x\in I$.
Αποδείξτε ότι είτε ισχύει $f(x)<g(x)$ για κάθε $x\in I$ είτε ισχύει $f(x)>g(x)$ για κάθε $x\in I$.
Έστω και $h:I\to\mathbb{R}$ συνεχής στο I. Αν ισχύει $h(x)=f(x)$ ή $h(x)=g(x)$ για κάθε $x\in I$, αποδείξτε ότι είτε ισχύει $h(x)=f(x)$ για κάθε $x\in I$ είτε ισχύει $h(x)=g(x)$ για κάθε $x\in I$.

4.4.12. [α] Έστω διάστημα I και $f,g:I\to\mathbb{R}$ συνεχείς στο I. Αν ισχύει $g(x)^2=f(x)^2>0$ για κάθε $x\in I$, αποδείξτε ότι είτε ισχύει $g(x)=f(x)$ για κάθε $x\in I$ είτε ισχύει $g(x)=-f(x)$ για κάθε $x\in I$.
[β] Έστω διάστημα $I\subseteq[0,+\infty)$ ή $I\subseteq(-\infty,0]$ και $f:I\to\mathbb{R}$ συνεχής στο I. Έστω ότι ισχύει $f(x)^2=x^2$ για κάθε $x\in I$. Αποδείξτε ότι είτε ισχύει $f(x)=x$ για κάθε $x\in I$ είτε ισχύει $f(x)=-x$ για κάθε $x\in I$.
Πόσες συνεχείς $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ υπάρχουν ώστε να ισχύει $f(x)^2=x^2$ για κάθε x;
[γ] Έστω διάστημα $I\subseteq[-1,1]$ και $f:I\to\mathbb{R}$ συνεχής στο I. Έστω ότι ισχύει $x^2+f(x)^2=1$ για κάθε $x\in I$. Αποδείξτε ότι είτε ισχύει $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ για κάθε $x\in I$ είτε ισχύει $f(x)=-\sqrt{1-x^2}$ για κάθε $x\in I$.

[21] Να αντιπαραβάλετε με την άσκηση 2.4.16[α]. Το αποτέλεσμα αυτό είναι μία ακόμη παραλλαγή του θεωρήματος σταθερού σημείου. Μια άλλη παραλλαγή είναι στην άσκηση 4.3.5. Δείτε την υποσημείωση της άσκησης αυτής.

4.4.13. [22] [α] Έστω διάστημα I και $f_1, \dots, f_n : I \to \mathbb{R}$ συνεχείς στο I. Έστω ότι οι $f_1, \dots, f_n$ σε κάθε $x \in I$ έχουν n *διαφορετικές* τιμές. Τί συμπεραίνετε σχετικά με τη διάταξη μεγέθους αυτών των συναρτήσεων;

Έστω, επιπλέον, ότι η $h : I \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο I και ότι σε κάθε $x \in I$ η τιμή της είναι ίση με την τιμή (στον ίδιο x) μιας από τις n αρχικές συναρτήσεις ή, ισοδύναμα, ότι ισχύει $(h(x) - f_1(x)) \cdots (h(x) - f_n(x)) = 0$ για κάθε $x \in I$. Τί συμπεραίνετε για τη σχέση της h με τις $f_1, \dots, f_n$;

[β] Έστω διάστημα $I \subseteq [1, +\infty)$ ή $I \subseteq [0, 1]$ και $h : I \to \mathbb{R}$ συνεχής στο I. Έστω ότι ισχύει $(h(x) - x)(h(x) - x^2)(h(x) - x^3) = 0$ για κάθε $x \in I$. Αποδείξτε ότι είτε ισχύει $h(x) = x$ για κάθε $x \in I$ είτε ισχύει $h(x) = x^2$ για κάθε $x \in I$ είτε ισχύει $h(x) = x^3$ για κάθε $x \in I$.

Αν $I = [0, +\infty)$, τότε - με τις ίδιες κατά τα άλλα υποθέσεις - ποιές είναι οι δυνατότητες για την h;

4.4.14. [23] Έστω $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$ και $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ συνεχής στο (a, b). Αποδείξτε ότι, αν υπάρχουν τα $\lim_{x\to a} f(x)$, $\lim_{x\to b} f(x)$ και υπάρχει $x_0 \in (a, b)$ ώστε $f(x_0) > \lim_{x\to a} f(x)$ και $f(x_0) > \lim_{x\to b} f(x)$, τότε η f έχει μέγιστη τιμή στο (a, b).

Διατυπώστε τα προηγούμενα ώστε να προκύπτει ελάχιστη τιμή της f στο (a, b).

4.4.15. Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής στο I. Έστω ότι για κάθε $x \in I$, όχι δεξιό άκρο του I, και $\delta > 0$ υπάρχει $x' \in (x, x + \delta) \cap I$ ώστε $f(x) \leq f(x')$. Αποδείξτε ότι η f είναι αύξουσα στο I.

Να αντιπαραβάλετε με το παράδειγμα της $f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } 0 \leq x < 1 \\ x - 1, & \text{αν } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ καθώς και με την άσκηση 2.4.16[β].

4.4.16. [24] Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $\mathbb{R}$. Ο x χαρακτηρίζεται *σημείο σκιάς* της f αν υπάρχει $x' > x$ ώστε $f(x') > f(x)$.[25] Έστω ότι κάθε $x \in (a, b)$ είναι σημείο σκιάς της f ενώ οι a, b δεν είναι σημεία σκιάς της f. Αποδείξτε ότι ισχύει $f(x) < f(b)$ για κάθε $x \in (a, b)$ και ότι $f(a) = f(b)$.

4.4.17. Έστω $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής και φραγμένη στο $(a + \infty)$. Αποδείξτε ότι για κάθε $b > 0$ υπάρχει ακολουθία (x_n) στο $(a, +\infty)$ ώστε $x_n \to +\infty$ και $f(x_n + b) - f(x_n) \to 0$.

4.4.18. Έστω $f, g : [a, b] \to [a, b]$ συνεχείς στο $[a, b]$. Έστω ότι η g είναι αύξουσα και $f \circ g = g \circ f$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [a, b]$ ώστε $f(\xi) = g(\xi) = \xi$.[26]

4.4.19. [27] Αποδείξτε ότι, αν η $f : I \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και ένα-προς-ένα στο διάστημα I, τότε η f είναι γνησίως μονότονη στο I.

Θεωρήστε την $f : [0, 1] \to [0, 1]$ με τύπο $f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ 1 - x, & \text{αν } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ Αποδείξτε ότι η f είναι ένα-προς-ένα, ότι είναι συνεχής μόνο στον $\frac{1}{2}$ και ότι δεν είναι μονότονη σε κανένα υποδιάστημα του $[0, 1]$.

[22] Γενίκευση της άσκησης 4.4.11. Το θέμα αυτής της άσκησης έχει σχέση με τις *αλγεβρικές συναρτήσεις* στον ορισμό 7.6. Δείτε και τις ασκήσεις 4.5.9, 4.5.10 και 4.5.11.

[23] Μια χρήσιμη επέκταση του θεωρήματος μέγιστης - ελάχιστης τιμής. Συμπλήρωμα αυτής της άσκησης αποτελεί η άσκηση 4.5.12 και οι δύο ασκήσεις γενικεύουν την πρόταση 4.13 η οποία αναφέρεται σε πολυωνυμικές συναρτήσεις άρτιου βαθμού.

[24] Το περιεχόμενο αυτής της άσκησης αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως **λήμμα του ανατέλλοντος ηλίου**. Δείτε και την άσκηση 2.5.9.

[25] Ο $f(x)$ είναι πιο χαμηλά και, επομένως, στη σκιά του $f(x')$ όταν ο ήλιος ανατέλλει από το $+\infty$.

[26] Σύμφωνα με την ορολογία στις υποσημειώσεις των ασκήσεων 4.3.5 και 4.4.10, οι f, g έχουν κοινό σταθερό σημείο.

[27] Μια σημαντική άσκηση. Γνωρίζουμε ότι μια γνησίως μονότονη συνάρτηση είναι ένα-προς-ένα. Υπό την προϋπόθεση της συνέχειας, ισχύει και το αντίστροφο.

4.4.20. Έστω διάστημα I (όχι μονοσύνολο) και $f : I \to \mathbb{R}$ ώστε για κάθε λ η εξίσωση $f(x) = \lambda$ είτε έχει ακριβώς δύο λύσεις είτε δεν έχει καμιά λύση. Αποδείξτε ότι η f δεν είναι συνεχής στο I. Μπορείτε, σε καθεμιά από τις περιπτώσεις $I = [a, b)$, $I = (a, b)$, $I = [a, b]$ να βρείτε μια συνάρτηση f με τις παραπάνω ιδιότητες;

4.4.21. Αποδείξτε ότι η ιδιότητα σταθερού προσήμου είναι ισοδύναμη με το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής.

4.4.22. Έστω μη-κενό σύνολο A το οποίο *δεν* είναι διάστημα. Χρησιμοποιώντας την πρόταση 1.4, αποδείξτε ότι υπάρχουν $a, b \in A$ με $a < b$ και συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ συνεχής στο A και λ με $f(a) < \lambda < f(b)$ ώστε να μην υπάρχει $\xi \in A$ με $f(\xi) = \lambda$. Με άλλα λόγια: κάθε $f : A \to \mathbb{R}$ συνεχής στο A έχει την ιδιότητα ενδιάμεσης τιμής στο A αν και μόνο αν το A είναι διάστημα.

4.4.23. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ μονότονη στο $[a, b]$ για την οποία ισχύει το συμπέρασμα του θεωρήματος ενδιάμεσης τιμής, δηλαδή ότι για κάθε λ με την ιδιότητα $f(a) \leq \lambda \leq f(b)$ ή $f(b) \leq \lambda \leq f(a)$ υπάρχει $\xi \in [a, b]$ ώστε $f(\xi) = \lambda$. Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο $[a, b]$.

4.4.24. [28] Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b]$.
Έστω ότι η f δεν είναι φραγμένη στο $[a, b]$. Τότε η f δεν είναι φραγμένη στο $[a, \frac{a+b}{2}]$ ή στο $[\frac{a+b}{2}, b]$. Έστω $[a_1, b_1]$ ένα από τα δύο υποδιαστήματα στο οποίο η f δεν είναι φραγμένη. Συνεχίστε επ' άπειρον, δημιουργώντας διαδοχικά διαστήματα $[a_n, b_n]$ για κάθε n ώστε να ισχύει $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$, $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2}$ και η f να μην είναι φραγμένη στο $[a_n, b_n]$. Συμπεράνατε ότι υπάρχει $\xi \in [a, b]$ ώστε $a_n \to \xi$ και $b_n \to \xi$ και η f να είναι φραγμένη κοντά στο ξ. Αποδείξτε ότι υπάρχει n_0 ώστε η f να είναι φραγμένη στο $[a_{n_0}, b_{n_0}]$ και καταλήξτε σε άτοπο. Συμπεράνατε ότι η f είναι φραγμένη στο $[a, b]$.

4.4.25. [29] Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b]$.
Έστω $u = \sup\{f(x) \,|\, x \in [a, b]\}$, όπου $u \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Αποδείξτε ότι υπάρχει (x_n) στο $[a, b]$ ώστε $f(x_n) \to u$. Συμπεράνατε ότι υπάρχει συγκλίνουσα υποακολουθία (x_{n_k}) της (x_n). Έστω $x_{n_k} \to \eta$. Αποδείξτε ότι $f(x_{n_k}) \to f(\eta)$ και $f(\eta) = u$. Συμπεράνατε ότι ο u είναι η μέγιστη τιμή της f στο $[a, b]$.

4.4.26. [30] Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.
Αν η f είναι άνω ημισυνεχής σε κάθε σημείο του $[a, b]$, αποδείξτε ότι είναι άνω φραγμένη στο $[a, b]$ και ότι έχει μέγιστη τιμή στο $[a, b]$.
Αν η f είναι κάτω ημισυνεχής σε κάθε σημείο του $[a, b]$, αποδείξτε ότι είναι κάτω φραγμένη στο $[a, b]$ και ότι έχει ελάχιστη τιμή στο $[a, b]$.

4.5 Σύνολο τιμών. Αντίστροφη συνάρτηση.

Είναι σημαντικό να γνωρίζουμε το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης f αφού κάτι τέτοιο μας δίνει τη δυνατότητα να απαντήσουμε σε ερωτήματα όπως, για παράδειγμα, αν για συγκεκριμένο λ η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει λύση ή όχι.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.11. *Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σε διάστημα, τότε το σύνολο τιμών της είναι κι αυτό διάστημα.*

Απόδειξη. Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής στο I.
Έστω $A = \{f(x) \,|\, x \in I\}$ το σύνολο τιμών της f και έστω $y_1, y_2 \in A$ και $y_1 < y < y_2$. Τότε ο y είναι ανάμεσα στις τιμές y_1 και y_2 της f, οπότε και ο y είναι τιμή της f, δηλαδή $y \in A$. Σύμφωνα με την πρόταση 1.4, το A είναι διάστημα. □

[28] Τρίτη απόδειξη του θεωρήματος φραγμένης συνάρτησης.
[29] Ταυτόχρονη απόδειξη των θεωρημάτων φραγμένης συνάρτησης και μέγιστης - ελάχιστης τιμής.
[30] Δείτε την άσκηση 4.1.18.

Ας δούμε λίγο πιο προσεκτικά την πρόταση 4.11 σε συνδυασμό και με την πρόταση 1.4. Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής στο διάστημα I και

$$l = \inf\{f(x) \,|\, x \in I\} \qquad u = \sup\{f(x) \,|\, x \in I\}.$$

Από την πρόταση 4.11 συνεπάγεται ότι το σύνολο τιμών $\{f(x) \,|\, x \in I\}$ είναι διάστημα και, σύμφωνα με την πρόταση 1.4, τα άκρα του είναι τα στοιχεία l, u του $\overline{\mathbb{R}}$. Δηλαδή,

$$\{f(x) \,|\, x \in I\} = [l, u] \text{ ή } (l, u) \text{ ή } [l, u) \text{ ή } (l, u].$$

Τώρα έχουμε τις εξής τέσσερις ανάλογες περιπτώσεις.

(i) Η f έχει ελάχιστη τιμή (δηλαδή ελάχιστο στοιχείο του συνόλου τιμών) και μέγιστη τιμή (δηλαδή μέγιστο στοιχείο του συνόλου τιμών), οπότε ο l είναι η ελάχιστη τιμή και ο u η μέγιστη τιμή της f και, επομένως, το σύνολο τιμών είναι ίσο με το $[l, u]$.

(ii) Η f δεν έχει ελάχιστη τιμή ούτε μέγιστη τιμή, οπότε το σύνολο τιμών είναι ίσο με το (l, u).

(iii) Η f έχει ελάχιστη τιμή αλλά όχι μέγιστη τιμή, οπότε ο l είναι η ελάχιστη τιμή της f και, επομένως, το σύνολο τιμών είναι ίσο με το $[l, u)$.

(iv) Η f έχει μέγιστη τιμή αλλά όχι ελάχιστη τιμή, οπότε ο u είναι η μέγιστη τιμή της f και, επομένως, το σύνολο τιμών είναι ίσο με το $(l, u]$.

Με άλλα λόγια, *όταν έχουμε να προσδιορίσουμε το σύνολο τιμών συνάρτησης συνεχούς σε διάστημα πρέπει μόνο να βρούμε το infimum και το supremum του συνόλου τιμών και να δούμε αν κανένα ή το ένα ή και τα δύο από αυτά είναι τιμή της συνάρτησης.*

Μπορεί να δοθεί πιο λεπτομερής περιγραφή του συνόλου τιμών συνάρτησης συνεχούς σε διάστημα οποιουδήποτε τύπου. Δείτε σχετικά την άσκηση 4.5.13. Στα επόμενα θα δούμε μερικές χρήσιμες χαρακτηριστικές περιπτώσεις στις οποίες το πρόβλημα του προσδιορισμού του συνόλου τιμών συνάρτησης έχει απλή - τουλάχιστον θεωρητικά - λύση.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.12. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b]$. Τότε το σύνολο τιμών $\{f(x) \,|\, x \in [a, b]\}$ είναι το κλειστό και φραγμένο διάστημα με άκρα την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της f στο I.*

Απόδειξη. Συνέπεια της πρότασης 4.11 και του θεωρήματος μέγιστης - ελάχιστης τιμής. □

Άρα για να βρούμε το σύνολο τιμών συνάρτησης συνεχούς σε κλειστό και φραγμένο διάστημα είναι αρκετό να υπολογίσουμε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της στο διάστημα αυτό. Αυτό δεν είναι πάντοτε εφικτό. Στο κεφάλαιο 5 θα γνωρίσουμε, με τη βοήθεια των παραγώγων, μερικές μεθόδους υπολογισμού αυτών των τιμών της συνάρτησης. Πάντως, σε μερικές απλές περιπτώσεις οι υπολογισμοί αυτοί είναι και τώρα εφικτοί.

Παράδειγμα 4.5.1. Η συνάρτηση x^2 είναι αύξουσα στο διάστημα $[1, 4]$, οπότε η ελάχιστη τιμή της στο $[1, 4]$ είναι ο $1^2 = 1$ και η μέγιστη τιμή της ο $4^2 = 16$. Άρα το σύνολο τιμών της x^2 που αντιστοιχεί στο $[1, 4]$ είναι το διάστημα $[1, 16]$.

Παράδειγμα 4.5.2. Η συνάρτηση $\frac{1}{x}$ είναι φθίνουσα στο διάστημα $[\frac{1}{2}, 3]$, οπότε η ελάχιστη τιμή της στο $[\frac{1}{2}, 3]$ είναι ο $\frac{1}{3}$ και η μέγιστη τιμή της ο 2. Άρα το σύνολο τιμών της $\frac{1}{x}$ που αντιστοιχεί στο $[\frac{1}{2}, 3]$ είναι το διάστημα $[\frac{1}{3}, 2]$.

Παράδειγμα 4.5.3. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = x^2 - 6x + 5 = (x - 3)^2 - 4$ στο διάστημα $[-1, 6]$. Η f είναι φθίνουσα στο $[-1, 3]$ και αύξουσα στο $[3, 6]$. Άρα η ελάχιστη τιμή της f στο $[-1, 6]$ είναι ο $f(3) = -4$ και η μέγιστη τιμή της ο $\max\{f(-1), f(6)\} = 12$. Άρα το σύνολο τιμών της f που αντιστοιχεί στο $[-1, 6]$ είναι το διάστημα $[-4, 12]$.

Θα δούμε, τώρα, τη σημαντική περίπτωση υπολογισμού του συνόλου τιμών πολυωνυμικής συνάρτησης.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.13. [31] *Έστω η συνάρτηση* $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$.
[α] *Έστω ότι η* P *είναι περιττού βαθμού, δηλαδή* $n = 2k - 1$, $k \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$. *Τότε το σύνολο τιμών της* P *είναι το* $(-\infty, +\infty)$.
[β] *Έστω ότι η* P *είναι άρτιου βαθμού, δηλαδή* $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$. *Αν* $a_n > 0$, *τότε η* P *έχει ελάχιστη τιμή, έστω* l, *και το σύνολο τιμών της είναι το* $[l, +\infty)$. *Αν* $a_n < 0$, *τότε η* P *έχει μέγιστη τιμή, έστω* u, *και το σύνολο τιμών της είναι το* $(-\infty, u]$.

Απόδειξη. [α] Έστω $a_n > 0$, οπότε $\lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty$ και $\lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$. Άρα η P δεν είναι κάτω φραγμένη ούτε άνω φραγμένη, οπότε το σύνολο τιμών της έχει ως infimum το $-\infty$ και ως supremum το $+\infty$. Σύμφωνα με την πρόταση 4.11, το σύνολο τιμών της P είναι το $(-\infty, +\infty)$.
Αν $a_n < 0$, τότε $\lim_{x\to-\infty} P(x) = +\infty$ και $\lim_{x\to+\infty} P(x) = -\infty$ και η απόδειξη είναι ίδια.
[β] Έστω $a_n > 0$. Επειδή $\lim_{x\to-\infty} P(x) = \lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$, συνεπάγεται ότι υπάρχουν a, b ώστε $a < 0 < b$ και ώστε να ισχύει

$$P(0) < P(x) \qquad \text{για } \ x \in (-\infty, a) \cup (b, +\infty). \tag{4.16}$$

Τώρα, η P είναι συνεχής στο $[a, b]$, οπότε έχει ελάχιστη τιμή, έστω l, στο διάστημα αυτό. Δηλαδή,

$$l \leq P(x) \qquad \text{για } \ x \in [a, b]. \tag{4.17}$$

Επειδή $0 \in [a, b]$, είναι $l \leq P(0)$, οπότε, λόγω της (4.16), ισχύει

$$l < P(x) \qquad \text{για } \ x \in (-\infty, a) \cup (b, +\infty). \tag{4.18}$$

Τώρα από τις (4.17) και (4.18) συνεπάγεται ότι ο l είναι η ελάχιστη τιμή της P στο $\mathbb{R}$.
Επίσης, πάλι από τα όρια $\lim_{x\to-\infty} P(x) = \lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$ συνεπάγεται ότι η P δεν είναι άνω φραγμένη. Άρα το σύνολο τιμών της P έχει ως ελάχιστο στοιχείο τον l και ως supremum το $+\infty$. Άρα το σύνολο τιμών της P είναι το $[l, +\infty)$.
Αν $a_n < 0$, η απόδειξη είναι παρόμοια. $\square$

Παράδειγμα 4.5.4. Το σύνολο τιμών της $-2x^5 + 4x^4 - 3x^3 - x^2 - 1$ είναι το $(-\infty, +\infty)$.

Παράδειγμα 4.5.5. Έστω η $P(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 7 = x^2(x-2)^2 - 7$. Προφανώς, ισχύει $P(x) \geq -7$ για κάθε x και $-7 = P(0) = P(2)$. Άρα ο -7 είναι η ελάχιστη τιμή της P και το σύνολο τιμών της είναι το $[-7, +\infty)$.

Τώρα θα εξετάσουμε τη σημαντική ειδική περίπτωση που η συνάρτηση εκτός από συνεχής είναι *και γνησίως μονότονη* σε διάστημα.[32] Πριν διατυπώσουμε την πρόταση 4.14 ας θυμηθούμε ότι, σύμφωνα με το θεώρημα 3.2, αν μια συνάρτηση είναι μονότονη σε διάστημα, τότε υπάρχουν τα (πλευρικά, μέσα από το διάστημα) όριά της στα άκρα του διαστήματος.

Γνωρίζουμε, επίσης, ότι μια γνησίως μονότονη συνάρτηση είναι ένα-προς-ένα. Ειδικότερα, αν η $f : I \to J$ είναι γνησίως μονότονη στο διάστημα I με σύνολο τιμών ένα διάστημα J, τότε ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : J \to I$ με πεδίο ορισμού το J και σύνολο τιμών το I. Μάλιστα, αν η f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα, τότε η f^{-1} είναι, αντιστοίχως, γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα. Το επιπλέον στοιχείο, το οποίο εισάγεται στην πρόταση 4.14, είναι η *συνέχεια* της f και της f^{-1}.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.14. [α] *Έστω* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *γνησίως αύξουσα και συνεχής στο* $[a, b]$. *Τότε το σύνολο τιμών της* f *είναι το* $[A, B]$, *όπου* $A = f(a)$, $B = f(b)$. *Επίσης, η* $f^{-1} : [A, B] \to [a, b]$ *είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο* $[A, B]$.

[31] Για μια άμεση γενίκευση αυτής της πρότασης δείτε την άσκηση 4.5.12.
[32] Οι μέθοδοι του κεφαλαίου 5 επιτρέπουν να χωρίζουμε τα πεδία ορισμού των περισσότερων συναρτήσεων που εμφανίζονται στην πράξη σε διαστήματα στα οποία αυτές είναι γνησίως μονότονες.

[β] *Έστω $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$ και $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ γνησίως αύξουσα και συνεχής στο (a, b). Τότε το σύνολο τιμών της f είναι το (A, B), όπου $A = \lim_{x\to a} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$, $B = \lim_{x\to b} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$. Επίσης, η $f^{-1} : (A, B) \to (a, b)$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο (A, B).*

[γ] *Έστω $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$ και $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $(a, b]$. Τότε το σύνολο τιμών της f είναι το $(A, B]$, όπου $A = \lim_{x\to a} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$, $B = f(b)$. Επίσης, η $f^{-1} : (A, B] \to (a, b]$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $(A, B]$.*

[δ] *Έστω $b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$ και $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[a, b)$. Τότε το σύνολο τιμών της f είναι το $[A, B)$, όπου $A = f(a)$, $B = \lim_{x\to b} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$. Επίσης, η $f^{-1} : [A, B) \to [a, b)$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[A, B)$.*

Τα συμπεράσματα των [α] - [δ] *ισχύουν και στην περίπτωση που η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής. Η μόνη διαφορά είναι ότι τα άκρα A, B αλλάζουν διάταξη. Για παράδειγμα, στην περίπτωση* [α] *πρέπει να είναι $[B, A]$ αντί $[A, B]$.*

Απόδειξη. Αρχικά θα ασχοληθούμε με τη *μορφή* του συνόλου τιμών της f στις διάφορες περιπτώσεις. *Η βάση μας είναι η πρόταση 4.11 και το θεώρημα 3.2.*

[α] Σύμφωνα με την πρόταση 4.12 ή ακόμη και με την πρόταση 4.11, το σύνολο τιμών της f είναι το $[A, B]$, όπου $A = f(a)$, $B = f(b)$, οπότε η $f^{-1} : [A, B] \to [a, b]$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[A, B]$ με σύνολο τιμών το $[a, b]$.

[β] Από το θεώρημα 3.2 και τα σχόλια μετά από αυτό γνωρίζουμε ότι το infimum και το supremum του συνόλου τιμών της f είναι τα όρια $A = \lim_{x\to a} f(x)$ και $B = \lim_{x\to b} f(x)$, αντιστοίχως, και ότι ισχύει $A < f(x) < B$ για κάθε $x \in (a, b)$. Άρα, βάσει της πρότασης 4.11 (και της συζήτησης μετά από αυτήν), το σύνολο τιμών της f είναι ίσο με το διάστημα (A, B), οπότε η $f^{-1} : (A, B) \to (a, b)$ είναι γνησίως αύξουσα στο (A, B) με σύνολο τιμών το (a, b).

[γ] Τώρα το infimum του συνόλου τιμών της f είναι το όριο $A = \lim_{x\to a} f(x)$ και ισχύει $A < f(x)$ για κάθε $x \in (a, b]$. Η τιμή $B = f(b)$ είναι το μέγιστο στοιχείο του συνόλου τιμών. Άρα το σύνολο τιμών της f είναι ίσο με το διάστημα $(A, B]$, οπότε η $f^{-1} : (A, B] \to (a, b]$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(A, B]$ με σύνολο τιμών το $(a, b]$.

[δ] Το supremum του συνόλου τιμών της f είναι το όριο $B = \lim_{x\to b} f(x)$ και ισχύει $f(x) < B$ για κάθε $x \in [a, b)$. Η τιμή $A = f(a)$ είναι το ελάχιστο στοιχείο του συνόλου τιμών. Άρα το σύνολο τιμών της f είναι ίσο με το διάστημα $[A, B)$, οπότε η $f^{-1} : [A, B) \to [a, b)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[A, B)$ με σύνολο τιμών το $[a, b)$.

Τέλος, οι αλλαγές που πρέπει να γίνουν όταν η f είναι γνησίως φθίνουσα είναι προφανείς.

Και τώρα ερχόμαστε στην απόδειξη της συνέχειας της αντίστροφης συνάρτησης.
Σε καθεμιά από τις παραπάνω περιπτώσεις η $f^{-1} : J \to I$ είναι γνησίως μονότονη σε ένα *διάστημα* J και το σύνολο τιμών της είναι ένα *διάστημα* I. Ας υποθέσουμε ότι η f^{-1} *δεν* είναι συνεχής σε κάποιο $\eta \in J$. Επειδή το J είναι διάστημα, το η είναι τουλάχιστον από αριστερά του ή από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του J. Η f^{-1} είναι μονότονη, οπότε, σύμφωνα με την συζήτηση μετά από την πρόταση 4.1, ανάμεσα στις τιμές της f^{-1} παρεμβάλλεται τουλάχιστον ένα ανοικτό διάστημα το οποίο δεν περιέχει καμιά τιμή της f^{-1}. Αυτό, όμως, είναι άτοπο, διότι το σύνολο τιμών της f^{-1} είναι *ολόκληρο* το διάστημα I. Άρα η f^{-1} είναι συνεχής σε κάθε $\eta \in J$. □

Παράδειγμα 4.5.6. Έστω $f : (1, 3) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = 2x^2 + 1$. Η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $(1, 3)$ και $\lim_{x\to 1} f(x) = 3$, $\lim_{x\to 3} f(x) = 19$. Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα $(3, 19)$. Η $f^{-1} : (3, 19) \to (1, 3)$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $(3, 19)$. Επειδή η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $(3, 19)$, το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα με άκρα $\lim_{y\to 3} f^{-1}(y)$ και $\lim_{y\to 19} f^{-1}(y)$. Όμως το σύνολο τιμών της είναι το πεδίο ορισμού της f, δηλαδή το $(1, 3)$. Άρα $\lim_{y\to 3} f^{-1}(y) = 1$ και $\lim_{y\to 19} f^{-1}(y) = 3$.
Είναι εύκολο να βρούμε τον τύπο της f^{-1}. Αυτός είναι: $f^{-1}(y) = \sqrt{(y-1)/2}$. Από τον τύπο της f^{-1} επιβεβαιώνεται η συνέχειά της καθώς και τα δύο όριά της στον 3 και στον 19.

Παράδειγμα 4.5.7. Έστω $f : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$. Η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $(1, +\infty)$ και $\lim_{x\to 1} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 1$. Άρα το σύνολο τιμών

της f είναι το $(1,+\infty)$. Η $f^{-1}:(1,+\infty)\to(1,+\infty)$ είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $(1,+\infty)$. Επειδή η f^{-1} είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $(1,+\infty)$, το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα με άκρα $\lim_{y\to+\infty} f^{-1}(y)$ και $\lim_{y\to 1} f^{-1}(y)$. Επειδή το σύνολο τιμών της είναι το $(1,+\infty)$, συνεπάγεται $\lim_{y\to+\infty} f^{-1}(y)=1$ και $\lim_{y\to 1} f^{-1}(y)=+\infty$.
Ο τύπος της f^{-1} είναι $f^{-1}(y)=\frac{y+1}{y-1}$. Άρα επιβεβαιώνεται η συνέχεια της f^{-1} και τα δύο όριά της στον 1 και στο $+\infty$.

Στα προηγούμενα παραδείγματα ο υπολογισμός του τύπου της f^{-1} είναι απλός. Από τον τύπο της f^{-1} προκύπτει αμέσως ότι αυτή είναι συνεχής. Όμως, η συνέχεια της f^{-1} προκύπτει και από την πρόταση 4.14 και αυτό είναι χρήσιμο σε περιπτώσεις που δεν μπορεί να υπολογιστεί ο τύπος της f^{-1}.

Παράδειγμα 4.5.8. Η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=x^5+x^3+x$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$ (το γνωρίζαμε, διότι η f είναι πολυωνυμική συνάρτηση περιττού βαθμού). Άρα η $f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα και *συνεχής* στο $\mathbb{R}$. Επίσης, από το σύνολο τιμών της f^{-1} υπολογίζουμε τα όρια $\lim_{y\to-\infty} f^{-1}(y)=-\infty$ και $\lim_{y\to+\infty} f^{-1}(y)=+\infty$.
Μπορείτε να δείτε ότι δεν είναι εύκολο να βρεθεί ο τύπος της f^{-1}.

Παράδειγμα 4.5.9. Η $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=-xe^x+1$ είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $[0,+\infty)$. Είναι $f(0)=1$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$, οπότε το σύνολο τιμών της f είναι το $(-\infty,1]$ και η $f^{-1}:(-\infty,1]\to[0,+\infty)$ είναι γνησίως φθίνουσα και *συνεχής* στο $(-\infty,1]$. Τέλος, από το σύνολο τιμών της f^{-1} υπολογίζουμε το όριο $\lim_{y\to-\infty} f^{-1}(y)=+\infty$.
Είναι αδύνατο να βρεθεί ο τύπος της f^{-1}, αφού δεν υπάρχει τύπος για τη λύση x της $-xe^x+1=y$.

Τελειώνουμε αυτήν την ενότητα με μερικά πιο σημαντικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 4.5.10. Έστω $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$. Στο θεώρημα 1.2 αλλά και στο παράδειγμα 4.4.20 αποδείξαμε ότι για κάθε $y\in[0,+\infty)$ η εξίσωση $x^n=y$ έχει μοναδική λύση στο $[0,+\infty)$. Ήδη στον ορισμό 1.7 την λύση αυτή τήν έχουμε συμβολίσει $\sqrt[n]{y}$ και τήν έχουμε ονομάσει n-οστή ρίζα του y. Επίσης, έχουμε ήδη αποδείξει τις βασικές ιδιότητες της συνάρτησης $x=\sqrt[n]{y}$, συμπεριλαμβανομένης της συνέχειάς της στο πεδίο ορισμού της $[0,+\infty)$.
Τώρα θα δούμε έναν δεύτερο τρόπο προσέγγισης βασισμένο στην πρόταση 4.14.
Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση $y=x^n$ *περιορισμένη στο* $[0,+\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[0,+\infty)$ και ότι $0^n=0$ και $\lim_{x\to+\infty} x^n=+\infty$. Από την πρόταση 4.14 συνεπάγεται ότι το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι το $[0,+\infty)$ και ότι η αντίστροφη συνάρτηση, την οποία συμβολίζουμε $x=\sqrt[n]{y}$, είναι γνησίως αύξουσα και *συνεχής* στο $[0,+\infty)$. Το σύνολο τιμών της $x=\sqrt[n]{y}$ είναι το ίδιο με το πεδίο ορισμού της αρχικής συνάρτησης, δηλαδή με το $[0,+\infty)$.
Από την συνέχεια της $x=\sqrt[n]{y}$ συμπεραίνουμε το (ήδη γνωστό) όριο

$$\lim_{y\to\eta}\sqrt[n]{y}=\sqrt[n]{\eta}\qquad \text{για κάθε } \eta\geq 0.$$

Επίσης, επειδή το σύνολο τιμών της $x=\sqrt[n]{y}$ είναι το $[0,+\infty)$ και η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής, πάλι από την πρόταση 4.14 συνεπάγεται

$$\lim_{y\to+\infty}\sqrt[n]{y}=+\infty.$$

Παράδειγμα 4.5.11. Έστω $a>1$. Γνωρίζουμε ότι η εκθετική συνάρτηση $y=a^x$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $(-\infty,+\infty)$ και ότι $\lim_{x\to-\infty} a^x=0$ και $\lim_{x\to+\infty} a^x=+\infty$, οπότε βάσει της πρότασης 4.14 το σύνολο τιμών της είναι το $(0,+\infty)$.
Τώρα, επίσης γνωρίζουμε την αντίστροφη συνάρτηση, δηλαδή την $x=\log_a y$, και τις βασικές της ιδιότητες, όπως ότι είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $(0,+\infty)$ και ότι έχει σύνολο τιμών το $(-\infty,+\infty)$.
Τώρα θα δούμε πώς μπορούμε να εισαγάγουμε την λογαριθμική συνάρτηση και να αποδείξουμε

αυτές τις ιδιότητες με τη βοήθεια της πρότασης 4.14.
Από τις πιο πάνω ιδιότητες της $y = a^x$ συνεπάγεται από την πρόταση 4.14 ότι η αντίστροφη συνάρτηση, την οποία συμβολίζουμε $x = \log_a y$, είναι γνησίως αύξουσα και *συνεχής* στο $(0, +\infty)$. Το σύνολο τιμών της $x = \log_a y$ είναι ίδιο με το πεδίο ορισμού της $y = a^x$, δηλαδή με το $(-\infty, +\infty)$.
Από την συνέχεια της $x = \log_a y$ συμπεραίνουμε ότι

$$\log_{y \to \eta} \log_a y = \log_a \eta \qquad \text{για κάθε } \eta.$$

Επίσης, επειδή το σύνολο τιμών της $x = \log_a y$ είναι το $(-\infty, +\infty)$ και η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής, από την πρόταση 4.14 συνεπάγεται

$$\lim_{y \to +\infty} \log_a y = +\infty, \qquad \lim_{y \to 0+} \log_a y = -\infty.$$

Με τον ίδιο τρόπο μπορεί κανείς να χειριστεί την περίπτωση $0 < a < 1$.
Επίσης, με τον ίδιο τρόπο μπορεί κανείς να εισαγάγει και να χειριστεί την εκθετική συνάρτηση ως την αντίστροφη της λογαριθμικής, αποδεχόμενος την μονοτονία και τη συνέχεια της λογαριθμικής συνάρτησης.

Στα επόμενα θα ορίσουμε τις αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις καθώς και τις υπερβολικές και τις αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις.

4.5.1 Οι αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

Έστω ο περιορισμός της cos στο $[0, \pi]$. Η $\cos : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $[0, \pi]$. Επειδή $\cos 0 = 1$ και $\cos \pi = -1$, το σύνολο τιμών είναι το $[-1, 1]$. Άρα ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση.

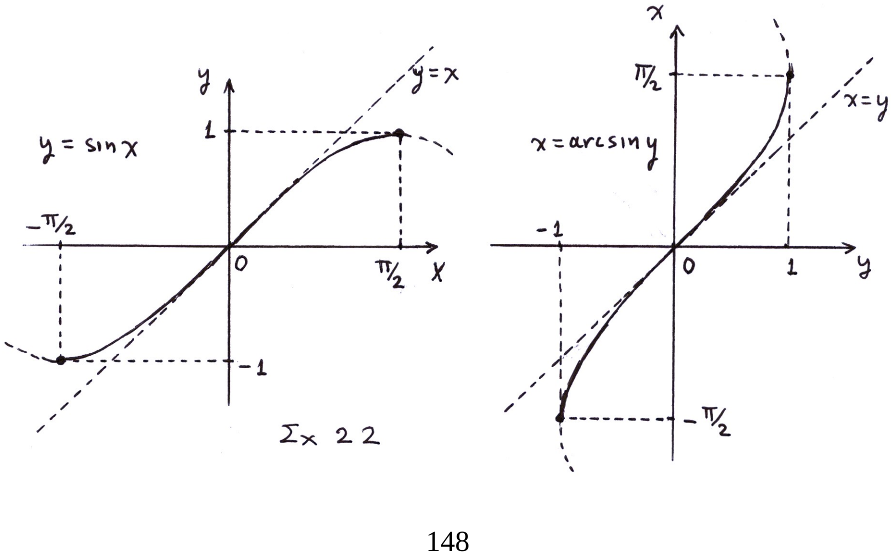
ΟΡΙΣΜΟΣ 4.9. *Η αντίστροφη συνάρτηση της* $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ *ονομάζεται* **τόξο συνημιτόνου** *και συμβολίζεται* $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$.

Επομένως, αν $x \in [0, \pi]$, $y \in [-1, 1]$, τότε: $x = \arccos y$ αν και μόνο αν $\cos x = y$. Η $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $[-1, 1]$ με σύνολο τιμών το $[0, \pi]$.

Έστω ο περιορισμός της sin στο $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Η $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Επειδή $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$ και $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, το σύνολο τιμών είναι το $[-1, 1]$. Άρα ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.10. *Η αντίστροφη συνάρτηση της* $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ *ονομάζεται* **τόξο ημιτόνου** *και συμβολίζεται* $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Δείτε το σχήμα 22.

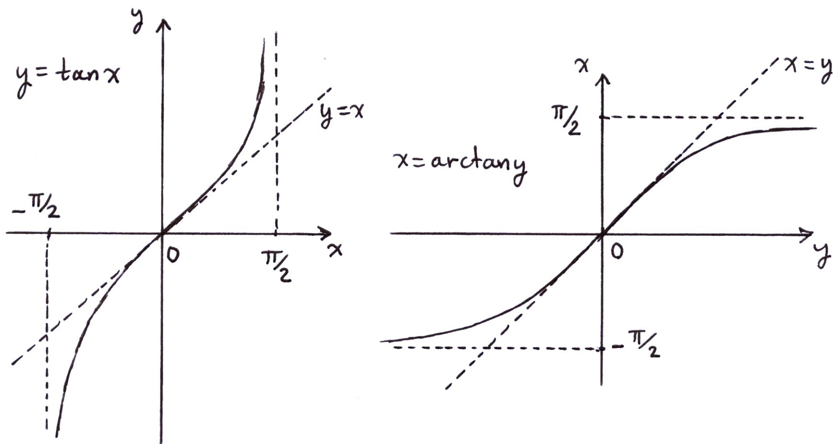


Επομένως, αν $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $y \in [-1, 1]$, τότε: $x = \arcsin y$ αν και μόνο αν $\sin x = y$. Η $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[-1, 1]$ με σύνολο τιμών το $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Έστω ο περιορισμός της tan στο $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Η $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Επειδή $\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}+} \tan x = -\infty$ και $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} \tan x = +\infty$, το σύνολο τιμών είναι το $(-\infty, +\infty)$. Άρα ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.11. *Η αντίστροφη συνάρτηση της* $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to (-\infty, +\infty)$ *ονομάζεται* **τόξο εφαπτομένης** *και συμβολίζεται* $\arctan : (-\infty, +\infty) \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Δείτε το σχήμα 23.



Σχ 23

Επομένως, αν $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $y \in (-\infty, +\infty)$, τότε: $x = \arctan y$ αν και μόνο αν $\tan x = y$. Η $\arctan : (-\infty, +\infty) \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $(-\infty, +\infty)$ με σύνολο τιμών το $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.
Βρίσκουμε, επίσης, τα όρια

$$\lim_{y \to -\infty} \arctan y = -\frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{y \to +\infty} \arctan y = \frac{\pi}{2}.$$

Τέλος, θεωρούμε τον περιορισμό της cot στο $(0, \pi)$. Η $\cot : (0, \pi) \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $(0, \pi)$. Επειδή $\lim_{x \to 0+} \cot x = +\infty$ και $\lim_{x \to \pi-} \cot x = -\infty$, το σύνολο τιμών είναι το $(-\infty, +\infty)$. Άρα ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.12. *Η αντίστροφη συνάρτηση της* $\cot : (0, \pi) \to (-\infty, +\infty)$ *ονομάζεται* **τόξο συνεφαπτομένης** *και συμβολίζεται* $\operatorname{arccot} : (-\infty, +\infty) \to (0, \pi)$.

Επομένως, αν $x \in (0, \pi)$, $y \in (-\infty, +\infty)$, τότε: $x = \operatorname{arccot} y$ αν και μόνο αν $\cot x = y$. Η $\operatorname{arccot} : (-\infty, +\infty) \to (0, \pi)$ είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $(-\infty, +\infty)$ με σύνολο τιμών το $(0, \pi)$.
Επίσης, είναι

$$\lim_{y \to -\infty} \operatorname{arccot} y = \pi, \qquad \lim_{y \to +\infty} \operatorname{arccot} y = 0.$$

4.5.2 Οι υπερβολικές και οι αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.13. *Ορίζουμε τις συναρτήσεις* **υπερβολικό συνημίτονο**, **υπερβολικό ημίτονο**, **υπερβολική εφαπτόμενη** *και* **υπερβολική συνεφαπτόμενη** *με αντίστοιχους τύπους:*

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad \coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

Οι τρείς πρώτες συναρτήσεις ορίζονται για κάθε x ενώ η τελευταία για κάθε $x \neq 0$.

Οι τέσσερις συναρτήσεις είναι συνεχείς και είναι εύκολο να αποδειχθούν οι εξής τύποι:

$$(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1, \qquad \tanh x = \tfrac{\sinh x}{\cosh x}, \qquad \coth x = \tfrac{\cosh x}{\sinh x},$$
$$\cosh(x_1 + x_2) = \cosh x_1 \cosh x_2 + \sinh x_1 \sinh x_2,$$
$$\sinh(x_1 + x_2) = \cosh x_1 \sinh x_2 + \sinh x_1 \cosh x_2.$$

Οι τύποι αυτοί μοιάζουν με ανάλογους τύπους των τριγωνομετρικών συναρτήσεων $\cos x$, $\sin x$, $\tan x$ και $\cot x$. Η αναλογία δεν είναι τυχαία: εύκολα βλέπουμε ότι

$$e^x = \cosh x + \sinh x, \qquad e^{-x} = \cosh x - \sinh x$$

και θυμόμαστε και τους ανάλογους τύπους

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \qquad e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

από τη στοιχειώδη μιγαδική ανάλυση.

Εύκολα αποδεικνύεται ότι η cosh είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Επειδή $\cosh 0 = 1$ και $\lim_{x\to+\infty} \cosh x = +\infty$, το σύνολο τιμών της cosh που αντιστοιχεί στο $[0, +\infty)$ είναι το $[1, +\infty)$. Η cosh είναι προφανώς άρτια, οπότε είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ με αντίστοιχο σύνολο τιμών το $[1, +\infty)$. Επομένως, η cosh δεν είναι ένα-προς-ένα στο $\mathbb{R}$. Όμως, ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση του περιορισμού της cosh στο $[0, +\infty)$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.14. *Η αντίστροφη συνάρτηση της* $\cosh : [0, +\infty) \to [1, +\infty)$ *ονομάζεται* **τόξο υπερβολικού συνημιτόνου** *και συμβολίζεται* $\operatorname{arccosh} : [1, +\infty) \to [0, +\infty)$.

Η $\operatorname{arccosh} : [1, +\infty) \to [0, +\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[1, +\infty)$ με σύνολο τιμών το $[0, +\infty)$. Με έναν απλό υπολογισμό βρίσκουμε ότι έχει τύπο

$$\operatorname{arccosh} y = \log(y + \sqrt{y^2 - 1}) \qquad \text{για } \ 1 \leq y.$$

Η sinh είναι περιττή και γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, +\infty)$. Επίσης, $\lim_{x\to-\infty} \sinh x = -\infty$ και $\lim_{x\to+\infty} \sinh x = +\infty$, οπότε το σύνολο τιμών της sinh είναι το $(-\infty, +\infty)$. Άρα ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.15. *Η αντίστροφη συνάρτηση της* $\sinh : (-\infty, +\infty) \to (-\infty, +\infty)$ *ονομάζεται* **τόξο υπερβολικού ημιτόνου** *και συμβολίζεται* $\operatorname{arcsinh} : (-\infty, +\infty) \to (-\infty, +\infty)$.

Η $\operatorname{arcsinh} : (-\infty, +\infty) \to (-\infty, +\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $(-\infty, +\infty)$ με σύνολο τιμών το $(-\infty, +\infty)$ και εύκολα βρίσκουμε ότι έχει τύπο

$$\operatorname{arcsinh} y = \log(y + \sqrt{y^2 + 1}) \qquad \text{για κάθε } \ y.$$

Η tanh είναι περιττή και εύκολα αποδεικνύεται ότι είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, +\infty)$. Είναι $\lim_{x\to-\infty} \tanh x = -1$ και $\lim_{x\to+\infty} \tanh x = 1$, οπότε το σύνολο τιμών της tanh είναι το $(-1, 1)$. Άρα ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.16. *Η αντίστροφη συνάρτηση της* $\tanh : (-\infty, +\infty) \to (-1, 1)$ *ονομάζεται* **τόξο υπερβολικής εφαπτομένης** *και συμβολίζεται* $\operatorname{arctanh} : (-1, 1) \to (-\infty, +\infty)$.

Η $\operatorname{arctanh} : (-1, 1) \to (-\infty, +\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $(-1, 1)$ με σύνολο τιμών το $(-\infty, +\infty)$. Εύκολα βρίσκουμε ότι

$$\operatorname{arctanh} y = \tfrac{1}{2} \log \tfrac{1+y}{1-y} \qquad \text{για } \ -1 < y < 1.$$

Η coth είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$ και έχουμε ότι $\lim_{x\to0+} \coth x = +\infty$ και $\lim_{x\to+\infty} \coth x = 1$, οπότε το σύνολο τιμών της coth που αντιστοιχεί στο $(0, +\infty)$ είναι το $(1, +\infty)$. Η coth είναι περιττή, οπότε είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$ με αντίστοιχο σύνολο τιμών το $(-\infty, -1)$. Άρα η coth με πεδίο ορισμού το $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ είναι ένα-προς-ένα με σύνολο τιμών το $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Άρα ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.17. *Η αντίστροφη συνάρτηση της* $\coth : (-\infty,0)\cup(0,+\infty) \to (-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ *ονομάζεται* **τόξο υπερβολικής συνεφαπτομένης** *και συμβολίζεται* $\operatorname{arccoth} : (-\infty,-1)\cup(1,+\infty) \to (-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

Η $\operatorname{arccoth} : (-\infty,-1)\cup(1,+\infty) \to (-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,-1)$ και $(1,+\infty)$ με αντίστοιχα σύνολα τιμών τα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$. Προσέξτε: η arccoth *δεν* είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ παρά το ότι είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα $(-\infty,-1)$ και $(1,+\infty)$. Εύκολα βρίσκουμε τον τύπο

$$\operatorname{arccoth} y = \tfrac{1}{2}\log\tfrac{y+1}{y-1} \qquad \text{για } \ y<-1 \ \text{ ή } \ 1<y.$$

Οι συναρτήσεις arctanh και arccoth σχηματίζουν *μία* συνάρτηση με τύπο $x=\frac{1}{2}\log\left|\frac{y+1}{y-1}\right|$ με πεδίο ορισμού το $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$ και σύνολο τιμών το $(-\infty,+\infty)$.

Ασκήσεις.

4.5.1. Ποιά είναι τα σύνολα τιμών των $-2x^3+x^2-5x+6$, x^4-2x^2+7, $x^6-3x^4+3x^2-1$;

4.5.2. Βρείτε τα σύνολα τιμών της $x+\frac{1}{x}$ στα διαστήματα $(-\infty,-1]$, $[-1,0)$, $(0,1]$, $[1,+\infty)$.

4.5.3. Πόσες *ακριβώς* λύσεις έχει η εξίσωση $\frac{3}{x}+\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{5}{x-3}=c$; Η απάντηση πιθανόν να εξαρτάται από την τιμή της παραμέτρου c.

4.5.4. Έστω οι συναρτήσεις x^2+2x στο $[0,1]$, $\frac{1}{x}$ στο $(0,1]$ και $\frac{1}{x^2+1}$ στο $[0,+\infty)$. Αποδείξτε ότι είναι γνησίως μονότονες και βρείτε τα σύνολα τιμών τους. Τί συμπεραίνετε για τις αντίστροφες συναρτήσεις;

4.5.5. Έστω η συνάρτηση $P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$. Αν $a_0a_n<0$, αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi>0$ ώστε $P(\xi)=0$.

4.5.6. Βρείτε τους αντίστροφους τριγωνομετρικούς αριθμούς των 0, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ και ±1.

4.5.7. Αποδείξτε ότι ισχύει $\arctan y+\operatorname{arccot} y=\frac{\pi}{2}$ για κάθε y και $\arccos y+\arcsin y=\frac{\pi}{2}$ για κάθε $y\in[-1,1]$.
Για ποιούς y ισχύουν οι ισότητες $y=\cos(\arccos y)$ και $y=\sin(\arcsin y)$; Για ποιούς y ισχύουν οι ισότητες $y=\tan(\arctan y)$ και $y=\cot(\operatorname{arccot} y)$;
Αποδείξτε ότι ισχύει $\arctan y+\arctan\frac{1}{y}=\frac{\pi}{2}$ για κάθε $y>0$ και $\arctan y+\arctan\frac{1}{y}=-\frac{\pi}{2}$ για κάθε $y<0$.
Αποδείξτε ότι ισχύει $\arccos(\cos x)=x$ για κάθε $x\in[0,\pi]$. Γενικότερα, με τί είναι ίση η παράσταση $\arccos(\cos x)$ αν $x\in[k\pi,(k+1)\pi]$ για κάποιον $k\in\mathbb{Z}$;
Τι ανάλογο μπορείτε να πείτε για καθεμιά από τις παραστάσεις $\arcsin(\sin x)$, $\arctan(\tan x)$ και $\operatorname{arccot}(\cot x)$;

4.5.8. Σχεδιάστε τα γραφήματα όλων των υπερβολικών συναρτήσεων και των αντίστροφων υπερβολικών συναρτήσεων καθώς και της συνάρτησης $x=\frac{1}{2}\log\left|\frac{y+1}{y-1}\right|$.

4.5.9. [33] Έστω οι $f_1:(-\infty,0)\to(-\infty,+\infty)$, $f_2:(0,+\infty)\to(-\infty,+\infty)$ με τον ίδιο τύπο $f_1(x)=f_2(x)=\frac{1}{2}(x-\frac{1}{x})$.
Αποδείξτε ότι οι f_1,f_2 είναι γνησίως αύξουσες με κοινό σύνολο τιμών το $(-\infty,+\infty)$. Χωρίς να βρείτε τους τύπους των αντίστροφων συναρτήσεων ${f_1}^{-1}$, ${f_2}^{-1}$, τι συμπεραίνετε για τα πεδία ορισμού, τα σύνολα τιμών, τη μονοτονία και τη συνέχειά τους;
Αποδείξτε ότι, αν η g είναι οποιαδήποτε από τις ${f_1}^{-1}$, ${f_2}^{-1}$, τότε ισχύει $g(y)^2-2yg(y)-1=0$

[33] Γι αυτήν και τις επόμενες δύο ασκήσεις δείτε και τις ασκήσεις 4.4.11 και 4.4.13. Οι συναρτήσεις g που εμφανίζονται σ' αυτές εδώ τις ασκήσεις είναι απλά αλλά μη-τετριμμένα παραδείγματα *αλγεβρικών συναρτήσεων*. Τις αλγεβρικές συναρτήσεις θα τις δούμε στον ορισμό 7.6. Δείτε την άσκηση 7.3.28.

για κάθε $y \in (-\infty, +\infty)$.

Έστω $g : (-\infty, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $(-\infty, +\infty)$ ώστε να ισχύει $g(y)^2 - 2yg(y) - 1 = 0$ για κάθε $y \in (-\infty, +\infty)$. Αποδείξτε ότι είτε $g = {f_1}^{-1}$ είτε $g = {f_2}^{-1}$.

Βρείτε τους τύπους και σχεδιάστε τα γραφήματα όλων των συναρτήσεων της άσκησης.

4.5.10. Έστω οι $f_1 : (-\infty, -1] \to \mathbb{R}$, $f_2 : [-1, 0) \to \mathbb{R}$, $f_3 : (0, 1] \to \mathbb{R}$, $f_4 : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τον ίδιο τύπο $f_1(x) = f_2(x) = f_3(x) = f_4(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{1}{x})$.

Αποδείξτε ότι οι f_1, f_4 είναι γνησίως αύξουσες και οι f_2, f_3 γνησίως φθίνουσες και βρείτε τα σύνολα τιμών τους. Τί συμπεραίνετε για τα πεδία ορισμού, τα σύνολα τιμών, τη μονοτονία και τη συνέχεια των ${f_1}^{-1}$, ${f_2}^{-1}$, ${f_3}^{-1}$, ${f_4}^{-1}$;

Αποδείξτε ότι, αν η g είναι οποιαδήποτε από τις ${f_1}^{-1}$, ${f_2}^{-1}$, ${f_3}^{-1}$, ${f_4}^{-1}$, τότε ισχύει $g(y)^2 - 2yg(y) + 1 = 0$ για κάθε y στο πεδίο ορισμού της.

Έστω $g : (-\infty, -1] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $(-\infty, -1]$ ώστε να ισχύει $g(y)^2 - 2yg(y) + 1 = 0$ για κάθε $y \in (-\infty, -1]$. Αποδείξτε ότι είτε $g = {f_1}^{-1}$ είτε $g = {f_2}^{-1}$.

Έστω $g : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[1, +\infty)$ ώστε να ισχύει $g(y)^2 - 2yg(y) + 1 = 0$ για κάθε $y \in [1, +\infty)$. Αποδείξτε ότι είτε $g = {f_3}^{-1}$ είτε $g = {f_4}^{-1}$.

Βρείτε τους τύπους και σχεδιάστε τα γραφήματα όλων των συναρτήσεων της άσκησης.

4.5.11. Έστω οι $f_1 : (-\infty, -1] \to \mathbb{R}$, $f_2 : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f_3 : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τον ίδιο τύπο $f_1(x) = f_2(x) = f_3(x) = x^3 - 3x$.

Αποδείξτε ότι οι f_1, f_3 είναι γνησίως αύξουσες και η f_2 γνησίως φθίνουσα και βρείτε τα σύνολα τιμών τους. Τί συμπεραίνετε για τα πεδία ορισμού, τα σύνολα τιμών, τη μονοτονία και τη συνέχεια των ${f_1}^{-1}$, ${f_2}^{-1}$, ${f_3}^{-1}$;

Αποδείξτε ότι, αν η g είναι οποιαδήποτε από τις ${f_1}^{-1}$, ${f_2}^{-1}$, ${f_3}^{-1}$, τότε ισχύει $g(y)^3 - 3g(y) = y$ για κάθε y στο πεδίο ορισμού της.

Έστω διάστημα I και $g : I \to \mathbb{R}$ συνεχής στο I ώστε να ισχύει $g(y)^3 - 3g(y) = y$ για κάθε $y \in I$. Αν $I = [-2, +\infty)$, αποδείξτε ότι $g = {f_3}^{-1}$. Αν $I = (-\infty, 2]$, αποδείξτε ότι $g = {f_1}^{-1}$. Αν, όμως, $I = [-2, 2]$, αποδείξτε ότι είτε $g = {f_1}^{-1}$ είτε $g = {f_2}^{-1}$ είτε $g = {f_3}^{-1}$.

Σχεδιάστε τα γραφήματα όλων των συναρτήσεων της άσκησης.

4.5.12. Έστω $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$ και $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ συνεχής στο (a, b).

Έστω $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to b} f(x) = -\infty$. Σύμφωνα με την άσκηση 4.4.14, η f έχει μέγιστη τιμή στο (a, b). Αν u είναι η μέγιστη τιμή της f, αποδείξτε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $(-\infty, u]$.

Ποιό είναι το συμπέρασμα αν $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to b} f(x) = +\infty$;

4.5.13. Έστω $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$ και $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ συνεχής στο (a, b). Έστω ότι υπάρχουν τα $A = \lim_{x \to a} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$, $B = \lim_{x \to b} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$ και $A < B$.

Αποδείξτε ότι το διάστημα (A, B) περιέχεται στο σύνολο τιμών της f.

Αν ισχύει $A < f(x) < B$ για κάθε $x \in (a, b)$, αποδείξτε ότι η f έχει σύνολο τιμών το (A, B).

Αν ισχύει $f(x) < B$ για κάθε $x \in (a, b)$ και υπάρχει $x_0 \in (a, b)$ ώστε $f(x_0) \leq A$, αποδείξτε ότι η f έχει ελάχιστη τιμή στο (a, b). Αν l είναι η ελάχιστη τιμή, αποδείξτε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $[l, B)$.

Αν ισχύει $A < f(x)$ για κάθε $x \in (a, b)$ και υπάρχει $x_0 \in (a, b)$ ώστε $B \leq f(x_0)$, αποδείξτε ότι η f έχει μέγιστη τιμή στο (a, b). Αν u είναι η μέγιστη τιμή, αποδείξτε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $(A, u]$.

Αν υπάρχουν ${x_0}', {x_0}'' \in (a, b)$ ώστε $f({x_0}') \leq A$ και $B \leq f({x_0}'')$, αποδείξτε ότι η f έχει ελάχιστη και μέγιστη τιμή στο (a, b). Αν l είναι η ελάχιστη και u η μέγιστη τιμή, αποδείξτε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $[l, u]$.

Ποιά είναι τα αντίστοιχα συμπεράσματα αν $A > B$ ή $A = B$; Τί γίνεται αν το διάστημα είναι $(a, b]$ ή $[a, b)$ αντί (a, b);

4.6 Ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις.

Έστω $f : A \to \mathbb{R}$. Ας θυμηθούμε τον ορισμό της συνέχειας της f στον $\xi \in A$. Η f χαρακτηρίζεται συνεχής στον ξ αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$ για κάθε $x \in A$ με $|x - \xi| < \delta$. Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι *ο δ εξαρτάται από τον ϵ* **και** *από τον ξ*. Αυτό το εκφράζουμε συμβολικά ως εξής: $\delta = \delta(\epsilon, \xi)$. Πράγματι: (i) επιλέγουμε τον ξ, στον οποίο θέλουμε να εξετάσουμε αν η f είναι συνεχής, επιλέγουμε τον ϵ και, μετά από τις συγκεκριμένες επιλογές των ξ, ϵ, επιλέγουμε τον κατάλληλο δ, (ii) αν επιλέξουμε διαφορετικό ξ ή ϵ, τότε μπορεί να πρέπει να επιλέξουμε διαφορετικό δ από τον προηγούμενο.

Στην παρούσα ενότητα μας ενδιαφέρει η εξάρτηση του δ από τον ξ.

Παράδειγμα 4.6.1. Έστω η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^2$.
Γνωρίζουμε ότι η f είναι συνεχής σε κάθε ξ. Επομένως, για κάθε ξ και για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|x^2 - \xi^2| < \epsilon$ για κάθε x με $|x - \xi| < \delta$. Θα δούμε ότι *δεν* υπάρχει επιλογή του δ ανεξάρτητη του ξ.
Έστω (για να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι, με προεπιλεγμένο και *σταθεροποιημένο* $\epsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ εξαρτώμενο μόνο από τον ϵ και, επομένως, κι αυτό *σταθεροποιημένο* ώστε για *κάθε* ξ να ισχύει $|x^2 - \xi^2| < \epsilon$ για κάθε x με $|x - \xi| < \delta$. Τώρα, για *κάθε* ξ, ο $x = \xi + \frac{\delta}{2}$ ικανοποιεί την $|x - \xi| < \delta$ και, επομένως, πρέπει να ικανοποιεί και την $|x^2 - \xi^2| < \epsilon$. Άρα, μετά από πράξεις, για *κάθε* ξ ισχύει $|\xi\delta + \frac{\delta^2}{4}| < \epsilon$.
Συνοψίζουμε: για *κάθε* ξ πρέπει να ισχύει $|\xi\delta + \frac{\delta^2}{4}| < \epsilon$ *με σταθερούς* δ, ϵ. Αυτό είναι αδύνατο!! Αν ο ξ αυξάνεται απεριόριστα, ο $|\xi\delta + \frac{\delta^2}{4}|$ αυξάνεται απεριόριστα: $\lim_{\xi \to +\infty} |\xi\delta + \frac{\delta^2}{4}| = +\infty$. Επομένως, δεν μπορεί να ισχύει $|\xi\delta + \frac{\delta^2}{4}| < \epsilon$ για κάθε ξ.

Θα προσπαθήσουμε τώρα να κωδικοποιήσουμε σε μορφή ορισμού την κατάσταση που μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής σε κάθε $\xi \in A$ και, επιπλέον, στον ορισμό της συνέχειας ο δ δεν εξαρτάται από τον ξ αλλά μόνο από τον ϵ. Η κατάσταση αυτή πρέπει να διατυπωθεί ως εξής: για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $\xi \in A$ να ισχύει $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$ για κάθε $x \in A$ με $|x - \xi| < \delta$. Πράγματι, από τη διατύπωση αυτή προκύπτει ότι ο δ εξαρτάται μόνο από τον ϵ: επιλέγουμε $\epsilon > 0$ και κατόπιν βρίσκουμε κατάλληλο $\delta > 0$ ώστε η ανισότητα $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$ να ισχύει, με τον ίδιο δ, για κάθε $\xi \in A$ και κάθε $x \in A$ με $|x - \xi| < \delta$. Ιδού μια μικρή απλοποίηση στη διατύπωση: για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$ για κάθε $x, \xi \in A$ με $|x - \xi| < \delta$. Τέλος, χρησιμοποιώντας το ίδιο σύμβολο για τις τιμές x, ξ της ανεξάρτητης μεταβλητής, διατυπώνουμε τον εξής ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.18. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$. Η f χαρακτηρίζεται* **ομοιόμορφα συνεχής** *στο A αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$ για κάθε $x', x'' \in A$ με $|x' - x''| < \delta$.*

Είναι σαφές ότι, αν η $f : A \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A, τότε είναι συνεχής σε κάθε $\xi \in A$. Όμως, δεν ισχύει το αντίστροφο.

Παράδειγμα 4.6.2. Όπως είδαμε στο παράδειγμα 4.6.1, η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^2$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ αλλά όχι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 4.6.3. Έστω η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = 3x - 2$.
Έστω $\epsilon > 0$. Το $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$ συνεπάγεται από το $|(3x' - 2) - (3x'' - 2)| < \epsilon$ κι αυτό συνεπάγεται από το $3|x' - x''| < \epsilon$ κι αυτό συνεπάγεται από το $|x' - x''| < \frac{\epsilon}{3}$. Με σύμβολα:

$$|f(x') - f(x'')| < \epsilon \;\Leftarrow\; |(3x' - 2) - (3x'' - 2)| < \epsilon \;\Leftarrow\; 3|x' - x''| < \epsilon \;\Leftarrow\; |x' - x''| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Θεωρούμε οποιονδήποτε δ με $0 < \delta \le \frac{\epsilon}{3}$. Τότε, για κάθε $x', x'' \in \mathbb{R}$ με $|x' - x''| < \delta$ ισχύει $|x' - x''| < \frac{\epsilon}{3}$ και, επομένως, $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$.
Άρα η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Το θεώρημα 4.2 θα παίξει σημαντικό ρόλο στο κεφάλαιο 6 σε σχέση με το ολοκλήρωμα συνεχούς συνάρτησης.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.2. [34] *Αν η συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a, b]$, τότε είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a, b]$.*

Απόδειξη. Έστω ότι η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a, b]$.
Τότε υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε για κάθε $\delta > 0$ να υπάρχουν $x', x'' \in [a, b]$ με $|x' - x''| < \delta$ ώστε $|f(x') - f(x'')| \geq \epsilon$. Άρα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχουν

$$x_n{}', x_n{}'' \in [a, b] \text{ ώστε } |x_n{}' - x_n{}''| < \tfrac{1}{n} \text{ και } |f(x_n{}') - f(x_n{}'')| \geq \epsilon.$$

Η ακολουθία $(x_n{}')$ είναι φραγμένη, οπότε, σύμφωνα με το θεώρημα των Bolzano - Weierstrass, υπάρχει υποακολουθία $(x_{n_k}{}')$ που συγκλίνει. Έστω

$$x_{n_k}{}' \to \xi.$$

Επειδή ισχύει $a \leq x_{n_k}{}' \leq b$ για κάθε k, είναι $a \leq \xi \leq b$. Επειδή ισχύει $|x_{n_k}{}' - x_{n_k}{}''| < \frac{1}{n_k}$ για κάθε k, συνεπάγεται

$$x_{n_k}{}' - x_{n_k}{}'' \to 0.$$

Άρα από το $x_{n_k}{}' \to \xi$ προκύπτει

$$x_{n_k}{}'' \to \xi.$$

Επειδή $\xi \in [a, b]$, η f είναι συνεχής στον ξ. Άρα από τα $x_{n_k}{}' \to \xi$ και $x_{n_k}{}'' \to \xi$ συνεπάγεται

$$f(x_{n_k}{}') \to f(\xi) \text{ και } f(x_{n_k}{}'') \to f(\xi).$$

Επομένως,

$$f(x_{n_k}{}') - f(x_{n_k}{}'') \to 0.$$

Αυτό, όμως, αντιφάσκει με το ότι ισχύει $|f(x_{n_k}{}') - f(x_{n_k}{}'')| \geq \epsilon$ για κάθε k.
Καταλήξαμε σε άτοπο, οπότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a, b]$. □

Ασκήσεις.

4.6.1. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \in [0, 1) \\ 1, & \text{αν } x \in (1, 2] \end{cases}$ είναι συνεχής αλλά όχι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, 1) \cup (1, 2]$.

4.6.2. Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις x, $|x|$, $\sqrt{x^2 + 1}$, $\sin x$ είναι ομοιόμορφα συνεχείς στο $\mathbb{R}$, ότι η $\sqrt{x}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, +\infty)$ και ότι οι $\frac{1}{x}$, $\sin \frac{1}{x}$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχείς στο $(0, +\infty)$.
Αποδείξτε ότι η $f(x) = x \sin(\log(x + 1))$ είναι ομοιόμορφα συνεχής και μη-φραγμένη στο $[0, +\infty)$ και ότι δεν υπάρχει το $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.
Αποδείξτε ότι η $\sin(x^2)$ είναι συνεχής και φραγμένη στο $[0, +\infty)$ αλλά όχι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, +\infty)$.

4.6.3. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\rho > 0$, $M > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x') - f(x'')| \leq M|x' - x''|^\rho$ για κάθε $x', x'' \in A$. Αποδείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A.[35]
Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις x και $|x|$ ικανοποιούν την παραπάνω ανισότητα στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η x^2 ικανοποιεί την ίδια ανισότητα σε κάθε φραγμένο διάστημα $[a, b]$ αλλά όχι στο $\mathbb{R}$.

---

[34] Πέρα από το θεώρημα 4.2, ένα χρήσιμο κριτήριο ομοιόμορφης συνέχειας - αλλά με χρήση παραγώγων - εμφανίζεται στην άσκηση 5.3.20. Επίσης, μερικά ενδιαφέροντα κριτήρια υπάρχουν στις ασκήσεις 4.6.3, 4.6.7, 4.6.9, 4.6.11 και 4.6.12.

[35] Αν η f ικανοποιεί τις παραπάνω υποθέσεις, χαρακτηρίζεται **Hölder-συνεχής** στο A με Hölder-εκθέτη ρ. Ειδικά, αν $\rho = 1$, η f χαρακτηρίζεται **Lipschitz-συνεχής** στο A. Δείτε και τους ανάλογους ορισμούς στην άσκηση 4.1.12. Δείτε, όμως, και τις ασκήσεις 5.3.20 και 5.4.10.

4.6.4. Έστω $A \subseteq B$, $f : B \to \mathbb{R}$. Αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο B, αποδείξτε ότι είναι ομοιόμορφα συνεχής και στο A.

4.6.5. Έστω $f : A \to B$, $g : B \to \mathbb{R}$. Αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A και η g ομοιόμορφα συνεχής στο B, αποδείξτε ότι η $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A.

4.6.6. Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχείς στο A.

Αποδείξτε ότι η $f + g : A \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A.

Αν υποθέσουμε, επιπλέον, ότι οι f, g είναι φραγμένες, αποδείξτε ότι η $fg : A \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A.

Βρείτε A και $f, g : A \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχείς στο A ώστε η fg να μην είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A.

4.6.7. Έστω δύο γειτονικά διαστήματα I_1, I_2 με κοινό άκρο το οποίο ανήκει και στα δύο διαστήματα και $f : I_1 \cup I_2 \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής στο I_1 και στο I_2. Αποδείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο διάστημα $I_1 \cup I_2$.

4.6.8. Έστω $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[0, 1]$. Αποδείξτε ότι $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k f(k/n) \to 0$.

4.6.9. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A αν και μόνο αν για κάθε δύο ακολουθίες $(x_n{}')$, $(x_n{}'')$ στο A με $x_n{}' - x_n{}'' \to 0$ ισχύει $f(x_n{}') - f(x_n{}'') \to 0$.

4.6.10. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής στο A. Αν η (x_n) στο A είναι ακολουθία Cauchy, αποδείξτε ότι η $(f(x_n))$ είναι κι αυτή ακολουθία Cauchy.

Τί μπορούμε να συμπεράνουμε από τη συνάρτηση x^2 σχετικά με το αντίστροφο;

4.6.11. [36] Έστω $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ και $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b)$.

Αποδείξτε ότι, αν υπάρχει το $\lim_{x\to b} f(x)$ και είναι αριθμός, τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a, b)$.

Αποδείξτε ότι, αν, επιπλέον, $b \in \mathbb{R}$ και αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a, b)$, τότε υπάρχει το $\lim_{x\to b} f(x)$ και είναι αριθμός.

Αποδείξτε ότι, αν, επιπλέον, $b \in \mathbb{R}$, τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a, b)$ αν και μόνο αν υπάρχει $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b]$ ώστε να ισχύει $g(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [a, b)$.

Προσαρμόστε τα προηγούμενα για διάστημα $(a, b]$ ή (a, b) αντί $[a, b)$.

4.6.12. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $\mathbb{R}$ και περιοδική. Δηλαδή υπάρχει $\tau > 0$ ώστε να ισχύει $f(x + \tau) = f(x)$ για κάθε x. Αποδείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.

4.6.13. [37] Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b]$ και $f(a) < \lambda < f(b)$.

Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ θεωρήστε έναν $\delta > 0$ που να αντιστοιχεί στον $\epsilon = 1/k$ βάσει του ορισμού της ομοιόμορφης συνέχειας. Χωρίστε το $[a, b]$ με σημεία $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ σε διαστήματα μήκους $< \delta$. Έστω n_k ο μεγαλύτερος από τους $1, \ldots, n - 1$ ώστε $f(x_{n_k}) \leq \lambda$. Δείτε ότι $f(x_{n_k}) \leq \lambda < f(x_{n_k+1})$ και συμπεράνατε ότι $|f(x_{n_k}) - \lambda| < 1/k$ και, επομένως, $f(x_{n_k}) \to \lambda$. Μέσω του θεωρήματος των Bolzano - Weierstrass αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [a, b]$ ώστε $f(\xi) = \lambda$.

4.6.14. Έστω $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, +\infty)$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν $a, b \geq 0$ ώστε να ισχύει $|f(x)| \leq ax + b$ για κάθε $x \geq 0$.

4.6.15. Έστω $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, +\infty)$.

[α] Αν ισχύει $f(x + n) \to 0$ για κάθε $x \geq 0$, αποδείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Μπορείτε να βρείτε $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχή στο $[0, +\infty)$ έτσι ώστε να ισχύει $f(x + n) \to 0$ για

[36] Μια σημαντική άσκηση.

[37] Τρίτη απόδειξη του θεωρήματος ενδιάμεσης τιμής.

κάθε $x \geq 0$, αλλά να μην ισχύει $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$;

[β] Αν υπάρχει ακολουθία (x_n) ώστε $x_n \to +\infty$ και $x_{n+1} - x_n \to 0$ και $f(x_n) \to 0$, αποδείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Μπορείτε να υποδείξετε μια ακολουθία (x_n) τέτοια ώστε $x_n \to +\infty$ και $x_{n+1} - x_n \to 0$;

Μπορείτε να βρείτε $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχή στο $[0, +\infty)$ και ακολουθία (x_n) έτσι ώστε $x_n \to +\infty$ και $x_{n+1} - x_n \to 0$ και $f(x_n) \to 0$, αλλά να μην ισχύει $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$;

4.6.16. Έστω φραγμένο σύνολο A και $f : A \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής στο A. Αποδείξτε ότι η f είναι φραγμένη.

4.6.17. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μονότονη, συνεχής και φραγμένη στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.

4.6.18. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $\epsilon > 0$. Ένας a χαρακτηρίζεται ϵ-**σχεδόν περίοδος** της f αν ισχύει $|f(a + x) - f(x)| < \epsilon$ για κάθε x.

Μια συνεχής $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ χαρακτηρίζεται **σχεδόν περιοδική** αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $L > 0$ ώστε σε κάθε διάστημα μήκους L να υπάρχει τουλάχιστον μία ϵ-σχεδόν περίοδος της f.

Αποδείξτε ότι, αν ο τ_1 είναι ϵ_1-σχεδόν περίοδος της f και ο τ_2 είναι ϵ_2-σχεδόν περίοδος της f, τότε ο $\tau_1 + \tau_2$ είναι $(\epsilon_1 + \epsilon_2)$-σχεδόν περίοδος της f.

Αποδείξτε ότι κάθε συνεχής περιοδική συνάρτηση είναι σχεδόν περιοδική.

Αποδείξτε ότι κάθε σχεδόν περιοδική συνάρτηση είναι φραγμένη και ομοιόμορφα συνεχής.

Αποδείξτε ότι, αν οι $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι σχεδόν περιοδικές, τότε και οι $f + g$, fg είναι σχεδόν περιοδικές.

Η συνάρτηση $\sin x$ είναι περιοδική με περίοδο 2π. Αν ο a είναι άρρητος, αποδείξτε ότι η συνάρτηση $\sin x + \sin(ax)$ είναι σχεδόν περιοδική αλλά όχι περιοδική.

Βασική βιβλιογραφία.

Bartle, R. & Sherbert, D. (2011) *Introduction to Real Analysis, Ch 5.* Wiley.
Beardon, A. (1997) *Limits: a New Approach to Real Analysis, Ch 8.* Springer.
Berberian, S. (1994) *A First Course in Real Analysis, Ch 5-6.* Springer.
Brand, L. (2006) *Advanced Calculus, Ch 3.* Dover.
Courant, R. (1988) *Differential and Integral Calculus, Vol I, Ch I.* Wiley.
Courant, R & John, F. (1989) *Introduction to Calculus and Analysis, Vol I, Ch 1.* Springer.
Ghorpade, S. & Limaye, B. (2006) *A Course in Calculus and Real Analysis, Ch 3.* Springer.
Grauert, H. & Lieb, I. (1967) *Differential- und Integralrechnung, Band I, Kap IV.* Springer.
Hardy, G. (2008) *A Course of Pure Mathematics, Ch V.* Cambridge Univ. Press.
Hayes Jr, C. (1964) *Concepts of Real Analysis, Ch 7.* Wiley.
Krantz, S. (2013) *Real Analysis and Foundations, Ch 6.* Chapman and Hall.
Landau, E. (2001) *Differential and Integral Calculus, Ch 3, 8.* American Math. Society & Chelsea.
Lang, S. (1997) *Undergraduate Analysis, Ch II.* Springer.
Nikolsky, S. (1977) *A Course of Mathematical Analysis, Vol 1, Ch 4.* Mir Publishers.
Protter, M. (1998) *Basic Elements of Real Analysis, Ch 3.* Springer.
Ross, K. (2013) *Elementary Analysis, Ch 3.* Springer.
Spivak, M. (1994) *Calculus, Ch 6-8, 12.* Cambridge Univ. Press.
Stoll, M. (2000) *Introduction to Real Analysis, Ch 4.* Pearson.

Συμπληρωματική βιβλιογραφία.

Beardon, A. (1997) *Limits: a New Approach to Real Analysis, Ch 3-4.* Springer.
Boas, R. (1996) *A Primer of Real Functions, Ch 2.* Math. Association of America.
Buck, R. & Buck, E. (2003) *Advanced Calculus, Ch 2.* Waveland Press.
Davidson, K. & Donsig, A. (2010) *Real Analysis and Applications, Ch 5.* Springer.
Goffman, C. (1966) *Introduction to Real Analysis, Ch 4-5.* Harper and Row.
Goffman, C. (1953) *Real Functions, Ch 7.* Rinehart.
Goldberg, R. (1976) *Methods of Real Analysis, Ch 5-6.* Wiley.
Graves, L. (2009) *The Theory of Functions of Real Variables, Ch IV.* Dover.
Smirnov, V. (1964) *A Course of Higher Mathematics, Vol 1, Ch I.* Pergammon Press.

Κεφάλαιο 5

Παράγωγοι συναρτήσεων.

5.1 Παράγωγοι συναρτήσεων.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.1. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A. Αν υπάρχει το όριο $\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$, το συμβολίζουμε $f'(\xi)$ και το ονομάζουμε* **παράγωγο** *της f στον ξ. Δηλαδή,*

$$f'(\xi) = \lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}.$$

Από τον ορισμό της ως όριο, η παράγωγος $f'(\xi)$ είναι στοιχείο του $\overline{\mathbb{R}}$. Αν $f'(\xi) \in \mathbb{R}$, τότε λέμε ότι η f είναι **παραγωγίσιμη** *ή* **διαφορίσιμη** *στον ξ.*

Εκτός από το σύμβολο $f'(\xi)$ χρησιμοποιούνται και τα σύμβολα

$$D_x f(\xi), \qquad \frac{df}{dx}(\xi), \qquad \frac{dy}{dx}(\xi).$$

Στο τρίτο σύμβολο εννοείται ότι ισχύει η σχέση $y = f(x)$ ανάμεσα στην ανεξάρτητη μεταβλητή x και στην εξαρτημένη μεταβλητή y. Πρέπει να τονίσουμε ότι στα δύο τελευταία σύμβολα οι λόγοι είναι "εικονικοί". Δηλαδή, *δεν υπάρχουν* δύο ανεξάρτητες ποσότητες dy και dx ώστε ο λόγος τους να ισούται με την παράγωγο $f'(\xi)$. Τα σύμβολα αυτά έχουν τη *μορφή* λόγων αλλά δεν είναι λόγοι. Η μορφή αυτή, αν και είναι εικονική, έχει επικρατήσει διότι εκφράζει κατά κάποιο τρόπο την ουσία της παραγώγου. Σχετικά με αυτό θα πούμε περισσότερα σε λίγο, όταν μιλήσουμε για τα *απειροστά*.

Αν, αντί της τιμής της παραγώγου στον ξ, θεωρήσουμε την τιμή της σε έναν γενικό x, τότε, αντί των συμβόλων $D_x f(x)$, $\frac{df}{dx}(x)$ και $\frac{dy}{dx}(x)$, χρησιμοποιούμε τα απλούστερα

$$D_x f, \qquad \frac{df}{dx}, \qquad \frac{dy}{dx},$$

επειδή ήδη εμφανίζεται σ' αυτά το σύμβολο x της ανεξάρτητης μεταβλητής.

Παράδειγμα 5.1.1. Είναι $\frac{dx^2}{dx}(1) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1^2}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2$. Άρα η x^2 είναι παραγωγίσιμη στον 1.

Παράδειγμα 5.1.2. Είναι $\frac{d\sqrt[3]{x}}{dx}(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{0}}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$. Άρα η $\sqrt[3]{x}$ έχει παράγωγο στον 0 αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στον 0.

Μερικές φορές το όριο $\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ το γράφουμε $\lim_{h\to 0} \frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h}$, κάνοντας αλλαγή μεταβλητής από x σε $h = x - \xi$.

Παρατηρήστε ότι το $\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ είναι πάντοτε απροσδιόριστη μορφή διότι το όριο του παρονομαστή είναι 0. Ειδικότερα, αν η f είναι συνεχής στον ξ, τότε το όριο του αριθμητή είναι κι αυτό 0 και προκύπτει απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.2. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $\xi \in A$. Αν ο ξ είναι από αριστερά του σημείο συσσώρευσης του A και υπάρχει το $\lim_{x\to\xi-} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$, τότε αυτό συμβολίζεται $f'_-(\xi)$ και ονομάζεται* **αριστερή (πλευρική) παράγωγος** *της f στον ξ.*
Ομοίως, αν ο ξ είναι από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A και υπάρχει το $\lim_{x\to\xi+} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$, τότε αυτό συμβολίζεται $f'_+(\xi)$ και ονομάζεται **δεξιά (πλευρική) παράγωγος** *της f στον ξ.*

Καμιά φορά χρησιμοποιούμε και τα σύμβολα $D_{x\pm}f(\xi)$, $\frac{df}{dx\pm}(\xi)$ και $\frac{dy}{dx\pm}(\xi)$ για τις πλευρικές παραγώγους.

Τα παρακάτω είναι προφανή. (i) Έστω ότι ο ξ είναι από αριστερά του και από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A. Τότε υπάρχει η $f'(\xi)$ αν και μόνο αν υπάρχουν οι $f'_-(\xi)$, $f'_+(\xi)$ και είναι ίσες και, σ' αυτήν την περίπτωση, $f'(\xi) = f'_-(\xi) = f'_+(\xi)$. (ii) Έστω ότι ο ξ είναι μόνο από αριστερά του σημείο συσσώρευσης του A. Τότε υπάρχει η $f'(\xi)$ αν και μόνο αν υπάρχει η $f'_-(\xi)$ και, σ' αυτήν την περίπτωση, $f'(\xi) = f'_-(\xi)$. (iii) Έστω ότι ο ξ είναι μόνο από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A. Τότε υπάρχει η $f'(\xi)$ αν και μόνο αν υπάρχει η $f'_+(\xi)$ και, σ' αυτήν την περίπτωση, $f'(\xi) = f'_+(\xi)$.

Παράδειγμα 5.1.3. $\frac{d|x|}{dx+}(0) = \lim_{x\to 0+} \frac{|x|}{x} = 1$ και $\frac{d|x|}{dx-}(0) = \lim_{x\to 0-} \frac{|x|}{x} = -1$. Άρα η $|x|$ δεν έχει παράγωγο στον 0.

Παράδειγμα 5.1.4. $\frac{d\sqrt{|x|}}{dx+}(0) = \lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{|x|}}{x} = +\infty$ και $\frac{d\sqrt{|x|}}{dx-}(0) = \lim_{x\to 0-} \frac{\sqrt{|x|}}{x} = -\infty$. Άρα η $\sqrt{|x|}$ δεν έχει παράγωγο στον 0.

Παράδειγμα 5.1.5. Έστω η $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{αν } x \geq 0 \\ -\sqrt{-x}, & \text{αν } x \leq 0 \end{cases}$ Είναι $f'_+(0) = \lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{x}}{x} = +\infty$ και $f'_-(0) = \lim_{x\to 0-} \frac{-\sqrt{-x}}{x} = +\infty$. Άρα η f έχει παράγωγο στον 0 ίση με $f'(0) = +\infty$.

Παράδειγμα 5.1.6. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x\sin(1/x), & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$
Η $f'_+(0) = \lim_{x\to 0+} \frac{x\sin(1/x)}{x} = \lim_{x\to 0+} \sin\frac{1}{x}$ δεν υπάρχει. Η $f'_-(0) = \lim_{x\to 0-} \frac{x\sin(1/x)}{x} = \lim_{x\to 0-} \sin\frac{1}{x}$, επίσης, δεν υπάρχει. Άρα η f δεν έχει δεξιά ούτε αριστερή παράγωγο στον 0.
Την ίδια συνάρτηση είδαμε και στο παράδειγμα 4.1.19 όπου αποδείξαμε ότι είναι συνεχής στον 0.

Παράδειγμα 5.1.7. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2\sin(1/x), & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ Παραλλαγή της προηγούμενης συνάρτησης. Τώρα, όμως, έχουμε $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\sin(1/x)}{x} = \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$, διότι $\lim_{x\to 0} x = 0$ και η $\sin\frac{1}{x}$ είναι φραγμένη.

Παράδειγμα 5.1.8. Η $\sqrt{x}$ ορίζεται στο $[0,+\infty)$. Άρα $\frac{d\sqrt{x}}{dx}(0) = \frac{d\sqrt{x}}{dx+}(0) = \lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{x}}{x} = +\infty$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.3. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $B \subseteq A$. Αν για κάθε $\xi \in B$ υπάρχει η $f'(\xi)$, τότε λέμε ότι η f έχει* **παράγωγο** *στο B. Αν για κάθε $\xi \in B$ υπάρχει η $f'(\xi)$ και είναι αριθμός, τότε λέμε ότι η f είναι* **παραγωγίσιμη** *στο B.*

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.4. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$. Θεωρούμε το σύνολο $B = \{\xi \in A \,|\, f'(\xi) \in \mathbb{R}\}$, δηλαδή το σύνολο όλων των ξ στο πεδίο ορισμού της f στους οποίους αυτή είναι παραγωγίσιμη. Τότε ορίζεται η* **παράγωγος συνάρτηση** *της f με πεδίο ορισμού το B και συμβολίζεται $f' : B \to \mathbb{R}$.*

Ας δούμε τώρα μερικά πιο γενικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 5.1.9. Για τη σταθερή συνάρτηση c έχουμε

$$\frac{dc}{dx}(\xi) = \lim_{x\to\xi} \frac{c-c}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi} 0 = 0$$

για κάθε ξ. Επομένως, η παράγωγος συνάρτηση είναι η σταθερή 0:

$$\frac{dc}{dx} = 0 \qquad \text{για κάθε } x.$$

Παράδειγμα 5.1.10. Η παράγωγος της x σε κάθε ξ είναι

$$\tfrac{dx}{dx}(\xi) = \lim_{x\to\xi} \tfrac{x-\xi}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi} 1 = 1.$$

Δηλαδή, η παράγωγος συνάρτηση είναι η σταθερή 1 :

$$\tfrac{dx}{dx} = 1 \qquad \text{για κάθε } x.$$

Παράδειγμα 5.1.11. Θα αποδείξουμε ότι

$$\tfrac{dx^n}{dx} = nx^{n-1} \qquad \text{για κάθε } x, \text{ αν } n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Προσέξτε: αποφεύγουμε να γράψουμε τον τύπο $\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$ στην περίπτωση $n = 1$. Ο τύπος $\frac{dx}{dx} = x^0$ δεν είναι ακριβώς σωστός. Το αριστερό μέλος είναι η σταθερή συνάρτηση 1, όπως είδαμε στο προηγούμενο παράδειγμα, και ορίζεται για κάθε x ενώ το δεξιό μέλος είναι η συνάρτηση x^0 και ορίζεται για κάθε $x \neq 0$. Οι δύο συναρτήσεις ταυτίζονται στο κοινό μέρος των πεδίων ορισμού τους αλλά δεν έχουν ίδιο πεδίο ορισμού.
Τώρα, η απόδειξη. Για κάθε ξ έχουμε

$$\tfrac{dx^n}{dx}(\xi) = \lim_{x\to\xi} \tfrac{x^n-\xi^n}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi}(x^{n-1} + x^{n-2}\xi + \cdots + x\xi^{n-2} + \xi^{n-1}) = n\xi^{n-1}.$$

Αυτό το παράδειγμα θα το δούμε και στην επόμενη ενότητα μαζί με άλλα σχετικά παραδείγματα.

5.1.1 Εφαπτόμενες ευθείες.

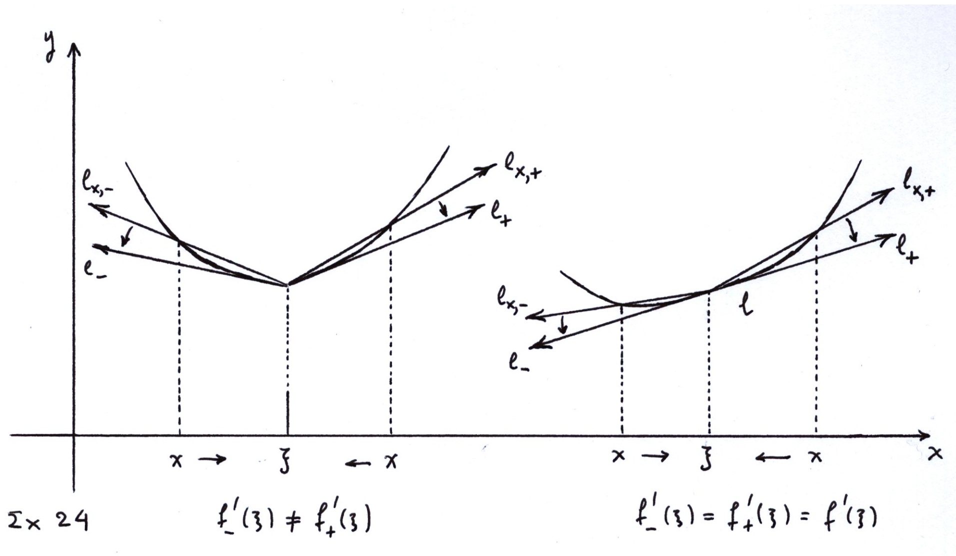
Ας πούμε τώρα μερικά λόγια για το γεωμετρικό περιεχόμενο της έννοιας της παραγώγου. Η προσεκτική σχεδίαση σχημάτων θα βοηθήσει σημαντικά στην κατανόηση των επιχειρημάτων. Δείτε τα σχήματα 24 και 25.

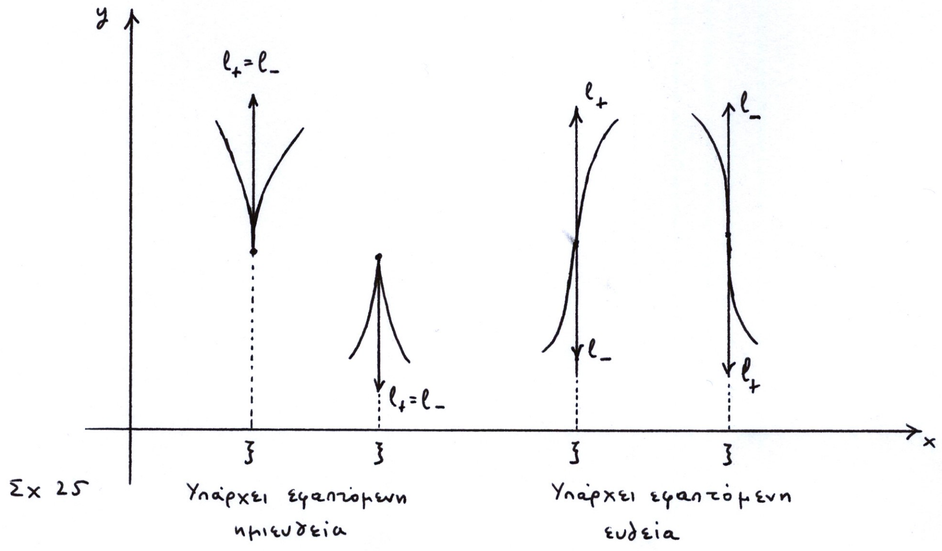
Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και έστω ότι ο ξ είναι από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A και η f είναι δεξιά συνεχής στον ξ, δηλαδή ότι, καθώς ο x έρχεται κατάλληλα κοντά στον ξ από δεξιά του, το σημείο $(x, f(x))$ πλησιάζει απεριόριστα το σταθερό σημείο $(\xi, f(\xi))$. Για κάθε $x \in A$ με $x > \xi$ θεωρούμε την *ημιευθεία* $l_{x,+}$ με άκρο το σημείο $(\xi, f(\xi))$, η οποία διέρχεται από το σημείο $(x, f(x))$. Αυτή η ημιευθεία βρίσκεται δεξιά του $(\xi, f(\xi))$ και καθορίζεται από το άκρο της και από την κλίση της, δηλαδή από το σημείο $(\xi, f(\xi))$ και από τον λόγο $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$. Τώρα διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις.
(i) Αν η $f'_+(\xi) = \lim_{x\to\xi+} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ είναι αριθμός, θεωρούμε την ημιευθεία l_+, η οποία έχει άκρο το σημείο $(\xi, f(\xi))$, κλίση $f'_+(\xi)$ και βρίσκεται δεξιά του $(\xi, f(\xi))$. Καθώς ο x έρχεται κατάλληλα κοντά στον ξ από δεξιά του, τότε η κλίση της μεταβλητής ημιευθείας $l_{x,+}$ πλησιάζει απεριόριστα την κλίση της σταθερής ημιευθείας l_+ και, επειδή οι ημιευθείες έχουν το ίδιο άκρο, η ημιευθεία $l_{x,+}$ πλησιάζει απεριόριστα την ημιευθεία l_+. Από αυτό συνεπάγεται ότι η ημιευθεία l_+ *εφάπτεται* στο μέρος του γραφήματος της f που είναι δεξιά του σημείου $(\xi, f(\xi))$.
(ii) Αν $f'_+(\xi) = \lim_{x\to\xi+} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = +\infty$, θεωρούμε την κατακόρυφη ημιευθεία l_+, η οποία έχει άκρο το σημείο $(\xi, f(\xi))$ και βρίσκεται πάνω από το $(\xi, f(\xi))$. Καθώς ο x έρχεται κατάλληλα κοντά στον ξ από δεξιά του, η κλίση της μεταβλητής ημιευθείας $l_{x,+}$ γίνεται απεριόριστα μεγάλη θετική και, επειδή οι ημιευθείες $l_{x,+}$ και l_+ έχουν το ίδιο άκρο, η ημιευθεία $l_{x,+}$ πλησιάζει απεριόριστα την ημιευθεία l_+. Άρα η ημιευθεία l_+ *εφάπτεται* στο μέρος του γραφήματος της f που είναι δεξιά του σημείου $(\xi, f(\xi))$.
(iii) Αν $f'_+(\xi) = \lim_{x\to\xi+} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = -\infty$, θεωρούμε την κατακόρυφη ημιευθεία l_+, η οποία έχει άκρο το σημείο $(\xi, f(\xi))$ και βρίσκεται κάτω από το $(\xi, f(\xi))$. Καθώς ο x έρχεται κατάλληλα κοντά στον ξ από δεξιά του, η κλίση της μεταβλητής ημιευθείας $l_{x,+}$ γίνεται απεριόριστα μεγάλη αρνητική και, επειδή, οι ημιευθείες $l_{x,+}$ και l_+ έχουν το ίδιο άκρο, η ημιευθεία $l_{x,+}$ πλησιάζει απεριόριστα την ημιευθεία l_+. Άρα η ημιευθεία l_+ *εφάπτεται* στο μέρος του γραφήματος της f

που είναι δεξιά του σημείου $(\xi, f(\xi))$.
Φυσικά, στις περιπτώσεις (i) - (iii) αν δεν υπάρχει το $\lim_{x\to\xi+}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$, τότε δεν υπάρχει ούτε και εφαπτόμενη ημιευθεία στο μέρος του γραφήματος της f που είναι δεξιά του σημείου $(\xi, f(\xi))$.

Ας εξετάσουμε συνοπτικά και τη "συμμετρική" κατάσταση από την αριστερή μεριά του ξ.

Έστω ότι ο ξ είναι από αριστερά του σημείο συσσώρευσης του A και έστω ότι η f είναι αριστερά συνεχής στον ξ. Για κάθε $x \in A$ με $x < \xi$ θεωρούμε την *ημιευθεία* $l_{x,-}$ με άκρο το σημείο $(\xi, f(\xi))$, η οποία διέρχεται από το σημείο $(x, f(x))$, οπότε η κλίση της είναι ίση με τον λόγο $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$. Διακρίνουμε πάλι τρεις περιπτώσεις.
(i) Αν η $f'_-(\xi) = \lim_{x\to\xi-}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ είναι αριθμός, θεωρούμε την ημιευθεία l_-, η οποία έχει άκρο το σημείο $(\xi, f(\xi))$, κλίση $f'_-(\xi)$ και βρίσκεται αριστερά του $(\xi, f(\xi))$. Καθώς ο x έρχεται κατάλληλα κοντά στον ξ από αριστερά του, η κλίση της μεταβλητής ημιευθείας $l_{x,-}$ πλησιάζει απεριόριστα την κλίση της σταθερής ημιευθείας l_- και, επειδή οι ημιευθείες έχουν το ίδιο άκρο, η ημιευθεία $l_{x,-}$ πλησιάζει απεριόριστα την ημιευθεία l_-. Άρα η ημιευθεία l_- *εφάπτεται* στο μέρος του γραφήματος της f που είναι αριστερά του σημείου $(\xi, f(\xi))$.
(ii) Αν $f'_-(\xi) = \lim_{x\to\xi-}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = +\infty$, θεωρούμε την κατακόρυφη ημιευθεία l_-, η οποία έχει άκρο το σημείο $(\xi, f(\xi))$ και βρίσκεται κάτω από το $(\xi, f(\xi))$. Καθώς ο x έρχεται κατάλληλα κοντά στον ξ από αριστερά του, η κλίση της μεταβλητής ημιευθείας $l_{x,-}$ γίνεται απεριόριστα μεγάλη θετική και, επειδή, οι ημιευθείες $l_{x,-}$ και l_- έχουν το ίδιο άκρο, η ημιευθεία $l_{x,-}$ πλησιάζει απεριόριστα την ημιευθεία l_-. Άρα η ημιευθεία l_- *εφάπτεται* στο μέρος του γραφήματος της f που είναι αριστερά του σημείου $(\xi, f(\xi))$.
(iii) Αν $f'_-(\xi) = \lim_{x\to\xi-}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = -\infty$, θεωρούμε την κατακόρυφη ημιευθεία l_-, η οποία έχει άκρο το σημείο $(\xi, f(\xi))$ και βρίσκεται πάνω από το $(\xi, f(\xi))$. Καθώς ο x έρχεται κατάλληλα κοντά στον ξ, η κλίση της μεταβλητής ημιευθείας $l_{x,-}$ γίνεται απεριόριστα μεγάλη αρνητική και, επειδή, οι ημιευθείες $l_{x,-}$ και l_- έχουν το ίδιο άκρο, η ημιευθεία $l_{x,-}$ πλησιάζει απεριόριστα την ημιευθεία l_-. Άρα η ημιευθεία l_- *εφάπτεται* στο μέρος του γραφήματος της f που είναι αριστερά του σημείου $(\xi, f(\xi))$.
Αν, στις περιπτώσεις (i) - (iii), δεν υπάρχει το όριο $\lim_{x\to\xi-}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$, τότε δεν υπάρχει ούτε και εφαπτόμενη ημιευθεία στο μέρος του γραφήματος της f που είναι αριστερά του σημείου $(\xi, f(\xi))$.





Έστω, τώρα, ότι ο ξ είναι από αριστερά του και από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A και έστω ότι η f είναι συνεχής στον ξ. Συνδυάζοντας τα προηγούμενα, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι, αν οι δύο πλευρικές παράγωγοι είναι ίσες, τότε οι εφαπτόμενες ημιευθείες l_- και l_+ στα μέρη του γραφήματος της f που είναι αριστερά και δεξιά, αντιστοίχως, του σημείου $(\xi, f(\xi))$ είναι αντίθετες και, επομένως, σχηματίζουν μια ευθεία, την ευθεία l η οποία εφάπτεται στο γράφημα της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$. Αν οι δύο πλευρικές παράγωγοι υπάρχουν αλλά δεν είναι ίσες, τότε οι δύο εφαπτόμενες ημιευθείες δεν είναι αντίθετες και, επομένως, δεν υπάρχει εφαπτόμενη ευθεία. Φυσικά, αν μία από τις δύο πλευρικές παραγώγους δεν υπάρχει, τότε ούτε η αντίστοιχη εφαπτόμενη ημιευθεία υπάρχει και, επομένως, δεν υπάρχει εφαπτόμενη ευθεία.

Παράδειγμα 5.1.12. Το γράφημα της $|x|$ έχει δύο εφαπτόμενες ημιευθείες στο σημείο $(0,0)$. Η μία έχει άκρο το $(0,0)$, κλίση $\frac{d|x|}{dx+}(0) = 1$ και βρίσκεται δεξιά του σημείου $(0,0)$. Η άλλη έχει άκρο το $(0,0)$, κλίση $\frac{d|x|}{dx-}(0) = -1$ και βρίσκεται αριστερά του $(0,0)$. Αυτές οι ημιευθείες δεν είναι αντίθετες, οπότε δεν υπάρχει εφαπτόμενη ευθεία στο γράφημα της $|x|$ στο σημείο $(0,0)$.

Παράδειγμα 5.1.13. Το γράφημα της $\sqrt{|x|}$ έχει κι αυτό δύο εφαπτόμενες ημιευθείες στο σημείο $(0,0)$. Επειδή $\frac{d\sqrt{x}}{dx+}(0) = +\infty$, η μία έχει άκρο το $(0,0)$ και βρίσκεται κατακόρυφα πάνω από το $(0,0)$. Ομοίως, επειδή $\frac{d\sqrt{x}}{dx-}(0) = -\infty$, η άλλη ημιευθεία έχει άκρο το $(0,0)$ και βρίσκεται κι αυτή κατακόρυφα πάνω από το $(0,0)$. Οι δύο εφαπτόμενες ημιευθείες ταυτίζονται, οπότε δεν υπάρχει εφαπτόμενη ευθεία στο γράφημα της $\sqrt{|x|}$ στο σημείο $(0,0)$. Μπορούμε, βέβαια, να πούμε ότι το γράφημα έχει εφαπτόμενη *ημιευθεία* στο σημείο $(0,0)$.

Παράδειγμα 5.1.14. Το γράφημα της $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{αν } 0 \le x \\ -\sqrt{-x}, & \text{αν } x \le 0 \end{cases}$ έχει δύο εφαπτόμενες ημιευθείες στο $(0,0)$. Επειδή $f'_+(0) = +\infty$, η μία έχει άκρο το σημείο $(0,0)$ και βρίσκεται κατακόρυφα πάνω από το $(0,0)$. Ομοίως, επειδή $f'_-(0) = +\infty$, η άλλη ημιευθεία έχει άκρο το $(0,0)$ και βρίσκεται κατακόρυφα κάτω από το $(0,0)$. Οι δύο ημιευθείες είναι αντίθετες και σχηματίζουν την εφαπτόμενη ευθεία στο σημείο $(0,0)$, η οποία είναι η κατακόρυφη ευθεία με εξίσωση $x = 0$.

Στην περίπτωση που ο ξ είναι μόνο από δεξιά του ή μόνο από αριστερά του σημείο συσσώρευσης του A και η f είναι, αντιστοίχως, δεξιά συνεχής ή αριστερά συνεχής στον ξ, μπορούμε να μιλάμε μόνο για μία εφαπτόμενη ημιευθεία στο γράφημά της στο σημείο $(\xi, f(\xi))$.

Παράδειγμα 5.1.15. Το γράφημα της συνάρτησης $\sqrt{x}$ έχει μόνο μία εφαπτόμενη ημιευθεία στο σημείο $(0,0)$. Επειδή $\frac{d\sqrt{x}}{dx+}(0) = +\infty$, η ημιευθεία αυτή έχει άκρο το $(0,0)$ και βρίσκεται κατακόρυφα πάνω από το $(0,0)$.

Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και ξ από αριστερά του και από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A και έστω ότι η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στον ξ (σε λίγο, στην πρόταση 5.3, θα αποδείξουμε ότι το δεύτερο συνεπάγεται το πρώτο). Όπως είδαμε, η κλίση της εφαπτόμενης ευθείας l στο γράφημα της συνάρτησης στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ είναι ίση με $f'(\xi)$, οπότε η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας είναι η

$$y = f'(\xi)(x - \xi) + f(\xi).$$

Τέλος, αν η f είναι συνεχής στον ξ και $f'(\xi) = +\infty$ ή $f'(\xi) = -\infty$, τότε η εφαπτόμενη ευθεία στο $(\xi, f(\xi))$ είναι κατακόρυφη και έχει εξίσωση $x = \xi$.

Παράδειγμα 5.1.16. Η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας στο γράφημα της συνάρτησης x^2 στο σημείο (ξ, ξ^2) είναι η $y = 2\xi(x - \xi) + \xi^2$.
Για να βρούμε σε ποιό σημείο (ξ, ξ^2) η εφαπτόμενη ευθεία είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $y = x$, εξισώνουμε τις κλίσεις των δύο ευθειών, $2\xi = 1$, και προκύπτει $\xi = \frac{1}{2}$.

5.1.2 Απειροστά. Διαφορικά.

Ας κάνουμε τώρα ένα σχόλιο για το σύμβολο $\frac{dy}{dx}$ της παραγώγου. Αν συμβολίσουμε $\Delta x = x - \xi$ τη διαφορά δύο τιμών της ανεξάρτητης μεταβλητής και $\Delta y = y - \eta = f(x) - f(\xi)$ τη διαφορά των αντίστοιχων τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής, τότε ο λόγος διαφορών $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ γράφεται

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}.$$

Όταν μελετάμε την παράγωγο $f'(\xi)$, τότε στην παράσταση $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ο παρονομαστής Δx πλησιάζει τον 0 διότι ο x πλησιάζει τον ξ. Στην περίπτωση που η f είναι συνεχής στον ξ, τότε και ο αριθμητής Δy πλησιάζει τον 0. Τώρα, ο λόγος $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ προσεγγίζει την παράγωγο $f'(\xi)$. Επομένως, όταν γράφουμε $f'(\xi) = \frac{dy}{dx}$, θεωρούμε, αυτομάτως, ότι ο λόγος $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ προσεγγίζει τον "λόγο" $\frac{dy}{dx}$. Φανταζόμαστε, λοιπόν, ότι το dx είναι κάποιο "πολύ μικρό" Δx (φανταστείτε: "μικρότερο από κάθε μη-μηδενικό αριθμό αλλά και όχι ίσο με το 0") και ότι το dy είναι κάποιο "πολύ μικρό" Δy. Τα dx και dy ονομάζονται **απειροστά** των μεταβλητών x και y. Τώρα, όταν το Δx είναι "πολύ μικρό", ο λόγος $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ είναι "περίπου ίσος" με την $f'(\xi)$ και, επομένως, *η διαφορά Δy είναι "περίπου $f'(\xi)$ φορές" η διαφορά Δx*. Μπορούμε, λοιπόν, να φανταστούμε ότι, *οριακά, το απειροστό dy είναι $f'(\xi)$ φορές το απειροστό dx*. Έτσι, έχουμε τις δύο συμβολικές σχέσεις

$$\frac{dy}{dx} = f'(\xi), \qquad dy = f'(\xi)dx. \tag{5.1}$$

Ξανατονίζουμε, διότι αυτό είναι πολύ σημαντικό και βρίσκεται *στη βάση κάθε εφαρμογής του απειροστικού λογισμού*:
Ο λόγος $\frac{dy}{dx}$ καθώς και τα dx και dy είναι εικονικές ποσότητες και δεν έχουν πραγματική υπόσταση. Η πρώτη ισότητα (5.1) σημαίνει ότι ο λόγος $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ είναι περίπου ίσος με την $f'(\xi)$ όταν το Δx είναι πολύ-πολύ μικρό και η δεύτερη ισότητα (5.1) σημαίνει ότι το Δy είναι περίπου $f'(\xi)$ φορές το Δx όταν το Δx είναι πολύ-πολύ μικρό.

Προσέξτε τη συμβολική "απλοποίηση" η οποία "επιτελείται" στη συμβολική ισότητα

$$dy = \frac{dy}{dx}dx.$$

Αν αντί της τιμής της παραγώγου στον ξ θεωρήσουμε την τιμή της στον γενικό x, δηλαδή την $f'(x)$, τότε γράφουμε

$$\frac{dy}{dx} = f'(x), \qquad dy = f'(x)dx.$$

για τη σχέση ανάμεσα στα απειροστά της μεταβλητής x και της μεταβλητής y, όπου $y = f(x)$ είναι η σχέση που συνδέει τις δύο μεταβλητές.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.5. *Κάθε συνάρτηση με τύπο $l(x) = \mu x$ χαρακτηρίζεται* **γραμμική συνάρτηση**. *Ενώ κάθε συνάρτηση με τύπο $l(x) = \mu x + \nu$ χαρακτηρίζεται* **αφφινική συνάρτηση**.

Οι γραμμικές συναρτήσεις αποτελούν υποκατηγορία των αφφινικών συναρτήσεων.

Γνωρίζουμε ότι οι γραμμικές συναρτήσεις είναι οι συναρτήσεις των οποίων τα γραφήματα είναι μη-κατακόρυφες ευθείες οι οποίες περιέχουν το σημείο $(0,0)$. Οι αφφινικές συναρτήσεις είναι, απλώς, οι συναρτήσεις των οποίων τα γραφήματα είναι μη-κατακόρυφες ευθείες. Σε κάθε αφφινική συνάρτηση αντιστοιχεί ακριβώς μια γραμμική συνάρτηση, η οποία να είναι τέτοια ώστε οι δύο συναρτήσεις να έχουν παράλληλα γραφήματα.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.6. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A. Αν υπάρχει γραμμική συνάρτηση L ώστε $\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)-L(x-\xi)}{x-\xi} = 0$, τότε η L ονομάζεται* **διαφορικό** *της f στον ξ.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.1. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A. Υπάρχει διαφορικό της f στον ξ αν και μόνο αν η f είναι παραγωγίσιμη στον ξ. Επίσης, το διαφορικό της f στον ξ, αν υπάρχει, είναι μοναδικό και είναι εκείνη η γραμμική συνάρτηση της οποίας το γράφημα είναι ευθεία παράλληλη με την εφαπτόμενη ευθεία στο γράφημα της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$.*

Απόδειξη. Έστω ότι η f είναι παραγωγίσιμη στον ξ. Τότε

$$\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = f'(\xi) \quad \text{και} \quad f'(\xi) \in \mathbb{R},$$

οπότε

$$\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)-f'(\xi)\cdot(x-\xi)}{x-\xi} = 0. \tag{5.2}$$

Άρα, αν θεωρήσουμε τη γραμμική συνάρτηση

$$L(x) = f'(\xi)\cdot x, \tag{5.3}$$

τότε η (5.2) γράφεται

$$\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)-L(x-\xi)}{x-\xi} = 0$$

και, επομένως, η συνάρτηση L είναι διαφορικό της f στον ξ.
Αντιστρόφως, έστω ότι μια γραμμική συνάρτηση

$$L(x) = \mu \cdot x \tag{5.4}$$

είναι διαφορικό της f στον ξ, οπότε

$$\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)-\mu\cdot(x-\xi)}{x-\xi} = 0.$$

Συνεπάγεται

$$\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = \mu.$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στον ξ και $f'(\xi) = \mu$, οπότε ο τύπος (5.4) της L γράφεται $L(x) = f'(\xi)\cdot x$, δηλαδή γίνεται ο (5.3). Αυτό αποδεικνύει και τη μοναδικότητα της συνάρτησης L, δηλαδή του διαφορικού της f στον ξ.
Είδαμε ότι, αν η f είναι παραγωγίσιμη στον ξ, τότε το διαφορικό της f στον ξ είναι η γραμμική συνάρτηση $f'(\xi)\cdot x$ το γράφημα της οποίας είναι, φυσικά, ευθεία που περιέχει το σημείο $(0,0)$. Τώρα, η εφαπτόμενη ευθεία στο γράφημα της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ έχει, όπως έχουμε δει, εξίσωση $f'(\xi)\cdot(x-\xi)+f(\xi) = f'(\xi)\cdot x + f(\xi) - f'(\xi)\cdot\xi$. Οι δύο αυτές ευθείες έχουν ίδιο συντελεστή του x, οπότε είναι παράλληλες. □

Ασκήσεις.

5.1.1. Θεωρήστε τις συναρτήσεις $f(x) = 3x^2-5x+3$, $f(x) = \sqrt{x+1}$, $f(x) = \frac{x^2-3x+1}{x+2}$, $f(x) = \operatorname{sign} x$, $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \neq 0 \\ 1, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ $f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{αν } x \leq 0 \\ -3x, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$ $f(x) = \begin{cases} 2x^2, & \text{αν } x \leq 0 \\ -3x^2, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$ $f(x) = x^2 \operatorname{sign} x$ και $f(x) = (x^2+1)\operatorname{sign} x$. Βρείτε, αν υπάρχουν, τις $f'(0)$, $f'_+(0)$, $f'_-(0)$.

5.1.2. Έστω $M \geq 0$, $\rho > 1$, $\delta > 0$ και έστω ότι ισχύει $|f(x) - f(\xi)| \leq M|x - \xi|^\rho$ για κάθε $x \in (\xi - \delta, \xi + \delta)$. Αποδείξτε ότι $f'(\xi) = 0$.

5.1.3. Έστω η $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x + 1, & \text{αν } x \leq 0 \\ ax + b, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$ Βρείτε τους a, b ώστε να υπάρχει η $f'(0)$.

Κάντε το ίδιο για την $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x + 1, & \text{αν } x < 0 \\ ax + b, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$

5.1.4. Έστω $g : (a, \xi] \to \mathbb{R}$, $h : [\xi, b) \to \mathbb{R}$ ώστε $g(\xi) = h(\xi)$ και $g'(\xi) = h'(\xi)$ και έστω η $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \begin{cases} g(x), & \text{αν } a < x \leq \xi \\ h(x), & \text{αν } \xi \leq x < b \end{cases}$ Αποδείξτε ότι $f'(\xi) = g'(\xi) = h'(\xi)$.

5.1.5. Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x \sin(1/x), & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ του παραδείγματος 5.1.6 αν και συνεχής στον 0, δεν έχει πλευρικές παραγώγους στον 0. Σχεδιάστε το γράφημα της f και μελετήστε τη συμπεριφορά καθώς $a \to 0+$ της μεταβλητής ημιευθείας $l_{a,+}$ με κορυφή το σταθερό σημείο $(0, 0)$ η οποία διέρχεται από το μεταβλητό σημείο $(a, f(a))$. Τείνει να ταυτιστεί η $l_{a,+}$ με κάποια ημιευθεία με κορυφή το σημείο $(0, 0)$; Κάντε το ίδιο καθώς $a \to 0-$ για την ημιευθεία $l_{a,-}$ με κορυφή το σημείο $(0, 0)$ η οποία διέρχεται από το μεταβλητό σημείο $(a, f(a))$.

Η $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x), & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ του παραδείγματος 5.1.7 είναι συνεχής στον 0 και $f'(0) = 0$. Όπως πριν, μελετήστε τη συμπεριφορά καθώς $a \to 0+$ και $a \to 0-$ των ημιευθειών $l_{a,+}$ και $l_{a,-}$, αντιστοίχως, με κορυφή το σημείο $(0, 0)$ οι οποίες διέρχονται από το μεταβλητό σημείο $(a, f(a))$.

5.1.6. Θεωρήστε την συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2(-1)^{[1/x]}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ Αποδείξτε ότι $f'(0) = 0$. Σχεδιάστε το γράφημα της f. Παρατηρήστε ότι όσο θέλουμε κοντά στον 0 υπάρχουν σημεία ασυνέχειας της f.

Θεωρήστε την $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \\ -x^2, & \text{αν } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ Αποδείξτε ότι $f'(0) = 0$. Αποδείξτε ότι η f είναι ασυνεχής σε κάθε $x \neq 0$. Μπορείτε να σχεδιάσετε το γράφημα της f;

5.1.7. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A. Αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στον ξ αν και μόνο αν υπάρχει $g : A \to \mathbb{R}$ συνεχής στον ξ ώστε να ισχύει $f(x) - f(\xi) = g(x)(x - \xi)$ για κάθε $x \in A$.[1]

5.1.8. Γνωρίζουμε από τη στοιχειώδη γεωμετρία ότι κάθε ευθεία η οποία εφάπτεται σε έναν κύκλο δεν έχει κανένα κοινό σημείο με τον κύκλο εκτός από το σημείο επαφής. Ισχύει αυτό γενικότερα; Θεωρήστε την τετραγωνική παραβολή με εξίσωση $y = x^2$. Σε κάθε σημείο της καμπύλης υπολογίστε την εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας στην καμπύλη στο σημείο αυτό και βρείτε πόσα κοινά σημεία έχει η εφαπτόμενη ευθεία με την καμπύλη.
Κάντε το ίδιο για την κυβική παραβολή με εξίσωση $y = x^3$ καθώς και με τις $y = x^4$ και $y = x^2(x - 1)^2$.
Γενικεύστε: πόσα σημεία κοινά μπορεί να έχουν η καμπύλη $y = p(x)$, όπου p είναι πολυώνυμο βαθμού n, με την εφαπτόμενή της ευθεία σε οποιοδήποτε σημείο της;

[1] Αυτή η ισοδύναμη με την παραγωγισιμότητα πρόταση “*υπάρχει $g : A \to \mathbb{R}$ συνεχής στον ξ ώστε να ισχύει $f(x) - f(\xi) = g(x)(x - \xi)$ για κάθε $x \in A$*” είναι ο **ορισμός του Caratheodory** για την παραγωγισιμότητα.

5.2 Ιδιότητες των παραγώγων.

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.2. *Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A. Έστω, επίσης, $f(\xi) = g(\xi)$ και έστω ότι οι f, g ταυτίζονται κοντά στον ξ. Αν υπάρχει η μία από τις παραγώγους $f'(\xi)$, $g'(\xi)$, τότε υπάρχει και η άλλη και $f'(\xi) = g'(\xi)$.*

Απόδειξη. Επειδή οι f, g ταυτίζονται κοντά στον ξ και επειδή $f(\xi) = g(\xi)$, ισχύει $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = \frac{g(x)-g(\xi)}{x-\xi}$ κοντά στον ξ. Άρα $\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi} \frac{g(x)-g(\xi)}{x-\xi}$. □

Στην πρόταση 5.2, αν υποθέσουμε ότι οι f, g ταυτίζονται κοντά στον ξ από δεξιά του ή από αριστερά του, τότε ισχύει το ίδιο αποτέλεσμα για τις αντίστοιχες πλευρικές παραγώγους. Όλες οι επόμενες προτάσεις μπορούν να διατυπωθούν με τρόπο ώστε να ισχύουν και για πλευρικές παραγώγους. Θα παραλείψουμε, ως προφανείς, τις σχετικές διατυπώσεις.

Παράδειγμα 5.2.1. Η $\operatorname{sign} x$ και η σταθερή συνάρτηση 1 ταυτίζονται στο $(0, +\infty)$. Επομένως, για κάθε $\xi \in (0, +\infty)$ οι δύο συναρτήσεις ταυτίζονται στον ξ και κοντά στον ξ. Άρα $\operatorname{sign}' \xi = 0$ για κάθε $\xi \in (0, +\infty)$. Ομοίως, η $\operatorname{sign} x$ και η σταθερή συνάρτηση -1 ταυτίζονται στο $(-\infty, 0)$. Άρα $\operatorname{sign}' \xi = 0$ για κάθε $\xi \in (-\infty, 0)$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.3. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στον ξ, δηλαδή αν $f'(\xi) \in \mathbb{R}$, τότε η f είναι συνεχής στον ξ.*

Απόδειξη. Επειδή ισχύει

$$f(x) = \tfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}(x-\xi) + f(\xi)$$

για κάθε $x \in A$ με $x \neq \xi$, συνεπάγεται

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = f'(\xi)0 + f(\xi) = f(\xi),$$

οπότε η f είναι συνεχής στον ξ. □

Παράδειγμα 5.2.2. Η συνάρτηση $|x|$ είναι συνεχής στον 0 αλλά όχι παραγωγίσιμη στον 0. Άρα το αντίστροφο της πρότασης 5.3 δεν ισχύει εν γένει.

Παράδειγμα 5.2.3. Στην πρόταση 5.3 υποθέτουμε ότι $f'(\xi) \in \mathbb{R}$. Αν $f'(\xi) = \pm\infty$, η f δεν είναι κατ' ανάγκη συνεχής στον ξ. Για παράδειγμα, η $\operatorname{sign} x$ δεν είναι ούτε δεξιά ούτε αριστερά συνεχής στον 0. Όμως, $\operatorname{sign}'_+ 0 = \lim_{x\to 0+} \frac{1-0}{x-0} = +\infty$ και $\operatorname{sign}'_- 0 = \lim_{x\to 0-} \frac{-1-0}{x-0} = +\infty$, οπότε $\operatorname{sign}' 0 = +\infty$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.4. *Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A. Αν οι f, g είναι παραγωγίσιμες στον ξ, τότε οι $f+g, f-g, fg : A \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες στον ξ. Αν, επιπλέον, ισχύει $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$, τότε η $f/g : A \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στον ξ.*
Επίσης:

$$(f+g)'(\xi) = f'(\xi) + g'(\xi), \qquad (f-g)'(\xi) = f'(\xi) - g'(\xi),$$
$$(fg)'(\xi) = f'(\xi)g(\xi) + f(\xi)g'(\xi), \qquad \big(\tfrac{f}{g}\big)'(\xi) = \tfrac{f'(\xi)g(\xi)-f(\xi)g'(\xi)}{(g(\xi))^2}.$$

Απόδειξη. Για την $f+g$ έχουμε

$$(f+g)'(\xi) = \lim_{x\to\xi} \tfrac{(f(x)+g(x))-(f(\xi)+g(\xi))}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi} \big(\tfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} + \tfrac{g(x)-g(\xi)}{x-\xi}\big) = f'(\xi) + g'(\xi).$$

Ομοίως για την $f-g$.
Για την fg είναι:

$$\begin{aligned}(fg)'(\xi) &= \lim_{x\to\xi} \tfrac{f(x)g(x)-f(\xi)g(\xi)}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi} \big(\tfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} g(x) + f(\xi)\tfrac{g(x)-g(\xi)}{x-\xi}\big)\\ &= f'(\xi)g(\xi) + f(\xi)g'(\xi).\end{aligned}$$

Τέλος, για την f/g είναι:

$$\begin{aligned}\left(\tfrac{f}{g}\right)'(\xi) &= \lim_{x\to\xi} \tfrac{\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(\xi)}{g(\xi)}}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi}\left(\tfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\tfrac{1}{g(x)} - \tfrac{f(\xi)}{g(\xi)g(x)}\tfrac{g(x)-g(\xi)}{x-\xi}\right)\\ &= f'(\xi)\tfrac{1}{g(\xi)} - \tfrac{f(\xi)}{(g(\xi))^2}g'(\xi) = \tfrac{f'(\xi)g(\xi)-f(\xi)g'(\xi)}{(g(\xi))^2}.\end{aligned}$$

□

Με τα σύμβολα των απειροστών και αφού συμβολίσουμε $y_1 = f(x)$ και $y_2 = g(x)$, γράφουμε:

$$\tfrac{d(y_1\pm y_2)}{dx} = \tfrac{dy_1}{dx} \pm \tfrac{dy_2}{dx}, \qquad \tfrac{d(y_1y_2)}{dx} = \tfrac{dy_1}{dx}y_2 + y_1\tfrac{dy_2}{dx}, \qquad \tfrac{d}{dx}\left(\tfrac{y_1}{y_2}\right) = \tfrac{1}{y_2}\tfrac{dy_1}{dx} - \tfrac{y_1}{y_2{}^2}\tfrac{dy_2}{dx}.$$

Οι συμβολικές αυτές σχέσεις με “απαλοιφή” του dx συνεπάγονται τις

$$d(y_1 \pm y_2) = dy_1 \pm dy_2, \quad d(y_1y_2) = y_2dy_1 + y_1dy_2, \quad d(y_1/y_2) = (1/y_2)dy_1 - (y_1/y_2{}^2)dy_2.$$

Παράδειγμα 5.2.4. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στον ξ και $c \in \mathbb{R}$, τότε και η $cf : A \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στον ξ και

$$(cf)'(\xi) = cf'(\xi).$$

Πράγματι, $(cf)'(\xi) = c'(\xi)f(\xi) + c(\xi)f'(\xi) = 0f(\xi) + cf'(\xi) = cf'(\xi)$.

Παράδειγμα 5.2.5. Μπορούμε να ξαναποδείξουμε επαγωγικά ότι ισχύει $\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Πράγματι,

$$\tfrac{dx^2}{dx} = \tfrac{d(xx)}{dx} = \tfrac{dx}{dx}x + x\tfrac{dx}{dx} = 1x + x1 = 2x$$

και, αν υποθέσουμε ότι είναι $\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$, τότε

$$\tfrac{dx^{n+1}}{dx} = \tfrac{d(x^nx)}{dx} = \tfrac{dx^n}{dx}x + x^n\tfrac{dx}{dx} = nx^{n-1}x + x^n1 = (n+1)x^n.$$

Παράδειγμα 5.2.6. Ισχύει

$$\tfrac{d}{dx}(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) = a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1}.$$

Άρα η παράγωγος πολυωνυμικής συνάρτησης βαθμού $n \geq 1$ είναι πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού $n - 1$.

Παράδειγμα 5.2.7. Θα αποδείξουμε ότι

$$\tfrac{dx^n}{dx} = nx^{n-1} \qquad \text{για κάθε } x \neq 0, \ \text{ αν } n \in \mathbb{Z}, n \leq 0.$$

Αν $n = 0$ και $x \neq 0$, είναι $\frac{dx^0}{dx} = \frac{d1}{dx} = 0 = 0x^{0-1}$.
Αν $n \leq -1$ και $x \neq 0$, θέτουμε $m = -n \geq 1$ και τότε:

$$\tfrac{dx^n}{dx} = \tfrac{d}{dx}\left(\tfrac{1}{x^m}\right) = \tfrac{-mx^{m-1}}{x^{2m}} = -mx^{-m-1} = nx^{n-1}.$$

Παράδειγμα 5.2.8. Έστω ρητή συνάρτηση $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$. Τότε, για κάθε x στο πεδίο ορισμού της R, δηλαδή για κάθε x ώστε $Q(x) \neq 0$, είναι $R'(x) = \frac{P'(x)Q(x)-P(x)Q'(x)}{(Q(x))^2}$. Άρα η παράγωγος ρητής συνάρτησης είναι ρητή συνάρτηση.

Η επόμενη ιδιότητα είναι ιδιαιτέρως σημαντική για τον υπολογισμό παραγώγων. Λέει ότι η παράγωγος της σύνθεσης δύο συναρτήσεων είναι ίση με το γινόμενο των παραγώγων τους.

ΚΑΝΟΝΑΣ ΑΛΥΣΙΔΑΣ. *Έστω $f : A \to B$, $g : B \to \mathbb{R}$, $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A και $\eta = f(\xi) \in B$ σημείο συσσώρευσης του B. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στον ξ και η g παραγωγίσιμη στον η, τότε η $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στον ξ και*

$$(g \circ f)'(\xi) = g'(\eta)f'(\xi) = g'(f(\xi))f'(\xi).$$

Απόδειξη. Ορίζουμε $G : B \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$G(y) = \begin{cases} \frac{g(y)-g(\eta)}{y-\eta}, & \text{αν } y \in B, y \neq \eta \\ g'(\eta), & \text{αν } y = \eta \end{cases}$$

Η G είναι συνεχής στον η διότι

$$\lim_{y\to\eta} G(y) = \lim_{y\to\eta} \frac{g(y)-g(\eta)}{y-\eta} = g'(\eta) = G(\eta).$$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στον ξ, είναι συνεχής στον ξ, οπότε και η $G \circ f : A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στον ξ. Άρα

$$\lim_{x\to\xi} G(f(x)) = G(f(\xi)) = G(\eta) = g'(\eta). \tag{5.5}$$

Επίσης, ισχύει

$$g(y) - g(\eta) = G(y)(y - \eta) \tag{5.6}$$

για κάθε $y \in B$. Πράγματι, αν $y \in B$ και $y \neq \eta$, τότε η ισότητα ισχύει λόγω του ορισμού του $G(y)$ και, αν $y = \eta$, τότε και τα δύο μέλη της ισότητας είναι ίσα με 0.
Χρησιμοποιώντας την (5.6) με $y = f(x)$ και την (5.5), έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\xi} \frac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(\xi)}{x-\xi} &= \lim_{x\to\xi} \frac{g(f(x))-g(f(\xi))}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi} \frac{G(f(x))(f(x)-f(\xi))}{x-\xi} \\ &= \lim_{x\to\xi} G(f(x)) \lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = g'(\eta)f'(\xi). \end{aligned}$$

Άρα $(g \circ f)'(\xi) = g'(\eta)f'(\xi)$. □

Συμβολίζοντας $y = f(x)$ και $z = g(y)$, γράφουμε με τα σύμβολα των απειροστών: $\frac{dz}{dy} = g'(\eta)$ και $\frac{dy}{dx} = f'(\xi)$. Επίσης, επειδή $z = g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$, είναι $\frac{dz}{dx} = (g \circ f)'(\xi)$. Επομένως, η σχέση $(g \circ f)'(\xi) = g'(\eta)f'(\xi)$ γράφεται, με τα σύμβολα των απειροστών,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}. \tag{5.7}$$

Προσέξτε την “απλοποίηση” η οποία “συμβαίνει” στον τύπο (5.7). Προσέξτε πώς ο ίδιος τύπος, με “απαλοιφή” του dx, καταλήγει στον γνωστό μας τύπο $dz = \frac{dz}{dy}dy$.

Παράδειγμα 5.2.9. Έστω η συνάρτηση $h(x) = (x^2 + 3)^5$. Θα υπολογίσουμε την $h'(2)$.
Θεωρούμε τις $f(x) = x^2 + 3$ και $g(y) = y^5$. Τότε $h = g \circ f$, οπότε $h'(2) = g'(f(2))f'(2) = g'(7)f'(2) = 5 \cdot 7^4 \cdot 4$.
Γενικά:

$$h'(x) = g'(f(x))f'(x) = 5(f(x))^4 f'(x) = 10x(x^2 + 3)^4$$

για κάθε x.
Με τα απειροστά, γράφουμε $y = x^2 + 3$ και $z = y^5$ και τότε

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = 5y^4 2x = 10x(x^2 + 3)^4.$$

Θα κάνουμε μια διαφωτιστική παρατήρηση σχετικά με τον κανόνα αλυσίδας. Θα υποθέσουμε *επιπλέον* ότι η f είναι ένα-προς-ένα και θα δούμε μια *δεύτερη απόδειξη* του κανόνα. Αν η f είναι ένα-προς-ένα, τότε, αν $x \neq \xi$, συνεπάγεται $f(x) \neq f(\xi)$, οπότε μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(\xi)}{x-\xi} = \frac{g(f(x))-g(f(\xi))}{f(x)-f(\xi)}\,\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = \frac{g(y)-g(\eta)}{y-\eta}\,\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}. \tag{5.8}$$

Τώρα, επειδή η f είναι συνεχής στον ξ, είναι $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$, οπότε, κάνοντας αλλαγή μεταβλητής από x σε $y = f(x)$, υπολογίζουμε το όριο

$$(g\circ f)'(\xi) = \lim_{x\to\xi}\frac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(\xi)}{x-\xi} = \lim_{y\to\eta}\frac{g(y)-g(\eta)}{y-\eta}\lim_{x\to\xi}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = g'(\eta)f'(\xi).$$

Θα παρατηρήσουμε ότι με τα σύμβολα $y = f(x)$ και $z = g(y)$ η σχέση (5.8) γράφεται

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\Delta z}{\Delta y}\,\frac{\Delta y}{\Delta x}\,,$$

οπότε, παίρνοντας όρια, καταλήγουμε στη συμβολική σχέση (5.7) με τα απειροστά.

Αυτή η απόδειξη είναι τελείως “διαφανής” ως προς την πραγματική σχέση ανάμεσα στις διαφορές των τριών μεταβλητών x, y και z και την συνεπαγόμενη σχέση ανάμεσα στα αντίστοιχα απειροστά των τριών μεταβλητών. Δυστυχώς, η απλή αυτή απόδειξη δεν λειτουργεί στη γενική περίπτωση, διότι, αν η f δεν είναι ένα-προς-ένα, τότε η διαφορά $\Delta y = y - \eta = f(x) - f(\xi)$ μπορεί να είναι ίση με 0 ακόμη κι αν η $\Delta x = x - \xi$ δεν είναι ίση με 0.[2]

Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A. Ας υποθέσουμε ότι η f είναι *αύξουσα στο* A και ότι υπάρχει η $f'(\xi)$. Επειδή η f είναι αύξουσα, ισχύει $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \geq 0$ για κάθε $x \in A$ με $x \neq \xi$ και, επομένως, $f'(\xi) = \lim_{x\to\xi}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \geq 0$.
Ομοίως, αν η f είναι φθίνουσα στο A και υπάρχει η $f'(\xi)$, τότε είναι $f'(\xi) \leq 0$.

Αν η συνάρτηση είναι μονότονη στο $A \cap (-\infty, \xi]$ ή στο $A \cap [\xi, +\infty)$, τότε έχουμε ανάλογα συμπεράσματα για το πρόσημο των αντίστοιχων $f'_-(\xi)$ ή $f'_+(\xi)$.

Η επόμενη ιδιότητα λέει ότι η παράγωγος της αντίστροφης συνάρτησης είναι ίση με το αντίστροφο της παραγώγου της συνάρτησης.

ΚΑΝΟΝΑΣ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ.[3] *Έστω διάστημα I, $\xi \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$ γνησίως αύξουσα και συνεχής στο I και $\eta = f(\xi)$. Γνωρίζουμε ότι το σύνολο τιμών της f είναι διάστημα, έστω J, ότι, φυσικά, $\eta \in J$ και ότι η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : J \to I$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο J. Αν υπάρχει η $f'(\xi)$, τότε υπάρχει και η $(f^{-1})'(\eta)$ και*

$$(f^{-1})'(\eta) = \begin{cases} 1/f'(\xi), & \text{αν } 0 < f'(\xi) < +\infty \\ 0, & \text{αν } f'(\xi) = +\infty \\ +\infty, & \text{αν } f'(\xi) = 0 \end{cases}$$

Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα, τότε ισχύουν τα ίδια αλλά με τις αντίθετες ανισότητες και με $-\infty$ αντί $+\infty$.

Απόδειξη. Έστω $f'(\xi) \in \mathbb{R}$ και $f'(\xi) > 0$. Επειδή η f^{-1} είναι συνεχής στον η, συνεπάγεται $\lim_{y\to\eta} f^{-1}(y) = \xi$, οπότε, κάνοντας αλλαγή μεταβλητής από y σε $x = f^{-1}(y)$, βρίσκουμε

$$(f^{-1})'(\eta) = \lim_{y\to\eta}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(\eta)}{y-\eta} = \lim_{x\to\xi}\frac{x-\xi}{f(x)-f(\xi)} = \lim_{x\to\xi} 1\Big/\Big(\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\Big) = \frac{1}{f'(\xi)}.$$

Αν $f'(\xi) = +\infty$, τότε το τελευταίο όριο είναι ίσο με $\frac{1}{+\infty} = 0$, οπότε $(f^{-1})'(\eta) = 0$.
Τέλος, αν $f'(\xi) = 0$, τότε, επειδή ισχύει $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} > 0$ για κάθε $x \in I$ με $x \neq \xi$, το τελευταίο όριο είναι ίσο με $+\infty$, οπότε $(f^{-1})'(\eta) = +\infty$. □

[2] Η απόδειξη αυτή μπορεί να προσαρμοστεί και στην γενική περίπτωση αλλά χάνει την απλότητά της.

[3] Στην άσκηση 5.2.18 υπάρχει μια άλλη μορφή του κανόνα αντίστροφης συνάρτησης.

Θα διατυπώσουμε τη σχέση $(f^{-1})'(\eta) = 1/f'(\xi)$ με τα σύμβολα των απειροστών. Γράφουμε $y = f(x)$ και $x = f^{-1}(y)$. Τότε $\frac{dy}{dx} = f'(\xi)$ και $\frac{dx}{dy} = (f^{-1})'(\eta)$. Άρα η $(f^{-1})'(\eta) = 1/f'(\xi)$ γράφεται

$$\tfrac{dx}{dy} = 1/\big(\tfrac{dy}{dx}\big).$$

Παρατηρήστε ότι η σχέση αυτή δεν είναι τίποτε άλλο από το όριο της προφανούς σχέσης

$$\tfrac{\Delta x}{\Delta y} = 1/\big(\tfrac{\Delta y}{\Delta x}\big),$$

η οποία χρησιμοποιήθηκε στην απόδειξη του κανόνα αντίστροφης συνάρτησης. Παρατηρήστε, επίσης, την "απλοποίηση" του "σύνθετου λόγου" η οποία "υφίσταται" στον τύπο $\frac{dx}{dy} = 1/(\frac{dy}{dx})$.

5.2.1 Τα βασικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 5.2.10. Η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $y = x^n$, περιορισμένη στο $[0, +\infty)$, έχει ως αντίστροφη την $x = \sqrt[n]{y}$ με πεδίο ορισμού το $[0, +\infty)$. Επομένως,

$$\tfrac{dx}{dy} = 1/(\tfrac{dy}{dx}) = \tfrac{1}{nx^{n-1}} = \tfrac{x}{nx^n} = \tfrac{\sqrt[n]{y}}{ny}$$

για $y > 0$. Αν $y = 0$, τότε, επειδή $\frac{dy}{dx}(0) = 0$, είναι $\frac{dx}{dy}(0) = +\infty$. Άρα

$$\tfrac{d\sqrt[n]{y}}{dy} = \begin{cases} \sqrt[n]{y}/(ny), & \text{αν } y > 0 \\ +\infty, & \text{αν } y = 0 \end{cases}$$

Αυτό είναι ειδική περίπτωση του αμέσως επόμενου παραδείγματος αλλά θα χρησιμοποιηθεί στην απόδειξή του.

Παράδειγμα 5.2.11. Με το παράδειγμα αυτό θα έχουμε καλύψει την παράγωγο της συνάρτησης δύναμη σε όλες τις περιπτώσεις ρητού εκθέτη.
Θα αποδείξουμε ότι

$$\tfrac{dx^r}{dx} = rx^{r-1} \qquad \text{για κάθε } x > 0, \text{ αν } r \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}.$$

Πράγματι, έστω $r = \frac{m}{n}$ με $m \in \mathbb{Z}$ και $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, οπότε $x^r = (\sqrt[n]{x})^m$. Θέτουμε $y = \sqrt[n]{x}$ και $z = x^r = y^m$ και τότε

$$\tfrac{dx^r}{dx} = \tfrac{dz}{dx} = \tfrac{dz}{dy}\tfrac{dy}{dx} = my^{m-1}\tfrac{\sqrt[n]{x}}{nx} = \tfrac{m(\sqrt[n]{x})^{m-1}\sqrt[n]{x}}{nx} = \tfrac{m}{n}x^{(m/n)-1} = rx^{r-1}.$$

Αν $r > 1$ και $x = 0$, τότε

$$\tfrac{dx^r}{dx}(0) = \tfrac{dx^r}{dx+}(0) = \lim_{x\to 0+}\tfrac{x^r - 0^r}{x-0} = \lim_{x\to 0+} x^{r-1} = 0 = r0^{r-1},$$

οπότε και σ' αυτήν την περίπτωση ισχύει ο προηγούμενος γενικός τύπος για την παράγωγο της x^r.
Αν $0 < r < 1$ και $x = 0$, τότε

$$\tfrac{dx^r}{dx}(0) = \tfrac{dx^r}{dx+}(0) = \lim_{x\to 0+}\tfrac{x^r - 0^r}{x-0} = \lim_{x\to 0+} x^{r-1} = +\infty.$$

Ακριβώς στην περίπτωση $0 < r < 1$ εντάσσεται το αποτέλεσμα του προηγούμενου παραδείγματος 5.2.10, στο οποίο είναι $r = 1/n$.
Τέλος, αν $r < 0$, τότε ο 0 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της x^r, οπότε η παράγωγος στον 0 δεν έχει καν νόημα.

Παράδειγμα 5.2.12. Έστω $a > 0$, $a \neq 1$. Θα αποδείξουμε ότι

$$\tfrac{d\log_a x}{dx} = \tfrac{1}{\log a}\tfrac{1}{x} \qquad \text{για κάθε } x > 0.$$

Αρχικά θεωρούμε την περίπτωση $a = e$ και θυμόμαστε το όριο

$$\lim_{x\to+\infty}(1+\tfrac{t}{x})^x = e^t$$

που είδαμε στο παράδειγμα 4.2.10. Τώρα,

$$\begin{aligned}\frac{d\log x}{dx+} &= \lim_{h\to0+}\frac{\log(x+h)-\log x}{h} = \lim_{h\to0+}\frac{1}{h}\log(1+\tfrac{h}{x})\\ &= \lim_{y\to+\infty}\log(1+\tfrac{1/x}{y})^y = \lim_{z\to e^{1/x}}\log z = \log e^{1/x} = \tfrac{1}{x}.\end{aligned}$$

Ομοίως,

$$\begin{aligned}\frac{d\log x}{dx-} &= \lim_{h\to0-}\frac{\log(x+h)-\log x}{h} = \lim_{h\to0-}\frac{1}{h}\log(1+\tfrac{h}{x})\\ &= -\lim_{y\to+\infty}\log(1+\tfrac{-1/x}{y})^y = -\lim_{z\to e^{-1/x}}\log z = -\log e^{-1/x} = \tfrac{1}{x}.\end{aligned}$$

Άρα

$$\frac{d\log x}{dx} = \frac{1}{x} \qquad \text{για κάθε } \ x > 0.$$

Στη γενική περίπτωση γράφουμε $\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$ και βρίσκουμε $\frac{d\log_a x}{dx} = \frac{1}{\log a}\frac{d\log x}{dx} = \frac{1}{\log a}\frac{1}{x}$ για κάθε $x > 0$.

Παράδειγμα 5.2.13. Ισχύει

$$\frac{d\log|x|}{dx} = \frac{1}{x} \qquad \text{για κάθε } \ x \neq 0.$$

Πράγματι, αν $x > 0$, τότε αναγόμαστε στο προηγούμενο παράδειγμα και, αν $x < 0$, τότε με αλλαγή μεταβλητής από x σε $y = -x = |x|$ έχουμε

$$\frac{d\log|x|}{dx} = \frac{d\log y}{dy}\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{y} = \frac{1}{x}.$$

Παράδειγμα 5.2.14. Έστω $a > 0$, $a \neq 1$. Θα αποδείξουμε ότι

$$\frac{da^x}{dx} = a^x\log a \qquad \text{για κάθε } \ x.$$

Θα χρησιμοποιήσουμε την παράγωγο της λογαριθμικής συνάρτησης από το προηγούμενο παράδειγμα καθώς και το ότι οι $y = a^x$ και $x = \log_a y$ είναι αντίστροφες συναρτήσεις. Πράγματι,

$$\frac{dy}{dx} = 1\big/\big(\tfrac{dx}{dy}\big) = 1\big/\big(\tfrac{1}{\log a}\tfrac{1}{y}\big) = y\log a.$$

Φυσικά, στην ειδική περίπτωση $a = e$ έχουμε

$$\frac{de^x}{dx} = e^x \qquad \text{για κάθε } \ x.$$

Παράδειγμα 5.2.15. Βάσει των ορισμών των υπερβολικών συναρτήσεων και των αντίστροφων υπερβολικών συναρτήσεων, εύκολα βρίσκουμε ότι

$$\frac{d\cosh x}{dx} = \sinh x, \quad \frac{d\sinh x}{dx} = \cosh x, \quad \frac{d\tanh x}{dx} = \frac{1}{(\cosh x)^2}, \quad \frac{d\coth x}{dx} = -\frac{1}{(\sinh x)^2}.$$

Επίσης, αν $x = \operatorname{arccosh} y$ και $y = \cosh x$ για $y > 1$ και $x > 0$, τότε

$$\frac{dx}{dy} = 1\big/\big(\tfrac{dy}{dx}\big) = \frac{1}{\sinh x} = \frac{1}{\sqrt{(\cosh x)^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}.$$

Στην ισότητα $\sinh x = \pm\sqrt{(\cosh x)^2 - 1}$ κρατήσαμε το πρόσημο $+$ διότι ισχύει $\sinh x > 0$ για κάθε $x > 0$.
Ομοίως, αν $x = \operatorname{arcsinh} y$ και $y = \sinh x$, τότε

$$\frac{dx}{dy} = 1\big/\big(\tfrac{dy}{dx}\big) = \frac{1}{\cosh x} = \frac{1}{\sqrt{(\sinh x)^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}.$$

Εδώ γράψαμε $\cosh x = \sqrt{(\sinh x)^2 + 1}$ διότι ισχύει $\cosh x > 0$ για κάθε x.
Άρα

$$\frac{d \operatorname{arccosh} y}{dy} = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}} \quad \text{για } y > 1 \qquad \text{και} \qquad \frac{d \operatorname{arcsinh} y}{dy} = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}} \quad \text{για κάθε } y.$$

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι

$$\frac{d \operatorname{arctanh} y}{dy} = \frac{1}{1-y^2} \quad \text{για } |y| < 1 \qquad \text{και} \qquad \frac{d \operatorname{arccoth} y}{dy} = \frac{1}{1-y^2} \quad \text{για } |y| > 1.$$

Παράδειγμα 5.2.16. Με το παράδειγμα αυτό θα έχουμε καλύψει πλήρως την παράγωγο της συνάρτησης δύναμη σε όλες τις περιπτώσεις πραγματικού εκθέτη.

$$\frac{dx^a}{dx} = ax^{a-1} \qquad \text{για κάθε } \ x > 0, \ \ \text{αν } \ a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

Τώρα γράφουμε $x^a = e^{a \log x}$ και θέτουμε $z = x^a$ και $y = a \log x$, οπότε $z = e^y$, και βρίσκουμε

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = e^y a\frac{1}{x} = za\frac{1}{x} = x^a a\frac{1}{x} = ax^{a-1}.$$

Αν $a > 1$ και $x = 0$, τότε

$$\frac{dx^a}{dx}(0) = \frac{dx^a}{dx+}(0) = \lim_{x\to 0+} \frac{x^a-0^a}{x-0} = \lim_{x\to 0+} x^{a-1} = 0 = a0^{a-1},$$

οπότε και σ' αυτήν την περίπτωση ισχύει ο προηγούμενος γενικός τύπος για την παράγωγο της x^a.
Αν $0 < a < 1$ και $x = 0$, τότε

$$\frac{dx^a}{dx}(0) = \frac{dx^a}{dx+}(0) = \lim_{x\to 0+} \frac{x^a-0^a}{x-0} = \lim_{x\to 0+} x^{a-1} = +\infty.$$

Τέλος, αν $a < 0$, τότε ο 0 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της x^a, οπότε η παράγωγος στον 0 δεν έχει νόημα.

Παράδειγμα 5.2.17. Θα υπολογίσουμε τις παραγώγους συναρτήσεις των τριγωνομετρικών και των αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων.
Είναι

$$\frac{d \cos x}{dx}(\xi) = \lim_{x\to\xi} \frac{\cos x - \cos \xi}{x-\xi} = -\lim_{x\to\xi} \frac{\sin((x-\xi)/2)}{(x-\xi)/2} \sin((x+\xi)/2) = -\sin\xi$$

και

$$\frac{d \sin x}{dx}(\xi) = \lim_{x\to\xi} \frac{\sin x - \sin \xi}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi} \frac{\sin((x-\xi)/2)}{(x-\xi)/2} \cos((x+\xi)/2) = \cos\xi$$

για κάθε ξ. Άρα

$$\frac{d \cos x}{dx} = -\sin x, \qquad \frac{d \sin x}{dx} = \cos x.$$

Ακόμη, έχουμε

$$\tan' x = \frac{\sin' x \cos x - \sin x \cos' x}{(\cos x)^2} = \frac{1}{(\cos x)^2}, \qquad \cot' x = \frac{\cos' x \sin x - \cos x \sin' x}{(\sin x)^2} = -\frac{1}{(\sin x)^2}.$$

Άρα

$$\frac{d \tan x}{dx} = \frac{1}{(\cos x)^2}, \qquad \frac{d \cot x}{dx} = -\frac{1}{(\sin x)^2}.$$

Αν $x = \arcsin y$ και $y = \sin x$ για $-1 < y < 1$ και $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, τότε

$$\frac{d \arcsin y}{dy} = \frac{dx}{dy} = 1\Big/\Big(\frac{dy}{dx}\Big) = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-(\sin x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Στην ισότητα $\cos x = \pm\sqrt{1-(\sin x)^2}$ κρατήσαμε το πρόσημο $+$ διότι ισχύει $\cos x > 0$ όταν $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.
Ομοίως, αν $x = \arccos y$ και $y = \cos x$ για $-1 < y < 1$ και $0 < x < \pi$, τότε

$$\frac{d \arccos y}{dy} = \frac{dx}{dy} = 1\Big/\Big(\frac{dy}{dx}\Big) = -\frac{1}{\sin x} = -\frac{1}{\sqrt{1-(\cos x)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Πάλι, στην ισότητα $\sin x = \pm\sqrt{1-(\cos x)^2}$ κρατήσαμε το πρόσημο $+$ διότι ισχύει $\sin x > 0$ όταν $0 < x < \pi$.
Άρα

$$\frac{d \arcsin y}{dy} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \quad \text{για } |y| < 1 \qquad \text{και} \qquad \frac{d \arccos y}{dy} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \quad \text{για } |y| < 1.$$

Τώρα, με $x = \arctan y$ και $y = \tan x$ για $y \in \mathbb{R}$ και για $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ έχουμε

$$\frac{d \arctan y}{dy} = \frac{dx}{dy} = 1/\left(\frac{dy}{dx}\right) = (\cos x)^2 = \frac{1}{1+(\tan x)^2} = \frac{1}{1+y^2}.$$

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι $\frac{d \operatorname{arccot} y}{dy} = -\frac{1}{1+y^2}$, οπότε

$$\frac{d \arctan y}{dy} = \frac{1}{1+y^2} \quad \text{για κάθε } y \qquad \text{και} \qquad \frac{d \operatorname{arccot} y}{dy} = -\frac{1}{1+y^2} \quad \text{για κάθε } y.$$

Ασκήσεις.

5.2.1. Από την ισότητα $x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1} - 1$ βρείτε ανάλογες ισότητες για τα αθροίσματα $x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n$ και $x + 4x^2 + 9x^3 + \cdots + n^2x^n$.

5.2.2. Παρατηρήστε ότι τα όρια $\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x-1}$, $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$, $\lim_{x\to 1} \frac{x^a-1}{x-1}$ είναι γνωστές παράγωγοι συγκεκριμένων συναρτήσεων σε συγκεκριμένα σημεία και *ως τέτοιες* υπολογίστε τα.
Βάσει των προηγουμένων βρείτε τα $\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x^a-1}$, $\lim_{x\to 1} \frac{x^a-x^b}{x-1}$, $\lim_{x\to 1} \frac{x^a-x^b}{\log x}$, $\lim_{x\to 0} \frac{a^x-b^x}{x}$, $\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$, $\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax}-e^{-ax}}{x(e^{ax}+e^{-ax})}$.

5.2.3. Βρείτε τις παραγώγους συναρτήσεις των $[x]$, $x-[x]$, $\left|x-[x]-\frac{1}{2}\right|$, $\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)^2$.

5.2.4. Βρείτε τις παραγώγους συναρτήσεις των $\arccos(\cos x)$, $\cos(\arccos x)$.
Βρείτε τις παραγώγους συναρτήσεις των $\log_3(\sin x)$, $x\log(x\log(x\log(x\log x)))$, $\log_x 3$.

5.2.5. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x\sin(1/x), & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ Βρείτε την f'.

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2\sin(1/x), & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ Βρείτε την f' και δείτε αν είναι συνεχής.

Γενικεύστε. Θεωρήστε την συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^a\sin(1/x), & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ Για ποιές τιμές του a είναι η f συνεχής στο $\mathbb{R}$; είναι η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$; είναι η f' συνεχής στο $\mathbb{R}$;

5.2.6. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in A$ και $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στον ξ, βρείτε τα $\lim_{h\to 0} \left(\frac{f(\xi+h)}{f(\xi)}\right)^{1/h}$ και $\lim_{x\to \xi} \left(\frac{f(x)}{f(\xi)}\right)^{1/(\log x - \log \xi)}$. Για το δεύτερο όριο υποθέτουμε επιπλέον ότι $A \subseteq (0, +\infty)$.

5.2.7. Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$, $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in A$. Αν οι f, g είναι παραγωγίσιμες στον ξ, αποδείξτε ότι και η $f^g : A \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στον ξ και υπολογίστε την $(f^g)'(\xi)$.
Βρείτε τις παραγώγους συναρτήσεις των x^x, $(x^2+1)^{\log x}$, $|x-1|^{x-2}|x-2|^{x-1}$.

5.2.8. [4] Έστω ότι ο αριθμός ξ είναι ρίζα του πολυωνύμου P, δηλαδή $P(\xi) = 0$. Λέμε ότι ο $k \in \mathbb{N}$ είναι η **πολλαπλότητα** του ξ ως ρίζα του P αν υπάρχει πολυώνυμο Q ώστε να ισχύει

[4]Η άσκηση αυτή συνεχίζεται στην 5.3.11. Η έννοια της πολλαπλότητας ρίζας θα γενικευτεί για μη-πολυωνυμικές συναρτήσεις στην άσκηση 5.6.13.

$P(x) = (x-\xi)^k Q(x)$ για κάθε x και $Q(\xi) \neq 0$. Το ότι $Q(\xi) \neq 0$ ισοδυναμεί με το ότι το πολυώνυμο Q δεν διαιρείται από το $x - \xi$. Άρα η πολλαπλότητα της ρίζας ξ του πολυωνύμου P είναι ο μέγιστος εκθέτης k ώστε το $(x-\xi)^k$ να διαιρεί το P. Αν ο ξ δεν είναι ρίζα του πολυωνύμου P, δηλαδή $P(\xi) \neq 0$, επεκτείνουμε τον ορισμό της έννοιας της πολλαπλότητας, λέγοντας ότι η **πολλαπλότητα** του ξ ως ρίζα του P είναι 0. Είναι προφανές ότι η πολλαπλότητα μιας ρίζας πολυωνύμου δεν υπερβαίνει τον βαθμό του πολυωνύμου.

Έστω ότι ο ξ είναι ρίζα του πολυωνύμου P. Αποδείξτε ότι ο ξ είναι ρίζα πολλαπλότητας $k \in \mathbb{N}$ του P αν και μόνο αν είναι ρίζα πολλαπλότητας $k-1$ του P'.

5.2.9. Έστω $f_1, \dots, f_n : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A. Αν οι $f_1, \dots, f_n$ είναι παραγωγίσιμες στον ξ και $f_1(\xi) \cdots f_n(\xi) \neq 0$ και $g = f_1 \cdots f_n : A \to \mathbb{R}$, αποδείξτε *με δύο τρόπους* ότι $\frac{g'(\xi)}{g(\xi)} = \frac{f_1{}'(\xi)}{f_1(\xi)} + \cdots + \frac{f_n{}'(\xi)}{f_n(\xi)}$.

5.2.10. Για ποιές ρητές συναρτήσεις R ισχύει $\lim_{x\to+\infty} \frac{xR'(x)}{R(x)} = 0$;

5.2.11. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει κανένα διάστημα (a, b) και καμιά ρητή συνάρτηση R ώστε να ισχύει $R'(x) = \frac{1}{x}$ για κάθε $x \in (a, b)$.

5.2.12. Αποδείξτε ότι η παράγωγος άρτιας συνάρτησης είναι περιττή συνάρτηση και η παράγωγος περιττής συνάρτησης είναι άρτια συνάρτηση. Αποδείξτε ότι η παράγωγος περιοδικής συνάρτησης είναι περιοδική συνάρτηση.

5.2.13. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $\xi \in A$ από δεξιά του και αριστερά του σημείο συσσώρευσης του A και έστω ότι η f είναι παραγωγίσιμη στον ξ. Θεωρούμε και την $|f| : A \to \mathbb{R}$.
Αν $f(\xi) \neq 0$, αποδείξτε ότι $|f|'(\xi) = \mathrm{sign}(f(\xi))\, f'(\xi)$.
Αν $f(\xi) = 0$ και $f'(\xi) = 0$, αποδείξτε ότι $|f|'(\xi) = 0$.
Αν $f(\xi) = 0$ και $f'(\xi) \neq 0$, αποδείξτε ότι η $|f|$ δεν είναι παραγωγίσιμη στον ξ. Αποδείξτε, όμως, ότι $|f|'_+(\xi) = |f'(\xi)|$ και $|f|'_-(\xi) = -|f'(\xi)|$.

5.2.14. Έστω πολυωνυμικές συναρτήσεις P, Q, όπου η P έχει βαθμό $n \geq 2$ και n διαφορετικές ανά δύο ρίζες $x_1, \dots, x_n$ και η Q έχει βαθμό $\leq n-1$.
Αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{Q(x)}{P(x)} = \sum_{k=1}^n \frac{Q(x_k)}{P'(x_k)(x-x_k)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$.
Υπολογίστε το $\sum_{k=1}^n \frac{1}{P'(x_k)}$.
Αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{1}{x(x+1)\cdots(x+m)} = \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \frac{(-1)^k}{x+k}$ για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, \dots, -m\}$.

5.2.15. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ συνεχής στο A ώστε να ισχύει $(f(x))^2 + 4f(x) = x^3 - 5x^2 - 9x + 41$ για κάθε $x \in A$. Αποδείξτε ότι ισχύει $(2f(x) + 4)f'(x) = 3x^2 - 10x - 9$ για κάθε $x \in A$ στον οποίο η f είναι παραγωγίσιμη. Βρείτε το μέγιστο δυνατό σύνολο A, αποδείξτε ότι υπάρχουν τέσσερις τέτοιες f για αυτό το A και βρείτε τους τύπους τους και τους τύπους των αντίστοιχων f'.

5.2.16. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 7$. Αποδείξτε με στοιχειώδη τρόπο ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Ποιό είναι το σύνολο τιμών της f; Χωρίς να βρείτε τον τύπο της f^{-1}, αποδείξτε ότι $\left(f^{-1}\right)'(y) = \begin{cases} (1/3)(f^{-1}(y)+1)^{-2}, & \text{αν } y \neq 6 \\ +\infty, & \text{αν } y = 6 \end{cases}$ Τέλος, βρείτε τον τύπο της f^{-1}, το πεδίο ορισμού της και το σύνολο τιμών της και επαληθεύστε την παραπάνω ισότητα.

5.2.17. Τι συμπεράσματα προκύπτουν για την παράγωγο καθεμιάς από τις συναρτήσεις g που εμφανίζονται στις ασκήσεις 4.5.9, 4.5.10 και 4.5.11;

5.2.18. [5] Έστω $f : A \to B$ ένα-προς-ένα στο A και επί του B και η αντίστροφη $f^{-1} : B \to A$. Έστω $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A, έστω ότι η f είναι παραγωγίσιμη στον ξ ότι $f'(\xi) \neq 0$

[5] Ένα ουσιαστικό αποτέλεσμα για την παραγωγισιμότητα της αντίστροφης συνάρτησης.

και ότι η f^{-1} είναι συνεχής στον $\eta = f(\xi)$.

Αποδείξτε ότι ο η είναι σημείο συσσώρευσης του B και ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στον η και ισχύει $(f^{-1})'(\eta) = 1/f'(\xi)$.

Μερικές φορές συναντά κανείς την εξής "απόδειξη" του $(f^{-1})'(\eta) = 1/f'(\xi)$. *Από το ότι ισχύει* $f^{-1}(f(x)) = x$ *για κάθε* $x \in A$ *και από τον κανόνα αλυσίδας συνεπάγεται* $(f^{-1})'(\eta)f'(\xi) = 1$. *Άρα υπάρχει η* $(f^{-1})'(\eta)$ *και* $(f^{-1})'(\eta) = 1/f'(\xi)$. Πεισθήτε ότι υπάρχει λογικό λάθος στην απόδειξη αυτή. Η αποτυχημένη αυτή απόδειξη λειτουργεί μόνον αν *υποθέσουμε* (ή γνωρίζουμε) την ύπαρξη της $(f^{-1})'(\eta)$ και, τότε, αποδεικνύει την ισότητα $(f^{-1})'(\eta) = 1/f'(\xi)$.

5.2.19. Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A. Αν οι f, g είναι παραγωγίσιμες στον ξ, βρείτε το $\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)g(\xi)-f(\xi)g(x)}{x-\xi}$.

5.2.20. [6] Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A, f παραγωγίσιμη στον ξ και ακολουθίες (x_n'), (x_n'') στο A ώστε $x_n' \to \xi$, $x_n'' \to \xi$ και $x_n' \neq \xi$, $x_n'' \neq \xi$ για κάθε n.

Αν $x_n' < \xi < x_n''$ για κάθε n, αποδείξτε ότι $\frac{f(x_n')-f(x_n'')}{x_n'-x_n''} \to f'(\xi)$.

Αν ισχύει $|\frac{x_n'-\xi}{x_n'-x_n''}| \leq M$ για κάθε n, αποδείξτε ότι $\frac{f(x_n')-f(x_n'')}{x_n'-x_n''} \to f'(\xi)$.

Θεωρήστε τη συνάρτηση f στο παράδειγμα 5.1.7 (και στην άσκηση 5.1.5). Επίσης, έστω $x_n' = \frac{1}{(\pi/2)+2n\pi}$ και $x_n'' = \frac{1}{(-\pi/2)+2n\pi}$ για κάθε n. Η f είναι παραγωγίσιμη στον 0 και $x_n' \to 0$, $x_n'' \to 0$, αλλά $\frac{f(x_n')-f(x_n'')}{x_n'-x_n''} \not\to f'(0)$.

5.2.21. Έστω $k \in \mathbb{N}$ και συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στον ξ.

Αποδείξτε ότι $n\big(f(\xi + \frac{1}{n}) + f(\xi + \frac{2}{n}) + \cdots + f(\xi + \frac{k}{n}) - kf(\xi)\big) \to \frac{k(k+1)}{2} f'(\xi)$.

Αποδείξτε ότι $f(\xi + \frac{1}{n^2}) + f(\xi + \frac{2}{n^2}) + \cdots + f(\xi + \frac{n}{n^2}) - nf(\xi) \to \frac{1}{2} f'(\xi)$.

5.2.22. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής στον 0 και $0 < \mu < 1$ και $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(\mu x)}{x} = b \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι $f'(0) = \frac{b}{1-\mu}$.

5.2.23. Αποδείξτε ότι ο ρυθμός μεταβολής του όγκου ενός κύβου ως προς το μήκος της ακμής του είναι ίσος με το μισό του εμβαδού της αντίστοιχης εξωτερικής επιφάνειάς του.

Αποδείξτε ότι ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού ενός κυκλικού δίσκου ως προς το μήκος της διαμέτρου του είναι ίσος με το μισό του μήκους της αντίστοιχης περιφέρειάς του.

Αποδείξτε ότι ο ρυθμός μεταβολής του όγκου μιας σφαίρας ως προς το μήκος της διαμέτρου της είναι ίσος με το μισό του εμβαδού της αντίστοιχης εξωτερικής επιφάνειάς της.

Διακρίνετε κάτι κοινό στα τρία προηγούμενα συμπεράσματα; Δοκιμάστε να διατυπώσετε παρόμοια συμπεράσματα για περισσότερα σχήματα του επιπέδου ή του χώρου. Διατυπώστε ένα παρόμοιο συμπέρασμα για ένα απλό σχήμα πάνω σε μια ευθεία: ένα ευθύγραμμο τμήμα, για παράδειγμα.

5.2.24. Κάποια χρονική στιγμή η ακτίνα ενός κυκλικού δίσκου έχει μήκος κ και ρυθμό μεταβολής ως προς τον χρόνο ίσο με μ. Υπολογίστε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του δίσκου ως προς τον χρόνο την ίδια χρονική στιγμή.

5.2.25. Κάποια χρονική στιγμή η ακτίνα ενός σφαιρικού μπαλονιού έχει μήκος κ και η ποσότητα του αέρα στο μπαλόνι έχει ρυθμό μεταβολής ως προς τον χρόνο ίσο με μ. Ποιός είναι ο ρυθμός μεταβολής της ακτίνας ως προς τον χρόνο την ίδια χρονική στιγμή;

5.2.26. Μια μεταλλική ράβδος μήκους l έχει το ένα άκρο της στη μία πλευρά και το άλλο άκρο της στην άλλη πλευρά μιας ορθής γωνίας. Αν το ένα άκρο απομακρύνεται από την κορυφή της γωνίας

[6] Μερικά αποτελέσματα για τη συμπεριφορά των χορδών του γραφήματος μιας συνάρτησης όταν αυτές πλησιάζουν ένα σημείο του γραφήματος στο οποίο υπάρχει εφαπτόμενη ευθεία. Άλλες φορές οι κλίσεις των χορδών τείνουν στην κλίση της εφαπτόμενης ευθείας και άλλες φορές όχι. Συνέχεια αυτής της άσκησης είναι η άσκηση 5.3.17.

με ταχύτητα v (παραμένοντας στην ίδια πλευρά της γωνίας), βρείτε την ταχύτητα με την οποία το άλλο άκρο πλησιάζει την κορυφή (παραμένοντας στην ίδια πλευρά της γωνίας). Βρείτε, επίσης, τον ρυθμό μεταβολής της απόστασης ενός από τα άκρα από την κορυφή ως προς την απόσταση του άλλου άκρου από την κορυφή.

5.2.27. Ένα όχημα κινείται πάνω στην καμπύλη με εξίσωση $y^2 = 4x^3$. Σε ποιά θέση του οχήματος ο ρυθμός μεταβολής της πρώτης συντεταγμένης του (ως προς τον χρόνο) είναι διπλάσιος από τον ρυθμό μεταβολής της δεύτερης συντεταγμένης του (ως προς τον χρόνο); Καλό θα ήταν να *μη* λύσετε ως προς οποιαδήποτε από τις μεταβλητές x, y.

5.2.28. Αυτή είναι η *πιο σημαντική* άσκηση του βιβλίου.
Επιστρατεύστε τη φαντασία σας και δικαιολογήστε τον όρο "κανόνας αλυσίδας" για τη σχέση $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$ για την παράγωγο σύνθετης συνάρτησης. Μην ξεχνάτε ότι όλα όσα περιέχονται σ' αυτό το βιβλίο προέρχονται από την προσεκτική παρατήρηση του κόσμου που μας περιβάλλει.

5.3 Τα τέσσερα βασικά θεωρήματα.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.7. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $\xi \in A$.*
Ο ξ χαρακτηρίζεται **σημείο τοπικού μεγίστου** *της f αν υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $f(x) \leq f(\xi)$ για κάθε $x \in A$ με $|x - \xi| < \delta$.*
Ο ξ χαρακτηρίζεται **σημείο τοπικού ελαχίστου** *της f αν υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $f(x) \geq f(\xi)$ για κάθε $x \in A$ με $|x - \xi| < \delta$.*
Ο ξ χαρακτηρίζεται **σημείο τοπικού ακροτάτου** *της f αν είναι σημείο τοπικού μεγίστου ή ελαχίστου.*

Είναι προφανές ότι, αν σε κάποιο σημείο μια συνάρτηση έχει μέγιστη τιμή, οπότε αυτό χαρακτηρίζεται **σημείο (ολικού) μεγίστου**, τότε αυτό είναι και σημείο τοπικού μεγίστου. Ομοίως, αν σε κάποιο σημείο μια συνάρτηση έχει ελάχιστη τιμή, οπότε αυτό χαρακτηρίζεται **σημείο (ολικού) ελαχίστου**, τότε αυτό είναι και σημείο τοπικού ελαχίστου.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ FERMAT. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in A$ από αριστερά του και από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A. Αν ο ξ είναι σημείο τοπικού ακροτάτου της f, τότε είτε δεν υπάρχει η $f'(\xi)$ είτε $f'(\xi) = 0$.*

Απόδειξη. Έστω ότι ο ξ είναι σημείο τοπικού μεγίστου της f. Δηλαδή, έστω ότι ισχύει $f(x) \leq f(\xi)$ κοντά στον ξ.
Έστω ότι υπάρχει η $f'(\xi)$, οπότε $f'_+(\xi) = f'_-(\xi) = f'(\xi)$.
Ισχύει $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \leq 0$ κοντά στον ξ από δεξιά του. Άρα

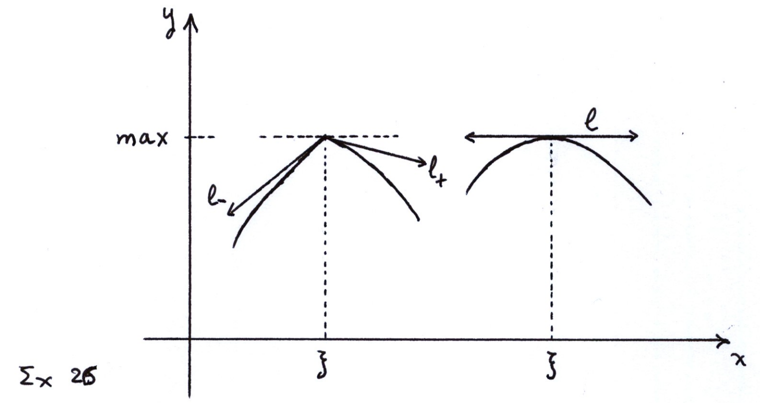
$$f'(\xi) = f'_+(\xi) = \lim_{x\to\xi+} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \leq 0.$$

Επίσης, ισχύει $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \geq 0$ κοντά στον ξ από αριστερά του. Άρα

$$f'(\xi) = f'_-(\xi) = \lim_{x\to\xi-} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \geq 0.$$

Άρα $f'(\xi) = 0$.
Αν ο ξ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου, τότε επαναλαμβάνουμε τους ίδιους συλλογισμούς με ≥ 0 αντί ≤ 0 και αντιστρόφως. □

Το θεώρημα του Fermat λέει ότι, αν η f έχει παράγωγο σε σημείο τοπικού ακροτάτου της το οποίο είναι από αριστερά του και από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού της, τότε η εφαπτόμενη ευθεία στο αντίστοιχο σημείο του γραφήματός της είναι οριζόντια. Δείτε το σχήμα 26.



Υπενθυμίζουμε ότι όταν γράφουμε $f'(\xi)$ ή όταν λέμε ότι η $f'(\xi)$ υπάρχει εννοούμε ότι η τιμή της μπορεί να είναι και $\pm\infty$.

Συνήθως, το θεώρημα του Fermat εφαρμόζεται με συνάρτηση f ορισμένη σε *διάστημα* A. Τότε ο ξ πρέπει να είναι εσωτερικό σημείο του διαστήματος ώστε να είναι από αριστερά του και από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του διαστήματος.

Παράδειγμα 5.3.1. Ο 0 είναι σημείο ελαχίστου της συνάρτησης $|x|$ αλλά δεν υπάρχει η $\frac{d|x|}{dx}(0)$.

Παράδειγμα 5.3.2. Ο 0 είναι σημείο ελαχίστου της x^2 και $\frac{dx^2}{dx}(0) = 0$.

Παράδειγμα 5.3.3. Είναι $\frac{dx^3}{dx}(0) = 0$ αλλά ο 0 δεν είναι σημείο τοπικού ακροτάτου της x^3. Άρα δεν ισχύει το αντίστροφο του θεωρήματος του Fermat.

Το θεώρημα του Fermat μας δίνει το εξής πρακτικό πόρισμα. Αν θέλουμε να βρούμε τα σημεία τοπικού ακροτάτου μιας συνάρτησης σε κάποιο διάστημα, τότε αρκεί να ψάξουμε ανάμεσα στα παρακάτω σημεία: τα (πιθανά) άκρα του διαστήματος, τα σημεία στα οποία η συνάρτηση δεν έχει παράγωγο και τα σημεία στα οποία η παράγωγος της συνάρτησης είναι ίση με 0. Κανένα άλλο σημείο δεν είναι υποψήφιο σημείο τοπικού ακροτάτου.

Παράδειγμα 5.3.4. Έστω η $f : [0,4] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 5$. Τότε $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x-1)(x-2)$, οπότε τα μόνα υποψήφια σημεία τοπικού ακροτάτου της f είναι τα άκρα 0, 4 του $[0,4]$ καθώς και οι 1, 2 στους οποίους μηδενίζεται η f'. Οι τιμές της f στα σημεία αυτά είναι 5, 37, 10, 9, αντιστοίχως.
Η f είναι συνεχής στο $[0,4]$, οπότε έχει οπωσδήποτε σημεία ολικού μεγίστου και ελαχίστου. Αυτά είναι οπωσδήποτε κάποια από τα παραπάνω τέσσερα σημεία και, επομένως, ο 0 είναι το σημείο ολικού ελαχίστου, οπότε η ελάχιστη τιμή της f είναι 5, και ο 4 είναι το σημείο ολικού μεγίστου, οπότε η μέγιστη τιμή της f είναι 37. Μένει να δούμε αν οι 1, 2 είναι σημεία τοπικού ακροτάτου.
Η f είναι συνεχής στο $[0,2]$, οπότε έχει σημεία ολικού μεγίστου και ολικού ελαχίστου στο $[0,2]$. Αυτά είναι κάποια από τα τρία σημεία 0, 1, 2, δηλαδή τα άκρα και το σημείο στο οποίο μηδενίζεται η f'. Οι αντίστοιχες τιμές της f είναι 5, 10, 9, οπότε ο 1 είναι το σημείο ολικού μεγίστου στο $[0,2]$ και, επομένως, είναι και σημείο τοπικού μεγίστου στο $[0,4]$.
Ομοίως, επειδή οι τιμές στους 1, 2, 4 είναι 10, 9, 37, αντιστοίχως, ο 2 είναι σημείο ολικού ελαχίστου στο $[1,4]$ και, επομένως, είναι σημείο τοπικού ελαχίστου στο $[0,4]$.
Το παράδειγμα αυτό θα το ξαναδούμε λίγο παρακάτω με απλούστερο τρόπο.

Το θεώρημα του Fermat έχει το εξής χρήσιμο συμπλήρωμα.

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.5. [α] *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in A$ από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A. Αν ο ξ είναι σημείο τοπικού μεγίστου ή ελαχίστου της f, τότε είτε δεν υπάρχει η $f'_+(\xi)$ είτε $f'_+(\xi) \leq 0$ ή $f'_+(\xi) \geq 0$, αντιστοίχως.*
[β] *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in A$ από αριστερά του σημείο συσσώρευσης του A. Αν ο ξ είναι σημείο*

τοπικού μεγίστου ή ελαχίστου της f, τότε είτε δεν υπάρχει η $f'_-(\xi)$ είτε $f'_-(\xi) \geq 0$ ή $f'_-(\xi) \leq 0$, αντιστοίχως.

Απόδειξη. [α] Έστω ξ σημείο τοπικού μεγίστου της f, οπότε ισχύει $f(x) \leq f(\xi)$ κοντά στον ξ. Υποθέτουμε ότι υπάρχει η $f'_+(\xi)$. Επειδή ισχύει $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \leq 0$ κοντά στον ξ από τα δεξιά του, είναι $f'_+(\xi) = \lim_{x\to\xi+} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \leq 0$.
Η περίπτωση τοπικού ελαχίστου έχει ίδια απόδειξη.
[β] Ομοίως. □

Υπενθυμίζουμε ότι, γράφοντας $f'_+(\xi) \leq 0$ ή $f'_+(\xi) \geq 0$, περιλαμβάνουμε την περίπτωση $f'_+(\xi) = -\infty$ ή $f'_+(\xi) = +\infty$, αντιστοίχως. Ομοίως για την $f'_-(\xi)$.

Παράδειγμα 5.3.5. Η $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x$ έχει σημείο τοπικού ελαχίστου τον 0 και $f'_+(0) = 1 \geq 0$. Η ίδια συνάρτηση έχει σημείο τοπικού μεγίστου τον 2 και $f'_-(2) = 1 \geq 0$.

Παράδειγμα 5.3.6. Η $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \sqrt{x}$ έχει σημείο τοπικού ελαχίστου τον 0 και $f'_+(0) = +\infty \geq 0$.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ROLLE. *Έστω ότι η $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a, b]$ και έχει παράγωγο στο (a, b). Αν $f(a) = f(b)$, τότε υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε $f'(\xi) = 0$.*

Απόδειξη. Έστω ότι η f είναι σταθερή στο $[a, b]$, δηλαδή ισχύει $f(x) = f(a) = f(b)$ για κάθε $x \in (a, b)$. Τότε ισχύει $f'(\xi) = 0$ για κάθε $\xi \in (a, b)$.
Έστω ότι η f δεν είναι σταθερή στο $[a, b]$. Τότε είτε (i) η f έχει μία τουλάχιστον τιμή $> f(a) = f(b)$ είτε (ii) η f έχει μία τουλάχιστον τιμή $< f(a) = f(b)$. Εξετάζουμε τις δύο περιπτώσεις ξεχωριστά.
(i) Σύμφωνα με το θεώρημα μέγιστης - ελάχιστης τιμής, υπάρχει $\xi \in [a, b]$ ο οποίος είναι σημείο ολικού μεγίστου της f. Αφού υπάρχει τιμή της f μεγαλύτερη από $f(a) = f(b)$, είναι $f(\xi) > f(a) = f(b)$, οπότε $\xi \in (a, b)$. Βάσει της υπόθεσης, υπάρχει η $f'(\xi)$ και, σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat, $f'(\xi) = 0$.
(ii) Σύμφωνα με το θεώρημα μέγιστης - ελάχιστης τιμής, υπάρχει $\xi \in [a, b]$ ο οποίος είναι σημείο ολικού ελαχίστου της f. Αφού υπάρχει τιμή της f μικρότερη από $f(a) = f(b)$, είναι $f(\xi) < f(a) = f(b)$, οπότε $\xi \in (a, b)$. Βάσει της υπόθεσης, υπάρχει η $f'(\xi)$ και, σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat, $f'(\xi) = 0$. □

Το θεώρημα του Rolle λέει ότι, με τις κατάλληλες υποθέσεις, αν $f(a) = f(b)$, τότε υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε η εφαπτόμενη ευθεία στο γράφημα της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ να είναι οριζόντια.

Παράδειγμα 5.3.7. Η $f : [-2, \sqrt{3}] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 5$ είναι συνεχής στο $[-2, \sqrt{3}]$, υπάρχει η $f'(x) = 3x^2 + 4x - 3$ για κάθε $x \in (-2, \sqrt{3})$ και $f(-2) = f(\sqrt{3}) = 1$. Άρα υπάρχει $\xi \in (-2, \sqrt{3})$ ώστε $3\xi^2 + 4\xi - 3 = 0$. Για να βρούμε τον ξ λύνουμε την εξίσωση $3x^2 + 4x - 3 = 0$. Οι λύσεις είναι οι $\frac{-2\pm\sqrt{13}}{3}$ και ανήκουν και οι δύο στο $(-2, \sqrt{3})$.

Σε σχέση με το θεώρημα του Rolle παρατηρούμε τα εξής. Πρώτον, το θεώρημα δεν αναφέρει τρόπο εύρεσης του ξ για τον οποίο ισχύει $f'(\xi) = 0$. Κατόπιν, αν η f δεν έχει παράγωγο έστω και σε ένα μόνο σημείο του (a, b), τότε μπορεί να μην υπάρχει κανένας $\xi \in (a, b)$ ωστε $f'(\xi) = 0$. Τέλος, οι υποθέσεις του θεωρήματος επιτρέπουν να είναι η παράγωγος ίση με $\pm\infty$ σε σημεία του (a, b). Το συμπέρασμα εξακολουθεί να ισχύει.

Παράδειγμα 5.3.8. Η $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = |x|$ είναι συνεχής στο $[-1, 1]$ και $f(-1) = f(1) = 1$. Όμως, δεν υπάρχει κανένας $\xi \in (-1, 1)$ ώστε $f'(\xi) = 0$.

Παράδειγμα 5.3.9. Έστω η $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} - x, & \text{αν } 0 \leq x \leq 1 \\ -\sqrt{-x} - x, & \text{αν } -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$ οπότε $f(-1) = f(1) = 0$.

Τότε $f'(x) = \begin{cases} (1/(2\sqrt{x})) - 1, & \text{αν } 0 < x \leq 1 \\ +\infty, & \text{αν } x = 0 \\ (1/(2\sqrt{-x})) - 1, & \text{αν } -1 \leq x < 0 \end{cases}$ και είναι $f'(\xi) = 0$ για $\xi = \pm\frac{1}{4}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ ΤΟΥ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ (LAGRANGE). *Έστω ότι η $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a,b]$ και έχει παράγωγο στο (a,b). Τότε υπάρχει $\xi\in(a,b)$ ώστε*

$$f'(\xi)=\tfrac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Απόδειξη. Ορίζουμε την $h:[a,b]\to\mathbb{R}$ με τύπο

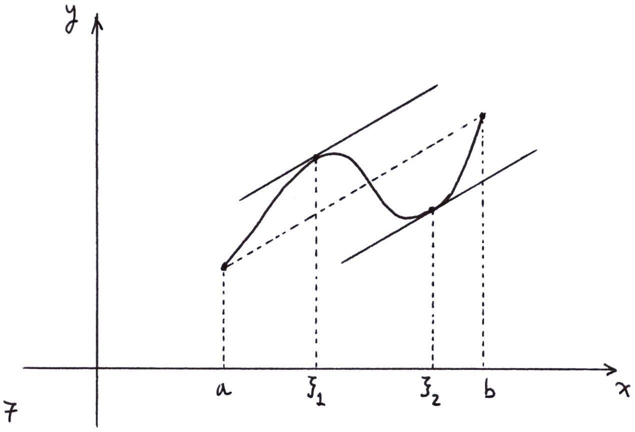
$$h(x)=(b-a)f(x)-(f(b)-f(a))x.$$

Η h είναι συνεχής στο $[a,b]$ και έχει παράγωγο

$$h'(x)=(b-a)f'(x)-(f(b)-f(a))$$

στο (a,b). Επίσης, είναι $h(a)=h(b)$. Άρα υπάρχει $\xi\in(a,b)$ ώστε $h'(\xi)=0$, οπότε η τελευταία σχέση συνεπάγεται $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$. □

Το θεώρημα μέσης τιμής του Lagrange λέει ότι, με τις κατάλληλες υποθέσεις, υπάρχει $\xi\in(a,b)$ ώστε η εφαπτόμενη ευθεία στο γράφημα της f στο σημείο $(\xi,f(\xi))$ να έχει ίδια κλίση (οπότε να είναι παράλληλη) με την ευθεία η οποία διέρχεται από τα σημεία $(a,f(a))$ και $(b,f(b))$. Δείτε το σχήμα 27.



Σχ 27

ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ ΤΟΥ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ (CAUCHY). *Έστω $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχείς στο $[a,b]$ και παραγωγίσιμες στο (a,b). Τότε υπάρχει $\xi\in(a,b)$ ώστε*

$$(f(b)-f(a))g'(\xi)=(g(b)-g(a))f'(\xi).$$

Απόδειξη. Έστω $h:[a,b]\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$h(x)=(g(b)-g(a))f(x)-(f(b)-f(a))g(x).$$

Η h είναι συνεχής στο $[a,b]$ και παραγωγίσιμη στο (a,b) με παράγωγο

$$h'(x)=(g(b)-g(a))f'(x)-(f(b)-f(a))g'(x).$$

Επίσης, $h(a)=h(b)$. Άρα υπάρχει $\xi\in(a,b)$ ώστε $h'(\xi)=0$, οπότε από την τελευταία σχέση έχουμε $(g(b)-g(a))f'(\xi)-(f(b)-f(a))g'(\xi)=0$. □

Παρατηρήστε ότι το θεώρημα του Rolle είναι απλή εφαρμογή του θεωρήματος μέσης τιμής του Lagrange και ότι το θεώρημα μέσης τιμής του Lagrange είναι απλή εφαρμογή (με τη συνάρτηση $g(x)=x$) του θεωρήματος μέσης τιμής του Cauchy. Από την άλλη μεριά, το θεώρημα μέσης τιμής του Cauchy αποδείχτηκε ως εφαρμογή του θεωρήματος του Rolle. Συμπεραίνουμε ότι *τα τρία θεωρήματα είναι ισοδύναμα.*

Πολλές φορές το θεώρημα μέσης τιμής του Cauchy εφαρμόζεται με κάποιες επιπλέον υποθέσεις. Συγκεκριμένα, *αν $g(a) \neq g(b)$ και αν δεν ισχύει $f'(x) = g'(x) = 0$ για κανένα $x \in (a,b)$, τότε υπάρχει $\xi \in (a,b)$ ώστε*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \tag{5.9}$$

Πράγματι, από $(f(b)-f(a))g'(\xi) = (g(b)-g(a))f'(\xi)$ προκύπτει $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(\xi) = f'(\xi)$. Από αυτήν συνεπάγεται ότι, αν $g'(\xi) = 0$, τότε $f'(\xi) = 0$, το οποίο είναι άτοπο. Άρα $g'(\xi) \neq 0$ και καταλήγουμε στην παραπάνω ισότητα.

Τώρα, την ισότητα (5.9) μπορούμε να τήν γράψουμε

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{(f(b)-f(a))/(b-a)}{(g(b)-g(a))/(b-a)},$$

οπότε το θεώρημα μέσης τιμής του Cauchy λέει ότι υπάρχει $\xi \in (a,b)$ ώστε ο λόγος των κλίσεων των εφαπτόμενων ευθειών στα γραφήματα των f και g στα σημεία $(\xi, f(\xi))$ και $(\xi, g(\xi))$ να είναι ίσος με τον λόγο των κλίσεων των ευθειών οι οποίες διέρχονται από τα σημεία $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$ η πρώτη και από τα σημεία $(a, g(a))$ και $(b, g(b))$ η δεύτερη.

Ασκήσεις.

5.3.1. Έστω $a < b$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a,b)$ ώστε $\frac{\sin b - \sin a}{b-a} = \cos\xi$ και ότι υπάρχει $\xi \in (a,b)$ ώστε $\frac{\sin b - \sin a}{e^b - e^a} = e^{-\xi}\cos\xi$.

5.3.2. Έστω $a < b$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a,b)$ ώστε $\frac{b^n - a^n}{b-a} = n\xi^{n-1}$ και ότι υπάρχει $\xi \in (a,b)$ ώστε $\frac{b^{1/n} - a^{1/n}}{b^n - a^n} = \frac{\xi^{1/n}}{n^2\xi^n}$.

5.3.3. Μπορεί, ανάλογα με την τιμή της παραμέτρου c, η $x^3 - 12x = c$ να έχει δύο διαφορετικές λύσεις στο $[-2,2]$; στο $(-\infty,-2]$; στο $[2,+\infty)$;

5.3.4. Αποδείξτε ότι η $x^2 = x\sin x + \cos x$ έχει ακριβώς δύο διαφορετικές λύσεις και προσδιορίστε τη θέση τους σε σχέση με τον 0.

5.3.5. Αν $\frac{a_n}{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} + \cdots + \frac{a_1}{2} + a_0 = 0$, αποδείξτε ότι η $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ έχει τουλάχιστον μία λύση στο διάστημα $(0,1)$.

5.3.6. Αποδείξτε ότι η πολυωνυμική εξίσωση $x^n + ax + b = 0$ έχει το πολύ δύο διαφορετικές λύσεις, αν ο n είναι άρτιος, και το πολύ τρεις διαφορετικές λύσεις, αν ο n είναι περιττός.

5.3.7. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} = 0$ έχει ακριβώς μία λύση, αν ο n είναι περιττός, και καμιά λύση, αν ο n είναι άρτιος.

5.3.8. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$ έχει ακριβώς μία λύση.

5.3.9. [α] Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής στο I ώστε να ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του I. Αποδείξτε ότι η f είναι ένα-προς-ένα στο I.

[β] Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής στο I και έστω ότι ισχύει $|f'(x)| \leq M$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του I. Αποδείξτε ότι υπάρχει $c \neq 0$ ώστε η $g : I \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = x + cf(x)$ να είναι ένα-προς-ένα στο I.

5.3.10. Έστω ότι η $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a,b]$ και έχει παράγωγο στο (a,b) και $f(a) = f(b) = 0$. Αποδείξτε ότι για κάθε λ υπάρχει $\xi \in (a,b)$ ώστε $f'(\xi) = \lambda f(\xi)$.

5.3.11. [α] Με το θεώρημα του Rolle και την αρχή της επαγωγής, αποδείξτε ότι κάθε πολυώνυμο βαθμού n έχει το πολύ n διαφορετικές ρίζες.

[β] Έστω $a_1 < \ldots < a_n$ και η συνάρτηση $P(x) = (x-a_1)\cdots(x-a_n)$. Αποδείξτε ότι η P' έχει ακριβώς $n-1$ ρίζες. Προσδιορίστε τη θέση των ριζών της P' σε σχέση με τους $a_1, \ldots, a_n$.

[γ] Δείτε την άσκηση 5.2.8.

Έστω πολυώνυμο P και έστω $\xi_1, \dots, \xi_m$ οι διαφορετικές ανά δύο ρίζες του. Έστω $k_1, \dots, k_m$ οι αντίστοιχες πολλαπλότητες των ριζών του P, οπότε ισχύει $P(x) = (x-\xi_1)^{k_1} \cdots (x-\xi_m)^{k_m} Q(x)$ για κάθε x, όπου Q είναι κάποιο πολυώνυμο χωρίς καμία ρίζα. Τότε λέμε ότι το P έχει ακριβώς $k = k_1 + \cdots + k_m$ ρίζες ή ότι το πλήθος των ριζών του P είναι k.

Αν το πλήθος των ριζών του πολυωνύμου P είναι k, αποδείξτε ότι το πλήθος των ριζών του P' είναι $\geq k-1$. Ειδικώτερα, αν ο βαθμός του P είναι n και το πλήθος των ριζών του P είναι n, αποδείξτε ότι το πλήθος των ριζών του P' είναι $n-1$.

5.3.12. Έστω $m > 0$, διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής στο I και έστω ότι υπάρχει η $f'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του I. Έστω $x_1, x_2 \in I$ και $|f(x_2) - f(x_1)| = d$.

Αν ισχύει $|f'(x)| \geq m$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του I, αποδείξτε ότι $|x_2 - x_1| \leq \frac{d}{m}$.

Αν ισχύει $|f'(x)| \leq m$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του I, αποδείξτε ότι $|x_2 - x_1| \geq \frac{d}{m}$.

5.3.13. Έστω $f : [\xi - h, \xi + h] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[\xi - h, \xi + h]$ και παραγωγίσιμη στο $(\xi - h, \xi) \cup (\xi, \xi + h)$.

Αποδείξτε ότι υπάρχει $\zeta \in (0, h)$ ώστε $\frac{f(\xi+h)-f(\xi-h)}{h} = f'(\xi + \zeta) + f'(\xi - \zeta)$.

Αποδείξτε ότι υπάρχει $\zeta \in (0, h)$ ώστε $\frac{f(\xi+h)-2f(\xi)+f(\xi-h)}{h} = f'(\xi + \zeta) - f'(\xi - \zeta)$.

5.3.14. Έστω $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και έστω ότι ισχύει $|f'(x)| \leq \frac{1}{x}$ για κάθε $x > 0$. Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty}(f(x + \sqrt{x}) - f(x)) = 0$.

5.3.15. Έστω $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$. Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty}(f(x + 1) - f(x)) = 0$.

5.3.16. [7] Έστω $f : [\xi, b) \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[\xi, b)$ και παραγωγίσιμη στο (ξ, b). Αν υπάρχει το $\lim_{x\to\xi+} f'(x)$, αποδείξτε ότι υπάρχει και η $f'_+(\xi)$ και είναι ίση με την τιμή του ορίου. Ποιό είναι το ανάλογο αποτέλεσμα για το $\lim_{x\to\xi-} f'(x)$ και την $f'_-(\xi)$;

5.3.17. Αν στην άσκηση 5.2.20 το A είναι διάστημα, η f είναι παραγωγίσιμη στο A και η f' είναι συνεχής στον ξ, αποδείξτε ότι $\frac{f(x_n{}')-f(x_n{}'')}{x_n{}'-x_n{}''} \to f'(\xi)$.

5.3.18. Γνωρίζουμε ότι η $f(x) = \begin{cases} x\sin(1/x), & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ δεν έχει παράγωγο στον 0. Έχει η f τον 0 ως σημείο τοπικού ακροτάτου; Σχεδιάστε το γράφημα της f.

Θεωρήστε την $f(x) = \begin{cases} |x|(2 + \sin(1/x)), & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ Έχει η f παράγωγο στον 0; Έχει η f τον 0 ως σημείο τοπικού ακροτάτου; Σχεδιάστε το γράφημα της f.

Μπορείτε να βρείτε απλή *άρτια* συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε $f'(0) = 0$ και ο 0 να μην είναι σημείο τοπικού ακροτάτου της f;

5.3.19. [8] Έστω $f, g : I \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες στο διάστημα I. Η συνάρτηση $W(f, g) : I \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$W(f,g)(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix} = f(x)g'(x) - f'(x)g(x)$$

ονομάζεται **ορίζουσα Wronski** των f και g στο διάστημα I.

Έστω ότι ισχύει $W(f, g)(x) \neq 0$ για κάθε $x \in I$. Δείτε την άσκηση 4.2.10 και αποδείξτε ότι οι ρίζες της f, δηλαδή οι λύσεις της $f(x) = 0$, είναι *διαδοχικές*. Αυτό σημαίνει ότι, αν ξ είναι ρίζα της f και αν υπάρχει άλλη ρίζα της f μεγαλύτερη από την ξ, τότε υπάρχει *ελάχιστη* ρίζα της f

[7] Ένα χρήσιμο αποτέλεσμα για την ύπαρξη παραγώγου σε άκρο διαστήματος.

[8] Η άσκηση αυτή συνεχίζεται στην άσκηση 7.2.15.

μεγαλύτερη από την ξ (δηλαδή, η αμέσως επόμενη ρίζα) και, επίσης, αν υπάρχει άλλη ρίζα της f μικρότερη από την ξ, τότε υπάρχει *μέγιστη* ρίζα της f μικρότερη από την ξ (δηλαδή, η αμέσως προηγούμενη ρίζα). Το ίδιο ισχύει και για τη συνάρτηση g. Αποδείξτε, επίσης, ότι ανάμεσα σε δύο οποιεσδήποτε διαδοχικές ρίζες της f βρίσκεται ακριβώς μία ρίζα της g και αντιστρόφως. Υπάρχει περίπτωση να συμπέσουν μια ρίζα της f και μια ρίζα της g;

Ταιριάζουν τα συμπεράσματα αυτά με το ζευγάρι των $\cos x$ και $\sin x$;

5.3.20. [9] [α][10] Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής στο διάστημα I και έστω ότι η f έχει παράγωγο σε κάθε εσωτερικό σημείο του I. Αποδείξτε ότι ισχύει $|f(x') - f(x'')| \leq M|x' - x''|$ για κάθε $x', x'' \in A$ αν και μόνο αν ισχύει $|f'(x)| \leq M$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του I.

[β][11] Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής στο διάστημα I και έστω ότι ισχύει $|f'(x)| \leq M$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του I. Αποδείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο I.

Εφαρμόζεται το κριτήριο αυτό στη συνάρτηση $\sqrt{x}$ στο διάστημα $[0, 1]$; Είναι η συνάρτηση αυτή ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, 1]$; Τί γίνεται με την ίδια συνάρτηση στο διάστημα $[1, +\infty)$; Δείτε και τις άλλες συναρτήσεις στην άσκηση 4.6.2.

[γ] Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής στο διάστημα I και έστω ότι ισχύει $|f'(x)| \leq M$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του I. Αποδείξτε ότι, αν η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy στο I, τότε η $(f(x_n))$ είναι ακολουθία Cauchy.

[δ] Έστω $b \in \mathbb{R}$ και $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b)$ και έστω ότι ισχύει $|f'(x)| \leq M$ για κάθε $x \in (a, b)$. Αποδείξτε ότι το $\lim_{x \to b} f(x)$ υπάρχει και είναι αριθμός και ότι υπάρχει $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b]$ ώστε να ισχύει $g(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [a, b)$.

5.3.21. [α] Έστω ότι η $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a, b]$ και έχει παράγωγο στο (a, b). Αν το γράφημα της f δεν ταυτίζεται με το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$, αποδείξτε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (a, b)$ ώστε $f'(\xi_1) < \frac{f(b)-f(a)}{b-a} < f'(\xi_2)$.

[β] Έστω ότι η $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a, b]$ και έχει παράγωγο στο (a, b). Αν $f(a) = f(b) = 0$ και $f(x_0) = 1$ για κάποιον $x_0 \in (a, b)$, αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε $|f'(\xi)| \geq \frac{2}{b-a}$. Κατόπιν, αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε $|f'(\xi)| > \frac{2}{b-a}$.

5.3.22. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ και ότι η f' είναι συνεχής στο $[a, b]$. Αποδείξτε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y} - f'(y)\right| < \epsilon$ για κάθε $x, y \in [a, b]$ με $0 < |x - y| < \delta$.

5.3.23. [α] Αν η $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a, b]$ και αν $f'(a) < 0 < f'(b)$, αποδείξτε ότι οποιοδήποτε σημείο τοπικού ελαχίστου της f στο $[a, b]$ (την ύπαρξη ενός τέτοιου εγγυάται το θεώρημα μέγιστης - ελάχιστης τιμής) ανήκει οπωσδήποτε στο (a, b). Ποιό είναι το συμπέρασμα αν $f'(a) > 0 > f'(b)$;

[β] Αποδείξτε το **θεώρημα του Darboux**:[12] *Έστω ότι η $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και έχει παράγωγο στο $[a, b]$ και $f'(a) < \lambda < f'(b)$ ή $f'(a) > \lambda > f'(b)$. Τότε υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε $f'(\xi) = \lambda$.*

[γ] Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο I. Αν η f' είναι μονότονη στο I, αποδείξτε ότι είναι συνεχής στο I.

5.3.24. [α][13] Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b]$, $f(a) = f(b)$ και έστω ότι οι $f'_-(x)$, $f'_+(x)$ υπάρχουν για κάθε $x \in (a, b)$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε είτε $f'_-(\xi) \leq 0 \leq f'_+(\xi)$

[9] Μια σχέση ανάμεσα στην παράγωγο και στην ομοιόμορφη συνέχεια. Δείτε τις ασκήσεις 4.6.3, 4.6.10 και 4.6.11.

[10] Δείτε την άσκηση 4.6.3 και την υποσημείωσή της. Το αποτέλεσμα εδώ διατυπώνεται ως εξής: *αν η f είναι συνεχής στο διάστημα I και έχει παράγωγο στο εσωτερικό του I, τότε η f είναι Lipschitz-συνεχής στο I αν και μόνο αν η f' είναι φραγμένη στο εσωτερικό του I.*

[11] Ένα κριτήριο ομοιόμορφης συνέχειας.

[12] Πρόκειται για μια βαθύτερη ιδιότητα της παραγώγου: *η παράγωγος μιας συνεχούς συνάρτησης σε διάστημα έχει την ιδιότητα ενδιάμεσης τιμής και, μάλιστα, χωρίς να προϋποτίθεται η συνέχεια της παραγώγου.*

[13] Γενίκευση του θεωρήματος του Rolle.

είτε $f'_+(\xi) \leq 0 \leq f'_-(\xi)$.
[β][14] Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b]$ και έστω ότι οι $f'_-(x)$, $f'_+(x)$ υπάρχουν για κάθε $x \in (a,b)$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a,b)$ ώστε είτε $f'_-(\xi) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f'_+(\xi)$ είτε $f'_+(\xi) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f'_-(\xi)$.

5.3.25. Ορίζουμε συναρτήσεις $T_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$ ως εξής:

$$T_0(x) = 1 \qquad \text{και} \qquad T_n(x) = \tfrac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x) \quad \text{για } -1 \leq x \leq 1 \text{ και } n \in \mathbb{N}.$$

Αποδείξτε ότι ισχύει $T_1(x) = x$ και $4T_{n+2}(x) = 4xT_{n+1}(x) - T_n(x)$ για κάθε $x \in [-1,1]$ και κάθε $n \geq 1$. Συμπεράνατε ότι για κάθε $n \geq 1$ η συνάρτηση T_n ταυτίζεται στο $[-1,1]$ με μια πολυωνυμική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ η οποία έχει βαθμό n και μεγιστοβάθμιο συντελεστή 1.
Αυτήν την πολυωνυμική συνάρτηση θα τη συμβολίζουμε, επίσης, T_n.[15]
Υπολογίστε τα πολυώνυμα T_2, T_3, T_4.
Παρατηρήστε ότι $T_n(1) = \frac{1}{2^{n-1}}$ και $T_n(-1) = \frac{(-1)^n}{2^{n-1}}$ για κάθε $n \geq 1$.
Αποδείξτε ότι για κάθε $n \geq 1$ το πολυώνυμο T_n έχει ακριβώς n ρίζες: τους αριθμούς $x_k = \cos(\frac{2k-1}{2n}\pi)$ για $k = 1, \ldots, n$. Όλες αυτές οι ρίζες είναι στο διάστημα $(-1,1)$.
Παρατηρήστε ότι ισχύει $|T_n(x)| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ για κάθε $x \in [-1,1]$ και κάθε $n \geq 1$. Αποδείξτε ότι για κάθε $n \geq 1$ το πολυώνυμο ${T_n}'$ έχει ακριβώς $n-1$ ρίζες: τους αριθμούς $t_k = \cos(\frac{k}{n}\pi)$ για $k = 1, \ldots, n-1$. Όλες αυτές οι ρίζες είναι στο διάστημα $(-1,1)$. Βρείτε τις τιμές $T_n(t_k)$ για $k = 1, \ldots, n-1$.
Παρατηρήστε για κάθε $n \geq 1$ τη σχέση διάταξης ανάμεσα στις ρίζες του T_n και τις ρίζες του ${T_n}'$ και σχεδιάστε το γράφημα του πολυωνύμου T_n στο διάστημα $[-1,1]$.
Αποδείξτε ότι για κάθε $n \geq 1$ και για κάθε πολυώνυμο P βαθμού n με μεγιστοβάθμιο συντελεστή 1 ισχύει $\frac{1}{2^{n-1}} = \max\{|T_n(x)| \,|\, -1 \leq x \leq 1\} \leq \max\{|P(x)| \,|\, -1 \leq x \leq 1\}$.
Για ποιά πολυώνυμα P βαθμού n με μεγιστοβάθμιο συντελεστή 1 γίνεται ισότητα η τελευταία ανισότητα;[16]

5.4 Μονοτονία συνάρτησης.

Έστω διάστημα I οποιουδήποτε τύπου. Το διάστημα το οποίο προκύπτει αν από το I αφαιρέσουμε τα άκρα του - όποια ανήκουν στο I - δηλαδή το σύνολο των εσωτερικών σημείων του I, ονομάζεται **εσωτερικό** του I.

Η πρόταση 5.6 λέει *κάτι που δεν είναι καθόλου προφανές* αν και είναι διαισθητικά αναμενόμενο: αν όλες οι εφαπτόμενες ευθείες στο γράφημα μιας συνάρτησης σε ένα διάστημα είναι οριζόντιες, τότε το γράφημα της συνάρτησης είναι οριζόντιο, δηλαδή η συνάρτηση είναι σταθερή. Επίσης, λέει ότι αν όλες οι εφαπτόμενες ευθείες στο γράφημα μιας συνάρτησης σε ένα διάστημα έχουν μη-αρνητική (μη-θετική) κλίση, τότε η συνάρτηση είναι αύξουσα (φθίνουσα).

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.6. *Έστω διάστημα I και έστω ότι η $f : I \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο I και έχει παράγωγο στο εσωτερικό του I.*
[α] *Η f είναι σταθερή αν και μόνο αν ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του I.*
[β] *Η f είναι αύξουσα αν και μόνο αν ισχύει $f'(x) \geq 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του I.*
[γ] *Η f είναι φθίνουσα αν και μόνο αν ισχύει $f'(x) \leq 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του I.*

[14] Γενίκευση του θεωρήματος μέσης τιμής του Lagrange.
[15] Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις T_n ονομάζονται **πολυώνυμα του Chebyshev**.
[16] Εδώ έχουμε ένα χαρακτηριστικό κλασσικό και σημαντικό αποτέλεσμα μη-τετριμμένης ελαχιστοποίησης: *η εύρεση της ελάχιστης τιμής της ποσότητας* $\max\{|P(x)| \,|\, -1 \leq x \leq 1\}$ *στο σύνολο των πολυωνύμων P βαθμού n με μεγιστοβάθμιο συντελεστή* 1. Αυτή η ελάχιστη τιμή είναι η $\frac{1}{2^{n-1}}$ και πραγματοποιείται με το πολυώνυμο T_n του Chebyshev.

Απόδειξη. [α] Αν η f είναι σταθερή, γνωρίζουμε ότι ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του I (αλλά και στα άκρα του I, όσα περιέχονται στο I).
Αντιστρόφως, έστω ότι ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του I. Έστω $x_1, x_2 \in I$ με $x_1 < x_2$, όπου κάποιος από τους x_1, x_2 μπορεί να είναι άκρο του I. Η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και υπάρχει η $f'(x)$ για κάθε $x \in (x_1, x_2)$. Άρα υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ και, επομένως, ξ στο εσωτερικό του I, ώστε

$$\tfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(\xi) = 0.$$

Άρα $f(x_1) = f(x_2)$. Δηλαδή όλες οι τιμές της f είναι ίσες μεταξύ τους, οπότε η f είναι σταθερή.
[β] Αν η f είναι αύξουσα, τότε, όπως αποδείξαμε πριν από τον κανόνα αντίστροφης συνάρτησης, ισχύει $f'(x) \geq 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του I.
Αντιστρόφως, έστω ότι ισχύει $f'(x) \geq 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του I. Έστω $x_1, x_2 \in I$ με $x_1 < x_2$. Όπως πριν, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ και, επομένως ξ στο εσωτερικό του I, ώστε

$$\tfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(\xi) \geq 0.$$

Άρα $f(x_1) \leq f(x_2)$ και, επομένως, η f είναι αύξουσα.
[γ] Όπως στο [β]. □

Πριν από την πρόταση 5.6 είπαμε ότι τα συμπεράσματά της δεν είναι προφανή. Ας πούμε δύο λόγια γι αυτό. Αν γνωρίζουμε ότι η f είναι σταθερή στο διάστημα I, τότε το γράφημά της είναι οριζόντιο και, επομένως, είναι σαφές ότι οι εφαπτόμενες ευθείες στα διάφορα σημεία του είναι όλες οριζόντιες, δηλαδή οι κλίσεις τους είναι όλες 0. Βλέπουμε ότι, γνωρίζοντας την συνάρτηση, έχουμε άμεση και απτή πληροφορία για τις κλίσεις της. Όμως, το αντίστροφο δεν είναι απολύτως σαφές. Αν γνωρίζουμε ότι οι εφαπτόμενες ευθείες στα διάφορα σημεία του γραφήματος της συνάρτησης είναι όλες οριζόντιες - χωρίς να έχουμε καμιά άλλη πληροφορία *για την ίδια* τη συνάρτηση - δεν είναι απολύτως ξεκάθαρο ότι το γράφημά της είναι οριζόντιο. Είναι μεν αναμενόμενο αλλά όχι προφανές. Η ουσία του προβλήματος είναι η εξής: μπορούμε να καθορίσουμε τις κλίσεις (δηλαδή, την παράγωγο) μιας συνάρτησης από την συνάρτηση, αλλά δεν είναι σαφής ο καθορισμός της συνάρτησης από τις κλίσεις της. Στο πρόβλημα αυτό απαντά σε πρώτη απλή μορφή το *θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού* που θα δούμε στο κεφάλαιο 7 και σε πιο περίπλοκες περιπτώσεις ο κλάδος των διαφορικών εξισώσεων. Σε όλα αυτά η πρόταση 5.6 παίζει *καθοριστικό ρόλο*.

Αξίζει να διατυπώσουμε μια παραλλαγή της πρότασης 5.6. Η πρόταση 5.7 λέει ότι, αν όλες οι εφαπτόμενες ευθείες στο γράφημα μιας συνάρτησης σε ένα διάστημα έχουν θετική (αρνητική) κλίση, τότε η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα (γνησίως φθίνουσα).

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.7. *Έστω διάστημα I και έστω ότι η $f : I \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο I και έχει παράγωγο στο εσωτερικό του I.*
[α] *Αν ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του I, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα.*
[β] *Αν ισχύει $f'(x) < 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του I, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα.*

Απόδειξη. Ίδια με την απόδειξη του αντίστοιχου μέρους της πρότασης 5.6. □

Στις προτάσεις 5.6, 5.7 και 5.8 όταν γράφουμε $f'(x) \geq 0$ ή $f'(x) > 0$ περιλαμβάνουμε και την περίπτωση $f'(x) = +\infty$. Ομοίως, όταν γράφουμε $f'(x) \leq 0$ ή $f'(x) < 0$ περιλαμβάνουμε και την περίπτωση $f'(x) = -\infty$.

Πρέπει να επισημάνουμε ότι δεν ισχύουν τα αντίστροφα των [α], [β] της πρότασης 5.7. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα, τότε το μόνο γενικό συμπέρασμα είναι αυτό που ισχύει επειδή η f είναι αύξουσα, δηλαδή $f'(x) \geq 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του I. Ανάλογο συμπέρασμα ισχύει αν η f είναι γνησίως φθίνουσα. Επίσης, στις προτάσεις 5.6 και 5.7 οι υποθέσεις και τα συμπεράσματα ισχύουν σε διάστημα. Αν οι υποθέσεις ισχύουν σε ενώσεις διαστημάτων, τότε τα συμπεράσματα μπορεί να μην ισχύουν κι αυτά στις ενώσεις διαστημάτων.

Παράδειγμα 5.4.1. Η x^3 είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ αλλά δεν είναι σωστό ότι ισχύει $\frac{dx^3}{dx} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Πράγματι, είναι $\frac{dx^3}{dx} = 3x^2 > 0$ για κάθε $x \neq 0$ αλλά $\frac{dx^3}{dx}(0) = 0$.

Παράδειγμα 5.4.2. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{|x|}$. Ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, αλλά η f *δεν* είναι σταθερή στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Είναι σταθερή -1 στο *διάστημα* $(-\infty, 0)$ και σταθερή 1 στο *διάστημα* $(0, +\infty)$.

Παράδειγμα 5.4.3. Είναι $\frac{d(1/x)}{dx} = -\frac{1}{x^2} < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Όμως η $\frac{1}{x}$ *δεν* είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Είναι γνησίως φθίνουσα στο *διάστημα* $(-\infty, 0)$ και γνησίως φθίνουσα στο *διάστημα* $(0, +\infty)$.

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι χρήσιμο για την αναγνώριση των σημείων τοπικού ακροτάτου μιας συνάρτησης.

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.8. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $(a, b) \subseteq A$, $a < \xi < b$ και έστω ότι η f είναι συνεχής στο (a, b).*
[α] *Αν ισχύει $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (a, \xi)$ και $f'(x) \leq 0$ για κάθε $x \in (\xi, b)$, τότε ο ξ είναι σημείο τοπικού μεγίστου της f.*
[β] *Αν ισχύει $f'(x) \leq 0$ για κάθε $x \in (a, \xi)$ και $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (\xi, b)$, τότε ο ξ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της f.*

Απόδειξη. [α] Η f είναι αύξουσα στο $(a, \xi]$ και φθίνουσα στο $[\xi, b)$, οπότε ο $f(\xi)$ είναι η μέγιστη τιμή της στο διάστημα (a, b).
[β] Ομοίως. □

Παρατηρήστε ότι, στην πρόταση 5.8, δεν χρειάζεται να έχει παράγωγο η f στον ξ. Αρκεί μόνο να είναι συνεχής στον ξ.

Σε σχέση με τη μονοτονία μιας συνάρτησης πρέπει να έχει κανείς υπ' όψη του τα εξής απλά. *Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα I, έστω εσωτερικό σημείο ξ του I και έστω I_- και I_+ τα υποδιαστήματα αριστερά και δεξιά, αντιστοίχως, του ξ στα οποία χωρίζεται το I από τον ξ. Θεωρούμε ότι και τα δύο διαστήματα I_- και I_+ περιέχουν το κοινό άκρο τους ξ. Αν η f είναι αύξουσα στο I_- και φθίνουσα στο I_+, τότε το ξ είναι σημείο τοπικού μεγίστου της f. Αν η f είναι φθίνουσα στο I_- και αύξουσα στο I_+, τότε το ξ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της f. Αν η f είναι (γνησίως) αύξουσα στο I_- και (γνησίως) αύξουσα στο I_+, τότε η f είναι (γνησίως) αύξουσα στο I. Αν η f είναι (γνησίως) φθίνουσα στο I_- και (γνησίως) φθίνουσα στο I_+, τότε η f είναι (γνησίως) φθίνουσα στο I.* Όλα αυτά αποδεικνύονται πολύ εύκολα (και είναι άσχετα με την έννοια της παραγώγου). Με βάση τα προηγούμενα, ιδού μια συνηθισμένη περίπτωση εφαρμογής της πρότασης 5.8. Έστω συνάρτηση f συνεχής σε διάστημα και έστω $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ στο ίδιο διάστημα, στα οποία περιλαμβάνονται τα (πιθανά) άκρα του διαστήματος, ώστε σε καθένα από τα ενδιάμεσα ανοικτά υποδιαστήματα η f' έχει σταθερό πρόσημο. Τότε (i) τα (πιθανά) άκρα του διαστήματος είναι σημεία τοπικού ακροτάτου, (ii) κάθε ξ_k το οποίο χωρίζει υποδιαστήματα στα οποία η f' έχει διαφορετικό πρόσημο είναι σημείο τοπικού ακροτάτου και (iii) κάθε ξ_k το οποίο χωρίζει υποδιαστήματα στα οποία η f' έχει ίδιο πρόσημο δεν είναι σημείο τοπικού ακροτάτου.

Παράδειγμα 5.4.4. Το παράδειγμα 5.3.4 και πάλι. Η $f : [0, 4] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 5$ είναι συνεχής στο $[0, 4]$ και ισχύει $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x - 1)(x - 2)$ για κάθε $x \in (0, 4)$. Επίσης, ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$ και κάθε $x \in (2, 4)$ και $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (1, 2)$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 1]$, γνησίως φθίνουσα στο $[1, 2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[2, 4]$. Επομένως, οι 0, 2 είναι σημεία τοπικού ελαχίστου της f και οι 1, 4 σημεία τοπικού μεγίστου.

Παράδειγμα 5.4.5. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x, & \text{αν } 1 \leq x \leq 2 \\ x - 2, & \text{αν } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$ Η f είναι συνεχής στο $[0, 3]$ και ισχύει $f'(x) = 1$ για κάθε $x \in (0, 1)$ και $x \in (2, 3)$ και $f'(x) = -1$ για κάθε $x \in (1, 2)$.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$, γνησίως φθίνουσα στο $[1,2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[2,3]$. Επομένως, οι 0, 2 είναι σημεία τοπικού ελαχίστου και οι 1, 3 σημεία τοπικού μεγίστου. Επειδή $f(0)=f(2)=0$, $f(1)=f(3)=1$ και $0\leq f(x)\leq 1$ για κάθε $x\in[0,3]$, οι 0, 2 είναι σημεία ολικού ελαχίστου και οι 1, 3 σημεία ολικού μεγίστου. Η f δεν έχει παράγωγο στους $1,2$.

Με τη βοήθεια των θεωρημάτων μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού ή των προτάσεων 5.6 και 5.7 αποδεικνύονται διάφορες ισότητες και ανισότητες με μεταβλητές σε διαστήματα του $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 5.4.6. Έστω $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x)=(x+1)^n-nx-1$. Η παράγωγος συνάρτηση είναι η $f'(x)=n(x+1)^{n-1}-n$, οπότε ισχύει $f'(x)<0$ για κάθε $x\in[-1,0)$ και $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$. Άρα η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-1,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Άρα ισχύει $f(x)>f(0)=0$ ή, ισοδύναμα,

$$(x+1)^n>nx+1 \qquad \text{για κάθε } \ x\geq -1,\ \ x\neq 0.$$

Αποδείξαμε, λοιπόν, με δεύτερο τρόπο την ανισότητα του Bernoulli. Μάλιστα, αποδείξαμε ότι, όταν $n\geq 2$, η ανισότητα είναι γνήσια στο $[-1,0)\cup(0,+\infty)$ και ισχύει ως ισότητα μόνο για $x=0$. (Αν $n=1$, η ανισότητα ισχύει, προφανώς, ως ισότητα σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$.)

Παράδειγμα 5.4.7. Θα αποδείξουμε ότι ισχύει

$$e^x>x+1 \qquad \text{για κάθε } \ x\neq 0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=e^x-x-1$, η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)=e^x-1<0$ για κάθε $x<0$ και $f'(x)=e^x-1>0$ για κάθε $x>0$. Άρα η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Άρα ισχύει $e^x-x-1=f(x)>f(0)=0$ για κάθε $x\neq 0$. Η γνήσια ανισότητα γίνεται ισότητα μόνο για $x=0$.

Παράδειγμα 5.4.8. Θα ξαναποδείξουμε τον διωνυμικό τύπο του Newton:

$$(x+y)^n=\textstyle\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}x^ky^{n-k}=\sum_{k=0}^n\frac{n!}{k!(n-k)!}x^ky^{n-k}.$$

Αν $n=1$, ο τύπος γράφεται $(x+y)^1=x+y$ και, προφανώς, ισχύει.
Υποθέτουμε ότι ο τύπος ισχύει για κάποιον $n\in\mathbb{N}$ και θεωρούμε την συνάρτηση

$$f(x)=(x+y)^{n+1}-\textstyle\sum_{k=0}^{n+1}\frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}x^ky^{n+1-k}$$

με μεταβλητή x. Παραγωγίζουμε, προσέχοντας ότι ο όρος που αντιστοιχεί στον $k=0$ δεν περιέχει την μεταβλητή x, και έχουμε

$$f'(x)=(n+1)(x+y)^n-(n+1)\textstyle\sum_{k=1}^{n+1}\frac{n!}{(k-1)!(n+1-k)!}x^{k-1}y^{n+1-k}.$$

Γράφοντας $m=k-1$ στο τελευταίο άθροισμα, βρίσκουμε, σύμφωνα με την επαγωγική υπόθεση,

$$f'(x)=(n+1)(x+y)^n-(n+1)\textstyle\sum_{m=0}^{n}\frac{n!}{m!(n-m)!}x^{m}y^{n-m}=0.$$

Άρα η f είναι σταθερή, οπότε για κάθε x ισχύει $f(x)=f(0)=y^{n+1}-y^{n+1}=0$ ή, ισοδύναμα,

$$(x+y)^{n+1}=\textstyle\sum_{k=0}^{n+1}\frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}x^ky^{n+1-k}.$$

Άρα ο τύπος ισχύει και για τον $n+1$ και, επομένως, ισχύει για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

Ασκήσεις.

5.4.1. Βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα σημεία τοπικού και ολικού ακροτάτου των x^2-x-1, $x^3-15x^2+72x+7$, $x^4(x-1)^4$, $x+\frac{1}{x}$, $\frac{x^2-2x+3}{x^2+2x+3}$, $\frac{\sqrt{x}}{x+4}$, x^2e^{-x}, $\frac{\log x}{x}$, $|x|e^{-|x-1|}$, $\sin x-\cos x$, $\frac{\sin(3x)}{3}-\cos x$, $x+\sin x$, $x+|\sin x|$, $\arctan x-\log(1+x^2)$.

5.4.2. Βρείτε τα σημεία τοπικού ακροτάτου της συνάρτησης $(x-1)|x|$ στο $[-1,3]$, της $|x^2-3x+2|$ στο $[-3,10]$, της $x+\frac{1}{x}$ στο $[\frac{1}{3},3]$, της $(\log x)^2/x$ στο $[1,3]$ και της $e^x\sin x$ στο $[0,2\pi]$.

5.4.3. Αναλόγως της τιμής της παραμέτρου a, σχεδιάστε το γράφημα της $\frac{\cos x+a}{\sin x}$.

5.4.4. Έστω $a_1<\ldots<a_n$. Βρείτε τα σημεία ολικού ελαχίστου των $(x-a_1)^2+\cdots+(x-a_n)^2$ και $|x-a_1|+\cdots+|x-a_n|$.

5.4.5. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $(1+\frac{1}{x})^x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

5.4.6. Βρείτε την τιμή του $a>0$ για την οποία η μέγιστη τιμή της συνάρτησης x^ae^{2a-x} στο $[0,+\infty)$ είναι η ελάχιστη δυνατή.

5.4.7. Ανάλογα με την τιμή του a βρείτε τον αριθμό των λύσεων της εξίσωσης $\sin x=ax$.

5.4.8. Ανάλογα με την τιμή του a βρείτε τον αριθμό των λύσεων της εξίσωσης $\tan x=ax$ στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi)$ για κάθε $k\in\mathbb{Z}$.

5.4.9. Έστω $f,g:[0,b]\to\mathbb{R}$ συνεχείς στο $[0,b]$ και παραγωγίσιμες στο $(0,b)$, $f(0)=g(0)=0$ και έστω ότι ισχύει $f'(x),g'(x)>0$ για κάθε $x\in(0,b)$. Αν η $\frac{f'}{g'}$ είναι αύξουσα στο $(0,b)$, αποδείξτε ότι η $\frac{f}{g}$ είναι αύξουσα στο $(0,b]$.

Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις $\frac{x}{\sin x},\frac{(1/2)x^2}{1-\cos x},\frac{(1/6)x^3}{x-\sin x},\cdots$ είναι αύξουσες στο $(0,\frac{\pi}{2})$.

5.4.10. Δείτε τις ασκήσεις 4.6.3 και 5.1.2. Έστω διάστημα I και $f:I\to\mathbb{R}$ και $M\geq 0$, $\rho>0$ ώστε να ισχύει $|f(x')-f(x'')|\leq M|x'-x''|^\rho$ για κάθε $x',x''\in I$. Αν $\rho>1$, αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή στο I.

5.4.11. Έστω ότι η $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a,b]$ και έχει παράγωγο στο (a,b). Έστω ότι ισχύει $f'(x)\geq\mu$ για κάθε $x\in(a,b)$.

Αποδείξτε ότι ισχύει $f(a)+\mu(x-a)\leq f(x)\leq f(b)+\mu(x-b)$ για κάθε $x\in[a,b]$.

Αποδείξτε ότι, αν υπάρχει $c\in(a,b]$ ώστε $f(a)+\mu(c-a)=f(c)$, τότε ισχύει $f(a)+\mu(x-a)=f(x)$ για κάθε $x\in[a,c]$.

Ομοίως, αποδείξτε ότι, αν υπάρχει $c\in[a,b)$ ώστε $f(c)=f(b)+\mu(c-b)$, τότε ισχύει $f(x)=f(b)+\mu(x-b)$ για κάθε $x\in[c,b]$.

Διατυπώστε και αποδείξτε τα ανάλογα των παραπάνω στην περίπτωση που ισχύει $f'(x)\leq\mu$ για κάθε $x\in(a,b)$.

5.4.12. Έστω $f:[1,4]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $[1,4]$, $f(1)=-7$ και έστω ότι ισχύει $f'(x)\geq 3$ για κάθε $x\in(1,4)$. Αποδείξτε ότι $f(4)\geq 2$.

Για κάθε $a\geq 2$ βρείτε συγκεκριμένη f με όλες τις παραπάνω ιδιότητες ώστε $f(4)=a$.

5.4.13. [17] [α] Έστω η συνάρτηση $f(x)=\arccos x+\arcsin x$. Αποδείξτε ότι ισχύει $f'(x)=0$ για κάθε $x\in(-1,1)$. Αποδείξτε ότι ισχύει $\arccos x+\arcsin x=\frac{\pi}{2}$ για κάθε $x\in[-1,1]$.

[β] Αποδείξτε ότι ισχύει $\arctan y+\operatorname{arccot} y=\frac{\pi}{2}$ για κάθε x.

[γ] Έστω η συνάρτηση $f(x)=\arctan x+\arctan\frac{1}{x}$. Αποδείξτε ότι ισχύει $f'(x)=0$ για κάθε $x\neq 0$. Αποδείξτε ότι ισχύει $\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$ για κάθε $x>0$ και $\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=-\frac{\pi}{2}$ για κάθε $x<0$.

5.4.14. Αποδείξτε ότι ισχύει $\log\frac{1+x}{1-x}>2x+\frac{2x^3}{3}$ για κάθε $x\in(0,1)$.

Αποδείξτε ότι ισχύει $\log\frac{1+x}{1-x}<2x+\frac{2x^3}{3}+\frac{x^4}{2}$ για κάθε $x\in(0,\frac{1}{2}]$.

Αποδείξτε ότι ισχύει $e^{x/(x+1)}<1+x$ για κάθε $x>-1$.

Αποδείξτε ότι ισχύει $x-\frac{x^3}{3}<\arctan x<x$ για κάθε $x>0$.

[17] Δείτε και την άσκηση 4.5.7 για τα ίδια (και περισσότερα) αποτελέσματα.

5.4.15. [α] Γνωρίζουμε ότι ισχύει $\sin x < x$ για κάθε $x > 0$ και $x < \sin x$ για κάθε $x < 0$.
Αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{2}{\pi}\, x < \sin x < x$ για κάθε $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.
Αποδείξτε ότι ισχύει $x < \sin x < \frac{2}{\pi}\, x$ για κάθε $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$.
Οι ανισότητες αυτές λένε ότι, *κοντά στον* 0*, το* $\sin x$ *βρίσκεται ανάμεσα σε δύο σταθερά και θετικά πολλαπλάσια του* x.
[β] Γνωρίζουμε ότι ισχύει $x < e^x - 1$ για κάθε $x \neq 0$.
Αποδείξτε ότι ισχύει $x < e^x - 1 < (e-1)\, x$ για κάθε $x \in (0,1)$.
Αποδείξτε ότι ισχύει $x < e^x - 1 < \frac{e-1}{e}\, x$ για κάθε $x \in (-1,0)$.
Οι ανισότητες αυτές λένε ότι, *κοντά στον* 0*, το* $e^x - 1$ *βρίσκεται ανάμεσα σε δύο σταθερά και θετικά πολλαπλάσια του* x.
[γ] Αποδείξτε ότι ισχύει $\log x < x - 1$ για κάθε $x > 0$ με $x \neq 1$.
Αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{1}{e-1}\,(x-1) < \log x < x - 1$ για κάθε $x \in (1, e)$.
Αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{e}{e-1}\,(x-1) < \log x < x - 1$ για κάθε $x \in (\frac{1}{e}, 1)$.
Οι ανισότητες αυτές λένε ότι, *κοντά στον* 1*, ο* $\log x$ *βρίσκεται ανάμεσα σε δύο σταθερά και θετικά πολλαπλάσια του* $x - 1$.

5.4.16. Έστω $0 < x < y$. Αποδείξτε ότι $ax^{a-1} < \frac{y^a - x^a}{y-x} < ay^{a-1}$, αν $a < 0$ ή $a > 1$, και ότι $ay^{a-1} < \frac{y^a - x^a}{y-x} < ax^{a-1}$, αν $0 < a < 1$.
Έστω $x < y$, $a > 0$, $a \neq 1$. Αποδείξτε ότι $a^x \log a < \frac{a^y - a^x}{y-x} < a^y \log a$.
Έστω $0 < x < y$. Αποδείξτε ότι $\frac{1}{y} < \frac{1}{y-x} \log \frac{y}{x} < \frac{1}{x}$.
Αποδείξτε ότι ισχύει $|\arctan x - \arctan y| < |x - y|$ για κάθε x, y με $x \neq y$.

5.4.17. Αποδείξτε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $e^x > 1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$.
Αποδείξτε ότι για κάθε $x < 0$ ισχύει $e^x > 1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$, αν ο n είναι περιττός, και $e^x < 1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$, αν ο n είναι άρτιος.

5.4.18. Αποδείξτε ότι για κάθε $x \neq 0$ ισχύει $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!}$, αν ο m είναι περιττός, και $\cos x < 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!}$, αν ο m είναι άρτιος.
Αποδείξτε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $\sin x < \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}$, αν ο m είναι περιττός, και $\sin x > \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}$, αν ο m είναι άρτιος. Τί ισχύει για $x < 0$;

5.4.19. Αποδείξτε ότι ισχύει $(x+1)^a \geq ax + 1$ για κάθε $x \geq -1$ και κάθε $a \geq 1$.
Η ανισότητα αυτή είναι γενίκευση της ανισότητας του Bernoulli. Διερευνήστε τις περιπτώσεις που η ανισότητα ισχύει ως ισότητα.
Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη ανισότητα (ή και ανεξάρτητα από αυτήν), αποδείξτε ότι, αν $x \geq -a$, $x \neq 0$ και $0 < a < b$, τότε ισχύει $(1 + \frac{x}{a})^a < (1 + \frac{x}{b})^b$.

5.4.20. [α] Έστω $A > 0$ και $n \in \mathbb{N}$. Βρείτε την ελάχιστη τιμή και όλα τα σημεία ολικού ελαχίστου της συνάρτησης $\frac{nA + x}{(n+1)\sqrt[n+1]{A^n x}}$.
[β][18] Αποδείξτε με επαγωγή ως προς n ότι για κάθε $a_1, \ldots, a_n \geq 0$ ισχύει η **ανισότητα του Cauchy** ή **ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου**,

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \frac{1}{n}\,(a_1 + \cdots + a_n),$$

και ότι η ανισότητα αυτή ισχύει ως ισότητα αν και μόνο αν $a_1 = \ldots = a_n$.
[γ] Αποδείξτε την ανισότητα του Cauchy και ως εξής: αν $A = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$, πολλαπλασιάστε τις

[18] Οι $\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$ και $\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$ ονομάζονται *αριθμητικός μέσος* και *γεωμετρικός μέσος*, αντιστοίχως, των $a_1, \ldots, a_n$. Μια ακόμη απόδειξη της ανισότητας αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου είναι στην άσκηση 5.5.39. Για μια γενίκευση της ανισότητας αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου δείτε και την άσκηση 5.4.23.

ανισότητες $\frac{a_k}{A} \leq e^{\frac{a_k}{A}-1}$ για $k = 1, \ldots, n$. Αποδείξτε και πάλι ότι ισχύει η ισότητα αν και μόνο αν $a_1 = \ldots = a_n$.

5.4.21. [19] Έστω $a, b \geq 0$ και $p, q > 1$ με $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Αποδείξτε την **ανισότητα του Young**,

$$ab \leq \tfrac{1}{p}a^p + \tfrac{1}{q}b^q.$$

Αποδείξτε ότι η ανισότητα αυτή ισχύει ως ισότητα αν και μόνο αν $a^p = b^q$.

5.4.22. Έστω $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \geq 0$ και $p, q > 1$ με $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
[α][20] Αποδείξτε την **ανισότητα του Hölder**,

$$a_1b_1 + \cdots + a_nb_n \leq \big(a_1{}^p + \cdots + a_n{}^p\big)^{1/p}\big(b_1{}^q + \cdots + b_n{}^q\big)^{1/q}.$$

Αποδείξτε ότι ισχύει η ισότητα αν και μόνο αν υπάρχουν $s, t \geq 0$ όχι και οι δύο ίσοι με 0 ώστε να ισχύει $sa_k{}^p = tb_k{}^q$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$.
Επειδή $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, η γνωστή και πολύ σημαντική **ανισότητα του Cauchy**,

$$a_1b_1 + \cdots + a_nb_n \leq \big(a_1{}^2 + \cdots + a_n{}^2\big)^{1/2}\big(b_1{}^2 + \cdots + b_n{}^2\big)^{1/2},$$

είναι ειδική περίπτωση της ανισότητας του Hölder.
[β] Αποδείξτε την **ανισότητα του Minkowski**,

$$\big((a_1 + b_1)^p + \cdots + (a_n + b_n)^p\big)^{1/p} \leq \big(a_1{}^p + \cdots + a_n{}^p\big)^{1/p} + \big(b_1{}^p + \cdots + b_n{}^p\big)^{1/p}.$$

Αποδείξτε ότι ισχύει η ισότητα αν και μόνο αν υπάρχουν $s, t \geq 0$ όχι και οι δύο ίσοι με 0 ώστε να ισχύει $sa_k = tb_k$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$.

5.4.23. Έστω $a_1, \ldots, a_n, w_1, \ldots, w_n > 0$ και $w_1 + \cdots + w_n = 1$.
Αποδείξτε ότι η $f(p) = (w_1a_1{}^p + \cdots + w_na_n{}^p)^{1/p}$ είναι αύξουσα στο $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Αποδείξτε ότι $\lim_{p\to 0}(w_1a_1{}^p + \cdots + w_na_n{}^p)^{1/p} = a_1{}^{w_1} \cdots a_n{}^{w_n}$.
Αν $p' < 0 < p''$, αποδείξτε ότι[21]

$$(w_1a_1{}^{p'} + \cdots + w_na_n{}^{p'})^{1/p'} \leq a_1{}^{w_1} \cdots a_n{}^{w_n} \leq (w_1a_1{}^{p''} + \cdots + w_na_n{}^{p''})^{1/p''}.$$

Δείτε ότι η ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου στην άσκηση 5.4.20 είναι ειδική περίπτωση αυτής της ανισότητας.

5.4.24. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A και $f'(\xi) > 0$. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του $f'(\xi)$, αποδείξτε ότι ισχύει $f(x) > f(\xi)$ κοντά στον ξ από δεξιά του και $f(x) < f(\xi)$ κοντά στον ξ από αριστερά του. Μπορεί να είναι ο ξ σημείο τοπικού ακροτάτου της f; Τι γίνεται αν $f'(\xi) < 0$;
Θεωρήστε τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin(1/x), & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ Αποδείξτε ότι $f'(0) = 1$. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει κανένας $a > 0$ ώστε η f να είναι αύξουσα στο διάστημα $(-a, a)$. Να αντιπαραβάλετε με το παραπάνω γενικό αποτέλεσμα και με τις προτάσεις 5.6 και 5.7.

5.4.25. [22] Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής στο διάστημα I. Αν κανένα εσωτερικό σημείο του I δεν είναι σημείο τοπικού μεγίστου ή ελαχίστου της f, αποδείξτε ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο I.

[19] Θα ξαναδούμε την ανισότητα του Young στις ασκήσεις 5.5.38 και 6.4.16.
[20] Η ανισότητα του Hölder είναι και στην άσκηση 5.5.39.
[21] Η ανισότητα αυτή είναι και στην άσκηση 5.5.39.
[22] Η άσκηση αυτή δεν σχετίζεται με την έννοια της παραγώγου και θα είχε ενταχθεί στην ενότητα 4.4 αν είχαμε δει εκεί τους ορισμούς των τοπικών ακροτάτων.

5.4.26. Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής στο διάστημα I και έστω ότι ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του I. Από την άσκηση 5.3.9[α] γνωρίζουμε ότι η f είναι ένα-προς-ένα στο I.

Αποδείξτε ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο I.

Αποδείξτε ότι είτε ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του I είτε ισχύει $f'(x) < 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του I.[23]

5.4.27. Έστω $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες στο (a, b), $a < 0 < b$. Έστω, επίσης, ότι ισχύει $f'(x) = g(x)$, $g'(x) = -f(x)$ για κάθε $x \in (a, b)$ και $f(0) = 0$, $g(0) = 1$. Γνωρίζετε κάποιο τέτοιο ζευγάρι συναρτήσεων;

Αποδείξτε ότι ισχύει $f(x)^2 + g(x)^2 = 1$ για κάθε $x \in (a, b)$.

Αν οι F, G έχουν τις ίδιες ιδιότητες (όπου η F αντιστοιχεί στην f και η G στην g), αποδείξτε ότι ισχύει $F(x) = f(x)$ και $G(x) = g(x)$ για κάθε $x \in (a, b)$.

5.4.28. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b) και $k > 0$ ώστε να ισχύει $|f'(x)| \leq k|f(x) - f(a)|$ για κάθε $x \in (a, b)$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή στο $[a, b]$.

5.4.29. Έστω ευθεία l του επιπέδου και σημείο $M = (x_0, y_0)$ του ίδιου επιπέδου. Ονομάζουμε απόσταση του M από την l την ελάχιστη απόσταση από το M προς οποιοδήποτε σημείο της l και τη συμβολίζουμε dist(M, l).

Αν η l είναι κατακόρυφη με εξίσωση $x = \kappa$, αποδείξτε ότι dist$(M, l) = |\kappa - x_0|$.

Αν η l είναι πλάγια με εξίσωση $y = \mu x + \nu$, αποδείξτε ότι dist$(M, l) = |\mu x_0 + \nu - y_0|/(1 + \mu^2)^{1/2}$.

Αν η εξίσωση της ευθείας είναι στη μορφή $ax + by = c$, όπου ένας τουλάχιστον από τους a, b είναι $\neq 0$, αποδείξτε ότι dist$(M, l) = |ax_0 + by_0 - c|/(a^2 + b^2)^{1/2}$.

5.4.30. Λυγίζουμε μια λεπτή ευθεία ράβδο μήκους l ώστε να σχηματισθεί ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Σε ποιά σημεία της πρέπει να λυγίσουμε τη ράβδο ώστε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο να έχει μέγιστο εμβαδό;

5.4.31. Θεωρούμε ευθεία γραμμή η οποία χωρίζει ένα επίπεδο σε δύο ημιεπίπεδα καθώς και σημείο A_1 στο ένα ημιεπίπεδο σε απόσταση d_1 από την ευθεία και σημείο A_2 στο άλλο ημιεπίπεδο σε απόσταση d_2 από την ευθεία. Ένα (σημειακό) όχημα κινείται με ταχύτητα σταθερού μέτρου v_1 όταν βρίσκεται στο πρώτο ημιεπίπεδο και με ταχύτητα σταθερού μέτρου v_2 όταν βρίσκεται στο δεύτερο ημιεπίπεδο. Βρείτε την τροχιά που πρέπει να ακολουθήσει το όχημα ώστε από το σημείο A_1 να φτάσει στο σημείο A_2 στον ελάχιστο χρόνο.

5.4.32. Έστω ορθός κυκλικός κώνος με ύψος h και ακτίνα βάσης r.

Ποιός είναι ο κύλινδρος ο οποίος περιέχεται στον κώνο με μια βάση του πάνω στη βάση του κώνου και έχει τον μέγιστο όγκο;

Ποιός είναι ο κύλινδρος ο οποίος περιέχεται στον κώνο με μια βάση του πάνω στη βάση του κώνου και έχει τη μέγιστη επιφάνεια;

5.4.33. Έστω ότι τα κέντρα δύο σφαιρών με ακτίνες a και b έχουν απόσταση $c > a + b$. Βρείτε σε ποιό σημείο ανάμεσα στις δύο σφαίρες και πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα κέντρα των σφαιρών πρέπει να τοποθετήσουμε μια σημειακή φωτεινή πηγή ώστε να φωτίσουμε την μεγαλύτερη δυνατή συνολική επιφάνεια των δύο σφαιρών. Έχει λύση το πρόβλημα αν η φωτεινή πηγή μπορεί να τοποθετηθεί οπουδήποτε στον χώρο;

5.5 Παράγωγοι ανώτερης τάξης και εφαρμογές.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.8. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $B = \{x \in A \,|\, f'(x) \in \mathbb{R}\} \subseteq A$ και $\xi \in B$ σημείο συσσώρευσης του B. Όπως έχουμε ήδη πει, ορίζεται η παράγωγος συνάρτηση $f' : B \to \mathbb{R}$. Τώρα, αν*

[23] Δηλαδή, *αν η παράγωγος συνεχούς συνάρτησης σε διάστημα δεν μηδενίζεται, τότε έχει την ιδιότητα σταθερού προσήμου και, μάλιστα, χωρίς να υποθέσουμε ότι η παράγωγος είναι συνεχής.* Να αντιπαραβάλετε με το θεώρημα του Darboux στην άσκηση 5.3.23[β].

υπάρχει η παράγωγος της f' στον ξ, δηλαδή το όριο $(f')'(\xi) = \lim_{x\to\xi} \frac{f'(x)-f'(\xi)}{x-\xi}$, το συμβολίζουμε, πιο απλά, $f''(\xi)$ και το ονομάζουμε **δεύτερη παράγωγο** *της f στον ξ. Δηλαδή,*

$$f''(\xi) = \lim_{x\to\xi} \frac{f'(x)-f'(\xi)}{x-\xi}.$$

Ομοίως, ορίζεται η τρίτη παράγωγος ως η πρώτη παράγωγος της δεύτερης παραγώγου και, επαγωγικά, μπορούμε να ορίσουμε την n-οστή παράγωγο ως την πρώτη παράγωγο της $(n-1)$-οστής παραγώγου.
Η πρώτη παράγωγος της f στον ξ συμβολίζεται και $f^{(1)}(\xi)$ και η δεύτερη παράγωγος συμβολίζεται και $f^{(2)}(\xi)$. Για την τρίτη παράγωγο χρησιμοποιούμε και τα δύο σύμβολα $f'''(\xi)$, $f^{(3)}(\xi)$ και για μεγαλύτερης τάξης παραγώγους χρησιμοποιούμε το σύμβολο $f^{(n)}(\xi)$.
Υπάρχουν και τα σύμβολα $D_x^n f$, $\frac{d^n f}{dx^n}$ και $\frac{d^n y}{dx^n}$.

Τονίζουμε ότι, βάσει του ορισμού, η n-οστή παράγωγος της f στον ξ είναι το όριο

$$f^{(n)}(\xi) = \lim_{x\to\xi} \frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(\xi)}{x-\xi}.$$

Τέλος, αναφέρουμε ότι μερικές φορές το $f(\xi)$ συμβολίζεται $f^{(0)}(\xi)$.

Παράδειγμα 5.5.1. Αν $n \in \mathbb{N}$, τότε οι παράγωγοι συναρτήσεις της x^n είναι:

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}, \qquad \frac{d^2x^n}{dx^2} = n(n-1)x^{n-2}, \qquad \frac{d^3x^n}{dx^3} = n(n-1)(n-2)x^{n-3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^{n-1}x^n}{dx^{n-1}} = n(n-1)\cdots 2x, \qquad \frac{d^n x^n}{dx^n} = n(n-1)\cdots 2\cdot 1 = n!.$$

Η $\frac{d^n x^n}{dx^n}$ είναι σταθερή, οπότε κάθε παράγωγος μεγαλύτερης τάξης είναι σταθερή 0. Δηλαδή, είναι $\frac{d^m x^n}{dx^m} = 0$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$, $m > n$.

Παράδειγμα 5.5.2. Αν $a \notin \mathbb{N}\cup\{0\}$, οι παράγωγοι συναρτήσεις της x^a είναι: $\frac{dx^a}{dx} = ax^{a-1}$, $\frac{d^2x^a}{dx^2} = a(a-1)x^{a-2}$ και, γενικά,

$$\frac{d^n x^a}{dx^n} = a(a-1)\cdots(a-n+1)x^{a-n} \qquad \text{για } n \in \mathbb{N}.$$

Παρατηρήστε ότι ο συντελεστής της x^{a-n} είναι $\neq 0$ και, επομένως, καμιά παράγωγος συνάρτηση δεν είναι σταθερή 0.

Παράδειγμα 5.5.3. Αν $a > 0$, οι παράγωγοι συναρτήσεις της a^x είναι $\frac{da^x}{dx} = a^x \log a$, $\frac{d^2a^x}{dx^2} = a^x(\log a)^2$ και, γενικά,

$$\frac{d^n a^x}{dx^n} = a^x(\log a)^n \qquad \text{για } n \in \mathbb{N}.$$

Ειδικότερα:

$$\frac{d^n e^x}{dx^n} = e^x \qquad \text{για } n \in \mathbb{N}.$$

Παράδειγμα 5.5.4. Οι παράγωγοι συναρτήσεις της $\sin x$ είναι: $\sin^{(1)} x = \cos x$, $\sin^{(2)} x = -\sin x$, $\sin^{(3)} x = -\cos x$, $\sin^{(4)} x = \sin x$. Από το σημείο αυτό και πέρα οι διαδοχικές παράγωγοι συναρτήσεις επαναλαμβάνουν τον "κύκλο": $\sin x$, $\cos x$, $-\sin x$, $-\cos x$. Μπορούμε, επίσης, να γράψουμε

$$\frac{d^{2k}\sin x}{dx^{2k}} = (-1)^k \sin x, \quad \frac{d^{2k-1}\sin x}{dx^{2k-1}} = (-1)^{k-1}\cos x \qquad \text{για } k \in \mathbb{N}.$$

Ομοίως,

$$\frac{d^{2k}\cos x}{dx^{2k}} = (-1)^k \cos x, \quad \frac{d^{2k-1}\cos x}{dx^{2k-1}} = (-1)^k \sin x \qquad \text{για } k \in \mathbb{N}.$$

Τώρα θα αιτιολογήσουμε το σύμβολο $\frac{d^n y}{dx^n}$ στην περίπτωση της δεύτερης παραγώγου, βασιζόμενοι, όμως, στο όριο

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\xi+2h)-2f(\xi+h)+f(\xi)}{h^2} = f''(\xi), \tag{5.10}$$

το οποίο εμφανίζεται στην άσκηση 5.6.9. Αν γράψουμε $y = f(\xi+h)$, $\eta = f(\xi)$ και $\Delta x = h$, τότε είναι $\Delta y = y - \eta = f(\xi+h) - f(\xi)$. Τώρα, εκτός από τη διαφορά $f(\xi+h) - f(\xi)$ θεωρούμε και την ίδια διαφορά αλλά στον $\xi + h$ αντί στον ξ, δηλαδή την $f(\xi+2h) - f(\xi+h)$. Για να καταλάβουμε καλύτερα την κατάσταση, ας θέσουμε

$$(\Delta y)(\xi) = f(\xi+h) - f(\xi).$$

Τότε είναι

$$(\Delta y)(\xi+h) = f(\xi+2h) - f(\xi+h)$$

και μπορούμε να γράψουμε

$$f(\xi+2h) - 2f(\xi+h) + f(\xi) = (\Delta y)(\xi+h) - (\Delta y)(\xi) = \Delta(\Delta y).$$

Δηλαδή η παράσταση $f(\xi+2h) - 2f(\xi+h) + f(\xi)$ προκύπτει από δύο διαδοχικές εφαρμογές της "πράξης" της διαφοράς. Γι αυτό η παράσταση αυτή ονομάζεται **δεύτερη διαφορά** της f και συμβολίζεται $\Delta(\Delta y)$ ή, πιο σύντομα, $\Delta^2 y$.
Μπορούμε, επομένως, να γράψουμε το παραπάνω όριο (5.10) ως

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} = f''(\xi).$$

Από αυτό το όριο προκύπτει το σύμβολο

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f''(\xi),$$

όπως από το $\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(\xi)$ προκύπτει το $\frac{dy}{dx} = f'(\xi)$.

Θα δούμε τώρα μερικές εφαρμογές της δεύτερης παραγώγου.

5.5.1 Κριτήριο τοπικού ακροτάτου.

Η πρώτη εφαρμογή είναι ένα απλό κριτήριο τοπικού ακροτάτου.

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.9. [24] *Έστω διάστημα I, $f : I \to \mathbb{R}$, έστω ότι η f είναι συνεχής και έχει παράγωγο στο I και έστω ότι υπάρχει η $f''(\xi)$ σε κάποιον ξ στο εσωτερικό του I.*
[α] *Αν $f'(\xi) = 0$ και $f''(\xi) > 0$, τότε ο ξ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της f.*
[β] *Αν $f'(\xi) = 0$ και $f''(\xi) < 0$, τότε ο ξ είναι σημείο τοπικού μεγίστου της f.*

Απόδειξη. [α] Επειδή

$$\lim_{x\to\xi} \frac{f'(x)}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi} \frac{f'(x)-f'(\xi)}{x-\xi} = f''(\xi) > 0,$$

ισχύει

$$\frac{f'(x)}{x-\xi} > 0 \qquad \text{κοντά στον } \ \xi.$$

Τώρα, ο ξ είναι εσωτερικό σημείο του διαστήματος I και, επομένως, ισχύει $f'(x) < 0$ κοντά στον ξ από τα αριστερά του και $f'(x) > 0$ κοντά στον ξ από τα δεξιά του. Δηλαδή, υπάρχουν a, b ώστε $a < \xi < b$ και $(a, b) \subseteq I$ και ώστε να ισχύει $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (a, \xi)$ και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\xi, b)$. Η f είναι συνεχής στο $(a, \xi]$ και στο $[\xi, b)$, οπότε είναι γνησίως φθίνουσα στο $(a, \xi]$ και γνησίως αύξουσα στο $[\xi, b)$. Άρα ο ξ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της f.
[β] Ομοίως. □

Παράδειγμα 5.5.5. Είναι $\frac{dx^2}{dx}(0) = 0$ και $\frac{d^2 x^2}{dx^2}(0) = 2$. Επομένως, ο 0 είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της x^2.

Παράδειγμα 5.5.6. Είναι $\frac{dx^4}{dx}(0) = 0$ και $\frac{d^2 x^4}{dx^2}(0) = 0$. Όμως, ο 0 *είναι* σημείο τοπικού ελαχίστου της x^4. Άρα δεν ισχύει το αντίστροφο της πρότασης 5.9.

[24] Μια γενίκευση αυτής της πρότασης υπάρχει στην άσκηση 5.6.12.

5.5.2 Κυρτές και κοίλες συναρτήσεις.

Η δεύτερη εφαρμογή της δεύτερης παραγώγου έχει να κάνει με τις γεωμετρικές έννοιες της *κυρτότητας* και της *κοιλότητας*.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.9. *Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$. Η f χαρακτηρίζεται* **κυρτή** *στο I αν για κάθε $x_1, x_2 \in I$ με $x_1 < x_2$ ισχύει*

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2) \qquad \text{για } \ 0 < t < 1.$$

Αν η ανισότητα αυτή είναι γνήσια, τότε η f χαρακτηρίζεται **γνησίως κυρτή** *στο I.*
Ομοίως, η f χαρακτηρίζεται **κοίλη** *στο I αν για κάθε $x_1, x_2 \in I$ με $x_1 < x_2$ ισχύει*

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \geq (1-t)f(x_1) + tf(x_2) \qquad \text{για } \ 0 < t < 1.$$

Και, αν αυτή η ανισότητα είναι γνήσια, τότε η f χαρακτηρίζεται **γνησίως κοίλη** *στο I.*

Παράδειγμα 5.5.7. Κάθε αφφινική συνάρτηση $\mu x + \nu$ είναι κυρτή και κοίλη στο $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 5.5.8. Η συνάρτηση x^2 είναι γνησίως κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 5.5.9. Η συνάρτηση $|x|$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Θα δούμε ότι η ανισότητα $f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$ γράφεται με έναν διαφορετικό (αλλά ισοδύναμο) τρόπο.

Έστω $x_1 < x_2$. Είναι απλό να δει κανείς ότι η

$$x = (1-t)x_1 + tx_2$$

είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση του t και απεικονίζει το διάστημα $[0,1]$ αμφιμονοσήμαντα επί του $[x_1, x_2]$. Επίσης, η αντίστροφη συνάρτηση

$$t = \tfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση του x και απεικονίζει το διάστημα $[x_1, x_2]$ αμφιμονοσήμαντα επί του $[0,1]$. Με αυτές τις αλλαγές μεταβλητής από t σε x και αντιστρόφως μπορούμε να γράψουμε, επιπλέον, $1 - t = \frac{x_2-x}{x_2-x_1}$ και, επομένως, μπορούμε να ξαναδιατυπώσουμε τον ορισμό της κυρτότητας ως εξής. Η $f : I \to \mathbb{R}$ είναι κυρτή στο διάστημα I αν και μόνο αν για κάθε $x_1, x_2 \in I$ με $x_1 < x_2$ ισχύει

$$f(x) \leq \tfrac{x_2-x}{x_2-x_1} f(x_1) + \tfrac{x-x_1}{x_2-x_1} f(x_2) \qquad \text{για } \ x_1 < x < x_2.$$

Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι η f είναι γνησίως κυρτή στο διάστημα I αν και μόνο αν ισχύει η ίδια ανισότητα ως γνήσια ανισότητα.

Ομοίως, η f είναι κοίλη στο διάστημα I αν και μόνο αν για κάθε $x_1, x_2 \in I$ με $x_1 < x_2$ ισχύει

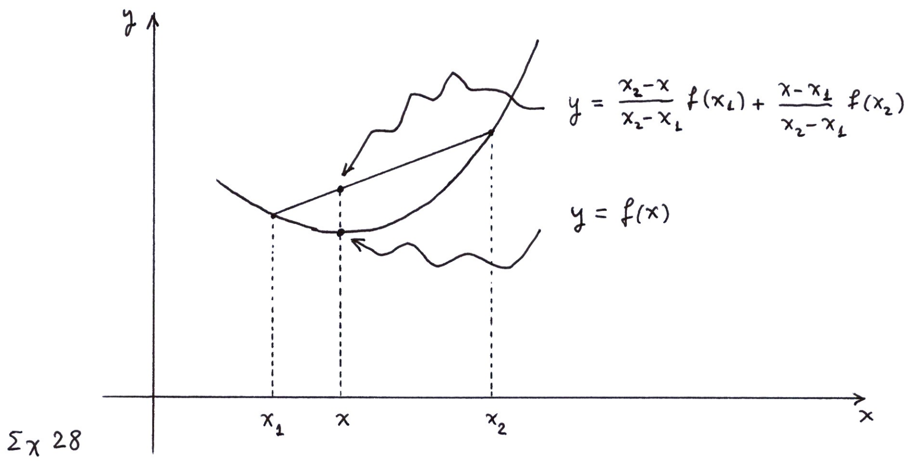
$$f(x) \geq \tfrac{x_2-x}{x_2-x_1} f(x_1) + \tfrac{x-x_1}{x_2-x_1} f(x_2) \qquad \text{για } \ x_1 < x < x_2.$$

Και η f είναι γνησίως κοίλη στο διάστημα I αν και μόνο αν ισχύει η ίδια ανισότητα ως γνήσια ανισότητα.

Από αυτές τις ανισότητες προκύπτει το γεωμετρικό περιεχόμενο των εννοιών της κυρτότητας και της κοιλότητας συναρτήσεων. Πράγματι, είναι εύκολο να δει κανείς ότι η

$$y = \tfrac{x_2-x}{x_2-x_1} f(x_1) + \tfrac{x-x_1}{x_2-x_1} f(x_2)$$

είναι η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $(x_1, f(x_1))$ και $(x_2, f(x_2))$. Επομένως, το ότι η f είναι κυρτή (κοίλη) στο διάστημα I σημαίνει ότι για κάθε $x_1, x_2 \in I$ με $x_1 < x_2$ το μέρος του γραφήματος της f που είναι ανάμεσα στα σημεία $(x_1, f(x_1))$ και $(x_2, f(x_2))$ βρίσκεται κάτω (πάνω) από ή επί του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα αυτά τα δύο σημεία. Το ότι η f είναι γνησίως κυρτή (κοίλη) στο διάστημα I σημαίνει ότι για κάθε $x_1, x_2 \in I$ με $x_1 < x_2$ το μέρος του γραφήματος της f που είναι ανάμεσα στα σημεία $(x_1, f(x_1))$ και $(x_2, f(x_2))$ βρίσκεται κάτω (πάνω) από το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα αυτά τα δύο σημεία. Δείτε το σχήμα 28.



ΠΡΟΤΑΣΗ 5.10. *Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ κυρτή ή κοίλη στο I. Τότε η f είναι συνεχής στο εσωτερικό του I.*

Απόδειξη. Έστω ξ στο εσωτερικό του I, οπότε υπάρχουν $a, b \in I$ ώστε $a < \xi < b$. Έστω ότι η f είναι κυρτή στο I.
Έστω $a < x < \xi$. Τότε ισχύει $f(x) \leq \frac{\xi-x}{\xi-a}f(a) + \frac{x-a}{\xi-a}f(\xi)$ και $f(\xi) \leq \frac{b-\xi}{b-x}f(x) + \frac{\xi-x}{b-x}f(b)$. Άρα

$$\tfrac{b-x}{b-\xi}f(\xi) + \tfrac{x-\xi}{b-\xi}f(b) \leq f(x) \leq \tfrac{\xi-x}{\xi-a}f(a) + \tfrac{x-a}{\xi-a}f(\xi) \qquad \text{για } a < x < \xi,$$

οπότε, με παρεμβολή, $\lim_{x\to\xi-} f(x) = f(\xi)$.
Έστω $\xi < x < b$. Τότε ισχύει $f(x) \leq \frac{b-x}{b-\xi}f(\xi) + \frac{x-\xi}{b-\xi}f(b)$ και $f(\xi) \leq \frac{x-\xi}{x-a}f(a) + \frac{\xi-a}{x-a}f(x)$. Άρα

$$\tfrac{\xi-x}{\xi-a}f(a) + \tfrac{x-a}{\xi-a}f(\xi) \leq f(x) \leq \tfrac{b-x}{b-\xi}f(\xi) + \tfrac{x-\xi}{b-\xi}f(b) \qquad \text{για } \xi < x < b,$$

οπότε, πάλι με παρεμβολή, $\lim_{x\to\xi+} f(x) = f(\xi)$.
Άρα $\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$ και η f είναι συνεχής στον ξ.
Η απόδειξη είναι ίδια αν η f είναι κοίλη στο I. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.11. *Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$.*
[α] *Αν η f είναι κυρτή στο I, τότε (i) για κάθε ξ στο εσωτερικό του I ή αριστερό άκρο του I υπάρχει η $f'_+(\xi)$ και ισχύει $f'_+(\xi) \leq \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ για κάθε $x \in I$ με $x > \xi$ και (ii) για κάθε ξ στο εσωτερικό του I ή δεξιό άκρο του I υπάρχει η $f'_-(\xi)$ και ισχύει $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \leq f'_-(\xi)$ για κάθε $x \in I$ με $x < \xi$.*
Αν η f είναι γνησίως κυρτή στο I, τότε οι δύο παραπάνω ανισότητες ισχύουν ως γνήσιες ανισότητες.
Τέλος, ισχύει $-\infty < f'_-(\xi) \leq f'_+(\xi) < +\infty$ για κάθε ξ στο εσωτερικό του I.
[β] *Αν η f είναι κοίλη στο I, τότε (i) για κάθε ξ στο εσωτερικό του I ή αριστερό άκρο του I υπάρχει η $f'_+(\xi)$ και ισχύει $f'_+(\xi) \geq \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ για κάθε $x \in I$ με $x > \xi$ και (ii) για κάθε ξ στο εσωτερικό του I ή δεξιό άκρο του I υπάρχει η $f'_-(\xi)$ και ισχύει $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \geq f'_-(\xi)$ για κάθε $x \in I$ με $x < \xi$.*
Αν η f είναι γνησίως κοίλη στο I, τότε οι δύο παραπάνω ανισότητες ισχύουν ως γνήσιες ανισότητες.
Τέλος, ισχύει $-\infty < f'_+(\xi) \leq f'_-(\xi) < +\infty$ για κάθε ξ στο εσωτερικό του I.

Απόδειξη. [α] Έστω f κυρτή στο I.
Έστω ξ εσωτερικό σημείο ή δεξιό άκρο του I. Έστω $x_1, x_2 \in I$ με $x_1 < x_2 < \xi$. Τότε είναι $f(x_2) \leq \frac{\xi-x_2}{\xi-x_1}f(x_1) + \frac{x_2-x_1}{\xi-x_1}f(\xi)$, οπότε

$$\tfrac{f(x_1)-f(\xi)}{x_1-\xi} \leq \tfrac{f(x_2)-f(\xi)}{x_2-\xi} \qquad \text{για } x_1 < x_2 < \xi.$$

Άρα η $g(x) = \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ είναι αύξουσα στο υποδιάστημα του I που βρίσκεται αριστερά του ξ, οπότε, σύμφωνα με το θεώρημα 3.2 και τα σχόλια μετά από αυτό, υπάρχει το $\lim_{x\to\xi-} g(x) =$

$\lim_{x\to\xi-}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}=f'_-(\xi)$ και είναι $>-\infty$ και, επίσης, ισχύει $f'_-(\xi)\geq g(x)=\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ για κάθε $x\in I$ με $x<\xi$.
Αν η f είναι γνησίως κυρτή στο I, τότε, όπως πριν, η g είναι γνησίως αύξουσα, οπότε ισχύει $f'_-(\xi)>g(x)=\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ για κάθε $x\in I$ με $x<\xi$.
Έστω ξ εσωτερικό σημείο ή αριστερό άκρο του I. Έστω $x_3,x_4\in I$ με $\xi<x_3<x_4$. Τότε είναι $f(x_3)\leq\frac{x_4-x_3}{x_4-\xi}f(\xi)+\frac{x_3-\xi}{x_4-\xi}f(x_4)$ και, επομένως,

$$\tfrac{f(x_3)-f(\xi)}{x_3-\xi}\leq\tfrac{f(x_4)-f(\xi)}{x_4-\xi}\qquad\text{για }\ \xi<x_3<x_4.$$

Άρα η $h(x)=\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ είναι αύξουσα στο υποδιάστημα του I που βρίσκεται δεξιά του ξ, οπότε υπάρχει το $\lim_{x\to\xi+}h(x)=\lim_{x\to\xi+}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}=f'_+(\xi)$ και είναι $<+\infty$ και, επίσης, ισχύει $f'_+(\xi)\leq h(x)=\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ για κάθε $x\in I$ με $x>\xi$.
Αν η f είναι γνησίως κυρτή στο I, τότε, όπως πριν, η h είναι γνησίως αύξουσα, οπότε ισχύει $f'_+(\xi)<h(x)=\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ για κάθε $x\in I$ με $x>\xi$.
Έστω ξ στο εσωτερικό του I. Έστω $a,b\in I$ με $a<\xi<b$. Από την $f(\xi)\leq\frac{b-\xi}{b-a}f(a)+\frac{\xi-a}{b-a}f(b)$ έχουμε $\frac{f(a)-f(\xi)}{a-\xi}\leq\frac{f(b)-f(\xi)}{b-\xi}$, οπότε $f'_-(\xi)=\lim_{a\to\xi-}\frac{f(a)-f(\xi)}{a-\xi}\leq\lim_{b\to\xi+}\frac{f(b)-f(\xi)}{b-\xi}=f'_+(\xi)$.
[β] Ομοίως. □

Παρατηρήστε το εξής πόρισμα της πρότασης 5.11. Αν η f είναι κυρτή ή κοίλη στο διάστημα I και έχει παράγωγο σε κάποιον ξ στο εσωτερικό του I, τότε $f'(\xi)\in\mathbb{R}$, οπότε η f είναι παραγωγίσιμη στον ξ.

Αξίζει να τονίσουμε μερικά στοιχεία που προέκυψαν από την πρόταση 5.11 και την απόδειξή της. Αν η f είναι κυρτή στο διάστημα I και ο ξ είναι οποιοδήποτε εσωτερικό σημείο του I, είδαμε ότι είναι

$$-\infty<f'_+(\xi)\leq f'_-(\xi)<+\infty.$$

Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν οι δύο εφαπτόμενες ημιευθείες του γραφήματος της f στο σημείο $(\xi,f(\xi))$ και ότι η "προς τα πάνω" γωνία τους είναι κυρτή, δηλαδή έχει τιμή $\leq\pi$. Επίσης, προέκυψε ότι για κάθε $x_1,x_2,x_3,x_4\in I$ με τη διάταξη $x_1<x_2<\xi<x_3<x_4$ ισχύει

$$\tfrac{f(x_1)-f(\xi)}{x_1-\xi}\leq\tfrac{f(x_2)-f(\xi)}{x_2-\xi}\leq f'_-(\xi)\leq f'_+(\xi)\leq\tfrac{f(x_3)-f(\xi)}{x_3-\xi}\leq\tfrac{f(x_4)-f(\xi)}{x_4-\xi}.$$

Αυτό σημαίνει ότι η κλίση $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ μιας μεταβλητής χορδής του γραφήματος της f με σταθερό το ένα της άκρο στο $(\xi,f(\xi))$ αυξάνεται καθώς το άλλο άκρο $(x,f(x))$ κινείται πάνω στο γράφημα από αριστερά προς δεξιά. Και, ειδικώτερα, όταν το $(x,f(x))$ μεταβαίνει από την αριστερή στη δεξιά μεριά του $(\xi,f(\xi))$, η κλίση της χορδής κάνει ένα "άλμα" από τιμές μικρότερες ή ίσες της κλίσης της αριστερής εφαπτόμενης ημιευθείας σε τιμές μεγαλύτερες ή ίσες της κλίσης της δεξιάς εφαπτόμενης ημιευθείας στο σημείο $(\xi,f(\xi))$.

Είναι εύκολο να δει κανείς πώς θα προσαρμοστούν τα προηγούμενα στην περίπτωση που η f είναι γνησίως κυρτή ή κοίλη ή γνησίως κοίλη ή που ο ξ είναι αριστερό ή δεξιό άκρο του διαστήματος I.

Στη συνέχεια θα δούμε δύο βασικά κριτήρια με τα οποία μπορούμε να αποφασίσουμε αν μια συνάρτηση είναι κυρτή ή κοίλη σε κάποιο διάστημα.

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.12. *Έστω διάστημα I και έστω ότι η $f:I\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο I και έχει παράγωγο στο εσωτερικό του I.*

[α] *Η f είναι (γνησίως) κυρτή στο διάστημα I αν και μόνο αν η f' είναι (γνησίως) αύξουσα στο εσωτερικό του I.*

[β] *Η f είναι (γνησίως) κοίλη στο διάστημα I αν και μόνο αν η f' είναι (γνησίως) φθίνουσα στο εσωτερικό του I.*

Απόδειξη. [α] Έστω ότι η f είναι κυρτή στο I. Έστω x_1, x_2 στο εσωτερικό του I με $x_1 < x_2$. Σύμφωνα με την πρόταση 5.11, είναι

$$f'(x_1) \leq \tfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq f'(x_2),$$

οπότε η f' είναι αύξουσα στο εσωτερικό του I. Αν η f είναι γνησίως κυρτή, τότε οι ανισότητες αυτές ισχύουν ως γνήσιες ανισότητες, οπότε η f' είναι γνησίως αύξουσα.
Αντιστρόφως, έστω ότι η f' είναι αύξουσα στο εσωτερικό του I. Έστω $x, x_1, x_2 \in I$ ώστε $x_1 < x < x_2$. Τότε υπάρχουν ξ_1, ξ_2 ώστε $x_1 < \xi_1 < x < \xi_2 < x_2$ και

$$\tfrac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = f'(\xi_1), \qquad \tfrac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} = f'(\xi_2).$$

Είναι $f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2)$, οπότε

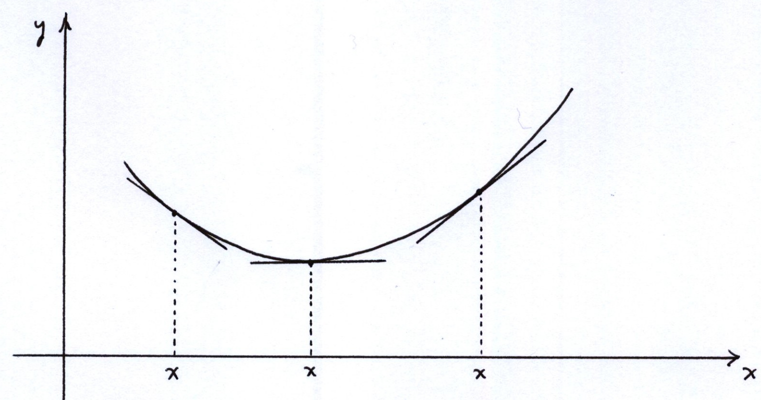
$$\tfrac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leq \tfrac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}.$$

Συνεπάγεται

$$f(x) \leq \tfrac{x_2-x}{x_2-x_1} f(x_1) + \tfrac{x-x_1}{x_2-x_1} f(x_2),$$

οπότε η f είναι κυρτή στο I. Και πάλι, αν η f' είναι γνησίως αύξουσα, τότε οι ανισότητες ισχύουν ως γνήσιες ανισότητες, οπότε η f είναι γνησίως κυρτή.
[β] Ομοίως. $\square$

Από την πρόταση 5.12 προκύπτει ένας ακόμη γεωμετρικός χαρακτηρισμός των εννοιών της κυρτότητας και της κοιλότητας για συναρτήσεις f οι οποίες είναι συνεχείς σε ένα διάστημα I και παραγωγίσιμες στο εσωτερικό του I. Το ότι η f είναι κυρτή (κοίλη) στο I σημαίνει ότι η κλίση της εφαπτόμενης ευθείας στο γράφημα της f σε ένα εσωτερικό του σημείο αυξάνεται (μειώνεται) όταν το σημείο επαφής κινείται προς τα δεξιά. Ομοίως, το ότι η f είναι γνησίως κυρτή (κοίλη) στο I σημαίνει ότι η κλίση της εφαπτόμενης ευθείας στο γράφημα της f σε ένα εσωτερικό του σημείο αυξάνεται (μειώνεται) γνησίως όταν το σημείο επαφής κινείται προς τα δεξιά. Δείτε το σχήμα 29.



Η κλίση της εφαπτομένης αυξάνεται
όταν το σημείο επαφής μετακινείται προς τα δεξιά

Σχ 29

Παράδειγμα 5.5.10. Η $f(x) = \begin{cases} 2x^2, & \text{αν } x \leq 0 \\ x^2, & \text{αν } 0 \leq x \end{cases}$ έχει παράγωγο $f'(x) = \begin{cases} 4x, & \text{αν } x \leq 0 \\ 2x, & \text{αν } 0 \leq x \end{cases}$
Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε η f είναι γνησίως κυρτή στο $\mathbb{R}$. Παρατηρήστε, εν όψει της πρότασης 5.13, ότι δεν υπάρχει η $f''(0)$.

Παράδειγμα 5.5.11. Είναι $\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$ στο $\mathbb{R}$.
Άρα, αν ο $n \in \mathbb{N}$ είναι άρτιος, η x^{n-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε η x^n είναι γνησίως κυρτή στο $\mathbb{R}$.
Αν ο $n \in \mathbb{N}$ είναι περιττός, η x^{n-1} είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$ και γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, οπότε η x^n είναι γνησίως κοίλη στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως κυρτή στο $[0, +\infty)$.

Βάσει της σχέσης ανάμεσα στη μονοτονία συνάρτησης και στο πρόσημο της παραγώγου της, έχουμε την εξής παραλλαγή της πρότασης 5.12.

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.13. *Έστω διάστημα I και έστω ότι η $f : I \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο I και έχει δεύτερη παράγωγο στο εσωτερικό του I.*
[α] *Η f είναι κυρτή στο I αν και μόνο αν ισχύει $f''(x) \geq 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του I. Αν ισχύει $f''(x) > 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του I, τότε η f είναι γνησίως κυρτή στο I.*
[β] *Η f είναι κοίλη στο I αν και μόνο αν ισχύει $f''(x) \leq 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του I. Αν ισχύει $f''(x) < 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του I, τότε η f είναι γνησίως κοίλη στο I.*

Απόδειξη. Προφανής. □

Παράδειγμα 5.5.12. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x(x-1)(x-2)$. Ισχύει $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$ και $f''(x) = 6x - 6$ για κάθε x. Άρα ισχύει $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 1)$, οπότε η f είναι γνησίως κοίλη στο $(-\infty, 1]$. Επίσης, ισχύει $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$, οπότε η f είναι γνησίως κυρτή στο $[1, +\infty)$.

Παράδειγμα 5.5.13. Είναι $\frac{d^2x^n}{dx^2} = n(n-1)x^{n-2}$ στο $\mathbb{R}$ και ξαναβρίσκουμε τα αποτελέσματα του παραδείγματος 5.5.11.

Παράδειγμα 5.5.14. Είναι $\frac{d^2x^a}{dx^2} = a(a-1)x^{a-2}$ για κάθε $x > 0$. Άρα η x^a είναι γνησίως κυρτή στο $(0, +\infty)$, αν $a < 0$, γνησίως κοίλη στο $[0, +\infty)$, αν $0 < a < 1$, και γνησίως κυρτή στο $[0, +\infty)$, αν $a > 1$.

Παράδειγμα 5.5.15. Έστω $a > 0$, $a \neq 1$. Η a^x είναι γνησίως κυρτή στο $\mathbb{R}$ διότι ισχύει $\frac{d^2a^x}{dx^2} = a^x(\log a)^2 > 0$ για κάθε x.

Παράδειγμα 5.5.16. Έστω $a > 0$, $a \neq 1$. Ισχύει $\frac{d^2 \log_a x}{dx^2} = -\frac{1}{\log a}\,\frac{1}{x^2}$ για κάθε $x > 0$. Άρα η $\log_a$ είναι γνησίως κοίλη στο $(0, +\infty)$, αν $a > 1$, και γνησίως κυρτή στο $(0, +\infty)$, αν $0 < a < 1$.

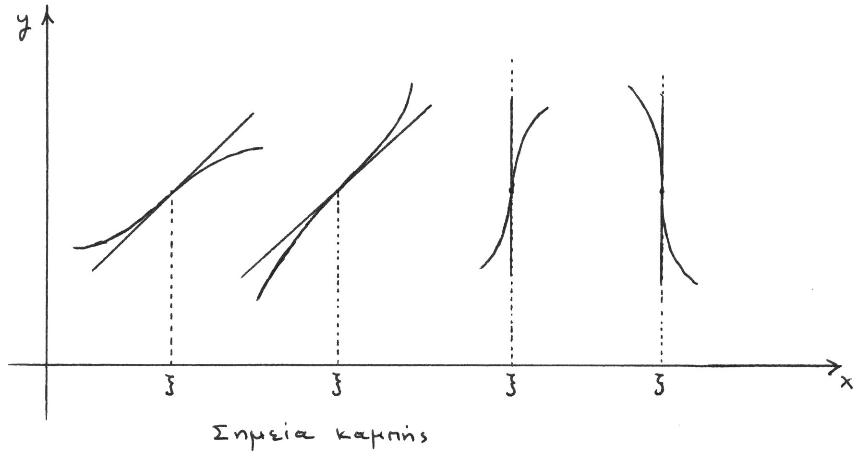
Παράδειγμα 5.5.17. Η συνάρτηση x^4 είναι γνησίως κυρτή στο $\mathbb{R}$ διότι η παράγωγος συνάρτηση $4x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Όμως, είναι λάθος ότι η δεύτερη παράγωγος συνάρτηση είναι θετική σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}$: ισχύει $12x^2 > 0$ για κάθε $x \neq 0$, αλλά $12 \cdot 0^2 = 0$.

5.5.3 Σημεία καμπής.

Η τρίτη εφαρμογή της δεύτερης παραγώγου σχετίζεται με την γεωμετρική (πάλι) έννοια του *σημείου καμπής*.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.10. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και έστω ξ από αριστερά του και από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A.*
Ο ξ χαρακτηρίζεται **σημείο καμπής** *της f αν η f είναι παραγωγίσιμη στον ξ και είτε ισχύει $f(x) \geq f'(\xi)(x-\xi) + f(\xi)$ για κάθε x κοντά στον ξ από αριστερά του και $f(x) \leq f'(\xi)(x-\xi) + f(\xi)$ για κάθε x κοντά στον ξ από δεξιά του είτε, αντιθέτως, ισχύει $f(x) \leq f'(\xi)(x-\xi) + f(\xi)$ για κάθε x κοντά στον ξ από αριστερά του και $f(x) \geq f'(\xi)(x-\xi) + f(\xi)$ για κάθε x κοντά στον ξ από δεξιά του.*
Αν οι προηγούμενες ανισότητες ισχύουν ως γνήσιες ανισότητες, τότε ο ξ χαρακτηρίζεται **γνήσιο σημείο καμπής** *της f.*
Επίσης, ο ξ χαρακτηρίζεται **γνήσιο σημείο καμπής** *της f και στις περιπτώσεις $f'(\xi) = \pm\infty$.*
Σε κάθε περίπτωση, το $(\xi, f(\xi))$ χαρακτηρίζεται **σημείο καμπής** *του γραφήματος της f.*

Μπορούμε, επομένως, να πούμε ότι το $(\xi, f(\xi))$ είναι σημείο καμπής του γραφήματος της f αν, πρώτον, υπάρχει εφαπτόμενη ευθεία στο γράφημα της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ και, κατόπιν, τα μέρη του γραφήματος, τα οποία είναι κοντά στο σημείο αυτό και στις δύο διαφορετικές μεριές του, βρίσκονται το ένα στο ένα και το άλλο στο άλλο από τα δύο ημιεπίπεδα που ορίζονται από την εφαπτόμενη ευθεία. Δείτε το σχήμα 30.



ΠΡΟΤΑΣΗ 5.14. *Έστω διάστημα I, $f : I \to \mathbb{R}$, ξ στο εσωτερικό του I και $f'(\xi) \in \mathbb{R}$. Αν υπάρχουν $a, b \in I$ ώστε $a < \xi < b$ και ώστε η f να είναι κυρτή στο $(a, \xi]$ και κοίλη στο $[\xi, b)$ ή, αντιθέτως, κοίλη στο $(a, \xi]$ και κυρτή στο $[\xi, b)$, τότε ο ξ είναι σημείο καμπής της f.*
Αν το "κυρτή" γίνει "γνησίως κυρτή" και το "κοίλη" γίνει "γνησίως κοίλη", τότε ο ξ είναι γνήσιο σημείο καμπής.

Απόδειξη. Έστω ότι η f είναι κυρτή στο $(a, \xi]$ και κοίλη στο $[\xi, b)$. Σύμφωνα με την πρόταση 5.11, ισχύει $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \leq f'(\xi)$ για κάθε $x \in (a, \xi)$. Ομοίως, ισχύει $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \leq f'(\xi)$ για κάθε $x \in (\xi, b)$. Άρα ισχύει $f(x) \geq f'(\xi)(x-\xi)+f(\xi)$ για κάθε $x \in (a, \xi)$ και $f(x) \leq f'(\xi)(x-\xi)+f(\xi)$ για κάθε $x \in (\xi, b)$. □

Εφαρμόζουμε τα διάφορα κριτήρια κυρτότητας ή κοιλότητας σε διαστήματα σε συνδυασμό με την πρόταση 5.14 για να διακρίνουμε αν κάποιος αριθμός είναι σημείο καμπής μιας συνάρτησης.

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.15. *Έστω διάστημα I, $f : I \to \mathbb{R}$, ξ στο εσωτερικό του I και $f'(\xi) \in \mathbb{R}$. Αν ισχύει είτε $f''(x) \geq 0$ κοντά στον ξ από αριστερά του και $f''(x) \leq 0$ κοντά στον ξ από δεξιά του είτε $f''(x) \leq 0$ κοντά στον ξ από αριστερά του και $f''(x) \geq 0$ κοντά στον ξ από δεξιά του, τότε ο ξ είναι σημείο καμπής της f.*
Αν οι προηγούμενες ανισότητες ισχύουν ως γνήσιες ανισότητες, τότε ο ξ είναι γνήσιο σημείο καμπής.

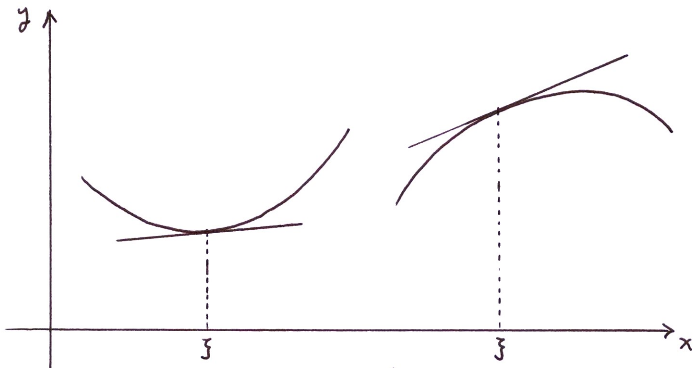
Απόδειξη. Προφανής. □

Παράδειγμα 5.5.18. Σύμφωνα με τα παραδείγματα 5.5.11 και 5.5.13, αν ο $n \in \mathbb{N}$ είναι περιττός, ο 0 είναι σημείο καμπής της x^n.

5.5.4 Ευθείες στήριξης.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.11. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in A$. Μια ευθεία l χαρακτηρίζεται **ευθεία στήριξης από κάτω** του γραφήματος της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ αν η l διέρχεται από το σημείο αυτό και δεν υπάρχει κανένα σημείο του γραφήματος κάτω από την l. Δηλαδή, αν $y = \mu x+\nu$ είναι η εξίσωση της l, τότε ισχύει $f(\xi) = \mu\xi+\nu$ και $f(x) \geq \mu x+\nu$ για κάθε $x \in A$. Αν, επιπλέον, ισχύει $f(x) > \mu x+\nu$ για κάθε $x \in A$, $x \neq \xi$, τότε η ευθεία στήριξης από κάτω χαρακτηρίζεται **γνήσια**.*
*Ομοίως, η ευθεία l χαρακτηρίζεται **ευθεία στήριξης από πάνω** του γραφήματος της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ αν η l διέρχεται από το σημείο αυτό και δεν υπάρχει κανένα σημείο του γραφήματος πάνω από την l. Δηλαδή, αν $y = \mu x+\nu$ είναι η εξίσωση της l, τότε ισχύει $f(\xi) = \mu\xi+\nu$ και $f(x) \leq \mu x+\nu$ για κάθε $x \in A$. Αν, επιπλέον, ισχύει $f(x) < \mu x + \nu$ για κάθε $x \in A$, $x \neq \xi$, τότε η ευθεία στήριξης από πάνω χαρακτηρίζεται **γνήσια**.*

Δείτε το σχήμα 31.



Σχ 31 Ευθείες στήριξης

από κάτω από πάνω

Βάσει της $f(\xi) = \mu\xi + \nu$ η εξίσωση της ευθείας στήριξης l γράφεται $y = \mu x + f(\xi) - \mu\xi$ ή, ισοδύναμα, $y = \mu(x-\xi)+f(\xi)$. Άρα μια ευθεία l είναι ευθεία στήριξης από κάτω του γραφήματος της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ αν έχει εξίσωση $y = \mu(x-\xi)+f(\xi)$ και ισχύει $f(x) \geq \mu(x-\xi)+f(\xi)$ για κάθε $x \in A$.

Ομοίως, μια ευθεία l είναι ευθεία στήριξης από πάνω του γραφήματος της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ αν έχει εξίσωση $y = \mu(x-\xi)+f(\xi)$ και ισχύει $f(x) \leq \mu(x-\xi)+f(\xi)$ για κάθε $x \in A$.

Επομένως, το να βρούμε αν υπάρχει και ποιά είναι η ευθεία στήριξης είναι το ίδιο με το να προσδιορίσουμε τον συντελεστή μ.

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.16. *Έστω διάστημα I, $f : I \to \mathbb{R}$ και $\xi \in I$.*

[α] *Αν η f είναι (γνησίως) κυρτή στο I, τότε η ευθεία με εξίσωση $y = \mu(x-\xi)+f(\xi)$ είναι (γνήσια) ευθεία στήριξης από κάτω του γραφήματος της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ αν και μόνο αν είτε $\mu \leq f'_+(\xi)$, αν ο ξ είναι αριστερό άκρο του I, είτε $f'_-(\xi) \leq \mu$, αν ο ξ είναι δεξιό άκρο του I, είτε $f'_-(\xi) \leq \mu \leq f'_+(\xi)$, αν ο ξ είναι στο εσωτερικό του I.*

[β] *Αν η f είναι (γνησίως) κοίλη στο I, τότε η ευθεία με εξίσωση $y = \mu(x-\xi)+f(\xi)$ είναι (γνήσια) ευθεία στήριξης από πάνω του γραφήματος της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ αν και μόνο αν είτε $f'_+(\xi) \leq \mu$, αν ο ξ είναι αριστερό άκρο του I, είτε $\mu \leq f'_-(\xi)$, αν ο ξ είναι δεξιό άκρο του I, είτε $f'_+(\xi) \leq \mu \leq f'_-(\xi)$, αν ο ξ είναι στο εσωτερικό του I.*

[γ] *Αν η f είναι κυρτή ή κοίλη στο I και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό σημείο ξ του I, τότε η μοναδική ευθεία στήριξης από κάτω ή από πάνω, αντιστοίχως, του γραφήματος της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ είναι η ευθεία με εξίσωση $y = f'(\xi)(x-\xi)+f(\xi)$, δηλαδή η εφαπτόμενη ευθεία στο γράφημα της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$.*

Απόδειξη. [α] Έστω ότι η f είναι κυρτή στο I. Σύμφωνα με την πρόταση 5.11, η $f'_+(\xi)$ υπάρχει για κάθε εσωτερικό σημείο ή αριστερό άκρο ξ του I και η $f'_-(\xi)$ υπάρχει για κάθε εσωτερικό σημείο ή δεξιό άκρο ξ του I.

Έστω ότι η ευθεία με εξίσωση $y = \mu(x-\xi)+f(\xi)$ είναι ευθεία στήριξης από κάτω του γραφήματος της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$. Αν ο ξ είναι εσωτερικό σημείο ή αριστερό άκρο του I, ισχύει $f(x) \geq \mu(x-\xi)+f(\xi)$ για κάθε $x \in I$, $x > \xi$, οπότε ισχύει $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \geq \mu$ για κάθε x κοντά στον ξ από δεξιά του και, επομένως, $f'_+(\xi) = \lim_{x\to\xi+} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \geq \mu$.

Ομοίως, αν ο ξ είναι εσωτερικό σημείο ή δεξιό άκρο του I, ισχύει $f(x) \geq \mu(x-\xi)+f(\xi)$ για κάθε $x \in I$, $x < \xi$, οπότε ισχύει $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \leq \mu$ για κάθε x κοντά στον ξ από αριστερά του και, επομένως, $f'_-(\xi) = \lim_{x\to\xi-} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \leq \mu$.

Τώρα θα δούμε το αντίστροφο. Έστω ότι ο ξ είναι εσωτερικό σημείο του I και έστω $f'_-(\xi) \leq \mu \leq f'_+(\xi)$. Σύμφωνα με την πρόταση 5.11, ισχύει $\mu \leq f'_+(\xi) \leq \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ για κάθε $x \in I$, $x > \xi$ και $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \leq f'_-(\xi) \leq \mu$ για κάθε $x \in I$, $x < \xi$. Άρα ισχύει $f(x) - f(\xi) \geq \mu(x-\xi)$ για κάθε $x \in I$, $x \neq \xi$.

Άρα η ευθεία με εξίσωση $y = \mu(x-\xi) + f(\xi)$ είναι ευθεία στήριξης από κάτω του γραφήματος της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$.
Αν η f είναι γνησίως κυρτή στο I, τότε οι ανισότητες αυτές ισχύουν ως γνήσιες ανισότητες και η ευθεία είναι γνήσια ευθεία στήριξης.
Έστω ότι ο ξ είναι αριστερό άκρο του I και έστω $\mu \leq f'_+(\xi)$. Σύμφωνα με την πρόταση 5.11, ισχύει $\mu \leq f'_+(\xi) \leq \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ για κάθε $x \in I$, $x > \xi$. Άρα η ευθεία με εξίσωση $y = \mu(x-\xi) + f(\xi)$ είναι ευθεία στήριξης από κάτω του γραφήματος της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$. Αν η f είναι γνησίως κυρτή στο I, τότε οι ανισότητες ισχύουν ως γνήσιες ανισότητες και η ευθεία είναι γνήσια ευθεία στήριξης.
Η απόδειξη είναι ίδια στην περίπτωση που ο ξ είναι δεξιό άκρο του I.

[β] Ομοίως.

[γ] Έστω ότι η f είναι κυρτή ή κοίλη στο I και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό σημείο ξ του I, οπότε είναι $f'_-(\xi) = f'_+(\xi) = f'(\xi)$. Από τα προηγούμενα συνεπάγεται ότι η ευθεία με εξίσωση $y = \mu(x-\xi) + f(\xi)$ είναι ευθεία στήριξης από κάτω ή από πάνω, αντιστοίχως, του γραφήματος της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ αν και μόνο αν $\mu = f'(\xi)$. □

Παράδειγμα 5.5.19. Η συνάρτηση $f(x) = |x|$ είναι κυρτή. Είναι $f'_-(0) = -1$ και $f'_+(0) = 1$. Μια ευθεία είναι ευθεία στήριξης από κάτω του γραφήματος της f στο σημείο $(0,0)$ αν και μόνο αν έχει εξίσωση $y = \mu x$, όπου $-1 \leq \mu \leq 1$. Επίσης, είναι $f'(2) = 1$, οπότε η μοναδική ευθεία στήριξης από κάτω του γραφήματος της f στο σημείο $(2,2)$ είναι η ευθεία με εξίσωση $y = (x-2)+2 = x$. Τέλος, είναι $f'(-3) = -1$, οπότε η μοναδική ευθεία στήριξης από κάτω του γραφήματος της f στο σημείο $(-3,3)$ είναι η ευθεία με εξίσωση $y = -(x+3)+3 = -x$.

Παράδειγμα 5.5.20. Η x^2 είναι γνησίως κυρτή στο $\mathbb{R}$. Άρα, για κάθε ξ, η ευθεία με εξίσωση $y = 2\xi(x-\xi)+\xi^2$ είναι η μοναδική ευθεία στήριξης από κάτω του γραφήματος της x^2 στο σημείο (ξ, ξ^2). Μάλιστα, η ευθεία αυτή είναι γνήσια ευθεία στήριξης. Δηλαδή, ισχύει $x^2 > 2\xi(x-\xi)+\xi^2$ για κάθε $x \neq \xi$. Αυτό είναι απλό να επιβεβαιωθεί με αλγεβρικό τρόπο.

Παράδειγμα 5.5.21. Η συνάρτηση e^x είναι γνησίως κυρτή στο $\mathbb{R}$. Επομένως, το γράφημα της e^x έχει μοναδική ευθεία στήριξής του από κάτω στο σημείο $(0, e^0) = (0,1)$ την ευθεία με εξίσωση $y = x+1$. Μάλιστα, η ευθεία αυτή είναι γνήσια ευθεία στήριξης. Δηλαδή, ισχύει $e^x > x+1$ για κάθε $x \neq 0$.

Η πρόταση 5.17 δίνει έναν ακόμη γεωμετρικό χαρακτηρισμό των εννοιών της κυρτότητας και της κοιλότητας βάσει της έννοιας της ευθείας στήριξης.

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.17. *Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$.*

[α] *Η f είναι (γνησίως) κυρτή στο I αν και μόνο αν για κάθε ξ στο εσωτερικό του I υπάρχει (γνήσια) ευθεία στήριξης από κάτω του γραφήματος της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$.*

[β] *Η f είναι (γνησίως) κοίλη στο I αν και μόνο αν για κάθε ξ στο εσωτερικό του I υπάρχει (γνήσια) ευθεία στήριξης από πάνω του γραφήματος της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$.*

Απόδειξη. [α] Αν η f είναι (γνησίως) κυρτή στο I, τότε από την πρόταση 5.16 συνεπάγεται ότι για κάθε ξ στο εσωτερικό του I υπάρχει (γνήσια) ευθεία στήριξης από κάτω του γραφήματος της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$.
Αντιστρόφως, έστω ότι για κάθε ξ στο εσωτερικό του I υπάρχει ευθεία στήριξης από κάτω του γραφήματος της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$. Έστω $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ και έστω $\xi \in (x_1, x_2)$. Τότε ο ξ είναι εσωτερικό σημείο του I, οπότε υπάρχει ευθεία στήριξης από κάτω του γραφήματος της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ και έστω $y = \mu(x-\xi) + f(\xi)$ η εξίσωση μιας τέτοιας ευθείας. Τότε είναι $f(x_1) \geq \mu(x_1-\xi) + f(\xi)$ και $f(x_2) \geq \mu(x_2-\xi) + f(\xi)$.
Συνεπάγεται $\frac{f(\xi)-f(x_1)}{\xi-x_1} \leq \mu \leq \frac{f(x_2)-f(\xi)}{x_2-\xi}$ και, επομένως, $f(\xi) \leq \frac{x_2-\xi}{x_2-x_1} f(x_1) + \frac{\xi-x_1}{x_2-x_1} f(x_2)$.
Άρα η f είναι κυρτή στο I. Αν η ευθεία είναι γνήσια ευθεία στήριξης, τότε οι προηγούμενες ανισότητες ισχύουν ως γνήσιες ανισότητες, οπότε η f είναι γνησίως κυρτή στο I.
[β] Ομοίως. □

5.5.5 Ανισότητες.

Θα δούμε, τέλος, κάποιες εφαρμογές της δεύτερης παραγώγου σε *αποδείξεις ανισοτήτων*. Οι εφαρμογές αυτές είναι, ουσιαστικά, απλές εφαρμογές των εννοιών της κυρτότητας και της κοιλότητας.

Παράδειγμα 5.5.22. Αν $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, η συνάρτηση x^n είναι γνησίως κυρτή στο $[0, +\infty)$, οπότε ισχύει

$$((1-t)x_1 + tx_2)^n < (1-t){x_1}^n + t{x_2}^n \qquad \text{για } \ 0 \leq x_1 < x_2, \ \ 0 < t < 1.$$

Ειδικότερα, με $t = \frac{1}{2}$, έχουμε την ανισότητα $(\frac{x_1+x_2}{2})^n < \frac{{x_1}^n + {x_2}^n}{2}$ για $0 \leq x_1 < x_2$.

Παράδειγμα 5.5.23. Αν $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, η συνάρτηση $x^{1/n}$ είναι γνησίως κοίλη στο $[0, +\infty)$. Άρα ισχύει

$$(1-t){x_1}^{1/n} + t{x_2}^{1/n} < ((1-t)x_1 + tx_2)^{1/n} \qquad \text{για } \ 0 \leq x_1 < x_2, \ \ 0 < t < 1.$$

Ειδικότερα, με $t = \frac{1}{2}$, έχουμε την ανισότητα $\frac{{x_1}^{1/n} + {x_2}^{1/n}}{2} < (\frac{x_1+x_2}{2})^{1/n}$ για $0 \leq x_1 < x_2$. Παρατηρήστε ότι οι ανισότητες αυτού του παραδείγματος είναι ισοδύναμες με τις ανισότητες του προηγούμενου παραδείγματος. Παρατηρήστε, επίσης, ότι όλες οι ανισότητες μετατρέπονται σε ισότητες όταν $x_1 = x_2$.

Παράδειγμα 5.5.24. Η e^x είναι γνησίως κυρτή στο $\mathbb{R}$. Άρα

$$e^{(1-t)x_1 + tx_2} < (1-t)e^{x_1} + te^{x_2} \qquad \text{για } \ x_1 < x_2, \ \ 0 < t < 1.$$

Ειδικότερα, με $t = \frac{1}{2}$ η ανισότητα γίνεται $e^{\frac{x_1+x_2}{2}} < \frac{e^{x_1} + e^{x_2}}{2}$ για $x_1 < x_2$.

Ασκήσεις.

5.5.1. Έστω η $f(x) = \begin{cases} x^k, & \text{αν } x \geq 0 \\ -x^k, & \text{αν } x \leq 0 \end{cases}$ όπου $k \in \mathbb{N}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, βρείτε την $f^{(n)}$.

5.5.2. Βρείτε τις n-οστές παραγώγους των $\frac{x+2}{x^2-1}$, $\frac{x+1}{(x-1)^2}$, $\frac{x^3}{x^2-1}$, $\frac{1}{x^2+1}$, $\sin(5x)\sin(7x)$ για κάθε n.

5.5.3. Αποδείξτε ότι $\frac{d^n}{dx^n}(\frac{\log x}{x}) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}\big(\log x - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\big)$ για κάθε n.

5.5.4. Αποδείξτε ότι $\frac{d^n}{dx^n}(\frac{e^x}{x}) = \frac{(-1)^n n! e^x}{x^{n+1}} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} x^k$ για κάθε n.

5.5.5. Αποδείξτε ότι $\frac{d^n \tan x}{dx^n} = P_n(\tan x)$ για κάθε n, όπου P_n είναι πολυώνυμο βαθμού $n+1$.

5.5.6. Θεωρήστε τις συναρτήσεις $\frac{x^3}{(x+1)^2}$, $x^2(x-1)^2$, $\frac{x}{x^2+1}$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$, e^{-x^2}, $e^{1/x}$, e^{-1/x^2}, $\frac{e^{1/x} - e^{-1/x}}{e^{1/x} + e^{-1/x}}$, $\frac{1}{\log x}$, $\sin x + \cos x$ και $e^{-x}\sin x$. Βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας, τα διαστήματα κυρτότητας ή κοιλότητας, τα σημεία τοπικού ακροτάτου και τα σημεία καμπής τους.

5.5.7. Αποδείξτε ότι ο 0 είναι σημείο καμπής της $f(x) = \begin{cases} x|x| + x^2\sin(1/x), & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$

5.5.8. Έστω $n \in \mathbb{N}$, διάστημα I, $f : I \to \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι ισχύει $f^{(n)}(x) = 0$ για κάθε $x \in I$ αν και μόνο αν η f είναι πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού $\leq n-1$.

5.5.9. Έστω $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ ώστε η $f^{(n-1)}$ να είναι συνεχής στο I και η $f^{(n)}$ να υπάρχει στο εσωτερικό του I. Αν η f έχει $n+1$ διαφορετικές ρίζες στο I, αποδείξτε ότι η $f^{(n)}$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο εσωτερικό του I.

5.5.10. Έστω ότι η $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a,b]$ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο (a,b). Αν $f(a)=f(b)=0$ και $f(c)>0$ για κάποιον $c\in(a,b)$, αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi\in(a,b)$ ώστε $f''(\xi)<0$.

5.5.11. Έστω $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ και έστω ότι ισχύει $f(x)f''(x)\geq 0$ για κάθε $x\in(a,b)$. Αν στο (a,b) περιέχονται δύο διαφορετικές λύσεις της εξίσωσης $f(x)f'(x)=0$, αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή ανάμεσα στις δύο αυτές λύσεις.

5.5.12. Έστω $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $[-1,1]$, τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ και $f(-1)=f(0)=0$, $f(1)=1$, $f'(0)=0$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi\in(-1,1)$ ώστε $f^{(3)}(\xi)=3$.

5.5.13. Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b]$ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο (a,b). Αν το ευθύγραμμο τμήμα το οποίο έχει άκρα τα σημεία $(a,f(a))$ και $(b,f(b))$ τέμνει το γράφημα της f σε κάποιο σημείο διαφορετικό από αυτά τα δύο σημεία, αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi\in(a,b)$ ώστε $f''(\xi)=0$.

5.5.14. Έστω ανοικτό διάστημα I και $f:I\to\mathbb{R}$ τρεις φορές παραγωγίσιμη στο I. Αν ισχύει $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in I$ και ισχύει $f(x)=0$ για τουλάχιστον δύο διαφορετικές τιμές του $x\in I$, αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi\in I$ ώστε $f'''(\xi)=0$.

5.5.15. Δείτε την άσκηση 5.3.11[γ]. Αν $a<b$ και $n\in\mathbb{N}$, θεωρήστε την πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)=(x-a)^n(x-b)^n$. Αποδείξτε ότι η $P^{(n)}$ είναι πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού n, ότι έχει ακριβώς n διαφορετικές ρίζες και ότι όλες αυτές οι ρίζες ανήκουν στο (a,b).

5.5.16. [25] Έστω διαστήματα I, J και $f:I\to J$ και $f^{-1}:J\to I$, $\xi\in I$ και $\eta=f(\xi)\in J$.
Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στον ξ και $f'(\xi)\neq 0$, αποδείξτε ότι η f^{-1} είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στον η και $(f^{-1})''(\eta)=-f''(\xi)/(f'(\xi))^3$.
Γενικότερα, αν η f είναι n φορές παραγωγίσιμη στον ξ και $f'(\xi)\neq 0$, αποδείξτε ότι η f^{-1} είναι n φορές παραγωγίσιμη στον η.

5.5.17. [α] Έστω η πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)=a_0+a_1(x-\xi)+\cdots+a_n(x-\xi)^n$. Αποδείξτε ότι $P^{(k)}(\xi)=k!a_k$ για κάθε $k\in\mathbb{Z}$ με $0\leq k\leq n$ και $P^{(k)}(\xi)=0$ για κάθε $k\in\mathbb{Z}$ με $k\geq n+1$.
[β] Δίνονται αριθμοί $y_0,y_1,\ldots,y_n$. Βρείτε πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)$ βαθμού $\leq n$ ώστε $P^{(k)}(\xi)=y_k$ για κάθε $k\in\mathbb{Z}$ με $0\leq k\leq n$. Πόσες τέτοιες πολυωνυμικές συναρτήσεις υπάρχουν;
[γ] Αποδείξτε ότι ισχύει $P(x)=P(\xi)+\frac{P'(\xi)}{1!}(x-\xi)+\cdots+\frac{P^{(n)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n$ για κάθε πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)$ βαθμού n και για κάθε ξ, x.[26]

5.5.18. [27] [α] Έστω n φορές παραγωγίσιμες συναρτήσεις $g:(a,\xi]\to\mathbb{R}$ και $h:[\xi,b)\to\mathbb{R}$ και έστω $g^{(k)}(\xi)=h^{(k)}(\xi)$ για κάθε $k\in\mathbb{Z}$, $0\leq k\leq n$. Αποδείξτε ότι η $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\begin{cases}g(x), & \text{αν } a<x\leq\xi\\ h(x), & \text{αν } \xi\leq x<b\end{cases}$ είναι n φορές παραγωγίσιμη στο (a,b) και ότι $f^{(k)}(\xi)=g^{(k)}(\xi)=h^{(k)}(\xi)$ για κάθε $k\in\mathbb{Z}$, $0\leq k\leq n$.
[β] Έστω n φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Βάσει της άσκησης 5.5.17, βρείτε πολυωνυμικές συναρτήσεις $P(x)$ και $Q(x)$ ώστε η συνάρτηση $g(x)=\begin{cases}P(x), & \text{αν } x\leq a\\ f(x), & \text{αν } a\leq x\leq b\\ Q(x), & \text{αν } b\leq x\end{cases}$ να είναι n φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.
[γ] Έστω $b<c$ και n φορές παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f:(a,b]\to\mathbb{R}$ και $g:[c,d)\to\mathbb{R}$. Βρείτε

[25] Μια επέκταση του κανόνα αντίστροφης συνάρτησης.
[26] Αυτόν τον τύπο θα τόν ξαναποδείξουμε στο παράδειγμα 5.7.1.
[27] "Συγκόληση" συναρτήσεων σε διαδοχικά διαστήματα. Δείτε την άσκηση 5.1.4.

πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)$ ώστε η συνάρτηση $h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{αν } a < x \leq b \\ P(x), & \text{αν } b \leq x \leq c \\ g(x), & \text{αν } c \leq x < d \end{cases}$ να είναι n φορές παραγωγίσιμη στο (a, d). Υπάρχει κάποια εκτίμηση για τον βαθμό της $P(x)$;

5.5.19. [α] Έστω $x_1, \ldots, x_n$ διαφορετικοί ανά δύο και $y_1, \ldots, y_n$. Θεωρήστε για κάθε $k = 1, \ldots, n$ το βαθμού $n-1$ πολυώνυμο $Q_k(x) = \prod_{1 \leq m \leq n, m \neq k} \frac{x - x_m}{x_k - x_m}$, όπου στο γινόμενο ο m διατρέχει τους φυσικούς από τον 1 στον n παραλείποντας τον k.
Ποιές είναι οι ρίζες του $Q_k(x)$;
Αποδείξτε ότι το $Q(x) = y_1 Q_1(x) + \cdots + y_n Q_n(x)$ είναι το μοναδικό πολυώνυμο βαθμού $\leq n-1$ με την ιδιότητα: $Q(x_1) = y_1, \ldots, Q(x_n) = y_n$.
[β] Έστω $x_1, \ldots, x_n$ στο διάστημα I διαφορετικοί ανά δύο και συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$. Αν $Q_1(x), \ldots, Q_n(x)$ είναι τα πολυώνυμα που ορίστηκαν στο [α], σχηματίζουμε το πολυώνυμο[28] $Q(x) = f(x_1)Q_1(x) + \cdots + f(x_n)Q_n(x)$.
Αν η $f^{(n-1)}$ είναι συνεχής στο I και η $f^{(n)}$ υπάρχει στο εσωτερικό του I, αποδείξτε ότι για κάθε $x \in I$ υπάρχει ξ στο εσωτερικό του I ώστε $f(x) - Q(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_1) \cdots (x - x_n)$.

5.5.20. Αποδείξτε τον **τύπο του Leibniz**,

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \qquad \text{αν } n \in \mathbb{N}.$$

5.5.21. Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^{-1/x}$.
Αποδείξτε με την αρχή της επαγωγής ότι $f^{(n)}(x) = x^{-2n} P_n(x) e^{-1/x}$ για κάθε $x > 0$, όπου $P_n(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού $n-1$. Για παράδειγμα: $P_1(x) = 1$, $P_2(x) = 1-2x$, $P_3(x) = 1-6x+6x^2$.
Παραγωγίστε την $f^{(n)}(x) = x^{-2n} P_n(x) e^{-1/x}$ και αποδείξτε ότι ισχύει ο αναδρομικός τύπος $P_{n+1}(x) = x^2 {P_n}'(x) + (1 - 2nx) P_n(x)$ για κάθε $x > 0$.
Αποδείξτε ότι $x^2 f'(x) = f(x)$ για κάθε $x > 0$ και, παραγωγίζοντας n φορές με τον τύπο του Leibniz της άσκησης 5.5.20, αποδείξτε ότι $P_{n+2}(x) = (1 - 2(n+1)x) P_{n+1}(x) - n(n+1) x^2 P_n(x)$ για κάθε $x > 0$.
Αποδείξτε ότι ο συντελεστής του x^{n-1} στο $P_n(x)$ είναι ο $(-1)^{n-1} n!$.
Αποδείξτε ότι $x^2 {P_n}''(x) - (2nx - 2x - 1) {P_n}'(x) + n(n-1) P_n(x) = 0$ για κάθε $x > 0$.

5.5.22. [29] Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^{-x^2}$.
Αποδείξτε με την αρχή της επαγωγής ότι $f^{(n)}(x) = (-1)^n H_n(x) e^{-x^2}$ για κάθε x, όπου $H_n(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού n. Για παράδειγμα: $H_1(x) = 2x$, $H_2(x) = 4x^2 - 2$, $H_3(x) = 8x^3 - 12x$.
Αποδείξτε ότι $H_{n+1}(x) = -{H_n}'(x) + 2x H_n(x)$ για κάθε x.
Παραγωγίστε n φορές τη σχέση $f'(x) = -2x f(x)$ με τον τύπο του Leibniz της άσκησης 5.5.20 και αποδείξτε ότι $H_{n+2}(x) = 2x H_{n+1}(x) - 2(n+1) H_n(x)$ για κάθε x.
Αποδείξτε ότι ${H_{n+1}}'(x) = 2(n+1) H_n(x)$ για κάθε x.
Αποδείξτε ότι ο συντελεστής του x^n στο $H_n(x)$ είναι ο 2^n.
Αποδείξτε ότι ${H_n}''(x) - 2x {H_n}'(x) + 2n H_n(x) = 0$ για κάθε x.

5.5.23. Έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο (a, b) και $a < \xi < b$. Αν ισχύει $f'(x) \geq f'(\xi)$ για κάθε $x \in (a, b)$ ή $f'(x) \leq f'(\xi)$ για κάθε $x \in (a, b)$, αποδείξτε ότι ο ξ είναι σημείο καμπής της f.

5.5.24. Αποδείξτε ότι η f είναι κυρτή σε κάποιο διάστημα αν και μόνο αν η $-f$ είναι κοίλη στο ίδιο διάστημα.

[28] Το $Q(x)$ ονομάζεται **πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange** για την f και για τα σημεία $x_1, \ldots, x_n$.

[29] Οι συναρτήσεις $H_n(x)$ που περιγράφονται σ' αυτήν την άσκηση ονομάζονται **πολυώνυμα Hermite** και οι $\psi_n(x) = (2^n n! \sqrt{\pi})^{-1/2} H_n(x) e^{-x^2/2}$ ονομάζονται **συναρτήσεις Hermite**. Τα πολυώνυμα και οι συναρτήσεις Hermite έχουν κεντρικό ρόλο στην Ανάλυση Fourier. Θα τα ξανασυναντήσουμε στην άσκηση 12.4.14.

Αποδείξτε ότι, αν η f είναι κυρτή και κοίλη σε κάποιο διάστημα, τότε είναι αφφινική στο διάστημα αυτό.

5.5.25. [30] Έστω $\lambda, \mu \geq 0$, διάστημα I και $f, g : I \to \mathbb{R}$ κυρτές στο I. Αποδείξτε ότι οι $\lambda f + \mu g : I \to \mathbb{R}$ και $\max\{f, g\} : I \to \mathbb{R}$ είναι κυρτές στο I.

Έστω διαστήματα I, J και $f : I \to J$ κυρτή στο I και $g : J \to \mathbb{R}$ κυρτή στο J. Αν η g είναι αυξουσα στο J, αποδείξτε ότι η $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ είναι κυρτή το I.

Έστω διάστημα I και $\mathcal{F}$ ένα σύνολο, κάθε στοιχείο του οποίου είναι συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ κυρτή στο I. Για κάθε $x \in I$ ορίζουμε $F(x) = \sup\{f(x) \,|\, f \in \mathcal{F}\}$. Αν υποθέσουμε ότι $F(x) \in \mathbb{R}$ για κάθε $x \in I$, αποδείξτε ότι η $F : I \to \mathbb{R}$ είναι κυρτή στο I.

Πώς θα διαμορφωθούν τα παραπάνω για κοίλες συναρτήσεις;

5.5.26. [31] Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$.

Αποδείξτε ότι η f είναι κυρτή στο I αν και μόνο αν για κάθε $\xi \in I$ η συνάρτηση $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ είναι αύξουσα συνάρτηση του x στο $I \setminus \{\xi\}$.

Αποδείξτε ότι η f είναι κυρτή στο I αν και μόνο αν $\frac{f(b')-f(a')}{b'-a'} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ για κάθε $a, a', b, b' \in I$, $a' \leq a$, $b' \leq b$ και, φυσικά, $a \neq b$ και $a' \neq b'$.

5.5.27. Έστω $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ με $a < b$ και $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ κυρτή στο (a, b). Αποδείξτε ότι υπάρχουν οι εξής περιπτώσεις. (i) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο (a, b), (ii) η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (a, b), (iii) υπάρχει $c \in (a, b)$ ώστε η f να είναι σταθερή στο $(a, c]$ και γνησίως αύξουσα στο $[c, b)$, (iv) υπάρχει $c \in (a, b)$ ώστε η f να είναι γνησίως φθίνουσα στο $(a, c]$ και σταθερή στο $[c, b)$ και (v) υπάρχουν $c, d \in (a, b)$ με $c \leq d$ ώστε η f να είναι γνησίως φθίνουσα στο $(a, c]$, σταθερή στο $[c, d]$ και γνησίως αύξουσα στο $[d, b)$.

5.5.28. Έστω $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ με $a < b$ και $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ κυρτή στο (a, b).

Αποδείξτε ότι υπάρχουν τα $\lim_{x\to b-} f(x)$, $\lim_{x\to a+} f(x)$.

Αν, επιπλέον, $b \in \mathbb{R}$ και η f είναι ορισμένη στο b, αποδείξτε ότι η f είναι κυρτή στο $(a, b]$ αν και μόνο αν $\lim_{x\to b-} f(x) \leq f(b)$.

Αν, επιπλέον, $a \in \mathbb{R}$ και η f είναι ορισμένη στο a, αποδείξτε ότι η f είναι κυρτή στο $[a, b)$ αν και μόνο αν $\lim_{x\to a+} f(x) \leq f(a)$.

5.5.29. Έστω f κυρτή στο διάστημα I και $x_1, x_2 \in I$ με $x_1 < x_2$.

Αν είναι $f(x_0) = \frac{x_2-x_0}{x_2-x_1} f(x_1) + \frac{x_0-x_1}{x_2-x_1} f(x_2)$ για κάποιον $x_0 \in (x_1, x_2)$, αποδείξτε ότι ισχύει $f(x) = \frac{x_2-x}{x_2-x_1} f(x_1) + \frac{x-x_1}{x_2-x_1} f(x_2)$ για κάθε $x \in (x_1, x_2)$.

5.5.30. Έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο (a, b). Αν για κάθε $x_1, x_2 \in (a, b)$ με $x_1 < x_2$ υπάρχει ακριβώς ένας $\xi \in (x_1, x_2)$ ώστε $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(\xi)$, αποδείξτε ότι η f είναι είτε γνησίως κυρτή είτε γνησίως κοίλη στο (a, b). Ισχύει το αντίστροφο;

5.5.31. Έστω $f : (0, b) \to \mathbb{R}$ κυρτή στο $(0, b)$. Αν $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, αποδείξτε ότι η $\frac{f(x)}{x}$ είναι αύξουσα στο $(0, b)$. Αν $\lim_{x\to 0} f(x) < 0$, αποδείξτε ότι η $\frac{f(x)}{x}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, b)$.

5.5.32. [32] Αν η $f : I \to \mathbb{R}$ είναι *συνεχής* στο διάστημα I και αν για κάθε $x_1, x_2 \in I$ με $x_1 < x_2$ υπάρχει $t \in (0, 1)$ ώστε $f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$, αποδείξτε ότι η f είναι κυρτή στο I.

Μια ενδιαφέρουσα ειδική περίπτωση: αν η $f : I \to \mathbb{R}$ είναι *συνεχής* στο διάστημα I και αν για κάθε $x_1, x_2 \in I$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(\frac{x_1+x_2}{2}) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, τότε η f είναι κυρτή στο I.

[30] Διάφορες “πράξεις” στο σύνολο των κυρτών συναρτήσεων.

[31] Δύο χαρακτηρισμοί της κυρτότητας από τις κλίσεις των χορδών του γραφήματος της συνάρτησης: *όταν η χορδή κινείται προς τα δεξιά, η κλίση της αυξάνεται.*

[32] Μια παραλλαγή του ορισμού της κυρτότητας για συνεχείς συναρτήσεις.

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \leq 0 \\ 0, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$ Αποδείξτε ότι η f ικανοποιεί τη δεύτερη υπόθεση παραπάνω αλλά ότι δεν είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$. Είναι η f συνεχής στο $\mathbb{R}$;
Μπορείτε να βρείτε συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f(\frac{x_1+x_2}{2}) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ και η f να μην είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$;

5.5.33. [α] Αποδείξτε ότι, αν η f είναι κυρτή και άνω φραγμένη στο $\mathbb{R}$, τότε είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.
[β] Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ κυρτή στο I. Αποδείξτε ότι, αν κάποιο εσωτερικό σημείο του I είναι σημείο μεγίστου της f, τότε η f είναι σταθερή στο I.

5.5.34. Έστω $a < 0$ ή $a > 1$.
Αποδείξτε ότι $((1-t)x_1 + tx_2)^a < (1-t){x_1}^a + t{x_2}^a$ για $0 < x_1 < x_2$ και $0 < t < 1$.
Αποδείξτε ότι $x^a > a\xi^{a-1}(x-\xi) + \xi^a$ για $x, \xi > 0$ και $x \neq \xi$.
Αποδείξτε ότι οι ανισότητες αυτές αντιστρέφονται αν $0 < a < 1$.

5.5.35. Έστω $a > 0$.
Αποδείξτε ότι $a^{(1-t)x_1+tx_2} < (1-t)a^{x_1} + ta^{x_2}$ για $x_1 < x_2$ και $0 < t < 1$.
Αποδείξτε ότι $a^x > a^\xi \log a\,(x-\xi) + a^\xi$ για $x \neq \xi$.

5.5.36. Αποδείξτε ότι $\log\big((1-t)x_1 + tx_2\big) > (1-t)\log x_1 + t\log x_2$ για $0 < x_1 < x_2$ και $0 < t < 1$.
Αποδείξτε ότι $\log x < \frac{1}{\xi}(x-\xi) + \log\xi$ για $x, \xi > 0$ και $x \neq \xi$.

5.5.37. Αποδείξτε ότι $((1-t)x_1 + tx_2)\log((1-t)x_1 + tx_2) < (1-t)x_1\log x_1 + tx_2\log x_2$ για $0 < x_1 < x_2$ και $0 < t < 1$.

5.5.38. Αποδείξτε την ανισότητα του Young στην άσκηση 5.4.21 με δύο τρόπους: χρησιμοποιώντας το ότι η $\log x$ είναι γνησίως κοίλη στο $(0, +\infty)$ και το ότι η $x^{1/p}$ είναι γνησίως κοίλη στο $[0, +\infty)$ όταν $p > 1$.

5.5.39. Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ κυρτή στο διάστημα I. Αν $x_1, \dots, x_n \in I$ και $w_1, \dots, w_n > 0$ και $w_1 + \dots + w_n = 1$, αποδείξτε την **ανισότητα του Jensen**,[33]

$$f(x_1w_1 + \dots + x_nw_n) \leq f(x_1)w_1 + \dots + f(x_n)w_n.$$

Παρατηρήστε ότι, αν $n = 2$, η ανισότητα Jensen είναι ακριβώς ίδια με την ανισότητα βάσει της οποίας ορίζεται η έννοια της κυρτότητας.
Αποδείξτε ότι, αν η f είναι γνησίως κυρτή στο I, τότε η ανισότητα Jensen ισχύει ως ισότητα αν και μόνο αν $x_1 = \ldots = x_n$.
Πώς διατυπώνονται τα προηγούμενα αν η f είναι (γνησίως) κοίλη στο I;
Έστω $a_1, \dots, a_n > 0$. Χρησιμοποιώντας το ότι η $x^{1/q}$ είναι γνησίως κοίλη στο $[0, +\infty)$ όταν $q > 1$ και θεωρώντας $x_1 = \frac{{b_1}^q}{{a_1}^p}, \dots, x_n = \frac{{b_n}^q}{{a_n}^p}$ και $w_1 = \frac{{a_1}^p}{A^p}, \dots, w_n = \frac{{a_n}^p}{A^p}$, όπου $A = ({a_1}^p + \dots + {a_n}^p)^{1/p}$, αποδείξτε την ανισότητα του Hölder στην άσκηση 5.4.22[α]. Μελετήστε την περίπτωση της ισότητας.
Αποδείξτε την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου στην άσκηση 5.4.20 χρησιμοποιώντας το ότι η $\log x$ είναι γνησίως κοίλη στο $(0, +\infty)$. Μελετήστε την περίπτωση της ισότητας.
Αποδείξτε την ανισότητα στην άσκηση 5.4.23 χρησιμοποιώντας το ότι η $\log x$ είναι γνησίως κοίλη στο $(0, +\infty)$.
Αν $0 < a_1, \dots, a_n < \pi$ και $a = \frac{a_1+\dots+a_n}{n}$, αποδείξτε ότι $\sin a_1 \cdots \sin a_n \leq (\sin a)^n$.
Αν $0 < a_1, \dots, a_n < \pi$ και $a = \frac{a_1+\dots+a_n}{n}$, αποδείξτε ότι $\frac{\sin a_1}{a_1} \cdots \frac{\sin a_n}{a_n} \leq (\frac{\sin a}{a})^n$.

[33] Μια εξαιρετικά σημαντική ανισότητα για κυρτές και κοίλες συναρτήσεις. Η ανισότητα αυτή θα γενικευτεί σε πολύ μεγάλο βαθμό. Δείτε την άσκηση 6.4.19.

Αν $a_1, \ldots, a_n > 0$ και $a = \frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$, αποδείξτε ότι $a^{na} \leq {a_1}^{a_1} \cdots {a_n}^{a_n}$.
Και στις τρεις τελευταίες ανισότητες μελετήστε την περίπτωση της ισότητας.

5.5.40. Αν η $f : I \to \mathbb{R}$ είναι κυρτή ή κοίλη και παραγωγίσιμη στο διάστημα I, αποδείξτε ότι η f' είναι συνεχής στο I.[34]

5.5.41. Αν η $f : I \to \mathbb{R}$ είναι κυρτή ή κοίλη στο διάστημα I, αποδείξτε ότι το σύνολο των σημείων στα οποία η f δεν είναι παραγωγίσιμη είναι αριθμήσιμο.

5.5.42. Έστω τρία σημεία (x, y), (x', y') και (x'', y'') του xy-επιπέδου που δε βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία. Αποδείξτε ότι η ακτίνα R του κύκλου που διέρχεται από τα τρία αυτά σημεία είναι ίση με $\frac{((x'-x)^2+(y'-y)^2)^{1/2}((x''-x)^2+(y''-y)^2)^{1/2}((x'-x'')^2+(y'-y'')^2)^{1/2}}{2|(x'-x)(y''-y)-(x''-x)(y'-y)|}$.
Έστω καμπύλη στο xy-επίπεδο με παραμετρικές εξισώσεις $x = x(t)$ και $y = y(t)$, όπου η παράμετρος t διατρέχει κάποιο ανοικτό διάστημα I. Για κάθε $t \in I$ θεωρούμε πολύ μικρό $h > 0$ και τα σημεία $(x(t), y(t))$, $(x(t+h), y(t+h))$, $(x(t-h), y(t-h))$ στην τροχιά της καμπύλης και συμβολίζουμε $R_{t,h}$ την ακτίνα του κύκλου που διέρχεται από τα τρία αυτά σημεία. Τότε το όριο $R_t = \lim_{h\to 0+} R_{t,h}$, αν υπάρχει, ονομάζεται **ακτίνα καμπυλότητας** της τροχιάς της καμπύλης στο σημείο $(x(t), y(t))$.
Με τις κατάλληλες υποθέσεις, αποδείξτε ότι $R_t = \frac{((x'(t))^2+(y'(t))^2)^{3/2}}{|x''(t)y'(t)-x'(t)y''(t)|}$.
Υπάρχουν δύο κύκλοι με ακτίνα R_t, οι οποίοι διέρχονται από το σημείο $(x(t), y(t))$ και έχουν στο σημείο αυτό κοινή εφαπτόμενη ευθεία με την τροχιά της καμπύλης. Ο ένας από αυτούς ονομάζεται **εφαπτόμενος κύκλος** στην τροχιά της καμπύλης στο σημείο $(x(t), y(t))$. Ποιός από τους δύο;
Βρείτε σε κάθε σημείο του την ακτίνα καμπυλότητας και τον εφαπτόμενο κύκλο του κύκλου με καρτεσιανή εξίσωση $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$. Τί παρατηρείτε; Ποιοί κύκλοι έχουν μεγάλη ακτίνα καμπυλότητας;
Βρείτε σε κάθε σημείο της την ακτίνα καμπυλότητας και τον εφαπτόμενο κύκλο της έλλειψης με καρτεσιανή εξίσωση $(\frac{x-x_0}{a})^2 + (\frac{y-y_0}{b})^2 = 1$. Σε ποιά σημεία είναι η ακτίνα καμπυλότητας μέγιστη; ελάχιστη;
Αποδείξτε ότι η ακτίνα καμπυλότητας του γραφήματος της $f : I \to \mathbb{R}$ στο σημείο $(x, f(x))$, όπου x είναι εσωτερικό σημείο του διαστήματος I, είναι ίση με $\frac{1}{|f''(x)|}(1 + (f'(x))^2)^{3/2}$.
Βρείτε σε κάθε σημείο της την ακτίνα καμπυλότητας και τον εφαπτόμενο κύκλο της παραβολής με εξίσωση $y = x^2$ καθώς και της υπερβολής με εξίσωση $y = \frac{1}{x}$.
Ποιά είναι η ακτίνα καμπυλότητας μιας ευθείας σε οποιοδήποτε σημείο της; Μπορούν να θεωρηθούν οι ευθείες ως “μεγάλοι κύκλοι”;

5.6 Υπολογισμός απροσδιόριστων μορφών.

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε εφαρμογές των παραγώγων στον υπολογισμό ορίων τα οποία καταλήγουν σε απροσδιόριστες μορφές $\frac{0}{0}$ και $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. Οι εφαρμογές αυτές εκφράζονται μέσω των δύο κανόνων του l’ Hopitâl.

Ο πρώτος κανόνας του l’ Hopitâl αναφέρεται στην απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$.

ΠΡΩΤΟΣ ΚΑΝΟΝΑΣ ΤΟΥ L’ HOPITÂL. *Έστω $f, g : (\xi, b) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες στο (ξ, b), έστω ότι ισχύει $g(x), g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\xi, b)$ και έστω $\lim_{x\to\xi+} f(x) = \lim_{x\to\xi+} g(x) = 0$. Αν υπάρχει το $\lim_{x\to\xi+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, τότε υπάρχει και το $\lim_{x\to\xi+} \frac{f(x)}{g(x)}$ και τα δύο αυτά όρια είναι ίσα:*

$$\lim_{x\to\xi+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \eta \quad \textit{συνεπάγεται} \quad \lim_{x\to\xi+} \frac{f(x)}{g(x)} = \eta.$$

Όλα τα προηγούμενα ισχύουν με τις προφανείς προσαρμογές και για κάθε άλλη περίπτωση ορίου: $x \to \xi-$, $x \to \xi$, $x \to +\infty$ και $x \to -\infty$.

[34]Δείτε και την άσκηση 5.3.23[γ].

Απόδειξη. Οι f, g αρχικά δεν θεωρούνται ορισμένες στον ξ, αλλά τώρα ορίζουμε $f(\xi) = g(\xi) = 0$.
Επειδή $\lim_{x\to\xi+} f(x) = \lim_{x\to\xi+} g(x) = 0$, οι f, g είναι, τώρα, συνεχείς στο $[\xi, b)$.
Έστω $\eta \in \mathbb{R}$ και

$$\lim_{x\to\xi+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \eta.$$

Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - \eta\right| < \epsilon \tag{5.11}$$

για κάθε $x \in (\xi, b)$ με $\xi < x < \xi + \delta$. Από το θεώρημα μέσης τιμής του Cauchy συνεπάγεται ότι για κάθε $x \in (\xi, b)$ υπάρχει $\zeta \in (\xi, x)$ ώστε

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(\xi)}{g(x)-g(\xi)} = \frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)}. \tag{5.12}$$

Τώρα, για κάθε $x \in (\xi, b)$ με $\xi < x < \xi + \delta$ συνεπάγεται $\zeta \in (\xi, b)$ και $\xi < \zeta < \xi + \delta$, οπότε από την (5.11) είναι

$$\left|\frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)} - \eta\right| < \epsilon$$

και, επομένως, από την (5.12),

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \eta\right| < \epsilon.$$

Άρα ισχύει $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \eta\right| < \epsilon$ για κάθε $x \in (\xi, b)$ με $\xi < x < \xi + \delta$, οπότε $\lim_{x\to\xi+} \frac{f(x)}{g(x)} = \eta$.
Η απόδειξη είναι παρόμοια και στις περιπτώσεις $\lim_{x\to\xi+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty$. Επίσης, η απόδειξη είναι παρόμοια και στις περιπτώσεις $x \to \xi-$ και $x \to \xi$.
Τώρα θα αναγάγουμε την περίπτωση $x \to +\infty$ στην περίπτωση $x \to 0+$.
Έστω $a > 0$, $f, g : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες στο $(a, +\infty)$ και έστω ότι ισχύει $g(x), g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, +\infty)$ και $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$. Έστω ότι το $\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ υπάρχει. Θα αποδείξουμε ότι και το $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ υπάρχει και ότι τα δύο όρια είναι ίσα.
Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής από x σε $t = \frac{1}{x}$, ορίζουμε $F, G : (0, \frac{1}{a}) \to \mathbb{R}$ με τύπους

$$F(t) = f(\tfrac{1}{t}) = f(x) \qquad \text{και} \qquad G(t) = g(\tfrac{1}{t}) = g(x)$$

για κάθε $t \in (0, \frac{1}{a})$.
Τότε ισχύει $G(t) = g(x) \neq 0$ και $G'(t) = -\frac{1}{t^2} g'(\frac{1}{t}) = -x^2 g'(x) \neq 0$ για κάθε $t \in (0, \frac{1}{a})$. Επίσης, το

$$\lim_{t\to 0+} \frac{F'(t)}{G'(t)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2 f'(x)}{-x^2 g'(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

υπάρχει. Άρα και το

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0+} \frac{F(t)}{G(t)}$$

υπάρχει και είναι ίσο με το προηγούμενο. Άρα $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.
Με τον ίδιο τρόπο, η περίπτωση $x \to -\infty$ ανάγεται στην περίπτωση $x \to 0-$. □

Παράδειγμα 5.6.1. Θα υπολογίσουμε το $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{e^x-1}$.
Ισχύει $e^x - 1 \neq 0$, $\frac{d(e^x-1)}{dx} = e^x \neq 0$ για κάθε $x \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$. Περιοριζόμαστε στο $(-1, 0) \cup (0, +\infty)$, διότι αυτό είναι το πεδίο ορισμού της $\frac{\log(1+x)}{e^x-1}$.
Επίσης, $\lim_{x\to 0} \log(1 + x) = \lim_{x\to 0}(e^x - 1) = 0$.
Υπολογίζουμε το όριο του λόγου των παραγώγων: $\lim_{x\to 0} \frac{1/(1+x)}{e^x} = 1$.
Επομένως, $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{e^x-1} = 1$.

Παράδειγμα 5.6.2. Ας δούμε και πάλι το $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$.
Εδώ έχουμε $x\neq 0$ και $\frac{dx}{dx}=1\neq 0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ και $\lim_{x\to 0}\sin x=\lim_{x\to 0}x=0$. Το όριο του λόγου των παραγώγων είναι $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1$ και, αμέσως, έχουμε ότι $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.
Τώρα, όμως, υπάρχουν δύο ενστάσεις.
Η πρώτη ένσταση είναι ότι για να αποδειχθεί ότι η $\sin x$ είναι παραγωγίσιμη και ότι η παράγωγός της είναι η $\cos x$ χρησιμοποιήθηκε ακριβώς το όριο $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. Επομένως, *δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον πρώτο κανόνα του l' Hopitâl για να βρούμε το όριο αυτό*. Η πρέπουσα γενικότερη αντιμετώπιση αυτού του θέματος είναι, πιστεύω, η εξής. Σε ένα θεωρητικό βιβλίο αυστηρά δομημένο με μια αυστηρή αλληλουχία ορισμών και προτάσεων / θεωρημάτων δεν επιτρέπονται "κυκλικά επιχειρήματα" όπως το εξεταζόμενο. Σε ένα "τυχαίο" περιβάλλον, όπου καλείται κάποιος να βρεί το εξεταζόμενο όριο, *μπορεί να χρησιμοποιήσει τον πρώτο κανόνα του l' Hopitâl*, επικαλούμενος το ότι δεν δεσμεύεται από συγκεκριμένο τρόπο απόδειξης της παραγωγισιμότητας της $\sin x$ και, μάλιστα, αφού στα διάφορα βιβλία υπάρχουν διάφοροι τρόποι απόδειξης της παραγωγισιμότητας της $\sin x$. Ακόμη περισσότερο, στο παρόν βιβλίο στο κεφάλαιο 10 θα δούμε, όπως είπαμε, έναν "αναλυτικό ορισμό" των τριγωνομετρικών συναρτήσεων και διαφορετική μέθοδο απόδειξης της παραγωγισιμότητας της $\sin x$.
Η δεύτερη ένσταση είναι, κατά τη γνώμη μου, πιο σοβαρή. Το όριο $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ μπορεί αμέσως να γραφτεί $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin 0}{x-0}$ και είναι ακριβώς ο ορισμός της παραγώγου της $\sin x$ στον 0. Άρα γράφουμε
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin 0}{x-0}=\frac{d\sin x}{dx}(0)=\cos 0=1.$$
Κατά τη γνώμη μου, το σωστό είναι να χρησιμοποιηθεί ο απλός ορισμός της παραγώγου αντί του "εξεζητημένου" εργαλείου που λέγεται πρώτος κανόνας του l' Hopitâl με την σχετικά περίπλοκη απόδειξη (και μάλιστα χρησιμοποιώντας την παράγωγο της συνάρτησης). Υπάρχει ο Χρυσός και, κυρίως, Ουσιαστικός Κανόνας με το όνομα "Οικονομία Μέσων".
Για τον ίδιο λόγο πρέπει να αποφεύγουμε να χρησιμοποιούμε τον πρώτο κανόνα του l' Hopitâl για τον υπολογισμό ορίων όπως
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x},\qquad \lim_{x\to 1}\frac{\log x}{x-1},\qquad \lim_{x\to 1}\frac{x^a-1}{x-1}.$$
Όλα αυτά τα όρια είναι οι ορισμοί αντίστοιχων απλών παραγώγων.[35]

O δεύτερος κανόνας του l' Hopitâl που ακολουθεί αναφέρεται στην απροσδιόριστη μορφή $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ ή, καλύτερα, σε μια γενίκευσή της.

ΔΕΥΤΕΡΟΣ ΚΑΝΟΝΑΣ ΤΟΥ L' HOPITÂL. *Έστω $f,g:(\xi,b)\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμες στο (ξ,b) και έστω ότι ισχύει $g(x),g'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(\xi,b)$. Έστω, επίσης, $\lim_{x\to\xi+}g(x)=+\infty$ ή $-\infty$. Αν υπάρχει το $\lim_{x\to\xi+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, τότε υπάρχει και το $\lim_{x\to\xi+}\frac{f(x)}{g(x)}$ και τα δύο αυτά όρια είναι ίσα:*
$$\lim_{x\to\xi+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\eta\quad\text{συνεπάγεται}\quad\lim_{x\to\xi+}\frac{f(x)}{g(x)}=\eta.$$
Όλα τα προηγούμενα ισχύουν με τις προφανείς προσαρμογές και για κάθε άλλη περίπτωση ορίου: $x\to\xi-$, $x\to\xi$, $x\to+\infty$ και $x\to-\infty$.

Απόδειξη. Έστω $\lim_{x\to\xi+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\eta$ με $\eta\in\mathbb{R}$.
Έστω $\epsilon>0$. Τότε υπάρχει $\delta'>0$ ώστε να ισχύει
$$\Big|\frac{f'(x)}{g'(x)}-\eta\Big|<\frac{\epsilon}{6}\tag{5.13}$$
για κάθε $x\in(\xi,b)$ με $\xi<x<\xi+\delta'$. Επιλέγουμε $x_0\in(\xi,b)$ ώστε $\xi<x_0<\xi+\delta'$. Επειδή $\lim_{x\to\xi+}|g(x)|=+\infty$, υπάρχει $\delta''>0$ ώστε να ισχύει
$$|g(x)|>\max\Big\{|g(x_0)|,\frac{3}{\epsilon}|f(x_0)|,\frac{3|\eta|}{\epsilon}|g(x_0)|\Big\}\tag{5.14}$$

[35] Δείτε την άσκηση 5.2.2.

για κάθε $x \in (\xi, b)$ με $\xi < x < \xi + \delta''$.
Τώρα ορίζουμε $\delta = \min\{x_0 - \xi, \delta''\}$. Κάθε $x \in (\xi, b)$ με $\xi < x < \xi + \delta$ ικανοποιεί τις $\xi < x < x_0 < \xi + \delta'$ και $\xi < x < \xi + \delta''$. Σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής του Cauchy, για κάθε τέτοιον x υπάρχει $\zeta \in (x, x_0)$ ώστε

$$\tfrac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \tfrac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)}.$$

Άρα $\zeta \in (\xi, b)$ και $\xi < \zeta < \xi + \delta'$, οπότε από την (5.13),

$$\big|\tfrac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} - \eta\big| = \big|\tfrac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)} - \eta\big| < \tfrac{\epsilon}{6}.$$

Συνεπάγεται

$$|f(x) - f(x_0) - \eta(g(x) - g(x_0))| < \tfrac{\epsilon}{6}|g(x) - g(x_0)|,$$

οπότε, με την τριγωνική ανισότητα,

$$|f(x) - \eta g(x)| < \tfrac{\epsilon}{6}(|g(x)| + |g(x_0)|) + |f(x_0)| + |\eta||g(x_0)|.$$

Διαιρώντας με τον $g(x)$ και χρησιμοποιώντας την (5.14), βρίσκουμε

$$\big|\tfrac{f(x)}{g(x)} - \eta\big| < \tfrac{\epsilon}{6}\big(1 + \tfrac{|g(x_0)|}{|g(x)|}\big) + \tfrac{|f(x_0)|}{|g(x)|} + |\eta|\tfrac{|g(x_0)|}{|g(x)|} < \tfrac{\epsilon}{6}(1+1) + \tfrac{\epsilon}{3} + \tfrac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $\big|\frac{f(x)}{g(x)} - \eta\big| < \epsilon$ για κάθε $x \in (\xi, b)$ με $\xi < x < \xi + \delta$. Άρα $\lim_{x\to\xi+} \frac{f(x)}{g(x)} = \eta$.
Οι περιπτώσεις $\lim_{x\to\xi+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty$ καθώς και οι περιπτώσεις $x \to \xi-$ και $x \to \xi$ αποδεικνύονται με παρόμοιο τρόπο. Οι περιπτώσεις $x \to \pm\infty$ ανάγονται στις $x \to 0\pm$ όπως στην απόδειξη του πρώτου κανόνα. $\square$

Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι στις υποθέσεις του δεύτερου κανόνα του l' Hopitâl δεν αναφέρεται αν υπάρχει το όριο $\lim_{x\to\xi+} f(x)$ ούτε ποιά ακριβώς είναι η τιμή του. Άρα οι απροσδιόριστες μορφές $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ είναι ειδικές περιπτώσεις του δεύτερου κανόνα του l' Hopitâl, όπως τον έχουμε διατυπώσει.

Παράδειγμα 5.6.3. Θα αποδείξουμε ότι

$$\lim_{x\to+\infty} \tfrac{a^x}{x^b} = +\infty \qquad \text{αν } a > 1 \text{ και } b > 0.$$

Αρχικά έστω $a > 1$ και $b = 1$. Θα αποδείξουμε ότι $\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x} = +\infty$. Για τη συνάρτηση στον παρονομαστή και την παράγωγό της είναι $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ και $x \neq 0$ και $\frac{dx}{dx} = 1 \neq 0$ για κάθε $x > 0$. Το όριο του λόγου των παραγώγων είναι $\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x \log a}{1} = +\infty$. Άρα $\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x} = +\infty$.
Τώρα έστω $a > 1$ και $b > 0$. Επειδή $a^{1/b} > 1$, είναι $\lim_{x\to+\infty} \frac{(a^{1/b})^x}{x} = +\infty$. Άρα $\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^b} = \lim_{x\to+\infty} \big(\frac{(a^{1/b})^x}{x}\big)^b = +\infty$.
Το αποτέλεσμα το διατυπώνουμε ως εξής.[36]
Κάθε εκθετική συνάρτηση a^x με $a > 1$ αυξάνεται πιο γρήγορα από οποιαδήποτε δύναμη x^b.

Παράδειγμα 5.6.4. Θα αποδείξουμε ότι

$$\lim_{x\to+\infty} \tfrac{x^a}{(\log x)^b} = +\infty \qquad \text{αν } a > 0 \text{ και } b > 0.$$

Έστω $a > 0$ και $b = 1$. Θα αποδείξουμε ότι $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^a}{\log x} = +\infty$. Για τη συνάρτηση στον παρονομαστή και την παράγωγό της είναι $\lim_{x\to+\infty} \log x = +\infty$ και $\log x \neq 0$ και $\frac{d \log x}{dx} = \frac{1}{x} \neq 0$

[36] Δείτε και το παράδειγμα 2.3.24.

για κάθε $x > 1$. Το όριο του λόγου των παραγώγων είναι $\lim_{x\to+\infty} \frac{ax^{a-1}}{1/x} = \lim_{x\to+\infty} ax^a = +\infty$. Άρα $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^a}{\log x} = +\infty$.
Τώρα έστω $a > 0$ και $b > 0$. Επειδή $\frac{a}{b} > 0$, είναι $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{a/b}}{\log x} = 0$. Άρα $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^a}{(\log x)^b} = \lim_{x\to+\infty} \big(\frac{x^{a/b}}{\log x}\big)^b = +\infty$. Το αποτέλεσμα το διατυπώνουμε ως εξής.
Κάθε δύναμη x^a με $a > 0$ αυξάνεται πιο γρήγορα από οποιαδήποτε δύναμη λογαρίθμου $(\log x)^b$.

Παράδειγμα 5.6.5. Το $\lim_{x\to+\infty} \frac{x-\cos x}{x}$ αποτελεί περίπτωση απροσδιόριστης μορφής $\frac{\pm\infty}{+\infty}$.
Πράγματι, είναι $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ και, επειδή ισχύει $x - \cos x \geq x - 1$ για κάθε x, είναι $\lim_{x\to+\infty}(x - \cos x) = +\infty$.
Στο συγκεκριμένο παράδειγμα το αρχικό όριο υπολογίζεται πολύ εύκολα χωρίς να χρησιμοποιήσουμε τον δεύτερο κανόνα του l' Hopitâl : επειδή ισχύει $\left|\frac{\cos x}{x}\right| \leq \frac{1}{x}$ για κάθε $x > 0$, συνεπάγεται $\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$, οπότε $\lim_{x\to+\infty} \frac{x-\cos x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \big(1 - \frac{\cos x}{x}\big) = 1 - 0 = 1$.
Εδώ, μάλιστα, *ο δεύτερος κανόνας δεν εφαρμόζεται καν !* Δεν υπάρχει το $\lim_{x\to+\infty} \frac{1+\sin x}{1}$ διότι δεν υπάρχει το $\lim_{x\to+\infty} \sin x$.
Το παράδειγμα αυτό δείχνει, επίσης, ότι δεν ισχύει το αντίστροφο του δεύτερου κανόνα του l' Hopitâl. Πράγματι, στο παράδειγμα αυτό υπάρχει το όριο του λόγου των συναρτήσεων αλλά δεν υπάρχει το όριο του λόγου των παραγώγων τους.

Υπάρχουν, όμως, και άλλες απροσδιόριστες μορφές πέραν των $\frac{0}{0}$ και $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. Σε κάθε περίπτωση μετασχηματίζουμε την απροσδιόριστη μορφή που αντιμετωπίζουμε σε μία από τις βασικές αυτές απροσδιόριστες μορφές και κατόπιν εφαρμόζουμε τον κατάλληλο κανόνα του l' Hopitâl. Θα περιγράψουμε, τελείως σχηματικά, πώς περίπου χειριζόμαστε μερικές τέτοιες περιπτώσεις.
1. Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = 0$ και $\lim_{x\to\xi} g(x) = \pm\infty$ και έστω ότι έχουμε να υπολογίσουμε το $\lim_{x\to\xi} f(x)g(x)$, δηλαδή απροσδιόριστη μορφή $0(\pm\infty)$. Γράφουμε

$$\lim_{x\to\xi} f(x)g(x) = \lim_{x\to\xi} \frac{f(x)}{1/g(x)}$$

και μετατρέπουμε σε απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$. Μπορούμε να γράψουμε και $\lim_{x\to\xi} f(x)g(x) = \lim_{x\to\xi} \frac{g(x)}{1/f(x)}$, δηλαδή να μετατρέψουμε σε απροσδιόριστη μορφή $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. Βέβαια, στην δεύτερη περίπτωση χρειάζεται κάποια επιπλέον υπόθεση για το πρόσημο της f.
2. Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x\to\xi} g(x) = -\infty$ και έστω ότι έχουμε να υπολογίσουμε το $\lim_{x\to\xi}(f(x) + g(x))$, δηλαδή απροσδιόριστη μορφή $(+\infty) + (-\infty)$. Τότε γράφουμε

$$\lim_{x\to\xi}(f(x) + g(x)) = \lim_{x\to\xi} \big(\tfrac{1}{g(x)} + \tfrac{1}{f(x)}\big) f(x)g(x),$$

μετατρέποντας σε απροσδιόριστη μορφή $0(-\infty)$, και αναγόμαστε στην προηγούμενη περίπτωση.
3. Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = 0$, όπου $f(x) > 0$, και $\lim_{x\to\xi} g(x) = 0$ και έστω ότι έχουμε να υπολογίσουμε το $\lim_{x\to\xi} f(x)^{g(x)}$, δηλαδή απροσδιόριστη μορφή $(0+)^0$. Τότε γράφουμε

$$\lim_{x\to\xi} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to\xi} e^{g(x)\log f(x)}$$

και μετατρέπουμε σε απροσδιόριστη μορφή $0(-\infty)$.
4. Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x\to\xi} g(x) = 0$ και έστω ότι έχουμε να υπολογίσουμε το $\lim_{x\to\xi} f(x)^{g(x)}$, δηλαδή απροσδιόριστη μορφή $(+\infty)^0$. Τότε γράφουμε

$$\lim_{x\to\xi} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to\xi} e^{g(x)\log f(x)}$$

και μετατρέπουμε σε απροσδιόριστη μορφή $0(+\infty)$.
5. Τέλος, έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = 1$ και $\lim_{x\to\xi} g(x) = \pm\infty$ και έστω ότι έχουμε να υπολογίσουμε το $\lim_{x\to\xi} f(x)^{g(x)}$, δηλαδή απροσδιόριστη μορφή $1^{\pm\infty}$. Γράφουμε

$$\lim_{x\to\xi} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to\xi} e^{g(x)\log f(x)},$$

μετατρέποντας σε απροσδιόριστη μορφή $(\pm\infty)0$.

Παράδειγμα 5.6.6. Θα βρούμε το $\lim_{x\to 0+} x\log x$, το οποίο είναι απροσδιόριστη μορφή $0(-\infty)$. Μετασχηματίζουμε σε $\lim_{x\to 0+} \frac{\log x}{1/x}$, όπου $\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = +\infty$. Ισχύει $\frac{1}{x} \neq 0$ και $-\frac{1}{x^2} \neq 0$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$. Επίσης, $\lim_{x\to 0+} \frac{1/x}{-1/x^2} = -\lim_{x\to 0+} x = 0$.
Άρα $\lim_{x\to 0+} x\log x = \lim_{x\to 0+} \frac{\log x}{1/x} = \lim_{x\to 0+} \frac{1/x}{-1/x^2} = 0$.

Παράδειγμα 5.6.7. Θα βρούμε το όριο $\lim_{x\to 0+} x^x$.
Γράφουμε $x^x = e^{x\log x}$ και από το προηγούμενο όριο: $\lim_{x\to 0+} x^x = \lim_{x\to 0+} e^{x\log x} = 1$.

Παράδειγμα 5.6.8. Θα βρούμε το όριο $\lim_{x\to+\infty} \big(1+\frac{x}{1+x^2}\big)^x$.
Γράφουμε $\big(1+\frac{x}{1+x^2}\big)^x = e^{x\log(1+\frac{x}{1+x^2})}$ και αναγόμαστε στο $\lim_{x\to+\infty} x\log\big(1+\frac{x}{1+x^2}\big)$, το οποίο είναι απροσδιόριστη μορφή $(+\infty)0$.
Γράφουμε $x\log\big(1+\frac{x}{1+x^2}\big) = \frac{\log(1+\frac{x}{1+x^2})}{1/x}$ και έχουμε απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$.
Ισχύει $\frac{1}{x} \neq 0$ και $-\frac{1}{x^2} \neq 0$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$ και το όριο του λόγου των παραγώγων είναι $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2(x^2-1)}{(1+x^2)(1+x+x^2)} = 1$. Άρα $\lim_{x\to+\infty} x\log\big(1+\frac{x}{1+x^2}\big) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(1+\frac{x}{1+x^2})}{1/x} = 1$.
Άρα $\lim_{x\to+\infty} \big(1+\frac{x}{1+x^2}\big)^x = \lim_{x\to+\infty} e^{x\log(1+\frac{x}{1+x^2})} = e$.

Ασκήσεις.

5.6.1. Χρησιμοποιώντας όρια που μάθαμε σ’ αυτήν την ενότητα, βρείτε τα $\lim_{x\to+\infty}(e^x - x)$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x/4}}{x^{13}}$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[7]{x}}{(\log x)^5}$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x/2}-(\log x)^4}{x^{100}-e^{x/4}}$, $\lim_{x\to 0+} \big(\frac{1}{x^5}-(\log x)^7\big)$, $\lim_{x\to 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x^5}$.

5.6.2. Βρείτε τα $\lim_{x\to 1} \frac{x^a-1}{x^b-1}$ $(b \neq 0)$, $\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{b^x-1}$ $(a,b > 0, b \neq 1)$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(\log(\log x))}{\log(\log x)}$, $\lim_{x\to 1} \frac{1-x+\log x}{1-\sqrt{2-x}}$, $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{e^{2x}-1}$, $\lim_{x\to 0} \big(\frac{1}{\log(1+x)}-\frac{1}{x}\big)$, $\lim_{x\to 0} \frac{e-(1+x)^{1/x}}{x}$, $\lim_{x\to 0}(x+e^x)^{1/x}$, $\lim_{x\to 1+} \log x\log(x-1)$, $\lim_{x\to 0+} x^{x^x-1}$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{x(x^{1/x}-1)}{\log x}$.

5.6.3. Υπολογίστε τα όρια της άσκησης 3.3.11 με τους κανόνες του l’ Hopitâl.

5.6.4. Βρείτε τα $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{\sin x}$, $\lim_{x\to 0+} \sin x\log x$, $\lim_{x\to 0} \big(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\big)$, $\lim_{x\to 0} \big(\frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{\sin x}\big)$, $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$, $\lim_{x\to 0} \frac{x\sin(\sin x)-(\sin x)^2}{x^6}$, $\lim_{x\to\pi/4}(\tan x)^{\tan(2x)}$, $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\tan x)-\tan(\sin x)}{x^7}$, $\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x-\sin x}{\tan x-\arctan x}$.

5.6.5. Βρείτε a, b ώστε $\lim_{x\to 0} \big(\frac{1-\cos x}{x^4} + ax^{-2} + b\big) = 0$.

5.6.6. Μπορείτε να υπολογίσετε τα $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+e^{-x}}{e^x}$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ με διαδοχικές εφαρμογές του δεύτερου κανόνα του l’ Hopitâl; Μήπως τα όρια αυτά υπολογίζονται πολύ εύκολα, χωρίς αναφορά στους κανόνες του l’ Hopitâl;

5.6.7. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 1/(\log|x|), & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ Δείτε την άσκηση 4.1.12 (και την αντίστοιχη υποσημείωση) και αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής αλλά όχι Hölder-συνεχής στον 0.

5.6.8. [37] Βρείτε συναρτήσεις $f,g : (0,1) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες στο $(0,1)$ ώστε $\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} g(x) = 0$, ώστε να ισχύει $g(x), g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0,1)$ και ώστε να υπάρχει το $\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)}{g(x)}$ αλλά να μην υπάρχει το $\lim_{x\to 0+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

5.6.9. Έστω $f : (\xi-\delta, \xi+\delta) \to \mathbb{R}$, $a < \xi < b$.
Αν υπάρχει η $f'(\xi)$, αποδείξτε ότι $\lim_{h\to 0+} \frac{f(\xi+h)-f(\xi-h)}{2h} = f'(\xi)$. Για το όριο αυτό δεν χρειάζεται ο πρώτος κανόνας του l’ Hopitâl.

---

[37] Μια άσκηση για το αντίστροφο του πρώτου κανόνα του l’ Hopitâl.

Αν υπάρχει η $f''(\xi)$, αποδείξτε ότι $\lim_{h\to 0+}\frac{f(\xi+h)-2f(\xi)+f(\xi-h)}{h^2}=f''(\xi)$.
Αν υπάρχει η $f''(\xi)$, αποδείξτε ότι $\lim_{h\to 0}\frac{f(\xi+2h)-2f(\xi+h)+f(\xi)}{h^2}=f''(\xi)$.
Αιτιολογήστε το σύμβολο $\frac{d^ny}{dx^n}$ για την n-οστή παράγωγο συνάρτησης $y=f(x)$.

5.6.10. Έστω $0<k<1$ και $n\in\mathbb{N}$. Σχεδιάστε το γράφημα της $e^{-x}(1+\frac{x}{1!}+\cdots+\frac{x^n}{n!})-k$. Αποδείξτε ότι υπάρχει ακριβώς μία θετική λύση της εξίσωσης $1+\frac{x}{1!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}=ke^x$. Αν συμβολίσουμε x_n αυτήν τη λύση, αποδείξτε ότι η ακολουθία (x_n) είναι γνησίως αύξουσα.[38]

5.6.11. [α][39] Έστω $a<\xi<b$ και έστω ότι η $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ είναι $n-1$ φορές παραγωγίσιμη στο (a,b). Αν υπάρχει η $f^{(n)}(\xi)$, αποδείξτε ότι

$$\lim_{x\to\xi}\Big(f(x)-f(\xi)-\frac{f^{(1)}(\xi)}{1!}(x-\xi)^1-\cdots-\frac{f^{(n-1)}(\xi)}{(n-1)!}(x-\xi)^{n-1}\Big)\Big/(x-\xi)^n=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}.$$

Αν $n=1$, το παραπάνω όριο είναι ακριβώς ο ορισμός της παραγώγου $f'(\xi)$. Γράψτε το όριο στις περιπτώσεις $n=2$, $n=3$.
Βρείτε τα παρακάτω όρια.
(i) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^n}\big(\frac{1}{1-x}-1-x-\cdots-x^{n-1}\big)$.
(ii) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^n}\big(e^x-1-\frac{1}{1!}x-\cdots-\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}\big)$.
(iii) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^n}\big(\log\frac{1}{1-x}-x-\frac{1}{2}x^2-\cdots-\frac{1}{n-1}x^{n-1}\big)$.
(iv) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^n}\big(\log(1+x)-x+\frac{1}{2}x^2-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n-1}x^{n-1}\big)$.
(v) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{2m}}\big(\cos x-1+\frac{1}{2!}x^2-\cdots+\frac{(-1)^m}{(2m-2)!}x^{2m-2}\big)$ για $m\geq 1$.
(vi) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{2m+1}}\big(\sin x-\frac{1}{1!}x+\frac{1}{3!}x^3-\cdots+\frac{(-1)^m}{(2m-1)!}x^{2m-1}\big)$ για $m\geq 1$.
(vii) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{2m+1}}\big(\arctan x-x+\frac{1}{3}x^3-\cdots+\frac{(-1)^m}{2m-1}x^{2m-1}\big)$ για $m\geq 1$.
[β] Έστω $\lim_{x\to\xi}\frac{\sum_{k=0}^n b_k(x-\xi)^k}{(x-\xi)^n}=\lim_{x\to\xi}\frac{\sum_{k=0}^n b'_k(x-\xi)^k}{(x-\xi)^n}\in\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι $b_k=b'_k$ για κάθε $k=0,1,\ldots,n$.
[γ] Στο [α] υποθέστε, επιπλέον, ότι $f^{(n)}(\xi)\in\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι το $P_n(x)=\sum_{k=0}^n\frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}(x-\xi)^k$ είναι το μοναδικό πολυώνυμο $P(x)$ βαθμού $\leq n$ ώστε $\lim_{x\to\xi}\frac{f(x)-P(x)}{(x-\xi)^n}=0$.
[δ] Αν η $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ και δύο φορές παραγωγίσιμη στον 0 και $f(0)=1$, $f'(0)=0$, $f''(0)=-1$, αποδείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty}\big(f\big(a/\sqrt{x}\big)\big)^x=e^{-a^2/2}$.
Ως εφαρμογή, δείτε ότι $\lim_{x\to+\infty}\big(\cos\big(a/\sqrt{x}\big)\big)^x=e^{-a^2/2}$.

5.6.12. [40] Εφαρμόστε την άσκηση 5.6.11 και αποδείξτε τα παρακάτω.
Έστω $a<\xi<b$ και έστω ότι η f είναι $2m-1$ φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα (a,b) και ότι υπάρχει η $f^{(2m)}(\xi)$. Αν $f^{(1)}(\xi)=\ldots=f^{(2m-1)}(\xi)=0$, τότε ο ξ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της f, αν $f^{(2m)}(\xi)>0$, και σημείο τοπικού μεγίστου της f, αν $f^{(2m)}(\xi)<0$.
Έστω $a<\xi<b$ και έστω ότι η f είναι $2m$ φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα (a,b) και ότι υπάρχει η $f^{(2m+1)}(\xi)$. Αν $f^{(1)}(\xi)=\ldots=f^{(2m)}(\xi)=0$ και $f^{(2m+1)}(\xi)\neq 0$, τότε ο ξ δεν είναι σημείο τοπικού ακροτάτου της f.

5.6.13. Δείτε τις ασκήσεις 5.2.8 και 5.3.11.
Έστω ρίζα ξ της πολυωνυμικής συνάρτησης P. Αποδείξτε ότι η πολλαπλότητα της ξ ως ρίζα της P είναι $k\in\mathbb{N}$ αν και μόνο αν $P(\xi)=\cdots=P^{(k-1)}(\xi)=0$ και $P^{(k)}(\xi)\neq 0$.
Έστω $a<\xi<b$, $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ συνεχής στον ξ και $f(\xi)=0$. Λέμε ότι η **πολλαπλότητα** του ξ ως ρίζα της f είναι $k\in\mathbb{N}$ αν υπάρχει $g:(a,b)\to\mathbb{R}$ συνεχής στον ξ με $g(\xi)\neq 0$ ώστε να ισχύει $f(x)=(x-\xi)^kg(x)$ για κάθε $x\in(a,b)$. Αν $f(\xi)\neq 0$, τότε λέμε ότι η **πολλαπλότητα** του ξ ως

[38] Συνέχεια στην άσκηση 10.2.1.
[39] Ένα πολύ χρήσιμο γενικό όριο.
[40] Η γενίκευση του κριτηρίου δεύτερης παραγώγου για τοπικό ακρότατο.

ρίζα της f είναι 0.

Κατανοήστε ότι η έννοια της πολλαπλότητας ρίζας γενικής συνάρτησης ταυτίζεται με την ήδη γνωστή έννοια της πολλαπλότητας ρίζας στην περίπτωση που η συνάρτηση είναι πολυωνυμική.

Αποδείξτε ότι η πολλαπλότητα του ξ ως ρίζα της f, όπως ορίστηκε παραπάνω, είναι μονοσήμαντα καθορισμένη. Δηλαδή, δεν μπορεί ο ξ να έχει δύο πολλαπλότητες ως ρίζα της f.

Έστω $a < \xi < b$ και έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ συνεχής στον ξ. Έστω $f(\xi) = 0$. Αποδείξτε ότι η πολλαπλότητα του ξ ως ρίζα της f είναι 1 αν και μόνο αν η f είναι παραγωγίσιμη στον ξ και $f'(\xi) \neq 0$.

Έστω $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, $a < \xi < b$ και έστω ότι η $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ είναι $k-1$ φορές παραγωγίσιμη στο (a, b). Έστω $f(\xi) = 0$. Αποδείξτε ότι η πολλαπλότητα του ξ ως ρίζα της f είναι k αν και μόνο αν η f είναι k φορές παραγωγίσιμη στον ξ και $f(\xi) = \cdots = f^{(k-1)}(\xi) = 0$ και $f^{(k)}(\xi) \neq 0$.

5.6.14. Έστω $f, g : [0, 1) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες στο $[0, 1)$ και δύο φορές παραγωγίσιμες στον 0 και έστω $f'(0)g''(0) \neq f''(0)g'(0)$. Σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής του Cauchy, για κάθε $x \in (0, 1)$ υπάρχει $\xi \in (0, x)$ ώστε $(f(x) - f(0))g'(\xi) = (g(x) - g(0)f'(\xi)$. Γράφοντας $\xi = \xi(x)$ για να δηλώσουμε την εξάρτηση του ξ από τον x, αποδείξτε ότι $\lim_{x\to 0} \frac{\xi(x)}{x} = \frac{1}{2}$.

5.6.15. Έστω f παραγωγίσιμη στο $(a, +\infty)$ και έστω $\lim_{x\to+\infty}(f(x) + f'(x)) = \eta$. Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \eta$ και $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

5.6.16. [41] Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to 0+} x^{-m}e^{-1/x} = 0$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$.

Έστω η συνάρτηση $h(x) = \begin{cases} e^{-1/x}, & \text{αν } x > 0 \\ 0, & \text{αν } x \leq 0 \end{cases}$ Αποδείξτε ότι η h είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ότι, για κάθε n, είναι $h^{(n)}(x) = \begin{cases} P_{2n}(1/x)e^{-1/x}, & \text{αν } x > 0 \\ 0, & \text{αν } x \leq 0 \end{cases}$ όπου P_{2n} είναι καποιο πολυώνυμο βαθμού $2n$. Ειδικότερα, είναι $h^{(n)}(0) = 0$ για κάθε n.

Έστω η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} e^{-2/(1-x^2)}, & \text{αν } -1 < x < 1 \\ 0, & \text{αν } |x| \geq 1 \end{cases}$ Αποδείξτε ότι η g είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

5.7 Ο τύπος του Taylor, I.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.1. *Έστω $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$, $f : [\xi, c] \to \mathbb{R}$, n φορές παραγωγίσιμη στο $[\xi, c]$ ώστε η $f^{(n)}$ να είναι συνεχής στο $[\xi, c]$ και παραγωγίσιμη στο (ξ, c). Έστω, επίσης, $p > 0$. Τότε, για κάθε $x \in (\xi, c]$ υπάρχει $\zeta \in (\xi, x)$ ώστε*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}(x - \xi)^k + \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{n!p}(x - \xi)^p(x - \zeta)^{n-p+1}.$$

Η ισότητα ισχύει και όταν $c < \xi$, αρκεί οι παραπάνω υποθέσεις να ισχύουν στο διάστημα $[c, \xi]$.

Απόδειξη. Ορίζουμε τη συνάρτηση $F : [\xi, x] \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$F(t) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x - t)^k \tag{5.15}$$

για κάθε $t \in [\xi, x]$. Η F είναι συνεχής στο $[\xi, x]$ και παραγωγίσιμη στο (ξ, x) και, προφανώς, είναι $F(x) = 0$. Εύκολα βλέπουμε ότι

$$F'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n \tag{5.16}$$

[41] Οι συναρτήσεις, ειδικά οι τελευταίες, που ορίζονται στην άσκηση αυτή και στη συνέχειά της, την άσκηση 7.2.17, είναι πολύ σημαντικές για την Ανάλυση και τη Γεωμετρία.

για κάθε $t \in (\xi, x)$.
Τώρα ορίζουμε την $h : [\xi, x] \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$h(t) = (x-\xi)^p F(t) - F(\xi)(x-t)^p$$

για κάθε $t \in [\xi, x]$. Η h είναι συνεχής στο $[\xi, x]$ και παραγωγίσιμη στο (ξ, x) και $h(\xi) = h(x) = 0$. Σύμφωνα με το θεώρημα του Rolle, υπάρχει $\zeta \in (\xi, x)$ ώστε $h'(\zeta) = 0$. Τότε

$$(x-\xi)^p F'(\zeta) = -pF(\xi)(x-\zeta)^{p-1}, \tag{5.17}$$

από την οποία προκύπτει το τελικό συμπέρασμα

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \tfrac{f^{(k)}(\xi)}{k!}(x-\xi)^k = F(\xi) = -\tfrac{F'(\zeta)(x-\xi)^p}{p(x-\zeta)^{p-1}} = \tfrac{f^{(n+1)}(\zeta)}{n!p}(x-\xi)^p(x-\zeta)^{n-p+1}.$$

Η πρώτη ισότητα είναι η (5.15) με $t = \xi$, η δεύτερη ισότητα είναι η ίδια η (5.17) και για την τρίτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την (5.16) με $t = \zeta$. □

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.12. *Αν η f είναι n φορές παραγωγίσιμη στον ξ, το*

$$P_{n,\xi}(x) = \sum_{k=0}^{n} \tfrac{f^{(k)}(\xi)}{k!}(x-\xi)^k$$

ονομάζεται **πολυώνυμο Taylor** *τάξης n της f στον ξ.*
Η ισότητα στο θεώρημα 5.1 ονομάζεται **τύπος του Taylor** *για την f στον ξ και γράφεται*

$$f(x) = P_{n,\xi}(x) + R_{n,\xi}(x,\zeta),$$

όπου το $R_{n,\xi}(x,\zeta) = \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{n!p}(x-\xi)^p(x-\zeta)^{n-p+1}$ ονομάζεται **υπόλοιπο Schlömlich** *τάξης n με παράμετρο $p > 0$. Αν $p = n+1$ και $p = 1$, έχουμε για το υπόλοιπο τους αντίστοιχους τύπους*

$$R_{n,\xi}(x,\zeta) = \tfrac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}(x-\xi)^{n+1} \qquad \text{και} \qquad R_{n,\xi}(x,\zeta) = \tfrac{f^{(n+1)}(\zeta)}{n!}(x-\zeta)^n(x-\xi).$$

Στην πρώτη περίπτωση το υπόλοιπο ονομάζεται **υπόλοιπο Lagrange** *τάξης n και στη δεύτερη περίπτωση το υπόλοιπο ονομάζεται* **υπόλοιπο Cauchy** *τάξης n.*

Θα δούμε μία ακόμη παραλλαγή του τύπου του Taylor στο θεώρημα 7.1.
Το υπόλοιπο τάξης n εκφράζει το σφάλμα που γίνεται όταν αντικαθίσταται η τιμή $f(x)$ από την τιμή $P_{n,\xi}(x)$ του πολυωνύμου Taylor τάξης n στον ξ που της αντιστοιχεί. Κάθε εφαρμογή του τύπου του Taylor αποσκοπεί στο να αποδείξει ότι το $R_{n,\xi}(x,\zeta)$ είναι μικρό και, επομένως, ότι η τιμή $f(x)$ προσεγγίζεται ικανοποιητικά από την τιμή $P_{n,\xi}(x)$.

Παράδειγμα 5.7.1. Έστω πολυωνυμική συνάρτηση P βαθμού $\leq n$. Η P είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και, επομένως, μπορεί να εφαρμοσθεί το θεώρημα 5.1 για κάθε ξ, x. Επειδή $P^{(n+1)}(\zeta) = 0$ για κάθε ζ, είναι $R_{n,\xi}(x,\zeta) = 0$, οπότε

$$P(x) = P_{n,\xi}(x) = \sum_{k=0}^{n} \tfrac{P^{(k)}(\xi)}{k!}(x-\xi)^k$$

για κάθε ξ, x. Δηλαδή η προσέγγιση ενός πολυωνύμου P βαθμού $\leq n$ από οποιοδήποτε πολυώνυμο Taylor τάξης $\geq n$ του P είναι τέλεια.

Παράδειγμα 5.7.2. Θα υπολογίσουμε τον αριθμό $\sqrt{4+10^{-5}} = \sqrt{4.00001}$ με σφάλμα $< 10^{-17}$. Ο $x = 4 + 10^{-5}$ είναι πολύ κοντά στον $\xi = 4$ και ο αριθμός $\sqrt{4}$ υπολογίζεται εύκολα. Θεωρούμε την $f(x) = \sqrt{x}$ στο διάστημα $[4, 4+10^{-5}]$ με παραγώγους

$$f^{(k)}(x) = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}-1)\cdots(\tfrac{1}{2}-k+1)x^{\frac{1}{2}-k}.$$

Στον $\xi = 4$ υπολογίζουμε ακριβώς: $f^{(k)}(4) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-k+1)4^{\frac{1}{2}-k}$ και, επομένως,

$$f'(4) = \tfrac{1}{4} \qquad \text{και} \qquad f^{(k)}(4) = (-1)^{k-1}\tfrac{1\cdot 3\cdots(2k-3)}{2^{3k-1}} \quad \text{για } k \geq 2.$$

Κατόπιν, υπολογίζουμε ένα άνω φράγμα για την $|f^{(n+1)}(x)|$ στο διάστημα $(4, 4+10^{-5})$. Γράφουμε

$$|f^{(n+1)}(x)| = |\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}-1)\cdots(\tfrac{1}{2}-n)x^{\frac{1}{2}-n-1}| \leq \tfrac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^{n+1}}4^{-\frac{1}{2}-n} = \tfrac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^{3n+2}}.$$

Επομένως, για το υπόλοιπο Lagrange ισχύει

$$|R_{n,4}(4+10^{-5},\zeta)| \leq \tfrac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^{3n+2}(n+1)!}10^{-5(n+1)}.$$

Αν $n = 2$, τότε

$$|R_{2,4}(4+10^{-5},\zeta)| < 10^{-17}$$

και, επομένως, ο τύπος του Taylor γράφεται

$$\left|\sqrt{4+10^{-5}} - 2 - \tfrac{1}{4}10^{-5} + \tfrac{1}{64}(10^{-5})^2\right| < 10^{-17}.$$

Άρα ο αριθμός

$$2 + \tfrac{1}{4}10^{-5} - \tfrac{1}{64}(10^{-5})^2 = 2.0000025000015625$$

είναι μια προσέγγιση του $\sqrt{4+10^{-5}}$ με σφάλμα $< 10^{-17}$. Αυτό σημαίνει ότι όλα τα δεκαδικά ψηφία του 2.0000025000015625 είναι ίδια με τα αντίστοιχα δεκαδικά ψηφία του $\sqrt{4+10^{-5}}$.

Ασκήσεις.

5.7.1. Βρείτε τα πολυώνυμα Taylor οποιασδήποτε τάξης των $\frac{1}{1-x}$, e^x, $\log\frac{1}{1-x}$, $\frac{1}{x^2+1}$ στον 0.

5.7.2. Όπως στο παράδειγμα 5.7.2, εφαρμόστε τον τύπο του Taylor με υπόλοιπο Lagrange στην $f(x) = \sqrt{x}$ στο διάστημα $[\xi, x] = [4, 4+10^{-5}]$. Ποιόν $n \in \mathbb{N}$ πρέπει να χρησιμοποιήσετε ώστε να προσεγγίσετε τον $\sqrt{4+10^{-5}}$ με ακρίβεια έως και χιλιοστού δεκαδικού ψηφίου;

5.7.3. Εφαρμόστε τον τύπο του Taylor με υπόλοιπο Lagrange για να προσεγγίσετε τους $\sin(1^o)$ και $\sin(31^o)$ με ακρίβεια έως και χιλιοστού δεκαδικού ψηφίου.

5.7.4. Έστω ότι η $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a,b]$ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο (a,b), ότι $f(a) = f(b) = 0$ και ότι ισχύει $|f''(x)| \leq M$ για κάθε $x \in (a,b)$. Αποδείξτε ότι ισχύει $|f'(x)| \leq M\frac{(x-a)^2+(x-b)^2}{2(b-a)}$ για κάθε $x \in (a,b)$.

5.7.5. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο (a,b). Αν $f'(a) = f'(b) = 0$, αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a,b)$ ώστε $|f(b) - f(a)| \leq \frac{(b-a)^2}{4}|f''(\xi)|$.

5.7.6. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ ώστε να ισχύει $0 < m \leq f'(x)$ και $0 < f''(x) \leq M$ για κάθε x στο $[a,b]$. Επίσης, έστω $f(a) < 0 < f(b)$, οπότε υπάρχει $\xi \in (a,b)$ ώστε $f(\xi) = 0$. Αποδείξτε ότι ένας τέτοιος ξ είναι μοναδικός.

Και τώρα θα περιγράψουμε την λεγόμενη **επαναληπτική διαδικασία του Newton** για την προσέγγιση της ρίζας ξ της εξίσωσης $f(x) = 0$.

Ορίζουμε ακολουθία (x_n) αρχίζοντας με οποιονδήποτε $x_1 \in (\xi, b]$, για παράδειγμα τον $x_1 = b$, και συνεχίζοντας με τον αναδρομικό τύπο $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ για κάθε n.

Αποδείξτε ότι η (x_n) είναι γνησίως φθίνουσα και ότι $x_n \to \xi$.

Αποδείξτε ότι για κάθε n υπάρχει $\zeta \in (\xi, x_n)$ ώστε $x_{n+1} - \xi = \frac{f''(\zeta)}{2f'(x_n)}(x_n - \xi)^2$.

Αποδείξτε ότι για κάθε n ισχύει $0 < x_n - \xi \leq \frac{2m}{M}\left(\frac{M}{2m}(x_1 - \xi)\right)^{2^{n-1}}$.

Εφαρμόστε την παραπάνω διαδικασία στην εξίσωση $x^2 - 2 = 0$ για να προσεγγίσετε τον αριθμό $\sqrt{2}$ στο διάστημα $[1,2]$. Ξεκινήστε με $x_1 = 2$ και βρείτε τους x_2, x_3, x_4. Εκτιμήστε για καθέναν από αυτούς το σφάλμα σε σχέση με την αληθινή τιμή του $\sqrt{2}$. Ποιός πρέπει να είναι ο n ώστε ο x_n να προσεγγίζει τον $\sqrt{2}$ με ακρίβεια έως εκατοντάκις χιλιοστού δεκαδικού ψηφίου;

5.7.7. Στον τύπο του Taylor με υπόλοιπο Lagrange $\frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}(x-\xi)^{n+1}$ ο ζ εξαρτάται, φυσικά, από τον x. Αν αυτό το δηλώσουμε γράφοντας $\zeta=\zeta(x)$, αποδείξτε ότι, αν υπάρχει η $f^{(n+2)}(\xi)$ και είναι αριθμός $\neq 0$, τότε $\lim_{x\to\xi+}\frac{\zeta(x)-\xi}{x-\xi}=\frac{1}{n+2}$.

5.7.8. [α] Έστω $f:(a,+\infty)\to\mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(a,+\infty)$. Αποδείξτε ότι, αν $u_0=\sup\{|f(x)|\,|\,x>a\}$, $u_1=\sup\{|f'(x)|\,|\,x>a\}$, $u_2=\sup\{|f''(x)|\,|\,x>a\}$, τότε ${u_1}^2\leq 4u_0u_2$.
[β] Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι, αν $u_0=\sup\{|f(x)|\,|\,x\in\mathbb{R}\}$, $u_1=\sup\{|f'(x)|\,|\,x\in\mathbb{R}\}$, $u_2=\sup\{|f''(x)|\,|\,x\in\mathbb{R}\}$, τότε ${u_1}^2\leq 2u_0u_2$.
[γ] Έστω $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$. Αν η f'' είναι φραγμένη στο $(0,+\infty)$ και $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$, αποδείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty}f'(x)=0$.
[δ] Έστω $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$. Αν $\lim_{x\to+\infty}xf(x)=\lim_{x\to+\infty}xf''(x)=0$, αποδείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty}xf'(x)=0$.
[ε] Έστω $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο (a,b). Αν η $(b-x)^2f''(x)$ είναι φραγμένη στο (a,b) και $\lim_{x\to b}f(x)=0$, αποδείξτε ότι $\lim_{x\to b}(b-x)f'(x)=0$.

5.7.9. [42] Έστω $n\in\mathbb{Z}$, $n\geq 0$, $f,g:[\xi,c]\to\mathbb{R}$, n φορές παραγωγίσιμες στο $[\xi,c]$ ώστε οι $f^{(n)}$, $g^{(n)}$ να είναι συνεχείς στο $[\xi,c]$ και παραγωγίσιμες στο (ξ,c). Αποδείξτε ότι για κάθε $x\in(\xi,c]$ υπάρχει $\zeta\in(\xi,x)$ ώστε

$$\Big(f(x)-\textstyle\sum_{k=0}^n\frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}(x-\xi)^k\Big)g^{(n+1)}(\zeta)=\Big(g(x)-\sum_{k=0}^n\frac{g^{(k)}(\xi)}{k!}(x-\xi)^k\Big)f^{(n+1)}(\zeta).$$

Τί γίνεται αν $c<\xi$;

5.8 Τάξη μεγέθους, ασυμπτωτική ισότητα.

5.8.1 Τάξη μεγέθους.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.13. *Έστω $f,g:A\to\mathbb{R}$ και $\xi\in\overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A και έστω ότι ισχύει $f(x)\neq 0$ και $g(x)\neq 0$ κοντά στο ξ. Αν $\lim_{x\to\xi}\big|\frac{f(x)}{g(x)}\big|=0$, τότε λέμε ότι η f έχει* **μικρότερη τάξη μεγέθους** *στο ξ από την g καθώς και ότι η g έχει* **μεγαλύτερη τάξη μεγέθους** *στο ξ από την f. Παρατηρήστε ότι, λόγω της υπόθεσης για μη-μηδενισμό των f, g, η ισότητα $\lim_{x\to\xi}\big|\frac{f(x)}{g(x)}\big|=0$ είναι ισοδύναμη με την $\lim_{x\to\xi}\big|\frac{g(x)}{f(x)}\big|=+\infty$.*
Τέλος, αν υπάρχουν l,u ώστε να ισχύει $0<l\leq\big|\frac{f(x)}{g(x)}\big|\leq u<+\infty$ κοντά στο ξ, τότε λέμε ότι οι f, g έχουν **ίδια τάξη μεγέθους** *στο ξ.*

Αν υπάρχει το $\rho=\lim_{x\to\xi}\big|\frac{f(x)}{g(x)}\big|$ και είναι θετικός αριθμός, τότε μπορούμε να επιλέξουμε l ώστε $0<l<\rho$ (για παράδειγμα, τον $l=\frac{\rho}{2}$) και $u>\rho$ (για παράδειγμα, τον $u=2\rho$) και τότε ισχύει $l<\big|\frac{f(x)}{g(x)}\big|<u$ κοντά στο ξ, οπότε οι f,g έχουν ίδια τάξη μεγέθους στο ξ.

Παράδειγμα 5.8.1. Για κάθε $b>0$, $a>1$, η x^b έχει μικρότερη τάξη μεγέθους στο $+\infty$ από την a^x, διότι $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^b}{a^x}=0$.

Παράδειγμα 5.8.2. Για κάθε $c>0$, $b>0$, η $(\log x)^c$ έχει μικρότερη τάξη μεγέθους στο $+\infty$ από την x^b, διότι $\lim_{x\to+\infty}\frac{(\log x)^c}{x^b}=0$.

Παράδειγμα 5.8.3. Αν $a_n,b_n\neq 0$, οι $a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ και $b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n$ έχουν ίδια τάξη μεγέθους στο $+\infty$, αφού $\lim_{x\to+\infty}\big|\frac{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n}\big|=\big|\frac{a_n}{b_n}\big|>0$.

Παράδειγμα 5.8.4. Έστω $a_n,b_m\neq 0$ και $n<m$. Η $a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ έχει μικρότερη τάξη μεγέθους στο $+\infty$ από την $b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m$. Πράγματι, $\lim_{x\to+\infty}\frac{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m}=0$.

[42] Γενίκευση του θεωρήματος μέσης τιμής του Cauchy: δοκιμάστε $\xi=a$, $c=x=b$ και $n=0$.

Παράδειγμα 5.8.5. Για κάθε $a > 1$, $b > 0$, η $a^{-1/x}$ έχει μικρότερη τάξη μεγέθους στον 0 από την x^b, διότι $\lim_{x\to 0+} \frac{a^{-1/x}}{x^b} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^b}{a^t} = 0$.

Παράδειγμα 5.8.6. Οι $1 - \cos x$ και x^2 έχουν ίδια τάξη μεγέθους στον 0, διότι $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} > 0$.

Παράδειγμα 5.8.7. Οι $\sin x$ και x έχουν ίδια τάξη μεγέθους στον 0, διότι $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 > 0$.
Οι $e^x - 1$ και x έχουν ίδια τάξη μεγέθους στον 0, διότι $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1 > 0$.
Οι $\log x$ και $x - 1$ έχουν ίδια τάξη μεγέθους στον 1, διότι $\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x-1} = 1 > 0$.

Παράδειγμα 5.8.8. Για κάθε $c > 0$, $b > 0$, η $f(x) = (\log \frac{1}{x})^c$ έχει μικρότερη τάξη μεγέθους στον 0 από την x^{-b}, διότι $\lim_{x\to 0+} \frac{(\log(1/x))^c}{x^{-b}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{(\log t)^c}{t^b} = 0$.

Παράδειγμα 5.8.9. Το όριο $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+x\sin x}{x} = \lim_{x\to+\infty}(2 + \sin x)$ δεν υπάρχει. Όμως, οι $2x + x\sin x$ και x έχουν ίδια τάξη μεγέθους στο $+\infty$. Πράγματι, ισχύει $1 \leq \frac{2x+x\sin x}{x} \leq 3$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Θα περιγράψουμε, τώρα, ειδικά για την περίπτωση $\lim_{x\to+\infty}$ μερικούς ευρέως χρησιμοποιούμενους όρους: την *πολυωνυμική*, την *εκθετική* και τη *λογαριθμική τάξη μεγέθους* στο $+\infty$.

Είδαμε στο παράδειγμα 5.8.3 ότι όλες οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού n έχουν ίδια τάξη μεγέθους στο $+\infty$. Αυτό το κωδικοποιούμε λέγοντας ότι κάθε πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού n έχει **πολυωνυμική τάξη μεγέθους** ή, πιο συγκεκριμένα, πολυωνυμική τάξη μεγέθους βαθμού n στο $+\infty$. Σύμφωνα με το παράδειγμα 5.8.4, μπορούμε να "ιεραρχήσουμε" τις πολυωνυμικές τάξεις μεγέθους στο $+\infty$ ανάλογα με τον βαθμό τους: μεγαλύτερος βαθμός αντιστοιχεί σε μεγαλύτερη τάξη μεγέθους. Φυσικά, από τις πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού n η πιο απλή είναι η x^n. Πρέπει, τώρα, να πούμε ότι ο όρος "πολυωνυμική τάξη μεγέθους βαθμού n" χαρακτηρίζει όχι μόνο τις πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού n αλλά κάθε συνάρτηση η οποία έχει ίδια τάξη μεγέθους με την x^n στο $+\infty$.

Παράδειγμα 5.8.10. Κάθε ρητή συνάρτηση $R(x) = \frac{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m}$, όπου $a_n, b_m \neq 0$ και $n > m$, έχει πολυωνυμική τάξη μεγέθους βαθμού $n-m$ στο $+\infty$, αφού $\lim_{x\to+\infty} \left|\frac{R(x)}{x^{n-m}}\right| = \left|\frac{a_n}{b_m}\right| > 0$.

Ο όρος "πολυωνυμική τάξη μεγέθους" χρησιμοποιείται για τις συναρτήσεις x^b ακόμη και όταν ο εκθέτης $b > 0$ δεν είναι κατ' ανάγκη φυσικός καθώς και για κάθε συνάρτηση η οποία έχει ίδια τάξη μεγέθους με κάποια από αυτές τις x^b στο $+\infty$. Πιο συγκεκριμένα:

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.14. *Λέμε ότι η f έχει* **πολυωνυμική τάξη μεγέθους** *βαθμού $b > 0$ στο $+\infty$ αν έχει ίδια τάξη μεγέθους με την συνάρτηση x^b στο $+\infty$.*

Προφανώς, οι πολυωνυμικές τάξεις μεγέθους "ιεραρχούνται" ανάλογα με τον βαθμό τους, αφού

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{b_1}}{x^{b_2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{b_2-b_1}} = 0 \qquad \text{αν } \ 0 < b_1 < b_2.$$

Παρατηρούμε, επίσης, ότι κάθε συνάρτηση με πολυωνυμική τάξη μεγέθους στο $+\infty$ έχει σε απόλυτη τιμή όριο $+\infty$ στο $+\infty$. Πράγματι, αν η f έχει ίδια τάξη μεγέθους στο $+\infty$ με την x^b για κάποιον $b > 0$, τότε υπάρχουν $u, l > 0$ ώστε να ισχύει $l \leq \left|\frac{f(x)}{x^b}\right| \leq u$ και, επομένως, $|f(x)| \geq lx^b$ κοντά στο $+\infty$. Επειδή $\lim_{x\to+\infty} lx^b = +\infty$, συνεπάγεται $\lim_{x\to+\infty} |f(x)| = +\infty$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.15. *Αν $a > 1$, λέμε ότι η συνάρτηση a^x έχει* **εκθετική τάξη μεγέθους** *στο $+\infty$. Το ίδιο λέμε και για κάθε συνάρτηση η οποία έχει την ίδια τάξη μεγέθους στο $+\infty$ με την a^x για κάποιον $a > 1$.*

Οι εκθετικές τάξεις μεγέθους "ιεραρχούνται" ανάλογα με τη βάση a, αφού

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{{a_1}^x}{{a_2}^x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^x = 0 \qquad \text{αν } \ 1 < a_1 < a_2.$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.16. *Αν $c > 0$, λέμε ότι η συνάρτηση $(\log x)^c$ έχει* **λογαριθμική τάξη μεγέθους** *στο $+\infty$. Το ίδιο ισχύει για κάθε συνάρτηση η οποία έχει την ίδια τάξη μεγέθους στο $+\infty$ με την $(\log x)^c$ για κάποιον $c > 0$.*

Οι λογαριθμικές τάξεις μεγέθους "ιεραρχούνται" ανάλογα με τον εκθέτη c, αφού

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\log x)^{c_1}}{(\log x)^{c_2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{(\log x)^{c_2-c_1}} = 0 \qquad \text{αν } 0 < c_1 < c_2.$$

Όπως και με τις συναρτήσεις πολυωνυμικής τάξης μεγέθους, παρατηρούμε ότι κάθε συνάρτηση με εκθετική ή λογαριθμική τάξη μεγέθους στο $+\infty$ έχει σε απόλυτη τιμή όριο $+\infty$ στο $+\infty$. Η απόδειξη είναι παρόμοια.

Στα παραδείγματα 5.8.1 και 5.8.2 είδαμε ότι, στο $+\infty$, κάθε λογαριθμική τάξη μεγέθους είναι μικρότερη από κάθε πολυωνυμική τάξη μεγέθους και κάθε πολυωνυμική τάξη μεγέθους είναι μικρότερη από κάθε εκθετική τάξη μεγέθους.

Πρέπει να επισημανθεί ότι ως σύνολο A μπορεί, φυσικά, να θεωρηθεί το $\mathbb{N}$ με σημείο συσσώρευσης το $+\infty$. Επομένως, οι προηγούμενοι ορισμοί ισχύουν και στην περίπτωση των ακολουθιών ως ειδική κατηγορία συναρτήσεων. Για παράδειγμα, λέμε ότι η ακολουθία (a^n), όπου $a > 1$, έχει εκθετική τάξη μεγέθους, ότι η (n^a), όπου $a > 0$, έχει πολυωνυμική τάξη μεγέθους και ότι η $\big((\log n)^c\big)$, όπου $c > 0$, έχει λογαριθμική τάξη μεγέθους. Εννοείται ότι αυτά τα τελευταία για τις ακολουθίες ισχύουν μόνο στο $+\infty$, αφού το μοναδικό σημείο συσσώρευσης του $\mathbb{N}$ είναι το $+\infty$ και, εξάλλου, όταν μελετάμε ακολουθίες εννοείται ότι θεωρούμε όρια αποκλειστικά καθώς $n \to +\infty$.

Παράδειγμα 5.8.11. Είναι προφανής η κατάταξη των διαφόρων εκθετικών, πολυωνυμικών και λογαριθμικών τάξεων μεγέθους ακολουθιών. Είναι ίδια με την κατάταξη των τάξεων μεγέθους των αντίστοιχων συναρτήσεων.

Παράδειγμα 5.8.12. Η ακολουθία $(1 - \cos\frac{1}{n})$ έχει ίδια τάξη μεγέθους με την ακολουθία $(\frac{1}{n^2})$.

Παράδειγμα 5.8.13. Η ακολουθία $\big(\log(1 + \frac{1}{n})\big)$ έχει ίδια τάξη μεγέθους με την ακολουθία $(\frac{1}{n})$.

5.8.2 Ασυμπτωτική ισότητα. Κύριοι όροι.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.17. *Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A. Έστω ότι ισχύει $g(x) \neq 0$ κοντά στο ξ. Αν $\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, τότε γράφουμε*

$$f(x) = \mathrm{o}\big(g(x)\big) \quad \text{στο } \xi$$

και διαβάζουμε: η f είναι **μικρό όμικρον** *της g στο ξ.*
Αν υπάρχει $M \geq 0$ ώστε να ισχύει $|f(x)| \leq M|g(x)|$ κοντά στο ξ, τότε γράφουμε

$$f(x) = \mathrm{O}\big(g(x)\big) \quad \text{στο } \xi$$

και διαβάζουμε: η f είναι **μεγάλο όμικρον** *της g στο ξ.*

Παράδειγμα 5.8.14. Αν η f έχει μικρότερη τάξη μεγέθους από την g στο ξ, τότε $f(x) = \mathrm{o}\big(g(x)\big)$ στο ξ. Το αντίστροφο ισχύει, φυσικά, αν $f(x) \neq 0$ κοντά στο ξ.
Για παράδειγμα, είναι $(\log x)^c = \mathrm{o}\big(x^b\big)$ και $x^b = \mathrm{o}\big(a^x\big)$ στο $+\infty$ για κάθε $a > 1$ και $b, c > 0$. Επίσης, είναι $x^{b_1} = \mathrm{o}\big(x^{b_2}\big)$ στο $+\infty$ αλλά και $x^{b_2} = \mathrm{o}\big(x^{b_1}\big)$ στον 0 αν $0 < b_1 < b_2$.

Παράδειγμα 5.8.15. Αν η f έχει μικρότερη τάξη μεγέθους από ή την ίδια τάξη μεγέθους με την g στο ξ, τότε $f(x) = \mathrm{O}\big(g(x)\big)$ στο ξ.
Για παράδειγμα, είναι $\sin x = \mathrm{O}(x)$ και $1 - \cos x = \mathrm{O}(x^2)$ στον 0.

Παράδειγμα 5.8.16. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A. Το να είναι η f παραγωγίσιμη στον ξ με παράγωγο $f'(\xi)$ είναι ισοδύναμο με το να ισχύει

$$f(x) - f(\xi) - f'(\xi)(x-\xi) = \mathrm{o}(x-\xi) \quad \text{στον } \xi$$

Πράγματι, το τελευταίο είναι ισοδύναμο με το $\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)-f'(\xi)(x-\xi)}{x-\xi} = 0$ κι αυτό είναι ισοδύναμο με το $\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = f'(\xi)$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.18. *Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A. Έστω ότι ισχύει $g(x) \neq 0$ κοντά στο ξ. Αν $\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, τότε γράφουμε*

$$f(x) \sim g(x) \quad \textit{στο } \xi$$

και λέμε ότι η f είναι **ασυμπτωτικά ίση** *με την g στο ξ.*

Παρατηρήστε ότι από το $\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ συνεπάγεται ότι ισχύει $\frac{f(x)}{g(x)} \neq 0$ και, επομένως, $f(x) \neq 0$ κοντά στο ξ. Δηλαδή, αν είναι $f(x) \sim g(x)$ στο ξ, τότε ισχύει $f(x), g(x) \neq 0$ κοντά στο ξ. Επομένως, συνεπάγεται $\lim_{x\to\xi} \frac{g(x)}{f(x)} = 1$, οπότε είναι $g(x) \sim f(x)$ στο ξ. Άρα η σχέση της ασυμπτωτικής ισότητας είναι συμμετρική.

Παράδειγμα 5.8.17. $\sin x \sim x$ και $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$ στον 0.

Παράδειγμα 5.8.18. $e^x - 1 \sim x$ στον 0, διότι $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$.

Παράδειγμα 5.8.19. $\log x \sim x - 1$ στον 1, διότι $\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x-1} = 1$.

Παράδειγμα 5.8.20. $\tan x \sim \frac{1}{x-(\pi/2)}$ στον $\frac{\pi}{2}$, διότι $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{1/(x-(\pi/2))} = \lim_{t\to 0} t\tan(t+\frac{\pi}{2}) = \lim_{t\to 0} t\cot t = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\sin t}\cos t = 1$.

Ιδού ένα χρήσιμο αποτέλεσμα:
Έστω $c \neq 0$. Τότε η σχέση $f(x) - g(x) = o\big(cg(x)\big)$ είναι ισοδύναμη με την ασυμπτωτική ισότητα $f(x) \sim g(x)$.
Πράγματι: $f(x) - g(x) = \mathrm{o}\big(cg(x)\big)$ στο ξ αν και μόνο αν $\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-g(x)}{cg(x)} = 0$ αν και μόνο αν $\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-g(x)}{g(x)} = 0$ αν και μόνο αν $\lim_{x\to\xi} \big(\frac{f(x)}{g(x)} - 1\big) = 0$ αν και μόνο αν $\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ αν και μόνο αν $f(x) \sim g(x)$ στο ξ.

Βάσει των προηγούμενων παραδειγμάτων:

Παράδειγμα 5.8.21. $\sin x - x = \mathrm{o}(x)$ και $\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2 = \mathrm{o}(x^2)$ στον 0.

Παράδειγμα 5.8.22. $e^x - 1 - x = \mathrm{o}(x)$ στον 0.

Παράδειγμα 5.8.23. $\log(1+x) - x = \mathrm{o}(x)$ στον 0.

Παράδειγμα 5.8.24. $\tan x - \frac{1}{x-(\pi/2)} = \mathrm{o}\big(\frac{1}{x-(\pi/2)}\big)$ στον $\frac{\pi}{2}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.18. [α] *Αν όλες οι $g_1, \ldots, g_n$ είναι μικρό όμικρον της ίδιας g στο ξ, τότε και η $g_1 + \cdots + g_n$ είναι μικρό όμικρον της g στο ξ.*
[β] *Αν στην $f = g + g_1 + \cdots + g_n$ είναι όλες οι $g_1, \ldots, g_n$ μικρό όμικρον της g στο ξ, τότε είναι $f(x) \sim g(x)$ στο ξ.*

Απόδειξη. [α] $\lim_{x\to\xi} \frac{g_1(x)+\cdots+g_n(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\xi} \frac{g_1(x)}{g(x)} + \cdots + \lim_{x\to\xi} \frac{g_n(x)}{g(x)} = 0 + \cdots + 0 = 0$.
[β] $\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\xi} \big(1 + \frac{g_1(x)+\cdots+g_n(x)}{g(x)}\big) = 1 + 0 = 1$. □

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.19. *Αν στην $f = g + g_1 + \cdots + g_n$ είναι όλες οι $g_1, \ldots, g_n$ μικρό όμικρον της g στο ξ, τότε η g χαρακτηρίζεται* **κύριος όρος** *του αθροίσματος στο ξ.*

Είναι *ιδιαιτέρως χρήσιμο* να μπορούμε να διακρίνουμε τον κύριο όρο σε ένα άθροισμα συναρτήσεων.
Για παράδειγμα, αν στην $f = g + g_1 + \cdots + g_n$ η g είναι ο κύριος όρος στο ξ και υπάρχει το $\lim_{x\to\xi} g(x)$, τότε υπάρχει και το $\lim_{x\to\xi} f(x)$ και τα δύο όρια είναι ίσα. Διότι, όπως είδαμε, είναι $f(x) \sim g(x)$ στο ξ, οπότε $\lim_{x\to\xi} f(x) = \lim_{x\to\xi} \frac{f(x)}{g(x)}\, g(x) = 1 \cdot \lim_{x\to\xi} g(x)$.
Ένα ακόμη παράδειγμα: αν στις $g + g_1 + \cdots + g_n$ και $h + h_1 + \cdots + h_m$ οι g, h είναι οι κύριοι όροι, αντιστοίχως, στο ξ, τότε $\frac{g(x)+g_1(x)+\cdots+g_n(x)}{h(x)+h_1(x)+\cdots+h_m(x)} \sim \frac{g(x)}{h(x)}$ στο ξ και, επομένως, αν υπάρχει το $\lim_{x\to\xi} \frac{g(x)}{h(x)}$, τότε υπάρχει και το $\lim_{x\to\xi} \frac{g(x)+g_1(x)+\cdots+g_n(x)}{h(x)+h_1(x)+\cdots+h_m(x)}$ και τα δύο όρια είναι ίσα.

Παράδειγμα 5.8.25. Βάσει των προηγουμένων μπορούμε να δούμε με "νέο μάτι" τα όρια πολυωνυμικών και ρητών συναρτήσεων.
Επειδή $x^k = o(x^n)$ στο $+\infty$ για κάθε $k < n$, στο πολυώνυμο $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, όπου $a_n \neq 0$, ο όρος a_nx^n είναι κύριος όρος στο $+\infty$, οπότε $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \sim a_nx^n$ στο $+\infty$ και, επομένως, $\lim_{x\to+\infty}(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) = \lim_{x\to+\infty} a_nx^n$.
Ομοίως, $\frac{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m} \sim \frac{a_nx^n}{b_mx^m}$ στο $+\infty$, οπότε $\lim_{x\to+\infty} \frac{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a_nx^n}{b_mx^m}$.

Παράδειγμα 5.8.26. Στα αθροίσματα $xe^{2x} - x^2 + 3e^x - x^2e^{\frac{x}{2}}$ και $2e^{2x} + \log x - x^2e^x$ ο πρώτος τους όρος είναι ο κύριος όρος στο $+\infty$. Άρα $\frac{xe^{2x}-x^2+3e^x-x^2e^{\frac{x}{2}}}{2e^{2x}+\log x-x^2e^x} \sim \frac{xe^{2x}}{2e^{2x}} = \frac{x}{2}$ στο $+\infty$, οπότε $\lim_{x\to+\infty} \frac{xe^{2x}-x^2+3e^x-x^2e^{\frac{x}{2}}}{2e^{2x}+\log x-x^2e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2} = +\infty$.

Όπως επισημάναμε λίγο πριν, όλα τα προηγούμενα βρίσκουν προφανή εφαρμογή σε ακολουθίες, όπου το πεδίο ορισμού A είναι το $\mathbb{N}$ με σημείο συσσώρευσης το $+\infty$.

Ασκήσεις.

5.8.1. Έστω $a > 1$. Ιεραρχήστε τις a^x, a^{a^x}, $a^{a^{a^x}}$ κατά τάξη μεγέθους στο $+\infty$.
Ιεραρχήστε τις $\log x$, $\log(\log x)$, $\log(\log(\log x))$ κατά τάξη μεγέθους στο $+\infty$.

5.8.2. Αποδείξτε ότι οι x, $\log(e^x + x\log x)$, $e^{(1+(1/x))\log x}$ έχουν ίδια τάξη μεγέθους στο $+\infty$.
Αποδείξτε ότι οι x, $\frac{x^2+x^3\log x}{\sin x+x^2}$ έχουν ίδια τάξη μεγέθους στον 0.

5.8.3. Έστω οι $\frac{x^3e^x-x^5e^{x/2}}{xe^x+\sin x}$, $e^{x/5} + x^3e^{x/6} - x$, $e^{3\log(2+\log x)}$. Κατατάξτε τις τάξεις μεγέθους τους στο $+\infty$ σε πολυωνυμικές, εκθετικές και λογαριθμικές και ιεραρχήστε τις.

5.8.4. Λέμε ότι μια συνάρτηση έχει **αντίστροφη πολυωνυμική τάξη μεγέθους** στο $+\infty$ αν έχει ίδια τάξη μεγέθους στο $+\infty$ με την x^b για κάποιον $b < 0$. Ομοίως, λέμε ότι μια συνάρτηση έχει **αντίστροφη εκθετική** ή **αντίστροφη λογαριθμική τάξη μεγέθους** στο $+\infty$ αν έχει ίδια τάξη μεγέθους στο $+\infty$ με την a^x για κάποιον $a \in (0,1)$ ή με την $(\log x)^c$ για κάποιον $c < 0$, αντιστοίχως.
Αποδείξτε ότι κάθε συνάρτηση με αντίστροφη πολυωνυμική ή αντίστροφη εκθετική ή αντίστροφη λογαριθμική τάξη μεγέθους στο $+\infty$ έχει όριο 0 στο $+\infty$.
Αποδείξτε ότι στο $+\infty$ κάθε αντίστροφη εκθετική τάξη μεγέθους είναι μικρότερη από κάθε αντίστροφη πολυωνυμική τάξη μεγέθους και ότι κάθε αντίστροφη πολυωνυμική τάξη μεγέθους είναι μικρότερη από κάθε αντίστροφη λογαριθμική τάξη μεγέθους.
Ιεραρχήστε τις αντίστροφες πολυωνυμικές τάξεις μεγέθους μεταξύ τους και κάντε το ίδιο για τις αντίστροφες εκθετικές και τις αντίστροφες λογαριθμικές τάξεις μεγέθους.
Αποδείξτε ότι κάθε ρητή συνάρτηση $\frac{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m}$, όπου $a_n, b_m \neq 0$ και $n < m$, έχει αντίστροφη πολυωνυμική τάξη μεγέθους στο $+\infty$.
Έστω οι συναρτήσεις $e^{-x}+2e^{-x^2}$, $\frac{1}{\log(x+\log x)}$, $\log\left(e^{1/x}+\frac{1}{x^2}\right)$. Κατατάξτε τις τάξεις μεγέθους τους στο $+\infty$ σε αντίστροφες πολυωνυμικές, αντίστροφες εκθετικές και αντίστροφες λογαριθμικές.

5.8.5. Έστω $f(x) - (a + bx + cx^2 + dx^3) = o(x^3)$ στον 0. Αποδείξτε διαδοχικά ότι $f(x) - (a + bx + cx^2) = o(x^2)$, $f(x) - (a + bx) = o(x)$ και $f(x) - a = o(1)$ στον 0.
Βρείτε a, b, c, d ώστε $\frac{x}{e^x-1} - (a + bx + cx^2 + dx^3) = o(x^3)$ στον 0.

5.8.6. Ξαναδείτε το αποτέλεσμα της άσκησης 5.6.11[α]. Έστω $a < \xi < b$ και έστω ότι η $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ είναι $n-1$ φορές παραγωγίσιμη στο (a,b). Αν υπάρχει η $f^{(n)}(\xi)$ και είναι αριθμός, αποδείξτε ότι

$$f(x) - \big(f(\xi) + \tfrac{f^{(1)}(\xi)}{1!}(x-\xi)^1 + \cdots + \tfrac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n\big) = \mathrm{o}\big((x-\xi)^n\big) \quad \text{στον } \xi.$$

Αποδείξτε ότι:
(i) $\frac{1}{1-x} - (1 + x + \cdots + x^n) = \mathrm{o}(x^n)$ στον 0.
(ii) $e^x - \big(1 + \frac{1}{1!}x + \cdots + \frac{1}{n!}x^n\big) = \mathrm{o}(x^n)$ στον 0.
(iii) $\log \frac{1}{1-x} - \big(x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{n}x^n\big) = \mathrm{o}(x^n)$ στον 0.
(iv) $\log(1+x) - \big(x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n\big) = \mathrm{o}(x^n)$ στον 0.
(v) $\cos x - \big(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{(-1)^m}{(2m)!}x^{2m}\big) = \mathrm{o}(x^{2m})$ στον 0 για $m \geq 0$.
(vi) $\sin x - \big(\frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)!}x^{2m-1}\big) = \mathrm{o}(x^{2m-1})$ στον 0 για $m \geq 1$.
(vii) $\arctan x - \big(x - \frac{1}{3}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^{m-1}}{2m-1}x^{2m-1}\big) = \mathrm{o}(x^{2m-1})$ στον 0 για $m \geq 1$.

5.8.7. Ποιοί είναι οι κύριοι όροι των $e^{2x}\log x - x^5 e^x$, $x\log x - \frac{x^2}{\log x} + x\sqrt{x}\log(\log x)$, $x^2\log x - x^2 + 3x\sin x$ στο $+\infty$;
Ποιοί είναι οι κύριοι όροι των $\frac{2}{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt{x}}$, $1 + 2x - x\sqrt{x}$, $\frac{1}{(\sin x)^2} + \frac{3}{x} - \frac{1}{x\sqrt{x}}$ στον 0;

5.8.8. Βρείτε, αν υπάρχει, συνάρτηση $f : [1,+\infty) \to (0,+\infty)$ ώστε, για κάθε $a > 0$ να είναι $f(x) = \mathrm{o}(e^{ax})$ και $x^a = \mathrm{o}(f(x))$ στο $+\infty$.

5.8.9. Αν $f(x) = \mathrm{o}\big(g(x)\big)$ κοντά στο ξ, αποδείξτε ότι $f(x) = \mathrm{O}\big(g(x)\big)$ στο ξ. Αυτό το γράφουμε συνοπτικά: $\mathrm{o}\big(g(x)\big) = \mathrm{O}\big(g(x)\big)$ στο ξ. Προσέξτε: *δεν* ισχύει $\mathrm{O}\big(g(x)\big) = \mathrm{o}\big(g(x)\big)$.
Είδαμε ότι, αν $f_1(x) = \mathrm{o}\big(g(x)\big)$ και $f_2(x) = \mathrm{o}\big(g(x)\big)$ στο ξ, τότε $f_1(x) + f_2(x) = \mathrm{o}\big(g(x)\big)$ στο ξ. Αυτό το γράφουμε συνοπτικά: $\mathrm{o}\big(g(x)\big) + \mathrm{o}\big(g(x)\big) = \mathrm{o}\big(g(x)\big)$ στο ξ. Αποδείξτε και τα ανάλογα: $\mathrm{O}\big(g(x)\big) + \mathrm{O}\big(g(x)\big) = \mathrm{O}\big(g(x)\big)$, $\mathrm{o}\big(g_1(x)\big) \cdot \mathrm{O}\big(g_2(x)\big) = \mathrm{o}\big(g_1(x)g_2(x)\big)$ και $\mathrm{O}\big(g_1(x)\big) \cdot \mathrm{O}\big(g_2(x)\big) = \mathrm{O}\big(g_1(x)g_2(x)\big)$ στο ξ.

Βασική βιβλιογραφία.

Apostol, T. (1974) *Mathematical Analysis, Ch 5.* Addison-Wesley.

Bartle, R. (1967) *The Elements of Real Analysis, Ch V.* Wiley.

Bartle, R. & Sherbert, D. (2011) *Introduction to Real Analysis, Ch 6.* Wiley.

Beals, R. (2004) *Analysis, an Introduction, Ch 8.* Cambridge Univ. Press.

Beardon, A. (1997) *Limits: a New Approach to Real Analysis, Ch 9.* Springer.

Berberian, S. (1994) *A First Course in Real Analysis, Ch 8.* Springer.

Brand, L. (2006) *Advanced Calculus, Ch 3.* Dover.

Courant, R. (1988) *Differential and Integral Calculus, Vol I, Ch II-III, V-VII.* Wiley.

Courant, R. & John, F. (1989) *Introduction to Calculus and Analysis, Vol I, Ch 2-6.* Springer.

Davidson, K. & Donsig, A. (2010) *Real Analysis and Applications, Ch 6.* Springer.

Ghorpade, S. & Limaye, B. (2006) *A Course in Calculus and Real Analysis, Ch 4-5.* Springer.

Goldberg, R. (1976) *Methods of Real Analysis, Ch 7-8.* Wiley.

Grauert, H. & Lieb, I. (1967) *Differential- und Integralrechnung, Band I, Kap V-VI.* Springer.

Hardy, G. (2008) *A Course of Pure Mathematics, Ch VI-VII.* Cambridge Univ. Press.

Krantz, S. (2013) *Real Analysis and Foundations, Ch 7.* Chapman and Hall.

Landau, E. (2001) *Differential and Integral Calculus, Ch 5-7, 9-11.* American Math. Society & Chelsea.

Lang, S. (1997) *Undergraduate Analysis, Ch III-IV.* Springer.

Nikolsky, S. (1977) *A Course of Mathematical Analysis, Vol 1, Ch 5.* Mir Publishers.

Protter, M. (1998) *Basic Elements of Real Analysis, Ch 4.* Springer.

Pugh, C. (2015) *Real Mathematical Analysis, Ch 3.* Springer.

Rosenlicht, M. (1986) *Introduction to Analysis, Ch V.* Dover.

Ross, K. (2013) *Elementary Analysis, Ch 5.* Springer.

Rudin, W. (1976) *Principles of Mathematical Analysis, Ch 5.* McGraw-Hill.

Smirnov, V. (1964) *A Course of Higher Mathematics, Vol 1, Ch II.* Pergammon Press.

Spivak, M. (1994) *Calculus, Ch 9-12, 20.* Cambridge Univ. Press.

Stoll, M. (2000) *Introduction to Real Analysis, Ch 5.* Pearson.

Συμπληρωματική βιβλιογραφία.

Beardon, A. (1997) *Limits: a New Approach to Real Analysis, Ch 3-4.* Springer.

Beckenbach, E. & Bellman, R. (1961) *Inequalities, Ch 1.* Springer.

Boas, R. (1996) *A Primer of Real Functions, Ch 2.* Math. Association of America.

Dieudonné, J. (1971) *Infinitesimal Calculus, Ch III.* Hermann.

Goffman, C. (1966) *Introduction to Real Analysis, Ch 7.* Harper and Row.

Goffman, C. (1953) *Real Functions, Ch 9.* Rinehart.

Graves, L. (2009) *The Theory of Functions of Real Variables, Ch V.* Dover.

Hardy, G., Littlewood, J. & Polya, G. (1952) *Inequalities, Ch I-IV.* Cambridge Univ. Press.

Mitrinović, D. (1964) *Elementary Inequalities.* Noordhoff.

Mitrinović, D., Pečarić, J. & Fink, A. (1993) *Classical and New Inequalities in Analysis.* Springer.

Tikhomirov, V. (1991) *Stories about Maxima and Minima.* American Math. Society & Math. Association of America.

Κεφάλαιο 6

Ολοκληρώματα Riemann.

6.1 Διαμερίσεις και αθροίσματα Darboux.

ΟΡΙΣΜΟΣ 6.1. *Ονομάζουμε* **διαμέριση** *του διαστήματος* $[a, b]$ *οποιοδήποτε πεπερασμένο υποσύνολο του* $[a, b]$ *το οποίο περιέχει τουλάχιστον τους* a, b. *Κάθε διαμέριση του* $[a, b]$ *τη συμβολίζουμε, συνήθως,*

$$\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\},$$

όπου $n \in \mathbb{N}$ *και*

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Η Δ *ονομάζεται* **διαμέριση** $n + 1$ *σημείων του* $[a, b]$ *και τα* $x_0, \ldots, x_n$ *ονομάζονται* Δ**-σημεία**. *Το* x_k *ονομάζεται* k*-οστό* Δ*-σημείο. Η* Δ *χωρίζει το* $[a, b]$ *στα* n *διαστήματα* $[x_0, x_1], \dots, [x_{n-1}, x_n]$, *τα οποία ονομάζονται* Δ**-διαστήματα**. *Το* $[x_{k-1}, x_k]$ *ονομάζεται* k*-οστό* Δ*-διάστημα.*

Η απλούστερη διαμέριση του $[a, b]$ είναι η $\Delta = \{a = x_0, x_1 = b\}$. Αυτή ορίζει *ένα* μόνο Δ-διάστημα, το $[x_0, x_1] = [a, b]$. Αυτή είναι η μοναδική διαμέριση δύο σημείων του $[a, b]$. Όμως, υπάρχουν άπειρες διαμερίσεις τριών σημείων του $[a, b]$. Πράγματι, κάθε $x_1 \in (a, b)$ ορίζει διαμέριση $\{a = x_0, x_1, x_2 = b\}$ τριών σημείων. Προφανώς, υπάρχουν άπειρες διαμερίσεις τεσσάρων σημείων, πέντε σημείων κ.τ.λ.

Η απλούστερη διαμέριση $n + 1$ σημείων Δ του $[a, b]$ είναι η διαμέριση σε n *ισομήκη* υποδιαστήματα. Πώς κατασκευάζουμε αυτήν την διαμέριση; Επειδή το πλήθος των Δ-διαστημάτων είναι n και το συνολικό τους μήκος $b-a$, το μήκος καθενός από αυτά είναι $\frac{b-a}{n}$. Επομένως, τα Δ-σημεία είναι τα $x_0 = a$, $x_1 = a + \frac{b-a}{n}$, $x_2 = a + 2\frac{b-a}{n}$ και ούτω καθ' εξής: για κάθε $k = 0, \dots, n$ το k-οστό Δ-σημείο είναι το

$$x_k = a + k\tfrac{b-a}{n}.$$

Πράγματι, τότε το μήκος του $[x_{k-1}, x_k]$ είναι

$$x_k - x_{k-1} = (a + k\tfrac{b-a}{n}) - (a + (k-1)\tfrac{b-a}{n}) = \tfrac{b-a}{n}$$

και το n-οστό Δ-σημείο είναι το $x_n = a + n\frac{b-a}{n} = b$.

Τονίζουμε ότι, αν $n \geq 2$, υπάρχουν άπειρες διαμερίσεις $n+1$ σημείων του $[a, b]$ και όχι μόνο η διαμέριση σε ισομήκη υποδιαστήματα. Για παράδειγμα, η $\{0, \frac{3}{4}, \frac{7}{9}, \frac{13}{15}, \frac{23}{24}, 1\}$ είναι μια διαμέριση 6 σημείων του $[0, 1]$ και η $\{0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1\}$ είναι η διαμέριση 6 σημείων σε ισομήκη υποδιαστήματα του $[0, 1]$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 6.2. *Έστω* Δ', Δ'' *δύο διαμερίσεις του* $[a, b]$. *Η* Δ'' *χαρακτηρίζεται* **λεπτότερη** *από την* Δ' *αν* $\Delta' \subseteq \Delta''$ *ή, με άλλα λόγια, αν κάθε* Δ'*-σημείο είναι και* Δ''*-σημείο ή, με άλλα λόγια, αν η* Δ'' *περιέχει τα σημεία της* Δ' *και πιθανόν επιπλέον σημεία.*

Παράδειγμα 6.1.1. Η διαμέριση $\Delta'' = \{0, \frac{1}{8}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, 1\}$ είναι λεπτότερη από τη διαμέριση $\Delta' = \{0, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{3}{4}, 1\}$ του $[0, 1]$.

Παράδειγμα 6.1.2. Από τις διαμερίσεις $\Delta' = \{0, \frac{1}{8}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{7}{8}, 1\}$, $\Delta'' = \{0, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{3}{4}, 1\}$ του $[0, 1]$ καμιά δεν είναι λεπτότερη από την άλλη.

ΟΡΙΣΜΟΣ 6.3. *Έστω Δ', Δ'' δύο διαμερίσεις του $[a, b]$. Τότε η $\Delta = \Delta' \cup \Delta''$ είναι διαμέριση του $[a, b]$ και ονομάζεται* **κοινή εκλέπτυνση** *των Δ', Δ''. Προφανώς, είναι $\Delta' \subseteq \Delta$ και $\Delta'' \subseteq \Delta$, δηλαδή η Δ είναι λεπτότερη από την Δ' και από την Δ''.*

Παράδειγμα 6.1.3. Στο παράδειγμα 6.1.1 η κοινή εκλέπτυνση των Δ', Δ'' είναι η Δ'', ενώ στο παράδειγμα 6.1.2 η κοινή εκλέπτυνση των Δ', Δ'' είναι η $\Delta = \{0, \frac{1}{8}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, 1\}$.

Το λήμμα 6.1 λέει ότι η κοινή εκλέπτυνση των διαμερίσεων Δ', Δ'' του $[a, b]$ είναι, από όλες τις διαμερίσεις του $[a, b]$ που είναι λεπτότερες απο την Δ' και από την Δ'', εκείνη που έχει τα λιγότερα σημεία.

ΛΗΜΜΑ 6.1. *Έστω Δ', Δ'' διαμερίσεις του $[a, b]$. Τότε κάθε διαμέριση του $[a, b]$ οι οποία είναι λεπτότερη από την Δ' και την Δ'' είναι λεπτότερη και από την κοινή εκλέπτυνση $\Delta' \cup \Delta''$.*

Απόδειξη. Έστω διαμέριση Δ''' του $[a, b]$ λεπτότερη από την Δ' και από την Δ''. Δηλαδή, έστω $\Delta' \subseteq \Delta'''$ και $\Delta'' \subseteq \Delta'''$. Τότε $\Delta' \cup \Delta'' \subseteq \Delta'''$, οπότε η Δ''' είναι λεπτότερη από την $\Delta' \cup \Delta''$. $\square$

ΟΡΙΣΜΟΣ 6.4. *Έστω φραγμένη $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ και διαμέριση $\Delta = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$ του $[a, b]$. Για κάθε Δ-διάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ συμβολίζουμε*

$$l_k = \inf\{f(x) \,|\, x_{k-1} \leq x \leq x_k\}, \qquad u_k = \sup\{f(x) \,|\, x_{k-1} \leq x \leq x_k\}.$$

Ονομάζουμε **κάτω άθροισμα Darboux** *της f ως προς την Δ στο $[a, b]$ το*

$$\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = \sum_{k=1}^{n} l_k(x_k - x_{k-1}) = l_1(x_1 - x_0) + \cdots + l_n(x_n - x_{n-1})$$

και **άνω άθροισμα Darboux** *της f ως προς την Δ στο $[a, b]$ το*

$$\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x_k - x_{k-1}) = u_1(x_1 - x_0) + \cdots + u_n(x_n - x_{n-1}).$$

Στην υποενότητα 6.2.1 θα δούμε μερικά πράγματα για το γεωμετρικό περιεχόμενο των κάτω και άνω αθροισμάτων Darboux στην περίπτωση μη-αρνητικής συνάρτησης f. Εκεί μπορείτε να δείτε το σχήμα 32 για να πάρετε μια ιδέα.

Ακολουθούν δύο γενικά αλλά πολύ χαρακτηριστικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 6.1.4. Έστω *αύξουσα* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ και διαμέριση $\Delta = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$ του $[a, b]$. Τότε σε κάθε $[x_{k-1}, x_k]$ η f έχει ελάχιστη τιμή $f(x_{k-1})$ και μέγιστη τιμή $f(x_k)$. Άρα $l_k = f(x_{k-1})$ και $u_k = f(x_k)$ και, επομένως,

$$\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}), \quad \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Αν η f είναι φθίνουσα, το μόνο που αλλάζει είναι ότι $l_k = f(x_k)$ και $u_k = f(x_{k-1})$ και, επομένως,

$$\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k - x_{k-1}), \quad \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}).$$

Παράδειγμα 6.1.5. Έστω *συνεχής* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ και διαμέριση $\Delta = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$ του $[a, b]$. Τότε, σύμφωνα με το θεώρημα μέγιστης - ελάχιστης τιμής, σε κάθε $[x_{k-1}, x_k]$ υπάρχουν ζ_k και η_k ώστε να ισχύει $f(\zeta_k) \leq f(x) \leq f(\eta_k)$ για κάθε $x \in [x_{k-1}, x_k]$. Άρα $l_k = f(\zeta_k)$ και $u_k = f(\eta_k)$, οπότε

$$\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(x_k - x_{k-1}), \quad \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = \sum_{k=1}^{n} f(\eta_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Θα κάνουμε μερικές παρατηρήσεις οι οποίες θα χρησιμοποιηθούν πολλές φορές παρακάτω και, μερικές φορές, ακόμη και *χωρίς ιδιαίτερη επισήμανση*.

Παρατήρηση 1. Έστω φραγμένη $f : [c,d] \to \mathbb{R}$. Το σύνολο τιμών $\{f(x) \,|\, c \leq x \leq d\}$ είναι φραγμένο και, αν $l = \inf\{f(x) \,|\, c \leq x \leq d\}$ και $u = \sup\{f(x) \,|\, c \leq x \leq d\}$, τότε είναι $l \leq u$.
Επίσης, έστω $[c', d'] \subseteq [c, d]$ και $l' = \inf\{f(x) \,|\, c' \leq x \leq d'\}$ και $u' = \sup\{f(x) \,|\, c' \leq x \leq d'\}$. Τότε για κάθε $x \in [c', d']$ ισχύει $x \in [c, d]$, οπότε $l \leq f(x) \leq u$. Άρα οι l και u είναι, αντιστοίχως, κάτω φράγμα και άνω φράγμα του συνόλου $\{f(x) \,|\, c' \leq x \leq d'\}$, οπότε $l \leq l' \leq u' \leq u$. Με λόγια:

Όταν το διάστημα μικραίνει, τότε το infimum της συνάρτησης μεγαλώνει (με την ευρεία έννοια) και το supremum της μικραίνει (με την ευρεία έννοια).

Παρατήρηση 2. Από $\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = \sum_{k=1}^{n} l_k(x_k - x_{k-1})$ και $\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x_k - x_{k-1})$ προκύπτει με αφαίρεση η ισότητα

$$\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = \textstyle\sum_{k=1}^{n}(u_k - l_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Επειδή είναι $l_k \leq u_k$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$, κάθε όρος του τελευταίου αθροίσματος είναι μη-αρνητικός, οπότε και *το συνολικό άθροισμα είναι μη-αρνητικό*. Επίσης, αν παραλείψουμε κάποιους όρους του αθροίσματος, *το άθροισμα που θα απομείνει θα είναι κι αυτό μη-αρνητικό και μικρότερο ή ίσο του αρχικού αθροίσματος*.

Παρατήρηση 3. Θεωρούμε $l = \inf\{f(x) \,|\, c \leq x \leq d\}$ και $u = \sup\{f(x) \,|\, c \leq x \leq d\}$, όπως στην πρώτη παρατήρηση, και έστω ότι ισχύει $f(s) - f(t) \leq w$ για κάθε $s, t \in [c, d]$.
Τότε για κάθε $s \in [c, d]$ ισχύει: $f(s) - w \leq f(t)$ για κάθε $t \in [c, d]$. Άρα για κάθε $s \in [c, d]$ ο $f(s) - w$ είναι κάτω φράγμα του συνόλου $\{f(x) \,|\, c \leq x \leq d\}$ και, επομένως, είναι $f(s) - w \leq l$ ή, ισοδύναμα, $f(s) \leq w + l$. Τώρα, ο $w + l$ είναι άνω φράγμα του συνόλου $\{f(x) \,|\, c \leq x \leq d\}$, οπότε είναι $u \leq w + l$. Άρα $u - l \leq w$.
Το ίδιο πράγμα αποδεικνύεται και με άλλο τρόπο. Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $x' \in [c, d]$ ώστε $f(x') > u - \frac{\epsilon}{2}$ και υπάρχει $x'' \in [c, d]$ ώστε $f(x'') < l + \frac{\epsilon}{2}$. Άρα $u - l - \epsilon < f(x') - f(x'') \leq w$. Άρα ισχύει $u - l - w < \epsilon$ για κάθε $\epsilon > 0$, οπότε $u - l - w \leq 0$ και, επομένως, $u - l \leq w$.
Αποδείξαμε, λοιπόν, με δύο τρόπους το εξής συμπέρασμα:

Αν ένας αριθμός είναι μεγαλύτερος ή ίσος όλων των διαφορών των τιμών της συνάρτησης σε ένα διάστημα, τότε είναι μεγαλύτερος ή ίσος της διαφοράς του supremum και του infimum της συνάρτησης στο διάστημα.

ΛΗΜΜΑ 6.2. *Έστω φραγμένη $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ και διαμέριση Δ του $[a, b]$. Αν u και l είναι το supremum και το infimum της f στο $[a, b]$, τότε*

$$l(b - a) \leq \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) \leq \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) \leq u(b - a).$$

Απόδειξη. Έστω $\Delta = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$. Για κάθε $k = 1, \ldots, n$ είναι $[x_{k-1}, x_k] \subseteq [a, b]$, οπότε από την Παρατήρηση 1 έχουμε

$$l \leq l_k \leq u_k \leq u$$

και, επομένως,

$$l(x_k - x_{k-1}) \leq l_k(x_k - x_{k-1}) \leq u_k(x_k - x_{k-1}) \leq u(x_k - x_{k-1}).$$

Με άθροιση συνεπάγεται

$$\textstyle\sum_{k=1}^{n} l(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{n} l_k(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{n} u_k(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{n} u(x_k - x_{k-1}).$$

Το αριστερό άθροισμα είναι ίσο με $l \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) = l(b - a)$ και το δεξιό άθροισμα είναι ίσο με $u \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) = u(b - a)$. Τα δύο μεσαία αθροίσματα είναι τα $\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta)$ και $\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta)$. □

Το λήμμα 6.3 είναι πολύ βασικό για την ανάπτυξη της θεωρίας. Λέει ότι, *όταν εκλεπτύνεται η διαμέριση, το άνω άθροισμα Darboux μικραίνει (με την ευρεία έννοια) και το κάτω άθροισμα Darboux μεγαλώνει (με την ευρεία έννοια).*

ΛΗΜΜΑ 6.3. *Έστω φραγμένη $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ και διαμερίσεις Δ', Δ'' του $[a,b]$. Αν η Δ'' είναι λεπτότερη από την Δ', τότε*

$$\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta') \le \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta'') \le \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta'') \le \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta').$$

Απόδειξη. Έστω $\Delta' = \{a = x_0, \dots, x_n = b\}$. Η Δ'' περιέχει τα Δ'-σημεία και πιθανόν περισσότερα σημεία. Έτσι, σε κάθε Δ'-διάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ ενδέχεται να υπάρχουν και άλλα Δ''-σημεία, εκτός των x_{k-1} και x_k. Θεωρούμε, τώρα, σε κάθε Δ'-διάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ όλα τα Δ''-σημεία τα οποία περιέχονται στο διάστημα αυτό και με αυτά τα σημεία δημιουργούμε μια διαμέριση Δ''_k του διαστήματος $[x_{k-1}, x_k]$. (Αν η Δ'' περιέχει μόνο τα σημεία x_{k-1} και x_k από το $[x_{k-1}, x_k]$ τότε η Δ''_k είναι διαμέριση δύο μόνο σημείων. Αλλιώς η Δ''_k έχει περισσότερα σημεία του $[x_{k-1}, x_k]$.) Έτσι, η Δ'' χωρίζεται σε μικρότερες διαδοχικές διαμερίσεις $\Delta''_0, \dots, \Delta''_n$, μια Δ''_k για κάθε διάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ της Δ'. Δηλαδή,

$$\Delta'' = \textstyle\bigcup_{k=1}^n \Delta''_k.$$

Είναι σαφές ότι τα Δ''_k-διαστήματα είναι εκείνα ακριβώς τα Δ''-διαστήματα τα οποία περιέχονται στο $[x_{k-1}, x_k]$. Παρατηρούμε, τώρα, ότι οι όροι του αθροίσματος $\overline{\Sigma}(f; x_{k-1}, x_k; \Delta''_k)$ είναι εκείνοι ακριβώς οι όροι του αθροίσματος $\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta'')$ οι οποίοι αντιστοιχούν στα Δ''-διαστήματα τα οποία περιέχονται στο $[x_{k-1}, x_k]$. Επομένως,

$$\begin{aligned} \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta'') &= \textstyle\sum_{k=1}^n \overline{\Sigma}(f;x_{k-1},x_k;\Delta''_k) \\ \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta'') &= \textstyle\sum_{k=1}^n \underline{\Sigma}(f;x_{k-1},x_k;\Delta''_k). \end{aligned} \tag{6.1}$$

Εφαρμόζοντας το λήμμα 6.2 σε κάθε $[x_{k-1}, x_k]$, βρίσκουμε

$$l_k(x_k - x_{k-1}) \le \underline{\Sigma}(f;x_{k-1},x_k;\Delta''_k) \le \overline{\Sigma}(f;x_{k-1},x_k;\Delta''_k) \le u_k(x_k - x_{k-1}) \tag{6.2}$$

για κάθε $k = 1, \dots, n$. Το τελικό συμπέρασμα προκύπτει αθροίζοντας τις ανισότητες αυτές για $k = 1, \dots, n$ και χρησιμοποιώντας τις (6.1) για τα δύο μεσαία αθροίσματα που θα προκύψουν. Από την άθροιση των αριστερών και των δεξιών όρων της (6.2) προκύπτουν τα $\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta')$ και $\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta')$, αντιστοίχως. Από την άθροιση των μεσαίων όρων της (6.2) προκύπτουν, με χρήση των (6.1), τα $\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta'')$ και $\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta'')$. □

Και το λήμμα 6.4 είναι πολύ βασικό. Λέει ότι *κάθε κάτω άθροισμα Darboux είναι μικρότερο ή ίσο κάθε άνω αθροίσματος Darboux, ακόμη κι αν τα δύο αυτά αθροίσματα Darboux δεν προέρχονται από την ίδια διαμέριση.*

ΛΗΜΜΑ 6.4. *Έστω φραγμένη $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Τότε είναι*

$$\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta') \le \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta'')$$

για κάθε δύο διαμερίσεις Δ', Δ'' του $[a,b]$.

Απόδειξη. Θεωρούμε την κοινή εκλέπτυνση $\Delta = \Delta' \cup \Delta''$.
Η Δ είναι λεπτότερη από την Δ' και από την Δ'', οπότε από το λήμμα 6.3 έχουμε

$$\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta') \le \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta), \qquad \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) \le \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta'').$$

Επίσης, από το λήμμα 6.2 (δηλαδή για μία διαμέριση) συνεπάγεται

$$\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) \le \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta).$$

Από τις τρεις αυτές ανισότητες συνεπάγεται $\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta') \le \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta'')$. □

Τονίζουμε ότι, για να ορίσουμε τα άνω και κάτω αθροίσματα Darboux μιας συνάρτησης σε ένα κλειστό και φραγμένο διάστημα, *προϋποτίθεται* ότι η συνάρτηση είναι φραγμένη στο διάστημα.

Ασκήσεις.

6.1.1. Έστω φραγμένη $f:[a,b]\to\mathbb{R}$.
Αν υπάρχει διαμέριση Δ του $[a,b]$ ώστε $\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)=\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)$, αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή στο $[a,b]$.
Αν υπάρχουν διαμερίσεις Δ', Δ'' του $[a,b]$ ώστε $\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta')=\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta'')$, αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή στο $[a,b]$.

6.1.2. Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι, αν η f δεν είναι άνω φραγμένη στο $[a,b]$, τότε για κάθε διαμέριση Δ του $[a,b]$ είναι $\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)=+\infty$ και ότι, αν η f δεν είναι κάτω φραγμένη στο $[a,b]$, τότε για κάθε διαμέριση Δ του $[a,b]$ είναι $\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)=-\infty$.

6.1.3. Έστω $f:[c,d]\to\mathbb{R}$ και $l=\inf\{f(x)\,|\,c\leq x\leq d\}$ και $u=\sup\{f(x)\,|\,c\leq x\leq d\}$. Ορίζουμε $\omega(f;c,d)=u-l$.[1]
Παρατηρήστε ότι $0\leq\omega(f;c,d)\leq+\infty$ και αποδείξτε ότι $\omega(f;c,d)<+\infty$ αν και μόνο αν η f είναι φραγμένη στο $[c,d]$.
Αποδείξτε ότι $\omega(f;c,d)=\sup\{f(s)-f(t)\,|\,s,t\in[c,d]\}=\sup\{|f(s)-f(t)|\,|\,s,t\in[c,d]\}$.
Αν $[c',d']\subseteq[c,d]$, αποδείξτε ότι $\omega(f;c',d')\leq\omega(f;c,d)$.

6.2 Ολοκλήρωμα. Ο ορισμός του Darboux.

ΟΡΙΣΜΟΣ 6.5. *Έστω φραγμένη $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Ονομάζουμε* **κάτω ολοκλήρωμα** *της f στο $[a,b]$ το*

$$\underline{\int_a^b} f=\sup\{\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)\,|\,\Delta \text{ διαμέριση του } [a,b]\}\tag{6.3}$$

και **άνω ολοκλήρωμα** *της f στο $[a,b]$ το*

$$\overline{\int_a^b} f=\inf\{\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)\,|\,\Delta \text{ διαμέριση του } [a,b]\}.\tag{6.4}$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.1. *Έστω φραγμένη $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ και u και l το supremum και το infimum της f στο $[a,b]$. Τότε*

$$l(b-a)\leq\underline{\int_a^b} f\leq\overline{\int_a^b} f\leq u(b-a).$$

Απόδειξη. Γνωρίζουμε από το λήμμα 6.2 ότι ισχύει $\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)\leq u(b-a)$ για κάθε διαμέριση Δ του $[a,b]$. Επειδή, λόγω της (6.4), ισχύει $\overline{\int_a^b} f\leq\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)$ για κάθε Δ, συνεπάγεται $\overline{\int_a^b} f\leq u(b-a)$.
Ομοίως, από το λήμμα 6.2 ισχύει $l(b-a)\leq\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)$ για κάθε διαμέριση Δ του $[a,b]$ και, επειδή, λόγω της (6.3), ισχύει $\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)\leq\underline{\int_a^b} f$ για κάθε Δ, συνεπάγεται $l(b-a)\leq\underline{\int_a^b} f$.
Τώρα, έστω τυχούσες διαμερίσεις Δ' και Δ'' του $[a,b]$.
Από το λήμμα 6.4 συνεπάγεται $\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta')\leq\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta'')$.
Άρα το $\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta')$ είναι κάτω φράγμα του συνόλου $\{\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)\,|\,\Delta$ διαμέριση του $[a,b]\}$, οπότε, λόγω της (6.4), είναι $\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta')\leq\overline{\int_a^b} f$.
Άρα το $\overline{\int_a^b} f$ είναι άνω φράγμα του συνόλου $\{\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)\,|\,\Delta$ διαμέριση του $[a,b]\}$ και, επομένως, λόγω της (6.3), είναι $\underline{\int_a^b} f\leq\overline{\int_a^b} f$. □

[1] Το $\omega(f;c,d)$ ονομάζεται **ταλάντωση** της f στο διάστημα $[c,d]$. Υπάρχουν και οι σχετικές έννοιες της ταλάντωσης *σε σημείο* στις ασκήσεις 3.6.2 και 4.1.16.

ΟΡΙΣΜΟΣ 6.6. *Έστω φραγμένη* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. *Η* f *χαρακτηρίζεται* **ολοκληρώσιμη** *ή, πιο σωστά,* **Riemann ολοκληρώσιμη** *στο* $[a, b]$ *αν* $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$. *Αν η* f *είναι ολοκληρώσιμη στο* $[a, b]$, *τότε την κοινή τιμή των* $\underline{\int_a^b} f$ *και* $\overline{\int_a^b} f$ *ονομάζουμε* **ολοκλήρωμα** *ή, πιο σωστά,* **Riemann ολοκλήρωμα** *της* f *στο* $[a, b]$ *και τη συμβολίζουμε* $\int_a^b f$. *Δηλαδή, αν η* f *είναι ολοκληρώσιμη στο* $[a, b]$, *ορίζουμε*

$$\int_a^b f = \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

Ο ορισμός αυτός του ολοκληρώματος Riemann είναι ο ορισμός τον οποίο έδωσε ο Darboux. Στην ενότητα 6.5 θα γνωρίσουμε και τον ορισμό του ολοκληρώματος Riemann που έδωσε ο Riemann.

Είναι πολύ συνηθισμένο να συμβολίζουμε τα $\int_a^b f$, $\underline{\int_a^b} f$ και $\overline{\int_a^b} f$ με τρόπο ώστε να φαίνεται η ανεξάρτητη μεταβλητή της συνάρτησης f. Δηλαδή, γράφουμε

$$\int_a^b f(x)\,dx, \qquad \underline{\int_a^b} f(x)\,dx, \qquad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Φυσικά, τα ολοκληρώματα αυτά παραμένουν αμετάβλητα αν, αλλάζοντας το σύμβολο της ανεξάρτητης μεταβλητής, τα συμβολίσουμε $\int_a^b f(t)\,dt$, $\underline{\int_a^b} f(t)\,dt$ και $\overline{\int_a^b} f(t)\,dt$, αντιστοίχως.

Παράδειγμα 6.2.1. Έστω σταθερή συνάρτηση c στο διάστημα $[a, b]$.
Έστω διαμέριση $\Delta = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$ του $[a, b]$. Σε κάθε $[x_{k-1}, x_k]$ η συνάρτηση έχει μόνο μία τιμή, τον c, οπότε $l_k = u_k = c$ και, επομένως,

$$\underline{\Sigma}(c; a, b; \Delta) = \sum_{k=1}^n c(x_k - x_{k-1}) = c(b-a), \quad \overline{\Sigma}(c; a, b; \Delta) = \sum_{k=1}^n c(x_k - x_{k-1}) = c(b-a).$$

Άρα τα σύνολα $\{\underline{\Sigma}(c; a, b; \Delta) \,|\, \Delta \text{ διαμέριση του } [a, b]\}$, $\{\overline{\Sigma}(c; a, b; \Delta) \,|\, \Delta \text{ διαμέριση του } [a, b]\}$ έχουν ένα μόνο στοιχείο, τον αριθμό $c(b-a)$. Άρα το supremum του πρώτου συνόλου είναι ο $c(b-a)$ και το infimum του δεύτερου συνόλου είναι, επίσης, ο $c(b-a)$. Δηλαδή,

$$\underline{\int_a^b} c\,dx = c(b-a), \qquad \overline{\int_a^b} c\,dx = c(b-a)$$

και, επομένως, η c είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και

$$\int_a^b c\,dx = c(b-a).$$

Παράδειγμα 6.2.2. Έστω η $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in [a, b] \cap \mathbb{Q} \\ 0, & \text{αν } x \in [a, b] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται **συνάρτηση Dirichlet** του διαστήματος $[a, b]$.
Έστω διαμέριση $\Delta = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$ του $[a, b]$. Σε κάθε $[x_{k-1}, x_k]$ υπάρχουν ρητοί και άρρητοι, οπότε το αντίστοιχο σύνολο τιμών $\{f(x) \,|\, x_{k-1} \le x \le x_k\}$ είναι το δισύνολο $\{0, 1\}$. Άρα $l_k = 0$ και $u_k = 1$. Άρα

$$\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = \sum_{k=1}^n 0(x_k - x_{k-1}) = 0, \quad \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = \sum_{k=1}^n 1(x_k - x_{k-1}) = b - a.$$

Άρα το $\{\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) \,|\, \Delta \text{ διαμέριση του } [a, b]\}$ είναι το μονοσύνολο $\{0\}$, οπότε το supremum του είναι ο 0, και το $\{\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) \,|\, \Delta \text{ διαμέριση του } [a, b]\}$ είναι το μονοσύνολο $\{b-a\}$, οπότε το infimum του είναι ο $b-a$. Δηλαδή,

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = 0, \qquad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = b - a > 0.$$

Άρα $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$, οπότε η f *δεν* είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και *δεν* ορίζεται το $\int_a^b f(x)\,dx$.

Παρατηρήστε ότι, λόγω των (6.3) και (6.4) και της πρότασης 6.1, για κάθε φραγμένη $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ και για κάθε δύο διαμερίσεις Δ' και Δ'' του $[a,b]$ ισχύει

$$\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta') \leq \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta'')$$

και, στην περίπτωση που η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$,

$$\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta') \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta'').$$

Αυτές τις ανισότητες θα τις χρησιμοποιούμε συχνά από εδώ και πέρα.

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι το βασικό *θεωρητικό* κριτήριο για να αποδεικνύεται η ολοκληρωσιμότητα μιας συνάρτησης.

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΙΜΟΤΗΤΑΣ. *Έστω φραγμένη $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ αν και μόνο αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση Δ του $[a,b]$ ώστε $\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) < \epsilon$.*

Απόδειξη. Έστω ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Έστω $\epsilon > 0$. Τότε, λόγω των (6.3) και (6.4), υπάρχουν διαμερίσεις Δ' και Δ'' του $[a,b]$ ώστε

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx - \tfrac{\epsilon}{2} < \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta'), \qquad \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta'') < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \tfrac{\epsilon}{2}. \tag{6.5}$$

Θεωρούμε την κοινή εκλέπτυνση $\Delta = \Delta' \cup \Delta''$, οπότε οι ανισότητες (6.5) μαζί με το λήμμα 6.3 συνεπάγονται

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx - \tfrac{\epsilon}{2} < \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta), \qquad \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \tfrac{\epsilon}{2}. \tag{6.6}$$

Επειδή η f είναι ολοκληρώσιμη, οι ανισότητες (6.6) γράφονται

$$\int_a^b f(x)\,dx - \tfrac{\epsilon}{2} < \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta), \qquad \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) < \int_a^b f(x)\,dx + \tfrac{\epsilon}{2}. \tag{6.7}$$

Από τις ανισότητες (6.7) βρίσκουμε

$$\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) < \big(\int_a^b f(x)\,dx + \tfrac{\epsilon}{2}\big) - \big(\int_a^b f(x)\,dx - \tfrac{\epsilon}{2}\big) = \epsilon.$$

Αντιστρόφως, έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει διαμέριση Δ του $[a,b]$ ώστε

$$\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) < \epsilon.$$

Από τις (6.3) και (6.4) έχουμε $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)$ και $\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) \leq \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$, οπότε

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) < \epsilon.$$

Επειδή αυτό ισχύει για κάθε $\epsilon > 0$, συνεπάγεται

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq 0$$

και, επειδή η διαφορά στο αριστερό μέλος είναι ≥ 0, έχουμε $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$.
Άρα η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. □

Το επόμενο παράδειγμα είναι βασικό. Ένα προσεκτικό σχέδιο θα βοηθήσει.

Παράδειγμα 6.2.3. Έστω $\xi \in [a,b]$ και η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \in [a,b], x \neq \xi \\ 1, & \text{αν } x = \xi \end{cases}$
Έστω $\epsilon > 0$. Θεωρούμε συγκεκριμένη διαμέριση Δ του $[a,b]$, διακρίνοντας περιπτώσεις, ως εξής.
Πρώτη περίπτωση: $\xi = a$.
Θεωρούμε $x_1 \in (a,b)$ ώστε $x_1 - a < \epsilon$ και την $\Delta = \{a = x_0, x_1, x_2 = b\}$. Τότε $u_1 = 1$, $l_1 = 0$ και $u_2 = 0$, $l_2 = 0$. Επομένως, $\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) = u_1(x_1 - x_0) + u_2(x_2 - x_1) = x_1 - x_0 < \epsilon$ και $\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) = l_1(x_1 - x_0) + l_2(x_2 - x_1) = 0$.
Δεύτερη περίπτωση: $\xi = b$.
Θεωρούμε $x_1 \in (a,b)$ ώστε $b - x_1 < \epsilon$ και την $\Delta = \{a = x_0, x_1, x_2 = b\}$. Τότε $u_1 = 0$, $l_1 = 0$ και $u_2 = 1$, $l_2 = 0$. Επομένως, $\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) = u_1(x_1 - x_0) + u_2(x_2 - x_1) = x_2 - x_1 < \epsilon$ και $\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) = l_1(x_1 - x_0) + l_2(x_2 - x_1) = 0$.
Τρίτη περίπτωση: $a < \xi < b$.
Θεωρούμε $x_1 \in (a,\xi)$, $x_2 \in (\xi,b)$ ώστε $x_2 - x_1 < \epsilon$ και την $\Delta = \{a = x_0, x_1, x_2, x_3 = b\}$. Τότε $u_1 = 0$, $l_1 = 0$ και $u_2 = 1$, $l_2 = 0$ και $u_3 = 0$, $l_3 = 0$. Επομένως, $\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) = u_1(x_1 - x_0) + u_2(x_2 - x_1) + u_3(x_3 - x_2) = x_2 - x_1 < \epsilon$ και $\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) = l_1(x_1 - x_0) + l_2(x_2 - x_1) + l_3(x_3 - x_2) = 0$.
Σε κάθε περίπτωση, υπάρχει διαμέριση Δ του $[a,b]$ ώστε $\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) = 0$ και $\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) < \epsilon$ και, επομένως, $\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) < \epsilon$. Άρα η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.
Επιπλέον, για την ίδια Δ, ισχύει $0 = \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) < \epsilon$. Δηλαδή, για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει $0 \leq \int_a^b f(x)\,dx < \epsilon$ και, επομένως, $\int_a^b f(x)\,dx = 0$.

Αν εξαιρέσουμε τις μεθόδους του επόμενου κεφαλαίου, οι οποίες βασίζονται στη σχέση ανάμεσα στις έννοιες του ολοκληρώματος και της παραγώγου, η πρόταση 6.2 καθώς και η πρόταση 6.15 που θα δούμε λίγο πιο μετά παρέχουν τις βασικές μεθόδους υπολογισμού ολοκληρωμάτων. Οι μέθοδοι αυτές προέρχονται κατευθείαν από τον ορισμό του ολοκληρώματος.

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.2. *Έστω φραγμένη $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία διαμερίσεων (Δ_n) του $[a,b]$ ώστε $\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n) \to 0$. Στην περίπτωση αυτή,*

$$\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n) \to \int_a^b f(x)\,dx, \qquad \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n) \to \int_a^b f(x)\,dx.$$

Απόδειξη. Έστω ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Σύμφωνα με το κριτήριο ολοκληρωσιμότητας, για κάθε n υπάρχει διαμέριση Δ_n του $[a,b]$ ώστε

$$0 \leq \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n) < \tfrac{1}{n}.$$

Άρα υπάρχει ακολουθία διαμερίσεων (Δ_n) του $[a,b]$ ώστε $\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n) \to 0$.
Αντιστρόφως, έστω ότι υπάρχει ακολουθία διαμερίσεων (Δ_n) του $[a,b]$ ώστε

$$\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n) \to 0. \tag{6.8}$$

Έστω $\epsilon > 0$. Τότε ισχύει τελικά $\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n) < \epsilon$ οπότε, σύμφωνα με το κριτήριο ολοκληρωσιμότητας, η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.
Τώρα, από την

$$\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n)$$

και από την (6.8) έχουμε $\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n) \to \int_a^b f(x)\,dx$ και $\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n) \to \int_a^b f(x)\,dx$. $\square$

Όλα τα παραδείγματα που ακολουθούν είναι πολύ βασικά. Θα τα ξαναδούμε στην ενότητα 6.5 με έναν λίγο διαφορετικό και κάπως πιο απλό τρόπο, πάλι βασισμένο σε υπολογισμό αθροισμάτων που έχουν σχέση με διαμερίσεις. Θα τα ξαναδούμε, όμως, και στο επόμενο κεφάλαιο χωρίς να χρησιμοποιήσουμε διαμερίσεις αλλά χρησιμοποιώντας τη σχέση ανάμεσα στις έννοιες του ολοκληρώματος και της παραγώγου.

Παράδειγμα 6.2.4. Έστω η συνάρτηση x στο διάστημα $[a,b]$.
Για κάθε n θεωρούμε τη διαμέριση $\Delta_n = \{a = x_0, \dots, x_n = b\}$ του $[a,b]$ σε n ισομήκη υποδιαστήματα. Δηλαδή, έστω

$$x_k = a + k\tfrac{b-a}{n} \qquad \text{για } \ k = 0, \dots, n.$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ για το άθροισμα των n αρχικών φυσικών. Ο τύπος αυτός αποδεικνύεται με επαγωγή, για παράδειγμα.
Τώρα, επειδή η x είναι αύξουσα, σε κάθε $[x_{k-1}, x_k]$ είναι $l_k = x_{k-1}$ και $u_k = x_k$. Άρα

$$\begin{aligned}\underline{\Sigma}(x;a,b;\Delta_n) &= \textstyle\sum_{k=1}^n x_{k-1}(x_k - x_{k-1}) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^n \big(a + (k-1)\frac{b-a}{n}\big)\\ &= \tfrac{b-a}{n}\big(na + \tfrac{b-a}{n}\textstyle\sum_{k=1}^{n-1} k\big) = \tfrac{b-a}{n}\big(na + \tfrac{b-a}{n}\tfrac{n(n-1)}{2}\big) \to \tfrac{b^2-a^2}{2}\,.\end{aligned}$$

Με τον ίδιο τρόπο,

$$\begin{aligned}\overline{\Sigma}(x;a,b;\Delta_n) &= \textstyle\sum_{k=1}^n x_k(x_k - x_{k-1}) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^n \big(a + k\frac{b-a}{n}\big)\\ &= \tfrac{b-a}{n}\big(na + \tfrac{b-a}{n}\textstyle\sum_{k=1}^{n} k\big) = \tfrac{b-a}{n}\big(na + \tfrac{b-a}{n}\tfrac{n(n+1)}{2}\big) \to \tfrac{b^2-a^2}{2}\,.\end{aligned}$$

Επομένως, $\overline{\Sigma}(x;a,b;\Delta_n) - \underline{\Sigma}(x;a,b;\Delta_n) \to 0$, οπότε η x είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και

$$\textstyle\int_a^b x\,dx = \frac{b^2-a^2}{2}.$$

Παράδειγμα 6.2.5. Έστω $0 < a < b$ και η συνάρτηση x^p στο διάστημα $[a,b]$.
Για κάθε n θεωρούμε τον αριθμό $\mu_n = \sqrt[n]{b/a}$ και τη διαμέριση $\Delta_n = \{a = x_0, \dots, x_n = b\}$, όπου

$$x_k = a{\mu_n}^k \qquad \text{για } \ k = 0, \dots, n.$$

Αν $p > 0$, η x^p είναι αύξουσα, οπότε σε κάθε $[x_{k-1}, x_k]$ είναι $l_k = {x_{k-1}}^p$ και $u_k = {x_k}^p$. Άρα

$$\begin{aligned}\underline{\Sigma}(x^p;a,b;\Delta_n) &= \textstyle\sum_{k=1}^n {x_{k-1}}^p(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n {x_{k-1}}^{p+1}\big(\frac{x_k}{x_{k-1}} - 1\big)\\ &= \textstyle\sum_{k=1}^n (a{\mu_n}^{k-1})^{p+1}(\mu_n - 1) = a^{p+1}(\mu_n - 1)\sum_{k=1}^n ({\mu_n}^{p+1})^{k-1}\\ &= a^{p+1}(\mu_n - 1)\tfrac{({\mu_n}^{p+1})^n - 1}{{\mu_n}^{p+1}-1} = a^{p+1}(\mu_n - 1)\tfrac{({\mu_n}^n)^{p+1} - 1}{{\mu_n}^{p+1}-1}\\ &= a^{p+1}(\mu_n - 1)\tfrac{(b/a)^{p+1} - 1}{{\mu_n}^{p+1}-1} = \tfrac{\mu_n - 1}{{\mu_n}^{p+1}-1}(b^{p+1} - a^{p+1})\\ &\to \tfrac{b^{p+1}-a^{p+1}}{p+1},\end{aligned}$$

διότι $\mu_n \to 1$ και $\lim_{x\to 1}\frac{x^{p+1}-1}{x-1} = \frac{dx^{p+1}}{dx}(1) = (p+1)\cdot 1^p = p+1$.
Με τον ίδιο τρόπο, και χρησιμοποιώντας για την τέταρτη ισότητα παρακάτω τον προηγούμενο υπολογισμό $\sum_{k=1}^n {x_{k-1}}^p(x_k - x_{k-1}) = \frac{\mu_n - 1}{{\mu_n}^{p+1}-1}(b^{p+1} - a^{p+1})$, έχουμε

$$\begin{aligned}\overline{\Sigma}(x^p;a,b;\Delta_n) &= \textstyle\sum_{k=1}^n {x_k}^p(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n (\mu_n x_{k-1})^p(x_k - x_{k-1})\\ &= \textstyle{\mu_n}^p\sum_{k=1}^n {x_{k-1}}^p(x_k - x_{k-1})\\ &= {\mu_n}^p\tfrac{\mu_n - 1}{{\mu_n}^{p+1}-1}(b^{p+1} - a^{p+1})\\ &\to \tfrac{b^{p+1}-a^{p+1}}{p+1}.\end{aligned}$$

Αν $p < 0$ και $p \neq -1$, τότε η x^p είναι φθίνουσα οπότε το μόνο που αλλάζει στους προηγούμενους υπολογισμούς είναι ότι το προηγούμενο $\underline{\Sigma}(x^p;a,b;\Delta_n)$ θα είναι τώρα το $\overline{\Sigma}(x^p;a,b;\Delta_n)$ και αντιστρόφως. Οπότε πάλι βρίσκουμε το ίδιο αποτέλεσμα.
Επομένως, $\overline{\Sigma}(x^p;a,b;\Delta_n) - \underline{\Sigma}(x^p;a,b;\Delta_n) \to 0$, οπότε η x^p είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και

$$\textstyle\int_a^b x^p\,dx = \frac{b^{p+1}-a^{p+1}}{p+1} \qquad \text{αν } \ p \neq -1 \ \text{ και } \ 0 < a < b.$$

Αν $p > 0$, η x^p ορίζεται στο διάστημα $[0, b]$ (δηλαδή, διάστημα $[a, b]$ με $a = 0$) και χρησιμοποιούμε τον αριθμό $\mu_n = \sqrt[n]{n}$ και τη διαμέριση $\Delta_n = \{0 = x_0, x_1, \ldots, x_{n+1} = b\}$, όπου

$$x_k = \tfrac{b}{n}{\mu_n}^{k-1} \qquad \text{για } k = 1, \ldots, n, n+1.$$

Υπολογισμοί όμοιοι με τους παραπάνω αποδεικνύουν ότι η x^p είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, b]$ και

$$\textstyle\int_0^b x^p\,dx = \frac{b^{p+1}}{p+1} \qquad \text{αν } p > 0 \text{ και } 0 < b.$$

Τέλος, στην περίπτωση $p = -1$, οι προηγούμενοι υπολογισμοί ορίων *δεν έχουν νόημα*.

Πρέπει να αναφερθεί ότι στην περίπτωση $p \in \mathbb{Z}$, οπότε η x^p ορίζεται και για $x < 0$, ο τύπος $\int_a^b x^p\,dx = \frac{b^{p+1}-a^{p+1}}{p+1}$ ισχύει και για $a < b < 0$. Αυτό μπορεί να αποδειχθεί με παρόμοιους υπολογισμούς αλλά είναι προτιμότερο να περιμένουμε μέχρι το παράδειγμα 7.2.2.

Παράδειγμα 6.2.6. Θα δούμε την περίπτωση $p = -1$ του προηγούμενου παραδείγματος. Έστω $0 < a < b$ και η συνάρτηση $\frac{1}{x}$ στο διάστημα $[a, b]$.

Όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, για κάθε n θεωρούμε τον $\mu_n = \sqrt[n]{b/a}$ και τη διαμέριση $\Delta_n = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$, όπου

$$x_k = a{\mu_n}^k \qquad \text{για } k = 0, \ldots, n.$$

Η $\frac{1}{x}$ είναι φθίνουσα, οπότε σε κάθε $[x_{k-1}, x_k]$ είναι $l_k = \frac{1}{x_k}$ και $u_k = \frac{1}{x_{k-1}}$. Άρα

$$\underline{\Sigma}(\tfrac{1}{x}; a, b; \Delta_n) = \textstyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}(x_k - x_{k-1}) = \frac{n(\mu_n-1)}{\mu_n} = \frac{1}{\mu_n}\frac{\mu_n-1}{\log\mu_n}\log\frac{b}{a} \to \log\frac{b}{a},$$

διότι $\mu_n \to 1$ και $\lim_{x\to1}\frac{\log x}{x-1} = \frac{d\log x}{dx}(1) = \frac{1}{1} = 1$.
Ομοίως,

$$\overline{\Sigma}(\tfrac{1}{x}; a, b; \Delta_n) = \textstyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_{k-1}}(x_k - x_{k-1}) = n(\mu_n - 1) = \frac{\mu_n-1}{\log\mu_n}\log\frac{b}{a} \to \log\frac{b}{a}.$$

Πάλι, $\overline{\Sigma}(\frac{1}{x}; a, b; \Delta_n) - \underline{\Sigma}(\frac{1}{x}; a, b; \Delta_n) \to 0$, οπότε η $\frac{1}{x}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και

$$\textstyle\int_a^b \frac{1}{x}\,dx = \log\frac{b}{a} \qquad \text{αν } 0 < a < b.$$

Παράδειγμα 6.2.7. Έστω $\rho > 0$, $\rho \neq 1$ και η συνάρτηση ρ^x στο διάστημα $[a, b]$.

Για κάθε n θεωρούμε τη διαμέριση $\Delta_n = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$ του $[a, b]$ σε n ισομήκη υποδιαστήματα. Δηλαδή, έστω

$$x_k = a + k\tfrac{b-a}{n} \qquad \text{για } k = 0, \ldots, n.$$

Αν $\rho > 1$, η ρ^x είναι αύξουσα, οπότε σε κάθε $[x_{k-1}, x_k]$ είναι $l_k = \rho^{x_{k-1}}$ και $u_k = \rho^{x_k}$. Άρα

$$\begin{aligned}\underline{\Sigma}(\rho^x; a, b; \Delta_n) &= \textstyle\sum_{k=1}^n \rho^{x_{k-1}}(x_k - x_{k-1}) = \frac{b-a}{n}\rho^a \sum_{k=1}^n \rho^{(k-1)(b-a)/n} \\ &= \tfrac{b-a}{n}\rho^a\frac{\rho^{b-a}-1}{\rho^{(b-a)/n}-1} = (\rho^b - \rho^a)\frac{(b-a)/n}{\rho^{(b-a)/n}-1} \to \frac{\rho^b-\rho^a}{\log\rho},\end{aligned}$$

διότι $\frac{b-a}{n} \to 0$ και $\lim_{x\to0}\frac{\rho^x-1}{x} = \frac{d\rho^x}{dx}(0) = \rho^0\log\rho = \log\rho$.
Ομοίως,

$$\begin{aligned}\overline{\Sigma}(\rho^x; a, b; \Delta_n) &= \textstyle\sum_{k=1}^n \rho^{x_k}(x_k - x_{k-1}) = \frac{b-a}{n}\rho^a \sum_{k=1}^n \rho^{k(b-a)/n} \\ &= \tfrac{b-a}{n}\rho^a\rho^{(b-a)/n}\frac{\rho^{b-a}-1}{\rho^{(b-a)n}-1} = (\rho^b - \rho^a)\rho^{(b-a)/n}\frac{(b-a)/n}{\rho^{(b-a)/n}-1} \to \frac{\rho^b-\rho^a}{\log\rho}.\end{aligned}$$

Αν $0 < \rho < 1$, η ρ^x είναι φθίνουσα και το μόνο που αλλάζει στα προηγούμενα είναι ότι το προηγούμενο $\underline{\Sigma}(\rho^x; a, b; \Delta_n)$ θα είναι τώρα το $\overline{\Sigma}(\rho^x; a, b; \Delta_n)$ και αντιστρόφως. Πάλι βρίσκουμε το ίδιο αποτέλεσμα.

Επομένως, $\overline{\Sigma}(\rho^x; a, b; \Delta_n) - \underline{\Sigma}(\rho^x; a, b; \Delta_n) \to 0$, οπότε η ρ^x είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και

$$\textstyle\int_a^b \rho^x\,dx = \frac{\rho^b-\rho^a}{\log\rho} \qquad \text{αν } \rho > 0,\ \ \rho \neq 1 \text{ και } 0 < a < b.$$

6.2.1 Εμβαδό και ολοκλήρωμα Riemann.

Δεν θα μας απασχολήσει ο αυστηρός ορισμός της έννοιας του **εμβαδού** $E(A)$ υποσυνόλων A του καρτεσιανού επιπέδου. Θα δεχτούμε, όμως, ότι, όπως κι αν ορίζεται η έννοια του εμβαδού, πρέπει να έχει κάποιες βασικές αναμενόμενες ιδιότητες. Μερικές από αυτές είναι:

(i) $E(A) \geq 0$ *για κάθε σύνολο* A *το οποίο έχει εμβαδό.*

(ii) *το εμβαδό ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι ίσο με το γινόμενο των μηκών των δύο μη-παράλληλων πλευρών του.*

(iii) *αν δύο σύνολα* A_1 *και* A_2 *έχουν εμβαδά* $E(A_1)$ *και* $E(A_2)$ *και αν η τομή τους είναι κενή ή είναι ένωση πεπερασμένου πλήθους ευθυγράμμων τμημάτων, τότε η ένωσή τους* $A_1 \cup A_2$ *έχει εμβαδό το οποίο δίνεται από τον τύπο* $E(A_1 \cup A_2) = E(A_1) + E(A_2)$.

(iv) *αν τα σύνολα* A_1, A_2 *έχουν εμβαδά* $E(A_1)$ *και* $E(A_2)$ *και αν* $A_1 \subseteq A_2$, *τότε* $E(A_1) \leq E(A_2)$.

Έστω συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ με την επιπλέον υπόθεση ότι ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. Αυτό σημαίνει ότι το γράφημα $\Gamma = \{(x, f(x)) \,|\, x \in [a, b]\}$ της συνάρτησης, ως υποσύνολο του καρτεσιανού επιπέδου, περιέχεται στο ημιεπίπεδο πάνω από τον x-άξονα. Ορίζεται, επίσης, και το σύνολο $A = \{(x, y) \,|\, x \in [a, b], y \in [0, f(x)]\}$, δηλαδή το υποσύνολο του καρτεσιανού επιπέδου το οποίο περικλείεται από το οριζόντιο ευθύγραμμο τμήμα με άκρα $(a, 0)$, $(b, 0)$ (δηλαδή το διάστημα $[a, b]$ του x-άξονα), από το κατακόρυφο ευθ. τμήμα με άκρα $(a, 0)$, $(a, f(a))$, από το κατακόρυφο ευθ. τμήμα με άκρα $(b, 0)$, $(b, f(b))$ και από το γράφημα Γ της συνάρτησης.

Τώρα, υποθέτουμε, επιπλέον, ότι *η* f *είναι ολοκληρώσιμη στο* $[a, b]$ *και ότι το σύνολο* A *έχει εμβαδό* $E(A)$ και θα αποδείξουμε ότι

$$E(A) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει διαμέριση $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ του $[a, b]$ ώστε να είναι

$$\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) < \epsilon.$$

Θυμόμαστε ότι $\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = \sum_{k=1}^n u_k(x_k - x_{k-1})$ και $\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = \sum_{k=1}^n l_k(x_k - x_{k-1})$, όπου u_k και l_k είναι το supremum και το infimum της f στο $[x_{k-1}, x_k]$.

Τώρα, για κάθε $k = 1, \ldots, n$ θεωρούμε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο B_k που έχει οριζόντια βάση το διάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ στον x-άξονα και κατακόρυφο ύψους l_k. Βάσει της ιδιότητας (ii), το B_k έχει εμβαδό

$$E(B_k) = l_k(x_k - x_{k-1}).$$

Επίσης, για κάθε $k = 1, \ldots, n$ θεωρούμε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο C_k που έχει οριζόντια βάση το ίδιο διάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ στον x-άξονα και κατακόρυφο ύψους u_k. Το C_k έχει εμβαδό

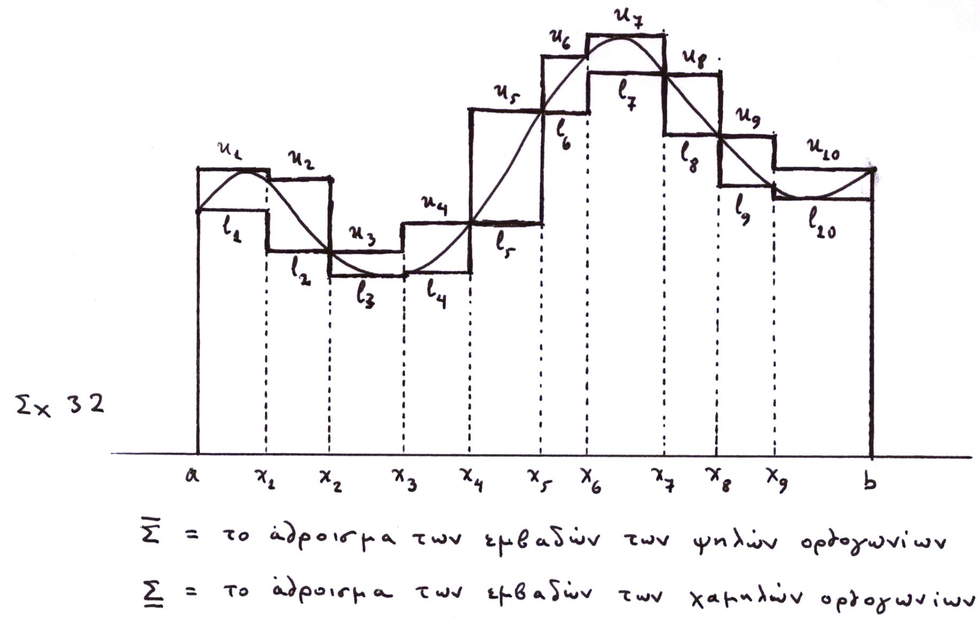
$$E(C_k) = u_k(x_k - x_{k-1}).$$

Κατόπιν, θεωρούμε τις ενώσεις $B = B_1 \cup \cdots \cup B_n$ και $C = C_1 \cup \cdots \cup C_n$, οι οποίες, βάσει της ιδιότητας (iii), έχουν εμβαδά

$$E(B) = \sum_{k=1}^n E(B_k) = \sum_{k=1}^n l_k(x_k - x_{k-1}) = \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta),$$

$$E(C) = \sum_{k=1}^n E(C_k) = \sum_{k=1}^n u_k(x_k - x_{k-1}) = \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta).$$

Δείτε το σχήμα 32.



Επειδή, για κάθε $k = 1, \ldots, n$, ισχύει $l_k \leq f(x) \leq u_k$ για κάθε $x \in [x_{k-1}, x_k]$, συνεπάγεται ότι το σύνολο A περιέχει το σύνολο B και περιέχεται στο σύνολο C. Δηλαδή, $B \subseteq A \subseteq C$. Επομένως, βάσει της ιδιότητας (iv),

$$\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = E(B) \leq E(A) \leq E(C) = \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta).$$

Από αυτές τις τελευταίες σχέσεις και από τις

$$\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta)$$

προκύπτει ότι

$$\Big|\int_a^b f(x)\,dx - E(A)\Big| \leq \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) < \epsilon.$$

Δηλαδή, είναι $|\int_a^b f(x)\,dx - E(A)| < \epsilon$ και, επειδή αυτό ισχύει για κάθε $\epsilon > 0$, συνεπάγεται $|\int_a^b f(x)\,dx - E(A)| = 0$, οπότε $E(A) = \int_a^b f(x)\,dx$.

Ασκήσεις.

6.2.1. Πώς από τις ιδιότητες (i), (ii) και (iv) του εμβαδού προκύπτει ότι το εμβαδό ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι 0;

6.2.2. Αν $0 \leq a < b$, αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις x^2 και x^3 είναι ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$ και ότι $\int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3-a^3}{3}$ και $\int_a^b x^3\,dx = \frac{b^4-a^4}{4}$, χρησιμοποιώντας διαμέριση Δ_n του $[a, b]$ σε n ισομήκη διαστήματα. Θα χρειαστείτε τις ισότητες $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ και $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$, που αποδεικνύονται με επαγωγή. Μιμηθείτε τους υπολογισμούς του παραδείγματος 6.2.4.

6.2.3. Θεωρήστε τη συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0, & \text{αν } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ και αποδείξτε ότι $\underline{\int_0^1} f(x)\,dx = 0$ και $\overline{\int_0^1} f(x)\,dx = \frac{1}{2}$.

6.2.4. Έστω φραγμένη $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ και δύο ακολουθίες $(\Delta_n{}')$ και $(\Delta_n{}'')$ διαμερίσεων του $[a, b]$ ώστε $\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta_n{}') - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta_n{}'') \to 0$. Αποδείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και ότι $\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta_n{}') \to \int_a^b f(x)\,dx$ και $\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta_n{}'') \to \int_a^b f(x)\,dx$.

6.2.5. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ ώστε να ισχύει $f(r) = 0$ για κάθε ρητό $r \in [a,b]$. Αποδείξτε ότι $\int_a^b f(x)\,dx = 0$. Το ίδιο αποτέλεσμα έχουμε και αν ισχύει $f(x) = 0$ για κάθε άρρητο $x \in [a,b]$.

6.2.6. Έστω $f, g, h : [a,b] \to \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f(x) \le g(x) \le h(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$. Αν οι f και h είναι ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$ και $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b h(x)\,dx$, αποδείξτε ότι και η g είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και $\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b h(x)\,dx$.

6.2.7. Έστω φραγμένη $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[c,b]$ για κάθε c με $a < c < b$, αποδείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to a+} \int_c^b f(x)\,dx$. Διατυπώστε και αποδείξτε το ανάλογο αποτέλεσμα όταν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,c]$ για κάθε c με $a < c < b$.

Έστω $p > 0$. Θεωρήστε γνωστό το πρώτο αποτέλεσμα του παραδείγματος 6.2.5, δηλαδή ότι $\int_a^b x^p\,dx = \frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{p+1}$ για $0 < a < b$. Αποδείξτε, βάσει του προηγουμένου, ότι $\int_0^b x^p\,dx = \frac{b^{p+1}}{p+1}$.

6.2.8. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Αν $\int_a^b f(x)\,dx > 0$, αποδείξτε ότι υπάρχει υποδιάστημα (όχι μονοσύνολο) $[c,d]$ του $[a,b]$ ώστε να ισχύει $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [c,d]$.

Αποδείξτε το ίδιο αποτέλεσμα, γενικότερα, αν η f είναι φραγμένη και $\underline{\int}_a^b f(x)\,dx > 0$.

6.2.9. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.

Αποδείξτε ότι υπάρχει $[a_1, b_1] \subseteq (a,b)$ ώστε να είναι $0 < b_1 - a_1 < 1$ και $\sup\{f(x) \,|\, a_1 \le x \le b_1\} - \inf\{f(x) \,|\, a_1 \le x \le b_1\} < 1$.

Κατασκευάστε ακολουθία διαστημάτων $([a_n, b_n])$ ώστε $0 < b_n - a_n < \frac{1}{n}$, $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq (a_n, b_n)$ και $\sup\{f(x) \,|\, a_n \le x \le b_n\} - \inf\{f(x) \,|\, a_n \le x \le b_n\} < \frac{1}{n}$ για κάθε n. Τότε υπάρχει ακριβώς ένας ξ ώστε $\xi \in (a_n, b_n)$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στον ξ.

Αποδείξτε ότι σε κάθε ανοικτό υποδιάστημα του $[a,b]$ υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο στο οποίο η f είναι συνεχής. Δηλαδή, το σύνολο των σημείων συνέχειας της f είναι πυκνό στο $[a,b]$.

6.3 Τα βασικά παραδείγματα.

Τα δύο θεωρήματα αυτής της ενότητας λένε ότι *οι συνεχείς συναρτήσεις και οι μονότονες συναρτήσεις είναι ολοκληρώσιμες.*

ΘΕΩΡΗΜΑ 6.1. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b]$. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.*

Απόδειξη. Έστω $\epsilon > 0$. Σύμφωνα με το θεώρημα 4.2, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει

$$|f(x') - f(x'')| < \tfrac{\epsilon}{b-a} \qquad \text{για κάθε } x', x'' \in [a,b] \text{ με } |x' - x''| < \delta. \tag{6.9}$$

Θεωρούμε μια οποιαδήποτε διαμέριση $\Delta = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$ του $[a,b]$ ώστε όλα τα Δ-διαστήματα να έχουν μήκος $< \delta$, δηλαδή, ώστε

$$x_k - x_{k-1} < \delta \qquad \text{για κάθε } k = 1, \ldots, n.$$

Τώρα θυμόμαστε το παράδειγμα 6.1.5. Η f είναι συνεχής στο $[x_{k-1}, x_k]$ και υπάρχουν $\zeta_k, \eta_k \in [x_{k-1}, x_k]$ ώστε $f(\zeta_k) \le f(x) \le f(\eta_k)$ για κάθε $x \in [x_{k-1}, x_k]$. Άρα $l_k = f(\zeta_k)$ και $u_k = f(\eta_k)$. Επίσης, επειδή $|\eta_k - \zeta_k| \le x_k - x_{k-1} < \delta$, από την (6.9) συνεπάγεται

$$u_k - l_k = f(\eta_k) - f(\zeta_k) < \tfrac{\epsilon}{b-a}$$

και, επομένως,

$$\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = \textstyle\sum_{k=1}^n (u_k - l_k)(x_k - x_{k-1}) < \sum_{k=1}^n \frac{\epsilon}{b-a}(x_k - x_{k-1}) = \epsilon.$$

Άρα για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση Δ του $[a,b]$ ώστε $\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) < \epsilon$. Άρα η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. $\square$

Παράδειγμα 6.3.1. Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)$ είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο διάστημα και κάθε ρητή συνάρτηση $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο διάστημα το οποίο δεν περιέχει καμιά ρίζα του πολυωνύμου $Q(x)$.

Παράδειγμα 6.3.2. Αν $p > 0$, η x^p είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε $[a, b] \subseteq [0, +\infty)$ και, αν $p < 0$, η x^p είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε $[a, b] \subseteq (0, +\infty)$.

Παράδειγμα 6.3.3. Η e^x είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε $[a, b]$.

Παράδειγμα 6.3.4. Η $\log x$ είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε $[a, b] \subseteq (0, +\infty)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 6.2. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ μονότονη στο $[a, b]$. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.*

Απόδειξη. Έστω ότι η f είναι αύξουσα στο $[a, b]$. Έστω $\epsilon > 0$ και $\delta = \frac{\epsilon}{f(b)-f(a)+1}$.
Θεωρούμε μια οποιαδήποτε διαμέριση $\Delta = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$ του $[a, b]$ ώστε όλα τα Δ-διαστήματα να έχουν μήκος $< \delta$, δηλαδή ώστε

$$x_k - x_{k-1} < \delta \qquad \text{για κάθε } \ k = 1, \ldots, n.$$

Επειδή η f είναι αύξουσα, είναι $l_k = f(x_{k-1})$ και $u_k = f(x_k)$ (παράδειγμα 6.1.4). Άρα

$$\begin{aligned}\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) &= \textstyle\sum_{k=1}^n (u_k - l_k)(x_k - x_{k-1}) \le \sum_{k=1}^n (u_k - l_k)\delta \\ &= \delta \textstyle\sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1})) = \delta(f(b) - f(a)) < \epsilon.\end{aligned}$$

Άρα για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση Δ του $[a, b]$ ώστε $\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) < \epsilon$. Άρα η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.
Η απόδειξη στην περίπτωση που η f είναι φθίνουσα είναι παρόμοια. □

Παράδειγμα 6.3.5. Η συνάρτηση $[x]$ είναι αύξουσα, οπότε είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο διάστημα.

Ασκήσεις.

6.3.1. Σε ποιά διαστήματα είναι ολοκληρώσιμες οι $x^3 - x$, $1/(x^3 - x)$, $\sqrt{x^3 - x}$, $\log(x^3 - x)$, $\sin x$, $\tan x$;

6.3.2. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[a, b]$. Το σύνολο τιμών της f είναι το $[A, B]$, όπου $A = f(a), B = f(b)$, και η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : [A, B] \to [a, b]$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[A, B]$. Αποδείξτε ότι

$$\textstyle\int_a^b f(x)\,dx + \int_A^B f^{-1}(y)\,dy = bB - aA.$$

Αν $0 \le a < b$ και $0 \le A < B$, περιγράψτε το γεωμετρικό νόημα αυτής της ισότητας.

6.4 Ιδιότητες του ολοκληρώματος.

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.3. *Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$. Τότε η $f + g : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και*

$$\textstyle\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

Απόδειξη. Οι f, g είναι φραγμένες, οπότε υπάρχουν M' και M'' ώστε να ισχύει $|f(x)| \le M'$ και $|g(x)| \le M''$ για κάθε $x \in [a, b]$. Άρα ισχύει $|f(x) + g(x)| \le |f(x)| + |g(x)| \le M' + M''$ για κάθε $x \in [a, b]$ και, επομένως, η $f + g$ είναι φραγμένη. Αυτή είναι η πρώτη προϋπόθεση για να είναι η $f + g$ ολοκληρώσιμη.

Έστω $\epsilon > 0$. Σύμφωνα με το κριτήριο ολοκληρωσιμότητας, υπάρχουν διαμερίσεις Δ', Δ'' του $[a, b]$ ώστε

$$\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta') - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta') < \tfrac{\epsilon}{2}, \qquad \overline{\Sigma}(g; a, b; \Delta'') - \underline{\Sigma}(g; a, b; \Delta'') < \tfrac{\epsilon}{2}. \tag{6.10}$$

Θεωρούμε την κοινή εκλέπτυνση $\Delta = \Delta' \cup \Delta'' = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$, οπότε από τις (6.10) και από το λήμμα 6.3 συνεπάγεται

$$\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) < \tfrac{\epsilon}{2}, \qquad \overline{\Sigma}(g; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(g; a, b; \Delta) < \tfrac{\epsilon}{2}. \tag{6.11}$$

Έστω $u_k{}'$ και $l_k{}'$ το supremum και το infimum της f στο $[x_{k-1}, x_k]$ καθώς και $u_k{}''$ και $l_k{}''$ οι αντίστοιχες ποσότητες γαι την g και u_k και l_k οι αντίστοιχες ποσότητες για την $f + g$.
Για κάθε $x \in [x_{k-1}, x_k]$ ισχύει $l_k{}' \le f(x) \le u_k{}'$ και $l_k{}'' \le g(x) \le u_k{}''$ και, επομένως, $l_k{}' + l_k{}'' \le f(x) + g(x) \le u_k{}' + u_k{}''$. Άρα

$$l_k{}' + l_k{}'' \le l_k \le u_k \le u_k{}' + u_k{}'',$$

οπότε

$$\begin{aligned} \overline{\Sigma}(f + g; a, b; \Delta) &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} u_k(x_k - x_{k-1}) \\ &\le \textstyle\sum_{k=1}^{n} u_k{}'(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=1}^{n} u_k{}''(x_k - x_{k-1}) \\ &= \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) + \overline{\Sigma}(g; a, b; \Delta) \end{aligned} \tag{6.12}$$

και, ομοίως,

$$\begin{aligned} \underline{\Sigma}(f + g; a, b; \Delta) &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} l_k(x_k - x_{k-1}) \\ &\ge \textstyle\sum_{k=1}^{n} l_k{}'(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=1}^{n} l_k{}''(x_k - x_{k-1}) \\ &= \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) + \underline{\Sigma}(g; a, b; \Delta). \end{aligned} \tag{6.13}$$

Αφαιρώντας τις (6.12) και (6.13) και χρησιμοποιώντας και τις ανισότητες στην (6.11), βρίσκουμε

$$\overline{\Sigma}(f + g; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(f + g; a, b; \Delta) < \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Άρα για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση Δ του $[a, b]$ ώστε $\overline{\Sigma}(f+g; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(f+g; a, b; \Delta) < \epsilon$, οπότε η $f + g$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.
Τώρα, γνωρίζουμε ότι

$$\begin{aligned} \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) &\le \textstyle\int_a^b f(x)\, dx \le \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) \\ \underline{\Sigma}(g; a, b; \Delta) &\le \textstyle\int_a^b g(x)\, dx \le \overline{\Sigma}(g; a, b; \Delta) \end{aligned} \tag{6.14}$$

$$\underline{\Sigma}(f + g; a, b; \Delta) \le \textstyle\int_a^b (f(x) + g(x))\, dx \le \overline{\Sigma}(f + g; a, b; \Delta). \tag{6.15}$$

Από τις (6.12), (6.13), (6.15) συνεπάγεται

$$\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) + \underline{\Sigma}(g; a, b; \Delta) \le \textstyle\int_a^b (f(x) + g(x))\, dx \le \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) + \overline{\Sigma}(g; a, b; \Delta).$$

Αφαιρώντας από την τελευταία σχέση τις (6.14) και λαμβάνοντας υπ' όψη και τις (6.11), προκύπτει ότι

$$\big| \textstyle\int_a^b (f(x) + g(x))\, dx - \int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b g(x)\, dx \big| < \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Επειδή αυτό ισχύει για κάθε $\epsilon > 0$, είναι $\int_a^b (f(x) + g(x))\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$. $\square$

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.4. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Τότε η $\lambda f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και*

$$\textstyle\int_a^b \lambda f(x)\, dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx.$$

Απόδειξη. Επειδή η f είναι φραγμένη, υπάρχει M ώστε να ισχύει $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [a,b]$. Άρα ισχύει $|\lambda f(x)| \leq |\lambda| M$ για κάθε $x \in [a,b]$, οπότε η λf είναι φραγμένη.
Αν $\lambda = 0$, η $0f$ είναι η σταθερή συνάρτηση 0, η οποία είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και ισχύει

$$\int_a^b 0f(x)\,dx = \int_a^b 0\,dx = 0 = 0\int_a^b f(x)\,dx.$$

Έστω $\lambda \neq 0$. Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει διαμέριση $\Delta = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$ του $[a,b]$ ώστε

$$\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) < \tfrac{\epsilon}{|\lambda|}. \tag{6.16}$$

Έστω $u_k{}'$ και $l_k{}'$ το supremum και το infimum της f στο $[x_{k-1}, x_k]$ και u_k και l_k οι αντίστοιχες ποσότητες για την λf.
Έστω $\lambda > 0$. Για κάθε $x \in [x_{k-1}, x_k]$ ισχύει $f(x) \leq u_k{}'$, οπότε $\lambda f(x) \leq \lambda u_k{}'$ και, επομένως, $u_k \leq \lambda u_k{}'$. Επίσης, για κάθε $x \in [x_{k-1}, x_k]$ ισχύει $\lambda f(x) \leq u_k$, οπότε $f(x) \leq \frac{1}{\lambda} u_k$ και, επομένως, $u_k{}' \leq \frac{1}{\lambda} u_k$. Συμπεραίνουμε ότι $u_k = \lambda u_k{}'$ και, με ακριβώς ίδιο τρόπο, ότι $l_k = \lambda l_k{}'$. Τώρα,

$$\begin{aligned} \overline{\Sigma}(\lambda f;a,b;\Delta) &= \textstyle\sum_{k=1}^n u_k(x_k - x_{k-1}) = \lambda \sum_{k=1}^n u_k{}'(x_k - x_{k-1}) = \lambda \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) \\ \underline{\Sigma}(\lambda f;a,b;\Delta) &= \textstyle\sum_{k=1}^n l_k(x_k - x_{k-1}) = \lambda \sum_{k=1}^n l_k{}'(x_k - x_{k-1}) = \lambda \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta). \end{aligned} \tag{6.17}$$

Αφαιρώντας τις (6.17) και χρησιμοποιώντας και την (6.16), βρίσκουμε

$$\overline{\Sigma}(\lambda f;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(\lambda f;a,b;\Delta) = \lambda\big(\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)\big) < \lambda \tfrac{\epsilon}{\lambda} = \epsilon. \tag{6.18}$$

Έστω $\lambda < 0$. Για κάθε $x \in [x_{k-1}, x_k]$ ισχύει $f(x) \leq u_k{}'$, οπότε $\lambda u_k{}' \leq \lambda f(x)$ και, επομένως, $\lambda u_k{}' \leq l_k$. Επίσης, για κάθε $x \in [x_{k-1}, x_k]$ ισχύει $l_k \leq \lambda f(x)$, οπότε $f(x) \leq \frac{1}{\lambda} l_k$ και, επομένως, $u_k{}' \leq \frac{1}{\lambda} l_k$. Συμπεραίνουμε ότι $l_k = \lambda u_k{}'$ και, παρομοίως, $u_k = \lambda l_k{}'$. Τώρα,

$$\overline{\Sigma}(\lambda f;a,b;\Delta) = \textstyle\sum_{k=1}^n u_k(x_k - x_{k-1}) = \lambda \sum_{k=1}^n l_k{}'(x_k - x_{k-1}) = \lambda \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta),$$

$$\underline{\Sigma}(\lambda f;a,b;\Delta) = \textstyle\sum_{k=1}^n l_k(x_k - x_{k-1}) = \lambda \sum_{k=1}^n u_k{}'(x_k - x_{k-1}) = \lambda \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta).$$

Αφαιρώντας και χρησιμοποιώντας την (6.16) (με $|\lambda| = -\lambda$), έχουμε

$$\overline{\Sigma}(\lambda f;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(\lambda f;a,b;\Delta) = -\lambda\big(\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)\big) < -\lambda \tfrac{\epsilon}{-\lambda} = \epsilon. \tag{6.19}$$

Σε κάθε περίπτωση, από τις (6.18) και (6.19) συνεπάγεται ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση Δ του $[a,b]$ ώστε

$$\overline{\Sigma}(\lambda f;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(\lambda f;a,b;\Delta) < \epsilon,$$

οπότε η λf είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.
Τώρα, γνωρίζουμε ότι

$$\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) \tag{6.20}$$

$$\underline{\Sigma}(\lambda f;a,b;\Delta) \leq \int_a^b \lambda f(x)\,dx \leq \overline{\Sigma}(\lambda f;a,b;\Delta). \tag{6.21}$$

Αν $\lambda > 0$, πολλαπλασιάζοντας την (6.20) με τον λ και αφαιρώντας την (6.21) και χρησιμοποιώντας και τις (6.17) και (6.16), βρίσκουμε

$$\Big|\int_a^b \lambda f(x)\,dx - \lambda\int_a^b f(x)\,dx\Big| \leq \lambda\big(\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)\big) < \epsilon.$$

Επειδή αυτό ισχύει για κάθε $\epsilon > 0$, συνεπάγεται $\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$.
Η απόδειξη της $\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$ είναι παρόμοια και στην περίπτωση $\lambda < 0$. □

Οι ισότητες που αποδείχθηκαν στις προτάσεις 6.3 και 6.4 συνδυάζονται στην

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx.$$

Αυτή η ισότητα εύκολα γενικεύεται με επαγωγή για περισσότερους από δύο όρους:

$$\int_a^b \sum_{k=1}^n \lambda_k f_k(x)\,dx = \sum_{k=1}^n \lambda_k \int_a^b f_k(x)\,dx,$$

αν όλες οι $f_1, \dots, f_n$ είναι ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$.

Το επόμενο παράδειγμα είναι άμεση γενίκευση του παραδείγματος 6.2.3 και είναι κι αυτό σημαντικό και, μάλιστα, θα χρησιμοποιηθεί αμέσως στην απόδειξη της πρότασης 6.5.

Παράδειγμα 6.4.1. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, η οποία μηδενίζεται σε κάθε σημείο του $[a, b]$ εκτός από πεπερασμένου πλήθους σημεία. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και $\int_a^b f(x)\,dx = 0$.

Συγκεκριμένα, έστω $\xi_1, \dots, \xi_m \in [a, b]$ και έστω ότι η f μηδενίζεται σε κάθε $x \in [a, b] \setminus \{\xi_1, \dots, \xi_m\}$ και $f(\xi_j) = c_j \neq 0$ για κάθε $j = 1, \dots, m$. Δηλαδή ο τύπος της f είναι

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \in [a, b] \text{ και } x \neq \xi_j \text{ για κάθε } j = 1, \dots, m \\ c_j, & \text{αν } x = \xi_j \text{ για κάποιον } j = 1, \dots, m \end{cases}$$

Για κάθε $j = 1, \dots, m$ θεωρούμε την αντίστοιχη συνάρτηση $f_j(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \in [a, b], x \neq \xi_j \\ 1, & \text{αν } x = \xi_j \end{cases}$

Αν $x \in [a, b]$ και $x \neq \xi_j$ για κάθε $j = 1, \dots, m$, τότε $f(x) = 0$ και $f_j(x) = 0$ για κάθε $j = 1, \dots, m$. Άρα

$$\sum_{j=1}^m c_j f_j(x) = \sum_{j=1}^m c_j 0 = 0 = f(x).$$

Αν $x \in \{\xi_1, \dots, \xi_m\}$, τότε $x = \xi_{j_0}$ για κάποιον $j_0 = 1, \dots, m$, οπότε $f(x) = c_{j_0}$ και $f_{j_0}(x) = 1$ και $f_j(x) = 0$ για κάθε $j = 1, \dots, m$ με $j \neq j_0$. Άρα

$$\sum_{j=1}^m c_j f_j(x) = c_{j_0} = f(x).$$

Άρα ισχύει $\sum_{j=1}^m c_j f_j(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$ ή, ισοδύναμα, $f = \sum_{j=1}^m c_j f_j$.

Επειδή κάθε f_j είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και $\int_a^b f_j(x)\,dx = 0$, συνεπάγεται ότι και η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{j=1}^m c_j \int_a^b f_j(x)\,dx = \sum_{j=1}^m c_j 0 = 0.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.5. *Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ των οποίων οι τιμές είναι ίσες σε κάθε σημείο του $[a, b]$ εκτός από πεπερασμένου πλήθους σημεία. Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$, τότε και η g είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και $\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε την $h = g - f : [a, b] \to \mathbb{R}$ η οποία μηδενίζεται σε κάθε σημείο του $[a, b]$ εκτός από πεπερασμένου πλήθους σημεία. Σύμφωνα με το παράδειγμα 6.4.1, η h είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και $\int_a^b h(x)\,dx = 0$. Επειδή $g = f + h$ και η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$, η g είναι κι αυτή ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και

$$\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b (f(x) + h(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b h(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

□

Η πρόταση 6.5 διατυπώνεται και ως εξής: *αν μια συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη σε κάποιο διάστημα και δημιουργήσουμε μια νέα συνάρτηση αλλάζοντας τις τιμές της αρχικής σε πεπερασμένου πλήθους σημεία του διαστήματος, τότε η νέα συνάρτηση είναι κι αυτή ολοκληρώσιμη στο ίδιο διάστημα και το ολοκλήρωμά της είναι το ίδιο με το ολοκλήρωμα της αρχικής συνάρτησης.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.6. *Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$. Τότε και η fg είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.*

Απόδειξη. Οι f, g είναι φραγμένες, οπότε υπάρχουν M', M'' ώστε να ισχύει $|f(x)| \leq M'$ και $|g(x)| \leq M''$ για κάθε $x \in [a, b]$. Άρα ισχύει $|f(x)g(x)| = |f(x)||g(x)| \leq M'M''$ για κάθε $x \in [a, b]$, οπότε η fg είναι φραγμένη στο $[a, b]$.
Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχουν διαμερίσεις Δ', Δ'' του $[a, b]$ ώστε

$$\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta') - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta') < \tfrac{\epsilon}{M'+M''+1}, \qquad \overline{\Sigma}(g; a, b; \Delta'') - \underline{\Sigma}(g; a, b; \Delta'') < \tfrac{\epsilon}{M'+M''+1}.$$

Θεωρούμε την κοινή εκλέπτυνση $\Delta = \Delta' \cup \Delta'' = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$, οπότε είναι

$$\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) < \tfrac{\epsilon}{M'+M''+1}, \quad \overline{\Sigma}(g; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(g; a, b; \Delta) < \tfrac{\epsilon}{M'+M''+1}. \quad (6.22)$$

Έστω $u_k{}'$ και $l_k{}'$ το supremum και το infimum της f στο $[x_{k-1}, x_k]$ καθώς και $u_k{}''$ και $l_k{}''$ οι αντίστοιχες ποσότητες γαι την g και u_k και l_k οι αντίστοιχες ποσότητες για την fg.
Για κάθε $s, t \in [x_{k-1}, x_k]$ ισχύει $l_k{}' - u_k{}' \leq f(s) - f(t) \leq u_k{}' - l_k{}'$ και, επομένως, $|f(s) - f(t)| \leq u_k{}' - l_k{}'$. Ομοίως, για κάθε $s, t \in [x_{k-1}, x_k]$ ισχύει $|g(s) - g(t)| \leq u_k{}'' - l_k{}''$. Άρα για κάθε $s, t \in [x_{k-1}, x_k]$ ισχύει

$$|f(s)g(s) - f(t)g(t)| \leq |f(s) - f(t)||g(s)| + |f(t)||g(s) - g(t)| \leq M''(u_k{}' - l_k{}') + M'(u_k{}'' - l_k{}'').$$

Σύμφωνα με την παρατήρηση 3 πριν από το λήμμα 6.2, είναι

$$u_k - l_k \leq M''(u_k{}' - l_k{}') + M'(u_k{}'' - l_k{}'').$$

Επομένως, χρησιμοποιώντας και τις (6.22), βρίσκουμε

$$\begin{aligned}
\overline{\Sigma}(fg; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(fg; a, b; \Delta) &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} (u_k - l_k)(x_k - x_{k-1}) \\
&\leq M'' \textstyle\sum_{k=1}^{n} (u_k{}' - l_k{}')(x_k - x_{k-1}) \\
&\quad + M' \textstyle\sum_{k=1}^{n} (u_k{}'' - l_k{}'')(x_k - x_{k-1}) \\
&= M''\big(\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta)\big) \\
&\quad + M'\big(\overline{\Sigma}(g; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(g; a, b; \Delta)\big) \\
&\leq M'' \tfrac{\epsilon}{M'+M''+1} + M' \tfrac{\epsilon}{M'+M''+1} < \epsilon.
\end{aligned}$$

Άρα για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση Δ του $[a, b]$ ώστε $\overline{\Sigma}(fg; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(fg; a, b; \Delta) < \epsilon$, οπότε η fg είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. ☐

Τονίζουμε ότι, σε αντίθεση με την περίπτωση του αθροίσματος συναρτήσεων, *δεν υπάρχει τύπος ο οποίος να συνδέει το ολοκλήρωμα του γινομένου συναρτήσεων με τα ολοκληρώματα των δύο συναρτήσεων ξεχωριστά.* Για παράδειγμα, ο τύπος $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \int_a^b g(x)\,dx$ **δεν ισχύει γενικά**.

Παράδειγμα 6.4.2. Είναι $\int_a^b 1 \cdot 1\,dx = \int_a^b 1\,dx = b - a$ και $\int_a^b 1\,dx \int_a^b 1\,dx = (b-a)(b-a) = (b-a)^2$. Η ισότητα $b - a = (b-a)^2$ δεν ισχύει γενικά!

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.7. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Αν υπάρχει $m > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x)| \geq m$ για κάθε $x \in [a, b]$, τότε η $1/f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.*

Απόδειξη. Ισχύει $\left|\frac{1}{f(x)}\right| \leq \frac{1}{m}$ για κάθε $x \in [a, b]$, οπότε η $1/f$ είναι φραγμένη.
Έστω $\epsilon > 0$. Υπάρχει διαμέριση $\Delta = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$ του $[a, b]$ ώστε

$$\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) < m^2\epsilon. \quad (6.23)$$

Έστω $u_k{}'$ και $l_k{}'$ το supremum και το infimum της f στο $[x_{k-1}, x_k]$ καθώς και u_k και l_k οι αντίστοιχες ποσότητες για την $1/f$.

Για κάθε $s,t\in[x_{k-1},x_k]$ ισχύει $l_k{}'-u_k{}'\leq f(s)-f(t)\leq u_k{}'-l_k{}'$, οπότε $|f(s)-f(t)|\leq u_k{}'-l_k{}'$. Τότε για κάθε $s,t\in[x_{k-1},x_k]$ ισχύει $\left|\frac{1}{f(s)}-\frac{1}{f(t)}\right|=\frac{|f(s)-f(t)|}{|f(s)||f(t)|}\leq\frac{u_k{}'-l_k{}'}{m^2}$ και, επομένως,

$$u_k-l_k\leq\tfrac{u_k{}'-l_k{}'}{m^2}.$$

Χρησιμοποιώντας και την (6.23), συνεπάγεται

$$\begin{aligned}\overline{\Sigma}\big(1/f;a,b;\Delta\big)-\underline{\Sigma}\big(1/f;a,b;\Delta\big)&=\textstyle\sum_{k=1}^n(u_k-l_k)(x_k-x_{k-1})\\&\leq\tfrac{1}{m^2}\textstyle\sum_{k=1}^n(u_k{}'-l_k{}')(x_k-x_{k-1})\\&=\tfrac{1}{m^2}\big(\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)-\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)\big)<\epsilon.\end{aligned}$$

Άρα για κάθε $\epsilon>0$ υπάρχει διαμέριση Δ του $[a,b]$ ώστε $\overline{\Sigma}\big(1/f;a,b;\Delta\big)-\underline{\Sigma}\big(1/f;a,b;\Delta\big)<\epsilon$, οπότε η $1/f$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. □

Όπως και για το γινόμενο συναρτήσεων, δεν υπάρχει γενικός τύπος που να συνδέει το ολοκλήρωμα του αντιστρόφου μιας συνάρτησης με το ολοκλήρωμα της συνάρτησης. Για παράδειγμα, ο τύπος $\int_a^b(1/f(x))\,dx=1/\big(\int_a^b f(x)\,dx\big)$ **δεν ισχύει γενικά**.

Παράδειγμα 6.4.3. Είναι $\int_a^b\frac{1}{1}\,dx=\int_a^b 1\,dx=b-a$ και $\frac{1}{\int_a^b 1\,dx}=\frac{1}{b-a}$. Η ισότητα $b-a=\frac{1}{b-a}$ δεν ισχύει γενικά!

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.8. *Έστω $a<c<b$ και $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,c]$ και στο $[c,b]$. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και*

$$\textstyle\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx.$$

Απόδειξη. Η f είναι φραγμένη στο $[a,c]$ και στο $[c,b]$, οπότε υπάρχουν M' και M'' ώστε να ισχύει $|f(x)|\leq M'$ για κάθε $x\in[a,c]$ και $|f(x)|\leq M''$ για κάθε $x\in[c,b]$. Ορίζουμε $M=\max\{M',M''\}$, οπότε ισχύει $|f(x)|\leq M$ για κάθε $x\in[a,b]$ και, επομένως, η f είναι φραγμένη στο $[a,b]$.
Έστω $\epsilon>0$. Τότε υπάρχουν διαμερίσεις $\Delta'=\{a=x_0{}',\ldots,x_n{}'=c\}$ του $[a,c]$ και $\Delta''=\{c=x_0{}'',\ldots,x_m{}''=b\}$ του $[c,b]$ ώστε

$$\overline{\Sigma}(f;a,c;\Delta')-\underline{\Sigma}(f;a,c;\Delta')<\tfrac{\epsilon}{2},\qquad\overline{\Sigma}(f;c,b;\Delta'')-\underline{\Sigma}(f;c,b;\Delta'')<\tfrac{\epsilon}{2}.\tag{6.24}$$

Ορίζουμε τη διαμέριση $\Delta=\{a=x_0{}',\ldots,x_{n-1}{}',x_n{}'=c=x_0{}'',\ldots,x_m{}''=b\}$ του $[a,b]$ και παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)&=\overline{\Sigma}(f;a,c;\Delta')+\overline{\Sigma}(f;c,b;\Delta'')\\\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)&=\underline{\Sigma}(f;a,c;\Delta')+\underline{\Sigma}(f;c,b;\Delta'').\end{aligned}\tag{6.25}$$

Αφαιρώντας τις (6.25) και χρησιμοποιώντας και τις (6.24), βρίσκουμε

$$\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)-\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)<\tfrac{\epsilon}{2}+\tfrac{\epsilon}{2}=\epsilon.\tag{6.26}$$

Άρα για κάθε $\epsilon>0$ υπάρχει διαμέριση Δ του $[a,b]$ ώστε $\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)-\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)<\epsilon$, οπότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.
Τώρα, γνωρίζουμε ότι

$$\begin{aligned}\underline{\Sigma}(f;a,c;\Delta')\leq\textstyle\int_a^c f(x)\,dx\leq\overline{\Sigma}(f;a,c;\Delta')\\\underline{\Sigma}(f;c,b;\Delta'')\leq\textstyle\int_c^b f(x)\,dx\leq\overline{\Sigma}(f;c,b;\Delta'')\end{aligned}\tag{6.27}$$

$$\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)\leq\textstyle\int_a^b f(x)\,dx\leq\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta).\tag{6.28}$$

Αθροίζοντας τις (6.27) και χρησιμοποιώντας τις (6.25), έχουμε

$$\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) \le \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \le \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta).$$

Από αυτήν την τελευταία σχέση και από την (6.28) συνεπάγεται

$$\Big| \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^c f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx \Big| \le \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) < \epsilon.$$

Επομένως, είναι $\big| \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^c f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx \big| < \epsilon$ για κάθε $\epsilon > 0$, οπότε $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.9. *Έστω $a \le c < d \le b$ και $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[c,d]$.*

Απόδειξη. Επειδή η f είναι φραγμένη στο $[a,b]$, είναι φραγμένη και στο $[c,d]$.
Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει διαμέριση Δ' του $[a,b]$ ώστε $\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta') - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta') < \epsilon$. Θεωρούμε τη διαμέριση $\Delta'' = \Delta' \cup \{c,d\}$, η οποία είναι λεπτότερη από την Δ' και, επομένως,

$$\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta'') - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta'') < \epsilon. \tag{6.29}$$

Αν από τα Δ''-σημεία κρατήσουμε μόνο εκείνα τα οποία ανήκουν στο διάστημα $[c,d]$ (τα σημεία c, d είναι δύο τέτοια), τότε δημιουργείται διαμέριση Δ του $[c,d]$. Τώρα τα αθροίσματα Darboux $\overline{\Sigma}(f;c,d;\Delta)$ και $\underline{\Sigma}(f;c,d;\Delta)$ προκύπτουν από τα αντίστοιχα $\overline{\Sigma}(f;c,d;\Delta'')$ και $\underline{\Sigma}(f;c,d;\Delta'')$ αν από τα δύο τελευταία αφαιρέσουμε τους όρους που προέρχονται από τα Δ''-διαστήματα που δεν είναι Δ-διαστήματα. Επομένως, η διαφορά $\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)$ προκύπτει από την $\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta'') - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta'')$ αν από αυτήν αφαιρέσουμε τους όρους που προέρχονται από τα Δ''-διαστήματα που δεν είναι Δ-διαστήματα. Σύμφωνα με την παρατήρηση 2 πριν από το λήμμα 6.2 και από την (6.29), συνεπάγεται

$$\overline{\Sigma}(f;c,d;\Delta) - \underline{\Sigma}(f;c,d;\Delta) \le \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta'') - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta'') < \epsilon.$$

Άρα για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση Δ του $[c,d]$ ώστε $\overline{\Sigma}(f;c,d;\Delta) - \underline{\Sigma}(f;c,d;\Delta) < \epsilon$ και, επομένως, η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[c,d]$. □

ΟΡΙΣΜΟΣ 6.7. *Η συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ χαρακτηρίζεται* ***τμηματικά σταθερή*** *στο $[a,b]$ αν υπάρχουν $\xi_0, \ldots, \xi_m$ ώστε $a = \xi_0 < \cdots < \xi_m = b$ και υπάρχουν $c_1, \ldots, c_m$ ώστε $f(x) = c_k$ για κάθε $x \in (\xi_{k-1}, \xi_k)$ και κάθε $k = 1, \ldots, m$. Δηλαδή, η f είναι σταθερή σε καθένα από τα ανοικτά υποδιαστήματα $(\xi_0,\xi_1), \ldots, (\xi_{m-1},\xi_m)$. Η f είναι ορισμένη στα σημεία $\xi_0, \ldots, \xi_m$ αλλά οι τιμές της στα σημεία αυτά δεν έχουν καμιά σημασία.*

Παράδειγμα 6.4.4. Έστω ότι η $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι τμηματικά σταθερή στο $[a,b]$, όπως στον ορισμό που μόλις είδαμε.
Στο διάστημα $[\xi_{k-1},\xi_k]$ η f διαφέρει από τη σταθερή συνάρτηση c_k σε δύο *το πολύ* σημεία: στα άκρα ξ_{k-1}, ξ_k. Η σταθερή συνάρτηση c_k είναι ολοκληρώσιμη στο $[\xi_{k-1},\xi_k]$ και $\int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} c_k\,dx = c_k(\xi_k - \xi_{k-1})$. Άρα και η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[\xi_{k-1},\xi_k]$ και $\int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} f(x)\,dx = c_k(\xi_k - \xi_{k-1})$. Άρα η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^m \int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^m c_k(\xi_k - \xi_{k-1}).$$

Θα γνωρίσουμε, τώρα, δύο σχετικά μεγάλες κατηγορίες ολοκληρώσιμων συναρτήσεων, οι οποίες περιέχουν τις συναρτήσεις που συναντάμε συνήθως στην πράξη. Και οι δύο κατηγορίες περιέχουν τις τμηματικά σταθερές συναρτήσεις.

ΟΡΙΣΜΟΣ 6.8. *Η συνάρτηση* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *χαρακτηρίζεται* **τμηματικά συνεχής** *στο* $[a, b]$ *αν υπάρχουν* $\xi_0, \dots, \xi_m$ *ώστε* $a = \xi_0 < \cdots < \xi_m = b$*, η* f *να είναι συνεχής σε καθένα από τα ανοικτά υποδιαστήματα* $(\xi_0, \xi_1), \dots, (\xi_{m-1}, \xi_m)$ *και να υπάρχει το όριο* $\lim_{x \to \xi_k +} f(x) \in \mathbb{R}$ *για κάθε* $k = 0, \dots, m-1$ *καθώς και το όριο* $\lim_{x \to \xi_k -} f(x) \in \mathbb{R}$ *για κάθε* $k = 1, \dots, m$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.10. *Κάθε* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *τμηματικά συνεχής στο* $[a, b]$ *είναι ολοκληρώσιμη στο* $[a, b]$.

Απόδειξη. Έστω ότι η $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι τμηματικά συνεχής στο $[a, b]$, όπως στον ορισμό.
Για κάθε $k = 1, \dots, m$ θεωρούμε την $g_k(x) = \begin{cases} f(x), & \text{αν } \xi_{k-1} < x < \xi_k \\ \lim_{x \to \xi_k -} f(x), & \text{αν } x = \xi_k \\ \lim_{x \to \xi_{k-1} +} f(x), & \text{αν } x = \xi_{k-1} \end{cases}$
Η g_k είναι συνεχής στο $[\xi_{k-1}, \xi_k]$ και η f διαφέρει από αυτήν σε δύο *το πολύ* σημεία του $[\xi_{k-1}, \xi_k]$: στα άκρα ξ_{k-1}, ξ_k. Επειδή η g_k είναι ολοκληρώσιμη στο $[\xi_{k-1}, \xi_k]$, συνεπάγεται ότι και η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[\xi_{k-1}, \xi_k]$. Άρα η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. □

ΟΡΙΣΜΟΣ 6.9. *Η συνάρτηση* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *χαρακτηρίζεται* **τμηματικά μονότονη** *στο* $[a, b]$ *αν υπάρχουν* $\xi_0, \dots, \xi_m$ *ώστε* $a = \xi_0 < \cdots < \xi_m = b$ *και η* f *να είναι μονότονη σε καθένα από τα ανοικτά υποδιαστήματα* $(\xi_0, \xi_1), \dots, (\xi_{m-1}, \xi_m)$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.11. *Κάθε* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *τμηματικά μονότονη και φραγμένη στο* $[a, b]$ *είναι ολοκληρώσιμη στο* $[a, b]$.

Απόδειξη. Έστω ότι η $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι τμηματικά μονότονη στο $[a, b]$, όπως στον ορισμό.
Επειδή η f είναι φραγμένη, τα όρια $\lim_{x \to \xi_k -} f(x)$, $\lim_{x \to \xi_{k-1} +} f(x)$ υπάρχουν και είναι πραγματικοί αριθμοί.
Τώρα, ορίζουμε τις συναρτήσεις g_k ακριβώς όπως στην απόδειξη της πρότασης 6.10. Κάθε g_k είναι μονότονη στο αντίστοιχο $[\xi_{k-1}, \xi_k]$ και, επομένως, ολοκληρώσιμη στο $[\xi_{k-1}, \xi_k]$. Η f διαφέρει από την g_k σε δύο *το πολύ* σημεία του $[\xi_{k-1}, \xi_k]$: στα άκρα ξ_{k-1}, ξ_k. Άρα η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[\xi_{k-1}, \xi_k]$ και, επομένως, είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. □

Σχεδόν όλες οι συναρτήσεις που εμφανίζονται σε συγκεκριμένες εφαρμογές είναι είτε τμηματικά συνεχείς είτε τμηματικά μονότονες και, επομένως, είναι ολοκληρώσιμες σε κάθε κλειστό και φραγμένο διάστημα στο οποίο είναι φραγμένες.

ΛΗΜΜΑ 6.5. *Έστω* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *ολοκληρώσιμη στο* $[a, b]$ *και έστω ότι ισχύει* $f(x) \geq 0$ *για κάθε* $x \in [a, b]$.
[α] *Τότε* $\int_a^b f(x)\, dx \geq 0$.
[β] *Αν* $\int_a^b f(x)\, dx = 0$*, τότε η* f *μηδενίζεται σε κάθε σημείο συνέχειάς της. Ειδικότερα, αν η* f *είναι συνεχής στο* $[a, b]$*, τότε η* f *είναι σταθερή* 0 *στο* $[a, b]$.

Απόδειξη. [α] Ο 0 είναι κάτω φράγμα του συνόλου τιμών $\{f(x) \,|\, a \leq x \leq b\}$. Αν θέσουμε $l = \inf\{f(x) \,|\, a \leq x \leq b\}$, τότε $l \geq 0$. Σύμφωνα με την πρόταση 6.1, είναι

$$\int_a^b f(x)\, dx = \underline{\int_a^b} f(x)\, dx \geq l(b - a) \geq 0.$$

[β] Έστω $\int_a^b f(x)\, dx = 0$ και σημείο συνέχειας $\xi \in [a, b]$ της f και έστω (για να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι $f(\xi) > 0$.
Θεωρούμε οποιονδήποτε ϵ ώστε $0 < \epsilon < f(\xi)$. Τότε ισχύει $f(x) \geq \epsilon$ κοντά στον ξ, δηλαδή υπάρχει διάστημα $[c, d] \subseteq [a, b]$ με $d - c > 0$ και $\xi \in [c, d]$ και ώστε να ισχύει $f(x) \geq \epsilon$ για κάθε $x \in [c, d]$. Δηλαδή, ισχύει $f(x) - \epsilon \geq 0$ για κάθε $x \in [c, d]$, οπότε είναι $\int_c^d (f(x) - \epsilon)\, dx \geq 0$. Άρα $\int_c^d f(x)\, dx - \int_c^d \epsilon\, dx \geq 0$ και, επομένως,

$$\int_c^d f(x)\, dx \geq \epsilon(d - c) > 0.$$

Τώρα διακρίνουμε τέσσερις περιπτώσεις.
Έστω $a < c < d < b$. Από το ότι ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, c]$, συνεπάγεται $\int_a^c f(x)\,dx \geq 0$. Ομοίως, $\int_d^b f(x)\,dx \geq 0$. Άρα

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^d f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx \geq 0 + \int_c^d f(x)\,dx + 0 > 0.$$

Έστω $a < c < d = b$. Όπως πριν, είναι $\int_a^c f(x)\,dx \geq 0$ και, επομένως,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^d f(x)\,dx \geq 0 + \int_c^d f(x)\,dx > 0.$$

Έστω $a = c < d < b$. Όπως πριν, είναι $\int_d^b f(x)\,dx \geq 0$ και, επομένως,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx \geq \int_c^d f(x)\,dx + 0 > 0.$$

Τέλος, αν $c = a$ και $d = b$, τότε $\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(x)\,dx > 0$.
Σε κάθε περίπτωση, είναι $\int_a^b f(x)\,dx > 0$ και καταλήγουμε σε άτοπο. □

Οι επόμενες τρεις προτάσεις περιέχουν τα βασικά εργαλεία εκτίμησης ολοκληρωμάτων: τα χρησιμοποιούμε στις περιπτώσεις που δεν βολεύει ή δεν είναι εφικτός ο ακριβής υπολογισμός των ολοκληρωμάτων.

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.12. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.*
[α] *Αν ισχύει $f(x) \leq u$ για κάθε $x \in [a, b]$, τότε $\int_a^b f(x)\,dx \leq u(b - a)$.*
Αν, επιπλέον, $\int_a^b f(x)\,dx = u(b - a)$, τότε ισχύει $f(x) = u$ για κάθε σημείο συνέχειας x της f.
[β] *Αν ισχύει $f(x) \geq l$ για κάθε $x \in [a, b]$, τότε $\int_a^b f(x)\,dx \geq l(b - a)$.*
Αν, επιπλέον, $\int_a^b f(x)\,dx = l(b - a)$, τότε ισχύει $f(x) = l$ για κάθε σημείο συνέχειας x της f.
[γ] *Αν ισχύει $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [a, b]$, τότε $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq M(b - a)$.*
Αν, επιπλέον, $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = M(b - a)$, τότε είτε ισχύει $f(x) = M$ για κάθε σημείο συνέχειας x της f είτε ισχύει $f(x) = -M$ για κάθε σημείο συνέχειας x της f.

Απόδειξη. [α] Εφαρμόζουμε το λήμμα 6.5 στη συνάρτηση $u - f(x)$.
[β] Ομοίως, με τη συνάρτηση $f(x) - l$.
[γ] Από τα [α], [β] και επειδή ισχύει $-M \leq f(x) \leq M$ για κάθε $x \in [a, b]$, συνεπάγεται

$$-M(b - a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b - a),$$

οπότε $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq M(b - a)$.
Αν $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = M(b - a)$, τότε είτε $\int_a^b f(x)\,dx = M(b - a)$ είτε $\int_a^b f(x)\,dx = -M(b - a)$. Συνεπάγεται, αντιστοίχως, είτε ότι ισχύει $f(x) = M$ για κάθε σημείο συνέχειας x της f είτε ότι ισχύει $f(x) = -M$ για κάθε σημείο συνέχειας x της f. □

Παράδειγμα 6.4.5. Η μέγιστη τιμή της $f : [1, 4] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{x}{x^2+2}$ είναι η $\frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2+2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$. Επομένως, $\int_1^4 \frac{x}{x^2+2}\,dx \leq \frac{\sqrt{2}}{4}(4 - 1) = \frac{3\sqrt{2}}{4}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.13. *Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$ ώστε να ισχύει $f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$.*
[α] *Τότε $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.*
[β] *Αν $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$, τότε ισχύει $f(x) = g(x)$ σε κάθε κοινό σημείο συνέχειας x των f, g. Ειδικώτερα, αν οι f, g είναι συνεχείς στο $[a, b]$, τότε οι f, g ταυτίζονται στο $[a, b]$.*

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το λήμμα 6.5 στη συνάρτηση $g - f$. □

Παράδειγμα 6.4.6. Έστω η $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \log(1+x)$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,1]$, είναι και ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$.
Είναι εύκολο, με τις μεθόδους του προηγούμενου κεφαλαίου, να αποδειχθεί ότι ισχύει $x\log 2 \le \log(1+x) \le x$ για κάθε $x \in [0,1]$. Άρα $\int_0^1 x\log 2\,dx \le \int_0^1 \log(1+x)\,dx \le \int_0^1 x dx$. Άρα $\frac{\log 2}{2} \le \int_0^1 \log(1+x)\,dx \le \frac{1}{2}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.14. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Τότε η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και*

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Αν $\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| = \int_a^b |f(x)|\,dx$, τότε είτε ισχύει $f(x) \ge 0$ για κάθε σημείο συνέχειας x της f είτε ισχύει $f(x) \le 0$ για κάθε σημείο συνέχειας x της f.

Απόδειξη. Επειδή η f είναι φραγμένη στο $[a,b]$, υπάρχει M ώστε να ισχύει $|f(x)| \le M$ για κάθε $x \in [a,b]$. Αυτό, φυσικά, σημαίνει ότι και η $|f|$ είναι φραγμένη στο $[a,b]$.
Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει διαμέριση $\Delta = \{a = x_0, \dots, x_n = b\}$ του $[a,b]$ ώστε

$$\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) < \epsilon. \tag{6.30}$$

Έστω $u_k{}'$ και $l_k{}'$ το supremum και το infimum της f στο $[x_{k-1}, x_k]$ καθώς και u_k και l_k οι αντίστοιχες ποσότητες για την $|f|$. Για κάθε $s,t \in [x_{k-1}, x_k]$ ισχύει $l_k{}' - u_k{}' \le f(s) - f(t) \le u_k{}' - l_k{}'$, οπότε $|f(s) - f(t)| \le u_k{}' - l_k{}'$. Άρα για κάθε $s,t \in [x_{k-1}, x_k]$ ισχύει $||f(s)| - |f(t)|| \le |f(s) - f(t)| \le u_k{}' - l_k{}'$. Σύμφωνα με την παρατήρηση 3 πριν από το λήμμα 6.2, συνεπάγεται

$$u_k - l_k \le u_k{}' - l_k{}'.$$

Άρα, χρησιμοποιώντας και την (6.30), έχουμε

$$\begin{aligned}\overline{\Sigma}(|f|;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(|f|;a,b;\Delta) &= \textstyle\sum_{k=1}^n (u_k - l_k)(x_k - x_{k-1}) \le \sum_{k=1}^n (u_k{}' - l_k{}')(x_k - x_{k-1}) \\ &= \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) < \epsilon.\end{aligned}$$

Άρα για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση Δ του $[a,b]$ ώστε $\overline{\Sigma}(|f|;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(|f|;a,b;\Delta) < \epsilon$. Άρα η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.
Τώρα, ισχύει $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$ για κάθε $x \in [a,b]$, οπότε

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx = \int_a^b (-|f(x)|)\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Άρα $\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$.
Αν $\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| = \int_a^b |f(x)|\,dx$, τότε είναι είτε $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b |f(x)|\,dx$ είτε $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_a^b |f(x)|\,dx$. Συνεπάγεται, αντιστοίχως, είτε ότι ισχύει $f(x) = |f(x)|$ ή, ισοδύναμα, $f(x) \ge 0$ για κάθε σημείο συνέχειας x της f είτε ότι ισχύει $f(x) = -|f(x)|$ ή, ισοδύναμα, $f(x) \le 0$ για κάθε σημείο συνέχειας x της f. □

Παράδειγμα 6.4.7. Έστω $x > 0$.
Επειδή ισχύει $0 \le \frac{t}{1+t} \le 1$ για κάθε $t \ge 0$, είναι $0 \le \int_0^x \frac{t}{1+t}\,dt \le \int_0^x 1\,dt = x$.
Επίσης, επειδή ισχύει $0 \le \frac{t}{1+t} \le t$ για κάθε $t \ge 0$, συνεπάγεται $0 \le \int_0^x \frac{t}{1+t}\,dt \le \int_0^x t\,dt = \frac{x^2}{2}$.
Άρα $0 \le \int_0^x \frac{t}{1+t}\,dt \le \min\left\{x, \frac{x^2}{2}\right\} = \begin{cases} x^2/2, & \text{αν } 0 < x \le 2 \\ x, & \text{αν } x \ge 2 \end{cases}$

ΠΡΩΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ ΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b]$, $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και έστω ότι ισχύει $g(x) \ge 0$ για κάθε $x \in [a,b]$. Τότε υπάρχει $\xi \in [a,b]$ ώστε*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi) \int_a^b g(x)\,dx.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την $h:[a,b]\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$h(t)=f(t)\int_a^b g(x)\,dx-\int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

για κάθε $t\in[a,b]$. Προφανώς, η h είναι συνεχής στο $[a,b]$. Επειδή η f είναι συνεχής, υπάρχουν $\zeta,\eta\in[a,b]$ ώστε να ισχύει $f(\zeta)\le f(x)\le f(\eta)$ και, επομένως,

$$f(\zeta)g(x)\le f(x)g(x)\le f(\eta)g(x)$$

για κάθε $x\in[a,b]$. Συνεπάγεται

$$f(\zeta)\int_a^b g(x)\,dx=\int_a^b f(\zeta)g(x)\,dx\le\int_a^b f(x)g(x)\,dx\le\int_a^b f(\eta)g(x)\,dx=f(\eta)\int_a^b g(x)\,dx.$$

Άρα $h(\zeta)\le 0\le h(\eta)$, οπότε υπάρχει $\xi\in[a,b]$ ώστε $h(\xi)=0$ ή, ισοδύναμα, $\int_a^b f(x)g(x)\,dx=f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx$. □

ΟΡΙΣΜΟΣ 6.10. *Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Ο αριθμός $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ ονομάζεται* **μέση τιμή** *της f στο $[a,b]$ και συμβολίζεται*

$$E(f;a,b)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Η ονομασία *μέση τιμή* για το $E(f;a,b)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ θα εξηγηθεί στην επόμενη ενότητα.

Είτε από την πρόταση 6.12 είτε από την πρόταση 6.1 συνεπάγεται ότι η μέση τιμή μιας f ολοκληρώσιμης στο $[a,b]$ είναι αριθμός στο διάστημα $[l,u]$, όπου u και l είναι το supremum και το infimum της f στο $[a,b]$. Επίσης, εφαρμόζοντας το πρώτο θεώρημα μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού με τη σταθερή συνάρτηση $g=1$, συμπεραίνουμε ότι

Η μέση τιμή μιας f συνεχούς στο $[a,b]$ είναι κάποια από τις τιμές της στο $[a,b]$.

Παράδειγμα 6.4.8. Η μέση τιμή της συνάρτησης $f(x)=\begin{cases}-1, & \text{αν } -1\le x<0\\ 1, & \text{αν } 0\le x\le 1\end{cases}$ στο $[-1,1]$ είναι $\frac{1}{1-(-1)}\int_{-1}^1 f(x)\,dx=0$, αλλά καμιά τιμή της συνάρτησης στο $[-1,1]$ δεν είναι 0.

Αν η μέση τιμή της f στο $[a,b]$ είναι ο αριθμός ρ, τότε $\int_a^b f(x)\,dx=\rho(b-a)=\int_a^b\rho\,dx$. Επομένως, *η μέση τιμή της f στο $[a,b]$ είναι εκείνη η τιμή που πρέπει να έχει μια σταθερή συνάρτηση στο $[a,b]$ ώστε το ολοκλήρωμά της να είναι ίσο με το ολοκλήρωμα της f.*

Ασκήσεις.

6.4.1. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα $\int_{-2}^{7/2}([x]+x^2)\,dx$, $\int_1^5(2-3x+4x^2)\,dx$, $\int_{-2}^4(3x-2^x)\,dx$, $\int_1^3(\frac{2}{x}-x^2+x^{\sqrt{2}}+3e^x)\,dx$.

Αν $f(x)=\begin{cases}1+3x, & \text{αν } 1<x<2\\ 0, & \text{αν } x=1\\ -2, & \text{αν } x=2\end{cases}$ $\quad g(x)=\begin{cases}3x, & \text{αν } -1\le x<0\\ 2x, & \text{αν } 0\le x\le 2\\ x+2, & \text{αν } 2<x\le 5\end{cases}$ υπολογίστε τα ολοκληρώματα $\int_1^2 f(x)\,dx$, $\int_{-1}^5 g(x)\,dx$.

6.4.2. [2] Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και έστω ότι ισχύει $f(x)\ge 0$ για κάθε $x\in[a,b]$.

Αποδείξτε ότι $0\le\int_c^d f(x)\,dx\le\int_a^b f(x)\,dx$ για κάθε $[c,d]\subseteq[a,b]$.

Γενικότερα, αν τα $[c_1,d_1],\ldots,[c_n,d_n]$ είναι ξένα ανά δύο (εκτός κοινών άκρων) και περιέχονται στο $[a,b]$, αποδείξτε ότι $\int_{c_1}^{d_1} f(x)\,dx+\cdots+\int_{c_n}^{d_n} f(x)\,dx\le\int_a^b f(x)\,dx$.

[2] Μερικές πολύ χρήσιμες ανισότητες. Πολλές φορές, από επιπολαιότητα, γίνεται λάθος χρήση αυτών των ανισοτήτων χωρίς να έχει εξασφαλιστεί ότι ισχύει $f(x)\ge 0$ για κάθε $x\in[a,b]$.

6.4.3. Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$. Αποδείξτε ότι οι $\max\{f, g\}, \min\{f, g\} : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$ και $\int_a^b \max\{f(x), g(x)\}\, dx + \int_a^b \min\{f(x), g(x)\}\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$.

6.4.4. Αποδείξτε ότι $\int_0^\pi (\sin x)^{n+1}\, dx \le \int_0^\pi (\sin x)^n\, dx$ και $\int_0^{\pi/4} (\tan x)^{n+1}\, dx \le \int_0^{\pi/4} (\tan x)^n\, dx$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, χωρίς να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα.

6.4.5. Χωρίς να βρείτε τα ολοκληρώματα, αποδείξτε ότι ισχύει $xe^{-2x} \le \int_x^{2x} e^{-t}\, dt \le xe^{-x}$ για κάθε $x > 0$ και $3e^{-2} \le \int_{1/2}^2 xe^{-x}\, dx \le \frac{3}{2} e^{-1}$.

6.4.6. Αποδείξτε ότι ισχύει $0 \le \frac{x}{1-x+x^2} \le \frac{4x}{3}$ για κάθε $x \in [0, 1]$ και $0 \le \frac{x}{1-x+x^2} \le \frac{4}{3x}$ για κάθε $x \in [1, +\infty)$.

Αποδείξτε ότι ισχύει $0 \le \int_0^x \frac{t}{1-t+t^2}\, dt \le \frac{2x^2}{3}$ για κάθε $x \in [0, 1]$.

Αποδείξτε ότι ισχύει $0 \le \int_0^x \frac{t}{1-t+t^2}\, dt \le \frac{2}{3} + \frac{4}{3}\log x$ για κάθε $x \in [1, +\infty)$.

6.4.7. Βρείτε τα $\lim_{x\to+\infty} \int_x^{x+\sqrt{x}} \frac{t}{1+t^2}\, dt$, $\lim_{x\to+\infty} \int_x^{2x} \frac{1+t^5}{1+t+t^2+t^6}\, dt$, $\lim_{x\to 0+} \int_{1-x}^{1+2x} \frac{t}{1+t+t^2}\, dt$, $\lim_{x\to 0+} \frac{1}{2x} \int_{1-x}^{1+x} \frac{t}{1+t^2}\, dt$, $\lim_{x\to 0+} \frac{1}{2x} \int_{-x}^{x} \frac{1+t^5}{1+t^6}\, dt$.

6.4.8. Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς στο $[a, b]$. Αν $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b g(x)\, dx$, αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [a, b]$ ώστε $f(\xi) = g(\xi)$. Κατόπιν, αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε $f(\xi) = g(\xi)$.

6.4.9. [α] Έστω $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[0, 1]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [0, 1]$ ώστε $\int_0^1 f(x)x^2\, dx = \frac{f(\xi)}{3}$.

[β] Έστω $a > 0$ και $f : [\log a, \log(a + 1)] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[\log a, \log(a + 1)]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [\log a, \log(a + 1)]$ ώστε $\int_{\log a}^{\log(a+1)} e^x f(x)\, dx = f(\xi)$.

6.4.10. [3] Σχεδιάστε το γράφημα της συνάρτησης $x - [x] - \frac{1}{2}$.

Έστω $k \in \mathbb{Z}$. Αποδείξτε ότι $\int_k^{k+1} (x - [x] - \frac{1}{2})\, dx = 0$, $\int_k^{k+(1/2)} (x - [x] - \frac{1}{2})\, dx = -\frac{1}{8}$ και $\int_{k+(1/2)}^{k+1} (x - [x] - \frac{1}{2})\, dx = \frac{1}{8}$.

Αποδείξτε ότι $-\frac{1}{8} \le \int_a^b (x - [x] - \frac{1}{2})\, dx \le \frac{1}{8}$ για κάθε a, b με $a < b$.

6.4.11. [4] [α] Αν $p > 0$, αποδείξτε ότι ισχύει $n^p \le \int_n^{n+1} x^p\, dx \le (n + 1)^p$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Αποδείξτε ότι ισχύει $n^p \le \frac{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}}{p+1} \le (n + 1)^p$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Αποδείξτε ότι η ακολουθία (x_n), όπου $x_n = \sum_{k=1}^n k^p - \frac{n^{p+1}}{p+1}$ για κάθε n, είναι αύξουσα.

[β] Αν $0 < p < 1$, αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{1}{(n+1)^p} \le \int_n^{n+1} \frac{1}{x^p}\, dx \le \frac{1}{n^p}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{1}{(n+1)^p} \le \frac{(n+1)^{1-p} - n^{1-p}}{1-p} \le \frac{1}{n^p}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Αποδείξτε ότι η ακολουθία (x_n), όπου $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^p} - \frac{n^{1-p}}{1-p}$ για κάθε n, είναι φθίνουσα και ότι συγκλίνει.

Αποδείξτε ότι $n^{p-1} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^p} \to \frac{1}{1-p}$.

[γ] Αν $p > 1$, αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{1}{(n+1)^p} \le \int_n^{n+1} \frac{1}{x^p}\, dx \le \frac{1}{n^p}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{1}{(n+1)^p} \le \frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{n^{p-1}} - \frac{1}{(n+1)^{p-1}}\right) \le \frac{1}{n^p}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Αποδείξτε ότι η ακολουθία (x_n), όπου $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^p}$ για κάθε n, συγκλίνει.

[δ] Αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{1}{n+1} \le \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\, dx \le \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

---

[3] Οι συναρτήσεις αυτής της άσκησης θα χρησιμοποιηθούν αργότερα, στην άσκηση 7.3.20, για να αποδειχθούν μερικά σημαντικά αποτελέσματα, όπως ο τύπος του Stirling.

[4] Πολλά από τα θέματα αυτής της άσκησης θα τα ξαναδούμε στην άσκηση 7.3.20 και στην υποενότητα 8.2.1.

Αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{1}{n+1} \leq \log \frac{n+1}{n} \leq \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
Αποδείξτε ότι η ακολουθία (x_n), όπου $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n$ για κάθε n, είναι φθίνουσα και ότι συγκλίνει.[5]
Αποδείξτε ότι $\frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \to 1$.
[ε] Αποδείξτε ότι ισχύει $\log \frac{m+1}{n} \leq \sum_{k=n}^{m} \frac{1}{k} \leq \frac{1}{n} + \log \frac{m}{n}$ για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ με $n \leq m$.
Για κάθε $p \in \mathbb{N}$, αποδείξτε ότι[6]

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{pn-1} + \frac{1}{pn} \to \log p.$$

[στ] Θεωρήστε την ακολουθία (y_n), όπου $y_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ για κάθε n. Στο παράδειγμα 2.5.7 αποδείξαμε ότι η (y_n) συγκλίνει. Αν $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n$ για κάθε n, αποδείξτε ότι ισχύει $y_{2n} = x_{2n} - x_n + \log 2$ για κάθε n και, κατόπιν, ότι $y_{2n} \to \log 2$. Συμπεράνατε ότι[7]

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} \to \log 2.$$

6.4.12. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ και ότι ισχύει $|f(x') - f(x'')| \leq M|x' - x''|$ για κάθε $x', x'' \in [a, b]$.[8]
Αποδείξτε ότι $\left| \int_c^d f(x)\, dx - f(d)(d - c) \right| \leq M \frac{(d-c)^2}{2}$ για κάθε $[c, d] \subseteq [a, b]$.
Αποδείξτε[9] ότι $\left| \int_a^b f(x)\, dx - \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(a + k\frac{b-a}{n}) \right| \leq \frac{M(b-a)^2}{2n}$ για κάθε n και, επομένως, ότι $\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(a + k\frac{b-a}{n}) \to \int_a^b f(x)\, dx$.

6.4.13. [10] Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Αποδείξτε: $\lim_{x\to\xi+} \int_\xi^x f(t)\, dt = 0$ για κάθε $\xi \in [a, b)$ και $\lim_{x\to\xi-} \int_x^\xi f(t)\, dt = 0$ για κάθε $\xi \in (a, b]$.

6.4.14. [11] [α] Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και έστω η $g : [a + c, b + c] \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = f(x - c)$ για κάθε $x \in [a + c, b + c]$. Αποδείξτε ότι η g είναι ολοκληρώσιμη στο $[a + c, b + c]$ και $\int_{a+c}^{b+c} g(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx$ ή, ισοδύναμα,

$$\int_{a+c}^{b+c} f(x - c)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx.$$

[β] Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ περιοδική με περίοδο $\tau > 0$, δηλαδή ισχύει $f(x + \tau) = f(x)$ για κάθε x. Έστω ότι υπάρχει κ ώστε η f να είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[\kappa, \kappa + \tau]$.
Αποδείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ για κάθε a, b με $a < b$.
Αποδείξτε ότι $\int_a^b f(x)\, dx = \int_{a+\tau}^{b+\tau} f(x)\, dx$ και $\int_a^{a+\tau} f(x)\, dx = \int_b^{b+\tau} f(x)\, dx$ για κάθε a, b με $a < b$.
[γ] Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και $\lambda > 0$ και έστω η $g : [\lambda a, \lambda b] \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = f(\frac{x}{\lambda})$ για κάθε $x \in [\lambda a, \lambda b]$. Αποδείξτε ότι η g είναι ολοκληρώσιμη στο $[\lambda a, \lambda b]$ και $\int_{\lambda a}^{\lambda b} g(x)\, dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx$ ή, ισοδύναμα,

$$\int_{\lambda a}^{\lambda b} f\left(\frac{x}{\lambda}\right) dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx \qquad \text{αν } \lambda > 0.$$

Το ανάλογο αποτέλεσμα, αν $\lambda < 0$, είναι:

$$\int_{\lambda b}^{\lambda a} f\left(\frac{x}{\lambda}\right) dx = -\lambda \int_a^b f(x)\, dx \qquad \text{αν } \lambda < 0.$$

[5] Το όριο της ακολουθίας αυτής ονομάζεται **σταθερά του Euler** και συμβολίζεται γ. Δείτε και τις ασκήσεις 2.4.6 και 7.3.20[ε].

[6] Αυτό θα το ξαναδούμε στην άσκηση 6.5.1.

[7] Αυτό θα το ξαναποδείξουμε στο παράδειγμα 10.2.12.

[8] Σύμφωνα με την υποσημείωση της άσκησης 4.6.3, η f είναι Lipschitz-συνεχής στο $[a, b]$.

[9] Θα δούμε στην άσκηση 6.5.1 ότι από την πρόταση 6.15 συνεπάγεται το παρόν όριο για κάθε f ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Όμως, με τη συγκεκριμένη υπόθεση για την f, προκύπτει και η παρούσα εκτίμηση της διαφοράς ανάμεσα στα αθροίσματα και στο όριό τους.

[10] Αυτή η άσκηση είναι μια “προετοιμασία” για την πρόταση 7.2 η οποία αποδεικνύει τη συνέχεια του αόριστου ολοκληρώματος.

[11] Μερικές απλές και σημαντικές αλλαγές μεταβλητής: η **μεταφορά** στο [α] και η **αλλαγή κλίμακας** στο [γ].

[δ] Έστω $f : [-b, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[0, b]$.
Αν ισχύει $f(-x) = f(x)$ για κάθε $x \in [-b, b]$, αποδείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[-b, b]$ και $\int_{-b}^{b} f(x)\,dx = 2\int_0^b f(x)\,dx$.
Αν ισχύει $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in [-b, b]$, αποδείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[-b, b]$ και $\int_{-b}^{b} f(x)\,dx = 0$.

6.4.15. [12] [α] Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Αν $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$ για κάθε συνάρτηση $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$, αποδείξτε ότι η f μηδενίζεται σε κάθε σημείο συνέχειάς της. Ειδικώτερα, αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$, τότε ισχύει $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b]$.
[β] Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Αν $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$ για κάθε συνάρτηση $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχή στο $[a, b]$ με $g(a) = g(b) = 0$, αποδείξτε ότι η f μηδενίζεται σε κάθε σημείο συνέχειάς της. Ειδικώτερα, αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$, τότε ισχύει $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b]$.

6.4.16. Δείτε την άσκηση 6.3.2. Έστω $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[0, +\infty)$, $f(0) = 0$ και έστω ότι $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Το σύνολο τιμών της f είναι το $[0, +\infty)$ και η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[0, +\infty)$.
Αποδείξτε ότι $ab \leq \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^b f^{-1}(y)\,dy$ για κάθε $a, b > 0$ και ότι η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $f(a) = b$.
Εφαρμόστε το αποτέλεσμα αυτό στη συνάρτηση x^{p-1} με $p > 1$ για να αποδείξετε την ανισότητα του Young στην άσκηση 5.4.21 (και στην άσκηση 5.5.38).

6.4.17. [13] Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$.
[α] Αποδείξτε ότι

$$\tfrac{1}{2}\int_a^b \big(\int_a^b (f(s) - f(t))(g(s) - g(t))\,ds\big)\,dt = (b - a)\int_a^b f(x)g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \int_a^b g(x)\,dx.$$

[β] Αν οι f, g είναι είτε και οι δύο αύξουσες είτε και οι δύο φθίνουσες στο $[a, b]$, αποδείξτε ότι $\int_a^b f(x)\,dx \int_a^b g(x)\,dx \leq (b - a)\int_a^b f(x)g(x)\,dx$, δηλαδή $E(f; a, b)E(g; a, b) \leq E(fg; a, b)$.
[γ] Αν η f είναι αύξουσα και η g φθίνουσα στο $[a, b]$, αποδείξτε ότι $\int_a^b f(x)\,dx \int_a^b g(x)\,dx \geq (b - a)\int_a^b f(x)g(x)\,dx$, δηλαδή $E(f; a, b)E(g; a, b) \geq E(fg; a, b)$.

6.4.18. [14] Έστω $f, g : [a, b] \to [0, +\infty)$ συνεχείς στο $[a, b]$ και $p, q > 1$ ώστε $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
[α] Αποδείξτε την **ανισότητα του Hölder** για ολοκληρώματα:

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq \big(\int_a^b (f(x))^p\,dx\big)^{1/p}\big(\int_a^b (g(x))^q\,dx\big)^{1/q}.$$

Αποδείξτε ότι ισχύει η ισότητα αν και μόνο αν υπάρχουν $s, t \geq 0$ όχι και οι δύο ίσοι με 0 ώστε να ισχύει $s(f(x))^p = t(g(x))^q$ για κάθε $x \in [a, b]$.
Επειδή $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, η πολύ σημαντική **ανισότητα των Schwarz, Buniakowsky**,

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq \big(\int_a^b (f(x))^2\,dx\big)^{1/2}\big(\int_a^b (g(x))^2\,dx\big)^{1/2},$$

είναι ειδική περίπτωση της ανισότητας του Hölder.
[β] Αποδείξτε την **ανισότητα του Minkowski** για ολοκληρώματα:

$$\big(\int_a^b (f(x) + g(x))^p\,dx\big)^{1/p} \leq \big(\int_a^b (f(x))^p\,dx\big)^{1/p} + \big(\int_a^b (g(x))^p\,dx\big)^{1/p}.$$

Αποδείξτε ότι ισχύει η ισότητα αν και μόνο αν υπάρχουν $s, t \geq 0$ όχι και οι δύο ίσοι με 0 ώστε να ισχύει $sf(x) = tg(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$.

[12] Μια σημαντική άσκηση. Ένα από τα βασικά εργαλεία του Λογισμού Μεταβολών.
[13] Μια ενδιαφέρουσα ισότητα και δύο ενδιαφέρουσες ανισότητες.
[14] Εδώ έχουμε την “ολοκληρωτική” μορφή των ανισοτήτων της άσκησης 5.4.22. Με λίγο ασθενέστερες υποθέσεις θα τις ξαναδούμε στην άσκηση 6.4.27 αλλά και στην άσκηση 6.5.5.

6.4.19. [α][15] Έστω $f : [a, b] \to [c, d]$ συνεχής στο $[a, b]$ και $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ κυρτή και συνεχής στο $[c, d]$. Αποδείξτε την **ανισότητα του Jensen** για ολοκληρώματα: $g\big(E(f; a, b)\big) \leq E(g \circ f; a, b)$ ή, ισοδύναμα,

$$g\big(\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\big) \leq \tfrac{1}{b-a}\int_a^b g(f(x))\,dx.$$

Αν η g είναι, επιπλέον, γνησίως κυρτή στο $[c, d]$, αποδείξτε ότι ισχύει η ισότητα αν και μόνο αν η f είναι σταθερή στο $[a, b]$.

Πώς διατυπώνονται τα προηγούμενα αν η g είναι (γνησίως) κοίλη αντί (γνησίως) κυρτή;

Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b]$. Αποδείξτε ότι:

(i) αν ο $n \in \mathbb{N}$ είναι άρτιος, τότε $\big(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\big)^n \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b (f(x))^n\,dx$.

(ii) αν $\rho > 1$ και $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$, τότε $\big(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\big)^\rho \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b (f(x))^\rho\,dx$.

(iii) αν $0 < \rho < 1$ και $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$, τότε $\big(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\big)^\rho \geq \frac{1}{b-a}\int_a^b (f(x))^\rho\,dx$.

(iv) αν $\rho < 0$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [a, b]$, τότε $\big(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\big)^\rho \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b (f(x))^\rho\,dx$.

(v) $e^{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx} \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b e^{f(x)}\,dx$.

(vi) αν $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [a, b]$, τότε $\log\big(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\big) \geq \frac{1}{b-a}\int_a^b \log(f(x))\,dx$. Η ανισότητα αυτή, αν γραφτεί

$$e^{\frac{1}{b-a}\int_a^b \log(f(x))\,dx} \leq \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx,$$

αναφέρεται ως **ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου**.[16]

Αποδείξτε ότι καθεμιά από τις παραπάνω ανισότητες ισχύει ως ισότητα αν και μόνο αν η f είναι σταθερή στο $[a, b]$.

[β] Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ και $w : [a, b] \to (0, +\infty)$ ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$ ώστε $\int_a^b w(x)\,dx = 1$. Συμβολίζουμε $E_w(f; a, b) = \int_a^b f(x)w(x)\,dx$.[17]

Στην περίπτωση της μέσης τιμής $E(f; a, b) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ ποιά είναι η αντίστοιχη w;

Έχουμε την εξής *γενικότερη εκδοχή της ανισότητας του Jensen.*[18] Έστω $f : [a, b] \to [c, d]$ συνεχής στο $[a, b]$ και $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ κυρτή και συνεχής στο $[c, d]$. Έστω, επίσης, $w : [a, b] \to (0, +\infty)$ συνεχής στο $[a, b]$ ώστε $\int_a^b w(x)\,dx = 1$. Αποδείξτε ότι $g\big(E_w(f; a, b)\big) \leq E_w(g \circ f; a, b)$ ή, ισοδύναμα,

$$g\big(\int_a^b f(x)w(x)\,dx\big) \leq \int_a^b g(f(x))w(x)\,dx.$$

Αν η g είναι, επιπλέον, γνησίως κυρτή στο $[c, d]$, αποδείξτε ότι ισχύει η ισότητα αν και μόνο αν η f είναι σταθερή στο $[a, b]$.

Πώς διατυπώνονται τα προηγούμενα αν η g είναι (γνησίως) κοίλη αντί (γνησίως) κυρτή;

Διατυπώστε όλες τις ανισότητες του [α] με τη συνάρτηση w στα διάφορα ολοκληρώματα.

[γ][19] Έστω $f, w : [a, b] \to (0, +\infty)$ ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$ ώστε $\int_a^b w(x)\,dx = 1$.

Αποδείξτε ότι η $\big(\int_a^b (f(x))^p w(x)\,dx\big)^{1/p}$ είναι, ως συνάρτηση του p, αύξουσα στο $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Αποδείξτε ότι

$$\lim_{p \to 0}\big(\int_a^b (f(x))^p w(x)\,dx\big)^{1/p} = e^{\int_a^b \log f(x)\,w(x)\,dx}.$$

Αν $p' < 0 < p''$, αποδείξτε ότι

$$\big(\int_a^b (f(x))^{p'} w(x)\,dx\big)^{1/p'} \leq e^{\int_a^b \log f(x)\,w(x)\,dx} \leq \big(\int_a^b (f(x))^{p''} w(x)\,dx\big)^{1/p''}.$$

---

[15] Εδώ έχουμε την "ολοκληρωτική" μορφή της ανισότητας του Jensen της άσκησης 5.5.39. Θα τήν ξαναδούμε με λίγο ασθενέστερες υποθέσεις στην άσκηση 6.4.27 και στην άσκηση 6.5.5.

[16] και θεωρείται ανάλογη της ανισότητας στην άσκηση 5.4.20[β]. Η ποσότητα $e^{\frac{1}{b-a}\int_a^b \log(f(x))\,dx}$ ονομάζεται **γεωμετρική μέση τιμή** της f στο $[a, b]$.

[17] Ο αριθμός $E_w(f; a, b) = \int_a^b f(x)w(x)\,dx$ ονομάζεται **μέση τιμή** της f ως προς την w στο $[a, b]$. Σ' αυτό το πλαίσιο, η συνάρτηση w ονομάζεται **συνάρτηση βάρους**.

[18] Με λίγο ασθενέστερες υποθέσεις υπάρχει στην άσκηση 6.4.27 και στην άσκηση 6.5.5.

[19] Η "ολοκληρωτική" μορφή της άσκησης 5.4.23.

6.4.20. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b]$ και έστω ότι ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. Αν $u = \max\{f(x) \,|\, a \leq x \leq b\}$ αποδείξτε ότι $\big(\int_a^b (f(x))^n \, dx\big)^{1/n} \to u$.

6.4.21. [20] Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b]$ και έστω ότι ισχύει $|f(x)| \leq \kappa \int_a^x |f(t)| \, dt$ για κάθε $x \in [a, b]$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή 0 στο $[a, b]$.

6.4.22. Αν η $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$ και συνεχής στον 0, αποδείξτε ότι $\int_0^1 f(x^n) \, dx \to f(0)$.

6.4.23. [α] Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ φραγμένες στο $[a, b]$. Αποδείξτε ότι $\underline{\int}_a^b f(x) \, dx + \underline{\int}_a^b g(x) \, dx \leq \underline{\int}_a^b (f(x) + g(x)) \, dx \leq \overline{\int}_a^b (f(x) + g(x)) \, dx \leq \overline{\int}_a^b f(x) \, dx + \overline{\int}_a^b g(x) \, dx$.
[β] Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη στο $[a, b]$. Αποδείξτε ότι:
(i) αν $\lambda > 0$, τότε $\overline{\int}_a^b \lambda f(x) \, dx = \lambda \overline{\int}_a^b f(x) \, dx$ και $\underline{\int}_a^b \lambda f(x) \, dx = \lambda \underline{\int}_a^b f(x) \, dx$.
(ii) αν $\lambda < 0$, τότε $\overline{\int}_a^b \lambda f(x) \, dx = \lambda \underline{\int}_a^b f(x) \, dx$ και $\underline{\int}_a^b \lambda f(x) \, dx = \lambda \overline{\int}_a^b f(x) \, dx$.
[γ] Έστω $a < c < b$ και $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη στο $[a, b]$. Αποδείξτε ότι $\overline{\int}_a^b f(x) \, dx = \overline{\int}_a^c f(x) \, dx + \overline{\int}_c^b f(x) \, dx$ και $\underline{\int}_a^b f(x) \, dx = \underline{\int}_a^c f(x) \, dx + \underline{\int}_c^b f(x) \, dx$.
[δ] Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ φραγμένες στο $[a, b]$ και έστω ότι ισχύει $f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$. Αποδείξτε ότι $\overline{\int}_a^b f(x) \, dx \leq \overline{\int}_a^b g(x) \, dx$ και $\underline{\int}_a^b f(x) \, dx \leq \underline{\int}_a^b g(x) \, dx$.

6.4.24. Έστω φραγμένη $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ και $\xi_0, \ldots, \xi_m$ ώστε $a = \xi_0 < \cdots < \xi_m = b$ και ώστε η f να είναι συνεχής στο (ξ_{k-1}, ξ_k) για κάθε $k = 1, \ldots, m$. Αποδείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Προσέξτε: μπορεί να μην υπάρχουν τα πλευρικά όρια στους ξ_k.

6.4.25. Έστω η $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} (-1)^{[1/x]}, & \text{αν } 0 < x \leq 1 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ Αποδείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$ και υπολογίστε το $\int_0^1 f(x) \, dx$.

6.4.26. [21] [α] Αποδείξτε ότι η $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ αν και μόνο αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχουν τμηματικά σταθερές συναρτήσεις $g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$ και $\int_a^b h(x) \, dx - \int_a^b g(x) \, dx < \epsilon$.
[β] Έστω ότι η $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι τμηματικά σταθερή. Αποδείξτε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχουν $g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς στο $[a, b]$ ώστε να ισχύει $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$ και $\int_a^b h(x) \, dx - \int_a^b g(x) \, dx < \epsilon$.
[γ] Αποδείξτε ότι η $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ αν και μόνο αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχουν $g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς στο $[a, b]$ ώστε να ισχύει $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$ και $\int_a^b h(x) \, dx - \int_a^b g(x) \, dx < \epsilon$.

6.4.27. [22] [α] Έστω $f : [a, b] \to [c, d]$ ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[c, d]$. Αποδείξτε ότι η $g \circ f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.
[β] Βάσει του [α], αποδείξτε ότι, αν η $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$, τότε και η $f^2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Κατόπιν, γράφοντας $fg = \frac{1}{4}(f + g)^2 - \frac{1}{4}(f - g)^2$ και χρησιμοποιώντας τις προτάσεις 6.3 και 6.4, αποδείξτε την πρόταση 6.6.
[γ] Έστω, για κάθε n, πεπερασμένο $A_n \subseteq [a, b]$ ώστε $A_m \cap A_n = \emptyset$ για κάθε m, n με $m \neq n$. Ορίζουμε $f(x) = \begin{cases} 1/n, & \text{αν } x \in A_n \text{ για κάποιον } n \\ 0, & \text{αν } x \in [a, b] \text{ και } x \notin A_n \text{ για κάθε } n \end{cases}$ Αποδείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και $\int_a^b f(x) \, dx = 0$.

[20] Προσέξτε την ομοιότητα αυτής της άσκησης με την άσκηση 5.4.28.

[21] Μερικά σημαντικά αποτελέσματα για τη σχέση ανάμεσα σε ολοκληρώσιμες συναρτήσεις και σε τμηματικά σταθερές συναρτήσεις καθώς και για τη σχέση ανάμεσα σε ολοκληρώσιμες συναρτήσεις και σε συνεχείς συναρτήσεις.

[22] Ένα σημαντικό θεώρημα για την ολοκληρωσιμότητα σύνθετης συνάρτησης.

[δ] Θεωρήστε $A_n = \{\frac{2k-1}{2^n} \,|\, 1 \le k \le 2^{n-1}\}$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι $A_n \subseteq [0,1]$ για κάθε n και $A_m \cap A_n = \emptyset$ για κάθε m, n με $m \neq n$. Αποδείξτε ότι για κάθε $c, d \in [0,1]$ με $c < d$ υπάρχει $x \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ ώστε $c < x < d$. Δηλαδή, ότι το σύνολο $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ είναι πυκνό στο διάστημα $[0,1]$.

[ε] Τώρα θα δούμε ότι η σύνθεση ολοκληρώσιμων συναρτήσεων μπορεί να μην είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση.

Θεωρήστε την $f : [0,1] \to [0,1]$ που ορίζεται στο [γ] με βάση τα συγκεκριμένα A_n του [δ]. Θεωρήστε και την $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $g(y) = \begin{cases} 1, & \text{αν } 0 < y \le 1 \\ 0, & \text{αν } y = 0 \end{cases}$ Τότε οι f, g είναι ολοκληρώσιμες, αλλά αποδείξτε ότι η $g \circ f : [0,1] \to \mathbb{R}$ δεν είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$.

[στ] Αποδείξτε ότι οι ανισότητες στην άσκηση 6.4.18 ισχύουν με την ασθενέστερη υπόθεση ότι οι f, g είναι, απλώς, ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$.

Αποδείξτε ότι οι ανισότητες στην άσκηση 6.4.19 ισχύουν με την ασθενέστερη υπόθεση ότι οι f, w είναι, απλώς, ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$.

6.4.28. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ και έστω ότι ισχύει $|f'(x)| \le M$ για κάθε $x \in [a,b]$.
Αποδείξτε ότι $\big|\int_a^b f(x)\,dx - f(\frac{a+b}{2})(b-a)\big| \le \frac{(b-a)^2 M}{4}$.
[23] Αν $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$ για $k = 0, \dots, n$ και $\xi_k = \frac{x_{k-1}+x_k}{2}$ και $\eta_k = f(\xi_k)$ για $k = 1, \dots, n$, αποδείξτε ότι

$$\big|\int_a^b f(x)\,dx - (\eta_1 + \cdots + \eta_n)\tfrac{b-a}{n}\big| \le \tfrac{1}{4}\,\tfrac{(b-a)^2 M}{n}.$$

6.4.29. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ και έστω ότι ισχύει $|f''(x)| \le M$ για κάθε $x \in [a,b]$.
Αποδείξτε ότι $\big|\int_a^b f(x)\,dx - \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)\big| \le \frac{(b-a)^3 M}{12}$.
[24] Αν $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$ και $y_k = f(x_k)$ για $k = 0, \dots, n$, αποδείξτε ότι

$$\big|\int_a^b f(x)\,dx - \big(\tfrac{y_0}{2} + y_1 + \cdots + y_{n-1} + \tfrac{y_n}{2}\big)\tfrac{b-a}{n}\big| \le \tfrac{1}{12}\,\tfrac{(b-a)^3 M}{n^2}.$$

6.4.30. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ και έστω ότι ισχύει $|f''(x)| \le M$ για κάθε $x \in [a,b]$.
Αποδείξτε ότι $\big|\int_a^b f(x)\,dx - f(\frac{a+b}{2})(b-a)\big| \le \frac{(b-a)^3 M}{24}$.
[25] Αν $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$ για $k = 0, \dots, n$ και $\xi_k = \frac{x_{k-1}+x_k}{2}$ και $\eta_k = f(\xi_k)$ για $k = 1, \dots, n$, αποδείξτε ότι

$$\big|\int_a^b f(x)\,dx - (\eta_1 + \cdots + \eta_n)\tfrac{b-a}{n}\big| \le \tfrac{1}{24}\,\tfrac{(b-a)^3 M}{n^2}.$$

6.4.31. [α] Αποδείξτε ότι για κάθε πολυωνυμική συνάρτηση P βαθμού ≤ 3 και για κάθε a, b με $a < b$, ισχύει $\int_a^b P(x)\,dx = \big(P(a) + 4P(\frac{a+b}{2}) + P(b)\big)\frac{b-a}{6}$.
[β] Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ και έστω ότι ισχύει $|f^{(4)}(x)| \le M$ για κάθε $x \in [a,b]$.
Αποδείξτε ότι $\big|\int_a^b f(x)\,dx - (f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b))\frac{b-a}{6}\big| \le \frac{(b-a)^5 M}{2880}$.
[26] Αν $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$ και $y_k = f(x_k)$ για $k = 0, \dots, n$ και $\xi_k = \frac{x_{k-1}+x_k}{2}$ και $\eta_k = f(\xi_k)$ για $k = 1, \dots, n$, αποδείξτε ότι

$$\big|\int_a^b f(x)\,dx - \big(y_0 + y_n + 2(y_1 + \cdots + y_{n-1}) + 4(\eta_1 + \cdots + \eta_n)\big)\,\tfrac{b-a}{6n}\big| \le \tfrac{1}{2880}\,\tfrac{(b-a)^5 M}{n^4}.$$

6.4.32. Έστω $a < b$ και $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ ώστε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [a,b]$. Αποδείξτε ότι $\int_a^b f > 0$.

[23] Η **μέθοδος των ορθογωνίων** για την προσεγγιστική αριθμητική ολοκλήρωση.
[24] Η **μέθοδος των τραπεζίων** για την προσεγγιστική αριθμητική ολοκλήρωση.
[25] Η **μέθοδος των εφαπτομένων** για την προσεγγιστική αριθμητική ολοκλήρωση.
[26] Η **μέθοδος του Simpson** για την προσεγγιστική αριθμητική ολοκλήρωση.

6.5 Ολοκλήρωμα. Ο ορισμός του Riemann.

ΟΡΙΣΜΟΣ 6.11. *Έστω διάστημα $[a, b]$ και διαμέριση $\Delta = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$ του $[a, b]$. Θεωρούμε οποιοδήποτε σύνολο $\Xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ ώστε $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$. Το Ξ ονομάζεται* **επιλογή ενδιάμεσων σημείων** *για τη διαμέριση Δ. Τα σημεία ξ_k ονομάζονται* **Ξ-σημεία**.

Είναι σαφές ότι υπάρχουν άπειρες επιλογές Ξ ενδιάμεσων σημείων για την ίδια διαμέριση Δ του $[a, b]$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 6.12. *Έστω φραγμένη $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ και διαμέριση $\Delta = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$ του $[a, b]$. Θεωρούμε οποιαδήποτε επιλογή $\Xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ ενδιάμεσων σημείων για τη διαμέριση Δ. Το άθροισμα*

$$\Sigma(f; a, b; \Delta, \Xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = f(\xi_1)(x_1 - x_0) + \cdots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1})$$

ονομάζεται **άθροισμα Riemann** *της f ως προς τη διαμέριση Δ και την επιλογή Ξ ενδιάμεσων σημείων για την Δ.*

ΛΗΜΜΑ 6.6. *Έστω φραγμένη $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ και διαμέριση Δ του $[a, b]$. Τότε:*
[α] $\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) \leq \Sigma(f; a, b; \Delta, \Xi) \leq \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta)$ *για κάθε επιλογή Ξ ενδιάμεσων σημείων για την Δ.*
[β] $\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = \sup\big\{\Sigma(f; a, b; \Delta, \Xi) \,|\, \Xi$ *επιλογή ενδιάμεσων σημείων για την* $\Delta\big\}$.
[γ] $\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = \inf\big\{\Sigma(f; a, b; \Delta, \Xi) \,|\, \Xi$ *επιλογή ενδιάμεσων σημείων για την* $\Delta\big\}$.

Απόδειξη. [α] Έστω οποιαδήποτε διαμέριση $\Delta = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$ του $[a, b]$ και επιλογή $\Xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ ενδιάμεσων σημείων για την Δ.
Έστω l_k και u_k το infimum και το supremum της f στο $[x_{k-1}, x_k]$. Τότε $l_k \leq f(\xi_k) \leq u_k$, οπότε

$$\sum_{k=1}^{n} l_k(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{n} u_k(x_k - x_{k-1}).$$

Δηλαδή, $\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) \leq \Sigma(f; a, b; \Delta, \Xi) \leq \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta)$.
Για τα [β], [γ] ορίζουμε το συνόλο

$$W_\Delta = \big\{\Sigma(f; a, b; \Delta, \Xi) \,|\, \Xi \text{ επιλογή ενδιάμεσων σημείων για την } \Delta\big\}.$$

[β] Από το [α] συνεπάγεται ότι το $\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta)$ είναι άνω φράγμα του συνόλου W_Δ.
Έστω $\epsilon > 0$. Επειδή ο u_k είναι το supremum της f στο $[x_{k-1}, x_k]$, υπάρχει $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ ώστε $f(\xi_k) > u_k - \frac{\epsilon}{b-a}$. Έτσι ορίζεται μια συγκεκριμένη επιλογή $\Xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ ενδιάμεσων σημείων για την Δ και γι αυτήν:

$$\begin{aligned}\Sigma(f; a, b; \Delta, \Xi) &= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) > \sum_{k=1}^{n}\big(u_k - \tfrac{\epsilon}{b-a}\big)(x_k - x_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} u_k(x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^{n} \tfrac{\epsilon}{b-a}(x_k - x_{k-1}) = \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) - \epsilon.\end{aligned}$$

Άρα για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει στοιχείο του W_Δ το οποίο είναι $> \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) - \epsilon$ και, επομένως, το $\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta)$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του W_Δ.
[γ] Από το [α] συνεπάγεται ότι το $\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta)$ είναι κάτω φράγμα του συνόλου W_Δ.
Έστω $\epsilon > 0$. Επειδή ο l_k είναι το infimum της f στο $[x_{k-1}, x_k]$, υπάρχει $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ ώστε $f(\xi_k) < l_k + \frac{\epsilon}{b-a}$. Έτσι ορίζεται μια συγκεκριμένη επιλογή $\Xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ ενδιάμεσων σημείων για την Δ (διαφορετική ίσως από την Ξ του [β]) και γι αυτήν:

$$\begin{aligned}\Sigma(f; a, b; \Delta, \Xi) &= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) < \sum_{k=1}^{n}\big(l_k + \tfrac{\epsilon}{b-a}\big)(x_k - x_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} l_k(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=1}^{n} \tfrac{\epsilon}{b-a}(x_k - x_{k-1}) = \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) + \epsilon.\end{aligned}$$

Άρα για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει στοιχείο του W_Δ το οποίο είναι $< \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) + \epsilon$. Επομένως, το $\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta)$ είναι το μέγιστο κάτω φράγμα του W_Δ. □

ΟΡΙΣΜΟΣ 6.13. *Έστω διαμέριση* $\Delta = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$ *του* $[a,b]$. *Ονομάζουμε* **πλάτος** *της* Δ *το μέγιστο από τα μήκη των* Δ*-διαστημάτων, δηλαδή το*

$$w(\Delta) = \max\{x_k - x_{k-1} \,|\, 1 \leq k \leq n\}.$$

Σχόλιο. Η απόδειξη του θεωρήματος 6.3 είναι, ίσως, η δυσκολότερη όλου του βιβλίου!

ΘΕΩΡΗΜΑ 6.3. *Έστω φραγμένη* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.
[α] *Έστω ότι υπάρχει αριθμός* $\mathcal{I}$ *με την εξής ιδιότητα. Για κάθε* $\epsilon > 0$ *υπάρχει* $\delta > 0$ *ώστε για κάθε διαμέριση* Δ *του* $[a,b]$ *με* $w(\Delta) < \delta$ *και κάθε επιλογή* Ξ *ενδιάμεσων σημείων για την* Δ *να ισχύει* $\big|\Sigma(f;a,b;\Delta,\Xi) - \mathcal{I}\big| < \epsilon$. *Τότε η* f *είναι ολοκληρώσιμη στο* $[a,b]$ *και* $\int_a^b f(x)\,dx = \mathcal{I}$.
[β] *Αντιστρόφως, έστω ότι η* f *είναι ολοκληρώσιμη στο* $[a,b]$. *Τότε για κάθε* $\epsilon > 0$ *υπάρχει* $\delta > 0$ *ώστε για κάθε διαμέριση* Δ *του* $[a,b]$ *με* $w(\Delta) < \delta$ *και κάθε επιλογή* Ξ *ενδιάμεσων σημείων για την* Δ *να ισχύει* $\big|\Sigma(f;a,b;\Delta,\Xi) - \int_a^b f(x)\,dx\big| < \epsilon$.

Απόδειξη. [α] Ορίζουμε

$$W_\Delta = \big\{\Sigma(f;a,b;\Delta,\Xi) \,|\, \Xi \text{ επιλογή ενδιάμεσων σημείων για την } \Delta\big\},$$

όπως στην απόδειξη του λήμματος 6.6.
Έστω $\epsilon > 0$. Λόγω της υπόθεσης, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε διαμέριση Δ του $[a,b]$ με $w(\Delta) < \delta$ και κάθε επιλογή Ξ ενδιάμεσων σημείων για την Δ να ισχύει $\big|\Sigma(f;a,b;\Delta,\Xi) - \mathcal{I}\big| < \frac{\epsilon}{4}$.
Θεωρούμε οποιαδήποτε διαμέριση Δ ώστε $w(\Delta) < \delta$, οπότε για κάθε επιλογή Ξ ενδιάμεσων σημείων για την Δ ισχύει

$$\mathcal{I} - \tfrac{\epsilon}{4} < \Sigma(f;a,b;\Delta,\Xi) < \mathcal{I} + \tfrac{\epsilon}{4}.$$

Άρα οι $\mathcal{I} - \frac{\epsilon}{4}$ και $\mathcal{I} + \frac{\epsilon}{4}$ είναι κάτω φράγμα και άνω φράγμα, αντιστοίχως, του W_Δ και, επομένως, από τα [β], [γ] του λήμματος 6.6 συνεπάγεται

$$\mathcal{I} - \tfrac{\epsilon}{4} \leq \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) \leq \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) \leq \mathcal{I} + \tfrac{\epsilon}{4}. \tag{6.31}$$

Άρα

$$\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) \leq \tfrac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση Δ του $[a,b]$ ώστε $\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) < \epsilon$, οπότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.
Τώρα, από τις ανισότητες (6.31) και από την γνωστή ανισότητα

$$\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) \leq \textstyle\int_a^b f(x)\,dx \leq \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)$$

συνεπάγεται

$$\big|\textstyle\int_a^b f(x)\,dx - \mathcal{I}\big| \leq \tfrac{\epsilon}{4} < \epsilon.$$

Επειδή αυτό ισχύει για κάθε $\epsilon > 0$, είναι $\int_a^b f(x)\,dx = \mathcal{I}$.
[β] Η f είναι φραγμένη στο $[a,b]$, οπότε υπάρχει M ώστε να ισχύει $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [a,b]$.
Έστω $\epsilon > 0$. Σύμφωνα με το κριτήριο ολοκληρωσιμότητας, υπάρχει διαμέριση Δ_0 του $[a,b]$ ώστε

$$\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_0) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_0) < \tfrac{\epsilon}{2}. \tag{6.32}$$

Έστω $n_0 \geq 2$ το πλήθος των Δ_0-σημείων. Ορίζουμε

$$\delta = \tfrac{\epsilon}{4n_0(M+1)}. \tag{6.33}$$

Έστω οποιαδήποτε διαμέριση $\Delta = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$ του $[a,b]$ με

$$w(\Delta) < \delta \tag{6.34}$$

και έστω l_k και u_k το infimum και το supremum της f στο $[x_{k-1}, x_k]$.
Χωρίζουμε τους δείκτες $k = 1, \ldots, n$ σε δύο κατηγορίες. Το σύνολο A έχει ως στοιχεία του εκείνους ακριβώς τους k για τους οποίους το $[x_{k-1}, x_k]$ περιέχει ένα τουλάχιστον Δ_0-σημείο ως *εσωτερικό* του σημείο. Το σύνολο B έχει ως στοιχεία του ακριβώς τους υπόλοιπους k, δηλαδή εκείνους τους k για τους οποίους το $[x_{k-1}, x_k]$ δεν περιέχει κανένα Δ_0-σημείο ως εσωτερικό του σημείο. (Μπορεί, πάντως, να είναι Δ_0-σημείο το ένα ή και τα δύο άκρα του $[x_{k-1}, x_k]$.) Μπορούμε τότε να γράψουμε

$$\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = \sum_{k \in A} (u_k - l_k)(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k \in B} (u_k - l_k)(x_k - x_{k-1}). \quad (6.35)$$

Είναι προφανές ότι το πλήθος των στοιχείων του A είναι $\leq n_0$. Επίσης, είναι προφανές ότι για κάθε $k \in A$ ισχύει $-M \leq l_k \leq u_k \leq M$ και, επομένως, $u_k - l_k \leq 2M$. Άρα, και λόγω των (6.33) και (6.34), για κάθε $k \in A$ ισχύει

$$(u_k - l_k)(x_k - x_{k-1}) \leq 2Mw(\Delta) \leq 2M\delta < \tfrac{\epsilon}{2n_0}.$$

Συμπεραίνουμε ότι

$$\sum_{k \in A} (u_k - l_k)(x_k - x_{k-1}) < \sum_{k \in A} \tfrac{\epsilon}{2n_0} \leq n_0 \tfrac{\epsilon}{2n_0} = \tfrac{\epsilon}{2}. \quad (6.36)$$

Θεωρούμε τη διαμέριση $\Delta' = \Delta \cup \Delta_0$ και παρατηρούμε ότι, για κάθε $k \in B$, το Δ-διάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ είναι και Δ'-διάστημα. Άρα, σύμφωνα με την παρατήρηση 2 πριν από το λήμμα 6.2 και επειδή η Δ' είναι λεπτότερη της Δ_0 και λόγω της (6.32), είναι

$$\begin{aligned} \sum_{k \in B} (u_k - l_k)(x_k - x_{k-1}) &\leq \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta') - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta') \\ &\leq \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta_0) - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta_0) < \tfrac{\epsilon}{2}. \end{aligned} \quad (6.37)$$

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, από τις (6.35), (6.36) και (6.37) ότι

$$\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) < \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon \quad (6.38)$$

για κάθε διαμέριση Δ του $[a, b]$ με $w(\Delta) < \delta$.
Τώρα θεωρούμε και οποιαδήποτε επιλογή Ξ ενδιάμεσων σημείων για την Δ, οπότε, σύμφωνα με το λήμμα 6.6[α], είναι

$$\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) \leq \Sigma(f; a, b; \Delta, \Xi) \leq \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta). \quad (6.39)$$

Συνδυάζοντας την (6.39) με τη γνωστή ανισότητα

$$\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta)$$

και χρησιμοποιώντας την (6.38), συμπεραίνουμε ότι

$$\left| \Sigma(f; a, b; \Delta, \Xi) - \int_a^b f(x)\, dx \right| < \epsilon$$

για κάθε διαμέριση Δ με $w(\Delta) < \delta$ και κάθε επιλογή Ξ ενδιάμεσων σημείων για την Δ. □

Ιδού ο ορισμός του ολοκληρώματος Riemann που έδωσε ο Riemann.

ΟΡΙΣΜΟΣ 6.14. *Έστω φραγμένη $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Η f χαρακτηρίζεται* **ολοκληρώσιμη** *ή, πιό σωστά,* **Riemann ολοκληρώσιμη** *στο $[a, b]$ αν υπάρχει αριθμός $\mathcal{I}$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε διαμέριση Δ του $[a, b]$ με $w(\Delta) < \delta$ και κάθε επιλογή Ξ ενδιάμεσων σημείων για την Δ να ισχύει $\left| \Sigma(f; a, b; \Delta, \Xi) - \mathcal{I} \right| < \epsilon$.*
Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$, τότε ο αριθμός $\mathcal{I}$ ονομάζεται **ολοκλήρωμα** *ή, πιο σωστά,* **Riemann ολοκλήρωμα** *της f στο $[a, b]$ και συμβολίζεται*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \mathcal{I}.$$

Το περιεχόμενο του θεωρήματος 6.3 είναι ακριβώς ότι ο ορισμός του ολοκληρώματος που έδωσε ο Darboux και ο ορισμός που έδωσε ο Riemann είναι ισοδύναμοι. Δηλαδή, *αν μια συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη σύμφωνα με τον έναν ορισμό, τότε είναι ολοκληρώσιμη σύμφωνα και με τον άλλον ορισμό και οι τιμές των αντίστοιχων ολοκληρωμάτων της ταυτίζονται.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.15. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Θεωρούμε οποιαδήποτε ακολουθία διαμερίσεων (Δ_n) του $[a,b]$ ώστε $w(\Delta_n) \to 0$. Για κάθε n θεωρούμε μια οποιαδήποτε επιλογή Ξ_n ενδιάμεσων σημείων για την Δ_n. Τότε*

$$\Sigma(f; a, b; \Delta_n, \Xi_n) \to \int_a^b f(x)\, dx.$$

Απόδειξη. Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε διαμέριση Δ του $[a,b]$ με $w(\Delta) < \delta$ και κάθε επιλογή Ξ ενδιάμεσων σημείων για την Δ να ισχύει

$$\left|\Sigma(f; a, b; \Delta, \Xi) - \int_a^b f(x)\, dx\right| < \epsilon.$$

Επειδή $w(\Delta_n) \to 0$, ισχύει τελικά $w(\Delta_n) < \delta$ και, επομένως, ισχύει τελικά

$$\left|\Sigma(f; a, b; \Delta_n, \Xi_n) - \int_a^b f(x)\, dx\right| < \epsilon.$$

Άρα $\Sigma(f; a, b; \Delta_n, \Xi_n) \to \int_a^b f(x)\, dx$. □

Μια όχι τόσο αυστηρή αλλά πολύ συνηθισμένη και παραστατική διατύπωση της πρότασης 6.15 είναι η εξής.
Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, τα αθροίσματα Riemann της f συγκλίνουν στο ολοκλήρωμά της όταν το πλάτος των αντίστοιχων διαμερίσεων τείνει στο 0.
Υπάρχει και το ανάλογο σύμβολο:

$$\lim_{w(\Delta)\to 0} \Sigma(f; a, b; \Delta, \Xi) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Σύμφωνα με την πρόταση 6.15, *αν γνωρίζουμε* ότι μια συγκεκριμένη συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *είναι* ολοκληρώσιμη, μπορούμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμά της θεωρώντας μια ακολουθία (Δ_n) διαμερίσεων του $[a,b]$ ώστε $w(\Delta_n) \to 0$ και, για κάθε Δ_n, μια οποιαδήποτε επιλογή Ξ_n ενδιάμεσων σημείων γι αυτήν. Υπολογίζουμε τα αθροίσματα $\Sigma(f; a, b; \Delta_n, \Xi_n)$ και, τέλος, υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα, αφού $\Sigma(f; a, b; \Delta_n, \Xi_n) \to \int_a^b f(x)\, dx$. Η μοναδική μας φροντίδα είναι να βρούμε κατάλληλες Δ_n και αντίστοιχες Ξ_n ώστε να υπολογίζονται εύκολα τα $\Sigma(f; a, b; \Delta_n, \Xi_n)$.

Τα παραδείγματα 6.2.4, 6.2.5, 6.2.6 και 6.2.7 μπορούμε να τα χειριστούμε με λίγο πιο απλό τρόπο ως εξής. Όλες οι συναρτήσεις σε αυτά τα παραδείγματα είναι συνεχείς, οπότε, σύμφωνα με το θεώρημα 6.1, είναι ολοκληρώσιμες στα αντίστοιχα διαστήματα. Θεωρούμε, τώρα, τις ίδιες ακολουθίες διαμερίσεων (Δ_n) που είχαμε θεωρήσει και προηγουμένως. Κατόπιν, για κάθε Δ_n θεωρούμε οποιαδήποτε αντίστοιχη επιλογή Ξ_n ενδιάμεσων σημείων και υπολογίζουμε το άθροισμα Riemann $\Sigma(f; a, b; \Delta_n, \Xi_n)$. Συνήθως, ως ενδιάμεσα σημεία επιλέγουμε ένα από τα δύο άκρα των υποδιαστημάτων. Σε όλα τα παραπάνω παραδείγματα κάναμε, για κάθε Δ_n, *δύο επιλογές* Ξ_n. Η μία επιλογή μας έδινε ως $\Sigma(f; a, b; \Delta_n, \Xi_n)$ το άνω άθροισμα Darboux $\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta_n)$ και η άλλη επιλογή μας έδινε ως $\Sigma(f; a, b; \Delta_n, \Xi_n)$ το κάτω άθροισμα Darboux $\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta_n)$. Στην ενότητα 6.2 έπρεπε να κάνουμε και τις δύο επιλογές διότι εκεί εργαζόμασταν με άνω και κάτω αθροίσματα Darboux. Εδώ, όμως, είναι αρκετό να κάνουμε μόνο μία επιλογή και να υπολογίσουμε το όριο $\lim_{n\to+\infty} \Sigma(f; a, b; \Delta_n, \Xi_n)$, η τιμή του οποίου είναι το ζητούμενο $\int_a^b f(x)\, dx$.

Παράδειγμα 6.5.1. Οι συναρτήσεις $\cos x$ και $\sin x$ είναι συνεχείς και, επομένως, ολοκληρώσιμες σε κάθε διάστημα $[a,b]$. Θα υπολογίσουμε τα ολοκληρώματα $\int_a^b \cos x\, dx$ και $\int_a^b \sin x\, dx$.
Αρχικά αποδεικνύουμε τους τριγωνομετρικούς τύπους

$$\sin\tfrac{q}{2} \sum_{k=1}^n \cos(kq) = \sin\tfrac{nq}{2} \cos\tfrac{(n+1)q}{2}, \qquad \sin\tfrac{q}{2} \sum_{k=1}^n \sin(kq) = \sin\tfrac{nq}{2} \sin\tfrac{(n+1)q}{2}. \quad (6.40)$$

Ο πρώτος προκύπτει εύκολα από την ισότητα $\sin\frac{q}{2}\cos(kq) = \frac{1}{2}\sin(kq+\frac{q}{2}) - \frac{1}{2}\sin(kq-\frac{q}{2})$ με άθροιση για $k = 1, \ldots, n$. Ο δεύτερος τύπος προκύπτει με τον ίδιο τρόπο από την ισότητα $\sin\frac{q}{2}\sin(kq) = -\frac{1}{2}\cos(kq+\frac{q}{2}) + \frac{1}{2}\cos(kq-\frac{q}{2})$.
Τώρα για κάθε n θεωρούμε την διαμέριση $\Delta_n = \{x_0 = a, \ldots, x_n = b\}$ με

$$x_k = a + k\tfrac{b-a}{n} \qquad \text{για } \ k = 0, \ldots, n.$$

Επίσης, θεωρούμε $\Xi_n = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ με

$$\xi_k = x_k \qquad \text{για } \ k = 0, \ldots, n.$$

Το πλάτος της Δ_n είναι, προφανώς, $w(\Delta_n) = \frac{b-a}{n}$, οπότε $w(\Delta_n) \to 0$.
Τότε

$$\Sigma(\cos x; a, b; \Delta_n, \Xi_n) = \textstyle\sum_{k=1}^{n} \cos\xi_k\,(x_k - x_{k-1}) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos(a + k\frac{b-a}{n}).$$

Θέτουμε $q = \frac{b-a}{n}$ για απλούστευση και από τους τύπους (6.40) έχουμε

$$\begin{aligned}
\Sigma(\cos x; a, b; \Delta_n, \Xi_n) &= q\cos a \textstyle\sum_{k=1}^{n}\cos(kq) - q\sin a\sum_{k=1}^{n}\sin(kq) \\
&= \frac{q}{\sin\frac{q}{2}}\cos a\sin\frac{nq}{2}\cos\frac{(n+1)q}{2} - \frac{q}{\sin\frac{q}{2}}\sin a\sin\frac{nq}{2}\sin\frac{(n+1)q}{2} \\
&= \frac{q}{\sin\frac{q}{2}}\sin\frac{nq}{2}\cos(a + \frac{(n+1)q}{2}) = \frac{\frac{b-a}{n}}{\sin\frac{b-a}{2n}}\sin\frac{b-a}{2}\cos(a + \frac{(n+1)(b-a)}{2n}) \\
&\to 2\sin\frac{b-a}{2}\cos\frac{b+a}{2} = \sin b - \sin a.
\end{aligned}$$

Άρα $\int_a^b \cos x\,dx = \sin b - \sin a$. Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε και το $\int_a^b \sin x\,dx = \cos a - \cos b$. Με άλλα λόγια,

$$\textstyle\int_a^b \cos x\,dx = \sin b - \sin a, \qquad \int_a^b \sin x\,dx = \cos a - \cos b.$$

Πάντως, η αξία της πρότασης 6.15, όπως και της ανάλογης πρότασης 6.2, είναι περισσότερο θεωρητική παρά πρακτική. Στο κεφάλαιο 7 θα γνωρίσουμε την πιο απλή μέθοδο υπολογισμού ολοκληρωμάτων, η οποία βασίζεται στο θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού. Τονίζουμε, όμως, ότι τα αθροίσματα Riemann είναι το κατεξοχήν εργαλείο σύνδεσης του ολοκληρώματος με τις πολυάριθμες εφαρμογές του στη Γεωμετρία, στη Φυσική και οπουδήποτε αλλού στην επιστήμη. Σχεδόν κάθε ποσότητα, η οποία εκφράζεται με κάποιο ολοκλήρωμα, πρώτα “ποσοτικοποιείται” προσεγγιστικά με τη μορφή αθροισμάτων Riemann και κατόπιν καταλήγει μέσω ορίου στη μορφή ολοκληρώματος. Ένα τέτοιο παράδειγμα, την μέση τιμή συνάρτησης, θα δούμε αμέσως.
Στο ίδιο πλαίσιο, μπορούν να υπολογιστούν μερικά όρια ακολουθιών με κατάλληλη αναγωγή σε υπολογισμό αντίστοιχων ολοκληρωμάτων.

Τώρα θα αιτιολογήσουμε την επιλογή του όρου *μέση τιμή* για το $E(f; a, b) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ ξεκινώντας από την πρωταρχική και απλή χρήση του όρου *μέση τιμή*.

Είναι γνωστό ότι η *μέση τιμή* οποιωνδήποτε αριθμών $y_1, \ldots, y_n$, όπου ο κάθε y_k εμφανίζεται ν_k φορές, είναι ο λόγος του συνολικού αθροίσματος των αριθμών προς το συνολικό πλήθος τους, δηλαδή ο αριθμός

$$\tfrac{\nu_1 y_1 + \cdots + \nu_n y_n}{\nu_1 + \cdots + \nu_n} = \tfrac{\nu_1}{\nu_1 + \cdots + \nu_n}\,y_1 + \cdots + \tfrac{\nu_n}{\nu_1 + \cdots + \nu_n}\,y_n = w_1 y_1 + \cdots + w_n y_n,$$

όπου κάθε $w_k = \frac{\nu_k}{\nu_1 + \cdots + \nu_n}$ είναι η σχετική συχνότητα του αντίστοιχου y_k, δηλαδή η αναλογία του αριθμού εμφανίσεων του y_k προς τον συνολικό αριθμό εμφανίσεων των $y_1, \ldots, y_n$. Είναι, επίσης, γνωστό ότι ο αριθμός αυτός μπορεί να μην είναι ίσος με κανέναν από τους $y_1, \ldots, y_n$ αλλά ότι είναι ανάμεσα στον μικρότερο και στον μεγαλύτερο από τους $y_1, \ldots, y_n$.

Τώρα, έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Επιλέγουμε οποιαδήποτε διαμέριση $\Delta = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = b\}$ του $[a, b]$ και οποιαδήποτε επιλογή $\Xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$

ενδιάμεσων σημείων για την Δ. Θεωρούμε και τις αντίστοιχες τιμές $f(\xi_1), \dots, f(\xi_n)$. Αν το πλάτος $w(\Delta)$ είναι αρκετά μικρό, δηλαδή αν κάθε Δ-διάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ είναι αρκετά μικρό, τότε τα σημεία $x \in [x_{k-1}, x_k]$ είναι πολύ κοντά στον αντίστοιχο ξ_k, οπότε είναι εύλογο να δεχτούμε ότι κάθε τιμή $f(\xi_k)$ "εκπροσωπεί" τις τιμές $f(x)$ για $x \in [x_{k-1}, x_k]$ και, επομένως, ότι οι τιμές $f(\xi_1), \dots, f(\xi_n)$ "εκπροσωπούν" όλες τις τιμές της συνάρτησης. Πρέπει, φυσικά, να σκεφτούμε ότι αν κάποιο $[x_{k-1}, x_k]$ έχει μεγαλύτερο μήκος από κάποιο άλλο $[x_{l-1}, x_l]$, τότε η τιμή $f(\xi_k)$ "εκπροσωπεί" περισσότερες τιμές της συνάρτησης από όσες "εκπροσωπεί" η τιμή $f(\xi_l)$. Θα δεχτούμε, λοιπόν, ότι η αναλογία του συνόλου των τιμών $f(x)$ που "εκπροσωπούνται" από οποιαδήποτε τιμή $f(\xi_k)$ προς το σύνολο όλων των τιμών της συνάρτησης είναι ίδια με την αναλογία $w_k = \frac{x_k - x_{k-1}}{b-a}$ του μήκους του αντίστοιχου $[x_{k-1}, x_k]$ προς το συνολικό μήκος $b - a$. Επομένως, αν θέλουμε να εισαγάγουμε την έννοια της μέσης τιμής *όλων* των τιμών της f, μια καλή ιδέα είναι να θεωρήσουμε τη μέση τιμή

$$\tfrac{x_1-x_0}{b-a} f(\xi_1) + \cdots + \tfrac{x_n-x_{n-1}}{b-a} f(\xi_n)$$

των "αντιπροσωπευτικών" τιμών $f(\xi_1), \dots, f(\xi_n)$ και να δούμε μήπως αυτή η μέση τιμή πλησιάζει κάποιον αριθμό αν το πλάτος $w(\Delta)$ γίνει αρκετά μικρό. Όμως, αυτή η μέση τιμή είναι, προφανώς, ίση με

$$\tfrac{1}{b-a}\, \Sigma(f; a, b; \Delta; \Xi).$$

και, επομένως, πλησιάζει τον αριθμό $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$ όταν το $w(\Delta)$ γίνεται κατάλληλα μικρό.

Ασκήσεις.

6.5.1. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Αποδείξτε ότι[27]

$$\tfrac{b-a}{n} \textstyle\sum_{k=1}^{n} f\big(a + k\tfrac{b-a}{n}\big) \to \int_a^b f(x)\,dx.$$

Αποδείξτε, επίσης, ότι

$$\tfrac{b-a}{n} \textstyle\sum_{k=0}^{n-1} f\big(a + k\tfrac{b-a}{n}\big) \to \int_a^b f(x)\,dx, \qquad \tfrac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\big(a + (k - \tfrac{1}{2})\tfrac{b-a}{n}\big) \to \int_a^b f(x)\,dx.$$

Και στις τρεις περιπτώσεις περιγράψτε τις αντίστοιχες διαμερίσεις και τις επιλογές ενδιάμεσων σημείων.

[28] Αποδείξτε τα παρακάτω όρια:

(i) $\sum_{k=1}^{n} \frac{k^p}{n^{p+1}} \to \int_0^1 x^p\,dx = \frac{1}{p+1}$ για $p > 0$.

(ii) $\sum_{k=n+1}^{pn} \frac{1}{k} \to \int_1^p \frac{1}{x}\,dx = \log p$ για $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$.[29]

(iii) $\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} \to \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$.

(iv) $\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{n+k}}{n\sqrt{n}} \to \int_1^2 \sqrt{x}\,dx = \frac{2(2\sqrt{2}-1)}{3}$.

(v) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}} \to \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$.

(vi) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2} \sqrt{n^2 - (k-1)^2} \to \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$.

6.5.2. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και οποιαδήποτε ακολουθία (Δ_n) διαμερίσεων του $[a, b]$ ώστε $w(\Delta_n) \to 0$. Αποδείξτε ότι

$$\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta_n) \to \int_a^b f(x)\,dx, \qquad \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta_n) \to \int_a^b f(x)\,dx.$$

[27] Αυτό το όριο το είδαμε σε μια πολύ ειδική περίπτωση στην άσκηση 6.4.12.

[28] Τα αθροίσματα Riemann χρησιμεύουν για να υπολογίζουμε ολοκληρώματα. Μπορεί, όμως, να γίνει και το αντίστροφο. Μερικές φορές οι όροι μιας ακολουθίας μπορούν να γραφτούν στη μορφή αθροισμάτων Riemann μιας συγκεκριμένης συνάρτησης, οπότε το όριο της ακολουθίας είναι ίσο με το ολοκλήρωμα της συνάρτησης. Αυτή η ιδέα εφαρμόζεται σ' αυτά τα όρια ακολουθιών. Μερικά από τα ολοκληρώματα που προκύπτουν θα μπορέσετε να τα υπολογίσετε αφού μάθετε κατάλληλες μεθόδους στο επόμενο κεφάλαιο. Δείτε την άσκηση 7.3.6.

[29] Το όριο αυτό το ξαναείδαμε στην άσκηση 6.4.11.

6.5.3. [30] Αποδείξτε ότι η $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ αν και μόνο αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε δύο διαμερίσεις Δ_1, Δ_2 του $[a,b]$ με $w(\Delta_1) < \delta$, $w(\Delta_2) < \delta$ και κάθε δύο επιλογές Ξ_1, Ξ_2 ενδιάμεσων σημείων των Δ_1, Δ_2, αντιστοίχως, να είναι $|\Sigma(f;a,b;\Delta_1;\Xi_1) - \Sigma(f;a,b;\Delta_2;\Xi_2)| < \epsilon$.

6.5.4. Έστω φραγμένη $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Για κάθε $\delta > 0$ ορίζουμε

$$\overline{\Sigma}(f;a,b;\delta) = \sup\big\{\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) \,|\, \Delta \text{ διαμέριση του } [a,b] \text{ με } w(\Delta) < \delta\big\}$$

και

$$\underline{\Sigma}(f;a,b;\delta) = \inf\big\{\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) \,|\, \Delta \text{ διαμέριση του } [a,b] \text{ με } w(\Delta) < \delta\big\}.$$

Αν $0 < \delta_1 < \delta_2$, αποδείξτε ότι $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\Sigma}(f;a,b;\delta_1) \leq \overline{\Sigma}(f;a,b;\delta_2)$.

Αν $0 < \delta_1 < \delta_2$, αποδείξτε ότι $\underline{\Sigma}(f;a,b;\delta_2) \leq \underline{\Sigma}(f;a,b;\delta_1) \leq \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$.

Αποδείξτε ότι $\lim_{\delta\to 0+} \overline{\Sigma}(f;a,b;\delta) = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$ και $\lim_{\delta\to 0+} \underline{\Sigma}(f;a,b;\delta) = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$.

Αποδείξτε ότι $\lim_{\delta\to 0+} \big(\overline{\Sigma}(f;a,b;\delta) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\delta)\big) = 0$ αν και μόνο αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.

6.5.5. Αποδείξτε τις ανισότητες Hölder, Minkowski και Jensen για ολοκληρώματα, που βρίσκονται στις ασκήσεις 6.4.18 και 6.4.19, όταν οι συναρτήσεις είναι ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$ (η g στην ανισότητα του Jensen πρέπει να είναι συνεχής) (δείτε και την άσκηση 6.4.27[στ]), χρησιμοποιώντας τις αντίστοιχες ανισότητες για αθροίσματα, που βρίσκονται στις ασκήσεις 5.4.22, 5.4.23 και 5.5.39.

6.5.6. Θεωρούμε καμπύλη Γ στο xy-επίπεδο με παραμετρικές εξισώσεις $x = x(t)$ και $y = y(t)$, όπου η παράμετρος t διατρέχει το διάστημα $[a,b]$ και οι συναρτήσεις $x, y : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς στο $[a,b]$. Θεωρούμε οποιαδήποτε διαμέριση $\Delta = \{t_0 = a, t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n = b\}$ του $[a,b]$ και σχηματίζουμε την πολυγωνική γραμμή Γ_Δ στο xy-επίπεδο με διαδοχικές κορυφές τα σημεία $(x_k, y_k) = (x(t_k), y(t_k))$ για $k = 0, 1, \ldots, n-1, n$. Το μήκος αυτής της πολυγωνικής γραμμής είναι, φυσικά, ίσο με

$$l(\Gamma_\Delta) = \textstyle\sum_{k=1}^n \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2}.$$

Στην Γεωμετρία, ως **μήκος** της καμπύλης Γ ορίζεται το

$$l(\Gamma) = \sup\big\{l(\Gamma_\Delta) \,|\, \Delta \text{ διαμέριση του } [a,b]\big\}.$$

Αν έχουμε καμπύλες Γ_1 με παραμετρικές εξισώσεις $x = x_1(t)$ και $y = y_1(t)$ στο διάστημα $[a,b]$ και Γ_2 με παραμετρικές εξισώσεις $x = x_2(t)$ και $y = y_2(t)$ στο διάστημα $[b,c]$ και αν $x_1(b) = x_2(b)$, $y_1(b) = y_2(b)$, ορίζουμε την καμπύλη Γ με παραμετρικές εξισώσεις $x = x(t)$ και $y = y(t)$ στο $[a,c]$, όπου

$$x(t) = \begin{cases} x_1(t), & \text{αν } t \in [a,b] \\ x_2(t), & \text{αν } t \in [b,c] \end{cases} \qquad y(t) = \begin{cases} y_1(t), & \text{αν } t \in [a,b] \\ y_2(t), & \text{αν } t \in [b,c] \end{cases}$$

Η Γ ονομάζεται **άθροισμα** των Γ_1 και Γ_2 και συμβολίζεται $\Gamma_1 \dot{+} \Gamma_2$.
Αποδείξτε την αθροιστικότητα του μήκους, δηλαδή ότι

$$l(\Gamma_1 \dot{+} \Gamma_2) = l(\Gamma_1) + l(\Gamma_2).$$

Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b]$. Θεωρούμε την ειδικού τύπου καμπύλη Γ στο xy-επίπεδο με παραμετρική εξίσωση $y = f(x)$, όπου η παράμετρος x διατρέχει το διάστημα $[a,b]$ (δηλαδή, με παραμετρικές εξισώσεις $x = t$ και $y = f(t)$ στο $[a,b]$). Αν η $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ έχει παράγωγο ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, αποδείξτε ότι

$$l(\Gamma) = \textstyle\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.$$ [31]

[30] Ένα “κριτήριο Cauchy” για σύγκλιση αθροισμάτων Riemann.

[31] Για τον υπολογισμό του μήκους μερικών συγκεκριμένων καμπυλών δείτε την άσκηση 7.3.30. Για τον τύπο υπολο-

Βασική βιβλιογραφία.

Bartle, R.& Sherbert, D. (2011) *Introduction to Real Analysis, Ch 7.* Wiley.
Beals, R. (2004) *Analysis, an Introduction, Ch 8.* Cambridge Univ. Press.
Beardon, A. (1997) *Limits: a New Approach to Real Analysis, Ch 10-11.* Springer.
Berberian, S. (1994) *A First Course in Real Analysis, Ch 9.* Springer.
Brand, L. (2006) *Advanced Calculus, Ch 6.* Dover.
Courant, R. (1988) *Differential and Integral Calculus, Vol I, Ch II-III, VII.* Wiley.
Courant, R. & John, F. (1989) *Introduction to Calculus and Analysis, Vol I, Ch 2-6.* Springer.
Davidson, K. & Donsig, A. (2010) *Real Analysis and Applications, Ch 6.* Springer.
Ghorpade, S. & Limaye, B. (2006) *A Course in Calculus and Real Analysis, Ch 6, 8.* Springer.
Goffman, C. (1966) *Introduction to Real Analysis, Ch 8.* Harper and Row.
Goldberg, R. (1976) *Methods of Real Analysis, Ch 7.* Wiley.
Goursat, E. (2006) *A Course in Mathematical Analysis, Vol I, Ch IV.* Dover.
Grauert, H. & Lieb, I. (1967) *Differential- und Integralrechnung, Band I, Kap VII.* Springer.
Graves, L. (2009) *The Theory of Functions of Real Variables, Ch VI.* Dover.
Hardy, G. (2008) *A Course of Pure Mathematics, Ch VII.* Cambridge Univ. Press.
Kestelman, H. (1960) *Modern Theories of Integration, Ch I-II.* Dover.
Krantz, S. (2013) *Real Analysis and Foundations, Ch 8.* Chapman and Hall.
Landau, E. (2001) *Differential and Integral Calculus, Ch 25.* American Math. Society & Chelsea.
Lang, S. (1997) *Undergraduate Analysis, Ch V, X.* Springer.
Nikolsky, S. (1977) *A Course of Mathematical Analysis, Vol 1, Ch 9-10.* Mir Publishers.
Protter, M. (1998) *Basic Elements of Real Analysis, Ch 5.* Springer.
Pugh, C. (2015) *Real Mathematical Analysis, Ch 3.* Springer.
Ross, K. (2013) *Elementary Analysis, Ch 6.* Springer.
Smirnov, V. (1964) *A Course of Higher Mathematics, Vol 1, Ch III.* Pergammon Press.
Spivak, M. (1994) *Calculus, Ch 13.* Cambridge Univ. Press.
Stoll, M. (2000) *Introduction to Real Analysis, Ch 6.* Pearson.

Συμπληρωματική βιβλιογραφία.

Apostol, T. (1974) *Mathematical Analysis, Ch 6-7.* Addison-Wesley.
Bartle, R. (1967) *The Elements of Real Analysis, Ch VI.* Wiley.
Beardon, A. (1997) *Limits: a New Approach to Real Analysis, Ch 3.* Springer.
Beckenbach, E. & Bellman, R. (1961) *Inequalities, Ch 1.* Springer.
Berberian, S. (1994) *A First Course in Real Analysis, Ch 11.* Springer.
Hardy, G., Littlewood, J. & Polya, G. (1952) *Inequalities, Ch VI.* Cambridge Univ. Press.
Mitrinović, D. (1964) *Elementary Inequalities.* Noordhoff.
Mitrinović, D., Pečarić, J. & Fink, A. (1993) *Classical and New Inequalities in Analysis.* Springer.
Rosenlicht, M. (1986) *Introduction to Analysis, Ch VI.* Dover.
Rudin, W. (1976) *Principles of Mathematical Analysis, Ch 6.* McGraw-Hill.

γισμού μήκους γενικότερης καμπύλης δείτε την άσκηση 11.6.30.

Κεφάλαιο 7

Σχέση παραγώγου και ολοκληρώματος.

7.1 Αντιπαράγωγοι, αόριστα ολοκληρώματα.

7.1.1 Αντιπαράγωγοι.

ΟΡΙΣΜΟΣ 7.1. *Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$. Αν για την $F : I \to \mathbb{R}$ ισχύει*

$$F'(x) = f(x) \qquad \text{για κάθε } \ x \ \text{ στο } \ I,$$

τότε η F ονομάζεται **αντιπαράγωγος** *ή* **παράγουσα** *ή* **πρωτεύουσα συνάρτηση** *ή* **αρχική συνάρτηση** *της f στο διάστημα I.*

Παράδειγμα 7.1.1. Η συνάρτηση $\frac{1}{p+1}x^{p+1}$ είναι αντιπαράγωγος της x^p (i) στο $(-\infty, +\infty)$, αν $p \in \mathbb{N}$, (ii) στο $(-\infty, 0)$ και στο $(0, +\infty)$, αν $p \in \mathbb{Z}$ και $p \leq -2$, (iii) στο $[0, +\infty)$, αν $p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ και $p > 0$ και (iv) στο $(0, +\infty)$, αν $p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ και $p < 0$.
Μένουν οι περιπτώσεις $p = -1$ και $p = 0$.
Η x είναι αντιπαράγωγος της σταθερής συνάρτησης 1 στο $\mathbb{R}$.
Η $\log |x|$ είναι αντιπαράγωγος της $\frac{1}{x}$ στο $(-\infty, 0)$ και στο $(0, +\infty)$.

Παράδειγμα 7.1.2. Αν $\rho > 0$, $\rho \neq 1$, η $\frac{1}{\log \rho}\, \rho^x$ είναι αντιπαράγωγος της ρ^x στο $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 7.1.3. Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \neq 0 \\ 1, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ δεν έχει αντιπαράγωγο στο $\mathbb{R}$.
Πράγματι, έστω ότι υπάρχει $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $F'(x) = f(x)$ για κάθε x.
Επειδή ισχύει $F'(x) = 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0)$ και η F είναι συνεχής στο $(-\infty, 0]$, συνεπάγεται ότι υπάρχει c_1 ώστε να ισχύει $F(x) = c_1$ για κάθε $x \in (-\infty, 0]$. Ομοίως, επειδή ισχύει $F'(x) = 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ και η F είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$, συνεπάγεται ότι υπάρχει c_2 ώστε να ισχύει $F(x) = c_2$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$. Άρα $c_1 = F(0) = c_2$ και, συμβολίζοντας $c = c_1 = c_2$, συμπεραίνουμε ότι ισχύει $F(x) = c$ για κάθε x. Επομένως, ισχύει $F'(x) = 0$ για κάθε x και καταλήγουμε σε αντίφαση, αφού $F'(0) = f(0) = 1$.
Υπάρχει και ένας βαθύτερος λόγος που η f δεν έχει αντιπαράγωγο. Αν υπήρχε η F όπως παραπάνω, τότε, σύμφωνα με το θεώρημα του Darboux στην άσκηση 5.3.23[β], η $f = F'$ θα είχε την ιδιότητα ενδιάμεσης τιμής. Αυτό, όμως, δεν ισχύει: για παράδειγμα, είναι $f(0) = 1$, $f(1) = 0$ και δεν υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ ώστε $f(\xi) = \frac{1}{2}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 7.1. *Έστω διάστημα I και $f, F_1, F_2 : I \to \mathbb{R}$. Αν η $F_2 - F_1$ είναι σταθερή συνάρτηση στο I και η μία από τις F_1, F_2 είναι αντιπαράγωγος της f στο I, τότε και η άλλη είναι αντιπαράγωγος της f στο I. Αντιστρόφως, αν οι F_1, F_2 είναι αντιπαράγωγοι της f στο I, τότε η $F_2 - F_1$ είναι σταθερή συνάρτηση στο I.*

Απόδειξη. Έστω ότι ισχύει $F_2(x) - F_1(x) = c$ και ${F_1}'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in I$. Τότε ισχύει

$${F_2}'(x) = (F_1 + c)'(x) = f(x) + 0 = f(x)$$

για κάθε $x \in I$.
Αντιστρόφως, έστω ότι ισχύει ${F_1}'(x) = f(x)$ και ${F_2}'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in I$. Ορίζουμε την $h = F_2 - F_1 : I \to \mathbb{R}$ και τότε ισχύει

$$h'(x) = {F_1}'(x) - {F_2}'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

για κάθε $x \in I$. Άρα η h είναι σταθερή συνάρτηση στο I. □

Το αποτέλεσμα της πρότασης 7.1 μπορεί να διατυπωθεί και με τον εξής τρόπο.
Έστω F αντιπαράγωγος της f στο διάστημα I. Τότε το σύνολο όλων των αντιπαραγώγων της f στο I αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις $F + c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση, και μόνο από αυτές.
Με άλλα λόγια, αν υπάρχει τουλάχιστον μία αντιπαράγωγος της f στο διάστημα I, τότε η f έχει *άπειρες* αντιπαραγώγους στο διάστημα I και αυτές είναι ακριβώς οι εξής: μια οποιαδήποτε από τις αντιπαραγώγους συν αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση.

Παράδειγμα 7.1.4. Οι αντιπαράγωγοι της συνάρτησης x στο $\mathbb{R}$ είναι οι συναρτήσεις $\frac{x^2}{2} + c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση.
Γενικότερα, για κάθε συνάρτηση στα παραδείγματα 7.1.1 και 7.1.2 μπορούμε να βρούμε όλες τις αντιπαραγώγους της, αν επισυνάψουμε το σύμβολο c στην αναφερόμενη αντιπαράγωγο.

Πρέπει να προσεχθεί το εξής. Αν μια συνάρτηση g έχει παράγωγο σταθερή 0 στην ένωση *δύο μη-διαδοχικών* διαστημάτων, τότε δεν συνεπάγεται ότι η g είναι σταθερή στην ένωση των δύο αυτών διαστημάτων. Αυτό το είχαμε επισημάνει, και με το παράδειγμα 5.4.2, μετά από την πρόταση 5.7. Έτσι, λοιπόν, καταλαβαίνουμε γιατί στην πρόταση 7.1 αναφέρεται "διάστημα" και όχι "ένωση διαστημάτων".

Παράδειγμα 7.1.5. Οι συναρτήσεις $\log|x| + c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση, είναι οι αντιπαράγωγοι της συνάρτησης $\frac{1}{x}$ στο $(-\infty, 0)$ καθώς και στο $(0, +\infty)$ αλλά *όχι* στην ένωση $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Οι αντιπαράγωγοι της $\frac{1}{x}$ στην $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ είναι οι συναρτήσεις $F(x) = \begin{cases} \log|x| + c_1, & \text{αν } x < 0 \\ \log|x| + c_2, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$ όπου c_1 και c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές συναρτήσεις στο $(-\infty, 0)$ και στο $(0, +\infty)$, αντιστοίχως, *όχι απαραιτήτως ίσες*.

7.1.2 Αόριστα ολοκληρώματα.

ΟΡΙΣΜΟΣ 7.2. *Έστω $a < b$ και $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$, οπότε ορίζεται το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)\,dx$. Είναι πολύ χρήσιμη η εξής επέκταση του συμβόλου του ολοκληρώματος:*

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Επίσης, αν απλώς ορίζεται η f στον a, τότε τήν θεωρούμε, αυτομάτως, ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a, a] = \{a\}$ και ορίζουμε:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

Άρα επιτρέπεται να γράφουμε το μεγαλύτερο άκρο του διαστήματος στην κάτω μεριά και το μικρότερο άκρο στην πάνω μεριά του συμβόλου του ολοκληρώματος. Δηλαδή, έχουμε ορίσει το σύμβολο $\int_a^b f(x)\,dx$ για κάθε a, b με την προϋπόθεση ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a, b]$, αν $a < b$, ολοκληρώσιμη στο $[b, a]$, αν $b < a$, και, απλώς, ορισμένη στον a, αν $a = b$.

Η γνωστή ιδιότητα

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

η οποία ισχύει όταν $a < c < b$, επεκτείνεται για όλες τις περιπτώσεις σχετικής διάταξης των a, b, c, αρκεί η f να είναι ολοκληρώσιμη στο κλειστό διάστημα από τον μικρότερο μέχρι τον μεγαλύτερο από τους τρεις αυτούς αριθμούς. Αυτό είναι πολύ εύκολο να αποδειχθεί, διακρίνοντας περιπτώσεις. Για παράδειγμα, αν $b < c < a$, η ισότητα γράφεται $-\int_b^a f(x)\,dx = -\int_c^a f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx$ ή, ισοδύναμα, $\int_b^a f(x)\,dx = \int_b^c f(x)\,dx + \int_c^a f(x)\,dx$ και αυτή είναι η ήδη γνωστή μας ισότητα. Επίσης, αν $a = b < c$, η ισότητα γράφεται $0 = \int_a^c f(x)\,dx - \int_a^c f(x)\,dx$ η οποία είναι, προφανώς, σωστή. Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις η απόδειξη είναι παρόμοια.

Μια ακόμη γνωστή ιδιότητα που επεκτείνεται είναι η εξής. Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a, b]$, αν $a < b$, και στο $[b, a]$, αν $b < a$, και αν ισχύει $|f(x)| \leq M$ για κάθε x στο ίδιο διάστημα, τότε

$$\Big|\int_a^b f(x)\,dx\Big| \leq M|b-a|.$$

Πράγματι, αν $a < b$, οπότε $|b - a| = b - a$, τότε το αποτέλεσμα είναι ήδη γνωστό. Αν $b < a$, τότε $\big|\int_a^b f(x)\,dx\big| = \big| -\int_b^a f(x)\,dx\big| = \big|\int_b^a f(x)\,dx\big| \leq M(a-b) = M|b-a|$. Τέλος, αν $a = b$, τότε η ανισότητα $\big|\int_a^b f(x)\,dx\big| \leq M|b-a|$ ισχύει ως ισότητα $0 = 0$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 7.3. *Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I. Παίρνουμε έναν οποιονδήποτε $a \in I$, κατόπιν θεωρούμε έναν μεταβλητό $x \in I$ και για κάθε τέτοιον x γράφουμε το ολοκλήρωμα $\int_a^x f(t)\,dt$. Αυτό είναι ένας αριθμός η τιμή του οποίου εξαρτάται από την τιμή του x. Τέλος, παίρνουμε και έναν αυθαίρετο αριθμό c, οπότε ορίζεται η συνάρτηση $F : I \to \mathbb{R}$ με τύπο*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + c \qquad \text{για κάθε } x \text{ στο } I.$$

Κάθε τέτοια συνάρτηση ονομάζεται **αόριστο ολοκλήρωμα** *της f στο διάστημα I και ο a ονομάζεται* **αρχικό σημείο** *του αόριστου ολοκληρώματος.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 7.2. *Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I. Κάθε αόριστο ολοκλήρωμα της f στο I είναι συνάρτηση συνεχής στο I.*

Απόδειξη. Έστω $a \in I$, αριθμός c και η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + c$ για κάθε $x \in I$.
Έστω $\xi \in I$ όχι δεξιό άκρο του I. Θεωρούμε $b \in I$ με $b > \xi$. Η f ως ολοκληρώσιμη στο $[\xi, b]$ είναι φραγμένη στο $[\xi, b]$, οπότε υπάρχει M ώστε να ισχύει $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [\xi, b]$. Τότε, για κάθε $x \in [\xi, b]$ ισχύει

$$|F(x) - F(\xi)| = \Big|\Big(\int_a^x f(t)\,dt + c\Big) - \Big(\int_a^\xi f(t)\,dt + c\Big)\Big| = \Big|\int_\xi^x f(t)\,dt\Big| \leq M(x-\xi). \tag{7.1}$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει διότι $[\xi, x] \subseteq [\xi, b]$, οπότε ισχύει $|f(t)| \leq M$ για κάθε $t \in [\xi, x]$.
Από την (7.1) συνεπάγεται $\lim_{x\to\xi+}(F(x) - F(\xi)) = 0$, οπότε $\lim_{x\to\xi+} F(x) = F(\xi)$.
Έστω $\xi \in I$ όχι αριστερό άκρο του I. Τα υπόλοιπα είναι παραλλαγή της προηγούμενης παραγράφου. Θεωρούμε $b \in I$ με $b < \xi$. Η f ως ολοκληρώσιμη στο $[b, \xi]$ είναι φραγμένη στο $[b, \xi]$, οπότε υπάρχει M ώστε να ισχύει $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [b, \xi]$. Για κάθε $x \in [b, \xi]$ ισχύει

$$|F(x) - F(\xi)| = \Big|\Big(\int_a^x f(t)\,dt + c\Big) - \Big(\int_a^\xi f(t)\,dt + c\Big)\Big| = \Big|\int_x^\xi f(t)\,dt\Big| \leq M(\xi-x). \tag{7.2}$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει διότι $[x, \xi] \subseteq [b, \xi]$, οπότε ισχύει $|f(t)| \leq M$ για κάθε $t \in [x, \xi]$.
Από την (7.2) συνεπάγεται $\lim_{x\to\xi-}(F(x) - F(\xi)) = 0$, οπότε $\lim_{x\to\xi-} F(x) = F(\xi)$.
Άρα η F είναι συνεχής σε κάθε $\xi \in I$. □

Αν θέλουμε να αντικαταστήσουμε το αρχικό σημείο $a \in I$ με ένα άλλο $a' \in I$ σε ένα αόριστο ολοκλήρωμα, κάνουμε το εξής απλό:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + c = \int_{a'}^x f(t)\,dt + \int_a^{a'} f(t)\,dt + c = \int_{a'}^x f(t)\,dt + c',$$

όπου $c' = \int_a^{a'} f(t)\,dt + c$. Δηλαδή, η αντικατάσταση ενός αρχικού σημείου a με ένα άλλο a' μετατρέπει, απλώς, τον αριθμό c σε έναν άλλον c'. Γι αυτό όταν θέλουμε να υπολογίσουμε ένα αόριστο ολοκλήρωμα επιλέγουμε κατάλληλο αρχικό σημείο a τέτοιο ώστε είτε να είναι βολικότερες οι πράξεις για τον υπολογισμό του $\int_a^x f(t)\,dt$ είτε να είναι πιο απλός ο τύπος που θα προκύψει.

Παράδειγμα 7.1.6. Για να βρούμε ένα αόριστο ολοκλήρωμα της x στο $\mathbb{R}$, παίρνουμε $a = 0$ και έχουμε το αόριστο ολοκλήρωμα $\int_0^x t\,dt = \frac{x^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{x^2}{2}$. Ένα οποιοδήποτε άλλο αόριστο ολοκλήρωμα της x είναι το $\frac{x^2}{2} + c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση.
Αν επιλέξουμε κάποιον άλλο a ως αρχικό σημείο, για παράδειγμα τον $a = 4$, τότε το αόριστο ολοκλήρωμα $\int_4^x t\,dt$ είναι το $\int_4^x t\,dt = \frac{x^2}{2} - \frac{4^2}{2} = \frac{x^2}{2} - 8$ και ο νέος σταθερός αριθμός είναι ο $c = -8$.

Προσέξτε την ομοιότητα ανάμεσα στις προτάσεις 7.1 και 7.3.

ΠΡΟΤΑΣΗ 7.3. *Έστω διάστημα I και $f, F_1, F_2 : I \to \mathbb{R}$. Έστω ότι η f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I. Αν η $F_2 - F_1$ είναι σταθερή συνάρτηση στο I και η μία από τις F_1, F_2 είναι αόριστο ολοκλήρωμα της f στο I, τότε και η άλλη είναι αόριστο ολοκλήρωμα της f στο I. Αντιστρόφως, αν οι F_1, F_2 είναι αόριστα ολοκληρώματα της f στο I, τότε η $F_2 - F_1$ είναι σταθερή συνάρτηση στο I.*

Απόδειξη. Έστω $F_2(x) - F_1(x) = c$ για κάθε $x \in I$ και έστω $F_1(x) = \int_{a_1}^x f(t)\,dt + c_1$ για κάθε $x \in I$, όπου $a_1 \in I$. Συνεπάγεται

$$F_2(x) = F_1(x) + c = \int_{a_1}^x f(t)\,dt + (c_1 + c) = \int_{a_2}^x f(t)\,dt + c_2$$

για κάθε $x \in I$, όπου $a_2 = a_1$, $c_2 = c_1 + c$.
Αντιστρόφως, έστω $F_1(x) = \int_{a_1}^x f(t)\,dt + c_1$ και $F_2(x) = \int_{a_2}^x f(t)\,dt + c_2$ για κάθε $x \in I$, όπου $a_1, a_2 \in I$. Συνεπάγεται

$$F_2(x) - F_1(x) = \int_{a_2}^x f(t)\,dt + c_2 - \int_{a_1}^x f(t)\,dt - c_1 = \int_{a_2}^{a_1} f(t)\,dt + c_2 - c_1$$

για κάθε $x \in I$, οπότε η $F_2 - F_1$ είναι σταθερή συνάρτηση στο I. □

Το τελευταίο αποτέλεσμα μπορεί να διατυπωθεί ως εξής.
Έστω F ένα αόριστο ολοκλήρωμα της f στο διάστημα I. Τότε το σύνολο όλων των αόριστων ολοκληρωμάτων της f στο I αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις $F + c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση, και μόνο από αυτές.
Με άλλα λόγια, αν υπάρχει τουλάχιστον ένα αόριστο ολοκλήρωμα της f στο διάστημα I, τότε η f έχει *άπειρα* αόριστα ολοκληρώματα στο διάστημα I και αυτά είναι ακριβώς οι εξής συναρτήσεις: ένα οποιοδήποτε από τα αόριστα ολοκληρώματα συν αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση. Αν επιλέξουμε έναν οποιονδήποτε $a \in I$, τότε, σύμφωνα με τα προηγούμενα, τα αόριστα ολοκληρώματα της f στο I είναι οι συναρτήσεις $\int_a^x f(t)\,dt + c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση.

ΟΡΙΣΜΟΣ 7.4. *Παραδοσιακά, χρησιμοποιούμε τα σύμβολα $\int^x f(t)\,dt$ και $\int f(x)\,dx$ για να συμβολίσουμε όλα μαζί τα αόριστα ολοκληρώματα της f στο I. Δηλαδή, γράφουμε*

$$\int^x f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + c \quad \text{ή} \quad \int f(x)\,dx = \int_a^x f(t)\,dt + c \qquad \text{για } x \in I$$

και διαβάζουμε: το $\int^x f(t)\,dt$ ή $\int f(x)\,dx$ είναι κάθε συνάρτηση $\int_a^x f(t)\,dt + c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση. Ελπίζουμε να μη δημιουργηθεί σύγχυση!

Πάντοτε γράφουμε την ανεξάρτητη μεταβλητή x: είτε στο σύμβολο $\int^x f(t)\,dt$ είτε στο σύμβολο $\int f(x)\,dx$. Στο σύμβολο $\int^x f(t)\,dt$, η “μεταβλητή ολοκλήρωσης” μπορεί να συμβολιστεί με οποιοδήποτε άλλο γράμμα: $\int^x f(u)\,du$, $\int^x f(s)\,ds$ κ.τ.λ.

Παράδειγμα 7.1.7. Γράφουμε $\int^x t\,dt = \int_0^x t\,dt + c = \frac{x^2}{2} + c$ ή, ισοδύναμα, $\int x\,dx = \int_0^x t\,dt + c = \frac{x^2}{2} + c$. Διαβάζουμε: το $\int^x t\,dt$ ή $\int x\,dx$ είναι όλα τα αόριστα ολοκληρώματα της x στο $\mathbb{R}$, δηλαδή οι συναρτήσεις $\frac{x^2}{2} + c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση.

Παρατηρήστε ότι στα παραδείγματα 7.1.4 και 7.1.7 είδαμε ότι το σύνολο των αντιπαραγώγων της συνάρτησης x στο $\mathbb{R}$ είναι ίδιο με το σύνολο των αόριστων ολοκληρωμάτων της. Στην επόμενη ενότητα αυτό θα γενικευθεί.

Πριν προχωρήσουμε ας δούμε δύο απλές ιδιότητες των αόριστων ολοκληρωμάτων. Η πρώτη είναι:

$$\int \big(f(x) + g(x)\big)\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx.$$

Η ισότητα αυτή είναι άμεση συνέπεια της αντίστοιχης ισότητας ανάμεσα σε ολοκληρώματα με συγκεκριμένα άκρα. Πράγματι, ας θεωρήσουμε τα αόριστα ολοκληρώματα $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ και $G(x) = \int_a^x g(t)\, dt$. Επομένως,

$$\int f(x)\, dx = F(x) + c_1, \qquad \int g(x)\, dx = G(x) + c_2,$$

όπου c_1, c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές συναρτήσεις. Άρα

$$\begin{aligned} \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx &= F(x) + c_1 + G(x) + c_2 \\ &= F(x) + G(x) + (c_1 + c_2) \\ &= \int_a^x (f(t) + g(t))\, dt + (c_1 + c_2). \end{aligned} \tag{7.3}$$

Όταν οι c_1, c_2 διατρέχουν όλους τους αριθμούς, τότε και ο $c_1 + c_2$ διατρέχει όλους τους αριθμούς. Δηλαδή, η $c_1 + c_2$ είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση. Επομένως, επειδή το $\int_a^x (f(t) + g(t))\, dt$ είναι ένα από τα αόριστα ολοκληρώματα της $f + g$, συνεπάγεται

$$\int (f(x) + g(x))\, dx = \int_a^x (f(t) + g(t))\, dt + (c_1 + c_2). \tag{7.4}$$

Από τις (7.3) και (7.4) συνεπάγεται $\int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx = \int (f(x) + g(x))\, dx$.

Η δεύτερη ιδιότητα είναι:

$$\int \lambda f(x)\, dx = \lambda \int f(x)\, dx \qquad \text{αν } \lambda \neq 0.$$

Θεωρούμε, όπως πριν, το ίδιο αόριστο ολοκλήρωμα $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$, οπότε

$$\int f(x)\, dx = F(x) + c,$$

όπου ο c είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση. Τώρα

$$\lambda \int f(x)\, dx = \lambda F(x) + \lambda c = \int_a^x \lambda f(t)\, dt + \lambda c. \tag{7.5}$$

Όταν ο c διατρέχει όλους τους αριθμούς, τότε (ακριβώς επειδή $\lambda \neq 0$) και ο λc διατρέχει όλους τους αριθμούς. Δηλαδή, ο λc είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση. Οπότε, επειδή το $\int_a^x \lambda f(t)\, dt$ είναι ένα από τα αόριστα ολοκληρώματα της λf, έχουμε ότι

$$\int \lambda f(x)\, dx = \int_a^x \lambda f(t)\, dt + \lambda c. \tag{7.6}$$

Από τις (7.5) και (7.6) συνεπάγεται $\lambda \int f(x)\, dx = \int \lambda f(x)\, dx$.

Όπως είδαμε παραπάνω, όταν προσθέτουμε δύο αόριστα ολοκληρώματα $\int f(x)\, dx$, $\int g(x)\, dx$ μπορούμε να αντικαθιστούμε το άθροισμα των δύο αυθαίρετων σταθερών συναρτήσεων που εμφανίζονται με *μία* αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση. Ομοίως, όταν πολλαπλασιάζουμε ένα αόριστο ολοκλήρωμα $\int f(x)\, dx$ με ένα αριθμό $\neq 0$ μπορούμε να αντικαθιστούμε το γινόμενο της αυθαίρετης σταθερής συνάρτησης και του πολλαπλασιαστή αριθμού με *μία* αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση.

Παράδειγμα 7.1.8. Γράφουμε $\int (x + x^2)\, dx = \int x\, dx + \int x^2\, dx = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + c$ και αποφεύγουμε να γράψουμε $\int (x + x^2)\, dx = \int x\, dx + \int x^2\, dx = \frac{x^2}{2} + c_1 + \frac{x^3}{3} + c_2$.

Παράδειγμα 7.1.9. Γράφουμε $\int 7x\,dx = 7\int x\,dx = 7\frac{x^2}{2} + c$ και αποφεύγουμε να γράψουμε $\int 7x\,dx = 7\int x\,dx = 7\frac{x^2}{2} + 7c$.

Παράδειγμα 7.1.10. Γράφουμε $\int (x+g(x))\,dx = \int x\,dx + \int g(x)\,dx = \frac{x^2}{2} + \int g(x)\,dx$ και αποφεύγουμε να γράψουμε $\int (x+g(x))\,dx = \int x\,dx + \int g(x)\,dx = \frac{x^2}{2} + c + \int g(x)\,dx$ διότι η αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση c μπορεί να "απορροφηθεί" στο $\int g(x)\,dx$ το οποίο περιέχει αφ' εαυτού μια αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση.

Παράδειγμα 7.1.11. Προσέξτε! Γράφουμε $\int x\,dx - \int x\,dx = c$ και όχι $= 0$. Διότι είναι $\int x\,dx - \int x\,dx = \int (x-x)\,dx = \int 0\,dx = c$ ή, με άλλο τρόπο, $\int x\,dx - \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c_1 - \frac{x^2}{2} - c_2 = c_1 - c_2 = c$.

Παράδειγμα 7.1.12. Προσέξτε! Είναι $0\int f(x)\,dx \neq \int 0 f(x)\,dx$. Πράγματι: $0\int f(x)\,dx = 0$ ενώ $\int 0 f(x)\,dx = \int 0\,dx = c$.

Ασκήσεις.

7.1.1. Βρείτε όλες τις αντιπαραγώγους της $2x+3x^2$ στο $\mathbb{R}$. Βρείτε μια αντιπαράγωγο της $2x+3x^2$ στο $\mathbb{R}$ ώστε η τιμή της στον 1 να είναι -2. Πόσες τέτοιες αντιπαράγωγοι υπάρχουν;

Γενικότερα, έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ η οποία έχει αντιπαράγωγο στο I. Έστω $a \in I$ και αριθμός κ. Πόσες αντιπαράγωγοι της f στο I υπάρχουν οι οποίες έχουν τιμή κ στον a;

7.1.2. Βρείτε συνάρτηση $F(x)$ ώστε να ισχύει $F'(x^2) = \frac{1}{x}$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$ και ώστε $F(1) = 1$. Ποιά είναι η απάντηση αν αντί του $(0,+\infty)$ έχουμε την ένωση $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$;

Βρείτε συνάρτηση $F(x)$ ώστε να ισχύει $F'(\log x) = 1$ για κάθε $x \in (0,1]$ και $F'(\log x) = x$ για κάθε $x \in [1,+\infty)$ και ώστε $F(1) = 1$.

7.1.3. Θεωρήστε τις συναρτήσεις $\begin{cases} 0, & \text{αν } x \leq 0 \\ 1, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$ και $\begin{cases} 2x\sin(1/x) - \cos(1/x), & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ Παρατηρήστε ότι και οι δύο συναρτήσεις είναι ασυνεχείς στον 0 και αποδείξτε ότι η πρώτη δεν έχει αντιπαράγωγο στο $\mathbb{R}$ ενώ η δεύτερη *έχει* αντιπαράγωγο στο $\mathbb{R}$.

7.1.4. Βρείτε όλα τα αόριστα ολοκληρώματα της $1-x$ στο $\mathbb{R}$. Βρείτε ένα αόριστο ολοκλήρωμα της $1-x$ στο $\mathbb{R}$ ώστε η τιμή του στον 2 να είναι -1. Πόσα τέτοια αόριστα ολοκληρώματα υπάρχουν;

Γενικότερα, έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I. Έστω $a \in I$ και αριθμός κ. Πόσα αόριστα ολοκληρώματα της f στο I υπάρχουν τα οποία έχουν τιμή κ στον a;

7.1.5. Υποθέστε ότι $\int f(x)\,dx = \int g(x)\,dx + x^2 - 3$. Με τί είναι ίση η παράσταση $\int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$;

7.1.6. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [a,b]$ ώστε $\int_a^\xi f(x)\,dx = \int_\xi^b f(x)\,dx$.

7.1.7. Θεωρήστε την $f(x) = x - [x] - \frac{1}{2}$. Η συνάρτηση αυτή εμφανίστηκε και στην άσκηση 6.4.10. Αποδείξτε ότι η f είναι περιοδική στο $\mathbb{R}$ με περίοδο 1.

Αποδείξτε ότι το αόριστο ολοκλήρωμα $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ είναι περιοδική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με περίοδο 1 και υπολογίστε το στο $[0,1)$. Εκφράστε με απλό τρόπο τον τύπο της F στο $\mathbb{R}$ χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση $[x]$.

Αποδείξτε ότι το αόριστο ολοκλήρωμα $G(x) = \int_0^x (F(t) + \frac{1}{12})\,dt$ είναι περιοδική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με περίοδο 1 και υπολογίστε το στο $[0,1)$.

Σε ποιά διαστήματα είναι η f συνεχής; Σε ποιά διαστήματα είναι η F αντιπαράγωγος της f;

Σε κάθε σημείο ασυνέχειας της f να συγκρίνετε καθένα από τα δύο πλευρικά όρια της f με την αντίστοιχη πλευρική παράγωγο της F. Τί παρατηρείτε;

7.1.8. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ περιοδική με περίοδο $\tau>0$ και ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[0,\tau]$. Σύμφωνα με την άσκηση 6.4.14[β], η f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο διάστημα. Αποδείξτε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός μ ώστε το αόριστο ολοκλήρωμα $\int_0^x (f(t)-\mu)\,dt$ να είναι περιοδική συνάρτηση με περίοδο τ. Ποιός είναι ο μ; Να αντιπαραβάλετε με την άσκηση 7.1.7.

7.1.9. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο διάστημα και έστω ότι ένα από τα αόριστα ολοκληρώματα της f είναι περιοδική ή άρτια ή περιττή συνάρτηση. Ισχύει τότε ότι όλα τα αόριστα ολοκληρώματα της f είναι περιοδικές ή άρτιες ή περιττές συναρτήσεις, αντιστοίχως;

7.2 Το θεμελιώδες θεώρημα.

Το θεμελιώδες θεώρημα είναι το σημαντικότερο αποτέλεσμα του απειροστικού λογισμού. Παρέχει την καθόλου προφανή σύνδεση ανάμεσα σε δύο φαινομενικά ασύνδετες έννοιες: την παράγωγο και το ολοκλήρωμα. Οι συνέπειες για τον χειρισμό αλλά και τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων είναι σημαντικές.

ΤΟ ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ. *Έστω διάστημα I και $f:I\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I. Έστω $a\in I$ και το αόριστο ολοκλήρωμα $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ για κάθε $x\in I$. Αν η f είναι συνεχής σε κάποιον $x\in I$, τότε η F είναι παραγωγίσιμη στον x και ισχύει $F'(x)=f(x)$. Δηλαδή,*

$$\tfrac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=f(x)\qquad \text{αν } f \text{ συνεχής στον } x.$$

Ειδικότερα, αν η f είναι συνεχής στο I, τότε η F είναι παραγωγίσιμη στο I και ισχύει $F'(x)=f(x)$ για κάθε $x\in I$.

Απόδειξη. Έστω $\epsilon>0$. Επειδή η f είναι συνεχής στον x, υπάρχει $\delta>0$ ώστε να ισχύει $|f(t)-f(x)|<\frac{\epsilon}{2}$ για κάθε $t\in I$ με $|t-x|<\delta$.
Έστω, λοιπόν, οποιοσδήποτε $y\in I$ με $0<|y-x|<\delta$. Τότε για κάθε $t\in[x,y]$ ή $t\in[y,x]$ ισχύει $|t-x|<\delta$, οπότε

$$|f(t)-f(x)|<\tfrac{\epsilon}{2}\qquad \text{για } t \text{ ανάμεσα στα } x \text{ και } y.$$

Άρα

$$\big|\int_x^y (f(t)-f(x))\,dt\big|\le\tfrac{\epsilon}{2}|y-x|<\epsilon|y-x|.$$

Τότε

$$\begin{aligned}\big|\tfrac{F(y)-F(x)}{y-x}-f(x)\big|&=\tfrac{1}{|y-x|}\big|F(y)-F(x)-(y-x)f(x)\big|\\&=\tfrac{1}{|y-x|}\big|\int_a^y f(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt-f(x)(y-x)\big|\\&=\tfrac{1}{|y-x|}\big|\int_x^y f(t)\,dt-f(x)(y-x)\big|=\tfrac{1}{|y-x|}\big|\int_x^y f(t)\,dt-\int_x^y f(x)\,dt\big|\\&=\tfrac{1}{|y-x|}\big|\int_x^y (f(t)-f(x))\,dt\big|<\epsilon.\end{aligned}$$

Αποδείξαμε ότι για κάθε $\epsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$ ώστε για κάθε $y\in I$ με $0<|y-x|<\delta$ να ισχύει $\big|\frac{F(y)-F(x)}{y-x}-f(x)\big|<\epsilon$. Άρα $\lim_{y\to x}\frac{F(y)-F(x)}{y-x}=f(x)$, οπότε $F'(x)=f(x)$. $\square$

Σχετικά με το τελευταίο μέρος του θεμελιώδους θεωρήματος, παρατηρήστε ότι, αν η f είναι συνεχής στο I, τότε είναι, αυτομάτως, ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I και, επομένως, ορίζονται τα αόριστα ολοκληρώματα της f στο I.

Οι επόμενες τρεις προτάσεις είναι απλά πορίσματα του θεμελιώδους θεωρήματος.

ΠΡΟΤΑΣΗ 7.4. *Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής στο I. Τότε κάθε αόριστο ολοκλήρωμα της f στο I είναι και αντιπαράγωγός της στο I και αντιστρόφως. Με άλλα λόγια, το σύνολο των αόριστων ολοκληρωμάτων της f στο I είναι ίδιο με το σύνολο των αντιπαραγώγων της f στο I.*

Απόδειξη. Βάσει του θεμελιώδους θεωρήματος, το αόριστο ολοκλήρωμα $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ της f στο I είναι και αντιπαράγωγός της στο I.
Σύμφωνα με την πρόταση 7.3, επειδή η F είναι αόριστο ολοκλήρωμα της f στο I, τα αόριστα ολοκληρώματα της f στο I είναι οι συναρτήσεις $F + c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση στο I.
Αλλά και, σύμφωνα με την πρόταση 7.1, επειδή η F είναι αντιπαράγωγος της f στο I, οι αντιπαράγωγοι της f στο I είναι (πάλι) οι συναρτήσεις $F+c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση στο I. □

Η πρόταση 7.5 έχει σπουδαία πρακτική αξία.

ΠΡΟΤΑΣΗ 7.5. *Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής στο I και $F : I \to \mathbb{R}$ οποιαδήποτε αντιπαράγωγος της f στο I.*
[α] *Τα αόριστα ολοκληρώματα της f στο I είναι οι συναρτήσεις $F + c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση στο I. Δηλαδή*

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c \qquad \text{για κάθε } x \text{ στο } I.$$

[β] *Το ολοκλήρωμα της f σε οποιοδήποτε $[a, b] \subseteq I$ είναι ίσο με τη διαφορά των τιμών της F στα άκρα του $[a, b]$. Δηλαδή*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \qquad \text{για κάθε } a, b \text{ στο } I.$$

Απόδειξη. [α] Οι αντιπαράγωγοι της f στο I είναι οι $F + c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση στο I, και, σύμφωνα με την πρόταση 7.4, το σύνολο των αόριστων ολοκληρωμάτων της f στο I είναι ίδιο με το σύνολο των αντιπαραγώγων της στο I.
[β] Σύμφωνα με το θεμελιώδες θεώρημα, το αόριστο ολοκλήρωμα $\int_a^x f(t)\,dt$ είναι αντιπαράγωγος της f στο I. Άρα η $\int_a^x f(t)\,dt - F(x)$ είναι σταθερή συνάρτηση στο I. Άρα

$$\int_a^x f(t)\,dt - F(x) = \int_a^a f(t)\,dt - F(a) = -F(a)$$

για κάθε $x \in I$ και, επομένως, $\int_a^b f(t)\,dt - F(b) = -F(a)$. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 7.6. [1] *Έστω διάστημα I και $F : I \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο I ώστε η $F' : I \to \mathbb{R}$ να είναι συνεχής στο I. Τότε,*

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a) \qquad \text{για κάθε } a, b \text{ στο } I.$$

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε την πρόταση 7.5[β] στην $f = F'$, παρατηρώντας ότι η F είναι, προφανώς, αντιπαράγωγος της f στο I. □

Μετά από όλα αυτά, παρατηρήστε τον “αντίστροφο χαρακτήρα” των “πράξεων” της παραγώγισης και της ολοκλήρωσης, όπως αυτός εκφράζεται με τους τύπους

$$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x), \qquad \int \frac{dF}{dx}\,dx = F(x) + c.$$

Ο πρώτος τύπος ισχύει σε διάστημα στο οποίο η f είναι συνεχής και εκφράζει το θεμελιώδες θεώρημα: *η παράγωγος κάθε αόριστου ολοκληρώματος συνεχούς συνάρτησης είναι η ίδια η συνάρτηση.* Ο δεύτερος τύπος ισχύει σε διάστημα στο οποίο η $\frac{dF}{dx}$ είναι συνεχής και λέει ότι: *το σύνολο των αόριστων ολοκληρωμάτων της παραγώγου μιας συνάρτησης ταυτίζεται με την ίδια την συνάρτηση συν αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση.*

[1] Για την πρόταση 7.6 με τις ασθενέστερες δυνατές υποθέσεις δείτε την άσκηση 7.2.20.

7.2.1 Τα βασικά παραδείγματα.

Στα επόμενα παραδείγματα εκμεταλλευόμαστε το ότι ήδη γνωρίζουμε μια αντιπαράγωγο των συναρτήσεων που εμφανίζονται σ' αυτά και εφαρμόζουμε την πρόταση 7.5.

Παράδειγμα 7.2.1. Η πρώτη ισότητα ισχύει στο $\mathbb{R}$ και η δεύτερη για κάθε a, b στο $\mathbb{R}$:

$$\int 1\,dx = x + c, \qquad \int_a^b 1\,dx = b - a.$$

Παράδειγμα 7.2.2. Για κάθε $p \neq -1$,

$$\int x^p\,dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + c, \qquad \int_a^b x^p\,dx = \frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{p+1}.$$

Η πρώτη ισότητα ισχύει (i) στο $\mathbb{R}$, αν $p \in \mathbb{N}$, (ii) στο $(-\infty, 0)$ και στο $(0, +\infty)$, αν $p \in \mathbb{Z}$ και $p \leq -2$, (iii) στο $[0, +\infty)$, αν $p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ και $p > 0$, και (iv) στο $(0, +\infty)$, αν $p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ και $p < 0$. Η δεύτερη ισότητα ισχύει για κάθε a, b τα οποία ανήκουν σε ένα (και το ίδιο) από τα προηγούμενα διαστήματα. Για παράδειγμα, αν $p \in \mathbb{Z}$ και $p \leq -2$, τότε η δεύτερη ισότητα ισχύει για κάθε $a, b < 0$ και για κάθε $a, b > 0$, αλλά όχι όταν $a < 0 < b$ ή $b < 0 < a$ (και, φυσικά, ούτε όταν κάποιος από τους a, b είναι 0).

Παράδειγμα 7.2.3. Η πρώτη ισότητα ισχύει στο $(-\infty, 0)$ και στο $(0, +\infty)$ και η δεύτερη για κάθε $a, b < 0$ και κάθε $a, b > 0$:

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + c, \qquad \int_a^b \frac{1}{x}\,dx = \log|b| - \log|a| = \log\frac{b}{a}.$$

Παρατηρήστε ότι, επειδή οι a, b είναι ομόσημοι, έχουμε $\frac{b}{a} > 0$ και, επομένως, $\log|b| - \log|a| = \log\frac{|b|}{|a|} = \log|\frac{b}{a}| = \log\frac{b}{a}$.

Παράδειγμα 7.2.4. Αν $\rho > 0$ και $\rho \neq 1$, η πρώτη ισότητα ισχύει στο $\mathbb{R}$ και η δεύτερη για κάθε a, b στο $\mathbb{R}$:

$$\int \rho^x\,dx = \frac{\rho^x}{\log\rho} + c, \qquad \int_a^b \rho^x\,dx = \frac{\rho^b - \rho^a}{\log\rho}.$$

Παράδειγμα 7.2.5. Οι πρώτες δύο ισότητες ισχύουν στο $\mathbb{R}$ και οι επόμενες δύο ισχύουν για κάθε a, b στο $\mathbb{R}$:

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c, \qquad \int \sin x\,dx = -\cos x + c,$$

$$\int_a^b \cos x\,dx = \sin b - \sin a, \qquad \int_a^b \sin x\,dx = \cos a - \cos b.$$

Παράδειγμα 7.2.6. Η πρώτη ισότητα ισχύει στο $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ για οποιονδήποτε $k \in \mathbb{Z}$ ενώ η δεύτερη ισότητα ισχύει για κάθε a, b στο ίδιο $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ και για οποιονδήποτε $k \in \mathbb{Z}$:

$$\int \frac{1}{(\cos x)^2}\,dx = \tan x + c, \qquad \int_a^b \frac{1}{(\cos x)^2}\,dx = \tan b - \tan a.$$

Παράδειγμα 7.2.7. Η πρώτη ισότητα ισχύει στο $(k\pi, \pi + k\pi)$ για οποιονδήποτε $k \in \mathbb{Z}$ και η δεύτερη ισότητα ισχύει για κάθε a, b στο ίδιο $(k\pi, \pi + k\pi)$ και για οποιονδήποτε $k \in \mathbb{Z}$:

$$\int \frac{1}{(\sin x)^2}\,dx = -\cot x + c, \qquad \int_a^b \frac{1}{(\sin x)^2}\,dx = \cot a - \cot b.$$

Παράδειγμα 7.2.8. Η πρώτη ισότητα ισχύει στο $(-1, 1)$ και η δεύτερη για κάθε a, b στο $(-1, 1)$:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx = \arcsin x + c, \qquad \int_a^b \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx = \arcsin b - \arcsin a.$$

Παράδειγμα 7.2.9. Η πρώτη ισότητα ισχύει στο $\mathbb{R}$ και η δεύτερη για κάθε a, b στο $\mathbb{R}$:

$$\int \frac{1}{1 + x^2}\,dx = \arctan x + c, \qquad \int_a^b \frac{1}{1 + x^2}\,dx = \arctan b - \arctan a.$$

Τώρα μπορούμε να δούμε και τη συσχέτιση ανάμεσα στα θεωρήματα μέσης τιμής του διαφορικού και του ολοκληρωτικού λογισμού.

Θεωρούμε στο πρώτο θεώρημα μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού την ειδική περίπτωση όπου, εκτός από την f, και η g είναι συνεχής στο $[a, b]$. Το αποτέλεσμα του θεωρήματος είναι ότι υπάρχει $\xi \in [a, b]$ ώστε

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(\xi)\int_a^b g(t)\,dt.$$

Τώρα θεωρούμε τα αόριστα ολοκληρώματα $F(x) = \int_a^x f(t)g(t)\,dt$ και $G(x) = \int_a^x g(t)\,dt$ και η σχέση $\int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(\xi)\int_a^b g(t)\,dt$ γράφεται

$$g(\xi)\int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(\xi)g(\xi)\int_a^b g(t)\,dt$$

και αυτή γράφεται

$$G'(\xi)(F(b) - F(a)) = F'(\xi)(G(b) - G(a)).$$

Αυτή είναι η σχέση στο θεώρημα μέσης τιμής του Cauchy.

Ασκήσεις.

7.2.1. Σκεφτείτε ότι το $\int f(x)\,dx = F(x) + c$ ισοδυναμεί με $F'(x) = f(x)$ αν η f είναι συνεχής στο κατάλληλο διάστημα. Αποδείξτε ότι:
(i) $\int \cos(ax)\,dx = \frac{1}{a}\sin(ax) + c$ και $\int \sin(ax)\,dx = -\frac{1}{a}\cos(ax) + c$ στο $\mathbb{R}$.
(ii) $\int \log x\,dx = x\log x - x + c$ στο διάστημα $(0, +\infty)$.
(iii) $\int \frac{1}{x\log x}\,dx = \log(\log x) + c$ στο διάστημα $(1, +\infty)$.
(iv) $\int \frac{1}{x\log x\log(\log x)}\,dx = \log(\log(\log x)) + c$ στο διάστημα $(e, +\infty)$.
(v) $\int x^n e^{-x}\,dx = n!e^{-x}\big(e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2!} - \cdots - \frac{x^n}{n!}\big) + c$ στο $\mathbb{R}$.
(vi) $\int x^n e^{x}\,dx = (-1)^{n-1}n!e^{x}\big(e^{-x} - 1 + x - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n!}\big) + c$ στο $\mathbb{R}$.

7.2.2. Βρείτε $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχή στο $\mathbb{R}$ και αριθμό a ώστε να ισχύει $\int_a^x f(t)\,dt = \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}$ για κάθε x. Πόσες λύσεις υπάρχουν;
Υπάρχει $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $\int_0^x f(t)\,dt = e^x$ για κάθε x; Ίδια ερώτηση για την $\int_0^x f(t)\,dt = e^x - 1$. Πόσες λύσεις υπάρχουν;

7.2.3. Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο στο I. Αν ισχύει $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in I$, αποδείξτε ότι $\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log\frac{f(b)}{f(a)}$ για κάθε $a, b \in I$. Συζητήστε ιδιαίτερα τον ρόλο της υπόθεσης ότι ισχύει $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in I$ σε σχέση με το πρόσημο της f στο I.

7.2.4. Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής στο διάστημα I και $a, b \in I$.
Αν η $\int_a^x f(t)\,dt$ είναι σταθερή στο I, αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή 0 στο I.
Αν ισχύει $\int_a^x f(t)\,dt = \int_x^b f(t)\,dt$ για κάθε $x \in I$, αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή 0 στο I.

7.2.5. Βρείτε τις συναρτήσεις $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $f(x) = 1 + \frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt$ για κάθε $x > 0$.
Βρείτε τις συναρτήσεις $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $f(x) = 1 - x\int_1^x f(t)\,dt$ για κάθε $x > 0$.

7.2.6. Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I. Επίσης, έστω $g, h : A \to I$ και η $F : A \to \mathbb{R}$ με τύπο $F(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt$ για κάθε $x \in A$.
Αν οι g, h είναι συνεχείς στον $x \in A$, αποδείξτε ότι η F είναι κι αυτή συνεχής στον x.
Αν οι g, h είναι παραγωγίσιμες στον $x \in A$ και η f είναι συνεχής στους $g(x)$, $h(x)$, αποδείξτε ότι

η F είναι παραγωγίσιμη στον x και $F'(x) = g'(x)f(g(x)) - h'(x)f(h(x))$.
Βρείτε τα πεδία ορισμού των $\int_1^{x^2-x} \frac{t^2-2t}{e^t+2t^2}\,dt$, $\int_x^{x^2} \frac{e^t}{t}\,dt$, $\int_{2-x}^{2+x} \frac{1+t}{\sqrt{t}}\,dt$, $\int_{x+\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \frac{t}{t-1}\,dt$ και τις παραγώγους τους.
Βρείτε $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχή στο $[0,+\infty)$ ώστε να ισχύει $\int_0^{x^2} f(t)\,dt = 1 - 2^{x^2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

7.2.7. Βρείτε τα $\lim_{x\to+\infty} e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2}\,dt$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \int_0^x e^{t-x}(2t+1)\,dt$.
Βρείτε $a > 0$ και b, c, d ώστε $\lim_{x\to 0+} \frac{1}{e^x - b - cx - dx^2} \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t}}\,dt = 1$.

7.2.8. Αν $a \neq \pm b$, αποδείξτε ότι $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} \int_0^x \sin(at)\sin(bt)\,dt = 0$. Ποιά είναι η τιμή του ορίου στις περιπτώσεις $a = \pm b$;

7.2.9. [α] Δώστε δεύτερη απόδειξη του λήμματος 6.5[β] με βάση το θεμελιώδες θεώρημα.
[β] Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Αν $\int_a^b (f(t))^2\,dt = 0$, αποδείξτε ότι η f μηδενίζεται σε κάθε σημείο συνέχειάς της.
[γ] Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Αν $\int_{x'}^{x''} f(t)\,dt \geq 0$ για κάθε $x', x'' \in [a,b]$ με $x' < x''$, αποδείξτε ότι ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε σημείο συνέχειας x της f.

7.2.10. Έστω $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[0,+\infty)$ και έστω ότι ισχύει $f(x) \neq 0$ για κάθε $x > 0$ και $(f(x))^2 = 2\int_0^x f(t)\,dt$ για κάθε $x \geq 0$.
Αποδείξτε ότι ισχύει $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$.
Αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$.
Αποδείξτε ότι ισχύει $f(x) = x$ για κάθε $x \geq 0$.

7.2.11. Έστω $f : [0,a] \to \mathbb{R}$ ώστε η $f' : [0,a] \to \mathbb{R}$ να είναι συνεχής στο $[0,a]$ και $f(0) = 0$.
Θεωρήστε την $g : [0,a] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = \begin{cases} (f(x))^2/x, & \text{αν } 0 < x \leq a \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ και αποδείξτε ότι είναι παραγωγίσιμη στο $[0,a]$.
Να συγκρίνετε τις παραγώγους των $g(x)$ και $\int_0^x (f'(t))^2\,dt$.
Αποδείξτε ότι ισχύει $(f(x))^2 \leq x\int_0^x (f'(t))^2\,dt$ για κάθε $x \in [0,a]$.
Αν $(f(a))^2 = a\int_0^a (f'(t))^2\,dt$, αποδείξτε ότι η $\frac{f(x)}{x}$ είναι σταθερή στο $(0,a]$.
Αν $(f(a))^2 = a\int_0^a (f'(t))^2\,dt$ και $f'(0) = 2$, αποδείξτε ότι ισχύει $f(x) = 2x$ για κάθε $x \in [0,a]$.

7.2.12. Έστω $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ ώστε η $f' : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ να είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ και $f(0) = 0$.
Αποδείξτε ότι ισχύει $e^{f(x)/x} \leq \frac{1}{x}\int_0^x e^{f'(t)}\,dt$ για κάθε $x > 0$.
Αν υπάρχει $a > 0$ ώστε να ισχύει $e^{f(a)/a} = \frac{1}{a}\int_0^a e^{f'(t)}\,dt$, αποδείξτε ότι υπάρχει σταθερά c ώστε να ισχύει $f(x) = cx$ για κάθε $x \in [0,a]$.

7.2.13. [2] Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I. Έστω $a \in I$ και το αόριστο ολοκλήρωμα $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ για κάθε $x \in I$.
Αν υπάρχει το $\lim_{y\to x+} f(y) \in \overline{\mathbb{R}}$, αποδείξτε ότι $F'_+(x) = \lim_{y\to x+} f(y)$. Ειδικώτερα, αν η f είναι δεξιά συνεχής στον x, τότε η F είναι παραγωγίσιμη στον x από τα δεξιά του και $F'_+(x) = f(x)$.
Αν υπάρχει το $\lim_{y\to x-} f(y) \in \overline{\mathbb{R}}$, αποδείξτε ότι $F'_-(x) = \lim_{y\to x-} f(y)$. Ειδικώτερα, αν η f είναι αριστερά συνεχής στον x, τότε η F είναι παραγωγίσιμη στον x από τα αριστερά του και $F'_-(x) = f(x)$.

7.2.14. Έστω $p, r : I \to \mathbb{R}$ συνεχείς στο διάστημα I. Λέμε ότι η συνάρτηση $y(x)$ είναι λύση της **διαφορικής εξίσωσης**
$$y' + p(x)y = r(x) \tag{7.7}$$

[2] Μια χρήσιμη επέκταση του θεμελιώδους θεωρήματος.

στο διάστημα I αν ισχύει $y'(x) + p(x)y(x) = r(x)$ για κάθε $x \in I$.

Αν $x_0 \in I$ και αν $\mu(x) = e^{\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt}$ για κάθε $x \in I$, αποδείξτε ότι οι λύσεις της (7.7) στο I είναι οι συναρτήσεις

$$y(x) = \tfrac{1}{\mu(x)}\big(\int_{x_0}^{x} \mu(t)r(t)\,dt + c\big) \qquad \text{για } \ x \in I$$

και μόνο αυτές.

7.2.15. Συνέχεια της άσκησης 5.3.19. Έστω $p, q : I \to \mathbb{R}$ συνεχείς στο διάστημα I. Λέμε ότι η συνάρτηση $y(x)$ είναι λύση της **ομογενούς διαφορικής εξίσωσης**

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{7.8}$$

στο διάστημα I αν ισχύει $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$ για κάθε $x \in I$.

Στα επόμενα θεωρήστε γνωστό το εξής θεώρημα. *Για κάθε $x_0 \in I$ και για κάθε δύο αριθμούς $y_0, y_0{}'$ υπάρχει μοναδική λύση $y(x)$ της $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ στο I ώστε $y(x_0) = y_0$ και $y'(x_0) = y_0{}'$.*

Έστω $y_1(x)$ και $y_2(x)$ δύο οποιεσδήποτε λύσεις της διαφορικής εξίσωσης (7.8) στο I.

[α] Αποδείξτε ότι κάθε γραμμικός συνδυασμός $y(x) = \lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x)$ είναι λύση της (7.8) στο I. Με άλλα λόγια, το σύνολο των λύσεων της (7.8) στο I είναι *γραμμικός χώρος*.

[β] Δείτε την άσκηση 7.2.14 και αποδείξτε ότι η $W(y_1, y_2)(x)$ είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης $y' + p(x)y = 0$ στο I.

[γ] Αποδείξτε ότι είτε (i) ισχύει $W(y_1, y_2)(x) = 0$ για κάθε $x \in I$ είτε (ii) ισχύει $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$ για κάθε $x \in I$. Στην περίπτωση (i) αποδείξτε ότι μία από τις δύο αυτές λύσεις είναι σταθερό πολλαπλάσιο της άλλης στο I. Στην περίπτωση (ii) αποδείξτε ότι καμιά από τις δύο αυτές λύσεις δεν είναι σταθερό πολλαπλάσιο της άλλης στο I, δηλαδή ότι οι δύο λύσεις $y_1(x)$ και $y_2(x)$ στο I είναι *γραμμικά ανεξάρτητες*. Σύμφωνα με την άσκηση 5.3.19, στην περίπτωση (ii), ανάμεσα σε δύο διαδοχικές ρίζες της μιας λύσης βρίσκεται ακριβώς μία ρίζα της άλλης λύσης και αντιστρόφως.

[δ] Έστω ότι ισχύει η περίπτωση (ii) στο [γ]. Θεωρήστε οποιαδήποτε λύση $y(x)$ της (7.8) στο I και οποιονδήποτε $x_0 \in I$. Αποδείξτε ότι το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} \lambda_1 y_1(x_0) + \lambda_2 y_2(x_0) &= y(x_0) \\ \lambda_1 y_1{}'(x_0) + \lambda_2 y_2{}'(x_0) &= y'(x_0) \end{aligned}$$

έχει μοναδική λύση ως προς τους λ_1 και λ_2. Κατόπιν, αποδείξτε ότι $W(y, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = 0$ για κάθε $x \in I$ και ότι $y(x) = \lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x)$ για κάθε $x \in I$. Άρα οι λύσεις της (7.8) στο I είναι οι γραμμικοί συνδυασμοί $\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x)$ και μόνο αυτοί. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι οι λύσεις $y_1(x)$ και $y_2(x)$ *παράγουν* τον γραμμικό χώρο των λύσεων της (7.8) στο I. Και, επειδή, οι δύο αυτές λύσεις είναι γραμμικά ανεξάρτητες, αποτελούν *βάση* του χώρου των λύσεων. Δηλαδή, ο χώρος των λύσεων έχει γραμμική διάσταση ίση με 2.

[ε] Έστω η ειδική περίπτωση $y'' + ky' + ly = 0$, όπου $p(x) = k$ και $q(x) = l$ είναι σταθερές συναρτήσεις.

Αν η $t^2 + kt + l = 0$ έχει δύο (διαφορετικές) λύσεις, τις κ_1 και κ_2, αποδείξτε ότι οι $y_1(x) = e^{\kappa_1 x}$ και $y_2(x) = e^{\kappa_2 x}$ είναι λύσεις της (7.8) στο $\mathbb{R}$ και ότι ισχύει $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$ για κάθε x.

Αν η $t^2 + kt + l = 0$ έχει μοναδική λύση, την κ, αποδείξτε ότι οι $y_1(x) = e^{\kappa x}$ και $y_2(x) = xe^{\kappa x}$ είναι λύσεις της (7.8) στο $\mathbb{R}$ και ότι ισχύει $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$ για κάθε x.

Αν η $t^2 + kt + l = 0$ έχει δύο συζυγείς μιγαδικές λύσεις, τις $\kappa + i\lambda$ και $\kappa - i\lambda$ με $\lambda > 0$, αποδείξτε ότι οι $y_1(x) = e^{\kappa x}\cos(\lambda x)$ και $y_2(x) = e^{\kappa x}\sin(\lambda x)$ είναι λύσεις της (7.8) στο $\mathbb{R}$ και ότι ισχύει $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$ για κάθε x.

Σε κάθε περίπτωση, ποιές είναι όλες οι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης $y'' + ky' + ly = 0$ στο $\mathbb{R}$;

Έστω $p, q, r : I \to \mathbb{R}$ συνεχείς στο διάστημα I. Θεωρούμε την **μη-ομογενή διαφορική εξίσωση**

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \tag{7.9}$$

στο διάστημα I και έστω $y_s(x)$ μια οποιαδήποτε λύση της (7.9) στο I.
[στ] Αποδείξτε ότι η $y(x)$ είναι λύση της (7.9) στο I αν και μόνο αν

$$y(x) = y_h(x) + y_s(x) \qquad \text{για } \ x \in I,$$

όπου $y_h(x)$ είναι λύση της (7.8) στο I.
[ζ] Έστω $y_1(x)$ και $y_2(x)$ δύο λύσεις της (7.8) στο I ώστε να ισχύει $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$ για κάθε $x \in I$. Αποδείξτε, βάσει του [δ], ότι η $y(x)$ είναι λύση της (7.9) στο I αν και μόνο αν

$$y(x) = \lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) + y_s(x) \qquad \text{για } \ x \in I.$$

[η] Με τις υποθέσεις του [ζ], θεωρούμε την συνάρτηση $y_s : I \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$y_s(x) = \lambda_1(x) y_1(x) + \lambda_2(x) y_2(x) \qquad \text{για } \ x \in I,$$

όπου οι $\lambda_1(x)$, $\lambda_2(x)$ είναι δύο άγνωστες συναρτήσεις στο I. Αποδείξτε ότι, αν οι $\lambda_1(x)$, $\lambda_2(x)$ ικανοποιούν το σύστημα

$$\begin{matrix} y_1(x){\lambda_1}'(x) + y_2(x){\lambda_2}'(x) = 0 \\ {y_1}'(x){\lambda_1}'(x) + {y_2}'(x){\lambda_2}'(x) = r(x) \end{matrix} \qquad \text{για } \ x \in I,$$

τότε η $y_s(x) = \lambda_1(x) y_1(x) + \lambda_2(x) y_2(x)$ είναι λύση της (7.9) στο I. Κατόπιν, αποδείξτε ότι οι

$$\lambda_1(x) = -\int_{x_0}^x \tfrac{r(t) y_2(t)}{W(y_1, y_2)(t)}\, dt, \quad \lambda_2(x) = \int_{x_0}^x \tfrac{r(t) y_1(t)}{W(y_1, y_2)(t)}\, dt \qquad \text{για } \ x \in I,$$

όπου $x_0 \in I$, ικανοποιούν το παραπάνω σύστημα.
Ποιές είναι, λοιπόν, όλες οι λύσεις (7.9) στο I, εκφρασμένες συναρτήσει των $y_1(x)$ και $y_2(x)$;
[θ] Εφαρμόστε τα προηγούμενα ώστε, σε συνδυασμό με το [ε], να βρείτε όλες τις λύσεις της $y'' + ky' + ly = r(x)$.

7.2.16. [α] Αποδείξτε ότι:
(i) $\int_0^{2\pi} \sin(kx)\, dx = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.
(ii) $\int_0^{2\pi} \cos(kx)\, dx = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$.
(iii) $\int_0^{2\pi} \sin(nx) \cos(mx)\, dx = 0$ για κάθε $n, m \in \mathbb{Z}$.
(iv) $\int_0^{2\pi} \sin(nx) \sin(mx)\, dx = 0$ για κάθε $n, m \in \mathbb{Z}$, $n \neq m$.
(v) $\int_0^{2\pi} \cos(nx) \cos(mx)\, dx = 0$ για κάθε $n, m \in \mathbb{Z}$, $n \neq m$.
(vi) $\int_0^{2\pi} (\sin(nx))^2\, dx = \int_0^{2\pi} (\cos(nx))^2\, dx = \pi$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$.
[β][3] Αν $f(x) = a_0 + 2\sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$ για κάθε x, αποδείξτε ότι

$$a_k = \tfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx)\, dx \quad \text{για } k \geq 0, \qquad b_k = \tfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx)\, dx \quad \text{για } k \geq 1.$$

Αν $f(x) = a_0 + 2\sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$ και $g(x) = c_0 + 2\sum_{k=1}^n (c_k \cos(kx) + d_k \sin(kx))$ για κάθε x, αποδείξτε ότι

$$\tfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) g(x)\, dx = a_0 c_0 + 2\sum_{k=1}^n (a_k c_k + b_k d_k).$$

Τέλος, αποδείξτε ότι[4]

$$\tfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t) g(t)\, dt = a_0 c_0 + 2\sum_{k=1}^n \big((a_k c_k - b_k d_k) \cos(kx) + (a_k d_k + b_k c_k) \sin(kx)\big).$$

[3] Κάθε συνάρτηση με τύπο $f(x) = a_0 + 2\sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$ ονομάζεται **τριγωνομετρικό πολυώνυμο**. Αν οι a_n, b_n δεν είναι και οι δύο 0, τότε ο n ονομάζεται **βαθμός** του τριγωνομετρικού πολυωνύμου. Είναι σαφές ότι κάθε τριγωνομετρικό πολυώνυμο είναι συνάρτηση περιοδική με περίοδο 2π.

[4] Γενικά, αν οι $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι περιοδικές με περίοδο 2π και ολοκληρώσιμες στο $[0, 2\pi]$, η συνάρτηση $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t) g(t)\, dt$, ως συνάρτηση του x, ονομάζεται **συνέλιξη** των $f(x)$ και $g(x)$ και συμβολίζεται $(f * g)(x)$. Όπως βλέπουμε εδώ, η συνέλιξη τριγωνομετρικών πολυωνύμων είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο.

7.2.17. Συνέχεια της άσκησης 5.6.16.

Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = c\int_{-1}^{x} g(t)\,dt$ για κάθε x. Αποδείξτε ότι υπάρχει κατάλληλη θετική τιμή του αριθμού c ώστε η f να είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, να είναι σταθερή 0 στο $(-\infty,-1]$, σταθερή 1 στο $[1,+\infty)$ και γνησίως αύξουσα στο $[-1,1]$.

Έστω $\delta > 0$ και η συνάρτηση $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $\phi(x) = f(3+\frac{4x}{\delta})f(3-\frac{4x}{\delta})$ για κάθε x. Αποδείξτε ότι η ϕ είναι άρτια, άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, σταθερή 0 στα $(-\infty,-\delta]$ και $[\delta,+\infty)$, σταθερή 1 στο $[-\frac{\delta}{2},\frac{\delta}{2}]$ γνησίως αύξουσα στο $[-\delta,-\frac{\delta}{2}]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[\frac{\delta}{2},\delta]$.

7.2.18. Ορίζουμε μια ακολουθία πολυωνύμων[5] (P_n) επαγωγικά από τις σχέσεις: $P_0(x) = 1$ για κάθε x, ${P_n}'(x) = nP_{n-1}(x)$ για κάθε x και κάθε n, $\int_0^1 P_n(x)\,dx = 0$ για κάθε n.

Βρείτε τα πολυώνυμα $P_n(x)$ για $n = 1,2,3,4$.

Αποδείξτε με επαγωγή ότι το $P_n(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού n με μεγιστοβάθμιο όρο x^n.

Αποδείξτε ότι ισχύει $P_n(0) = P_n(1)$ για κάθε $n \geq 2$.

Αποδείξτε ότι ισχύει $P_n(x+1) - P_n(x) = nx^{n-1}$ για κάθε x και κάθε n.

Αποδείξτε ότι $\sum_{k=1}^{m} k^n = \int_0^{m+1} P_n(x)\,dx = \frac{P_{n+1}(m+1)-P_{n+1}(0)}{n+1}$ και επαληθεύστε τους γνωστούς τύπους $\sum_{k=1}^{m} k = \frac{m(m+1)}{2}$, $\sum_{k=1}^{m} k^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$ και $\sum_{k=1}^{m} k^3 = \frac{m^2(m+1)^2}{4}$.

Αποδείξτε ότι ισχύει $P_n(1-x) = (-1)^n P_n(x)$ για κάθε x και κάθε n.

Αποδείξτε ότι ισχύει $P_{2n+1}(0) = 0$ και $P_{2n-1}(\frac{1}{2}) = 0$ για κάθε n.

7.2.19. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b]$. Ορίζουμε $f_n(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)\,dt$ για κάθε $x \in [a,b]$ και κάθε n.

Αποδείξτε ότι ισχύει ${f_1}'(x) = f(x)$ και ${f_{n+1}}'(x) = f_n(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$ και κάθε n.

Αποδείξτε ότι ισχύει ${f_n}^{(n)}(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$ και κάθε n.

Αποδείξτε ότι ισχύει $f_{n+1}(x) = \int_a^x f_n(t)\,dt$ για κάθε $x \in [a,b]$ και κάθε n.

[6] Αποδείξτε ότι το πλήθος των εναλλαγών προσήμου της f στο $[a,b]$ δεν είναι μικρότερο από το πλήθος των εναλλαγών προσήμου στην $(n+1)$-άδα $(f(b), f_1(b), \ldots, f_n(b))$.

[7] Αποδείξτε ότι το πλήθος των εναλλαγών προσήμου της f στο $[a,b]$ δεν είναι μικρότερο από το πλήθος των εναλλαγών προσήμου στην $(n+1)$-άδα $\big(f(a), \int_a^b f(t)\,dt, \ldots, \int_a^b (t-a)^{n-1} f(t)\,dt\big)$.

7.2.20. [8] Έστω διάστημα I και $F : I \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο I ώστε η $F' : I \to \mathbb{R}$ να είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I. Αποδείξτε ότι ισχύει $\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$ για κάθε $a, b \in I$.

7.2.21. Θυμόμαστε ότι, αν η f είναι κυρτή σε διάστημα I, τότε για κάθε εσωτερικό σημείο x του I ορίζονται οι πλευρικές παράγωγοι $f'_-(x)$ και $f'_+(x)$, αυτές είναι αριθμοί και ισχύει $f'_-(x) \leq f'_+(x)$. Αν η f είναι κοίλη στο I, ισχύουν τα ίδια με $\geq$ αντί $\leq$.

[α] Έστω ανοικτό διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ κυρτή ή κοίλη στο I. Έστω $g : I \to \mathbb{R}$ ώστε για κάθε $x \in I$ ο αριθμός $g(x)$ να είναι ανάμεσα στους $f'_+(x)$ και $f'_-(x)$. Αποδείξτε ότι η g είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I και $\int_a^b g(x)\,dx = f(b) - f(a)$ για κάθε $a, b \in I$.

Ειδικότερα, $\int_a^b f'_-(x)\,dx = f(b) - f(a)$ και $\int_a^b f'_+(x)\,dx = f(b) - f(a)$ για κάθε $a, b \in I$.

[β] Έστω ανοικτό διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ κυρτή ή κοίλη στο I. Αν η f έχει παράγωγο στο I, αποδείξτε βάσει της άσκησης 7.2.20 και όχι βάσει του [α], ότι ισχύει $\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$

---

[5] Τα $P_n(x)$ ονομάζονται **πολυώνυμα του Bernoulli**.

[6] Αποτέλεσμα του Fekete.

[7] Αποτέλεσμα του Fejer.

[8] Μια ισχυροποίηση της πρότασης 7.6. Το συμπέρασμα είναι το ίδιο, αλλά οι υποθέσεις είναι ασθενέστερες: δεν απαιτείται να είναι η παράγωγος συνεχής στο διάστημα αλλά μόνο να είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του διαστήματος. Η υπόθεση αυτή είναι η ασθενέστερη δυνατή, αφού το αποτέλεσμα αναφέρεται στα ολοκληρώματα της παραγώγου.

για κάθε $a, b \in I$.

[γ][9] Έστω ανοικτό διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η f είναι κυρτή ή κοίλη στο I αν και μόνο αν είναι αόριστο ολοκλήρωμα μιας, αντιστοίχως, αύξουσας ή φθίνουσας συνάρτησης στο I.

7.3 Τεχνικές υπολογισμού ολοκληρωμάτων.

7.3.1 Ολοκλήρωση με αλλαγή μεταβλητής.

ΠΡΟΤΑΣΗ 7.7. *Έστω διαστήματα I, J. Έστω $\phi : I \to J$ ώστε η $\phi' : I \to \mathbb{R}$ να είναι συνεχής στο I και έστω $f : J \to \mathbb{R}$ συνεχής στο J. Τότε*

$$\int^x f(\phi(t))\phi'(t)\,dt = \int^{\phi(x)} f(s)\,ds, \qquad \int_a^b f(\phi(x))\phi'(x)\,dx = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(y)\,dy, \tag{7.10}$$

όπου η πρώτη ισότητα ισχύει για κάθε $x \in I$ και η δεύτερη για κάθε $a, b \in I$.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $(f \circ \phi)\phi'$ είναι συνεχής στο I.
Έστω $F : J \to \mathbb{R}$ οποιαδήποτε αντιπαράγωγος της f στο J. Τότε

$$\int^y f(s)\,ds = F(y) + c$$

για κάθε $y \in J$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση. Άρα

$$\int^{\phi(x)} f(s)\,ds = F(\phi(x)) + c \tag{7.11}$$

για κάθε $x \in I$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση στο I.
Τώρα, ισχύει

$$(F \circ \phi)'(x) = F'(\phi(x))\phi'(x) = f(\phi(x))\phi'(x)$$

για κάθε $x \in I$, οπότε η $F \circ \phi : I \to \mathbb{R}$ είναι αντιπαράγωγος της $f(\phi(x))\phi'(x)$ στο I. Άρα

$$\int^x f(\phi(t))\phi'(t)\,dt = F(\phi(x)) + c \tag{7.12}$$

για κάθε $x \in I$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση στο I.
Από τις (7.11) και (7.12) συνεπάγεται $\int^x f(\phi(t))\phi'(t)\,dt = \int^{\phi(x)} f(s)\,ds$ για κάθε $x \in I$.
Για τη δεύτερη ισότητα (7.10) παρατηρούμε ότι από τις (7.11) και (7.12) συνεπάγεται ότι οι συγκεκριμένες συναρτήσεις $\int_{\phi(a)}^{\phi(x)} f(s)\,ds$ και $\int_a^x f(\phi(t))\phi'(t)\,dt$ διαφέρουν κατά μια σταθερή συνάρτηση στο διάστημα I. Επειδή η τιμή και των δύο συναρτήσεων είναι 0 για $x = a$, συνεπάγεται ότι οι δύο συναρτήσεις είναι ίσες στο I. Άρα ισχύει

$$\int_a^x f(\phi(t))\phi'(t)\,dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(x)} f(s)\,ds$$

για κάθε $x \in I$ και με $x = b$ παίρνουμε την δεύτερη ισότητα (7.10). □

Η πρώτη ισότητα (7.10) γράφεται και

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)\,dx = \int f(y)\,dy\Big|_{y=\phi(x)}. \tag{7.13}$$

Παρατηρούμε, τώρα, σχετικά με την (7.13) το εξής. Το $\int f(\phi(x))\phi'(x)\,dx$ συμβολίζει όλα τα αόριστα ολοκληρώματα της συνάρτησης $f(\phi(x))\phi'(x)$, τα οποία είναι, φυσικά, συναρτήσεις του $x \in I$. Το $\int f(y)\,dy$ συμβολίζει όλα τα αόριστα ολοκληρώματα της συνάρτησης $f(y)$, τα οποία είναι συναρτήσεις του $y \in J$. Η ισότητα (7.13) προκύπτει *μόνο όταν γίνει αντικατάσταση του y με το $\phi(x)$.*

Και στην (7.13) αλλά και στη δεύτερη ισότητα (7.10), συνήθως λέμε ότι η δεξιά μεριά τους προκύπτει από την αριστερή "με αλλαγή μεταβλητής από x σε $y = \phi(x)$ και με αντικατάσταση του $\phi'(x)\,dx$ από το dy". Αυτή η αντικατάσταση αιτιολογείται από τις γνωστές μας σχέσεις $\frac{dy}{dx} = \phi'(x)$ και $dy = \phi'(x)\,dx$ ανάμεσα στα απειροστά των μεταβλητών x και y.

[9] Ένας σημαντικός χαρακτηρισμός των κυρτών και των κοίλων συναρτήσεων.

Παράδειγμα 7.3.1. Αν $n \in \mathbb{N}$, θα υπολογίσουμε το $\int (\sin x)^n \cos x \, dx$.
Με αλλαγή μεταβλητής από x σε $y = \sin x$ έχουμε

$$\int (\sin x)^n \cos x \, dx = \int y^n \, dy\Big|_{y=\sin x} = \left(\tfrac{y^{n+1}}{n+1} + c\right)\Big|_{y=\sin x} = \tfrac{(\sin x)^{n+1}}{n+1} + c.$$

Παράδειγμα 7.3.2. Για να βρούμε το $\int \frac{2x}{x^2+1} \, dx$ χρησιμοποιούμε αλλαγή μεταβλητής από x σε $y = x^2 + 1$, οπότε

$$\int \tfrac{2x}{x^2+1} \, dx = \int \tfrac{1}{y} \, dy\Big|_{y=x^2+1} = (\log|y| + c)\Big|_{y=x^2+1} = \log(x^2+1) + c.$$

Παράδειγμα 7.3.3. Για τον υπολογισμό του $\int_a^b \frac{1}{x \log x} \, dx$ χρησιμοποιούμε αλλαγή μεταβλητής από x σε $y = \log x$ και έχουμε

$$\int_a^b \tfrac{1}{x \log x} \, dx = \int_{\log a}^{\log b} \tfrac{1}{y} \, dy = \log\left|\tfrac{\log b}{\log a}\right|.$$

Πρέπει να προσέξουμε ώστε οι a, b να είναι τέτοιοι ώστε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $\log x$, το οποίο αντιστοιχεί στο διάστημα με άκρα a, b, να περιέχεται στο ίδιο διάστημα του πεδίου ορισμού της $\frac{1}{y}$, δηλαδή είτε στο $(-\infty, 0)$ είτε στο $(0, +\infty)$. Αυτό το σύνολο τιμών της $\log x$ είναι το διάστημα με άκρα $\log a, \log b$. Άρα πρέπει να είναι είτε $\log a, \log b > 0$ ή, ισοδύναμα, $a, b > 1$, είτε $\log a, \log b < 0$ ή, ισοδύναμα, $0 < a, b < 1$. Ειδικώτερα, οι $\log a, \log b$ έχουν το ίδιο πρόσημο, οπότε

$$\int_a^b \tfrac{1}{x \log x} \, dx = \log \tfrac{\log b}{\log a}.$$

7.3.2 Ολοκλήρωση κατά μέρη ή κατά παράγοντες.

ΠΡΟΤΑΣΗ 7.8. [10] *Έστω διάστημα I και $f, g : I \to \mathbb{R}$ ώστε οι $f', g' : I \to \mathbb{R}$ να είναι συνεχείς στο I. Τότε*

$$\begin{aligned} \int^x f(t)g'(t) \, dt &= f(x)g(x) - \int^x f'(t)g(t) \, dt, \\ \int_a^b f(x)g'(x) \, dx &= f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x) \, dx, \end{aligned} \tag{7.14}$$

όπου η πρώτη ισότητα ισχύει για κάθε $x \in I$ και η δεύτερη για κάθε $a, b \in I$.

Απόδειξη. Έστω $F : I \to \mathbb{R}$ οποιαδήποτε αντιπαράγωγος της $f'g$ στο I. Τότε ισχύει

$$\int^x f'(t)g(t) \, dt = F(x) - c$$

για κάθε $x \in I$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση. Θεωρούμε την $G = fg - F : I \to \mathbb{R}$. Τότε ισχύει

$$G'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - F'(x) = f(x)g'(x)$$

για κάθε $x \in I$, οπότε η G είναι αντιπαράγωγος της fg' στο I. Άρα ισχύει

$$\int^x f(t)g'(t) \, dt = G(x) + c = f(x)g(x) - F(x) + c = f(x)g(x) - \int^x f'(t)g(t) \, dt$$

για κάθε $x \in I$.
Για τη δεύτερη ισότητα, βλέπουμε από την πρώτη ισότητα ότι οι συγκεκριμένες συναρτήσεις $\int_a^x f(t)g'(t) \, dt$ και $f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_a^x f'(t)g(t) \, dt$ διαφέρουν κατά μια σταθερή συνάρτηση στο διάστημα I. Επειδή και οι δύο συναρτήσεις έχουν τιμή 0 για $x = a$, συνεπάγεται ότι είναι ίσες στο I. Άρα ισχύει

$$\int_a^x f(t)g'(t) \, dt = f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_a^x f'(t)g(t) \, dt$$

για κάθε $x \in I$ και με $x = b$ παίρνουμε την δεύτερη ισότητα. □

[10] Για την γενικότερη περίπτωση όπου οι f' και g' είναι, απλώς, ολοκληρώσιμες δείτε την άσκηση 7.3.25. Για μια ακόμη γενικότερη περίπτωση δείτε την άσκηση 7.3.26.

Η πρώτη ισότητα της πρότασης 7.8 γράφεται και

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx.$$

Παράδειγμα 7.3.4. Για κάθε $x > 0$ είναι

$$\begin{aligned}\int \log x\,dx &= \int \tfrac{dx}{dx}\log x\,dx = x\log x - \int x\tfrac{d\log x}{dx}\,dx = x\log x - \int x\tfrac{1}{x}\,dx\\ &= x\log x - \int 1\,dx = x\log x - x + c.\end{aligned}$$

Παράδειγμα 7.3.5. Είναι

$$\begin{aligned}\int_0^2 xe^x\,dx &= \int_0^2 x\tfrac{de^x}{dx}\,dx = 2e^2 - 0e^0 - \int_0^2 \tfrac{dx}{dx}e^x\,dx = 2e^2 - \int_0^2 e^x\,dx\\ &= 2e^2 - (e^2 - e^0) = e^2 + 1.\end{aligned}$$

Παράδειγμα 7.3.6. Είναι

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x\sin x\,dx &= -\int_0^\pi x\tfrac{d\cos x}{dx}\,dx = -\pi\cos\pi + 0\cos 0 + \int_0^\pi \tfrac{dx}{dx}\cos x\,dx\\ &= \pi + \int_0^\pi \cos x\,dx = \pi + (\sin\pi - \sin 0) = \pi.\end{aligned}$$

Παράδειγμα 7.3.7. Αν $a \neq 0$, με μία ολοκλήρωση κατά παράγοντες βρίσκουμε

$$\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = \tfrac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \tfrac{b}{a}\int e^{ax}\cos(bx)\,dx.$$

Προκύπτει ολοκλήρωμα παρόμοιο με το αρχικό, οπότε εφαρμόζουμε πάλι ολοκλήρωση κατά παράγοντες και βρίσκουμε

$$\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = \tfrac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \tfrac{b}{a^2}e^{ax}\cos(bx) - \tfrac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\sin(bx)\,dx.$$

Άρα

$$\big(1 + \tfrac{b^2}{a^2}\big)\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = \tfrac{1}{a^2}e^{ax}\big(a\sin(bx) - b\cos(bx)\big) + c,$$

όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση και, επομένως,

$$\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = e^{ax}\big(\tfrac{a}{a^2+b^2}\sin(bx) - \tfrac{b}{a^2+b^2}\cos(bx)\big) + c.$$

Εύκολα βλέπουμε ότι ο χρήσιμος αυτός τύπος ισχύει και στην περίπτωση $a = 0$, $b \neq 0$, αφού τότε γράφεται $\int \sin(bx)\,dx = -\frac{1}{b}\cos(bx) + c$. Άρα ο τύπος ισχύει αν $a^2 + b^2 \neq 0$, δηλαδή αν δεν είναι και οι δύο a, b ίσοι με μηδέν.
Ομοίως, αποδεικνύεται και ο τύπος

$$\int e^{ax}\cos(bx)\,dx = e^{ax}\big(\tfrac{a}{a^2+b^2}\cos(bx) + \tfrac{b}{a^2+b^2}\sin(bx)\big) + c.$$

7.3.3 Ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων.

Τώρα θα περιγράψουμε την γενική μέθοδο υπολογισμού του ολοκληρώματος

$$\int R(x)\,dx = \int \tfrac{a_mx^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1x + a_0}{b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1x + b_0}\,dx,$$

όπου $R(x) = \frac{a_mx^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1x + a_0}{b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1x + b_0}$ είναι οποιαδήποτε ρητή συνάρτηση.
Πρώτο βήμα. Αναγόμαστε στην περίπτωση που ο βαθμός του αριθμητή είναι μικρότερος από τον βαθμό του παρονομαστή. Αν $m < n$ εξ αρχής, παραλείπουμε το πρώτο βήμα. Αν $m \geq n$, διαιρούμε τα πολυώνυμα και βρίσκουμε πολυώνυμα $P(x)$, $Q(x)$ ώστε ο βαθμός του $Q(x)$ να είναι $< n$ και να ισχύει

$$a_mx^m + \cdots + a_0 = P(x)(b_nx^n + \cdots + b_0) + Q(x)$$

για κάθε x. Τότε

$$R(x) = P(x) + \tfrac{Q(x)}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0}.$$

Το $\int P(x)\,dx$ υπολογίζεται εύκολα, οπότε από τώρα και στο εξής θα υποθέσουμε ότι $m < n$.

Δεύτερο βήμα. Αναλύουμε τον παρονομαστή σε γινόμενο πρωτοβάθμιων και δευτεροβάθμιων παραγόντων. Αυτό ισοδυναμεί με το να βρούμε τις ρίζες - εν γένει μιγαδικές - του παρονομαστή και είναι πολύ δύσκολο ή και αδύνατο αλλά σε αρκετές περιπτώσεις είναι εφικτό. Το γενικό συμπέρασμα, το οποίο δεν θα αποδείξουμε, είναι το εξής.

Κάθε πολυώνυμο $b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο παραγόντων

$$b_n x^n + \cdots + b_0 = b_n (x-\alpha)^\kappa \cdots (x-\gamma)^\lambda ((x-\mu)^2 + \nu^2)^\rho \cdots ((x-\epsilon)^2 + \delta^2)^\tau,$$

όπου οι εκθέτες $\kappa, \ldots, \lambda, \rho, \ldots, \tau$ είναι φυσικοί αριθμοί με $\kappa + \cdots + \lambda + 2\rho + \cdots + 2\tau = n$ και οι αριθμοί $\nu, \ldots, \delta$ είναι όλοι > 0.

Στην ανάλυση αυτή, η ύπαρξη των πρωτοβάθμιων όρων $x-\alpha, \ldots, x-\gamma$ ισοδυναμεί με το ότι οι αντίστοιχοι $\alpha, \ldots, \gamma$ είναι όλες οι πραγματικές ρίζες του πολυωνύμου και οι αντίστοιχοι εκθέτες $\kappa, \ldots, \lambda$ είναι οι πολλαπλότητες αυτών των ριζών. Επίσης, η ύπαρξη των δευτεροβάθμιων όρων $(x-\mu)^2 + \nu^2, \ldots, (x-\epsilon)^2 + \delta^2$ ισοδυναμεί με το ότι οι αντίστοιχοι μιγαδικοί αριθμοί $\mu \pm i\nu, \ldots, \epsilon \pm i\delta$ είναι όλες οι γνησίως μιγαδικές ρίζες του πολυωνύμου και οι αντίστοιχοι εκθέτες $\rho, \ldots, \tau$ είναι οι πολλαπλότητες αυτών των ριζών. Προσέξτε ότι οι γνησίως μιγαδικές ρίζες αποτελούν ζεύγη συζυγών μιγαδικών αριθμών.

Επισημαίνουμε ότι οι πραγματικές ρίζες $\alpha, \ldots, \gamma$ καθορίζουν τα διαστήματα στα οποία ορίζεται το αόριστο ολοκλήρωμά μας: είναι τα διαδοχικά ανοικτά διαστήματα με άκρα τα $\alpha, \ldots, \gamma$ καθώς και τα $\pm\infty$.

Τρίτο βήμα. Αναλύουμε τη ρητή συνάρτηση σε **απλούς λόγους**:

$$\begin{aligned} R(x) &= \big(\tfrac{A_1}{x-\alpha} + \cdots + \tfrac{A_\kappa}{(x-\alpha)^\kappa}\big) + \cdots + \big(\tfrac{\Gamma_1}{x-\gamma} + \cdots + \tfrac{\Gamma_\lambda}{(x-\gamma)^\lambda}\big) \\ &\quad + \big(\tfrac{M_1(x-\mu)+N_1}{(x-\mu)^2+\nu^2} + \cdots + \tfrac{M_\rho(x-\mu)+N_\rho}{((x-\mu)^2+\nu^2)^\rho}\big) + \cdots + \big(\tfrac{E_1(x-\epsilon)+\Delta_1}{(x-\epsilon)^2+\delta^2} + \cdots + \tfrac{E_\tau(x-\epsilon)+\Delta_\tau}{((x-\epsilon)^2+\delta^2)^\tau}\big). \end{aligned}$$

Ο πρωτοβάθμιος παράγων $x-\alpha$ του παρονομαστή καθορίζει μια ομάδα λόγων με αριθμούς ως αριθμητές και δυνάμεις του ίδιου παράγοντα με εκθέτες από 1 έως κ (η πολλαπλότητα του α) ως παρονομαστές. Το ίδιο ισχύει και για τους άλλους πρωτοβάθμιους παράγοντες. Ο δευτεροβάθμιος παράγων $(x-\mu)^2 + \nu^2$ καθορίζει μια ομάδα λόγων με πρωτοβάθμιους όρους ως αριθμητές και δυνάμεις του ίδιου παράγοντα με εκθέτες από 1 έως ρ (η πολλαπλότητα των $\mu \pm i\nu$) ως παρονομαστές. Το ίδιο ισχύει και για τους υπόλοιπους δευτεροβάθμιους παράγοντες. Οι αριθμοί $A_1, A_2, \ldots, E_\tau, \Delta_\tau$, δηλαδή όλοι οι συντελεστές των αριθμητών, είναι άγνωστοι και πρέπει να υπολογιστούν. Αυτό επιτυγχάνεται με απαλοιφή των παρονομαστών, αν πολλαπλασιάσουμε με το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιό τους, δηλαδή το $b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0$. Εξισώνουμε τους αντίστοιχους συντελεστές των δύο πολυωνύμων που προκύπτουν, βρίσκουμε ένα σύστημα n εξισώσεων με τους n αγνώστους $A_1, A_2, \ldots, E_\tau, \Delta_\tau$ και το λύνουμε.

Τέταρτο βήμα. Το πρόβλημα, λοιπόν, ανάγεται στον υπολογισμό ολοκληρωμάτων των εξής τριών τύπων:

$$\int \tfrac{1}{(x-\alpha)^k}\,dx, \quad \int \tfrac{x-\mu}{((x-\mu)^2+\nu^2)^k}\,dx, \quad \int \tfrac{1}{((x-\mu)^2+\nu^2)^k}\,dx \qquad \text{για } k \in \mathbb{N}.$$

Εξετάζουμε καθέναν από τους τρεις τύπους ξεχωριστά.

(i) Για το $\int \frac{1}{(x-\alpha)^k}\,dx$, είτε στο διάστημα $(-\infty, \alpha)$ είτε στο $(\alpha, +\infty)$, χρησιμοποιούμε την αλλαγή μεταβλητής $y = x - \alpha$ και τότε $\int \frac{1}{(x-\alpha)^k}\,dx = \int \frac{1}{y^k}\,dy\big|_{y=x-\alpha}$.

Άρα $\int \frac{1}{(x-\alpha)^k}\,dx = \big(-\frac{1}{(k-1)y^{k-1}} + c\big)\big|_{y=x-\alpha} = -\frac{1}{(k-1)(x-\alpha)^{k-1}} + c$ αν $k \geq 2$.

Επίσης, $\int \frac{1}{x-\alpha}\,dx = (\log|y| + c)\big|_{y=x-\alpha} = \log|x-\alpha| + c$ αν $k = 1$.

Δηλαδή,
$$\int \frac{1}{(x-\alpha)^k}\,dx = \begin{cases} -\frac{1}{(k-1)(x-\alpha)^{k-1}} + c, & \text{αν } k \geq 2 \\ \log|x-\alpha| + c, & \text{αν } k = 1 \end{cases}$$
(ii) Για το $\int \frac{x-\mu}{((x-\mu)^2+\nu^2)^k}\,dx$ χρησιμοποιούμε την αλλαγή μεταβλητής $y = (x-\mu)^2 + \nu^2$ και βρίσκουμε ότι είναι $\int \frac{x-\mu}{((x-\mu)^2+\nu^2)^k}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{y^k}\,dy\big|_{y=(x-\mu)^2+\nu^2}$.
Επομένως, $\int \frac{x-\mu}{((x-\mu)^2+\nu^2)^k}\,dx = \big(-\frac{1}{2(k-1)y^{k-1}} + c\big)\big|_{y=(x-\mu)^2+\nu^2} = -\frac{1}{2(k-1)((x-\mu)^2+\nu^2)^{k-1}} + c$ αν $k \geq 2$.
Και $\int \frac{x-\mu}{(x-\mu)^2+\nu^2}\,dx = (\frac{1}{2}\log|y| + c)\big|_{y=(x-\mu)^2+\nu^2} = \frac{1}{2}\log((x-\mu)^2+\nu^2) + c$ αν $k = 1$.
Άρα
$$\int \frac{x-\mu}{((x-\mu)^2+\nu^2)^k}\,dx = \begin{cases} -\frac{1}{2(k-1)((x-\mu)^2+\nu^2)^{k-1}} + c, & \text{αν } k \geq 2 \\ \frac{1}{2}\log((x-\mu)^2+\nu^2) + c, & \text{αν } k = 1 \end{cases}$$
(iii) Τέλος, για το $\int \frac{1}{((x-\mu)^2+\nu^2)^k}\,dx$ χρησιμοποιούμε την αλλαγή μεταβλητής $y = \frac{x-\mu}{\nu}$, οπότε συνεπάγεται $\int \frac{1}{((x-\mu)^2+\nu^2)^k}\,dx = \frac{1}{\nu^{2k-1}}\int \frac{1}{(y^2+1)^k}\,dy\big|_{y=(x-\mu)/\nu}$.
Έτσι αναγόμαστε στον υπολογισμό του
$$I_k = \int \frac{1}{(y^2+1)^k}\,dy \qquad \text{για } \ k \in \mathbb{N}.$$
Αυτό είναι πιο περίπλοκο από τα προηγούμενα και υπολογίζεται με *αναδρομικό τύπο*.
Πρώτον, αν $k = 1$, τότε
$$I_1 = \int \frac{1}{y^2+1}\,dy = \arctan y + c.$$
Αν $k > 1$, τότε, με ολοκλήρωση κατά παράγοντες στην τέταρτη ισότητα παρακάτω,
$$\begin{aligned} I_k &= \int \frac{1}{(y^2+1)^k}\,dy = \int \frac{y^2+1}{(y^2+1)^k}\,dy - \int \frac{y^2}{(y^2+1)^k}\,dy = \int \frac{1}{(y^2+1)^{k-1}}\,dy - \int y\frac{y}{(y^2+1)^k}\,dy \\ &= I_{k-1} + \frac{1}{2(k-1)}\frac{y}{(y^2+1)^{k-1}} - \frac{1}{2(k-1)}\int \frac{1}{(y^2+1)^{k-1}}\,dy = \frac{1}{2k-2}\frac{y}{(y^2+1)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2k-2}I_{k-1}. \end{aligned}$$
Καταλήγουμε στον αναδρομικό τύπο $I_k = \frac{1}{2k-2}\frac{y}{(y^2+1)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2k-2}I_{k-1}$, ο οποίος ανάγει τον υπολογισμό του I_k στον υπολογισμό του I_{k-1} και, επαγωγικά, στο I_1. Συγκεκριμένα, για $k \geq 2$ είναι:
$$\begin{aligned} I_k &= \frac{1}{2k-2}\frac{y}{(y^2+1)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2k-2}I_{k-1} \\ &= \frac{1}{2k-2}\frac{y}{(y^2+1)^{k-1}} + \frac{2k-3}{(2k-2)(2k-4)}\frac{y}{(y^2+1)^{k-2}} + \frac{(2k-3)(2k-5)}{(2k-2)(2k-4)}I_{k-2} \\ &= \frac{1}{2k-2}\frac{y}{(y^2+1)^{k-1}} + \frac{2k-3}{(2k-2)(2k-4)}\frac{y}{(y^2+1)^{k-2}} + \cdots + \frac{(2k-3)(2k-5)\cdots 3}{(2k-2)(2k-4)\cdots 2}\frac{y}{y^2+1} \\ &\quad + \frac{(2k-3)(2k-5)\cdots 1}{(2k-2)(2k-4)\cdots 2}\arctan y + c. \end{aligned}$$
Καταλήγουμε στο ότι κάθε ομάδα όρων $\frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \cdots + \frac{A_\kappa}{(x-\alpha)^\kappa}$ στο ανάπτυγμα της συνάρτησης $R(x)$ συνεισφέρει μια αντίστοιχη ομάδα
$$A_1\log|x-\alpha| - \frac{A_2}{x-\alpha} - \cdots - \frac{A_\kappa}{(k-1)(x-\alpha)^{\kappa-1}}$$
στο ολοκλήρωμα $\int R(x)\,dx$, κάθε ομάδα $\frac{M_1(x-\mu)}{(x-\mu)^2+\nu^2} + \frac{M_2(x-\mu)}{((x-\mu)^2+\nu^2)^2} + \cdots + \frac{M_\rho(x-\mu)}{((x-\mu)^2+\nu^2)^\rho}$ συνεισφέρει μια αντίστοιχη ομάδα
$$\frac{M_1}{2}\log((x-\mu)^2+\nu^2) - \frac{M_2}{2((x-\mu)^2+\nu^2)} - \cdots - \frac{M_\rho}{2(\rho-1)((x-\mu)^2+\nu^2)^{\rho-1}}$$
και, τέλος, κάθε ομάδα $\frac{N_1}{(x-\mu)^2+\nu^2} + \frac{N_2}{((x-\mu)^2+\nu^2)^2} + \cdots + \frac{N_\rho}{((x-\mu)^2+\nu^2)^\rho}$ συνεισφέρει μια αντίστοιχη ομάδα
$$N_1'\arctan\frac{x-\mu}{\nu} + \frac{N_2'(x-\mu)}{(x-\mu)^2+\nu^2} + \cdots + \frac{N_\rho'(x-\mu)}{((x-\mu)^2+\nu^2)^{\rho-1}},$$
όπου οι $N_1', \ldots, N_\rho'$ είναι διαφορετικοί από τους $N_1, \ldots, N_\rho$.

Παράδειγμα 7.3.8. Σε καθένα από τα $(-\infty, 3)$ και $(3, +\infty)$ είναι

$$\int \frac{2}{x-3}\, dx = 2\log|x-3| + c.$$

Παράδειγμα 7.3.9. Σε καθένα από τα $(-\infty, -2)$ και $(-2, +\infty)$ είναι

$$\int \frac{-5}{(x+2)^3}\, dx = \frac{5}{2(x+2)^2} + c.$$

Παράδειγμα 7.3.10. Στο $(-\infty, +\infty)$ είναι

$$\int \frac{1}{(x+1)^2+9}\, dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{y^2+1}\, dy\Big|_{y=(x+1)/3} = \frac{1}{3}\arctan\frac{x+1}{3} + c.$$

Παράδειγμα 7.3.11. Στο $(-\infty, +\infty)$ είναι

$$\int \frac{x-2}{(x-2)^2+4}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{y}\, dy\Big|_{y=(x-2)^2+4} = \frac{1}{2}\log((x-2)^2+4) + c.$$

Παράδειγμα 7.3.12. Στο $(-\infty, +\infty)$ είναι

$$\int \frac{x-2}{((x-2)^2+4)^4}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{y^4}\, dy\Big|_{y=(x-2)^2+4} = -\frac{1}{6((x-2)^2+4)^3} + c.$$

Παράδειγμα 7.3.13. Θα υπολογίσουμε το $\int \frac{x^3-2x^2+2}{x^2-3x+2}\, dx$.
Διαιρούμε το $x^3 - 2x^2 + 2$ με το $x^2 - 3x + 2$ και βρίσκουμε

$$x^3 - 2x^2 + 2 = (x^2 - 3x + 2)(x+1) + x.$$

Άρα

$$\int \frac{x^3-2x^2+2}{x^2-3x+2}\, dx = \int (x+1)\, dx + \int \frac{x}{x^2-3x+2}\, dx = \frac{1}{2}x^2 + x + \int \frac{x}{x^2-3x+2}\, dx.$$

Για να υπολογίσουμε το $\int \frac{x}{x^2-3x+2}\, dx$ αναλύουμε τον λόγο $\frac{x}{x^2-3x+2}$ σε απλούς λόγους. Οι ρίζες του $x^2 - 3x + 2$ είναι οι 1 και 2, οπότε είναι $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$. Άρα

$$\frac{x}{x^2-3x+2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2},$$

όπου οι αριθμοί a, b πρέπει να προσδιοριστούν. Πολλαπλασιάζουμε τα δύο μέλη της τελευταίας ισότητας με το $(x-1)(x-2)$ και προκύπτει $x = a(x-2) + b(x-1)$ ή, ισοδύναμα,

$$x = (a+b)x + (-2a-b).$$

Εξισώνουμε τους συντελεστές των ομοιόβαθμων μονωνύμων των δύο μελών της τελευταίας ισότητας και βρίσκουμε

$$a + b = 1 \quad \text{και} \quad -2a - b = 0.$$

Το σύστημα αυτό έχει λύση $a = -1$, $b = 2$. Άρα

$$\frac{x}{x^2-3x+2} = -\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2}.$$

Επομένως,

$$\int \frac{x}{x^2-3x+2}\, dx = -\int \frac{1}{x-1}\, dx + 2\int \frac{1}{x-2}\, dx = -\log|x-1| + 2\log|x-2| + c$$

και, τέλος,

$$\int \frac{x^3-2x^2+2}{x^2-3x+2}\, dx = \frac{1}{2}x^2 + x - \log|x-1| + 2\log|x-2| + c$$

στα διαστήματα $(-\infty, 1)$, $(1, 2)$ και $(2, +\infty)$.

Παράδειγμα 7.3.14. Θα υπολογίσουμε το $\int \frac{2x^2+1}{x^3+x^2-x-1}\,dx$.
Παραγοντοποιούμε το x^3+x^2-x-1 ως εξής:

$$x^3+x^2-x-1 = x^2(x+1)-(x+1) = (x^2-1)(x+1) = (x-1)(x+1)^2.$$

Δηλαδή, το x^3+x^2-x-1 έχει απλή ρίζα τον 1 και διπλή ρίζα τον -1. Άρα

$$\tfrac{2x^2+1}{x^3+x^2-x-1} = \tfrac{a}{x-1} + \tfrac{b}{x+1} + \tfrac{c}{(x+1)^2},$$

όπου πρέπει να υπολογίσουμε τους a, b, c. Συνεχίζουμε όπως στο προηγούμενο παράδειγμα. Πολλαπλασιάζουμε την τελευταία ισότητα με το $(x-1)(x+1)^2$ και προκύπτει μια ισότητα ανάμεσα σε δύο δευτεροβάθμια πολυώνυμα. Εξισώνουμε τους συντελεστές των όμοιων δυνάμεων του x και βρίσκουμε ένα σύστημα τριών εξισώσεων από το οποίο προκύπτει ότι $a=\frac{3}{4}$, $b=\frac{5}{4}$, $c=-\frac{3}{2}$. Άρα

$$\tfrac{2x^2+1}{x^3+x^2-x-1} = \tfrac{3}{4}\tfrac{1}{x-1} + \tfrac{5}{4}\tfrac{1}{x+1} - \tfrac{3}{2}\tfrac{1}{(x+1)^2}.$$

Άρα

$$\int \tfrac{2x^2+1}{x^3+x^2-x-1}\,dx = \tfrac{3}{4}\log|x-1| + \tfrac{5}{4}\log|x+1| + \tfrac{3}{2}\tfrac{1}{x+1} + c$$

στα διαστήματα $(-\infty,-1)$, $(-1,1)$ και $(1,+\infty)$.

Παράδειγμα 7.3.15. Θα υπολογίσουμε το $\int \frac{x}{x^4-x^2-2x+2}\,dx$.
Παραγοντοποιούμε:

$$x^4-x^2-2x+2 = (x-1)^2(x^2+2x+2) = (x-1)^2((x+1)^2+1).$$

Δηλαδή, το x^4-x^2-2x+2 έχει διπλή ρίζα τον 1 και καμία άλλη πραγματική ρίζα. Άρα

$$\tfrac{x}{x^4-x^2-2x+2} = \tfrac{a}{x-1} + \tfrac{b}{(x-1)^2} + \tfrac{c(x+1)+d}{(x+1)^2+1}.$$

Όπως στα προηγούμενα παραδείγματα, βρίσκουμε $a=\frac{1}{25}$, $b=\frac{1}{5}$, $c=-\frac{1}{25}$, $d=-\frac{7}{25}$. Άρα

$$\tfrac{x}{x^4-x^2-2x+2} = \tfrac{1}{25}\tfrac{1}{x-1} + \tfrac{1}{5}\tfrac{1}{(x-1)^2} - \tfrac{1}{25}\tfrac{x+1}{(x+1)^2+1} - \tfrac{7}{25}\tfrac{1}{(x+1)^2+1}.$$

Επομένως,

$$\int \tfrac{x}{x^4-x^2-2x+2}\,dx = \tfrac{1}{25}\log|x-1| - \tfrac{1}{5}\tfrac{1}{x-1} - \tfrac{1}{50}\log((x+1)^2+1) - \tfrac{7}{25}\arctan(x+1) + c$$

στα $(-\infty,1)$ και $(1,+\infty)$.

Παράδειγμα 7.3.16. Θα υπολογίσουμε το $\int \frac{x^7+6x^6-x}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}\,dx$.
Διαιρώντας, βρίσκουμε

$$\tfrac{x^7+6x^6-x}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1} = x^2+7x+5+\tfrac{-7x^4+3x^3+4x^2+x+5}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}.$$

Άρα

$$\int \tfrac{x^7+6x^6-x}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}\,dx = \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{7}{2}x^2 + 5x + \int \tfrac{-7x^4+3x^3+4x^2+x+5}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}\,dx.$$

Παραγοντοποιούμε εύκολα:

$$x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1 = (x^2+1)^2(x-1).$$

Άρα το $x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1$ έχει απλή ρίζα τον 1 και καμία άλλη πραγματική ρίζα, οπότε

$$\tfrac{-7x^4+3x^3+4x^2+x+5}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1} = \tfrac{a}{x-1} + \tfrac{bx+c}{x^2+1} + \tfrac{dx+e}{(x^2+1)^2}.$$

Υπολογίζουμε $a = \frac{3}{2}$, $b = -\frac{17}{2}$, $c = -\frac{11}{2}$, $d = 4$ και $e = 2$ και, επομένως,

$\int \frac{-7x^4+3x^3+4x^2+x+5}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}\,dx = \frac{3}{2}\log|x-1| - \frac{17}{4}\log(x^2+1) - \frac{11}{2}\arctan x - \frac{2}{x^2+1} + 2\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx.$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx &= \int \frac{x^2+1}{(x^2+1)^2}\,dx - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx = \int \frac{1}{x^2+1}\,dx - \int x\frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx \\ &= \arctan x + \frac{x}{2(x^2+1)} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\arctan x + \frac{x}{2(x^2+1)} + c.\end{aligned}$$

Τελικά:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^7+6x^6-x}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}\,dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 + 5x + \frac{x-2}{x^2+1} + \frac{3}{2}\log|x-1| - \frac{17}{4}\log(x^2+1) \\ - \frac{9}{2}\arctan x + c\end{aligned}$$

στα $(-\infty, 1)$ και $(1, +\infty)$.

7.3.4 Ολοκληρώματα κάποιων τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

Κατόπιν, θα δούμε μια μέθοδο υπολογισμού του ολοκληρώματος

$$\int f(x)\,dx = \int r(\cos x, \sin x)\,dx,$$

όπου η $r(s,t)$ είναι ρητή συνάρτηση δύο μεταβλητών s, t. Δηλαδή, $f(x) = r(\cos x, \sin x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ και καθεμιά από τις συναρτήσεις $f_1(x)$, $f_2(x)$ είναι της μορφής $\sum_{j=1}^{n} a_j\,(\cos x)^{k_j}(\sin x)^{l_j}$, όπου $a_j \in \mathbb{R}$ και $k_j, l_j \in \mathbb{Z}$, $k_j, l_j \geq 0$ για κάθε $j = 1, \ldots, n$.

Παράδειγμα 7.3.17. Στο

$$\int \frac{\sin x + (\cos x)^3 - (\sin x)^2 \cos x}{\sin x + (\cos x)^2}\,dx$$

η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι η $f(x) = \frac{\sin x+(\cos x)^3-(\sin x)^2\cos x}{\sin x+(\cos x)^2} = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$, όπου $f_1(x) = (\cos x)^3 - \cos x(\sin x)^2 + \sin x$, $f_2(x) = (\cos x)^2 + \sin x$ και η αντίστοιχη ρητή συνάρτηση είναι η $r(s,t) = \frac{s^3-st^2+t}{s^2+t}$.

Παρατηρούμε ότι οι f_1 και f_2 είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$, ότι η f δεν ορίζεται στα σημεία στα οποία η f_2 έχει τιμή 0 και ότι, αν εξαιρέσουμε αυτά τα σημεία, δηλαδή αν περιοριστούμε στο πεδίο ορισμού της f, τότε η f είναι συνεχής. Μια άλλη σημαντική παρατήρηση είναι ότι η f είναι περιοδική με περίοδο 2π.

Τώρα θα διακρίνουμε δύο βασικές περιπτώσεις.

Περίπτωση 1. Η f δεν ορίζεται σε ένα τουλάχιστον σημείο του $(-\infty, +\infty)$.

Α. Ως *πρώτη υποπερίπτωση*, υποθέτουμε ότι η f δεν ορίζεται στο $-\pi$. Τότε, λόγω περιοδικότητας, η f δεν ορίζεται στο π όπως και στο $-\pi + k2\pi$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

Και πάλι, επειδή η f είναι περιοδική με περίοδο 2π, αν θέλουμε να μελετήσουμε την f, μπορούμε αρχικά να περιοριστούμε στο διάστημα $(-\pi, \pi)$ μήκους 2π.

Τώρα, είτε η f ορίζεται στο διάστημα $(-\pi, \pi)$, οπότε είναι συνεχής στο $(-\pi, \pi)$, είτε δεν ορίζεται σε διάφορα σημεία του $(-\pi, \pi)$, οπότε είναι συνεχής σε διάφορα υποδιαστήματα του $(-\pi, \pi)$. Ένας καλός τρόπος να μελετήσουμε την f στο $(-\pi, \pi)$ είναι να θεωρήσουμε την αλλαγή μεταβλητής

$$u = \tan\frac{x}{2}$$

και την αντίστροφη αλλαγή μεταβλητής

$$x = 2\arctan u.$$

Γνωρίζουμε καλά ότι η συνάρτηση $u = \tan\frac{x}{2}$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $(-\pi, \pi)$ με σύνολο τιμών το $(-\infty, +\infty)$. Η αντίστροφη συνάρτηση $x = 2\arctan u$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $(-\infty, +\infty)$ με σύνολο τιμών το $(-\pi, \pi)$. Άρα, καθώς η μεταβλητή x αυξάνεται και διατρέχει το διάστημα $(-\pi, \pi)$, η u αυξάνεται και διατρέχει το $(-\infty, +\infty)$ και αντιστρόφως. Τώρα, είναι

$$\cos x = \tfrac{1-(\tan(x/2))^2}{1+(\tan(x/2))^2} = \tfrac{1-u^2}{1+u^2}, \qquad \sin x = \tfrac{2\tan(x/2)}{1+(\tan(x/2))^2} = \tfrac{2u}{1+u^2},$$

οπότε η συνάρτηση $f(x) = r(\cos x, \sin x)$ στο $(-\pi, \pi)$ μετατρέπεται στη συνάρτηση

$$R(u) = r\big(\tfrac{1-u^2}{1+u^2}, \tfrac{2u}{1+u^2}\big)$$

στο $(-\infty, +\infty)$. Το σημαντικό είναι ότι *η νέα αυτή συνάρτηση είναι ρητή συνάρτηση του* u.

Παράδειγμα 7.3.18. Στη συνάρτηση $f(x) = \frac{\sin x + (\cos x)^3 - (\sin x)^2 \cos x}{\sin x + (\cos x)^2}$ στο $(-\pi, \pi)$ του προηγούμενου παραδείγματος αντιστοιχεί, με την αλλαγή μεταβλητής $u = \tan\frac{x}{2}$, η συνάρτηση

$$R(u) = \frac{\frac{2u}{1+u^2} + (\frac{1-u^2}{1+u^2})^3 - (\frac{2u}{1+u^2})^2 \frac{1-u^2}{1+u^2}}{\frac{2u}{1+u^2} + (\frac{1-u^2}{1+u^2})^2} = \tfrac{1+2u+u^2+4u^3-u^4+2u^5-u^6}{1+2u-u^2+4u^3-u^4+2u^5+u^6}$$

στο $(-\infty, +\infty)$.

Παρατηρούμε ότι

$$f(x) = R(u) = R(\tan\tfrac{x}{2}), \qquad R(u) = f(x) = f(2\arctan u)$$

και, επομένως, ότι οι συναρτήσεις $f(x)$ και $R(u)$ προκύπτουν η μία από την άλλη μέσω σύνθεσης με συνεχή συνάρτηση. Άρα, αν η $f(x)$ είναι συνεχής σε κάποιον $x \in (-\pi, \pi)$, τότε η $R(u)$ είναι συνεχής στον αντίστοιχο $u \in (-\infty, +\infty)$ και αντιστρόφως. Επίσης, αν η $f(x)$ δεν ορίζεται σε κάποιον $x \in (-\pi, \pi)$, τότε η $R(u)$ δεν ορίζεται στον αντίστοιχο $u \in (-\infty, +\infty)$ και αντιστρόφως. Άρα για να βρούμε τα σημεία στα οποία δεν ορίζεται η $f(x)$ στο $(-\pi, \pi)$ αρκεί να βρούμε τα σημεία στα οποία δεν ορίζεται η $R(u)$ στο $(-\infty, +\infty)$, δηλαδή να βρούμε τις ρίζες ενός *πολυωνύμου*. Αν η $R(u)$ ορίζεται και, επομένως, είναι συνεχής στο $(-\infty, +\infty)$, τότε η $f(x)$ ορίζεται και είναι συνεχής στο $(-\pi, \pi)$. Αν η $R(u)$ δεν ορίζεται στους $u_1, \ldots, u_n$, όπου $u_1 < \cdots < u_n$, οπότε είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty, u_1), (u_1, u_2), \ldots, (u_{n-1}, u_n), (u_n, +\infty)$, τότε η $f(x)$ δεν ορίζεται στους αντίστοιχους $x_1, \ldots, x_n$, όπου $-\pi < x_1 < \cdots < x_n < \pi$ και είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\pi, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_{n-1}, x_n), (x_n, \pi)$. Δεν ξεχνάμε ότι οι x_i και u_i αλληλοκαθορίζονται μέσω των σχέσεων $u_i = \tan\frac{x_i}{2}$ και $x_i = 2\arctan u_i$.

Επομένως, αν *προς στιγμή* περιορίσουμε τον υπολογισμό του $\int r(\sin x, \cos x)\, dx = \int f(x) dx$ στο διάστημα $(-\pi, \pi)$, τότε είναι

$$\int r(\cos x, \sin x) dx = \int f(x) dx = \int R(u) \tfrac{2}{1+u^2} du\Big|_{u=\tan(x/2)}. \tag{7.15}$$

Άρα το αρχικό ολοκλήρωμα της $f(x) = r(\cos x, \sin x)$ στα υποδιαστήματα του $(-\pi, \pi)$ στα οποία αυτή ορίζεται και είναι συνεχής ανάγεται στο ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης του u στα αντίστοιχα υποδιαστήματα του $\mathbb{R}$.

Έστω, λοιπόν, ότι υπολογίζουμε το

$$\int R(u) \tfrac{2}{1+u^2}\, du = G(u) + c, \tag{7.16}$$

όπου η $G(u)$ είναι κάποια συγκεκριμένη συνάρτηση του u, δηλαδή ένα από τα αόριστα ολοκληρώματα της $R(u)\frac{2}{1+u^2}$, στα κατάλληλα υποδιαστήματα του $\mathbb{R}$. Τότε, βάσει των παραπάνω και αφού ορίσουμε την συνάρτηση

$$F(x) = G(\tan\tfrac{x}{2}),$$

από τις (7.15) και (7.16) συνεπάγεται

$$\int r(\cos x, \sin x)\, dx = \int f(x)\, dx = G(\tan\tfrac{x}{2}) + c = F(x) + c$$

στα αντίστοιχα υποδιαστήματα του $(-\pi,\pi)$. Επομένως, η συνάρτηση $F(x)$ είναι ένα από τα ζητούμενα αόριστα ολοκληρώματα της $f(x)$ στα αντίστοιχα υποδιαστήματα του $(-\pi,\pi)$.

Παρατηρούμε ότι, όπως η $f(x)$ έχει περίοδο 2π, έτσι και η $F(x)=G(\tan\frac{x}{2})$ και, επομένως, και η $F'(x)$ έχουν περίοδο 2π. Πράγματι, είναι

$$F(x+2\pi)=G(\tan\tfrac{x+2\pi}{2})=G(\tan\tfrac{x}{2})=F(x).$$

Από αυτό συμπεραίνουμε ότι, επειδή η $F(x)$ είναι αόριστο ολοκλήρωμα της $f(x)$ σε υποδιαστήματα του $(-\pi,\pi)$, θα είναι αόριστο ολοκλήρωμα της $f(x)$ και στα αντίστοιχα υποδιαστήματα του οποιουδήποτε $(-\pi+k2\pi,\pi+k2\pi)$ για κάθε $k\in\mathbb{Z}$. Πιο συγκεκριμένα, έστω ότι ισχύει $\int f(x)\,dx=F(x)+c$ σε κάποιο υποδιάστημα (a,b) του $(-\pi,\pi)$ στο οποίο η $f(x)$ είναι συνεχής. Αυτό, φυσικά, ισοδυναμεί με το ότι ισχύει $F'(x)=f(x)$ στο ίδιο υποδιάστημα. Θεωρούμε το αντίστοιχο υποδιάστημα $(a+k2\pi,b+k2\pi)$ του $(-\pi+k2\pi,\pi+k2\pi)$, οπότε για κάθε $x\in(a+k2\pi,b+k2\pi)$ ισχύει $x-k2\pi\in(a,b)$ και, επομένως,

$$F'(x)=F'(x-k2\pi)=f(x-k2\pi)=f(x).$$

Άρα ισχύει $\int f(x)\,dx=F(x)+c$ και στο $(a+k2\pi,b+k2\pi)$.

Έχει, επομένως, τελειώσει ο υπολογισμός του $\int r(\cos x,\sin x)\,dx$ σε όλα τα υποδιαστήματα των διαστημάτων $(-\pi+k2\pi,\pi+k2\pi)$ στα οποία η $f(x)=r(\cos x,\sin x)$ ορίζεται και είναι συνεχής. Αρκεί, φυσικά, να υπολογιστεί η συνάρτηση $G(u)$.

Παράδειγμα 7.3.19. Θα υπολογίσουμε το $\int\frac{1}{\sin x}\,dx$.
Το παράδειγμα αυτό εμπίπτει στην πρώτη υποπερίπτωση της περίπτωσης 1 διότι η $\frac{1}{\sin x}$ δεν ορίζεται στον $-\pi$. Αρχικά θα εργαστούμε στο $(-\pi,\pi)$.
Με την αλλαγή μεταβλητής $u=\tan\frac{x}{2}$ η συνάρτηση $\frac{1}{\sin x}$ στο διάστημα $(-\pi,\pi)$ μετατρέπεται στη συνάρτηση $\frac{1+u^2}{2u}$ στο $(-\infty,+\infty)$. Η $\frac{1+u^2}{2u}$ δεν ορίζεται στον $u=0\in(-\infty,+\infty)$ και η $\frac{1}{\sin x}$ δεν ορίζεται στον αντίστοιχο $x=0\in(-\pi,\pi)$. Τώρα, στα διαστήματα $(-\pi,0)$ και $(0,\pi)$ έχουμε

$$\begin{aligned}\int\tfrac{1}{\sin x}dx&=\int\tfrac{1+u^2}{2u}\tfrac{2}{1+u^2}du\Big|_{u=\tan(x/2)}=\int\tfrac{1}{u}du\Big|_{u=\tan(x/2)}\\&=(\log|u|+c)|_{u=\tan(x/2)}=\log\big|\tan\tfrac{x}{2}\big|+c.\end{aligned}$$

Σύμφωνα με τα σύμβολα που χρησιμοποιήσαμε στη θεωρητική συζήτηση πριν από αυτό το παράδειγμα, είναι

$$G(u)=\log|u|,\qquad F(x)=\log\big|\tan\tfrac{x}{2}\big|.$$

Επειδή οι συναρτήσεις $\frac{1}{\sin x}$ και $\log\big|\tan\frac{x}{2}\big|$ έχουν και οι δύο περίοδο 2π, συνεπάγεται $\int\frac{1}{\sin x}\,dx=\log\big|\tan\frac{x}{2}\big|+c$ στα αντίστοιχα υποδιαστήματα $(-\pi+k2\pi,k2\pi)$ και $(k2\pi,\pi+k2\pi)$ του οποιουδήποτε διαστήματος $(-\pi+k2\pi,\pi+k2\pi)$ για κάθε $k\in\mathbb{Z}$.
Πιο απλά, γράφουμε:

$$\int\tfrac{1}{\sin x}\,dx=\log\big|\tan\tfrac{x}{2}\big|+c\qquad\text{στο διάστημα }\ (k\pi,\pi+k\pi)\ \text{ για κάθε }\ k\in\mathbb{Z}.$$

Β. Ερχόμαστε, τώρα, στη *δεύτερη υποπερίπτωση*, όπου υποθέτουμε ότι η f δεν ορίζεται σε κάποιον x_0, ο οποίος μπορεί να είναι $\neq-\pi$. Τώρα η f δεν ορίζεται και στον $x_0+2\pi$ όπως και στον $x_0+k2\pi$ για κάθε $k\in\mathbb{Z}$.

Κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής

$$z=x-x_0-\pi$$

η οποία μεταφέρει τα x-σημεία $x_0+k2\pi$ στα αντίστοιχα z-σημεία $-\pi+k2\pi$. Θεωρούμε τη σύνθετη συνάρτηση

$$f_*(z)=f(z+x_0+\pi)=f(x).$$

Επειδή η $f(x)$ δεν ορίζεται στα x-σημεία $x_0 + k2\pi$, συνεπάγεται ότι η $f_*(z)$ δεν ορίζεται στα z-σημεία $-\pi + k2\pi$. Τέλος, είναι

$$\int f(x)\,dx = \int f(z + x_0 + \pi)\,dz\big|_{z=x-x_0-\pi} = \int f_*(z)\,dz\big|_{z=x-x_0-\pi},$$

οπότε αναγόμαστε στον υπολογισμό του $\int f_*(z)\,dz$, δηλαδή στην υποπερίπτωση Α την οποία ήδη μελετήσαμε.

Παράδειγμα 7.3.20. Θα υπολογίσουμε το $\int \frac{1}{(\cos x)^2}\,dx$. Το ολοκλήρωμα αυτό μας είναι ήδη γνωστό και είναι ευκαιρία να ελέγξουμε τη μέθοδο που αναπτύξαμε.
Η συνάρτηση $\frac{1}{(\cos x)^2}$ δεν ορίζεται στον $-\frac{\pi}{2}$ (αλλά ορίζεται στον $-\pi$). Με την αλλαγή μεταβλητής $z = x - (-\frac{\pi}{2}) - \pi = x - \frac{\pi}{2}$ η συνάρτηση $\frac{1}{(\cos x)^2}$ μετατρέπεται στη συνάρτηση $\frac{1}{(\cos(z+(\pi/2)))^2} = \frac{1}{(\sin z)^2}$ και είναι

$$\int \frac{1}{(\cos x)^2}\,dx = \int \frac{1}{(\sin z)^2}\,dz\big|_{z=x-(\pi/2)}.$$

Η συνάρτηση $\frac{1}{(\sin z)^2}$ δεν ορίζεται στον $-\pi$ και στην αρχή εργαζόμαστε στο διάστημα $(-\pi,\pi)$. Με την αλλαγή μεταβλητής $u = \tan\frac{z}{2}$ η $\frac{1}{(\sin z)^2}$ στο διάστημα $(-\pi,\pi)$ μετατρέπεται στη συνάρτηση $\frac{(1+u^2)^2}{4u^2}$ στο $(-\infty,+\infty)$. Η $\frac{(1+u^2)^2}{4u^2}$ δεν ορίζεται στον $0 \in (-\infty,+\infty)$ και η $\frac{1}{(\sin z)^2}$ δεν ορίζεται στον $0 \in (-\pi,\pi)$. Τώρα, στα διαστήματα $(-\pi,0)$ και $(0,\pi)$, είναι

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(\sin z)^2}\,dz &= \int \frac{(1+u^2)^2}{4u^2}\frac{2}{1+u^2}\,du\big|_{u=\tan(z/2)} = \int \frac{1+u^2}{2u^2}\,du\big|_{u=\tan(z/2)}\\ &= \big(-\tfrac{1}{2u} + \tfrac{u}{2}\big)\big|_{u=\tan(z/2)} + c = -\tfrac{1}{2}\cot\tfrac{z}{2} + \tfrac{1}{2}\tan\tfrac{z}{2} + c = -\cot z + c\end{aligned}$$

Όταν ο z διατρέχει τα διαστήματα $(-\pi,0)$ και $(0,\pi)$, ο $x = z + \frac{\pi}{2}$ διατρέχει τα αντίστοιχα διαστήματα $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ και $(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$. Άρα σ' αυτά τα διαστήματα είναι

$$\int \frac{1}{(\cos x)^2}\,dx = \int \frac{1}{(\sin z)^2}\,dz\big|_{z=x-(\pi/2)} = -\cot(x - \tfrac{\pi}{2}) + c = \tan x + c.$$

Επειδή οι συναρτήσεις $\frac{1}{(\cos x)^2}$ και $\tan x$ έχουν και οι δύο περίοδο 2π, είναι $\int \frac{1}{(\cos x)^2}\,dx = \tan x + c$ στα αντίστοιχα υποδιαστήματα $(-\frac{\pi}{2}+k2\pi, \frac{\pi}{2}+k2\pi)$ και $(\frac{\pi}{2}+k2\pi, \frac{3\pi}{2}+k2\pi)$ του οποιουδήποτε διαστήματος $(-\frac{\pi}{2}+k2\pi, \frac{3\pi}{2}+k2\pi)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.
Πιο απλά, γράφουμε:

$$\int \frac{1}{(\cos x)^2}\,dx = \tan x + c \qquad \text{στο διάστημα } \ (-\tfrac{\pi}{2}+k\pi, \tfrac{\pi}{2}+k\pi) \ \text{ για κάθε } \ k \in \mathbb{Z}.$$

Περίπτωση 2. Η f ορίζεται σε ολόκληρο το $(-\infty,+\infty)$.

Συνεπάγεται, φυσικά, ότι η f είναι συνεχής στο $(-\infty,+\infty)$. Αυτό σημαίνει ότι το $\int f(x)\,dx$ ορίζεται σε ολόκληρο το $(-\infty,+\infty)$, δηλαδή ότι ισχύει

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c \qquad \text{για κάθε } \ x,$$

όπου η F είναι συνάρτηση παραγωγίσιμη και ισχύει

$$F'(x) = f(x) \qquad \text{για κάθε } \ x.$$

Θα δούμε, τώρα, πώς υπολογίζεται μια τέτοια συνάρτηση F.

Όπως στην περίπτωση 1, εργαζόμαστε, *προσωρινά*, στο διάστημα $(-\pi,\pi)$ χρησιμοποιώντας την ίδια αλλαγή μεταβλητής $u = \tan\frac{x}{2}$ και την αντίστροφή της $x = 2\arctan u$. Μετατρέπουμε τη συνάρτηση $f(x) = r(\cos x, \sin x)$ στο $(-\pi,\pi)$ στη ρητή συνάρτηση $R(u) = r\big(\frac{1-u^2}{1+u^2}, \frac{2u}{1+u^2}\big)$ στο $\mathbb{R}$. Κατόπιν, υπολογίζουμε το $\int R(u)\frac{2}{1+u^2}\,du = G(u)+c$, όπου η $G(u)$ είναι κάποιο συγκεκριμένο από τα αόριστα ολοκληρώματα της $R(u)\frac{2}{1+u^2}$. Τότε για τη συνάρτηση $G(\tan\frac{x}{2})$ έχουμε ότι ισχύει

$$\int f(x)\,dx = G(\tan\tfrac{x}{2}) + c \qquad \text{για κάθε } \ x \in (-\pi,\pi),$$

οπότε η $G(\tan\frac{x}{2})$ είναι ένα αόριστο ολοκλήρωμα της f στο $(-\pi,\pi)$. Άρα για την F που ζητάμε, δηλαδή το αόριστο ολοκλήρωμα της f στο $(-\infty,+\infty)$, θα υπάρχει σταθερά c ώστε να ισχύει

$$F(x)=G(\tan\tfrac{x}{2})+c \qquad \text{για κάθε } x\in(-\pi,\pi).$$

Επειδή, όμως, και η $F-c$ είναι αόριστο ολοκλήρωμα της f στο $(-\infty,+\infty)$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι για την F που ζητάμε ισχύει

$$F(x)=G(\tan\tfrac{x}{2}) \qquad \text{για κάθε } x\in(-\pi,\pi). \tag{7.17}$$

Μέχρι στιγμής, γνωρίζουμε τα εξής για την άγνωστη συνάρτηση F. Η F είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,+\infty)$ και ισχύει $F'(x)=f(x)$ για κάθε x. Επίσης, η (7.17) μας δίνει τον τύπο της F στο διάστημα $(-\pi,\pi)$, όπου η G είναι γνωστή συνάρτηση. Λόγω συνέχειας της F μπορούμε να βρούμε και τις τιμές της στους $-\pi$ και π. Αυτές είναι

$$F(-\pi)=\lim_{x\to-\pi+}F(x)=\lim_{x\to-\pi+}G(\tan\tfrac{x}{2}),$$

$$F(\pi)=\lim_{x\to\pi-}F(x)=\lim_{x\to\pi-}G(\tan\tfrac{x}{2}).$$

Συμπεραίνουμε και τονίζουμε ότι τα όρια

$$A=\lim_{x\to-\pi+}G(\tan\tfrac{x}{2})=F(-\pi), \qquad B=\lim_{x\to\pi-}G(\tan\tfrac{x}{2})=F(\pi),$$

ακριβώς επειδή είναι ίσα με τις τιμές $F(-\pi)$ και $F(\pi)$, *υπάρχουν και είναι αριθμοί.*

Η συνάρτηση $G(\tan\frac{x}{2})$ είναι ορισμένη στο $(-\infty,+\infty)$ εκτός από τα σημεία $-\pi+k2\pi$ για κάθε $k\in\mathbb{Z}$. Επίσης, η ίδια συνάρτηση είναι προφανώς περιοδική με περίοδο 2π. Άρα, για κάθε $k\in\mathbb{Z}$, το δεξιό πλευρικό όριό της στον $-\pi+k2\pi$ είναι ίσο με A και το αριστερό πλευρικό όριό της είναι ίσο με B. Τώρα, για κάθε $k\in\mathbb{Z}$, ορίζουμε την $G(\tan\frac{x}{2})$ και στο σημείο $-\pi+k2\pi$, δίνοντάς της τιμή ίση με A στο σημείο αυτό. Ορίζουμε, λοιπόν,

$$F_*(x)=\begin{cases} G(\tan\frac{x}{2}), & \text{αν } x\neq-\pi+k2\pi \text{ για κάθε } k\in\mathbb{Z}\\ A, & \text{αν } x=-\pi+k2\pi \text{ για κάποιον } k\in\mathbb{Z}\end{cases} \tag{7.18}$$

Η συνάρτηση F_* είναι ορισμένη στο $(-\infty,+\infty)$, περιοδική με περίοδο 2π, παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-\pi+k2\pi,\pi+k2\pi)$ για κάθε $k\in\mathbb{Z}$ και *δεξιά συνεχής* με τιμή A στο σημείο $-\pi+k2\pi$ για κάθε $k\in\mathbb{Z}$. Η F_* μπορεί να μην είναι αριστερά συνεχής στα σημεία αυτά διότι το αριστερό πλευρικό όριό της στα σημεία αυτά είναι B.

Μέχρι στιγμής έχουμε δύο συναρτήσεις: την άγνωστη F και τη γνωστή F_* ορισμένες στο $(-\infty,+\infty)$ και, λόγω των (7.17) και (7.18), ισχύει

$$F(x)=F_*(x) \qquad \text{για κάθε } x\in[-\pi,\pi). \tag{7.19}$$

Λόγω περιοδικότητας της f, ισχύει

$$F'(x+2\pi)-F'(x)=f(x+2\pi)-f(x)=0 \qquad \text{για κάθε } x,$$

οπότε η συνάρτηση $F(x+2\pi)-F(x)$ είναι σταθερή στο $(-\infty,+\infty)$. Άρα ισχύει

$$F(x+2\pi)-F(x)=F(\pi)-F(-\pi)=B-A=\mu \qquad \text{για κάθε } x, \tag{7.20}$$

όπου για συντομία θέσαμε $\mu=B-A$, και θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x)=F(x)-\mu\big[\tfrac{x+\pi}{2\pi}\big] \qquad \text{για κάθε } x. \tag{7.21}$$

Χρησιμοποιώντας δύο φορές τον τύπο (7.21) της h καθώς και την (7.20) έχουμε ότι ισχύει

$$h(x+2\pi)=F(x+2\pi)-\mu\big[\tfrac{(x+2\pi)+\pi}{2\pi}\big]=F(x)+\mu-\mu\big[\tfrac{x+\pi}{2\pi}+1\big]=F(x)-\mu\big[\tfrac{x+\pi}{2\pi}\big]=h(x)$$

για κάθε x και, επομένως, η h είναι περιοδική με περίοδο 2π. Επίσης, για κάθε $x \in [-\pi, \pi)$ είναι $\left[\frac{x+\pi}{2\pi}\right] = 0$, οπότε από τις (7.19) και (7.21) έχουμε

$$h(x) = F(x) = F_*(x) \qquad \text{για κάθε } \ x \in [-\pi, \pi).$$

Άρα οι h και F_* είναι περιοδικές με περίοδο 2π και ταυτίζονται στο $[-\pi, \pi)$. Επομένως, ταυτίζονται στο $(-\infty, +\infty)$. Άρα, από την (7.21) έχουμε ότι ισχύει $F_*(x) = F(x) - \mu\left[\frac{x+\pi}{2\pi}\right]$ για κάθε x, οπότε τώρα έχουμε τον τύπο της F στο $(-\infty, +\infty)$. Επομένως,

$$\int f(x)\, dx = F(x) + c = F_*(x) + \mu\left[\tfrac{x+\pi}{2\pi}\right] + c \qquad \text{για κάθε } \ x.$$

Παράδειγμα 7.3.21. Θα υπολογίσουμε το $\int \frac{1}{2+\sin x}\, dx$.
Η συνάρτηση $\frac{1}{2+\sin x}$ ορίζεται και είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Αρχικά εργαζόμαστε στο $(-\pi, \pi)$ με την αλλαγή $u = \tan\frac{x}{2}$, οπότε

$$\int \tfrac{1}{2+\sin x}\, dx = \int \tfrac{1}{u^2+u+1}\, du\Big|_{u=\tan(x/2)} \qquad \text{για κάθε } \ x \in (-\pi, \pi).$$

Τώρα, είναι

$$\int \tfrac{1}{u^2+u+1}\, du = \int \tfrac{1}{(u+(1/2))^2+(\sqrt{3}/2)^2}\, du = \tfrac{2}{\sqrt{3}} \arctan \tfrac{2u+1}{\sqrt{3}} + c \qquad \text{για κάθε } \ u.$$

Δηλαδή, η συνάρτηση $G(u)$ που αναφέρθηκε στην παραπάνω θεωρητική συζήτηση είναι η

$$G(u) = \tfrac{2}{\sqrt{3}} \arctan \tfrac{2u+1}{\sqrt{3}} \qquad \text{για κάθε } \ u$$

και, επομένως, είναι

$$G(\tan\tfrac{x}{2}) = \tfrac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\tfrac{2}{\sqrt{3}} \tan\tfrac{x}{2} + \tfrac{1}{\sqrt{3}}\right) \qquad \text{για κάθε } \ x \in (-\pi, \pi).$$

Μπορούμε, λοιπόν, να πούμε ότι ισχύει

$$\int \tfrac{1}{2+\sin x}\, dx = \tfrac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\tfrac{2}{\sqrt{3}} \tan\tfrac{x}{2} + \tfrac{1}{\sqrt{3}}\right) + c \qquad \text{για κάθε } \ x \in (-\pi, \pi).$$

Για να υπολογίσουμε ένα αόριστο ολοκλήρωμα της $\frac{1}{2+\sin x}$ στο $(-\infty, +\infty)$, βρίσκουμε τα όρια $A = \lim_{x\to-\pi+} G(\tan\frac{x}{2}) = -\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ και $B = \lim_{x\to\pi-} G(\tan\frac{x}{2}) = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$ και τον $\mu = B - A = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$. Κατόπιν, ορίζουμε την

$$F_*(x) = \begin{cases} \tfrac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\tfrac{2}{\sqrt{3}} \tan\tfrac{x}{2} + \tfrac{1}{\sqrt{3}}\right), & \text{αν } x \neq -\pi + k2\pi \text{ για κάθε } k \in \mathbb{Z} \\ -\tfrac{\pi}{\sqrt{3}}, & \text{αν } x = -\pi + k2\pi \text{ για κάποιον } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

και καταλήγουμε στο συμπέρασμα:

$$\int \tfrac{1}{2+\sin x}\, dx = F(x) + c = F_*(x) + \tfrac{2\pi}{\sqrt{3}}\left[\tfrac{x+\pi}{2\pi}\right] + c \qquad \text{για κάθε } \ x.$$

7.3.5 Ολοκληρώματα κάποιων αλγεβρικών συναρτήσεων.

Τέλος, θα υπολογίσουμε ολοκληρώματα της μορφής

$$\int r\big(x, \sqrt{1-x^2}\big)\, dx, \qquad \int r\big(x, \sqrt{x^2-1}\big)\, dx, \qquad \int r\big(x, \sqrt{x^2+1}\big)\, dx.$$

Και στα τρία ολοκληρώματα η $r(s,t)$ είναι ρητή συνάρτηση δύο μεταβλητών s, t.
(i) Το πρώτο ολοκλήρωμα ορίζεται αρχικά στο $[-1, 1]$ και είναι φυσιολογικό να χρησιμοποιηθεί η αλλαγή μεταβλητής $x = \sin t$ με τον t στο $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Τότε $\sqrt{1-x^2} = \cos t$ και προκύπτει το $\int r(\sin t, \cos t) \cos t\, dt$, στο οποίο, όπως είδαμε στην προηγούμενη υποενότητα, θα γίνει νέα αλλαγή μεταβλητής $u = \tan\frac{t}{2}$. Μετά από λίγες πράξεις παρατηρούμε ότι οι μεταβλητές x και u

συνδέονται με τη σχέση $u = \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$. Είναι, λοιπόν, προτιμότερο να χρησιμοποιήσουμε κατ' ευθείαν την αλλαγή μεταβλητής

$$u = \tfrac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}.$$

Η συνάρτηση αυτή είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1,1]$ και το σύνολο τιμών της είναι, επίσης, το $[-1,1]$. Εύκολα υπολογίζουμε τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης

$$x = \tfrac{2u}{1+u^2}.$$

Επίσης,

$$\sqrt{1-x^2} = \tfrac{1-u^2}{1+u^2}$$

και, επομένως,

$$\textstyle\int r(x,\sqrt{1-x^2})\,dx = \int r\big(\frac{2u}{1+u^2},\frac{1-u^2}{1+u^2}\big)\frac{2(1-u^2)}{(1+u^2)^2}\,dy\big|_{u=x/(1+\sqrt{1-x^2})}.$$

Αναγόμαστε έτσι σε αόριστο ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης του u στο διάστημα $[-1,1]$.

Φυσικά, για να μη μηδενίζεται ο παρονομαστής του $r(x,\sqrt{1-x^2})$ ενδέχεται να πρέπει να περιορισθεί ο x σε κάποια υποδιαστήματα του $[-1,1]$. Αυτό, όμως, εξαρτάται από το συγκεκριμένο παράδειγμα.

Παράδειγμα 7.3.22. Θα βρούμε το $\int \frac{1}{x+\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

Πρέπει να περιοριστούμε στα υποδιαστήματα $[-1,-1/\sqrt{2})$ και $(-1/\sqrt{2},1]$ του $[-1,1]$, επειδή πρέπει να είναι $x+\sqrt{1-x^2}\neq 0$ ή ισοδύναμα $x\neq -1/\sqrt{2}$. Άρα ο

$$u = \tfrac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$$

περιορίζεται είτε στο $[-1,1-\sqrt{2})$ είτε στο $(1-\sqrt{2},1]$, αντιστοίχως, και στα διαστήματα αυτά ισχύει

$$\textstyle\int \frac{1}{x+\sqrt{1-x^2}}\,dx = 2\int \frac{1-u^2}{(1+2u-u^2)(1+u^2)}\,du\big|_{u=x/(1+\sqrt{1-x^2})}.$$

Υπολογίζουμε το τελευταίο ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης και βρίσκουμε

$$\textstyle 2\int \frac{1-u^2}{(1+2u-u^2)(1+u^2)}\,du = \frac{1}{2}\log\frac{|1+2u-u^2|}{1+u^2} + \arctan u + c$$

για u στα διαστήματα $(-\infty,1-\sqrt{2})$, $(1-\sqrt{2},1+\sqrt{2})$ και $(1+\sqrt{2},+\infty)$. Άρα

$$\textstyle\int \frac{1}{x+\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\log|x+\sqrt{1-x^2}| + \arctan\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} + c$$

για x στα $[-1,1-\sqrt{2})$ και $(1-\sqrt{2},1]$.

(ii) Το δεύτερο ολοκλήρωμα ορίζεται είτε στο $[1,+\infty)$ είτε στο $(-\infty,-1]$. Θεωρούμε πρώτα την περίπτωση του $[1,+\infty)$ και μια φυσιολογική αλλαγή μεταβλητής είναι η $x=\frac{1}{\sin t}$ με τον t στο $(0,\frac{\pi}{2}]$. Τότε $\sqrt{x^2-1}=\frac{\cos t}{\sin t}$ και το ολοκλήρωμα μετατρέπεται στο $-\int r(\frac{1}{\sin t},\frac{\cos t}{\sin t})\frac{\cos t}{(\sin t)^2}\,dt$, οπότε, βάσει της προηγούμενης υποενότητας, θεωρούμε την αλλαγή μεταβλητής $u=\tan\frac{t}{2}$. Εύκολα βλέπουμε ότι οι μεταβλητές x και u συνδέονται με τη σχέση $u=x+\sqrt{x^2-1}$, οπότε χρησιμοποιούμε κατ' ευθείαν αυτή την αλλαγή μεταβλητής χωρίς να μεσολαβήσει ο t. Θεωρούμε, λοιπόν, την αλλαγή μεταβλητής

$$u = x+\sqrt{x^2-1}.$$

Η συνάρτηση αυτή είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$. Από το όριο $\lim_{x\to+\infty}(x+\sqrt{x^2-1}) = +\infty$ συμπεραίνουμε ότι το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι το $[1,+\infty)$. Ο τύπος της αντίστροφης συνάρτησης είναι

$$x = \tfrac{u^2+1}{2u}$$

και, επίσης,

$$\sqrt{x^2-1}=\tfrac{u^2-1}{2u}.$$

Άρα

$$\int r(x,\sqrt{x^2-1})\,dx=\int r\big(\tfrac{u^2+1}{2u},\tfrac{u^2-1}{2u}\big)\tfrac{u^2-1}{2u^2}\,du\big|_{u=x+\sqrt{x^2-1}}$$

και καταλήγουμε πάλι σε αόριστο ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης του u στο $[1,+\infty)$.

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε το αρχικό αόριστο ολοκλήρωμα στο $(-\infty,-1]$, χρησιμοποιούμε τις αλλαγές μεταβλητής

$$u=x-\sqrt{x^2-1}\,,\qquad x=\tfrac{u^2+1}{2u}$$

και καταλήγουμε σε αόριστο ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης του u στο $(-\infty,-1]$. Οι λεπτομέρειες είναι παρόμοιες με τις παραπάνω.

Φυσικά, εκτός από τον περιορισμό στα $(-\infty,-1]$ ή $[1,+\infty)$, ενδέχεται να πρέπει να περιοριστούμε σε μικρότερα διαστήματα ώστε να μη μηδενίζεται ο παρονομαστής του $r(x,\sqrt{x^2-1})$.

Παράδειγμα 7.3.23. Θα υπολογίσουμε το $\int\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\,dx$ στο $[1,+\infty)$.

Δεν περιοριζόμαστε σε μικρότερα διαστήματα, διότι ισχύει $x+\sqrt{x^2-1}\neq 0$ στο $[1,+\infty)$. Άρα για x στο $[1,+\infty)$ είναι

$$\int\tfrac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\,dx=\int\big(\tfrac{1}{2u}-\tfrac{1}{2u^3}\big)\,du\big|_{u=x+\sqrt{x^2-1}}.$$

Τώρα, για u στα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$ ισχύει

$$\int\big(\tfrac{1}{2u}-\tfrac{1}{2u^3}\big)\,du=\tfrac{1}{2}\log|u|+\tfrac{1}{4u^2}+c,$$

οπότε, για x στο $[1,+\infty)$,

$$\int\tfrac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\,dx=\tfrac{1}{2}\log(x+\sqrt{x^2-1})+\tfrac{1}{4(x+\sqrt{x^2-1})^2}+c.$$

(iii) Το τρίτο ολοκλήρωμα ορίζεται στο $\mathbb{R}$ και μια φυσιολογική αλλαγή μεταβλητής είναι η $x=-\cot t$ με τον t στο $(0,\pi)$. Τότε $\sqrt{x^2+1}=\frac{1}{\sin t}$ και το αόριστο ολοκλήρωμα μετατρέπεται στο $\int r(-\frac{\cos t}{\sin t},\frac{1}{\sin t})\frac{1}{(\sin t)^2}\,dt$, οπότε, βάσει της προηγούμενης υποενότητας, χρησιμοποιούμε την αλλαγή μεταβλητής $u=\tan\frac{t}{2}$. Όμως, τότε

$$u=x+\sqrt{x^2+1},$$

οπότε θεωρούμε κατ' ευθείαν αυτή την αλλαγή μεταβλητής. Η $u=x+\sqrt{x^2+1}$ είναι γνησίως αύξουσα. Υπολογίζουμε $\lim_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2+1})=0$ και $\lim_{x\to+\infty}(x+\sqrt{x^2+1})=+\infty$, οπότε το σύνολο τιμών της $u=x+\sqrt{x^2+1}$ είναι το $(0,+\infty)$. Ο τύπος της αντίστροφης συνάρτησης είναι

$$x=\tfrac{u^2-1}{2u}.$$

Επίσης,

$$\sqrt{x^2+1}=\tfrac{u^2+1}{2u}.$$

Άρα

$$\int r(x,\sqrt{x^2+1})\,dx=\int r\big(\tfrac{u^2-1}{2u},\tfrac{u^2+1}{2u}\big)\tfrac{u^2+1}{2u^2}\,du\big|_{u=x+\sqrt{x^2+1}}$$

και καταλήγουμε σε ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης του u στο $(0,+\infty)$.

Παράδειγμα 7.3.24. Θα υπολογίσουμε το $\int\frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\,dx$ είτε στο $(-\infty,0)$ είτε στο $(0,+\infty)$.

Ο περιορισμός του x στα δύο αυτά υποδιαστήματα είναι αυτονόητος, οπότε και ο $u=x+\sqrt{x^2+1}$ περιορίζεται, αντιστοίχως, είτε στο $(0,1)$ είτε στο $(1,+\infty)$. Καταλήγουμε στην ισότητα

$$\int\tfrac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\,dx=2\int\tfrac{1}{u^2-1}\,du\big|_{u=x+\sqrt{x^2+1}}$$

και υπολογίζουμε το $2\int \frac{1}{u^2-1}\,du$ είτε στο $(0,1)$ είτε στο $(1,+\infty)$ και βρίσκουμε ότι είναι ίσο με $\log|u-1|-\log(u+1)+c$.
Επομένως, για x στο $(-\infty,0)$ ή στο $(0,+\infty)$,

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\,dx = \log\frac{|x|}{1+\sqrt{x^2+1}} + c.$$

Βάσει των παραπάνω τριών τύπων ολοκληρωμάτων, μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε ολοκληρώματα του τύπου

$$\int r\big(x, \sqrt{\kappa x^2+\lambda x+\mu}\big)\,dx,$$

όπου κ,λ,μ είναι αριθμοί με $\kappa\neq 0$ και η $r(s,t)$ είναι μια ρητή συνάρτηση των s,t. Πράγματι, αφού γράψουμε

$$\kappa x^2+\lambda x+\mu = \kappa\big((x+\tfrac{\lambda}{2\kappa})^2+\tfrac{4\kappa\mu-\lambda^2}{4\kappa^2}\big) = \kappa\big((x+a)^2+b\big)$$

με $a=\frac{\lambda}{2\kappa}$ και $b=\frac{4\kappa\mu-\lambda^2}{4\kappa^2}$, το ολοκλήρωμα γράφεται

$$\int r\big(x, \sqrt{\kappa x^2+\lambda x+\mu}\big)\,dx = \int r\big(x, \sqrt{\kappa\big((x+a)^2+b\big)}\big)\,dx$$

και διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις.
Περίπτωση 1. $\kappa>0$ και $b>0$.
Με την αλλαγή μεταβλητής $u=\frac{1}{\sqrt{b}}(x+a)$ το αόριστο ολοκλήρωμα μετατρέπεται στο

$$\sqrt{b}\int r\big(\sqrt{b}\,u-a, \sqrt{\kappa b}\sqrt{u^2+1}\big)\,du = \int r_*(u,\sqrt{u^2+1})\,du,$$

όπου $r_*(s,t)$ είναι μια νέα ρητή συνάρτηση των s,t.
Περίπτωση 2. $\kappa>0$ και $b<0$.
Τώρα με την αλλαγή μεταβλητής $u=\frac{1}{\sqrt{-b}}(x+a)$ μετατρέπουμε το αόριστο ολοκλήρωμα στο

$$\sqrt{-b}\int r\big(\sqrt{-b}\,u-a, \sqrt{-\kappa b}\sqrt{u^2-1}\big)\,du = \int r_*(u,\sqrt{u^2-1})\,du,$$

όπου $r_*(s,t)$ είναι μια νέα ρητή συνάρτηση των s,t.
Περίπτωση 3. $\kappa<0$ και $b<0$.
Με την αλλαγή μεταβλητής $u=\frac{1}{\sqrt{-b}}(x+a)$ μετατρέπουμε το αόριστο ολοκλήρωμα στο

$$\sqrt{-b}\int r\big(\sqrt{-b}\,u-a, \sqrt{\kappa b}\sqrt{1-u^2}\big)\,du = \int r_*(u,\sqrt{1-u^2})\,du,$$

όπου $r_*(s,t)$ είναι μια νέα ρητή συνάρτηση των s,t.

Η περίπτωση $\kappa<0$ και $b>0$ αποκλείεται διότι τότε δεν ορίζεται σε κανένα σημείο η $\sqrt{\kappa x^2+\lambda x+\mu}$. Οποιαδήποτε άλλη περίπτωση, όπου ένας τουλάχιστον από τους κ και b είναι 0, καταλήγει σε ολοκλήρωμα απλούστερης μορφής.

ΟΡΙΣΜΟΣ 7.5. *Τα ολοκληρώματα $\int r(x,\sqrt{\kappa x^2+\lambda x+\mu})\,dx$, όπου $\kappa\neq 0$, είναι ειδική περίπτωση των ολοκληρωμάτων $\int r(x,\alpha(x))\,dx$, όπου η $\alpha(x)$ είναι οποιαδήποτε "αλγεβρική συνάρτηση" (δείτε τον ορισμό αμέσως μετά) του x. Τα τελευταία αυτά ολοκληρώματα ονομάζονται* **ολοκληρώματα του Abel** *ή* **αβελιανά ολοκληρώματα**. *Μια ακόμη ειδική περίπτωση αβελιανών ολοκληρωμάτων είναι αυτά για τα οποία $\alpha(x)=\sqrt{\rho x^4+\sigma x^3+\kappa x^2+\lambda x+\mu}$, όπου ένας τουλάχιστον από τους ρ, σ είναι $\neq 0$, και ονομάζονται* **ελλειπτικά ολοκληρώματα**, *διότι έχουν άμεση σχέση με υπολογισμό μηκών ελλειπτικών τόξων.*[11]

[11] Δείτε την άσκηση 7.3.30.

Αναφέραμε προηγουμένως τον όρο “αλγεβρική συνάρτηση”. Αν και δεν θα ασχοληθούμε με τις αλγεβρικές συναρτήσεις καθεαυτές, αξίζει να εξηγήσουμε, συνοπτικά, ποιές είναι αυτές. Οι ρητές συναρτήσεις και οι συναρτήσεις $\sqrt[n]{x}$ είναι τα απλούστερα παραδείγματα αλγεβρικών συναρτήσεων. Άλλα τέτοια παραδείγματα είναι, γενικά, συναρτήσεις που προκύπτουν από ρητές συναρτήσεις με συνδυασμό των τεσσάρων αλγεβρικών πράξεων και την εξαγωγή ριζών οποιασδήποτε τάξης όπως, για παράδειγμα, η συνάρτηση $\sqrt[4]{x} + \sqrt[3]{\frac{x^2+1+\sqrt{x}}{x-1}}$. Ο γενικός ορισμός των αλγεβρικών συναρτήσεων είναι ο εξής.

ΟΡΙΣΜΟΣ 7.6. *Θεωρούμε οποιαδήποτε εξίσωση της μορφής $P_0(x)+P_1(x)y+\cdots+P_n(x)y^n = 0$ με άγνωστο y, όπου $n \geq 1$ και κάθε $P_0(x)$, $P_1(x)$, $\ldots$, $P_n(x)$ είναι πολυώνυμο και το $P_n(x)$ δεν είναι το μηδενικό πολυώνυμο. Έστω, επίσης, μια συνάρτηση α με πεδίο ορισμού ένα διάστημα I (όχι μονοσύνολο), η οποία είναι συνεχής και επαληθεύει την παραπάνω εξίσωση στο I, δηλαδή ισχύει $P_0(x) + P_1(x)\alpha(x) + \cdots + P_n(x)\alpha(x)^n = 0$ για κάθε $x \in I$. Τότε η α χαρακτηρίζεται* **αλγεβρική συνάρτηση** *στο I.*

Παράδειγμα 7.3.25. Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)$ είναι αλγεβρική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$. Πράγματι, η $P(x)$ επαληθεύει την εξίσωση $-P(x) + 1y = 0$, της οποίας οι συντελεστές $-P(x)$, 1 είναι πολυώνυμα.

Παράδειγμα 7.3.26. Κάθε ρητή συνάρτηση $\frac{P(x)}{Q(x)}$, όπου τα $P(x)$, $Q(x)$ είναι πολυώνυμα, είναι αλγεβρική συνάρτηση σε κάθε διάστημα του πεδίου ορισμού της. Η $\frac{P(x)}{Q(x)}$ επαληθεύει την εξίσωση $-P(x) + Q(x)y = 0$, της οποίας οι συντελεστές $-P(x)$, $Q(x)$ είναι πολυώνυμα.

Παράδειγμα 7.3.27. Κάθε συνάρτηση $\sqrt[n]{\frac{P(x)}{Q(x)}}$, όπου $n \in \mathbb{N}$ και τα $P(x)$, $Q(x)$ είναι πολυώνυμα, είναι αλγεβρική συνάρτηση σε κάθε διάστημα του πεδίου ορισμού της. Η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της και επαληθεύει την εξίσωση $-P(x) + Q(x)y^n = 0$, της οποίας οι συντελεστές $-P(x)$, $Q(x)$ είναι πολυώνυμα.
Ειδικότερα, οι συναρτήσεις $\sqrt{\kappa x^2 + \lambda x + \mu}$ και $\alpha(x) = \sqrt{\rho x^4 + \sigma x^3 + \kappa x^2 + \lambda x + \mu}$ που είδαμε προηγουμένως είναι αλγεβρικές συναρτήσεις.

Οι συναρτήσεις που δεν είναι αλγεβρικές χαρακτηρίζονται **υπερβατικές συναρτήσεις**. Παραδείγματα τέτοιων συναρτήσεων είναι οι δυνάμεις με άρρητο εκθέτη, οι εκθετικές, οι λογαριθμικές, οι τριγωνομετρικές και οι αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις και οι υπερβολικές και οι αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις.

Ασκήσεις.

7.3.1. Βρείτε με αλλαγές μεταβλητής τα $\int x\cos(x^2)\,dx$, $\int(\cos x)^2\sin x\,dx$, $\int \tan x\,dx$, $\int \frac{1}{1+e^x}\,dx$, $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$, $\int x\sqrt[3]{x-1}\,dx$, $\int \frac{x}{\sqrt{x}+1}\,dx$, $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$, $\int \frac{1}{(x+1)^2+2}\,dx$, $\int \frac{1}{x(x^4+16)}\,dx$, $\int(\sin x)^3\,dx$, $\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{(1+x)\sqrt{x}}\,dx$, $\int \frac{x^5}{(x^2+4)^4}\,dx$, $\int \frac{1}{(\sin x)^3}\,dx$, $\int(\sin x)^4\,dx$, $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}\,dx$, $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$, $\int \frac{1}{2+(\cos x)^2}\,dx$, $\int \frac{1}{1+\cos x}\,dx$.

7.3.2. Βρείτε με ολοκληρώσεις κατά παράγοντες και αλλαγές μεταβλητής τα $\int(x^2+3x)\sin x dx$, $\int x^3 e^{-x^2}dx$, $\int e^{\sqrt{x+1}}\,dx$, $\int x^2(\log x)^4\,dx$, $\int \arcsin x\,dx$, $\int \arctan\sqrt{x}\,dx$, $\int \log(x+\sqrt{1+x^2})\,dx$, $\int(\sin x)^4\,dx$, $\int \frac{x}{(\cos x)^2}\,dx$, $\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx$, $\int \frac{\arctan(e^x)}{e^x}\,dx$, $\int(\sin x)^3\sin(5x)\,dx$.

7.3.3. Βρείτε τα ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων $\int \frac{5x+3}{x^2+2x-1}\,dx$, $\int \frac{x+2}{x^2-4x+4}\,dx$, $\int \frac{3x^2+1}{x^3-1}\,dx$, $\int \frac{2x^2+5x-1}{x^3+x^2-2x}\,dx$, $\int \frac{x^2+1}{(x-1)^3}\,dx$, $\int \frac{1}{x^4-1}\,dx$, $\int \frac{1}{(x^2-4x+4)(x^2-x+1)}\,dx$, $\int \frac{1}{x^4+1}\,dx$, $\int \frac{8x^3+7}{x^4+2x^3-2x-1}\,dx$, $\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4}\,dx$, $\int \frac{1}{(x-1)^2(x+2)^3(x^2+1)^2}\,dx$, $\int \frac{1}{x^5+1}\,dx$, $\int \frac{1}{x^6+1}\,dx$, $\int \frac{1}{x^4+x^2+1}\,dx$.

7.3.4. Βρείτε τα ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων των $\sin x$, $\cos x$: $\int \frac{1}{(\sin x)^4}\,dx$, $\int \frac{1}{1+2\sin x}\,dx$, $\int \frac{1}{2+\cos x}\,dx$, $\int \frac{(\sin x)^2}{1+(\sin x)^2}\,dx$, $\int \frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}\,dx$.

7.3.5. Βρείτε τα $\int\sqrt{1-x^2}\,dx$, $\int\frac{1}{\sqrt{x^2-x-2}}\,dx$, $\int\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$, $\int\frac{1}{\sqrt{x^2-3x+2}}\,dx$, $\int\frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$, $\int\frac{1}{(x+1)\sqrt{1+2x-x^2}}\,dx$, $\int\frac{1}{5\sqrt{x-1}+3\sqrt{x+1}}\,dx$.

7.3.6. Σε σχέση με κάποια από τα όρια στην άσκηση 6.5.1, αποδείξτε ότι $\sum_{k=1}^n\frac{n}{n^2+k^2}\to\frac{\pi}{4}$, $\sum_{k=1}^n\frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}}\to\log(\sqrt{2}+1)$, $\sum_{k=1}^n\frac{1}{n^2}\sqrt{n^2-(k-1)^2}\to\frac{\pi}{4}$.

7.3.7. [α] Αν η $f(\sin x)$ είναι συνεχής στο $[0,\frac{\pi}{2}]$, αποδείξτε ότι και η $f(\cos x)$ είναι συνεχής στο $[0,\frac{\pi}{2}]$ και ότι $\int_0^{\pi/2}f(\sin x)\,dx=\int_0^{\pi/2}f(\cos x)\,dx$.
Εφαρμόστε, βρίσκοντας το $\int_0^{\pi/2}(\sin x)^2\,dx$.
[β] Αν η $f(\sin x,\cos x)$ είναι συνεχής στο $[0,\frac{\pi}{2}]$, αποδείξτε ότι και η $f(\cos x,\sin x)$ είναι συνεχής στο $[0,\frac{\pi}{2}]$ και ότι $\int_0^{\pi/2}f(\sin x,\cos x)\,dx=\int_0^{\pi/2}f(\cos x,\sin x)\,dx$.
Εφαρμόστε, βρίσκοντας το $\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\,dx$.

7.3.8. Βρείτε συνθήκες για τους a, b, c, A, B, C ώστε το $\int\frac{ax^2+2bx+c}{(Ax^2+2Bx+C)^2}\,dx$ να είναι ρητή συνάρτηση του x.

7.3.9. [α] Ορίζουμε $I_n(x)=\int x^ne^x\,dx$ για κάθε $n\in\mathbb{Z}$, $n\geq 0$. Αποδείξτε τον αναδρομικό τύπο $I_{n+1}(x)=x^{n+1}e^x-(n+1)I_n(x)$, βρείτε μέσω αυτού το $I_n(x)$ και ελέγξτε στην άσκηση 7.2.1.
[β] Όπως στο [α], βρείτε αναδρομικούς τύπους για καθένα από τα $\int x^n\sin x\,dx$, $\int x^n\cos x\,dx$, $\int x^m(\log x)^n\,dx$, $\int(\tan x)^n\,dx$, $\int x^n\sqrt{a^2-x^2}\,dx$, $\int\frac{1}{(a+b\cos x)^n}\,dx$, $\int\frac{x^n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$.

7.3.10. Ορίζουμε $J_n(x)=\int(\cos x)^n\,dx$ και $I_n(x)=\int(\sin x)^n\,dx$ για κάθε $n\in\mathbb{Z}$, $n\geq 0$. Αποδείξτε τους αναδρομικούς τύπους $J_{n+2}(x)=\frac{\sin x(\cos x)^{n+1}}{n+2}+\frac{n+1}{n+2}J_n(x)$ και $I_{n+2}(x)=-\frac{\cos x(\sin x)^{n+1}}{n+2}+\frac{n+1}{n+2}I_n(x)$ και βρείτε τα $J_n(x)$, $I_n(x)$.

7.3.11. [12] Ορίζουμε $I_n=\int_0^{\pi/2}(\sin x)^n\,dx$ για κάθε $n\in\mathbb{Z}$, $n\geq 0$.
Αποδείξτε τον αναδρομικό τύπο $I_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}I_n$.
Είναι προφανές ότι $I_0=\frac{\pi}{2}$ και $I_1=1$. Αποδείξτε ότι ισχύει $I_{2n}=\frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1}{2n(2n-2)\cdots 4\cdot 2}\frac{\pi}{2}$ και $I_{2n+1}=\frac{2n(2n-2)\cdots 4\cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 5\cdot 3}$ για κάθε $n\geq 1$.
Αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{\pi}{2}=\frac{(2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n))^2}{(3\cdot 5\cdots(2n-1))^2(2n+1)}\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}$ για κάθε $n\geq 1$ και $(n+1)I_nI_{n+1}=\frac{\pi}{2}$ για κάθε $n\geq 0$.
Αποδείξτε ότι ισχύει $I_{2n+1}\leq I_{2n}\leq I_{2n-1}=\frac{2n+1}{2n}I_{2n+1}$ και $1\leq\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}\leq 1+\frac{1}{2n}$ για κάθε $n\geq 1$ και, Επομένως, $\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}\to 1$.
Αποδείξτε τον **τύπο του Wallis**,

$$\frac{1}{2n+1}\Big(\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n-2)2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)(2n-1)}\Big)^2\to\frac{\pi}{2}.$$

Αποδείξτε ότι $\binom{2n}{n}\frac{\sqrt{n}}{4^n}=\frac{(2n)!}{(n!)^2}\frac{\sqrt{n}}{4^n}\to\frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

7.3.12. Αν ο $n\in\mathbb{N}$ είναι περιττός, αποδείξτε ότι $\int x^ne^{-x^2}\,dx=P_{n-1}(x)e^{-x^2}+c$, όπου $P_{n-1}(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού $n-1$.
Αν ο $n\in\mathbb{N}$ είναι άρτιος, αποδείξτε ότι $\int x^ne^{-x^2}\,dx=P_{n-1}(x)e^{-x^2}+\frac{n!}{2^{n-1}(n/2)!}\int e^{-x^2}\,dx$, όπου $P_{n-1}(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού $n-1$.

7.3.13. Αποδείξτε ότι $\int_0^1x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx=\frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}$ για κάθε $m,n\in\mathbb{N}$ μέσω κατάλληλων αναδρομικών τύπων.[13]

[12] Το αποτέλεσμα αυτής της άσκησης θα χρησιμοποιηθεί στην άσκηση 7.3.20 για να αποδειχθεί ο τύπος του Stirling.
[13] Το αποτέλεσμα αυτό θα γενικευτεί στην άσκηση 12.5.8.

7.3.14. Έστω $\kappa_{m,n} = \frac{(m-1)(m-3)\cdots(1\,\text{ή}\,2)\cdot(n-1)(n-3)\cdots(1\,\text{ή}\,2)}{(m+n)(m+n-2)\cdots(1\,\text{ή}\,2)}$ για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geq 2$. Ορίζουμε $A_{m,n} = \int_0^{\pi/2} (\cos x)^m (\sin x)^n \, dx$ για κάθε $m, n \in \mathbb{Z}$, $m, n \geq 0$.
Αφού βρείτε κατάλληλους αναδρομικούς τύπους, αποδείξτε ότι $A_{m,n} = \frac{\pi}{2} \kappa_{m,n}$, αν οι $m, n \geq 2$ είναι και οι δύο άρτιοι, και $A_{m,n} = \kappa_{m,n}$, αν ένας τουλάχιστον από τους $m, n \geq 2$ είναι περιττός.

7.3.15. Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0, \pi]$ και η f'' είναι συνεχής στο $[0, \pi]$, αποδείξτε ότι $\int_0^{\pi} \big(f(x) + \frac{1}{n^2} f''(x)\big) \sin(nx) \, dx = \frac{f(0) + (-1)^{n-1} f(\pi)}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

7.3.16. Αποδείξτε το **δεύτερο θεώρημα μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού**: [14] αν η $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι μονότονη και έχει συνεχή παράγωγο στο $[a, b]$ και η $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a, b]$, τότε υπάρχει $\xi \in [a, b]$ ώστε

$$\int_a^b f(x) g(x) \, dx = f(a) \int_a^{\xi} g(x) \, dx + f(b) \int_{\xi}^b g(x) \, dx.$$

Έστω ότι η ϕ έχει μονότονη παράγωγο και συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $[a, b]$ και ότι υπάρχει $m > 0$ ώστε να ισχύει $\phi'(x) \geq m$ για κάθε $x \in [a, b]$. Αποδείξτε ότι $\big| \int_a^b \sin(\phi(x)) \, dx \big| \leq \frac{4}{m}$.
Αποδείξτε ότι ισχύει $\big| \int_a^b \sin(x^2) \, dx \big| \leq \frac{2}{a}$ για κάθε a, b με $0 < a < b$.

7.3.17. Έστω $a < b$ και $Q_n(x) = (x - a)^n (x - b)^n$ για κάθε n.[15] Ορίζουμε τα πολυώνυμα $P_0(x) = 1$ και $P_n(x) = \frac{1}{n!(b-a)^n} {Q_n}^{(n)}(x)$ για κάθε n.
Αποδείξτε ότι το $P_n(x)$ έχει βαθμό n.
Αποδείξτε ότι $\int_a^b P(x) P_n(x) \, dx = 0$ για κάθε πολυώνυμο $P(x)$ βαθμού $< n$.
Αποδείξτε ότι $\int_a^b P_n(x) P_m(x) \, dx = 0$, αν $m \neq n$, και $\int_a^b (P_n(x))^2 \, dx = \frac{b-a}{2n+1}$.
Αποδείξτε ότι για κάθε πολυώνυμο $P(x)$ βαθμού n υπάρχουν $c_0, \ldots, c_n$ ώστε να ισχύει $P(x) = \sum_{k=0}^n c_k P_k(x)$ για κάθε x και, κατόπιν, αποδείξτε ότι οι $c_0, \ldots, c_n$ δίνονται από τον τύπο $c_k = \frac{2k+1}{b-a} \int_a^b P(x) P_k(x) \, dx$.
Έστω $P(x)$ πολυώνυμο βαθμού n με την ιδιότητα: $\int_a^b Q(x) P(x) \, dx = 0$ για κάθε πολυώνυμο $Q(x)$ βαθμού $< n$. Αποδείξτε ότι υπάρχει αριθμός c ώστε να ισχύει $P(x) = c P_n(x)$ για κάθε x.

7.3.18. Έστω f με συνεχή παράγωγο στο $[a, b]$ ώστε $f(a) = f(b) = 0$ και $\int_a^b (f(x))^2 \, dx = 1$. Αποδείξτε ότι $\int_a^b x f(x) f'(x) \, dx = -\frac{1}{2}$ και την ανισότητα[16]

$$\int_a^b x^2 (f(x))^2 \, dx \int_a^b (f'(x))^2 \, dx > \frac{1}{4}.$$

7.3.19. Αποδείξτε ότι $\int_1^n \log x \, dx \leq \sum_{k=2}^n \log k \leq \int_2^n \log x \, dx + \log n$ για κάθε $n \geq 2$.
[17] Αποδείξτε ότι $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \to \frac{1}{e}$.

7.3.20. [18] [α] Έστω $m, n \in \mathbb{Z}$ με $m \leq n$ και αριθμοί $a_m, \ldots, a_n$. Ορίζουμε την τμηματικά σταθερή συνάρτηση $A : [m, n] \to \mathbb{R}$ με τύπο $A(x) = \sum_{k=m}^{[x]} a_k$ για κάθε $x \in [m, n]$. Κατανοήστε το γράφημα της A. Ποιά είναι τα σημεία ασυνέχειας της A και ποιά είναι τα αντίστοιχα άλματά της;
Έστω $f : [m, n] \to \mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο στο $[m, n]$. Αποδείξτε ότι για κάθε $x \in [m, n]$ ισχύει

$$\sum_{k=m}^{[x]} a_k f(k) = A(x) f(x) - \int_m^x A(t) f'(t) \, dt.$$

[β] Είτε κατευθείαν είτε εφαρμόζοντας το [α] με $m = 1$, $a_k = 1$ για κάθε k και $f(x) = \frac{1}{x^p}$, αποδείξτε ότι ισχύει $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^p} = \frac{1}{n^{p-1}} + p \int_1^n \frac{[x]}{x^{p+1}} \, dx$ για κάθε n και κάθε p.

---

[14] Για το ίδιο αποτέλεσμα αλλά με τις ασθενέστερες δυνατές υποθέσεις δείτε την άσκηση 7.3.27.
[15] Τα πολυώνυμα αυτά εμφανίζονται και στην άσκηση 5.5.15.
[16] Η ανισότητα αυτή περιέχει το βασικό μαθηματικό περιεχόμενο της **Αρχής της Αβεβαιότητας του Heisenberg**.
[17] Αυτό το όριο το είχαμε δει στην άσκηση 2.4.4.
[18] Το θέμα αυτής της σημαντικής άσκησης είναι ο **χειρισμός αθροισμάτων με τη βοήθεια ολοκληρωμάτων**. Αυτό το ζήτημα προέκυψε και στην άσκηση 6.4.11 και θα το ξαναδούμε, πιο επίσημα, στην υποενότητα 8.2.1.

[γ] Αν $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^p}$ για κάθε n, αποδείξτε, βάσει του [β], ότι η αύξουσα ακολουθία (x_n) συγκλίνει, αν $p > 1$, και αποκλίνει στο $+\infty$, αν $p \leq 1$.

[δ] Βάσει του [β], αποδείξτε ότι ισχύει $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^p} = \frac{n^{1-p}}{1-p} - \frac{p}{1-p} - p \int_1^n \frac{x-[x]}{x^{p+1}}\, dx$, για κάθε n και κάθε $p \neq 1$.

Αν $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^p} - \frac{n^{1-p}}{1-p}$ για κάθε n και αν $0 < p < 1$, αποδείξτε ότι η ακολουθία (x_n) είναι φθίνουσα και συγκλίνει.

[ε] Βάσει του [β], αποδείξτε ότι ισχύει $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \log n + 1 - \int_1^n \frac{x-[x]}{x^2}\, dx$ για κάθε n.

Αν $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n$ για κάθε n, αποδείξτε ότι η ακολουθία (x_n) είναι φθίνουσα και συγκλίνει.[19]

[στ] Έστω $m, n \in \mathbb{Z}$ με $m \leq n$ και $f : [m, n] \to \mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο στο $[m, n]$. Είτε κατευθείαν είτε βάσει του [α], αποδείξτε τον **τύπο άθροισης του Euler**,[20]

$$\sum_{k=m}^n f(k) = \int_m^n f(x)\, dx + \int_m^n f'(x)(x - [x] - \tfrac{1}{2})\, dx + \tfrac{f(m)+f(n)}{2}.$$

[ζ] Έστω $m, n \in \mathbb{Z}$ με $m \leq n$ και $f : [m, n] \to \mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $[m, n]$. Θεωρούμε την $\phi(x) = \int_m^x (t - [t] - \frac{1}{2})\, dt$ για κάθε $x \in [m, n]$. Αποδείξτε, βάσει του [στ], ότι

$$\sum_{k=m}^n f(k) = \int_m^n f(x)\, dx - \int_m^n f''(x)\phi(x)\, dx + \tfrac{f(m)+f(n)}{2}.$$

[η] Έστω $\phi(x) = \int_1^x (t - [t] - \frac{1}{2})\, dt$ για κάθε $x \in [1, +\infty)$. Εφαρμόζοντας το [ζ] με $m = 1$ και με την $f(x) = \log x$, αποδείξτε ότι ισχύει $\log(n!) = (n + \frac{1}{2}) \log n - n + 1 + \int_1^n \frac{\phi(x)}{x^2}\, dx$ για κάθε n.

[θ] Δείτε στην άσκηση 6.4.10 κάποιες απλές ιδιότητες της $\phi(x)$ στα [ζ],[η].

Αν $x_n = \frac{n!}{e^{-n} n^{n+(1/2)}}$ για κάθε n, αποδείξτε, βάσει του [η], ότι η ακολουθία (x_n) συγκλίνει σε κάποιον θετικό αριθμό.[21]

Αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{{x_n}^2}{x_{2n}} = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n-2)(2n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)(2n-1)} \left(\frac{2}{n}\right)^{1/2}$ για κάθε n και, βάσει του τύπου του Wallis στην άσκηση 7.3.11, αποδείξτε ότι $\frac{{x_n}^2}{x_{2n}} \to \sqrt{2\pi}$.

Τέλος, αποδείξτε τον πολύ σημαντικό **τύπο του Stirling**,[22]

$$\frac{n!}{\sqrt{2\pi}\, e^{-n} n^{n+(1/2)}} \to 1.$$

7.3.21. [α] Έστω $n \in \mathbb{N}$ και η συνάρτηση $P_n(x) = \frac{1}{n!} x^n (1 - x)^n$.

Αποδείξτε ότι ισχύει $0 \leq P_n(x) \leq \frac{1}{4^n n!}$ για κάθε $x \in [0, 1]$.

Αποδείξτε ότι, για κάθε k, οι ${P_n}^{(k)}(0)$ και ${P_n}^{(k)}(1)$ είναι ακέραιοι.

[β] Υποθέστε ότι ο π είναι ρητός, δηλαδή $\pi = \frac{m}{l}$ με $m, l \in \mathbb{N}$.

Θεωρήστε τη συνάρτηση $Q_n(x) = l^{2n} \sum_{k=0}^n (-1)^k {P_n}^{(2k)}(x) \pi^{2n-2k}$.

Αποδείξτε ότι οι $Q_n(0)$ και $Q_n(1)$ είναι ακέραιοι.

Αποδείξτε ότι ισχύει $\pi^2 m^{2n} P_n(x) \sin(\pi x) = \frac{d}{dx}\big({Q_n}'(x) \sin(\pi x) - \pi Q_n(x) \cos(\pi x)\big)$ για κάθε x.

Αποδείξτε ότι $Q_n(1) + Q_n(0) = \pi m^{2n} \int_0^1 P_n(x) \sin(\pi x)\, dx$.

Αποδείξτε ότι, αν ο n είναι κατάλληλα μεγάλος, τότε $0 < Q_n(0) + Q_n(1) < 1$ και καταλήξτε σε αντίφαση. Συμπεράνατε ότι ο π είναι άρρητος.

7.3.22. [23] [α] Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b]$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{\lambda\to\pm\infty} \int_a^b f(x) \cos(\lambda x)\, dx = 0, \qquad \lim_{\lambda\to\pm\infty} \int_a^b f(x) \sin(\lambda x)\, dx = 0.$$

---

[19] Το όριο αυτό είναι η **σταθερά του Euler** και το ξαναείδαμε στις ασκήσεις 2.4.6 και 6.4.11[δ].

[20] Με σημαντικές εφαρμογές στην Αναλυτική Θεωρία Αριθμών.

[21] Σε λίγο θα υπολογίσουμε ακριβώς αυτό το όριο.

[22] Σύμφωνα με τον ορισμό 5.18, ο τύπος του Stirling λέει ότι το $n!$ είναι ασυμπτωτικά ίσο με την παράσταση $\sqrt{2\pi} e^{-n} n^{n+(1/2)}$ στο $+\infty$ ή, ισοδύναμα, $n! \sim \sqrt{2\pi}\, e^{-n} n^{n+(1/2)}$ στο $+\infty$.

[23] Τα όρια που αποδεικνύονται σ' αυτήν την άσκηση συγκροτούν το **λήμμα των Riemann - Lebesgue**. Βάσει των γνωστών τύπων $e^{\pm it} = \cos t \pm i \sin t$ και $\cos t = \frac{1}{2} e^{it} + \frac{1}{2} e^{-it}$ και $\sin t = \frac{1}{2i} e^{it} - \frac{1}{2i} e^{-it}$ του Euler, εύκολα φαίνεται ότι τα όρια στο [α] είναι ισοδύναμα με τα όρια $\lim_{\lambda\to\pm\infty} \int_a^b f(x) e^{i\lambda x}\, dx = 0$.

[β] Αποδείξτε ότι τα όρια στο [α] ισχύουν για κάθε $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ τμηματικά σταθερή στο $[a,b]$.
[γ] Δείτε την άσκηση 6.4.26 και αποδείξτε με δύο τρόπους ότι τα όρια στο [α] ισχύουν για κάθε $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.

7.3.23. [α] Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ ώστε η f' να είναι συνεχής στο $[a,b]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $M\geq 0$ ώστε

$$\left|\int_a^b f(x)\cos(\lambda x)\,dx\right|\leq M\min\{1,1/|\lambda|\},\qquad \left|\int_a^b f(x)\sin(\lambda x)\,dx\right|\leq M\min\{1,1/|\lambda|\}.$$

Αυτές οι εκτιμήσεις ισχύουν ακόμη και αν η f' είναι απλώς ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.[24]
Αν, επιπλέον, είναι και $f(a)=f(b)=0$, αποδείξτε ότι

$$\lim_{\lambda\to\pm\infty}\lambda\int_a^b f(x)\cos(\lambda x)\,dx=0,\qquad \lim_{\lambda\to\pm\infty}\lambda\int_a^b f(x)\sin(\lambda x)\,dx=0.$$

Και πάλι, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η f' είναι απλώς ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.
[β] Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ η οποία είναι m φορές παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ ώστε η $f^{(m)}$ να είναι συνεχής ή και απλώς ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $M\geq 0$ ώστε

$$\left|\int_a^b f(x)\cos(\lambda x)\,dx\right|\leq M\min\{1,1/|\lambda|^m\},\qquad \left|\int_a^b f(x)\sin(\lambda x)\,dx\right|\leq M\min\{1,1/|\lambda|^m\}.$$

Αν, επιπλέον, ισχύει $f^{(k)}(a)=f^{(k)}(b)=0$ για κάθε $k=0,1,\ldots,m-1$, αποδείξτε ότι

$$\lim_{\lambda\to\pm\infty}\lambda^m\int_a^b f(x)\cos(\lambda x)\,dx=0,\qquad \lim_{\lambda\to\pm\infty}\lambda^m\int_a^b f(x)\sin(\lambda x)\,dx=0.$$

7.3.24. [α] Έστω $f:[-a,a]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[-a,a]$ και συνεχής στον 0 και $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $\phi(x)\geq 0$ για κάθε x, η ϕ να είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο διάστημα και ώστε $\lim_{\mu\to+\infty}\int_{-\mu}^{\mu}\phi(x)\,dx=1$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{\lambda\to 0+}\frac{1}{\lambda}\int_{-a}^{a}\phi\left(\frac{x}{\lambda}\right)f(x)\,dx=f(0).$$

[β][25] Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και συνεχής στον $\xi\in(a,b)$ και $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $\phi(x)\geq 0$ για κάθε x, η ϕ να είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο διάστημα και ώστε $\lim_{\mu\to+\infty}\int_{-\mu}^{\mu}\phi(x)\,dx=1$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{\lambda\to 0+}\frac{1}{\lambda}\int_a^b\phi\left(\frac{x-\xi}{\lambda}\right)f(x)\,dx=f(\xi).$$

[γ] Εφαρμόστε το [β], με τις ίδιες υποθέσεις όσον αφορά στη συνάρτηση f, και αποδείξτε ότι

$$\lim_{\lambda\to 0+}\frac{1}{\pi}\int_a^b\frac{\lambda}{(x-\xi)^2+\lambda^2}f(x)\,dx=f(\xi)\qquad \lim_{\lambda\to 0+}\frac{1}{2\lambda}\int_a^b e^{-|x-\xi|/\lambda}f(x)\,dx=f(\xi)$$
$$\lim_{\lambda\to 0+}\frac{1}{\sqrt{\pi}\,\lambda}\int_a^b e^{-(x-\xi)^2/\lambda^2}f(x)\,dx=f(\xi)$$

Για το τελευταίο όριο θα χρειαστείτε το όριο $\lim_{\mu\to+\infty}\int_{-\mu}^{\mu}e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi}$, το οποίο θα αποδειχθεί στο παράδειγμα 12.4.1.
[δ][26] Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και έστω ότι για κάποιον $\xi\in(a,b)$ υπάρχουν τα πλευρικά όρια $f(\xi+)=\lim_{x\to\xi+}f(x)$ και $f(\xi-)=\lim_{x\to\xi-}f(x)$. Έστω $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $\phi(x)\geq 0$ για κάθε x, η ϕ να είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο διάστημα και ώστε $\lim_{\mu\to+\infty}\int_0^{\mu}\phi(x)\,dx=a_+$ και $\lim_{\mu\to+\infty}\int_{-\mu}^{0}\phi(x)\,dx=a_-$, όπου $a_-+a_+=1$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{\lambda\to 0+}\frac{1}{\lambda}\int_a^b\phi\left(\frac{x-\xi}{\lambda}\right)f(x)\,dx=a_-f(\xi-)+a_+f(\xi+).$$

[24] Δείτε την άσκηση 7.3.25.
[25] Επέκταση του [α].
[26] Επέκταση του [β].

7.3.25. [27] Έστω διάστημα I και $f, g : I \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες στο I ώστε οι $f', g' : I \to \mathbb{R}$ να είναι ολοκληρώσιμες σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I. Αποδείξτε ότι

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx \qquad \text{για κάθε } \ a, b \in I.$$

7.3.26. [α] Έστω $v, w : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$ και $f(x) = \int_a^x v(t)\,dt$, $g(x) = \int_a^x w(t)\,dt$ για κάθε $x \in [a, b]$. Αποδείξτε ότι $\int_a^b (v(x)g(x) + f(x)w(x))\,dx = f(b)g(b)$.
[β][28] Έστω διάστημα I και $v, w : I \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I και $f, g : I \to \mathbb{R}$ δύο αόριστα ολοκληρώματα των v, w, αντιστοίχως, στο I. Αποδείξτε ότι

$$\int_a^b (v(x)g(x) + f(x)w(x))\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) \qquad \text{για κάθε } \ a, b \in I.$$

7.3.27. [α][29] Έστω $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ με $b_1 \geq \cdots \geq b_n \geq 0$. Αν $s_k = a_1 + \cdots + a_k$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$, αποδείξτε ότι

$$b_1 \min\{s_k \,|\, 1 \leq k \leq n\} \leq b_1 a_1 + \cdots + b_n a_n \leq b_1 \max\{s_k \,|\, 1 \leq k \leq n\}.$$

[β][30] Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ μονότονη στο $[a, b]$ και $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [a, b]$ ώστε

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)\int_a^\xi g(x)\,dx + f(b)\int_\xi^b g(x)\,dx.$$

7.3.28. Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις g που εμφανίζονται στις ασκήσεις 4.5.9, 4.5.10 και 4.5.11 είναι αλγεβρικές.

7.3.29. Αποδείξτε ότι η e^x, η $\log x$, η x^a με άρρητο a και οι τριγωνομετρικές και οι αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις είναι υπερβατικές συναρτήσεις σε κάθε ανοικτό διάστημα.

7.3.30. Δείτε την άσκηση 6.5.6 για τους τύπους υπολογισμού μήκους καμπύλης.
Υπολογίστε το μήκος οποιουδήποτε τόξου της παραβολής $y = ax^2$.
Υπολογίστε το μήκος οποιουδήποτε τόξου της κατενοειδούς $y = \cosh x$.
Υπολογίστε το μήκος οποιουδήποτε τόξου του κύκλου $x^2 + y^2 = 1$.
Γράψτε το μήκος οποιουδήποτε τόξου της έλλειψης $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ως ελλειπτικό ολοκλήρωμα.
Γράψτε το μήκος οποιουδήποτε τόξου της υπερβολής $y = \frac{a}{x}$ ως ελλειπτικό ολοκλήρωμα.

7.4 Ο τύπος του Taylor, II.

Τώρα θα δούμε μία ακόμη παραλλαγή του τύπου του Taylor. Η άλλη παραλλαγή περιγράφτηκε στο θεώρημα 5.1. Τώρα θα δούμε τον τύπο του Taylor με *ολοκληρωτικό υπόλοιπο*.

ΘΕΩΡΗΜΑ 7.1. *Έστω $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$, $f : [\xi, c] \to \mathbb{R}$ η οποία είναι $n+1$ φορές παραγωγίσιμη στο $[\xi, c]$ ώστε η $f^{(n+1)}$ να είναι συνεχής στο $[\xi, c]$. Τότε, για κάθε $x \in (\xi, c]$ είναι*

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}(x - \xi)^k + \frac{1}{n!}\int_\xi^x f^{(n+1)}(t)(x - t)^n\,dt.$$

Η ίδια ισότητα ισχύει και όταν $c < \xi$, αρκεί όλες οι υποθέσεις να ισχύουν στο διάστημα $[c, \xi]$.

[27] Ο τύπος ολοκλήρωσης κατά παράγοντες στην πρόταση 7.8 με τις ασθενέστερες δυνατές υποθέσεις.
[28] Γενίκευση του τύπου ολοκλήρωσης κατά παράγοντες στην πρόταση 7.8 αλλά και στην άσκηση 7.3.25.
[29] Μια χρήσιμη διπλή ανισότητα για “αθροίσματα με όρους οι οποίοι ταλαντώνονται και των οποίων το πλάτος φθίνει”. Μια ίδιου τύπου ανισότητα θα δούμε αργότερα στα σημαντικά κριτήρια Diriclet και Abel για σειρές και για γενικευμένα ολοκληρώματα.
[30] Το δεύτερο θεώρημα μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού στην άσκηση 7.3.16 με τις ασθενέστερες δυνατές υποθέσεις.

Απόδειξη. Ορίζουμε την $g : [\xi, x] \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$g(t) = \sum_{k=0}^{n} \tfrac{1}{k!} f^{(k)}(t)(x-t)^k$$

για κάθε $t \in [\xi, x]$. Ισχύει

$$g'(t) = \tfrac{1}{n!} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n$$

για κάθε $t \in [\xi, x]$, οπότε η g' είναι συνεχής στο $[\xi, x]$. Τότε

$$\tfrac{1}{n!} \int_\xi^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \, dt = \int_\xi^x g'(t) \, dt = g(x) - g(\xi) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \tfrac{1}{k!} f^{(k)}(\xi)(x-\xi)^k \, .$$

Άρα $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}(x-\xi)^k + \frac{1}{n!} \int_\xi^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \, dt$. □

ΟΡΙΣΜΟΣ 7.7. *Η ισότητα στο θεώρημα 7.1 ονομάζεται* **τύπος του Taylor** *για την f στον ξ* **με ολοκληρωτικό υπόλοιπο** *και γράφεται*

$$f(x) = P_{n,\xi}(x) + R_{n,\xi}(x),$$

όπου $P_{n,\xi}$ είναι το πολυώνυμο Taylor τάξης n της f στον ξ και το

$$R_{n,\xi}(x) = \tfrac{1}{n!} \int_\xi^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \, dt$$

ονομάζεται **ολοκληρωτικό υπόλοιπο** *τάξης n.*

Παράδειγμα 7.4.1. Αν P είναι πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού $\leq n$, τότε ισχύει $P^{(n+1)}(t) = 0$ για κάθε t, οπότε καταλήγουμε στον γνωστό τύπο $P(x) = P_{n,\xi}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\xi)}{k!}(x-\xi)^k$ για κάθε ξ, x.

Ασκήσεις.

7.4.1. Αποδείξτε ότι, αν η $f^{(n+1)}$ είναι συνεχής στο $[\xi, c]$, το αποτέλεσμα του θεωρήματος 7.1 συνεπάγεται τα αποτελέσματα του θεωρήματος 5.1.

Βασική βιβλιογραφία.

Bartle, R. & Sherbert, D. (2011) *Introduction to Real Analysis, Ch 7.* Wiley.
Beals, R. (2004) *Analysis, an Introduction, Ch 8.* Cambridge Univ. Press.
Beardon, A. (1997) *Limits: a New Approach to Real Analysis, Ch 10.* Springer.
Berberian, S. (1994) *A First Course in Real Analysis, Ch 9.* Springer.
Brand, L. (2006) *Advanced Calculus, Ch 6.* Dover.
Courant, R. (1988) *Differential and Integral Calculus, Vol I, Ch II-VII.* Wiley.
Courant, R. & John, F. (1989) *Introduction to Calculus and Analysis, Vol I, Ch 2-6.* Springer.
Davidson, K. & Donsig, A. (2010) *Real Analysis and Applications, Ch 6.* Springer.
Ghorpade, S. & Limaye, B. (2006) *A Course in Calculus and Real Analysis, Ch 6-7.* Springer.
Goffman, C. (1966) *Introduction to Real Analysis, Ch 8.* Harper and Row.
Goldberg, R. (1976) *Methods of Real Analysis, Ch 7-8.* Wiley.
Goursat, E. (2006) *A Course in Mathematical Analysis, Vol I, Ch IV-V.* Dover.
Grauert, H. & Lieb, I. (1967) *Differential- und Integralrechnung, Band I, Kap VII.* Springer.
Graves, L. (2009) *The Theory of Functions of Real Variables, Ch VI.* Dover.
Hardy, G. (2008) *A Course of Pure Mathematics, Ch VI.* Cambridge Univ. Press.
Krantz, S. (2013) *Real Analysis and Foundations, Ch 8.* Chapman and Hall.
Landau, E. (2001) *Differential and Integral Calculus, Ch 21-24.* American Math. Society & Chelsea.
Lang, S. (1997) *Undergraduate Analysis, Ch V, X.* Springer.
Nikolsky, S. (1977) *A Course of Mathematical Analysis, Vol 1, Ch 8.* Mir Publishers.
Protter, M. (1998) *Basic Elements of Real Analysis, Ch 5.* Springer.
Pugh, C. (2015) *Real Mathematical Analysis, Ch 3.* Springer.
Rosenlicht, M. (1986) *Introduction to Analysis, Ch VI.* Dover.
Ross, K. (2013) *Elementary Analysis, Ch 6.* Springer.
Smirnov, V. (1964) *A Course of Higher Mathematics, Vol 1, Ch III, VI.* Pergammon Press.
Spivak, M. (1994) *Calculus, Ch 14-21.* Cambridge Univ. Press.
Stoll, M. (2000) *Introduction to Real Analysis, Ch 6.* Pearson.

Συμπληρωματική βιβλιογραφία.

Apostol, T. (1974) *Mathematical Analysis, Ch 6-7.* Addison-Wesley.
Hardy, G. (1966) *The Integration of Functions of a Single Variable.* Cambridge Univ. Press.
Rudin, W. (1976) *Principles of Mathematical Analysis, Ch 6.* McGraw-Hill.

Κεφάλαιο 8

Σειρές αριθμών.

8.1 Ορισμοί και βασικές ιδιότητες.

ΟΡΙΣΜΟΣ 8.1. *Θεωρούμε οποιαδήποτε ακολουθία* (x_n). *Το σύμβολο*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n \qquad \text{ή} \qquad x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \cdots .$$

ονομάζεται **σειρά** *και η τιμή του, αν αυτή υπάρχει, ονομάζεται* **άθροισμα** *της σειράς* $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ *και (αυτή η τιμή) καθορίζεται με την παρακάτω διαδικασία.*
Σχηματίζουμε τα διαδοχικά αθροίσματα $s_1 = x_1$, $s_2 = x_1 + x_2$, $s_3 = x_1 + x_2 + x_3$ *και, γενικότερα,*

$$s_n = x_1 + \cdots + x_n \qquad \text{για κάθε } n.$$

Ο s_n *ονομάζεται* n*-οστό* **μερικό άθροισμα** *της σειράς* $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ *και η ακολουθία* (s_n) *ονομάζεται* **ακολουθία των μερικών αθροισμάτων** *της σειράς.*
Αν η ακολουθία (s_n) *έχει όριο, δηλαδή αν* $s_n \to s \in \overline{\mathbb{R}}$, *τότε λέμε ότι η σειρά* $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ **έχει άθροισμα** *και ως άθροισμα της σειράς θεωρούμε το όριο* s *και γράφουμε*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = s \qquad \text{ή} \qquad x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \cdots = s.$$

Ειδικώτερα, αν $s \in \mathbb{R}$, *λέμε ότι η σειρά* **συγκλίνει** *στον* s *και, αν* $s = +\infty$ *ή* $s = -\infty$, *λέμε ότι η σειρά* **αποκλίνει** *στο* $+\infty$ *ή* $-\infty$, *αντιστοίχως.*
Αν η ακολουθία (s_n) *δεν έχει όριο, τότε λέμε ότι η σειρά* $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ **αποκλίνει** *και ότι* **δεν έχει άθροισμα**.
Ο x_n *ονομάζεται* n*-οστός* **όρος** *ή* **προσθετέος** *της σειράς* $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.

Επισημαίνουμε ότι, αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει ή αποκλίνει στο $\pm\infty$, τότε η σειρά έχει άθροισμα και αυτό είναι αριθμός ή $\pm\infty$, αντιστοίχως. Αν η σειρά αποκλίνει, αλλά όχι στα $\pm\infty$, τότε η σειρά δεν έχει άθροισμα. Προσέξτε: το σύμβολο $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ της σειράς των x_n έχει διπλό περιεχόμενο. Αφ' ενός, είναι ένα σκέτο σύμβολο, ανεξάρτητα από το αν η σειρά έχει άθροισμα ή όχι. Αφ' ετέρου, στην περίπτωση που η σειρά έχει άθροισμα, συμβολίζει και το άθροισμα της σειράς.

Το σύμβολο του δείκτη δεν παίζει ιδιαίτερο ρόλο: με $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$, $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$, $\sum_{j=1}^{+\infty} x_j$ συμβολίζουμε την ίδια σειρά.

Παράδειγμα 8.1.1. Θεωρούμε τη σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} 1$ ή $1+1+1+\cdots+1+\cdots$. Τα μερικά αθροίσματά της είναι οι $s_1 = 1$, $s_2 = 1+1 = 2$, $s_3 = 1+1+1 = 3$ και, γενικότερα, $s_n = 1 + \cdots + 1 = n$ για κάθε n. Επειδή $s_n = n \to +\infty$, η σειρά αποκλίνει στο $+\infty$ και το άθροισμά της είναι

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 1 = +\infty.$$

Παράδειγμα 8.1.2. Η απλούστερη σειρά είναι η $\sum_{n=1}^{+\infty} 0$ ή $0+0+0+\cdots+0+\cdots$. Η σειρά αυτή ονομάζεται **μηδενική σειρά**. Τα μερικά αθροίσματά της είναι οι $s_1 = 0$, $s_2 = 0+0 = 0$, $s_3 = 0+0+0 = 0$ και, γενικότερα, $s_n = 0+\cdots+0 = 0$ για κάθε n. Επειδή $s_n = 0 \to 0$, η μηδενική σειρά συγκλίνει στον 0 και το άθροισμά της είναι

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0.$$

Παράδειγμα 8.1.3. Η **γεωμετρική σειρά** με λόγο a είναι η $\sum_{n=1}^{+\infty} a^{n-1}$ ή $1+a+a^2+\cdots+a^{n-1}+\cdots$. Η σειρά αυτή έχει μερικά αθροίσματα $s_1 = 1$, $s_2 = 1+a$, $s_3 = 1+a+a^2$ και, γενικότερα, $s_n = 1+a+\cdots+a^{n-1}$ για κάθε n.

Παρατηρήστε ότι ο πρώτος προσθετέος της γεωμετρικής σειράς είναι ο a^0 και ότι τόν θεωρήσαμε ίσο με 1. Αυτό είναι προφανώς σωστό αν $a \neq 0$, αλλά όχι αν $a = 0$, διότι δεν ορίζεται το σύμβολο 0^0. Υπάρχει, όμως, μια παραδοσιακή σύμβαση να θεωρείται ότι $a^0 = 1$ για κάθε a, ακόμη και για $a = 0$, στην περίπτωση που εμφανίζεται το σύμβολο a^0 ως όρος στο σύμβολο $\sum$, το οποίο χρησιμοποιούμε για να δηλώσουμε πεπερασμένο άθροισμα ή σειρά. Για παράδειγμα, ένα πολυώνυμο $a_0+a_1x+\cdots+a_Nx^N$ μπορούμε να το συμβολίσουμε $\sum_{n=0}^{N} a_nx^n$, υπονοώντας ότι $x^0 = 1$ για κάθε x, ακόμη και για $x = 0$.

Από το παράδειγμα 2.3.20 γνωρίζουμε πότε υπάρχει το άθροισμα της γεωμετρικής σειράς, δηλαδή το όριο της ακολουθίας $(1+a+\cdots+a^{n-1})$, και, αν υπάρχει, την τιμή του. Επομένως, για το άθροισμα της γεωμετρικής σειράς έχουμε ότι:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a^{n-1} \begin{cases} = +\infty, & \text{αν } a \geq 1 \\ = 1/(1-a), & \text{αν } -1 < a < 1 \\ \text{δεν υπάρχει}, & \text{αν } a \leq -1 \end{cases}$$

Ειδική περίπτωση είναι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}$ ή $1+(-1)+1+(-1)+1+(-1)+\cdots$. Η σειρά αυτή δεν έχει άθροισμα.

Παράδειγμα 8.1.4. Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ ή $1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$ με μερικά αθροίσματα $s_n = 1+\frac{1}{2^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}$ για κάθε n.

Στην περίπτωση $p = 1$ προκύπτει η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$, η οποία ονομάζεται **αρμονική σειρά**. Η σειρά αυτή έχει μερικά αθροίσματα $s_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ για κάθε n και είδαμε στο παράδειγμα 2.4.4[1] ότι $s_n \to +\infty$. Άρα

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Επίσης, στην περίπτωση $p = 2$ προκύπτει η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ με μερικά αθροίσματα $s_n = 1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$ για κάθε n. Στα παραδείγματα 2.4.5 και 2.6.1 είδαμε ότι η ακολουθία (s_n) συγκλίνει, οπότε η σειρά αυτή συγκλίνει και έχει άθροισμα το οποίο είναι αριθμός. Δηλαδή,

$$\text{Η σειρά } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \text{ συγκλίνει.}$$

Λίγο αργότερα θα μελετήσουμε τη σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ στη γενική περίπτωση.[2]

Παράδειγμα 8.1.5. Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ έχει μερικά αθροίσματα $s_n = \frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$ για κάθε n. Γνωρίζουμε από τα παραδείγματα 2.4.2 και 2.4.3 ότι $s_n \to e-1$, οπότε η σειρά συγκλίνει στον αριθμό $e-1$ και, επομένως,

$$1+\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e.$$

Παράδειγμα 8.1.6. Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ έχει μερικά αθροίσματα $s_n = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ για κάθε n. Είδαμε στο παράδειγμα 2.5.7[3] ότι η ακολουθία (s_n) συγκλίνει. Άρα η σειρά αυτή συγκλίνει και έχει άθροισμα το οποίο είναι αριθμός. Δηλαδή,

$$\text{Η σειρά } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \text{ συγκλίνει.}$$

[1] και στις ασκήσεις 2.5.4 και 2.6.2. Δείτε και τις υποσημειώσεις αυτών των ασκήσεων.

[2] Πάντως, η σειρά αυτή έχει μελετηθεί και στις ασκήσεις 6.4.11 και 7.3.20.

[3] και στην άσκηση 2.6.3. Μάλιστα, στην άσκηση 6.4.11 βρήκαμε και την τιμή του αθροίσματος της σειράς αυτής. Θα τήν ξαναβρούμε στο παράδειγμα 10.2.12.

ΠΡΟΤΑΣΗ 8.1. *Αν η σειρά* $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ *συγκλίνει, τότε* $x_n \to 0$.

Απόδειξη. Θεωρούμε τα μερικά αθροίσματα $s_n = x_1 + \cdots + x_n$.
Αν $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = s \in \mathbb{R}$, τότε $s_n \to s$. Επειδή ισχύει $x_n = s_n - s_{n-1}$ για κάθε n με $n \geq 2$, συνεπάγεται $x_n \to s - s = 0$. □

Παράδειγμα 8.1.7. Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+1}$ αποκλίνει διότι $\frac{n}{n+1} \to 1 \neq 0$.

Παράδειγμα 8.1.8. Η αρμονική σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ δεν συγκλίνει. Όμως, $\frac{1}{n} \to 0$.
Το παράδειγμα αυτό δείχνει ότι *δεν ισχύει το αντίστροφο της πρότασης 8.1*.

Πάντως, όταν θέλουμε να δούμε αν συγκλίνει μια σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ το πρώτο πράγμα που κάνουμε είναι να ελέγξουμε αν $x_n \to 0$. Αν αυτό δεν ισχύει, τότε η σειρά δεν συγκλίνει. Αν αυτό ισχύει, τότε συνεχίζουμε την προσπάθειά μας.

ΠΡΟΤΑΣΗ 8.2. *Έστω ότι οι ακολουθίες* (x_n) *και* (y_n) *ταυτίζονται από κάποιους όρους τους και πέρα. Τότε η σειρά* $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ *συγκλίνει ή αποκλίνει στο* $\pm\infty$ *αν και μόνο αν η σειρά* $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$, *αντιστοίχως, συγκλίνει ή αποκλίνει στο* $\pm\infty$.

Απόδειξη. Έστω ότι υπάρχουν k_0, m_0 ώστε να ισχύει $x_{k_0+l} = y_{m_0+l}$ για κάθε l.
Θεωρούμε τα μερικά αθροίσματα $s_n = x_1 + \cdots + x_n$ και $t_n = y_1 + \cdots + y_n$.
Για κάθε l ισχύει

$$s_{k_0+l} - s_{k_0} = x_{k_0+1} + \cdots + x_{k_0+l} = y_{m_0+1} + \cdots + y_{m_0+l} = t_{m_0+l} - t_{m_0}.$$

Άρα οι ακολουθίες $(s_n - s_{k_0})$ και $(t_n - t_{m_0})$ ταυτίζονται από κάποιους όρους τους και πέρα.
Έστω

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = s \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Τότε $s_n \to s$, οπότε $s_n - s_{k_0} \to s - s_{k_0}$. Άρα $t_n - t_{m_0} \to s - s_{k_0}$ και, επομένως, $t_n \to s - s_{k_0} + t_{m_0}$.
Άρα

$$\sum_{n=1}^{+\infty} y_n = s - s_{k_0} + t_{m_0}.$$

Αν

$$s \in \mathbb{R} \quad \text{ή} \quad s = +\infty \quad \text{ή} \quad s = -\infty,$$

τότε, αντιστοίχως,

$$s - s_{k_0} + t_{m_0} \in \mathbb{R} \quad \text{ή} \quad s - s_{k_0} + t_{m_0} = +\infty \quad \text{ή} \quad s - s_{k_0} + t_{m_0} = -\infty.$$

□

Παράδειγμα 8.1.9. Έστω $m \in \mathbb{Z}$. Με τα σύμβολα

$$\sum_{n=m}^{+\infty} x_n \qquad \text{ή} \qquad x_m + x_{m+1} + \cdots + x_{m+n-1} + \cdots$$

δηλώνουμε τη σειρά με μερικά αθροίσματα: $t_1 = x_m$, $t_2 = x_m + x_{m+1}$ και, γενικότερα,

$$t_n = x_m + \cdots + x_{m+n-1} \qquad \text{για κάθε } n.$$

Είναι φανερό ότι η πρόταση 8.2 εφαρμόζεται στις σειρές $\sum_{n=m}^{+\infty} x_n$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$, οπότε η σειρά $\sum_{n=m}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει ή αποκλίνει στο $\pm\infty$ αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$, αντιστοίχως, συγκλίνει ή αποκλίνει στο $\pm\infty$. Μάλιστα, μπορούμε να βρούμε και τη σχέση ανάμεσα στα αθροίσματα των δύο σειρών.
Στην περίπτωση $m \geq 2$, αν

$$s_n = x_1 + \cdots + x_n,$$

τότε ισχύει

$$t_n = x_m + \cdots + x_{m+n-1} = (x_1 + \cdots + x_{m+n-1}) - (x_1 + \cdots + x_{m-1}) = s_{m+n-1} - (x_1 + \cdots + x_{m-1})$$

για κάθε n. Αν

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = s \in \overline{\mathbb{R}},$$

τότε $s_n \to s$, οπότε $t_n \to s - (x_1 + \cdots + x_{m-1})$ και, επομένως,

$$\sum_{n=m}^{+\infty} x_n = s - (x_1 + \cdots + x_{m-1}).$$

Άρα

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = x_1 + \cdots + x_{m-1} + \sum_{n=m}^{+\infty} x_n \qquad \text{αν } m \geq 2. \tag{8.1}$$

Στην περίπτωση $m \leq 0$, ισχύει

$$t_n = x_m + \cdots + x_{m+n-1} = (x_m + \cdots + x_0) + (x_1 + \cdots + x_{m+n-1}) = (x_m + \cdots + x_0) + s_{m+n-1}$$

για κάθε $n \geq 2 - m$. Αν

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = s \in \overline{\mathbb{R}},$$

τότε $s_n \to s$, οπότε $t_n \to x_m + \cdots + x_0 + s$ και, επομένως,

$$\sum_{n=m}^{+\infty} x_n = x_m + \cdots + x_0 + s.$$

Άρα

$$\sum_{n=m}^{+\infty} x_n = x_m + \cdots + x_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \qquad \text{αν } m \leq 0. \tag{8.2}$$

Συνδυάζοντας τους τύπους (8.1) και (8.2), εύκολα βλέπουμε ότι, αν $m, k \in \mathbb{Z}$ και $m < k$, τότε

$$\sum_{n=m}^{+\infty} x_n = x_m + \cdots + x_{k-1} + \sum_{n=k}^{+\infty} x_n \qquad \text{αν } m < k. \tag{8.3}$$

Στον χειρισμό των σειρών εμφανίζεται μερικές φορές μια απλή *αλλαγή μεταβλητής*. Για παράδειγμα, έστω η σειρά $\sum_{n=m}^{+\infty} x_n$. Εισάγουμε τη νέα μεταβλητή $k = n - m + 1$ και βλέπουμε ότι, όταν ο n διατρέχει τους $m, m+1, m+2, \ldots$, τότε ο k διατρέχει τους $1, 2, 3, \ldots$. Άρα

$$\sum_{n=m}^{+\infty} x_n = \sum_{k=1}^{+\infty} x_{k+m-1}.$$

Πράγματι, και οι δύο σειρές είναι η $x_m + x_{m+1} + x_{m+2} + \cdots$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 8.3. *Έστω ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει και έστω $r_n = \sum_{m=n}^{+\infty} x_m$ για κάθε n. Τότε $r_n \to 0$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τα μερικά αθροίσματα $s_n = x_1 + \cdots + x_n$. Αν $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = s \in \mathbb{R}$, τότε $s_n \to s$. Επειδή από την (8.1), ή και την γενικότερη (8.3), έχουμε ότι ισχύει

$$s = s_{n-1} + r_n$$

για κάθε n, συνεπάγεται $r_n = s - s_{n-1} \to s - s = 0$. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 8.4. *Αν οι σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ έχουν άθροισμα και το $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n + \sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}(x_n + y_n)$ έχει άθροισμα και*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(x_n + y_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n + \sum_{n=1}^{+\infty} y_n.$$

Απόδειξη. Έστω $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = s \in \overline{\mathbb{R}}$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n = t \in \overline{\mathbb{R}}$. Θεωρούμε και τα μερικά αθροίσματα $s_n = x_1 + \cdots + x_n$ και $t_n = y_1 + \cdots + y_n$.
Τα μερικά αθροίσματα της σειράς $\sum_{n=1}^{+\infty}(x_n + y_n)$ είναι τα

$$u_n = (x_1 + y_1) + \cdots + (x_n + y_n) = (x_1 + \cdots + x_n) + (y_1 + \cdots + y_n) = s_n + t_n.$$

Επομένως,

$$u_n = s_n + t_n \to s + t.$$

Άρα $\sum_{n=1}^{+\infty}(x_n + y_n) = s + t = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n + \sum_{n=1}^{+\infty} y_n$. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 8.5. *Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ έχει άθροισμα και το $\lambda \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda x_n$ έχει άθροισμα και*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda x_n = \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} x_n.$$

Απόδειξη. Έστω $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = s \in \overline{\mathbb{R}}$. Θεωρούμε και τα μερικά αθροίσματα $s_n = x_1 + \cdots + x_n$.
Τα μερικά αθροίσματα της σειράς $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda x_n$ είναι τα

$$w_n = \lambda x_1 + \cdots + \lambda x_n = \lambda(x_1 + \cdots + x_n) = \lambda s_n.$$

Άρα

$$w_n = \lambda s_n \to \lambda s$$

και, επομένως, $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda x_n = \lambda s = \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$. □

Μπορούμε να συνδυάσουμε τα δύο τελευταία αποτελέσματα ως εξής:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(\lambda x_n + \mu y_n) = \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} x_n + \mu \sum_{n=1}^{+\infty} y_n.$$

Εύκολα βλέπουμε με επαγωγή ότι αυτό ισχύει για οποιεσδήποτε πεπερασμένου πλήθους σειρές.

ΠΡΟΤΑΣΗ 8.6. *Έστω ότι ισχύει $x_n \le y_n$ για κάθε n.*
[α] *Αν οι σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ έχουν άθροισμα, τότε $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n \le \sum_{n=1}^{+\infty} y_n$.*
Αν, επιπλέον, υπάρχει n_0 ώστε $x_{n_0} < y_{n_0}$ και αν οι σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνουν, τότε $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n < \sum_{n=1}^{+\infty} y_n$. Ισοδύναμα, αν $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = \sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ και το κοινό άθροισμα είναι αριθμός, τότε $x_n = y_n$ για κάθε n.
[β] *Αν $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = +\infty$, τότε $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n = +\infty$.*
[γ] *Αν $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n = -\infty$, τότε $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = -\infty$.*

Απόδειξη. [α] Έστω $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = s \in \overline{\mathbb{R}}$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n = t \in \overline{\mathbb{R}}$.
Θεωρούμε και τα μερικά αθροίσματα $s_n = x_1 + \cdots + x_n$ και $t_n = y_1 + \cdots + y_n$. Επειδή $s_n \to s$ και $t_n \to t$ και επειδή ισχύει

$$s_n = x_1 + \cdots + x_n \le y_1 + \cdots + y_n = t_n$$

για κάθε n, συνεπάγεται $s \le t$.
Έστω, επιπλέον, $x_{n_0} < y_{n_0}$ και $s, t \in \mathbb{R}$. Τότε για κάθε $n \ge n_0$ ισχύει

$$t_n - s_n = (y_n - x_n) + \cdots + (y_1 - x_1) \ge y_{n_0} - x_{n_0},$$

επειδή όλες οι παρενθέσεις είναι μη-αρνητικές και ο $y_{n_0} - x_{n_0}$ είναι ένας από τους όρους του αθροίσματος. Άρα $t - s \ge y_{n_0} - x_{n_0} > 0$.
[β] Όπως πριν, ισχύει $s_n \le t_n$ για κάθε n. Άρα, αν $s_n \to +\infty$, τότε $t_n \to +\infty$.
[γ] Όπως στο [β]. □

Ασκήσεις.

8.1.1. Βρείτε τα μερικά αθροίσματα των $\sum_{n=1}^{+\infty}(-\frac{1}{2})$, $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} n$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\big(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\big)$, $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2$, $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}n$, $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}n^2$ και βρείτε τα αθροίσματά τους (αν υπάρχουν).

8.1.2. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{2n+1}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{n}{n+1})^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\sqrt[n]{n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} n\sin\frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} n\log(1+\frac{1}{n})$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}$.

8.1.3. Χρησιμοποιώντας γεωμετρικές σειρές, εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις $\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{2}{3})^{n+2}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{4}{3})^{n-3}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-4}$, $\sum_{n=3}^{+\infty}(-\frac{2}{3})^n$, $\sum_{n=4}^{+\infty}(-3)^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{3^{n-1}}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^{n-1}+3^{n+1}-6^{n/2}}{6^n}$ και βρείτε τα αθροίσματά τους (αν υπάρχουν).

8.1.4. Για ποιές τιμές του x συγκλίνουν οι σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x}{(1+x)^{n-1}}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(1+x^2)^{n-1}}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}$;

8.1.5. [4] Βρείτε συνοπτικό τύπο για τα μερικά αθροίσματα της σειράς $\sum_{n=1}^{+\infty}(b_n-b_{n+1})$ και, βάσει αυτού, αποδείξτε ότι αυτή έχει άθροισμα αν και μόνο αν υπάρχει το $\lim_{n\to+\infty} b_n$ και ότι το άθροισμα είναι αριθμός αν και μόνο αν το $\lim_{n\to+\infty} b_n$ είναι αριθμός. Αποδείξτε την εξής σχέση ανάμεσα στο άθροισμα της σειράς και στο $\lim_{n\to+\infty} b_n$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(b_n-b_{n+1}) = b_1-\lim_{n\to+\infty} b_n.$$

Βρείτε τα αθροίσματα των $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\log\frac{n}{n+1}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$.

8.1.6. Βρείτε, αν υπάρχει, το άθροισμα της σειράς $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$, όπου $x_{2k-1}=\frac{1}{k}$ και $x_{2k}=-\frac{1}{k}$ για κάθε k.

8.1.7. Έστω $x\neq y$. Αν οι σειρές $\sum_{k=1}^{+\infty}(a_{2k}+xa_{2k-1})$ και $\sum_{k=1}^{+\infty}(a_{2k}+ya_{2k-1})$ συγκλίνουν, αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ συγκλίνει.

8.1.8. Αποδείξτε ότι $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2^{n-1}}}{1-x^{2^n}} = \begin{cases} x/(1-x), & \text{αν } |x|<1 \\ 1/(1-x), & \text{αν } |x|>1 \end{cases}$

Αν $x>1$ αποδείξτε ότι $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^{n-1}}{x^{2^{n-1}}+1}=\frac{1}{x-1}$.

8.1.9. Έστω $k\in\mathbb{N}$ και $x_n=\begin{cases}\frac{1}{n^2-k^2}, & \text{αν } n\neq k\\ 0, & \text{αν } n=k\end{cases}$ Βρείτε το άθροισμα της σειράς $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.

8.1.10. Μια επίπεδη νιφάδα χιονιού υφίσταται διαδοχικές αλλαγές με τον εξής τρόπο: Το αρχικό σχήμα της είναι ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς μήκους s. Κατόπιν, από το μεσαίο ένα τρίτο *κάθε* πλευράς ξεφυτρώνει ένα ισόπλευρο τρίγωνο, οπότε το νέο σχήμα της νιφάδας είναι πολυγωνικό με 12 ισομήκεις πλευρές. Κατόπιν, από το μεσαίο ένα τρίτο *κάθε* πλευράς (της νέας νιφάδας) ξεφυτρώνει ένα ισόπλευρο τρίγωνο, οπότε το νέο σχήμα της νιφάδας είναι πολυγωνικό με 48 ισομήκεις πλευρές. Αν αυτή η διαδικασία συνεχιστεί επ' άπειρον, φανταστείτε το οριακό σχήμα της νιφάδας και υπολογίστε το μήκος της περιφέρειας και το εμβαδό της "οριακής νιφάδας".

8.1.11. Ένα αυτοκίνητο ξεκινά από την πόλη Α και σε ευθύ δρόμο κατευθύνεται προς την πόλη Β με σταθερή ταχύτητα v. Όλοι γνωρίζουμε ότι, αν η απόσταση των δύο πόλεων είναι d, τότε το αυτοκίνητο θα ολοκληρώσει τη διαδρομή σε χρόνο $\frac{d}{v}$. Απαντήστε, όμως, σε κάποιον που ισχυρίζεται ότι *το αυτοκίνητο δεν θα φτάσει ποτέ στην πόλη Β* και το δικαιολογεί ως εξής:

"*Ας υποθέσουμε ότι το αυτοκίνητο καλύπτει τη μισή απόσταση και, μάλιστα, στον προβλεπόμενο γι αυτή χρόνο. Ας υποθέσουμε, επίσης, ότι κατόπιν το αυτοκίνητο καλύπτει τη μισή από την εναπομένουσα απόσταση στον προβλεπόμενο γι αυτή χρόνο. Και ούτω καθ' εξής. Το αυτοκίνητο έχει,*

[4] Κάθε σειρά της μορφής $\sum_{n=1}^{+\infty}(b_n-b_{n+1})$ χαρακτηρίζεται **τηλεσκοπική σειρά**.

όμως, πάντοτε μπροστά του κάποια εναπομένουσα (έστω και πολύ μικρή) απόσταση μέχρι την πόλη Β, οπότε δεν θα φτάσει ποτέ εκεί".

Η απάντησή σας για να είναι πειστική πρέπει οπωσδήποτε να ακολουθήσει τα λογικά βήματα του παραπάνω ισχυρισμού.

8.1.12. Σε κάθε σειρά αντιστοιχεί η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της. Αποδείξτε ότι, αντιστρόφως, σε κάθε ακολουθία αντιστοιχεί μια σειρά έτσι ώστε η ακολουθία αυτή να ταυτίζεται με την ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς.

8.2 Σειρές με μη-αρνητικούς όρους.

Το θεώρημα 8.1 έχει για τις σειρές τον ίδιο ρόλο που έχει για τις ακολουθίες το θεώρημα 2.1. Όπως το θεώρημα 2.1 εξασφαλίζει ότι οι μονότονες ακολουθίες έχουν οπωσδήποτε όριο (ενώ η τυχούσα ακολουθία μπορεί να μην έχει όριο), έτσι και το θεώρημα 8.1 εξασφαλίζει ότι οι σειρές με μη-αρνητικούς όρους έχουν οπωσδήποτε άθροισμα (ενώ η τυχούσα σειρά μπορεί να μην έχει άθροισμα). Μάλιστα, όπως θα φανεί αμέσως, η απόδειξη του θεωρήματος 8.1 χρησιμοποιεί το θεώρημα 2.1.

ΘΕΩΡΗΜΑ 8.1. *Αν ισχύει $x_n \geq 0$ για κάθε n, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ έχει άθροισμα και αυτό είναι αριθμός ≥ 0 ή $+\infty$. Δηλαδή, $0 \leq \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \leq +\infty$.*
Πιο συγκεκριμένα, έστω $s_n = x_1 + \cdots + x_n$ τα μερικά αθροίσματα της σειράς. Τότε η σειρά συγκλίνει, αν η ακολουθία (s_n) είναι άνω φραγμένη, και αποκλίνει στο $+\infty$, αν η (s_n) δεν είναι άνω φραγμένη.

Απόδειξη. Ισχύει
$$s_{n+1} = x_1 + \cdots + x_n + x_{n+1} = s_n + x_{n+1} \geq s_n$$
για κάθε n. Άρα η (s_n) είναι αύξουσα και, επομένως, έχει όριο το οποίο είναι αριθμός ή $+\infty$.
Έστω $s_n \to s \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Τότε $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = s$.
Επειδή ισχύει
$$s_n = x_1 + \cdots + x_n \geq 0$$
για κάθε n, συνεπάγεται $s \geq 0$.
Αν η (s_n) είναι άνω φραγμένη, συνεπάγεται $s \in \mathbb{R}$, ενώ, αν η (s_n) δεν είναι άνω φραγμένη, συνεπάγεται $s = +\infty$. $\square$

Άρα κάθε σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ με μη-αρνητικούς όρους έχει άθροισμα και το άθροισμα αυτό είναι αριθμός ≥ 0 ή $+\infty$. Επίσης, το ότι μια σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ με μη-αρνητικούς όρους συγκλίνει ισοδυναμεί με $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n < +\infty$ και το ότι αποκλίνει ισοδυναμεί με $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = +\infty$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 8.7. [α] *Έστω ότι ισχύει $0 \leq x_n \leq y_n$ για κάθε n. Τότε $0 \leq \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} y_n$. Αν, επιπλέον, η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνει, τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει.*
[β] *Έστω ότι ισχύει $x_n \geq 0$ και $y_n > 0$ για κάθε n και έστω ότι η ακολουθία $(\frac{x_n}{y_n})$ συγκλίνει ή, γενικότερα, είναι φραγμένη. Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνει, τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει.*

Απόδειξη. [α] Σύμφωνα με το θεώρημα 8.1, οι σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ έχουν άθροισμα, οπότε από την πρόταση 8.6 συνεπάγεται
$$0 \leq \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} y_n. \tag{8.4}$$
Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνει, τότε $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n < +\infty$. Από την (8.4) έχουμε $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n < +\infty$ και, επομένως, η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει.
[β] Αν η ακολουθία $(\frac{x_n}{y_n})$ είναι φραγμένη, υπάρχει u ώστε να ισχύει $\frac{x_n}{y_n} \leq u$ και, επομένως,
$$x_n \leq u y_n \tag{8.5}$$
για κάθε n. Επειδή η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνει, συνεπάγεται ότι και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} u y_n$ συγκλίνει. Άρα, σύμφωνα με την (8.5) και το [α], η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει. $\square$

Το αποτέλεσμα της πρότασης 8.7[β] διατυπώνεται, ισοδύναμα, ως εξής: *αν η σειρά* $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ *αποκλίνει στο* $+\infty$*, τότε και η σειρά* $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ *αποκλίνει στο* $+\infty$.

Αρκετές φορές εφαρμόζουμε την πρόταση 8.7[β] με τον εξής τρόπο. Αν ισχύει $x_n, y_n > 0$ για κάθε n και $\frac{x_n}{y_n} \to \rho$, όπου ο ρ είναι ένας *θετικός αριθμός*, δηλαδή $0 < \rho < +\infty$, τότε το συμπέρασμα για τις δύο σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ είναι το εξής: *είτε και οι δύο σειρές συγκλίνουν είτε και οι δύο αποκλίνουν στο* $+\infty$. Πράγματι, από το $\frac{x_n}{y_n} \to \rho$ και το ότι ο ρ είναι αριθμός, συνεπάγεται ότι, αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνει, τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει. Αλλά και από το $\frac{y_n}{x_n} \to \frac{1}{\rho}$ και το ότι ο $\frac{1}{\rho}$ είναι αριθμός, συνεπάγεται ότι, αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει, τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνει.
Αν ισχύει $x_n, y_n > 0$ για κάθε n και $\frac{x_n}{y_n} \to 0$, συμπεραίνουμε, σύμφωνα πάντα με την πρόταση 8.7[β], ότι αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνει, τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει. Το αντίστροφο, όμως, δεν ισχύει γενικά.

Παράδειγμα 8.2.1. Ισχύει $\frac{1/n^2}{1/n} \to 0$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.

Βέβαια, αν ισχύει $x_n, y_n > 0$ για κάθε n και $\frac{x_n}{y_n} \to +\infty$, συμπεραίνουμε ότι αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει, τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνει. Και πάλι αυτό προκύπτει από το $\frac{y_n}{x_n} \to 0$ και την πρόταση 8.7[β].

Μια τελευταία παρατήρηση έχει να κάνει με τον τρόπο που εφαρμόζεται πολλές φορές η "σύγκριση" σειρών στο πλαίσιο της πρότασης 8.7. Αν έχουμε μια σειρά με περίπλοκους προσθετέους, προσπαθούμε να τη συγκρίνουμε με μια σειρά με απλούστερους προσθετέους ώστε να είναι πιο εύκολο να αποφανθούμε για τη σύγκλιση ή απόκλιση αυτής της απλούστερης σειράς. Η μετάβαση από τους περίπλοκους στους απλούστερους προσθετέους γίνεται πολλές φορές με την αναγνώριση "κύριων όρων" όπως θα φανεί στα επόμενα παραδείγματα. Μεγάλη βοήθεια στην αναγνώριση κύριων όρων παρέχει η καλή κατανόηση της ιεράρχησης τάξεων μεγέθους καθώς και η κατανόηση διαφόρων οριακών συμπεριφορών.

Παράδειγμα 8.2.2. Θεωρούμε τη σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n+3}{3^{n-1}+n}$.
Οι κύριοι όροι στον αριθμητή και τον παρονομαστή του $\frac{2^n+3}{3^{n-1}+n}$ είναι προφανώς οι 2^n και 3^{n-1}, αντιστοίχως. Οπότε γράφουμε

$$\frac{2^n+3}{3^{n-1}+n} = \frac{2^n}{3^{n-1}} \frac{1+3\cdot 2^{-n}}{1+n3^{-n+1}}$$

για κάθε n, κατόπιν βλέπουμε ότι $\frac{1+3\cdot 2^{-n}}{1+n3^{-n+1}} \to 1$ και, επομένως,

$$\left(\frac{2^n+3}{3^{n-1}+n}\right) / \left(\frac{2^n}{3^{n-1}}\right) \to 1.$$

Τώρα συγκρίνουμε την αρχική σειρά με τη σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{3^{n-1}} = 2\sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{2}{3})^{n-1}$. Επειδή αυτή η τελευταία σειρά συγκλίνει, συνεπάγεται ότι και η αρχική σειρά συγκλίνει.

Παράδειγμα 8.2.3. Έστω η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n^3+3n+5}{n^4+5n^2+n+7}$.
Τώρα, οι κύριοι όροι στον αριθμητή και στον παρονομαστή του $\frac{2n^3+3n+5}{n^4+5n^2+n+7}$ είναι οι $2n^3$ και n^4, αντιστοίχως. Τότε γράφουμε

$$\frac{2n^3+3n+5}{n^4+5n^2+n+7} = \frac{2n^3}{n^4} \frac{1+(3/2)n^{-2}+(5/2)n^{-3}}{1+5n^{-2}+n^{-3}+7n^{-4}},$$

κατόπιν βλέπουμε ότι $\frac{1+(3/2)n^{-2}+(5/2)n^{-3}}{1+5n^{-2}+n^{-3}+7n^{-4}} \to 1$ και, επομένως,

$$\left(\frac{2n^3+3n+5}{n^4+5n^2+n+7}\right) / \left(\frac{2n^3}{n^4}\right) \to 1.$$

Επειδή $1 > 0$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n^3}{n^4} = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$, συνεπάγεται $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n^3+3n+5}{n^4+5n^2+n+7} = +\infty$.

Παράδειγμα 8.2.4. Έστω η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\frac{1}{n}$.
Γνωρίζουμε το όριο
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$
Άρα θα συγκρίνουμε τη σειρά που έχουμε με τη σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$. Επειδή
$$\frac{\sin(1/n)}{1/n} \to 1,$$
επειδή $1 > 0$ και επειδή $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$, συνεπάγεται $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\frac{1}{n} = +\infty$.

Παράδειγμα 8.2.5. Έστω η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{2^n}$.
Θεωρούμε έναν οποιονδήποτε a με $1 < a < 2$. Τότε η τάξη μεγέθους της (a^n) είναι ανάμεσα στην τάξη μεγέθους της (n^3) και στην τάξη μεγέθους της 2^n, διότι $\frac{n^3}{a^n} \to 0$ και $\frac{a^n}{2^n} = (\frac{a}{2})^n \to 0$. Και έχουμε
$$\left(\frac{n^3}{2^n}\right)\Big/\left(\frac{a^n}{2^n}\right) = \frac{n^3}{a^n} \to 0.$$
Τώρα, επειδή η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{a}{2})^n$ συγκλίνει, συνεπάγεται ότι και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{2^n}$ συγκλίνει.

Παράδειγμα 8.2.6. Αν ισχύει $x_n \geq 0$ για κάθε n, συνεπάγεται ότι ισχύει $x_1 + \cdots + x_m \leq \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ για κάθε m.
Πρώτη απόδειξη: Έστω $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = s \in \overline{\mathbb{R}}$. Αν $s_n = x_1 + \cdots + x_n$ είναι τα μερικά αθροίσματα της σειράς, τότε $s_n \to s$. Επειδή η ακολουθία (s_n) είναι αύξουσα, ισχύει $s_m \leq s$ για κάθε m.
Δεύτερη απόδειξη: Θεωρούμε τη σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, όπου ορίζουμε
$$a_n = \begin{cases} x_n, & \text{αν } 1 \leq n \leq m \\ 0, & \text{αν } n \geq m+1 \end{cases}$$
Τότε ισχύει $0 \leq a_n \leq x_n$ για κάθε n, οπότε
$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} x_n.$$
Όμως,
$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1 + \cdots + a_m + \sum_{n=m+1}^{+\infty} a_n = x_1 + \cdots + x_m + \sum_{n=m+1}^{+\infty} 0 = x_1 + \cdots + x_m.$$

Αξίζει να αποδείξουμε το εξής.

ΠΡΟΤΑΣΗ 8.8. *Ο e είναι άρρητος.*

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε την ισότητα
$$e = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \tag{8.6}$$
από το παράδειγμα 8.1.5.
Έστω (για να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι $e \in \mathbb{Q}$ και, συγκεκριμένα, έστω $e = \frac{l}{k}$, όπου $l, k \in \mathbb{N}$. Από την (8.6) έχουμε
$$(k-1)!\, l = k!\, e = k! + \frac{k!}{1!} + \cdots + \frac{k!}{k!} + k! \sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{1}{n!}.$$
Καθένας από τους $(k-1)!\, l$, $k!$, $\frac{k!}{1!}$, $\ldots$, $\frac{k!}{k!}$ είναι ακέραιος, οπότε και ο αριθμός
$$A = k! \sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{k!}{n!}$$
πρέπει να είναι ακέραιος. Όμως,
$$0 < A = \sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)\cdots n} < \sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^{n-k}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^n} = \frac{1}{k+1}\frac{1}{1-(1/(k+1))} = \frac{1}{k} \leq 1$$
και καταλήγουμε σε άτοπο. □

8.2.1 Σειρές με φθίνοντες μη-αρνητικούς όρους.

Στις επόμενες δύο προτάσεις θα δούμε δύο κριτήρια σύγκλισης για σειρές με *φθίνοντες* μη-αρνητικούς όρους.

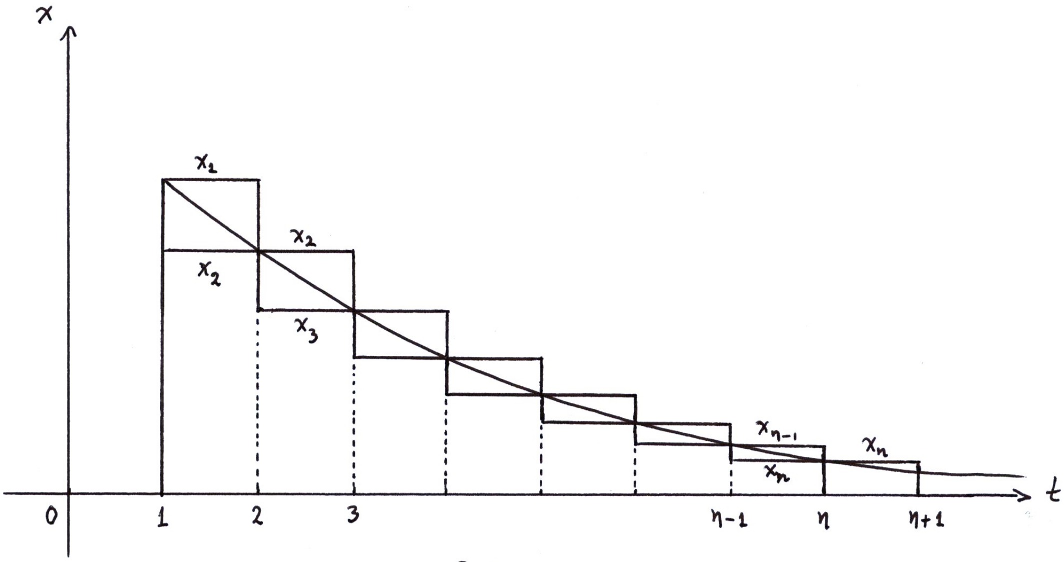
ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ. [5] *Έστω φθίνουσα ακολουθία (x_n) ώστε να ισχύει $x_n \geq 0$ για κάθε n. Έστω ότι υπάρχει $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ φθίνουσα στο $[1, +\infty)$ ώστε να ισχύει $f(n) = x_n$ για κάθε n. Τότε υπάρχει το $\lim_{t \to +\infty} \int_1^t f(u)\, du$, η τιμή του είναι αριθμός ≥ 0 ή $+\infty$ και*
(i) $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n < +\infty$ αν και μόνο αν $\lim_{t \to +\infty} \int_1^t f(u)\, du < +\infty$,
(ii) $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = +\infty$ αν και μόνο αν $\lim_{t \to +\infty} \int_1^t f(u)\, du = +\infty$.
Επίσης, ισχύει

$$\int_1^{n+1} f(u)\, du \leq x_1 + \cdots + x_n \leq x_1 + \int_1^n f(u)\, du \qquad \text{για κάθε } n$$

και

$$\lim_{t \to +\infty} \int_1^t f(u)\, du \leq \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \leq x_1 + \lim_{t \to +\infty} \int_1^t f(u)\, du.$$

Δείτε το σχήμα 33.



Σx 33 Σύγκριση του εμβαδού κάτω από το γράφημα με τα εμβαδά των ψηλών ορθογωνίων και των χαμηλών ορθογωνίων

Απόδειξη. Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ έχει μη-αρνητικούς όρους, οπότε έχει άθροισμα, το οποίο είναι μη-αρνητικός αριθμός ή $+\infty$. Έστω

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = s,$$

οπότε

$$0 \leq s \leq +\infty.$$

Αν $s_n = x_1 + \cdots + x_n$ είναι τα μερικά αθροίσματα της σειράς, τότε

$$s_n \to s. \tag{8.7}$$

Επειδή η f είναι μονότονη, είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του $[1, +\infty)$, οπότε ορίζεται το αόριστο ολοκλήρωμα

$$F(t) = \int_1^t f(u)\, du \qquad \text{για } t \in [1, +\infty).$$

[5] Σχετικά με το κριτήριο ολοκληρώματος, οι τεχνικές έχουν ήδη αναπτυχθεί στις ασκήσεις 6.4.11 και 7.3.20.

Έστω $t \geq 1$ και $n \geq t$. Επειδή η f είναι φθίνουσα, είναι $f(t) \geq f(n) = x_n \geq 0$. Άρα ισχύει

$$f(t) \geq 0 \qquad \text{για κάθε } \ t \geq 1. \tag{8.8}$$

Άρα, αν $1 \leq t' < t''$, τότε, λόγω της (8.8), είναι $\int_{t'}^{t''} f(u)\,du \geq 0$ και, επομένως,

$$F(t'') = \int_1^{t''} f(u)\,du = \int_1^{t'} f(u)\,du + \int_{t'}^{t''} f(u)\,du \geq \int_1^{t'} f(u)\,du = F(t').$$

Άρα η F είναι αύξουσα συνάρτηση στο $[1, +\infty)$, οπότε υπάρχει το όριο

$$l = \lim_{t\to+\infty} F(t) = \lim_{t\to+\infty} \int_1^t f(u)\,du \tag{8.9}$$

και η τιμή του είναι αριθμός ή $+\infty$. Πάλι λόγω της (8.8) ισχύει $F(t) = \int_1^t f(u)\,du \geq 0$ για κάθε $t \geq 1$, οπότε είναι $l \geq 0$. Δηλαδή

$$0 \leq l \leq +\infty.$$

Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$f(k+1) \leq f(u) \leq f(k) \qquad \text{για } \ k \leq u \leq k+1,$$

οπότε

$$f(k+1) = \int_k^{k+1} f(k+1)\,du \leq \int_k^{k+1} f(u)\,du \leq \int_k^{k+1} f(k)\,du = f(k)$$

και, επειδή $f(k) = x_k$ και $f(k+1) = x_{k+1}$, είναι

$$x_{k+1} \leq \int_k^{k+1} f(u)\,du \leq x_k. \tag{8.10}$$

Προσθέτουμε τις αριστερές ανισότητες (8.10) για $k = 1, \ldots, n-1$ και τις δεξιές ανισότητες (8.10) για $k = 1, \ldots, n$ και βρίσκουμε

$$x_2 + \cdots + x_n \leq \int_1^n f(u)\,du \qquad \text{και} \qquad \int_1^{n+1} f(u)\,du \leq x_1 + \cdots + x_n,$$

αντιστοίχως. Επειδή $s_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$, συνεπάγεται

$$\int_1^{n+1} f(u)\,du \leq s_n \leq x_1 + \int_1^n f(u)\,du.$$

Άρα, από τα όρια (8.7) και (8.9) συνεπάγεται

$$l \leq s \leq x_1 + l.$$

Τα (i), (ii) είναι άμεσες συνέπειες της τελευταίας ανισότητας. □

Είναι γνωστή από απλά μαθήματα απειροστικού λογισμού η έννοια του *γενικευμένου ολοκληρώματος*:

$$\int_1^{+\infty} f(u)\,du = \lim_{t\to+\infty} \int_1^t f(u)\,du.$$

Τα γενικευμένα ολοκληρώματα θα μελετηθούν διεξοδικά, αργότερα, στο κεφάλαιο 12. Πάντως, μπορούμε εδώ να γράψουμε την τελευταία διπλή ανισότητα του κριτηρίου ολοκληρώματος στη μορφή

$$\int_1^{+\infty} f(u)\,du \leq \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \leq x_1 + \int_1^{+\infty} f(u)\,du$$

και να διατυπώσουμε το κεντρικό συμπέρασμα ως εξής: *η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} f(u)\,du$ συγκλίνει.*

Υπάρχει και μια παραλλαγή του κριτηρίου ολοκληρώματος η οποία αναφέρεται σε σειρές των οποίων ο δείκτης αρχίζει από τον ακέραιο k αντί από τον 1. Θα περιοριστούμε στο να τήν διατυπώσουμε. Η απόδειξη είναι εντελώς όμοια με την απόδειξη που ήδη κάναμε.

Έστω φθίνουσα ακολουθία (x_n) ώστε να ισχύει $x_n \geq 0$ για κάθε $n \geq k$. Έστω ότι υπάρχει f :

$[k,+\infty) \to \mathbb{R}$ φθίνουσα στο $[k,+\infty)$ ώστε να ισχύει $f(n) = x_n$ για κάθε $n \geq k$. Τότε υπάρχει το $\lim_{t\to+\infty} \int_k^t f(u)\,du$, η τιμή του είναι αριθμός ≥ 0 ή $+\infty$ και
(i) $\sum_{n=k}^{+\infty} x_n < +\infty$ αν και μόνο αν $\lim_{t\to+\infty} \int_k^t f(u)\,du < +\infty$,
(ii) $\sum_{n=k}^{+\infty} x_n = +\infty$ αν και μόνο αν $\lim_{t\to+\infty} \int_k^t f(u)\,du = +\infty$.
Επίσης, ισχύει

$$\int_k^{n+1} f(u)\,du \leq x_k + \cdots + x_n \leq x_k + \int_k^n f(u)\,du \qquad \text{για κάθε } n \geq k$$

και

$$\lim_{t\to+\infty} \int_k^t f(u)\,du \leq \sum_{n=k}^{+\infty} x_n \leq x_k + \lim_{t\to+\infty} \int_k^t f(u)\,du.$$

Η τελευταία διπλή ανισότητα γράφεται και στη μορφή

$$\int_k^{+\infty} f(u)\,du \leq \sum_{n=k}^{+\infty} x_n \leq x_k + \int_k^{+\infty} f(u)\,du.$$

Παράδειγμα 8.2.7. Θα μελετήσουμε τις *πολύ σημαντικές* σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$. Οι σειρές αυτές είναι σημαντικές *και* διότι χρησιμεύουν ως “πρότυπα σύγκρισης” για πολλές άλλες σειρές.[6]
Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ έχει μη-αρνητικούς όρους, οπότε έχει άθροισμα το οποίο είναι μη-αρνητικός αριθμός ή $+\infty$.
Αν $p \leq 0$, τότε ισχύει $\frac{1}{n^p} \geq 1$ για κάθε n, οπότε $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} \geq \sum_{n=1}^{+\infty} 1 = +\infty$.
Έστω $p > 0$. Τότε η ακολουθία $(\frac{1}{n^p})$ είναι φθίνουσα και έχει θετικούς όρους.
Θεωρούμε τη συνάρτηση $\frac{1}{u^p}$, η οποία είναι φθίνουσα στο $[1,+\infty)$ και, προφανώς, οι τιμές της στους φυσικούς ταυτίζονται με τους αντίστοιχους όρους της σειράς $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$.
Τώρα, είναι

$$\int_1^t \frac{1}{u^p}\,du = \frac{t^{1-p}-1}{1-p} \quad \text{αν } p \neq 1 \qquad \text{και} \qquad \int_1^t \frac{1}{u}\,du = \log t.$$

Επομένως,

$$\lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{1}{u^p}\,du = \begin{cases} 1/(p-1) < +\infty, & \text{αν } p > 1 \\ +\infty, & \text{αν } 0 < p \leq 1 \end{cases}$$

Άρα, συμπεριλαμβάνοντας και την περίπτωση $p \leq 0$, έχουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} \quad \begin{cases} < +\infty, & \text{αν } p > 1 \\ = +\infty, & \text{αν } p \leq 1 \end{cases}$$

Ειδικότερα, όπως έχουμε ήδη δει, η αρμονική σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει στο $+\infty$ ενώ η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει.
Επιπλέον, έχουμε και τις χρήσιμες εκτιμήσεις

$$\frac{1}{p-1} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} \leq 1 + \frac{1}{p-1} \qquad \text{αν } p > 1,$$

$$\log(n+1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \leq 1 + \log n \qquad \text{για κάθε } n,$$

$$\frac{(n+1)^{1-p}-1}{1-p} \leq 1 + \frac{1}{2^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} \leq 1 + \frac{n^{1-p}-1}{1-p} \qquad \text{για κάθε } n \text{ αν } 0 \leq p < 1.$$

Παρατηρήστε, σε σχέση με την πρόταση 8.1, ότι για κάθε p με $0 < p \leq 1$, η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ είναι παράδειγμα σειράς $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ η οποία δεν συγκλίνει αλλά για την οποία ισχύει $x_n \to 0$.

Παράδειγμα 8.2.8. Για να μελετήσουμε τη σύγκλιση της σειράς $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{2n^2+3}$, γράφουμε

$$\frac{\sqrt{n}+1}{2n^2+3} = \frac{1}{n^{3/2}} \frac{1+n^{-1/2}}{2+3n^{-2}},$$

οπότε

$$\Big(\frac{\sqrt{n}+1}{2n^2+3}\Big) \Big/ \Big(\frac{1}{n^{3/2}}\Big) \to \frac{1}{2}.$$

Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ συγκλίνει, οπότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{2n^2+3}$ συγκλίνει.

[6] Η μελέτη αυτών των σειρών μέσω ολοκληρωμάτων έχει ήδη γίνει στις ασκήσεις 6.4.11 και 7.3.20.

Παράδειγμα 8.2.9. Θεωρούμε τη σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \log(1 + \frac{1}{\sqrt{n}})$.
Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ αποκλίνει στο $+\infty$, οπότε, λόγω του ορίου

$$\tfrac{\log(1+(1/\sqrt{n}))}{1/\sqrt{n}} \to 1,$$

το οποίο προκύπτει από το $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$, συνεπάγεται ότι και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \log(1 + \frac{1}{\sqrt{n}})$ αποκλίνει στο $+\infty$.

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΣΥΜΠΥΚΝΩΣΗΣ ΤΟΥ CAUCHY. *Έστω φθίνουσα ακολουθία (x_n) ώστε να ισχύει $x_n \geq 0$ για κάθε n. Τότε*
(i) $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n < +\infty$ αν και μόνο αν $\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k x_{2^k} < +\infty$,
(ii) $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = +\infty$ αν και μόνο αν $\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k x_{2^k} = +\infty$.

Απόδειξη. Οι $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ και $\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k x_{2^k}$ έχουν άθροισμα, αφού είναι σειρές με μη-αρνητικούς όρους. Έστω

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = s, \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} 2^k x_{2^k} = t.$$

Θεωρούμε τα μερικά αθροίσματα $s_n = x_1 + \cdots + x_n$ και $t_k = x_1 + 2x_2 + 4x_4 + \cdots + 2^{k-1} x_{2^{k-1}}$ των δύο σειρών. Τότε

$$s_n \to s, \qquad t_k \to t \tag{8.11}$$

και, επίσης, ισχύει

$$s_n \leq s, \qquad t_k \leq t \tag{8.12}$$

για κάθε n και κάθε k.
Έστω $n \in \mathbb{N}$. Τότε υπάρχει $k_0 \in \mathbb{Z}$, $k_0 \geq 0$ ώστε $2^{k_0} \leq n < 2^{k_0+1}$. Επειδή η (x_n) είναι φθίνουσα και λόγω της δεύτερης ανισότητας (8.12), είναι

$$\begin{aligned} s_n &= x_1 + \cdots + x_n \\ &= x_1 + (x_2 + x_3) + (x_4 + x_5 + x_6 + x_7) + \cdots \\ &\quad + (x_{2^{k_0-1}} + \cdots + x_{2^{k_0}-1}) + (x_{2^{k_0}} + \cdots + x_n) \\ &\leq x_1 + 2x_2 + 4x_4 + \cdots + 2^{k_0-1} x_{2^{k_0-1}} + 2^{k_0} x_{2^{k_0}} = t_{k_0+1} \leq t. \end{aligned}$$

Άρα για κάθε n ισχύει $s_n \leq t$, οπότε λόγω του πρώτου ορίου (8.11), είναι $s \leq t$.
Επίσης, πάλι επειδή η (x_n) είναι φθίνουσα και λόγω της πρώτης ανισότητας (8.12), είναι

$$\begin{aligned} t_k &= x_1 + 2x_2 + 4x_4 + \cdots + 2^{k-1} x_{2^{k-1}} \\ &\leq 2x_1 + 2x_2 + 2(x_3 + x_4) + \cdots + 2(x_{2^{k-2}+1} + \cdots + x_{2^{k-1}}) \\ &= 2(x_1 + x_2 + \cdots + x_{2^{k-1}}) = 2s_{2^{k-1}} \leq 2s. \end{aligned}$$

Άρα για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύει $t_k \leq 2s$, οπότε λόγω του δεύτερου ορίου (8.11), είναι $t \leq 2s$.
Άρα $s \leq t \leq 2s$, οπότε τα s και t είναι είτε και τα δύο αριθμοί είτε και τα δύο $+\infty$. □

Παράδειγμα 8.2.10. Θα ξαναδούμε τις σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$.
Αν $p \leq 0$, τότε $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} \geq \sum_{n=1}^{+\infty} 1 = +\infty$.
Τώρα έστω $p > 0$, οπότε η ακολουθία $(\frac{1}{n^p})$ είναι φθίνουσα με μη-αρνητικούς όρους.
Εξετάζουμε τη σειρά

$$\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k \frac{1}{(2^k)^p} = \sum_{k=0}^{+\infty} (\tfrac{1}{2^{p-1}})^k.$$

Η σειρά αυτή είναι γεωμετρική με λόγο $\frac{1}{2^{p-1}}$, οπότε συγκλίνει, αν $\frac{1}{2^{p-1}} < 1$, και αποκλίνει στο $+\infty$, αν $\frac{1}{2^{p-1}} \geq 1$.
Άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ συγκλίνει, αν $p > 1$, και αποκλίνει στο $+\infty$, αν $p \leq 1$.

8.2.2 p-αδικά αναπτύγματα.

Έστω $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$. Στο παράδειγμα 2.4.6 αποδείξαμε ότι σε κάθε $x \in [0,1)$ αντιστοιχεί η ακολουθία (x_n) των p-αδικών ψηφίων του x με τις εξής ιδιότητες. Κάθε x_n είναι ένας από τους ακεραίους $0, 1, \ldots\, p-1$ και η ακολουθία (x_n) δεν είναι τελικά σταθερή $p-1$ και, αν σχηματίσουμε τα αθροίσματα

$$s_n = \tfrac{x_1}{p} + \tfrac{x_2}{p^2} + \cdots + \tfrac{x_n}{p^n}, \qquad t_n = \tfrac{x_1}{p} + \tfrac{x_2}{p^2} + \cdots + \tfrac{x_n}{p^n} + \tfrac{1}{p^n}$$

για κάθε n, τότε ισχύει

$$s_n \leq x < t_n \quad \text{για κάθε } n, \qquad s_n \to x, \qquad t_n \to x.$$

Τώρα κάνουμε την απλή παρατήρηση ότι τα αθροίσματα s_n είναι ακριβώς τα μερικά αθροίσματα της σειράς

$$\textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{p^n}.$$

Επομένως, μπορούμε να πούμε ότι η σχέση $s_n \to x$ γράφεται, ισοδύναμα,

$$\textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{p^n} = x.$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 8.2. *Γενικά, χωρίς αναφορά σε κάποιον x, μια ακολουθία (x_n) χαρακτηρίζεται* **ακολουθία p-αδικών ψηφίων** *αν κάθε x_n είναι ένας από τους ακεραίους $0, 1, \ldots\, p-1$ και η ακολουθία (x_n) δεν είναι τελικά σταθερή $p-1$.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 8.9. *Έστω $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$.*
[α] *Έστω ακολουθία p-αδικών ψηφίων (x_n). Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{p^n}$ συγκλίνει και το άθροισμά της είναι αριθμός στο διάστημα $[0,1)$.*
[β] *Για κάθε $x \in [0,1)$ υπάρχει μοναδική ακολουθία p-αδικών ψηφίων (x_n) ώστε $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{p^n} = x$.*

Απόδειξη. [α] Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{p^n}$ έχει μη-αρνητικούς όρους, οπότε έχει άθροισμα. Έστω

$$x = \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{p^n}.$$

Επειδή ισχύει $0 \leq x_n \leq p-1$ για κάθε n και, επιπλέον, επειδή ισχύει η γνήσια ανισότητα $x_n < p-1$ για τουλάχιστον έναν n, από την πρόταση 8.6[α] συνεπάγεται

$$0 \leq x = \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{p^n} < \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p-1}{p^n} = 1.$$

Για την τελευταία ισότητα, χρησιμοποιούμε τον τύπο για το άθροισμα γεωμετρικής σειράς ως εξής:

$$\textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p-1}{p^n} = \frac{p-1}{p} \sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{1}{p})^{n-1} = \frac{p-1}{p} \frac{1}{1-(1/p)} = 1.$$

[β] Έστω $0 \leq x < 1$. Έχουμε ήδη αποδείξει, στο παράδειγμα 2.4.6, ότι υπάρχει ακολουθία p-αδικών ψηφίων (x_n) ώστε $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{p^n} = x$. Θα αποδείξουμε ότι αυτή είναι μοναδική.
Αρχικά θυμόμαστε ότι η ακολουθία (x_n) έχει πρώτο όρο $x_1 = [px]$ και οι επόμενοι όροι της ικανοποιούν τον αναδρομικό τύπο

$$x_{n+1} = [p^{n+1}x - p^n x_1 - \cdots - px_n] \qquad \text{για κάθε } \ n.$$

Τώρα, έστω *οποιαδήποτε* ακολουθία p-αδικών ψηφίων (y_n) ώστε

$$\textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y_n}{p^n} = x. \tag{8.13}$$

Από την (8.13) συνεπάγεται

$$px = y_1 + \textstyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{y_n}{p^{n-1}}. \tag{8.14}$$

Επειδή ισχύει $0 \le y_n \le p-1$ για κάθε $n \ge 2$ και, επιπλέον, επειδή ισχύει η γνήσια ανισότητα $y_n < p-1$ για τουλάχιστον έναν $n \ge 2$, από την πρόταση 8.6[α] συνεπάγεται

$$0 \le \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{y_n}{p^{n-1}} < \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{p-1}{p^{n-1}} = 1. \tag{8.15}$$

Από τις (8.14) και (8.15) συνεπάγεται

$$y_1 \le px < y_1 + 1$$

και, επειδή ο y_1 είναι ακέραιος, έχουμε $y_1 = [px]$.
Κατόπιν, έστω $m \in \mathbb{N}$. Από την (8.13) συνεπάγεται

$$x = \sum_{n=1}^{m+1} \frac{y_n}{p^n} + \sum_{n=m+2}^{+\infty} \frac{y_n}{p^n}$$

και, πολλαπλασιάζοντας με τον p^{m+1},

$$p^{m+1}x = p^m y_1 + \cdots + p y_m + y_{m+1} + \sum_{n=m+2}^{+\infty} \frac{y_n}{p^{n-m-1}}$$

ή, ισοδύναμα,

$$p^{m+1}x - p^m y_1 - \cdots - p y_m = y_{m+1} + \sum_{n=m+2}^{+\infty} \frac{y_n}{p^{n-m-1}}. \tag{8.16}$$

Και πάλι, επειδή ισχύει $0 \le y_n \le p-1$ για κάθε $n \ge m+2$ και επειδή ισχύει η γνήσια ανισότητα $y_n < p-1$ για τουλάχιστον έναν $n \ge m+2$, από την πρόταση 8.6[α] συνεπάγεται

$$0 \le \sum_{n=m+2}^{+\infty} \frac{y_n}{p^{n-m-1}} < \sum_{n=m+2}^{+\infty} \frac{p-1}{p^{n-m-1}} = 1. \tag{8.17}$$

Από τις (8.16) και (8.17) συνεπάγεται

$$y_{m+1} \le p^{m+1}x - p^m y_1 - \cdots - p y_m < y_{m+1} + 1$$

και, επειδή ο y_{m+1} είναι ακέραιος, έχουμε

$$y_{m+1} = [p^{m+1}x - p^m y_1 - \cdots - p y_m].$$

Αλλάζοντας, απλώς, το σύμβολο του δείκτη από m σε n, διατυπώνουμε το αποτέλεσμά μας ως εξής: *οποιαδήποτε ακολουθία p-αδικών ψηφίων (y_n) με την ιδιότητα $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y_n}{p^n} = x$ έχει πρώτο όρο $y_1 = [px]$ και οι επόμενοι όροι της ικανοποιούν τον αναδρομικό τύπο*

$$y_{n+1} = [p^{n+1}x - p^n y_1 - \cdots - p y_n] \qquad \text{για κάθε } n.$$

Παρατηρήστε ότι αυτός ο αναδρομικός τύπος είναι ο ίδιος με τον αναδρομικό τύπο που ικανοποιούν οι όροι της αρχικής (x_n).
Συγκρίνοντας, τώρα, την αρχική ακολουθία (x_n) και την οποιαδήποτε άλλη (y_n), βλέπουμε αμέσως ότι ταυτίζονται: είναι σαφές ότι έχουν τους ίδιους πρώτους όρους $y_1 = x_1 = [px]$ και, βάσει του (κοινού) αναδρομικού τύπου, έχουν τους ίδιους δεύτερους όρους και κατόπιν έχουν τους ίδιους τρίτους όρους και, επαγωγικά, έχουν τους ίδιους n-οστούς όρους για κάθε n.
Άρα η ακολουθία p-αδικών ψηφίων (x_n) που γνωρίζουμε από το παράδειγμα 2.4.6 είναι η μοναδική ακολουθία p-αδικών ψηφίων (x_n) ώστε $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{p^n} = x$. □

ΟΡΙΣΜΟΣ 8.3. *Αν η (x_n) είναι η ακολουθία των p-αδικών ψηφίων του $x \in [0,1)$, η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{p^n}$ ονομάζεται **p-αδικό ανάπτυγμα** του x και συνήθως αντικαθιστούμε αυτήν τη σειρά με το σύμβολο $\langle 0.x_1x_2x_3\ldots\rangle_p$, οπότε γράφουμε*

$$x = \langle 0.x_1x_2x_3\ldots\rangle_p.$$

Στην περίπτωση $p = 10$ χρησιμοποιούμε, παραδοσιακά, το απλούστερο σύμβολο $x = 0.x_1x_2x_3\ldots$ αντί του $x = \langle 0.x_1x_2x_3\ldots\rangle_{10}$.

Παρατηρήστε ότι η πρόταση 8.9 λέει ότι *υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία ανάμεσα στους αριθμούς στο $[0,1)$ και στις ακολουθίες p-αδικών ψηφίων ή, ισοδύναμα, ανάμεσα στους αριθμούς στο $[0,1)$ και στα p-αδικά αναπτύγματα $\langle 0.x_1x_2x_3\ \ldots\rangle_p$.*

ΟΡΙΣΜΟΣ 8.4. *Το p-αδικό ανάπτυγμα $\langle 0.x_1x_2x_3\ \ldots\rangle_p$ χαρακτηρίζεται* ***περιοδικό*** *αν υπάρχουν m_0, k_0 ώστε να ισχύει $x_{n+k_0} = x_n$ για κάθε $n \geq m_0$. Αυτό σημαίνει ότι αμέσως μετά από το τμήμα $x_{m_0}x_{m_0+1}\ \ldots\ x_{m_0+k_0-1}$ του p-αδικού αναπτύγματος ακολουθεί το ίδιο τμήμα και αμέσως μετά από αυτό ακολουθεί το ίδιο τμήμα και ούτω καθ' εξής. Δηλαδή, το p-αδικό ανάπτυγμα έχει τη μορφή*

$$\langle 0.x_1\ldots x_{m_0-1}\ x_{m_0}\ \ldots\ x_{m_0+k_0-1}\ x_{m_0}\ \ldots\ x_{m_0+k_0-1}\ x_{m_0}\ \ldots\ x_{m_0+k_0-1}\ \ldots\rangle_p.$$

Χρησιμοποιούμε και τη συντομογραφία $\langle 0.x_1\ldots x_{m_0-1}\,\overline{x_{m_0}\ \ldots\ x_{m_0+k_0-1}}\,\rangle_p$.

Η πρόταση 8.10 στην περίπτωση $p = 10$, δηλαδή για τα δεκαδικά αναπτύγματα, είναι γνωστή από το δημοτικό σχολείο - χωρίς απόδειξη, φυσικά!

Επισημαίνουμε ότι, εκτός από τους αριθμούς στο $[0,1)$, *και οι φυσικοί αριθμοί έχουν p-αδικά αναπτύγματα*. Αυτό το ζήτημα εντάσσεται στο πλαίσιο της στοιχειώδους αριθμητικής.[7]

ΠΡΟΤΑΣΗ 8.10. *Έστω $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$ και $x \in [0,1)$. Τότε ο x είναι ρητός αν και μόνο αν το p-αδικό του ανάπτυγμα είναι περιοδικό.*

Απόδειξη. Έστω $x = \langle 0, x_1\ldots x_{m_0-1}\overline{x_{m_0}\ \ldots\ x_{m_0+k_0-1}}\,\rangle_p$.
Τότε

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{x_1}{p} + \cdots + \tfrac{x_{m_0-1}}{p^{m_0-1}} + \big(\tfrac{x_{m_0}}{p^{m_0}} + \cdots + \tfrac{x_{m_0+k_0-1}}{p^{m_0+k_0-1}}\big)\big(1 + \tfrac{1}{p^{k_0}} + \tfrac{1}{p^{2k_0}} + \cdots\big) \\ &= \tfrac{x_1}{p} + \cdots + \tfrac{x_{m_0-1}}{p^{m_0-1}} + \big(\tfrac{x_{m_0}}{p^{m_0}} + \cdots + \tfrac{x_{m_0+k_0-1}}{p^{m_0+k_0-1}}\big)\tfrac{1}{1-(1/p^{k_0})} \\ &= \tfrac{x_1p^{m_0-2}+\cdots+x_{m_0-1}}{p^{m_0-1}} + \tfrac{x_{m_0}p^{k_0-1}+\cdots+x_{m_0+k_0-1}}{p^{m_0-1}(p^{k_0}-1)}, \end{aligned}$$

οπότε είναι φανερό ότι ο x είναι ρητός.
Αντιστρόφως, έστω ότι ο $x \in [0,1)$ είναι ρητός, δηλαδή $x = \frac{a}{b}$, όπου $a, b \in \mathbb{Z}$, $0 \leq a < b$.
Γράφουμε $p = {p_1}^{n_1}\cdots{p_r}^{n_r}$, όπου $p_1, \ldots, p_r$ είναι οι πρώτοι παράγοντες του p και $n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{N}$. Ομοίως, γράφουμε $b = {p_1}^{l_1}\cdots{p_r}^{l_r}b'$, όπου $l_1, \ldots, l_r \in \mathbb{Z}$, $l_1, \ldots, l_r \geq 0$ (αν κάποιος p_j δεν είναι πρώτος παράγων του b, τότε ο αντίστοιχος l_j είναι 0) και ο $b' \in \mathbb{N}$ είναι σχετικά πρώτος με τον p.
Θεωρούμε οποιονδήποτε $m_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $(m_0-1)n_j \geq l_j$ για κάθε $j = 1, \ldots, r$.
Ορίζουμε $v_j = (m_0-1)n_j - l_j$, οπότε $v_j \in \mathbb{Z}$, $v_j \geq 0$. Τότε

$$x = \frac{a}{b} = \frac{a}{{p_1}^{l_1}\cdots{p_r}^{l_r}b'} = \frac{a{p_1}^{v_1}\cdots{p_r}^{v_r}}{({p_1}^{n_1}\cdots{p_r}^{n_r})^{m_0-1}b'} = \frac{a'}{p^{m_0-1}b'},$$

όπου $a' \in \mathbb{Z}$, $a' \geq 0$.
Τώρα, διαιρούμε τους $p, p^2, p^3, \ldots$ με τον b'. Τα πιθανά υπόλοιπα αυτών των διαιρέσεων, δηλαδή οι $0, \ldots, b'-1$, είναι πεπερασμένα αλλά οι αριθμοί είναι άπειροι, οπότε τουλάχιστον δύο από αυτούς θα δώσουν το ίδιο υπόλοιπο όταν διαιρεθούν με τον b'. Δηλαδή, υπάρχουν $t, s \in \mathbb{N}$, $t < s$ ώστε $p^t = q_tb' + z$ και $p^s = q_sb' + z$, όπου $q_t, q_s \in \mathbb{Z}$ και $z \in \{0, \ldots, b'-1\}$. Συνεπάγεται $p^t(p^{s-t}-1) = p^s - p^t = (q_s - q_t)b'$, οπότε ο b' διαιρεί τον $p^t(p^{s-t}-1)$. Επειδή οι b', p είναι σχετικά πρώτοι, ο b' διαιρεί τον $p^{s-t}-1$, οπότε υπάρχει $b'' \in \mathbb{N}$ ώστε $b'b'' = p^{s-t}-1$. Ορίζουμε τον $k_0 = s - t \in \mathbb{N}$ και έχουμε ότι $b'b'' = p^{k_0}-1$ και, επομένως,

$$x = \frac{a'b''}{p^{m_0-1}b'b''} = \frac{a''}{p^{m_0-1}(p^{k_0}-1)},$$

όπου $a'' = a'b'' \in \mathbb{Z}$ και $0 \leq a'' < p^{m_0-1}(p^{k_0}-1)$. Το τελευταίο ισχύει διότι $0 \leq x < 1$.
Κατόπιν, εκτελούμε τη διαίρεση του a'' με τον $p^{k_0}-1$, οπότε

$$a'' = w(p^{k_0}-1) + u,$$

[7] Δείτε την άσκηση 8.2.30.

όπου $w \in \mathbb{Z}$, $0 \leq w < p^{m_0-1}$ και $u \in \{0, \ldots, p^{k_0} - 2\}$.
Τέλος, γράφουμε τα p-αδικά αναπτύγματα (δείτε την άσκηση 8.2.30) των w, u στη μορφή

$$w = x_1 p^{m_0-2} + \cdots + x_{m_0-1}, \qquad u = x_{m_0} p^{k_0-1} + \cdots + x_{m_0+k_0-1}$$

και παρατηρούμε ότι οι $x_{m_0}, \ldots, x_{m_0+k_0-1}$ δεν είναι όλοι ίσοι με $p-1$, διότι αλλιώς θα ήταν $u = (p-1)p^{k_0-1} + \cdots + (p-1)p + (p-1) = p^{k_0} - 1$. Συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{w(p^{k_0}-1)+u}{p^{m_0-1}(p^{k_0}-1)} = \tfrac{w}{p^{m_0-1}} + \tfrac{u}{p^{m_0-1}(p^{k_0}-1)} = \tfrac{x_1 p^{m_0-2}+\cdots+x_{m_0-1}}{p^{m_0-1}} + \tfrac{x_{m_0} p^{k_0-1}+\cdots+x_{m_0+k_0-1}}{p^{m_0-1}(p^{k_0}-1)} \\ &= \tfrac{x_1}{p} + \cdots + \tfrac{x_{m_0-1}}{p^{m_0-1}} + \big(\tfrac{x_{m_0}}{p^{m_0}} + \cdots + \tfrac{x_{m_0+k_0-1}}{p^{m_0+k_0-1}}\big) \tfrac{1}{1-\frac{1}{p^{k_0}}} \\ &= \tfrac{x_1}{p} + \cdots + \tfrac{x_{m_0-1}}{p^{m_0-1}} + \big(\tfrac{x_{m_0}}{p^{m_0}} + \cdots + \tfrac{x_{m_0+k_0-1}}{p^{m_0+k_0-1}}\big) \big(1 + \tfrac{1}{p^{k_0}} + \tfrac{1}{p^{2k_0}} + \cdots\big) \\ &= \langle x_1 \ldots x_{m_0-1} \overline{x_{m_0} \ldots x_{m_0+k_0-1}} \rangle_p. \end{aligned}$$

Άρα ο x έχει περιοδικό p-αδικό ανάπτυγμα. $\square$

Ασκήσεις.

8.2.1. Χρησιμοποιώντας τη σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ από την άσκηση 8.1.5, αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει.

8.2.2. Συγκρίνοντας με απλούστερες σειρές, μελετήστε ως προς τη σύγκλιση τις $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+3n+1}{n^4-n^2+4}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\sqrt{n}+2n+1}{2n^2+1}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \log(1+\frac{1}{n^2})$, $\sum_{n=1}^{+\infty}(\sqrt{1+n^2}-n)$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin\frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}(e^{1/n}-1)$, $\sum_{n=1}^{+\infty} n(1-\cos\frac{1}{n})$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \big(n \log\frac{2n+1}{2n-1} - 1\big)$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$.

8.2.3. Βρείτε τις τιμές του a για τις οποίες καθεμιά από τις σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} n^a\big(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\big)$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} n^a(\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} + \sqrt{n-1})$ συγκλίνει.
Βρείτε τις τιμές των a, b με $a > b > 0$, για τις οποίες καθεμιά από τις σειρές $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^a-n^b}$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a^n-b^n}$ συγκλίνει.
Βρείτε τις τιμές των $a, b, c > 0$ για τις οποίες η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{b^n+c^n}$ συγκλίνει.

8.2.4. Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)}$ συγκλίνει.

8.2.5. Εφαρμόστε το ολοκληρωτικό κριτήριο στις $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^2+1}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(\sqrt{n}+1)}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n}{1+e^{2n}}$, $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\log n}$, $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\log n)^2}$, $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n\log n\log(\log n)}$, $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n\log n(\log(\log n))^2}$. Για όσες σειρές συγκλίνουν βρείτε εκτιμήσεις για το άθροισμά τους. Για όσες σειρές αποκλίνουν στο $+\infty$ βρείτε εκτιμήσεις για τα μερικά αθροίσματά τους. Κατόπιν, εφαρμόστε και το κριτήριο συμπύκνωσης στις παραπάνω σειρές.

8.2.6. Αποδείξτε ότι οι σειρές $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\log n)^p}$, $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n\log n(\log(\log n))^p}$ συγκλίνουν, αν $p > 1$, και αποκλίνουν στο $+\infty$, αν $p \leq 1$.

8.2.7. Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^a(\log n)^b}$ συγκλίνει αν $a = 1$, $b > 1$ και αν $a > 1$ και ότι αποκλίνει στο $+\infty$ σε κάθε άλλη περίπτωση.
Έστω $a > 0$. Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a^n n^b}$ συγκλίνει αν $a = 1$, $b > 1$ και αν $a > 1$ και ότι αποκλίνει στο $+\infty$ σε κάθε άλλη περίπτωση.
Έστω $a > 0$. Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{a^n(\log n)^b}$ συγκλίνει αν $a > 1$ και ότι αποκλίνει στο $+\infty$ σε κάθε άλλη περίπτωση.

8.2.8. Διατυπώστε και αποδείξτε μια παραλλαγή του κριτηρίου συμπύκνωσης, θεωρώντας τις δυνάμεις p^k του οποιουδήποτε φυσικού $p \geq 3$, αντί των δυνάμεων 2^k του 2.

8.2.9. Έστω $p > 1$.
Αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{1}{(p-1)k^{p-1}} \leq \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n^p} \leq \frac{1}{k^p} + \frac{1}{(p-1)k^{p-1}}$ για κάθε k.
Αποδείξτε ότι $k^{p-1} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n^p} \to \frac{1}{p-1}$ (όταν $k \to +\infty$).
Αποδείξτε ότι ισχύει $\lim_{p \to 1+}(p-1) \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n^p} = 1$ για κάθε k.

8.2.10. Έστω $x > 0$. Αποδείξτε ότι $\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{x} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^2+x^2} \leq \frac{x}{1+x^2} + \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{x}$.
Αποδείξτε ότι $\lim_{x \to +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^2+x^2} = \frac{\pi}{2}$.
Άρα τί απαντάμε αν κάποιος ισχυριστεί ότι γενικά ισχύει η εναλλαγή $\lim_{x \to +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \to +\infty} f_n(x)$ των συμβόλων του ορίου και της σειράς;

8.2.11. Έστω ότι ισχύει $x_n > 0$ για κάθε n και $a \geq 1$. Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει, αποδείξτε ότι και οι σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} {x_n}^a$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{{x_n}^a}{1+{x_n}^a}$ συγκλίνουν.

8.2.12. Έστω ότι ισχύει $x_n \geq 0$ για κάθε n.
Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει, αποδείξτε ότι και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{x_n}}{n}$ συγκλίνει.
Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει, αποδείξτε ότι και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{x_n x_{n+1}}$ συγκλίνει. Αν, επιπλέον, η (x_n) είναι φθίνουσα, τότε αποδείξτε και το αντίστροφο.
Βρείτε παράδειγμα σειράς $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ η οποία αποκλίνει στο $+\infty$ ώστε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{x_n x_{n+1}}$ να συγκλίνει.

8.2.13. [8] [α] Έστω ότι ισχύει $x_n, y_n > 0$ για κάθε n και έστω ότι ισχύει τελικά $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \frac{y_{n+1}}{y_n}$. Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνει, αποδείξτε ότι και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει.
[β] Έστω ότι ισχύει $x_n > 0$ για κάθε n.
Αν $0 < a < 1$ και αν ισχύει τελικά $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq a$, αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει.
Αν $a > 1$ και αν ισχύει τελικά $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq a$, αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ αποκλίνει.
[γ] Έστω ότι ισχύει $x_n > 0$ για κάθε n.
Αν $a > 1$ και αν ισχύει τελικά $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq (1 - \frac{1}{n+1})^a$, αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει.
Αν $a \leq 1$ και αν ισχύει τελικά $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq (1 - \frac{1}{n+1})^a$, αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ αποκλίνει.

8.2.14. [α] Έστω (x_n) φθίνουσα ώστε να ισχύει $x_n \geq 0$ για κάθε n. Αν $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n < +\infty$, αποδείξτε ότι $nx_n \to 0$.
Αποδείξτε ότι $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} = +\infty$ αν $0 \leq p \leq 1$.
[β] Δείτε την άσκηση 8.1.5. Έστω ακολουθία (x_n) ώστε να ισχύει $x_{n+1} \leq \frac{x_n + x_{n+2}}{2}$ για κάθε n και $x_n \to 0$. Αποδείξτε ότι $\sum_{n=1}^{+\infty} n(x_n - 2x_{n+1} + x_{n+2}) = x_1$.

8.2.15. Έστω ότι ισχύει $x_n \geq 0$ για κάθε n. Αν η (x_{n_k}) είναι οποιαδήποτε υποακολουθία της (x_n), αποδείξτε ότι $\sum_{k=1}^{+\infty} x_{n_k} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.

8.2.16. Έστω ότι ισχύει $x_n \leq y_n \leq z_n$ για κάθε n. Αν οι σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ συγκλίνουν, αποδείξτε ότι και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνει.

8.2.17. Έστω $m_1, m_2, m_3, \ldots$ κατά γνησίως αύξουσα διάταξη οι φυσικοί οι οποίοι δεν περιέχουν το δεκαδικό ψηφίο 3 στο δεκαδικό τους ανάπτυγμα. Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{m_n}$ συγκλίνει.

8.2.18. Έστω ότι ισχύει $x_n > 0$ για κάθε n και έστω ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει. Θέτουμε $r_n = \sum_{k=n}^{+\infty} x_k$ για κάθε n.
Αν $p \geq 1$, αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{x_{m+1}}{{r_{m+1}}^p} + \cdots + \frac{x_n}{{r_n}^p} \geq \frac{1}{{r_{m+1}}^{p-1}} - \frac{r_{n+1}}{{r_{m+1}}^p}$ για κάθε m, n με $m < n$

[8] Η συνέχεια στην άσκηση 8.3.28.

και συμπεράνατε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{{r_n}^p}$ αποκλίνει.
Αν $0 < p < 1$, αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{x_n}{{r_n}^p} \leq \frac{1}{1-p}({r_n}^{1-p} - {r_{n+1}}^{1-p})$ για κάθε n και συμπεράνατε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{{r_n}^p}$ συγκλίνει.
Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{{r_n}^p}$ συγκλίνει και στην περίπτωση $p \leq 0$.

8.2.19. Έστω ότι ισχύει $x_n > 0$ για κάθε n και έστω ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ αποκλίνει. Θέτουμε $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ για κάθε n.
Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{1+x_n}$ αποκλίνει.
Αν $p \leq 1$, αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{x_{m+1}}{{s_{m+1}}^p} + \cdots + \frac{x_n}{{s_n}^p} \geq \frac{1}{{s_n}^{p-1}} - \frac{s_m}{{s_n}^p}$ για κάθε m, n με $m < n$ και συμπεράνατε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{{s_n}^p}$ αποκλίνει.
Αν $p > 1$, αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{x_n}{{s_n}^p} \leq \frac{1}{p-1}\big(\frac{1}{{s_{n-1}}^{p-1}} - \frac{1}{{s_n}^{p-1}}\big)$ για κάθε $n \geq 2$ και συμπεράνατε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{{s_n}^p}$ συγκλίνει.

8.2.20. [α] Έστω ότι ισχύει $x_n > 0$ για κάθε n και έστω ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει. Αποδείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (y_n) ώστε $y_n \to +\infty$ και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n y_n$ να συγκλίνει.
[β] Έστω ότι ισχύει $x_n > 0$ για κάθε n και έστω ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ αποκλίνει. Αποδείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (y_n) ώστε $y_n \to 0$ και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n y_n$ να αποκλίνει.
[γ] Έστω ότι η (y_n) είναι γνησίως αύξουσα και $y_n \to +\infty$. Αποδείξτε ότι υπάρχει (x_n) ώστε να ισχύει $x_n > 0$ για κάθε n και ώστε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ να συγκλίνει και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n y_n$ να αποκλίνει.
[δ] Έστω ότι η (y_n) είναι γνησίως φθίνουσα και $y_n \to 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχει (x_n) ώστε να ισχύει $x_n > 0$ για κάθε n και ώστε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ να αποκλίνει και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n y_n$ να συγκλίνει.

8.2.21. [9] Έστω $a_n, b_n \geq 0$ για κάθε n και $p, q > 1$ ώστε $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
[α] Αν $\sum_{n=1}^{+\infty} {a_n}^p < +\infty$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} {b_n}^q < +\infty$, αποδείξτε την **ανισότητα του Hölder** για σειρές,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n \leq \big(\sum_{n=1}^{+\infty} {a_n}^p\big)^{1/p} \big(\sum_{n=1}^{+\infty} {b_n}^q\big)^{1/q}.$$

Αποδείξτε ότι ισχύει η ισότητα αν και μόνο αν υπάρχουν $s, t \geq 0$ όχι και οι δύο ίσοι με 0 ώστε να ισχύει $s{a_n}^p = t{b_n}^q$ για κάθε n.
Αν $\sum_{n=1}^{+\infty} {a_n}^2 < +\infty$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} {b_n}^2 < +\infty$, επειδή $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, η πολύ σημαντική **ανισότητα του Cauchy**,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n \leq \big(\sum_{n=1}^{+\infty} {a_n}^2\big)^{1/2} \big(\sum_{n=1}^{+\infty} {b_n}^2\big)^{1/2},$$

είναι ειδική περίπτωση της ανισότητας του Hölder.
[β] Αν $\sum_{n=1}^{+\infty} {a_n}^p < +\infty$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} {b_n}^p < +\infty$, αποδείξτε την **ανισότητα του Minkowski** για σειρές,

$$\big(\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)^p\big)^{1/p} \leq \big(\sum_{n=1}^{+\infty} {a_n}^p\big)^{1/p} + \big(\sum_{n=1}^{+\infty} {b_n}^p\big)^{1/p}.$$

Αποδείξτε ότι ισχύει η ισότητα αν και μόνο αν υπάρχουν $s, t \geq 0$ όχι και οι δύο ίσοι με 0 ώστε να ισχύει $sa_n = tb_n$ για κάθε n.

8.2.22. Βρείτε συνάρτηση $f : [1, +\infty) \to [0, +\infty)$ συνεχή στο $[1, +\infty)$ ώστε $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) = +\infty$ και το $\lim_{t\to+\infty} \int_1^t f(u)\, du$ να είναι αριθμός.
Βρείτε συνάρτηση $f : [1, +\infty) \to [0, +\infty)$ συνεχή στο $[1, +\infty)$ ώστε $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) < +\infty$ και $\lim_{t\to+\infty} \int_1^t f(u)\, du = +\infty$.

[9] Οι ανισότητες της άσκησης 5.4.22 για σειρές. Η άσκηση αυτή συνεχίζεται στην άσκηση 8.3.23.

8.2.23. Στο θεώρημα 8.1 είδαμε ότι για κάθε σειρά μη-αρνητικών όρων η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της είναι αύξουσα ακολουθία μη-αρνητικών αριθμών. Σε συνδυασμό με την άσκηση 8.1.12, αποδείξτε ότι, αντιστρόφως, σε κάθε αύξουσα ακολουθία μη-αρνητικών αριθμών αντιστοιχεί μια σειρά μη-αρνητικών όρων έτσι ώστε η ακολουθία αυτή να ταυτίζεται με την ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς.

8.2.24. Βρείτε το δυαδικό, το τετραδικό και το δεκαεξαδικό ανάπτυγμα των $\frac{7}{16}$, $\frac{31}{32}$. Βρείτε την έκτη δεκαδική και την έκτη δυαδική προσέγγιση του $\sqrt{2}-1$.

8.2.25. Έστω $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$ και $x, y \in [0, 1)$. Αν για κάποιον n οι n-οστές p-αδικές προσεγγίσεις των x, y είναι ίδιες, αποδείξτε ότι $|x-y| < \frac{1}{p^n}$.

8.2.26. Έστω $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$ και $x \in [0, 1)$. Αν s_n είναι η n-οστή p-αδική προσέγγιση του x, ποιά είναι τα p-αδικά αναπτύγματα των $x - s_n$, $p^n(x - s_n)$;

8.2.27. Έστω $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$ και $x, y \in [0, 1)$.

Αν $x + y < 1$, αποδείξτε ότι το σφάλμα στον υπολογισμό του $x + y$ με την αντικατάσταση των x, y από τις n-οστές p-αδικές προσεγγίσεις τους είναι $< \frac{2}{p^n}$.

Αποδείξτε ότι το αντίστοιχο σφάλμα στον υπολογισμό του xy είναι $< \frac{2}{p^n} - \frac{1}{p^{2n}}$.

8.2.28. Έστω $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$ και οποιοδήποτε συγκεκριμένο p-αδικό ψηφίο k (δηλαδή $0 \leq k \leq p-1$). Αποδείξτε ότι το σύνολο των αριθμών στο $[0, 1)$ των οποίων το n-οστό p-αδικό ψηφίο είναι ίσο με k είναι η ένωση p^{n-1} διαστημάτων τύπου $[a, b)$. Ποιά ακριβώς είναι αυτά τα διαστήματα και τί μήκος έχει καθένα από αυτά; Ποιό είναι το συνολικό μήκος αυτών των διαστημάτων;

8.2.29. Έστω $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$ και $x \in [0, 1)$. Αποδείξτε ότι τα p-αδικά ψηφία του x είναι τελικά 0 αν και μόνο αν $x = \frac{m}{n}$, όπου $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq m < n$, $\gcd(m, n) = 1$ και οι πρώτοι παράγοντες του n είναι πρώτοι παράγοντες και του p.

8.2.30. Έστω $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$. Αποδείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{N}$ υπάρχουν μοναδικοί $n_0 \in \mathbb{Z}$, $n_0 \geq 0$ και $x_0, x_1, \ldots, x_{n_0} \in \mathbb{Z}$ με $0 \leq x_0, x_1, \ldots, x_{n_0} \leq p-1$ και $x_{n_0} \geq 1$ ώστε $x = x_{n_0}p^{n_0} + \cdots + x_1p + x_0$.[10]

Εφαρμόστε στους αριθμούς $2, 16, 354, 10385$ με $p = 10, 2, 3, 16$.

8.2.31. Υπολογίστε τους αριθμούς $\langle 0.34239239239239\ldots\rangle_{10}$, $\langle 0.101101101101101\ldots\rangle_2$ και $\langle 0.01201120112011201\ldots\rangle_3$. Παρατηρήστε ότι και οι τρεις αριθμοί είναι ρητοί.

Υπολογίστε το δυαδικό, το τριαδικό και το δεκαεξαδικό ανάπτυγμα του $\frac{13}{150}$. Παρατηρήστε ότι και τα τρία αναπτύγματα είναι περιοδικά.

8.2.32. [11] Έστω ακολουθία (p_n) στο $\mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $p_n \geq 2$ για κάθε n.

Θεωρούμε οποιαδήποτε ακολουθία (a_n) στο $\mathbb{Z}$ ώστε να ισχύει $0 \leq a_n \leq p_n - 1$ για κάθε n και ώστε να μην ισχύει τελικά $a_n = p_n - 1$. Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{p_1 \cdots p_n}$ συγκλίνει και ότι το άθροισμά της ανήκει στο $[0, 1)$.

Αποδείξτε ότι για κάθε $x \in [0, 1)$ υπάρχει μοναδική ακολουθία (a_n) στο $\mathbb{Z}$ ώστε να ισχύει $0 \leq a_n \leq p_n - 1$ για κάθε n, ώστε να μην ισχύει τελικά $a_n = p_n - 1$ και ώστε $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{p_1 \cdots p_n}$. Βρείτε αναδρομικό τύπο για την ακολουθία (a_n).

8.3 Κριτήρια σύγκλισης σειρών.

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΤΟΥ CAUCHY. *Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $\left|\sum_{k=m+1}^{n} x_k\right| = |x_{m+1} + \cdots + x_n| < \epsilon$ για κάθε m, n με $n > m \geq n_0$.*

[10] Το άθροισμα $x_{n_0}p^{n_0} + \cdots + x_1p + x_0$ ονομάζεται **p-αδικό ανάπτυγμα** του x και συμβολίζεται $\langle x_{n_0} \ldots x_1x_0\rangle_p$. Οι $x_0, x_1, \ldots, x_{n_0}$ ονομάζονται **p-αδικά ψηφία** του x.

[11] Γενίκευση των p-αδικών αναπτυγμάτων.

Απόδειξη. Θεωρούμε τα μερικά αθροίσματα $s_n = x_1 + \cdots + x_n$.
Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η ακολουθία (s_n) συγκλίνει ή, ισοδύναμα, αν και μόνο αν η (s_n) είναι ακολουθία Cauchy. Το ότι η (s_n) είναι ακολουθία Cauchy σημαίνει ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει

$$|s_n - s_m| < \epsilon$$

για κάθε n, m με $n > m \geq n_0$. Η απόδειξη τελειώνει διότι παρατηρούμε ότι ισχύει

$$|x_{m+1} + \cdots + x_n| = |(x_1 + \cdots + x_n) - (x_1 + \cdots + x_m)| = |s_n - s_m|$$

για κάθε n, m με $n > m$. □

Μερικές φορές διατυπώνουμε το κριτήριο του Cauchy ως εξής: η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν

$$\lim_{m,n \to +\infty} \sum_{k=m+1}^{n} x_k = 0.$$

Παράδειγμα 8.3.1. [12] Θα ξαναδούμε την αρμονική σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$.
Έστω ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ συγκλίνει. Τότε (με $\epsilon = \frac{1}{2}$) υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει

$$\left|\tfrac{1}{m+1} + \cdots + \tfrac{1}{n}\right| < \tfrac{1}{2}$$

για κάθε m, n με $n > m \geq n_0$. Άρα, με $n = 2m$, συνεπάγεται ότι ισχύει

$$\left|\tfrac{1}{m+1} + \cdots + \tfrac{1}{2m}\right| < \tfrac{1}{2}$$

για κάθε $m \geq n_0$. Όμως,

$$\left|\tfrac{1}{m+1} + \cdots + \tfrac{1}{2m}\right| = \tfrac{1}{m+1} + \cdots + \tfrac{1}{2m} \geq \tfrac{1}{2m} + \cdots + \tfrac{1}{2m} = \tfrac{2m-m}{2m} = \tfrac{1}{2}$$

και από τις δύο τελευταίες σχέσεις καταλήγουμε σε άτοπο.
Άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει, οπότε, ως σειρά μη-αρνητικών όρων, αποκλίνει στο $+\infty$.

8.3.1 Απόλυτη σύγκλιση.

ΟΡΙΣΜΟΣ 8.5. *Λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$* **συγκλίνει απολύτως** *αν η σειρά (με μη-αρνητικούς όρους) $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$ συγκλίνει ή, ισοδύναμα, αν $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| < +\infty$.*

ΟΡΙΣΜΟΣ 8.6. *Για κάθε x ορίζουμε $x^+ = \frac{|x|+x}{2}$ και $x^- = \frac{|x|-x}{2}$. Ο x^+ ονομάζεται* **μη-αρνητικό μέρος** *του x και ο x^- ονομάζεται* **μη-θετικό μέρος** *του x.*

Για παράδειγμα, είναι $3^+ = 3$ και $3^- = 0$, είναι $(-3)^+ = 0$ και $(-3)^- = 3$ και είναι $0^+ = 0$ και $0^- = 0$.

Παρατηρήστε τις απλές σχέσεις:

$$x^+ + x^- = |x|, \quad x^+ - x^- = x, \quad 0 \leq x^+ \leq |x|, \quad 0 \leq x^- \leq |x|. \tag{8.18}$$

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΠΟΛΥΤΗΣ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ. *Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει απολύτως, τότε συγκλίνει και*

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty} x_n\right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|.$$

Πρώτη απόδειξη. Έστω ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$ συγκλίνει και έστω $\epsilon > 0$.
Σύμφωνα με το κριτήριο του Cauchy, υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $|x_{m+1}| + \cdots + |x_n| < \epsilon$ και, επομένως,

$$|x_{m+1} + \cdots + x_n| \leq |x_{m+1}| + \cdots + |x_n| < \epsilon$$

[12] Προσέξτε την ομοιότητα αυτής της απόδειξης της απόκλισης της αρμονικής σειράς με την απόδειξη στο παράδειγμα 2.4.4, με τη λύση της άσκησης 2.5.4 και κυρίως με τη λύση της άσκησης 2.6.2.

για κάθε m, n με $n > m \geq n_0$.
Άρα, και πάλι σύμφωνα με το κριτήριο του Cauchy, η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει.
Τώρα, επειδή ισχύει $-|x_n| \leq x_n \leq |x_n|$ για κάθε n, συνεπάγεται

$$- \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$$

και, επομένως, $\big|\sum_{n=1}^{+\infty} x_n\big| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$.
Δεύτερη απόδειξη. Έστω ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$ συγκλίνει.
Από την πρόταση 8.7[α] και από τις ανισότητες (8.18) για τους x_n συνεπάγεται ότι και οι σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} {x_n}^+$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} {x_n}^-$ συγκλίνουν.
Επειδή ισχύει $x_n = {x_n}^+ - {x_n}^-$ για κάθε n, συνεπάγεται ότι και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει και

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = \sum_{n=1}^{+\infty} ({x_n}^+ - {x_n}^-) = \sum_{n=1}^{+\infty} {x_n}^+ - \sum_{n=1}^{+\infty} {x_n}^-.$$

Επίσης,

$$\begin{aligned} \big|\sum_{n=1}^{+\infty} x_n\big| &= \big|\sum_{n=1}^{+\infty} {x_n}^+ - \sum_{n=1}^{+\infty} {x_n}^-\big| \leq \big|\sum_{n=1}^{+\infty} {x_n}^+\big| + \big|\sum_{n=1}^{+\infty} {x_n}^-\big| \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} {x_n}^+ + \sum_{n=1}^{+\infty} {x_n}^- = \sum_{n=1}^{+\infty} ({x_n}^+ + {x_n}^-) = \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|, \end{aligned}$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε ότι ισχύει $|x_n| = {x_n}^+ + {x_n}^-$ για κάθε n. □

Αν δούμε την ανισότητα $\big|\sum_{n=1}^{+\infty} x_n\big| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$ ως γενίκευση των $|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|$, $|x_1 + x_2 + x_3| \leq |x_1| + |x_2| + |x_3|$ κ.τ.λ., τότε δικαιολογείται ο όρος **τριγωνική ανισότητα** για την ανισότητα αυτή.

Παράδειγμα 8.3.2. Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ συγκλίνει διότι συγκλίνει απολύτως.
Πράγματι, η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \big|\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\big| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει.

Παράδειγμα 8.3.3. Δεν ισχύει το αντίστροφο του κριτηρίου απόλυτης σύγκλισης.
Για παράδειγμα, η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ συγκλίνει αλλά όχι απολύτως, αφού $\sum_{n=1}^{+\infty} \big|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\big| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 8.11. [α] *Αν ισχύει $|x_n| \leq y_n$ για κάθε n και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει απολύτως και, επομένως, συγκλίνει. Επίσης, είναι $\big|\sum_{n=1}^{+\infty} x_n\big| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} y_n$.*
[β] *Έστω ότι ισχύει $y_n > 0$ για κάθε n και έστω ότι η ακολουθία $\big(\frac{|x_n|}{y_n}\big)$ συγκλίνει ή, γενικότερα, είναι φραγμένη. Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει απολύτως και, επομένως, συγκλίνει.*

Απόδειξη. [α] Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνει, συνεπάγεται ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$ συγκλίνει, οπότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει και $\big|\sum_{n=1}^{+\infty} x_n\big| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} y_n$.
[β] Άμεση συνέπεια της πρότασης 8.7 και του κριτηρίου απόλυτης σύγκλισης. □

Διάφορα σχόλια που είχαν γίνει μετά από την πρόταση 8.7 έχουν θέση και εδώ, μόνο που εφαρμόζονται στη σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$ αντί της σειράς $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$. Δηλαδή, τα ίδια σχόλια διατυπώνονται σε σχέση με την *απόλυτη σύγκλιση* της $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.

Παράδειγμα 8.3.4. Για να μελετήσουμε τη σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{3^n+2^n}$ γράφουμε

$$\big|\frac{(-2)^n}{3^n+2^n}\big| = \frac{2^n}{3^n+2^n} = \big(\frac{2}{3}\big)^n \frac{1}{1+(2/3)^n},$$

οπότε

$$\big|\frac{(-2)^n}{3^n+2^n}\big| / \big(\frac{2}{3}\big)^n \to 1.$$

Επειδή η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{2}{3})^n$ συγκλίνει, συνεπάγεται ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{3^n+2^n}$ συγκλίνει και, μάλιστα, απολύτως.

Θα παρατηρήσετε ότι τα επόμενα δύο κριτήρια που θα μελετήσουμε εφαρμόζονται, ουσιαστικά, σε σειρές με μη-αρνητικούς όρους: όταν, βάσει αυτών των κριτηρίων, προκύπτει θετικό συμπέρασμα, αυτό είναι η *απόλυτη σύγκλιση* μιας σειράς. Με άλλα λόγια, αν αντιμετωπίζουμε μια σειρά η οποία *συγκλίνει αλλά δεν συγκλίνει απολύτως* (και δεν το γνωρίζουμε), τότε τα κριτήρια αυτά δεν θα δώσουν θετικό συμπέρασμα. Έτσι θα καταλάβουμε ότι η σειρά δεν συγκλίνει απολύτως, οπότε απομένει να εξετάσουμε με τα κριτήρια που ακολουθούν[13] αν η σειρά συγκλίνει υπό συνθήκη.

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΛΟΓΟΥ ΤΟΥ D' ALEMBERT. *Έστω $x_n \neq 0$ για κάθε n.*
(i) Αν $\overline{\lim}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| < 1$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει απολύτως.
(ii) Αν $\underline{\lim}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| > 1$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ αποκλίνει.
(iii) Αν $\underline{\lim}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \leq 1 \leq \overline{\lim}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|$, τότε δεν υπάρχει γενικό συμπέρασμα για τη σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.

Απόδειξη. (i) Θεωρούμε έναν οποιονδήποτε a ώστε $\overline{\lim}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| < a < 1$.
Τότε υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \leq a$ για κάθε $n \geq n_0$. Τότε για κάθε $n \geq n_0 + 1$ ισχύει

$$|x_n| = \left|\frac{x_n}{x_{n-1}}\right|\left|\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}}\right|\cdots\left|\frac{x_{n_0+1}}{x_{n_0}}\right||x_{n_0}| \leq aa\cdots a|x_{n_0}| = a^{n-n_0}|x_{n_0}| = \frac{|x_{n_0}|}{a^{n_0}}\, a^n = ca^n,$$

όπου $c = \frac{|x_{n_0}|}{a^{n_0}}$. Επειδή $0 \leq a < 1$, η σειρά $\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} a^n$ συγκλίνει, οπότε και η $\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} |x_n|$ συγκλίνει. Άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$ συγκλίνει.
(ii) Υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \geq 1$ για κάθε $n \geq n_0$. Δηλαδή, ισχύει

$$|x_n| \geq |x_{n-1}| \geq \cdots \geq |x_{n_0}| > 0$$

για κάθε $n \geq n_0 + 1$. Άρα δεν ισχύει $x_n \to 0$ και, επομένως, η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ δεν συγκλίνει.
(iii) Για τις σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ είναι $\left|\frac{1/(n+1)}{1/n}\right| \to 1$ και $\left|\frac{1/(n+1)^2}{1/n^2}\right| \to 1$. Η πρώτη σειρά αποκλίνει και η δεύτερη συγκλίνει. $\square$

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΡΙΖΑΣ ΤΟΥ CAUCHY. *(i) Αν $\overline{\lim}\sqrt[n]{|x_n|} < 1$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει απολύτως.*
(ii) Αν $\overline{\lim}\sqrt[n]{|x_n|} > 1$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ αποκλίνει.
(iii) Αν $\overline{\lim}\sqrt[n]{|x_n|} = 1$, τότε δεν υπάρχει γενικό συμπέρασμα για τη σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.

Απόδειξη. (i) Θεωρούμε έναν οποιονδήποτε a ώστε $\overline{\lim}\sqrt[n]{|x_n|} < a < 1$.
Τότε υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $\sqrt[n]{|x_n|} \leq a$ και, επομένως,

$$|x_n| \leq a^n$$

για κάθε $n \geq n_0$. Επειδή $0 \leq a < 1$, η σειρά $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a^n$ συγκλίνει, οπότε και η σειρά $\sum_{n=n_0}^{+\infty} |x_n|$ συγκλίνει. Άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$ συγκλίνει.
(ii) Ισχύει $\sqrt[n]{|x_n|} \geq 1$ και, επομένως,

$$|x_n| \geq 1$$

για άπειρους n. Άρα δεν ισχύει $x_n \to 0$, οπότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ δεν συγκλίνει.
(iii) Για τις σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ είναι $\sqrt[n]{|1/n|} \to 1$ και $\sqrt[n]{|1/n^2|} \to 1$. Η πρώτη σειρά αποκλίνει ενώ η δεύτερη συγκλίνει. $\square$

Στην εφαρμογή των κριτηρίων λόγου και ρίζας σε συγκεκριμένες σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$, τις περισσότερες φορές υπάρχουν τα όρια

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|, \qquad \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|x_n|}.$$

Τότε, όπως γνωρίζουμε (και το χρησιμοποιήσαμε στις αποδείξεις των μερών (iii) των δύο κριτηρίων) είναι $\underline{\lim} = \overline{\lim} = \lim$.

[13] δηλαδή, τα κριτήρια του Dirichlet, του Abel και των εναλλασσόμενων προσήμων.

Παράδειγμα 8.3.5. Θεωρούμε τη σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n}$.
Θα εφαρμόσουμε το κριτήριο λόγου. Αν $a = 0$, η σειρά, προφανώς, συγκλίνει απολύτως. Αν $a \neq 0$, είναι

$$\left|\frac{a^{n+1}/(n+1)}{a^n/n}\right| = |a|\frac{n}{n+1} \to |a|.$$

Άρα, αν $0 < |a| < 1$, η σειρά συγκλίνει απολύτως και, αν $|a| > 1$, η σειρά αποκλίνει.
Τώρα θα εφαρμόσουμε το κριτήριο ρίζας. Είναι

$$\sqrt[n]{|a^n/n|} = |a|/\sqrt[n]{n} \to |a|.$$

Επομένως, αν $|a| < 1$, η σειρά συγκλίνει απολύτως και, αν $|a| > 1$, η σειρά αποκλίνει.
Αν $|a| = 1$, κανένα από τα δύο κριτήρια δεν δίνει συμπέρασμα, οπότε εξετάζουμε τις περιπτώσεις $a = \pm 1$ ανεξάρτητα από τα δύο κριτήρια.
Αν $a = 1$, η σειρά είναι η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$, η οποία αποκλίνει.
Αν $a = -1$, η σειρά είναι η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, η οποία συγκλίνει (αλλά όχι απολύτως).
Συνολικά, η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n}$ συγκλίνει αν και μόνο αν $-1 \leq a < 1$ και συγκλίνει απολύτως αν και μόνο αν $-1 < a < 1$.

Παράδειγμα 8.3.6. Θεωρούμε τη σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n^2}$.
Θα εφαρμόσουμε το κριτήριο λόγου. Αν $a = 0$, η σειρά, προφανώς, συγκλίνει απολύτως. Αν $a \neq 0$, είναι

$$\left|\frac{a^{n+1}/(n+1)^2}{a^n/n^2}\right| = |a|\frac{n^2}{(n+1)^2} \to |a|.$$

Άρα, αν $0 < |a| < 1$, η σειρά συγκλίνει απολύτως και, αν $|a| > 1$ η σειρά αποκλίνει.
Τώρα θα εφαρμόσουμε το κριτήριο ρίζας. Είναι

$$\sqrt[n]{|a^n/n^2|} = |a|/(\sqrt[n]{n})^2 \to |a|.$$

Επομένως, αν $|a| < 1$, η σειρά συγκλίνει απολύτως και, αν $|a| > 1$, η σειρά αποκλίνει.
Αν $|a| = 1$, κανένα από τα δύο κριτήρια δεν δίνει συμπέρασμα.
Αν $a = 1$, η σειρά είναι η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, η οποία συγκλίνει απολύτως.
Αν $a = -1$, η σειρά είναι η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$, η οποία, επίσης, συγκλίνει απολύτως.
Άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n^2}$ συγκλίνει απολύτως αν $|a| \leq 1$ και αποκλίνει αν $|a| > 1$.

Παράδειγμα 8.3.7. Στη σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}$ εφαρμόζουμε το κριτήριο λόγου.
Αν $a = 0$, η σειρά συγκλίνει απολύτως. Αν $a \neq 0$, είναι

$$\left|\frac{a^{n+1}/(n+1)!}{a^n/n!}\right| = \frac{|a|}{n+1} \to 0 < 1.$$

Άρα η σειρά συγκλίνει απολύτως για κάθε a.
Η εφαρμογή του κριτηρίου ρίζας είναι πιο δύσκολη. Είναι

$$\sqrt[n]{|a^n/n!|} = |a|/\sqrt[n]{n!}$$

και χρειαζόμαστε το όριο[14]

$$\sqrt[n]{n!} \to +\infty.$$

Αν ο n είναι άρτιος,

$$n! = 1 \cdots \tfrac{n}{2}(\tfrac{n}{2}+1) \cdots n \geq (\tfrac{n}{2}+1) \cdots n \geq (\tfrac{n}{2}+1)^{n/2} \geq (\tfrac{n+1}{2})^{n/2}.$$

Αν ο n είναι περιττός,

$$n! = 1 \cdots \tfrac{n-1}{2}\tfrac{n+1}{2} \cdots n \geq \tfrac{n+1}{2} \cdots n \geq (\tfrac{n+1}{2})^{(n+1)/2} \geq (\tfrac{n+1}{2})^{n/2}.$$

[14] Μια απόδειξη για το όριο αυτό είναι στην άσκηση 2.4.4. Εδώ έχουμε μια απλούστερη απόδειξη.

Άρα ισχύει $\sqrt[n]{n!} \geq (\frac{n+1}{2})^{1/2}$ για κάθε n, οπότε $\sqrt[n]{n!} \to +\infty$. Επομένως,

$$\sqrt[n]{|a^n/n!|} \to 0 < 1,$$

οπότε η σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}$ συγκλίνει απολύτως.
Η σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}$ είναι ιδιαιτέρως σημαντική και θα τήν ξαναδούμε στο παράδειγμα 8.5.2 και, κυρίως, στα παραδείγματα 10.2.13 και 10.3.3. Στην περίπτωση $a = 1$ γνωρίζουμε ότι το άθροισμα της σειράς είναι ο αριθμός e.

Ίσως αναρωτηθεί κανείς αν υπάρχει κάποια σχέση ανάμεσα στα κριτήρια λόγου και ρίζας στην περίπτωση που μπορούν να εφαρμοσθούν και τα δύο ταυτοχρόνως, δηλαδή, αν έχουμε σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ για την οποία ισχύει $x_n \neq 0$ για κάθε n. Η απάντηση είναι ότι *το κριτήριο ρίζας είναι ισχυρότερο από το κριτήριο λόγου*. Δηλαδή, αν το κριτήριο λόγου δίνει κάποιο αποτέλεσμα για τη σύγκλιση της σειράς, τότε και το κριτήριο ρίζας δίνει το ίδιο αποτέλεσμα[15] ενώ υπάρχουν παραδείγματα σειρών για τα οποία το κριτήριο λόγου δεν δίνει αποτέλεσμα ενώ το κριτήριο ρίζας δίνει. Όμως, μερικές φορές, όπως στο τελευταίο παράδειγμα, είναι πιο εύκολο να εφαρμοσθεί το κριτήριο λόγου από το κριτήριο ρίζας.

8.3.2 Υπό συνθήκη σύγκλιση.

ΟΡΙΣΜΟΣ 8.7. *Λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$* **συγκλίνει υπό συνθήκη** *αν συγκλίνει αλλά δεν συγκλίνει απολύτως.*

Παράδειγμα 8.3.8. Λίγο πριν, στο παράδειγμα 8.3.3, αναφέραμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ συγκλίνει αλλά όχι απολύτως. Δηλαδή, η σειρά αυτή συγκλίνει υπό συνθήκη.

Στο σημείο αυτό θα κάνουμε κάποια σχόλια για την έννοια της σύγκλισης μιας σειράς.
Πρώτον, έστω μια σειρά με *μη-αρνητικούς* όρους. Το να συγκλίνει η σειρά είναι ισοδύναμο με το να είναι φραγμένα τα μερικά αθροίσματά της. Αυτά τα μερικά αθροίσματα δημιουργούνται με διαδοχική άθροιση των όρων της σειράς, οπότε είναι φανερό ότι για να είναι τα μερικά αθροίσματα φραγμένα πρέπει το μέγεθος των όρων (προσθετέων) να είναι αρκετά μικρό: "όταν προσθέτουμε μεγάλους αριθμούς βρίσκουμε μεγάλα αθροίσματα ενώ όταν προσθέτουμε μικρούς αριθμούς βρίσκουμε μικρά αθροίσματα". Αυτό φαίνεται και από την πρόταση 8.1 η οποία λέει ότι, αν μια σειρά συγκλίνει, τότε οι όροι της τείνουν στον 0. Όμως, η απλή σύγκλιση των όρων στον 0 δεν αρκεί από μόνη της να κάνει τη σειρά να συγκλίνει. Για παράδειγμα, και στις δύο σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ οι όροι τείνουν στον 0, αλλά η πρώτη συγκλίνει ενώ η δεύτερη δεν συγκλίνει. Παρατηρήστε ότι οι όροι της πρώτης σειράς είναι *πολύ μικρότεροι* από τους αντίστοιχους όρους της δεύτερης σειράς. Πράγματι: $\frac{1/n^2}{1/n} \to 0$. Δηλαδή, το μέγεθος των όρων της πρώτης σειράς είναι τόσο μικρό ώστε η σειρά συγκλίνει ενώ το μέγεθος των όρων της δεύτερης σειράς δεν είναι τόσο μικρό όσο θα έπρεπε για να συγκλίνει και αυτή. Αυτό το "παιχνίδι" με το μέγεθος των όρων φαίνεται καθαρά και στην πρόταση 8.7. Το βασικό της συμπέρασμα είναι ότι, αν μια σειρά με μεγαλύτερους όρους συγκλίνει, τότε και η σειρά με τους μικρότερους όρους συγκλίνει.
Όλα τα προηγούμενα έχουν ως βασική προϋπόθεση ότι αναφερόμαστε σε σειρές με μη-αρνητικούς όρους: *ένας μη-αρνητικός αριθμός ταυτίζεται με το μέγεθός του.*
Η κατάσταση αλλάζει κάπως όταν εργαζόμαστε με σειρές των οποίων οι όροι έχουν μεταβαλλόμενο πρόσημο. Και πάλι, για να συγκλίνει μια σειρά, πρέπει οι όροι της να τείνουν στον 0 και, επομένως, το μέγεθός τους συνεχίζει να παίζει ρόλο. Όμως, το μέγεθος των όρων δεν παίζει πια τον καθοριστικό ρόλο. Δείτε, για παράδειγμα τις σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$. Οι όροι τους έχουν ακριβώς το ίδιο μέγεθος. Όμως, ενώ το μέγεθος αυτό δεν είναι αρκετά μικρό ώστε να συγκλίνει η δεύτερη σειρά, είναι αρκετά μικρό ώστε να συγκλίνει η πρώτη σειρά. Ο λόγος είναι ότι από τα διαφορετικά πρόσημα προκαλείται αλληλοαναίρεση των όρων κατά την άθροισή τους και έτσι τα μερικά αθροίσματα παραμένουν "υπό έλεγχο". Αυτό ακριβώς το φαινόμενο παρατηρείται

[15] Δείτε την άσκηση 8.3.25.

σε οποιαδήποτε σειρά που συγκλίνει υπό συνθήκη. Το μέγεθος των όρων της δεν είναι αρκετά μικρό ώστε να συγκλίνει η σειρά απολύτως (δηλαδή να συγκλίνει η σειρά των μεγεθών των όρων) αλλά είναι αρκετά μικρό ώστε, *μετά και από τις αλληλοαναιρέσεις λόγω διαφορετικών προσήμων*, η σειρά να συγκλίνει. Έτσι, το κριτήριο απόλυτης σύγκλισης φαίνεται λογικό: αν το μέγεθος των όρων μιας σειράς είναι αρκετά μικρό ώστε η σειρά των μεγεθών αυτών να συγκλίνει, τότε είναι αρκετά μικρό ώστε, μετά και από τις αλληλοαναιρέσεις λόγω διαφορετικών προσήμων, η σειρά των ίδιων των όρων να συγκλίνει.
Λόγω αυτής της διαφοράς ανάμεσα στη φύση της σύγκλισης των σειρών με μη-αρνητικούς όρους και στη φύση της σύγκλισης των σειρών με γενικούς όρους, υπάρχει και αντίστοιχη διαφορά ανάμεσα στις χρησιμοποιούμενες μεθόδους μελέτης της σύγκλισής τους. Για παράδειγμα, η "σύγκριση" αντίστοιχων όρων όπως αυτή εκφράζεται στα δύο μέρη της πρότασης 8.7 και στα αντίστοιχα μέρη της πρότασης 8.11 δεν εφαρμόζεται σε σειρές που συγκλίνουν υπό συνθήκη, ακριβώς επειδή πρόκειται για σύγκριση των *μεγεθών* των αντίστοιχων όρων. Η μέθοδος της "σύγκρισης" εφαρμόζεται μόνο για τη μελέτη της σύγκλισης σειρών μη-αρνητικών όρων ή της απόλυτης σύγκλισης σειρών (δηλαδή, και πάλι, της σύγκλισης σειρών μη-αρνητικών όρων). Οι μέθοδοι μελέτης της σύγκλισης σειρών, οι οποίες δεν συγκλίνουν απολύτως, είναι αυτές που θα δούμε τώρα: *τα κριτήρια του Dirichlet και του Abel και, ως πόρισμα, το κριτήριο εναλλασσόμενων προσήμων.*

ΤΥΠΟΣ ΑΘΡΟΙΣΗΣ ΤΟΥ ABEL. *Έστω ακολουθίες* (a_n), (b_n) *και* $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ *τα μερικά αθροίσματα της πρώτης. Για κάθε* n, m *με* $n > m$ *ισχύει*

$$\sum_{k=m+1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=m+1}^{n} s_k(b_k - b_{k+1}) + s_n b_{n+1} - s_m b_{m+1}.$$

Απόδειξη. Είναι

$$\begin{aligned}\sum_{k=m+1}^{n} a_k b_k &= \sum_{k=m+1}^{n} (s_k - s_{k-1}) b_k = \sum_{k=m+1}^{n} s_k b_k - \sum_{k=m+1}^{n} s_{k-1} b_k \\ &= \sum_{k=m+1}^{n} s_k b_k - \sum_{k=m}^{n-1} s_k b_{k+1} \\ &= \sum_{k=m+1}^{n} s_k b_k - \sum_{k=m+1}^{n} s_k b_{k+1} + s_n b_{n+1} - s_m b_{m+1} \\ &= \sum_{k=m+1}^{n} s_k (b_k - b_{k+1}) + s_n b_{n+1} - s_m b_{m+1}.\end{aligned}$$

□

Στον τύπο άθροισης του Abel παρατηρήστε τον τρόπο με τον οποίο γίνεται η "μετάβαση" από το άθροισμα $\sum_{k=m+1}^{n} a_k b_k$ στο $\sum_{k=m+1}^{n} s_k(b_k - b_{k+1}) + s_n b_{n+1} - s_m b_{m+1}$. Τη θέση των a_k παίρνουν τα διαδοχικά μερικά αθροίσματά τους s_k και τη θέση των b_k παίρνουν οι διαδοχικές διαφορές τους $b_k - b_{k+1}$. Εμφανίζονται και οι "ακραίοι" όροι $s_n b_{n+1}$ και $s_m b_{m+1}$.

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΤΟΥ DIRICHLET. *Έστω ακολουθίες* (a_n), (b_n) *και* $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ *τα μερικά αθροίσματα της πρώτης. Αν η* (b_n) *είναι φθίνουσα, αν* $b_n \to 0$ *και αν η* (s_n) *είναι φραγμένη, τότε η σειρά* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ *συγκλίνει.*

Απόδειξη. Υπάρχει M ώστε να ισχύει $|s_n| \leq M$ για κάθε n. Επίσης, επειδή η (b_n) είναι φθίνουσα και έχει όριο 0, ισχύει $b_n \geq 0$ για κάθε n.
Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $b_n \leq \frac{\epsilon}{2M+1}$ για κάθε $n \geq n_0$. Βάσει του τύπου άθροισης του Abel, για κάθε n, m με $n > m \geq n_0$ ισχύει

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{k=m+1}^{n} a_k b_k\Big| &= \Big|\sum_{k=m+1}^{n} s_k(b_k - b_{k+1}) + s_n b_{n+1} - s_m b_{m+1}\Big| \\ &\leq \sum_{k=m+1}^{n} |s_k|(b_k - b_{k+1}) + |s_n| b_{n+1} + |s_m| b_{m+1} \\ &\leq M \sum_{k=m+1}^{n} (b_k - b_{k+1}) + M b_{n+1} + M b_{m+1} \\ &= M(b_{m+1} - b_{n+1}) + M b_{n+1} + M b_{m+1} = 2M b_{m+1} \leq \frac{2M\epsilon}{2M+1} < \epsilon.\end{aligned}$$

Από το κριτήριο του Cauchy συνεπάγεται ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ συγκλίνει. □

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΤΟΥ ABEL. *Έστω ακολουθίες (a_n), (b_n) και $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ τα μερικά αθροίσματα της πρώτης. Αν η (b_n) είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη και αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ συγκλίνει.*

Απόδειξη. Η (b_n) συγκλίνει, οπότε έστω $b_n \to b$.
Βάσει του κριτηρίου του Dirichlet, η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(b_n - b)$ συγκλίνει.
Τώρα, ισχύει $a_n b_n = a_n(b_n - b) + a_n b$ για κάθε n, οπότε

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(b_n - b) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n b = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(b_n - b) + b\sum_{n=1}^{+\infty} a_n,$$

οπότε η $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ συγκλίνει. □

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΕΝΑΛΛΑΣΣΟΜΕΝΩΝ ΠΡΟΣΗΜΩΝ. *Αν η ακολουθία (b_n) είναι φθίνουσα και $b_n \to 0$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \cdots$ συγκλίνει.*

Απόδειξη. Είναι $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} = \begin{cases} 0, & \text{αν } n \text{ άρτιος} \\ 1, & \text{αν } n \text{ περιττός} \end{cases}$ Άρα, βάσει του κριτηρίου του Dirichlet, η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1} b_n$ συγκλίνει. □

Παράδειγμα 8.3.9. Τυπικά παραδείγματα είναι οι σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$, όταν $0 < p \leq 1$. Οι σειρές αυτές συγκλίνουν υπο συνθήκη.
Οι απλούστερες από αυτές είναι οι $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$. Έχουμε ήδη αποδείξει ότι η πρώτη σειρά συγκλίνει.

Ασκήσεις.

8.3.1. Εφαρμόστε το κριτήριο λόγου όπου είναι δυνατό: $\sum_{n=1}^{+\infty} n^3$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{3^n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{n!}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n (n+1)!}{n^n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\cdot5\cdot8\cdots(3n-1)}{1\cdot5\cdot9\cdots(4n-3)}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{10^n n!(3n)!}{(4n)!}$.

8.3.2. Εφαρμόστε το κριτήριο ρίζας όπου είναι δυνατό: $\sum_{n=1}^{+\infty} n^3$, $\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{n+1}{2n-1})^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{n-1}{n+1})^{2n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} n^3 2^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n^n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}(\sqrt[n]{n} - 1)^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(\sqrt[n]{n}+1)^n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n2^n}{(\sqrt[n]{n}+1)^n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} e^n (\frac{n}{n+1})^{n^2}$.

8.3.3. Εξετάστε τη σύγκλιση των σειρών $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots$ και $\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^6} + \cdots$, εφαρμόζοντας τα κριτήρια λόγου και ρίζας.

8.3.4. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση και την απόλυτη σύγκλιση τις $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n \log n}$, $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(\log n)^2}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{2^n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\log(1 + \frac{1}{n})$, $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\log(1 + \frac{1}{n})$, $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{\log n}{n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} n^2}{3^n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\sin\frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1} n(1 - \cos\frac{1}{n})$.

8.3.5. Εξετάστε τις $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n+(-1)^n n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n+6(-1)^n n}$ ως προς τη σύγκλιση και την απόλυτη σύγκλιση.

8.3.6. Αποδείξτε ότι οι $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\big(e - (1 + \frac{1}{n})^n\big)$, $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}(\sqrt[n]{n} - 1)$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\sqrt[n]{n}}$ συγκλίνουν υπό συνθήκη.

8.3.7. Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+x^n}$ συγκλίνει αν και μόνο αν $|x| > 1$.

8.3.8. [α] Αν $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| < +\infty$, αποδείξτε ότι οι $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n \cos(nx)$, $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n \sin(nx)$ συγκλίνουν απολύτως.
[β] Αν $0 \leq r < 1$, αποδείξτε ότι

$$1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} r^n \cos(nx) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos x + r^2}, \qquad 2\sum_{n=1}^{+\infty} r^n \sin(nx) = \frac{2r\sin x}{1-2r\cos x + r^2}.$$

[γ] Αν η (x_n) είναι φθίνουσα και $x_n \to 0$, αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n \cos(nx)$ συγκλίνει αν $x \neq m2\pi$ για κάθε $m \in \mathbb{Z}$ και ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n \sin(nx)$ συγκλίνει για κάθε x.
Αποδείξτε ότι οι $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n \log n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{n}\sin(nx)$, $\sum_{n=1}^{+\infty}(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n})\frac{\sin(nx)}{n}$ συγκλίνουν για κάθε x.

8.3.9. Αποδείξτε ότι $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\geq\int_1^{n+1}\frac{1}{2x}\,dx=\log\sqrt{n+1}$ για κάθε n. Κατόπιν, βάσει της $1+x\leq e^x$, αποδείξτε ότι $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}\leq\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ για κάθε n.

Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}$ συγκλίνει.[16]

Αποδείξτε ότι $1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\leq1+\int_1^n\frac{1}{2x-1}\,dx=1+\log\sqrt{2n-1}$ για κάθε n. Κατόπιν, βάσει της $1+x\leq e^x$, αποδείξτε ότι $\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}\geq\frac{1}{e\sqrt{2n-1}}$ για κάθε n.

Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}$ δεν συγκλίνει απολύτως.

Τί έχετε να πείτε για τις $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\big(\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}\big)^2$, $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\big(\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}\big)^3$ ως προς τη σύγκλιση και την απόλυτη σύγκλιση;

8.3.10. Αν η $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ συγκλίνει απολύτως και η ακολουθία (b_n) είναι φραγμένη, αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty}a_nb_n$ συγκλίνει απολύτως.

8.3.11. Έστω (b_n) φθίνουσα ώστε $b_n\to0$. Έστω $s=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}b_n$ και τα μερικά αθροίσματα $s_n=b_1-b_2+\cdots+(-1)^{n-1}b_n$. Αποδείξτε ότι $0\leq(-1)^n(s-s_n)\leq b_{n+1}$ για κάθε n.

8.3.12. [17] [α] Έστω ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n^p}$ συγκλίνει. Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n^{p'}}$ συγκλίνει, αν $p'>p$, και συγκλίνει απολύτως, αν $p'>p+1$.

[β] Έστω ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n^{p_0}}$ συγκλίνει υπό συνθήκη. Αποδείξτε ότι υπάρχουν p_1,p_2 ώστε $p_1\leq p_0\leq p_2$ και $p_2-p_1\leq1$ και ώστε η $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n^p}$ να αποκλίνει, αν $p<p_1$, να συγκλίνει υπό συνθήκη, αν $p_1<p<p_2$, και να συγκλίνει απολύτως, αν $p>p_2$.

8.3.13. Έστω $u_n\to u>0$ και $|x|<1$. Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty}x^{u_1+\cdots+u_n}$ συγκλίνει απολύτως.

8.3.14. [18] Έστω ότι η ακολουθία (b_n) είναι μονότονη και $b_n\to l$. Αν $s_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}b_k$ για κάθε n, αποδείξτε ότι $\overline{\lim}\,s_n-\underline{\lim}\,s_n=|l|$.

8.3.15. Έστω $m\in\mathbb{N}$ με $m\geq2$. Έστω ότι ισχύει $x_n\neq0$ για κάθε n και $\overline{\lim}\left|\frac{x_{n+m}}{x_n}\right|<1$. Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty}x_n$ συγκλίνει απολύτως.[19]

8.3.16. Έστω ότι ισχύει $y_n>0$ για κάθε n και έστω ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty}x_n$ συγκλίνει και η $\sum_{n=1}^{+\infty}y_n$ αποκλίνει. Αποδείξτε ότι $\underline{\lim}\,\frac{x_n}{y_n}\leq0\leq\overline{\lim}\,\frac{x_n}{y_n}$.

8.3.17. Βρείτε ακολουθία (b_n) ώστε να ισχύει $b_n>0$ για κάθε n, ώστε $b_n\to0$ και ώστε η $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}b_n$ να αποκλίνει.

8.3.18. Βρείτε $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ η οποία συγκλίνει και ακολουθία (b_n) ώστε $b_n\to0$, ώστε να ισχύει $b_n\geq0$ για κάθε n και ώστε η $\sum_{n=1}^{+\infty}a_nb_n$ να αποκλίνει.

8.3.19. Βρείτε $\sum_{n=1}^{+\infty}x_n$ η οποία συγκλίνει ώστε η $\sum_{n=1}^{+\infty}{x_n}^2$ να αποκλίνει.

8.3.20. Έστω ότι η ακολουθία (a_n) είναι περιοδική. Δηλαδή, υπάρχει p ώστε να ισχύει $a_{n+p}=a_n$ για κάθε n. Έστω, επίσης, ότι η ακολουθία (b_n) είναι φθίνουσα και $b_n\to0$.

Αν $a_1+\cdots+a_p=0$, αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty}a_nb_n$ συγκλίνει.

Αν $a_1+\cdots+a_p\neq0$, αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty}a_nb_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η $\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$ συγκλίνει.

Αποδείξτε ότι η $\frac{p}{1}-\frac{q}{2}+\frac{p}{3}-\frac{q}{4}+\frac{p}{5}-\frac{q}{6}+\cdots$ συγκλίνει αν και μόνο αν $p=q$.

Αποδείξτε ότι η $\frac{p}{1}-\frac{q}{2}+\frac{r}{3}+\frac{p}{4}-\frac{q}{5}+\frac{r}{6}+\cdots$ συγκλίνει αν και μόνο αν $p+r=q$.

[16] Αργότερα, στα παραδείγματα 10.2.16 και 10.3.7, θα δούμε, ως ειδική περίπτωση του γενικού διωνυμικού τύπου του Newton, ότι το άθροισμα της σειράς αυτής είναι ο αριθμός $1-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

[17] Μια σημαντική άσκηση. Περιγράφεται μια "διάταξη" των σειρών $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n^p}$ σε σχέση με τη σύγκλιση και την απόλυτη σύγκλισή τους ανάλογα με τις τιμές της παραμέτρου p. Οι σειρές αυτές ονομάζονται **σειρές Dirichlet** και εμφανίζονται στην Αναλυτική Θεωρία Αριθμών. Δείτε την άσκηση 10.1.25. Επίσης, την άσκηση 10.1.26 και τη σχετική υποσημείωση για το σημαντικότερο παράδειγμα τέτοιας σειράς, την *ζ- συνάρτηση του Riemann*.

[18] Ένα συμπλήρωμα του κριτηρίου εναλλασσόμενων προσήμων.

[19] Η περίπτωση $m=1$ είναι το κριτήριο λόγου.

8.3.21. Έστω ακολουθία (x_n) και $y_n = n(x_n - x_{n+1})$ για κάθε n.
Αν $nx_n \to a$ και $a \neq 0$, αποδείξτε ότι οι $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ αποκλίνουν.
Αν οι $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνουν, αποδείξτε ότι $nx_n \to 0$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = \sum_{n=1}^{+\infty} y_n$.
Αποδείξτε ότι $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 2 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}$.

8.3.22. Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει απολύτως αν και μόνο αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $|x_{n_1} + \cdots + x_{n_k}| < \epsilon$ για κάθε k και για κάθε (διαφορετικούς) $n_1, \ldots, n_k$ με $n_1, \ldots, n_k \geq n_0$.

8.3.23. [20] Έστω $p, q > 1$ ώστε $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
[α] Αν $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^p < +\infty$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n|^q < +\infty$, αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ συγκλίνει απολύτως και ότι ισχύει η **ανισότητα του Hölder** για σειρές,

$$\big| \sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n \big| \leq \big(\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^p \big)^{1/p} \big(\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n|^q \big)^{1/q}.$$

Αποδείξτε ότι ισχύει η ισότητα αν και μόνο αν υπάρχουν $s, t \geq 0$ όχι και οι δύο ίσοι με 0 ώστε να ισχύει $s|a_n|^p = t|b_n|^q$ για κάθε n και είτε $a_n b_n \geq 0$ για κάθε n είτε $a_n b_n \leq 0$ για κάθε n.
Αν $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^2 < +\infty$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n|^2 < +\infty$, επειδή $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, η πολύ σημαντική **ανισότητα του Cauchy**,

$$\big| \sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n \big| \leq \big(\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^2 \big)^{1/2} \big(\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n|^2 \big)^{1/2},$$

είναι ειδική περίπτωση της ανισότητας του Hölder.
[β] Αν $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^p < +\infty$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n|^p < +\infty$, αποδείξτε την **ανισότητα του Minkowski** για σειρές,

$$\big(\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n + b_n|^p \big)^{1/p} \leq \big(\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^p \big)^{1/p} + \big(\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n|^p \big)^{1/p}.$$

Αποδείξτε ότι ισχύει η ισότητα αν και μόνο αν υπάρχουν $s, t \geq 0$ όχι και οι δύο ίσοι με 0 ώστε να ισχύει $s|a_n| = t|b_n|$ για κάθε n και είτε $a_n b_n \geq 0$ για κάθε n είτε $a_n b_n \leq 0$ για κάθε n.

8.3.24. Έστω ότι ισχύει $w_n > 0$ για κάθε n και $\sum_{n=1}^{+\infty} w_n = 1$. Αν η $f : I \to \mathbb{R}$ είναι κυρτή στο διάστημα I και ισχύει $a_n \in I$ για κάθε n και η $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n w_n$ συγκλίνει, αποδείξτε την **ανισότητα του Jensen** για σειρές,

$$f\big(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n w_n \big) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} f(a_n) w_n.$$

Αν η f είναι κοίλη στο I, αποδείξτε ότι ισχύει η αντίστροφη ανισότητα.
Αν, επιπλέον, η f είναι γνησίως κυρτή (κοίλη) στο I, αποδείξτε ότι η ανισότητα αυτή ισχύει ως ισότητα αν και μόνο αν οι αριθμοί $a_1, a_2, a_3, \ldots$ είναι ίσοι μεταξύ τους.

8.3.25. Χρησιμοποιώντας την άσκηση 2.7.13, αποδείξτε ότι, όταν το κριτήριο λόγου δείχνει σύγκλιση ή απόκλιση σειράς, το ίδιο συμβαίνει και με το κριτήριο ρίζας.

8.3.26. [21] Έστω $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{N}$. Από κάθε σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ δημιουργούμε μια νέα σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ ως εξής: θέτουμε $y_1 = x_1 + \cdots + x_{f(1)}$ και $y_n = x_{f(n-1)+1} + \cdots + x_{f(n)}$ για κάθε $n \geq 2$.
Αποδείξτε ότι, αν η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ έχει άθροισμα, τότε η $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ έχει το ίδιο άθροισμα.
Ως αντιπαράδειγμα για το αντίστροφο θεωρήστε την $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ με τύπο $f(k) = 2k$ και τη σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}$.
Έστω ότι υπάρχει M ώστε να ισχύει $f(k+1) - f(k) \leq M$ για κάθε k και έστω $x_n \to 0$. Αποδείξτε ότι, αν η $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ έχει άθροισμα, τότε η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ έχει το ίδιο άθροισμα.
Ορίζουμε, επιπλέον, $y'_1 = |x_1| + \cdots + |x_{f(1)}|$ και $y'_n = |x_{f(n-1)+1}| + \cdots + |x_{f(n)}|$ για κάθε $n \geq 2$.
Αποδείξτε ότι, αν $y'_n \to 0$ και η $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ έχει άθροισμα, τότε η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ έχει το ίδιο άθροισμα.

[20] Η συνέχεια της άσκησης 8.2.21.

[21] Η άσκηση αυτή περιγράφει τον μηχανισμό της **ομαδοποίησης** των όρων μιας σειράς. Λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ προκύπτει από τη σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ με **εισαγωγή παρενθέσεων** και ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ προκύπτει από τη σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ με **διαγραφή παρενθέσεων**.

8.3.27. [22] [α] Αν η (b_n) είναι μονότονη και φραγμένη αποδείξτε ότι $\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n - b_{n+1}| < +\infty$.
[β] Έστω ακολουθίες (a_n), (b_n) και τα μερικά αθροίσματα $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ της πρώτης.
Αν $\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n - b_{n+1}| < +\infty$, αν $b_n \to 0$ και αν η (s_n) είναι φραγμένη, αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ συγκλίνει.
Αν $\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n - b_{n+1}| < +\infty$ και αν η $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ συγκλίνει, αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ συγκλίνει.
[γ] Αποδείξτε ότι η ακολουθία (b_n) είναι διαφορά δύο μονότονων φραγμένων ακολουθιών αν και μόνο αν $\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n - b_{n+1}| < +\infty$.

8.3.28. [23] [α] Έστω ότι ισχύει $y_n > 0$ και $x_n \neq 0$ για κάθε n και έστω ότι ισχύει τελικά $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \leq \frac{y_{n+1}}{y_n}$. Αν η $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνει, αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει απολύτως.
[β][24] Έστω ότι ισχύει $x_n \neq 0$ για κάθε n και έστω ότι υπάρχει μ ώστε $n\left(\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| - 1 + \frac{\mu}{n}\right) \to 0$. Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει απολύτως, αν $\mu > 1$, και δεν συγκλίνει απολύτως, αν $\mu < 1$.
Έστω $\mu = 1$ και έστω ότι υπάρχει λ ώστε $n \log n\left(\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| - 1 + \frac{1}{n} + \frac{\lambda}{n \log n}\right) \to 0$. Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει απολύτως, αν $\lambda > 1$, και δεν συγκλίνει απολύτως, αν $\lambda < 1$.
Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^n}{e^n n!}$ συγκλίνει υπό συνθήκη.

8.3.29. [25] Έστω ότι ισχύει $|x_{n,m}| \leq y_n$ για κάθε n, m και $\lim_{m\to+\infty} x_{n,m} = x_n$ για κάθε n. Αν $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n < +\infty$, αποδείξτε ότι για κάθε m η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_{n,m}$ συγκλίνει, η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει, επίσης, και, τέλος,

$$\lim_{m\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} x_{n,m} = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{m\to+\infty} x_{n,m}.$$

8.3.30. Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ αποκλίνει, αποδείξτε ότι και η $\sum_{n=1}^{+\infty} n x_n$ αποκλίνει.

8.4 Διαδοχική άθροιση διπλών σειρών.

ΟΡΙΣΜΟΣ 8.8. *Έστω συνάρτηση $x : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Δηλαδή, σε κάθε ζεύγος (m, n) φυσικών αντιστοιχίζεται μέσω της x ο αριθμός $x(m, n)$. Κάθε τέτοια συνάρτηση x χαρακτηρίζεται* **διπλή ακολουθία** *και, όπως με τις συνήθεις ακολουθίες, προτιμάμε το σύμβολο $x_{m,n}$ αντί του $x(m, n)$. Δηλαδή*

$$x_{m,n} = x(m, n).$$

Για τη διπλή ακολουθία x χρησιμοποιούμε και τα σύμβολα

$$(x_{m,n}) \quad \text{ή} \quad (x_{m,n})_{m,n=1}^{+\infty}.$$

Σ' αυτήν την ενότητα θα μας απασχολήσει το θέμα της άθροισης διπλών ακολουθιών. Το αντίστοιχο θέμα για τις συνήθεις ακολουθίες είναι το θέμα αυτού του κεφαλαίου, δηλαδή οι σειρές. Άρα σ' αυτήν την ενότητα θα ασχοληθούμε με τις λεγόμενες **διπλές σειρές**. Και μάλιστα, δεν θα εξετάσουμε τη γενική θεωρία των διπλών σειρών και τους πολλούς διαφορετικούς τρόπους άθροισής τους. Θα εξετάσουμε μόνο ένα ειδικό αλλά αρκετά χρήσιμο θέμα, το θέμα της λεγόμενης **διαδοχικής άθροισης διπλών σειρών**, και θα δούμε μόνο δύο βασικά αποτελέσματα.

ΟΡΙΣΜΟΣ 8.9. *Τα σύμβολα που χρησιμοποιούμε για μια διπλή σειρά είναι*

$$\sum_{m,n=1}^{+\infty} x_{m,n} \quad \text{ή} \quad \sum_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} x_{m,n}.$$

[22] Λέμε ότι η ακολουθία (b_n) έχει **φραγμένη κύμανση** αν $\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n - b_{n+1}| < +\infty$. Στο [β] περιγράφονται πρώτα το **κριτήριο του Dedekind** και κατόπιν το **κριτήριο του DuBois-Reymond**. Παρατηρήστε ότι το κριτήριο του Dedekind είναι γενίκευση του κριτηρίου του Dirichlet και το κριτήριο του DuBois-Reymond είναι γενίκευση του κριτηρίου του Abel.

[23] Η συνέχεια της άσκησης 8.2.13.

[24] Το **κριτήριο του Gauss**. Ένα χρήσιμο κριτήριο σε περιπτώσεις που το κριτήριο λόγου του d' Alembert αποτυγχάνει.

[25] Η πιο χρήσιμη μέθοδος εναλλαγής των συμβόλων της σειράς και του ορίου ακολουθίας.

ΟΡΙΣΜΟΣ 8.10. *Ο πρώτος τρόπος διαδοχικής άθροισης διπλής σειράς είναι η άθροιση* **πρώτα κατά γραμμές**. *Αυτό σημαίνει ότι πρώτα βρίσκουμε για κάθε $m \in \mathbb{N}$, αν υπάρχει, το άθροισμα $s_m = \sum_{n=1}^{+\infty} x_{m,n}$ και, κατόπιν, βρίσκουμε, αν υπάρχει, το άθροισμα $\sum_{m=1}^{+\infty} s_m$, δηλαδή το*

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} x_{m,n} \Big).$$

Αν το τελικό αποτέλεσμα είναι ένας αριθμός a ή το $+\infty$ ή το $-\infty$, τότε λέμε ότι η διπλή σειρά συγκλίνει στον a ή αποκλίνει στο $+\infty$ ή αποκλίνει στο $-\infty$, αντιστοίχως, με άθροιση πρώτα κατά γραμμές.
Ο δεύτερος τρόπος διαδοχικής άθροισης διπλής σειράς είναι η άθροιση **πρώτα κατά στήλες**. *Αυτό σημαίνει ότι πρώτα βρίσκουμε για κάθε $n \in \mathbb{N}$, αν υπάρχει, το άθροισμα $t_n = \sum_{m=1}^{+\infty} x_{m,n}$ και, κατόπιν, βρίσκουμε, αν υπάρχει, το άθροισμα $\sum_{n=1}^{+\infty} t_n$, δηλαδή το*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\sum_{m=1}^{+\infty} x_{m,n} \Big).$$

Αν το τελικό αποτέλεσμα είναι ένας αριθμός a ή το $+\infty$ ή το $-\infty$, τότε λέμε ότι η διπλή σειρά συγκλίνει στον a ή αποκλίνει στο $+\infty$ ή αποκλίνει στο $-\infty$, αντιστοίχως, με άθροιση πρώτα κατά στήλες.
Ο τρίτος τρόπος διαδοχικής άθροισης διπλής σειράς είναι η άθροιση **πρώτα κατά διαγωνίους**. *Αυτό σημαίνει ότι πρώτα βρίσκουμε για κάθε $k \in \mathbb{N}$ το άθροισμα $u_k = \sum_{l=1}^{k} x_{k-l+1,l}$ και, κατόπιν, βρίσκουμε, αν υπάρχει, το άθροισμα $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$, δηλαδή το*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \Big(\sum_{l=1}^{k} x_{k-l+1,l} \Big).$$

Αν το τελικό αποτέλεσμα είναι ένας αριθμός a ή το $+\infty$ ή το $-\infty$, τότε λέμε ότι η διπλή σειρά συγκλίνει στον a ή αποκλίνει στο $+\infty$ ή αποκλίνει στο $-\infty$, αντιστοίχως, με άθροιση πρώτα κατά διαγωνίους.

Οι όροι “στήλες”, “γραμμές” και “διαγώνιοι” προέρχονται, προφανώς, από τη θεωρία των *πινάκων*. Φανταζόμαστε ότι οι αριθμοί $x_{1,1}, x_{1,2}, x_{1,3}, \ldots$ διατάσσονται στην πρώτη σειρά από τα αριστερά προς τα δεξιά. Αμέσως από κάτω διατάσσονται οι αριθμοί $x_{2,1}, x_{2,2}, x_{2,3}, \ldots$, αμέσως από κάτω από αυτούς διατάσσονται οι $x_{3,1}, x_{3,2}, x_{3,3}, \ldots$ και ούτω καθ’ εξής. Έτσι δημιουργείται ένας “άπειρος” πίνακας με το στοιχείο $x_{1,1}$ στην πάνω αριστερή γωνία του και ο οποίος εκτείνεται απεριόριστα προς τα δεξιά και προς τα κάτω. Το στοιχείο $x_{m,n}$ είναι στην τομή της m-οστής γραμμής και της n-οστής στήλης.

Όταν έχουμε πεπερασμένα αθροίσματα τα πράγματα είναι απλά. Για παράδειγμα, ισχύει:

$$\sum_{m=1}^{M} \Big(\sum_{n=1}^{N} x_{m,n} \Big) = \sum_{n=1}^{N} \Big(\sum_{m=1}^{M} x_{m,n} \Big)$$

διότι η σειρά με την οποία γίνεται η πρόσθεση *πεπερασμένου* πλήθους αριθμών δεν επηρεάζει την τιμή του αθροίσματος. Δείτε, όμως, το εξής παράδειγμα.

Παράδειγμα 8.4.1. Έστω $x_{m,n} = \begin{cases} 1, & \text{αν } m-n=1 \\ -1, & \text{αν } m-n=-1 \\ 0, & \text{αν } m-n \neq \pm 1 \end{cases}$
Εδώ ο άπειρος πίνακας έχει στοιχεία 1 στην διαγώνιο ακριβώς κάτω από την κύρια διαγώνιο και στοιχεία -1 στην διαγώνιο ακριβώς πάνω από την κύρια διαγώνιο. Κάθε αλλο στοιχείο είναι 0.
Τότε, $\sum_{n=1}^{+\infty} x_{1,n} = -1$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} x_{m,n} = 0$ για κάθε $m \geq 2$, οπότε $\sum_{m=1}^{+\infty} \big(\sum_{n=1}^{+\infty} x_{m,n} \big) = -1$.
Επίσης, $\sum_{m=1}^{+\infty} x_{m,1} = 1$ και $\sum_{m=1}^{+\infty} x_{m,n} = 0$ για κάθε $n \geq 2$, οπότε $\sum_{n=1}^{+\infty} \big(\sum_{m=1}^{+\infty} x_{m,n} \big) = 1$.
Τέλος, είναι $\sum_{l=1}^{k} x_{k-l+1,l} = 0$ για κάθε k, οπότε $\sum_{k=1}^{+\infty} \big(\sum_{l=1}^{k} x_{k-l+1,l} \big) = 0$.
Επομένως, οι τρεις τρόποι άθροισης της διπλής σειράς δίνουν τρία διαφορετικά αποτελέσματα.

Έστω διπλή σειρά η οποία έχει μη-αρνητικούς όρους, δηλαδή έστω ότι ισχύει $x_{m,n} \geq 0$ για κάθε m, n.

Τότε, για κάθε m, το άθροισμα $s_m = \sum_{n=1}^{+\infty} x_{m,n}$ υπάρχει και είναι είτε αριθμός ≥ 0 είτε $+\infty$. Τώρα, μια πρώτη περίπτωση είναι όταν ο s_m είναι αριθμός για κάθε m. Τότε, όπως γνωρίζουμε, το άθροισμα $\sum_{m=1}^{+\infty} s_m$ υπάρχει και είναι είτε αριθμός ≥ 0 είτε $+\infty$. Μια δεύτερη περίπτωση είναι όταν για τουλάχιστον έναν m_0 είναι $s_{m_0} = +\infty$. Παρατηρήστε τότε ότι όταν υπολογίζουμε ένα μερικό άθροισμα της $\sum_{m=1}^{+\infty} s_m$, αυτό είναι ένα συνηθισμένο άθροισμα πεπερασμένου πλήθους στοιχείων στο οποίο δεν προκύπτει απροσδιόριστη μορφή, αφού όλα αυτά τα στοιχεία ανήκουν στο $[0, +\infty]$. Και, ειδικώτερα, για κάθε $k \geq m_0$ είναι $s_1 + \cdots + s_k = +\infty$ αφού κάθε τέτοιο άθροισμα περιέχει τον όρο s_{m_0}. Επομένως, τα μερικά αθροίσματα έχουν όριο το $+\infty$, οπότε το άθροισμα $\sum_{m=1}^{+\infty} s_m$ υπάρχει και είναι $+\infty$. Συμπεραίνουμε ότι σε κάθε περίπτωση το άθροισμα $\sum_{m=1}^{+\infty} s_m$, δηλαδή το $\sum_{m=1}^{+\infty} \big(\sum_{n=1}^{+\infty} x_{m,n} \big)$ υπάρχει και είναι είτε αριθμός ≥ 0 είτε $+\infty$.
Ακριβώς τα ίδια ισχύουν και για το άθροισμα $\sum_{n=1}^{+\infty} \big(\sum_{m=1}^{+\infty} x_{m,n} \big)$, δηλαδή ότι είναι είτε αριθμός ≥ 0 είτε $+\infty$.
Η κατάσταση με την άθροιση πρώτα κατά διαγωνίους είναι λίγο πιο απλή. Για κάθε k το άθροισμα $\sum_{l=1}^{k} x_{k-l+1,l}$ είναι, προφανώς, αριθμός ≥ 0, οπότε το άθροισμα $\sum_{k=1}^{+\infty} \big(\sum_{l=1}^{k} x_{k-l+1,l} \big)$ είναι είτε αριθμός ≥ 0 είτε $+\infty$.
Οπότε προκύπτει το ερώτημα αν τα τρία αθροίσματα σχετίζονται και, ειδικώτερα, αν είναι ίσα. Στο ερώτημα αυτό απαντά το θεώρημα 8.2.

ΘΕΩΡΗΜΑ 8.2. *Έστω ότι ισχύει $x_{m,n} \geq 0$ για κάθε m, n. Τότε*

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} x_{m,n} \Big) = \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\sum_{m=1}^{+\infty} x_{m,n} \Big) = \sum_{k=1}^{+\infty} \Big(\sum_{l=1}^{k} x_{k-l+1,l} \Big).$$

Δηλαδή, για σειρές με μη-αρνητικούς όρους οι τρεις τρόποι άθροισης δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα, το οποίο είναι είτε αριθμός ≥ 0 είτε $+\infty$.

Απόδειξη. Για κάθε m είναι

$$\begin{aligned} s_1 + \cdots + s_m &= \sum_{n=1}^{+\infty} x_{1,n} + \cdots + \sum_{n=1}^{+\infty} x_{m,n} = \sum_{n=1}^{+\infty} (x_{1,n} + \cdots + x_{m,n}) \\ &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\sum_{m=1}^{+\infty} x_{m,n} \Big). \end{aligned}$$

Δηλαδή το άθροισμα $\sum_{n=1}^{+\infty} \big(\sum_{m=1}^{+\infty} x_{m,n} \big)$ είναι άνω φράγμα των μερικών αθροισμάτων $s_1 + \cdots + s_m$ για κάθε m, οπότε

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} x_{m,n} \Big) = \sum_{m=1}^{+\infty} s_m \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\sum_{m=1}^{+\infty} x_{m,n} \Big).$$

Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε τη συμμετρική σχέση

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\sum_{m=1}^{+\infty} x_{m,n} \Big) \leq \sum_{m=1}^{+\infty} \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} x_{m,n} \Big)$$

και καταλήγουμε στην ισότητα $\sum_{m=1}^{+\infty} \big(\sum_{n=1}^{+\infty} x_{m,n} \big) = \sum_{n=1}^{+\infty} \big(\sum_{m=1}^{+\infty} x_{m,n} \big)$.
Τώρα δημιουργούμε μια νέα διπλή σειρά, ορίζοντας

$$y_{m,n} = \begin{cases} x_{m,n-m+1}, & \text{αν } m \leq n \\ 0, & \text{αν } m > n \end{cases}$$

Επειδή ισχύει $y_{m,n} \geq 0$ για κάθε m, n, μπορούμε να εφαρμόσουμε το μέχρι τώρα αποτέλεσμα στη διπλή σειρά $\sum_{m,n=1}^{+\infty} y_{m,n}$. Δηλαδή,

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} y_{m,n} \Big) = \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\sum_{m=1}^{+\infty} y_{m,n} \Big). \tag{8.19}$$

Παρατηρούμε, όμως, ότι τα δύο μέλη της (8.19) είναι

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} y_{m,n} \Big) = \sum_{m=1}^{+\infty} \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} x_{m,n} \Big)$$

και

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\sum_{m=1}^{+\infty} y_{m,n} \Big) = \sum_{k=1}^{+\infty} \Big(\sum_{l=1}^{k} x_{k-l+1,l} \Big).$$

Άρα η (8.19) γίνεται $\sum_{m=1}^{+\infty} \big(\sum_{n=1}^{+\infty} x_{m,n} \big) = \sum_{k=1}^{+\infty} \big(\sum_{l=1}^{k} x_{k-l+1,l} \big)$. □

ΟΡΙΣΜΟΣ 8.11. *Λέμε ότι η διπλή σειρά* $\sum_{m,n=1}^{+\infty} x_{m,n}$ **συγκλίνει απολύτως** *αν*

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\big(\sum_{n=1}^{+\infty}|x_{m,n}|\big)=\sum_{n=1}^{+\infty}\big(\sum_{m=1}^{+\infty}|x_{m,n}|\big)=\sum_{k=1}^{+\infty}\big(\sum_{l=1}^{k}|x_{k-l+1,l}|\big)<+\infty.$$

Πρέπει να τονίσουμε ότι όταν θέλουμε να δούμε αν μια διπλή σειρά $\sum_{m,n=1}^{+\infty} x_{m,n}$ συγκλίνει απολύτως, τότε αρκεί να δούμε αν *ένα μόνο* από τα τρία αθροίσματα $\sum_{m=1}^{+\infty}\big(\sum_{n=1}^{+\infty}|x_{m,n}|\big)$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\big(\sum_{m=1}^{+\infty}|x_{m,n}|\big)$ και $\sum_{k=1}^{+\infty}\big(\sum_{l=1}^{k}|x_{k-l+1,l}|\big)$ είναι αριθμός (και όχι $+\infty$), διότι τα τρία αθροίσματα είναι, σύμφωνα με το θεώρημα 8.2, ίσα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 8.3. *Αν η διπλή σειρά* $\sum_{m,n=1}^{+\infty} x_{m,n}$ *συγκλίνει απολύτως, τότε*

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\big(\sum_{n=1}^{+\infty}x_{m,n}\big)=\sum_{n=1}^{+\infty}\big(\sum_{m=1}^{+\infty}x_{m,n}\big)=\sum_{k=1}^{+\infty}\big(\sum_{l=1}^{k}x_{k-l+1,l}\big)$$

και η κοινή τιμή των τριών αθροισμάτων είναι αριθμός.

Απόδειξη. Από το $\sum_{m=1}^{+\infty}\big(\sum_{n=1}^{+\infty}|x_{m,n}|\big)<+\infty$ συνεπάγεται, προφανώς, ότι για κάθε m ισχύει $\sum_{n=1}^{+\infty}|x_{m,n}|<+\infty$, οπότε η $\sum_{n=1}^{+\infty}x_{m,n}$ συγκλίνει και το άθροισμα $s_m=\sum_{n=1}^{+\infty}x_{m,n}$ είναι αριθμός. Ομοίως, για κάθε n η $\sum_{m=1}^{+\infty}x_{m,n}$ συγκλίνει και το άθροισμα $t_n=\sum_{m=1}^{+\infty}x_{m,n}$ είναι αριθμός.
Κατόπιν, για κάθε m ισχύει $|s_m|=\big|\sum_{n=1}^{+\infty}x_{m,n}\big|\leq\sum_{n=1}^{+\infty}|x_{m,n}|$ και, επομένως, $\sum_{m=1}^{+\infty}|s_m|\leq\sum_{m=1}^{+\infty}\big(\sum_{n=1}^{+\infty}|x_{m,n}|\big)<+\infty$. Άρα η $\sum_{m=1}^{+\infty}s_m$ συγκλίνει και το

$$s=\sum_{m=1}^{+\infty}s_m=\sum_{m=1}^{+\infty}\big(\sum_{n=1}^{+\infty}x_{m,n}\big)$$

είναι αριθμός.
Ομοίως, για κάθε n η $\sum_{n=1}^{+\infty}t_n$ συγκλίνει και το

$$t=\sum_{n=1}^{+\infty}t_n=\sum_{n=1}^{+\infty}\big(\sum_{m=1}^{+\infty}x_{m,n}\big)$$

είναι αριθμός.
Τώρα πρέπει να αποδείξουμε ότι $s=t$.
Έστω $\epsilon>0$. Επειδή $\sum_{m=1}^{+\infty}\big(\sum_{n=1}^{+\infty}|x_{m,n}|\big)<+\infty$ και $\sum_{n=1}^{+\infty}\big(\sum_{m=1}^{+\infty}|x_{m,n}|\big)<+\infty$, συνεπάγεται ότι υπάρχουν m_0,n_0 ώστε, αντιστοίχως,

$$\sum_{m=m_0+1}^{+\infty}\big(\sum_{n=1}^{+\infty}|x_{m,n}|\big)<\tfrac{\epsilon}{4},\qquad\sum_{n=n_0+1}^{+\infty}\big(\sum_{m=1}^{+\infty}|x_{m,n}|\big)<\tfrac{\epsilon}{4}.\tag{8.20}$$

Τώρα γράφουμε

$$\begin{aligned}s-\sum_{m=1}^{m_0}\big(\sum_{n=1}^{n_0}x_{m,n}\big)&=\sum_{m=1}^{+\infty}\big(\sum_{n=1}^{+\infty}x_{m,n}\big)-\sum_{m=1}^{m_0}\big(\sum_{n=1}^{n_0}x_{m,n}\big)\\&=\sum_{m=1}^{m_0}\big(\sum_{n=1}^{+\infty}x_{m,n}\big)+\sum_{m=m_0+1}^{+\infty}\big(\sum_{n=1}^{+\infty}x_{m,n}\big)\\&\quad-\sum_{m=1}^{m_0}\big(\sum_{n=1}^{n_0}x_{m,n}\big)\\&=\sum_{m=1}^{m_0}\big(\sum_{n=1}^{+\infty}x_{m,n}-\sum_{n=1}^{n_0}x_{m,n}\big)+\sum_{m=m_0+1}^{+\infty}\big(\sum_{n=1}^{+\infty}x_{m,n}\big)\\&=\sum_{m=1}^{m_0}\big(\sum_{n=n_0+1}^{+\infty}x_{m,n}\big)+\sum_{m=m_0+1}^{+\infty}\big(\sum_{n=1}^{+\infty}x_{m,n}\big)\\&=\sum_{n=n_0+1}^{+\infty}\big(\sum_{m=1}^{m_0}x_{m,n}\big)+\sum_{m=m_0+1}^{+\infty}\big(\sum_{n=1}^{+\infty}x_{m,n}\big),\end{aligned}$$

οπότε από τις (8.20) συνεπάγεται

$$\begin{aligned}\big|s-\sum_{m=1}^{m_0}\big(\sum_{n=1}^{n_0}x_{m,n}\big)\big|&\leq\sum_{n=n_0+1}^{+\infty}\big(\sum_{m=1}^{m_0}|x_{m,n}|\big)+\sum_{m=m_0+1}^{+\infty}\big(\sum_{n=1}^{+\infty}|x_{m,n}|\big)\\&\leq\sum_{n=n_0+1}^{+\infty}\big(\sum_{m=1}^{+\infty}|x_{m,n}|\big)+\sum_{m=m_0+1}^{+\infty}\big(\sum_{n=1}^{+\infty}|x_{m,n}|\big)\\&<\tfrac{\epsilon}{4}+\tfrac{\epsilon}{4}=\tfrac{\epsilon}{2}\,.\end{aligned}\tag{8.21}$$

Με τον ίδιο τρόπο μπορεί να αποδειχτεί και η ανάλογη σχέση

$$\big|t-\sum_{n=1}^{n_0}\big(\sum_{m=1}^{m_0}x_{m,n}\big)\big|<\tfrac{\epsilon}{2}.\tag{8.22}$$

Τώρα παρατηρούμε ότι

$$\sum_{m=1}^{m_0}\big(\sum_{n=1}^{n_0} x_{m,n}\big)=\sum_{n=1}^{n_0}\big(\sum_{m=1}^{m_0} x_{m,n}\big). \tag{8.23}$$

Από τις (8.21), (8.22) και (8.23) έχουμε

$$|s-t|\leq\Big|s-\sum_{m=1}^{m_0}\big(\sum_{n=1}^{n_0} x_{m,n}\big)\Big|+\Big|t-\sum_{n=1}^{n_0}\big(\sum_{m=1}^{m_0} x_{m,n}\big)\Big|<\tfrac{\epsilon}{2}+\tfrac{\epsilon}{2}=\epsilon.$$

Αποδείξαμε ότι ισχύει $|s-t|<\epsilon$ για κάθε $\epsilon>0$, οπότε $s=t$.

Τώρα, όπως στην απόδειξη του θεωρήματος 8.2, ορίζουμε $y_{m,n}=\begin{cases} x_{m,n-m+1}\,, & \text{αν } m\leq n\\ 0, & \text{αν } m>n\end{cases}$

Έτσι προκύπτει μια νέα διπλή σειρά η οποία συγκλίνει απολύτως, διότι $\sum_{m=1}^{+\infty}\big(\sum_{n=1}^{+\infty}|y_{m,n}|\big)=\sum_{m=1}^{+\infty}\big(\sum_{n=1}^{+\infty}|x_{m,n}|\big)<+\infty$. Άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε το μέχρι τώρα αποτέλεσμα στη διπλή σειρά $\sum_{m,n=1}^{+\infty} y_{m,n}$. Δηλαδή,

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\big(\sum_{n=1}^{+\infty} y_{m,n}\big)=\sum_{n=1}^{+\infty}\big(\sum_{m=1}^{+\infty} y_{m,n}\big).$$

Όπως στην απόδειξη του θεωρήματος 8.2, είναι

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\big(\sum_{n=1}^{+\infty} y_{m,n}\big)=\sum_{m=1}^{+\infty}\big(\sum_{n=1}^{+\infty} x_{m,n}\big)$$

και

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\big(\sum_{m=1}^{+\infty} y_{m,n}\big)=\sum_{k=1}^{+\infty}\big(\sum_{l=1}^{k} x_{k-l+1,l}\big).$$

Άρα $\sum_{m=1}^{+\infty}\big(\sum_{n=1}^{+\infty} x_{m,n}\big)=\sum_{k=1}^{+\infty}\big(\sum_{l=1}^{k} x_{k-l+1,l}\big)$. $\square$

Ασκήσεις.

8.4.1. Έστω ότι ισχύει $0\leq x_{m,n}\leq y_{m,n}$ για κάθε m,n. Αν η διπλή σειρά $\sum_{m,n=1}^{+\infty} y_{m,n}$ συγκλίνει ως προς οποιονδήποτε από (και, επομένως, ως προς όλους) τους τρεις τρόπους άθροισης, αποδείξτε ότι το ίδιο ισχύει και για τη διπλή σειρά $\sum_{m,n=1}^{+\infty} x_{m,n}$. Αν s_x είναι η κοινή τιμή των διαδοχικών αθροισμάτων της $\sum_{m,n=1}^{+\infty} x_{m,n}$ και s_y είναι η κοινή τιμή των διαδοχικών αθροισμάτων της $\sum_{m,n=1}^{+\infty} y_{m,n}$, αποδείξτε ότι $s_x\leq s_y$.

8.4.2. Βρείτε την τιμή των τριών διαδοχικών αθροισμάτων της διπλής σειράς $\sum_{m,n=1}^{+\infty}\frac{1}{(m+n)!}$.

8.4.3. Αποδείξτε ότι η διπλή σειρά $\sum_{m,n=1}^{+\infty}\frac{1}{m^p n^q}$ συγκλίνει απολύτως αν και μόνο αν $p,q>1$.

8.4.4. Αποδείξτε ότι η διπλή σειρά $\sum_{m,n=1}^{+\infty}\frac{1}{(m+n)^p}$ συγκλίνει απολύτως αν και μόνο αν $p>2$.

8.4.5. Εξετάστε ως προς την άθροιση πρώτα κατά γραμμές και ως προς την άθροιση πρώτα κατά στήλες τη διπλή σειρά $\sum_{m,n=1}^{+\infty} x_{m,n}$, όπου $x_{m,n}=\frac{1}{m+1}(\frac{m}{m+1})^n-\frac{1}{m+2}(\frac{m+1}{m+2})^n$ για κάθε m,n.

8.4.6. Γράψτε τη σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{1+x^{2k}}$ ως διπλή σειρά με τέτοιο τρόπο ώστε να αποδείξετε ότι ισχύει $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{1+x^{2k}}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}x^{2k-1}}{1-x^{2k-1}}$ για κάθε $x\in(-1,1)$.

8.4.7. Ξεκινώντας από τη διπλή σειρά $\sum_{m,n=1}^{+\infty} mx^{mn}$, αποδείξτε ότι, για κάθε x με $|x|<1$, ισχύει

$$\sum_{m=1}^{+\infty} m\frac{x^m}{1-x^m}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{(1-x^n)^2}.$$

8.4.8. Έστω $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ και $g(x)=\sum_{m=1}^{+\infty} b_m x^m$ για κάθε $x\in(-R,R)$. Αποδείξτε ότι ισχύει $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n g(x^n)=\sum_{m=1}^{+\infty} b_m f(x^m)$ για κάθε $x\in(-R_1,R_1)$, όπου $R_1=\min\{R,1\}$.

8.5 Γινόμενο Cauchy σειρών.

ΟΡΙΣΜΟΣ 8.12. *Έστω οι σειρές* $\sum_{m=0}^{+\infty} a_m$ *και* $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$. *Σχηματίζουμε τους όρους μιας νέας σειράς* $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k$ *ως εξής:* $c_0 = a_0 b_0$, $c_1 = a_1 b_0 + a_0 b_1$, $c_2 = a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2$ *και, γενικότερα,*

$$c_k = \sum_{l=0}^{k} a_{k-l} b_l = a_k b_0 + a_{k-1} b_1 + \cdots + a_1 b_{k-1} + a_0 b_k \qquad \text{για κάθε } k \geq 0.$$

Η σειρά

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \Big(\sum_{l=0}^{k} a_{k-l} b_l \Big)$$

ονομάζεται **γινόμενο Cauchy** *των* $\sum_{m=0}^{+\infty} a_m$ *και* $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$.

Η ιδέα για τέτοιου είδους πολλαπλασιασμό προέρχεται από τις *δυναμοσειρές*, δηλαδή σειρές της μορφής $\sum_{m=0}^{+\infty} a_m x^m$. Αυτές τις σειρές θα τις μελετήσουμε στην ενότητα 10.2. Αν πολλαπλασιάσουμε τις σειρές $\sum_{m=0}^{+\infty} a_m x^m$ και $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ όπως πολλαπλασιάζουμε δύο πολυώνυμα, δηλαδή ομαδοποιώντας ίδιες δυνάμεις του x, βλέπουμε ότι σχηματίζεται η σειρά $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$, της οποίας οι συντελεστές c_n δίνονται από τους παραπάνω τύπους.

ΘΕΩΡΗΜΑ 8.4. [26] *Αν οι σειρές* $\sum_{m=0}^{+\infty} a_m$ *και* $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ *συγκλίνουν απολύτως, τότε το γινόμενο Cauchy* $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k$ *των δύο σειρών συγκλίνει απολύτως και*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m \ \sum_{n=0}^{+\infty} b_n.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τη διπλή σειρά $\sum_{m,n=0}^{+\infty} x_{m,n}$, ορίζοντας $x_{m,n} = a_m b_n$ για κάθε $m, n \geq 0$. Η διπλή σειρά συγκλίνει απολύτως διότι

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \big(\sum_{n=0}^{+\infty} |x_{m,n}| \big) = \sum_{m=0}^{+\infty} |a_m| \big(\sum_{n=0}^{+\infty} |b_n| \big) = \sum_{m=0}^{+\infty} |a_m| \ \sum_{n=0}^{+\infty} |b_n| < +\infty.$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα 8.3 και βρίσκουμε

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \big(\sum_{l=0}^{k} x_{k-l,l} \big) = \sum_{m=0}^{+\infty} \big(\sum_{n=0}^{+\infty} x_{m,n} \big).$$

Συνεπάγεται

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \big(\sum_{l=0}^{k} a_{k-l} b_l \big) = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m \ \sum_{n=0}^{+\infty} b_n.$$

Τέλος, εφαρμόζοντας το θεώρημα 8.2 στη σειρά $\sum_{m,n=0}^{+\infty} |x_{m,n}|$ για την τελευταία ισότητα παρακάτω, βρίσκουμε:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |c_k| = \sum_{k=0}^{+\infty} \Big| \sum_{l=0}^{k} a_{k-l} b_l \Big| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \big(\sum_{l=0}^{k} |a_{k-l}||b_l| \big) = \sum_{m=0}^{+\infty} |a_m| \ \sum_{n=0}^{+\infty} |b_n| \\ < +\infty,$$

οπότε η $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k$ συγκλίνει απολύτως. □

Παράδειγμα 8.5.1. Γινόμενο Cauchy της σειράς $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n$ με τον εαυτό της.
Είναι $1 \cdot 1 = 1$ και

$$a^k 1 + a^{k-1} a + \cdots + a a^{k-1} + 1 a^k = (k+1) a^k$$

για κάθε k. Άρα το γινόμενο Cauchy της $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n$ με τον εαυτό της είναι η $\sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) a^k$. Αν $|a| < 1$, η $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n$ συγκλίνει απολύτως και, επομένως, και η $\sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) a^k$ συγκλίνει απολύτως και

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) a^k = \sum_{m=0}^{+\infty} a^m \ \sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{(1-a)^2} \qquad \text{αν } |a| < 1.$$

[26] Δείτε την άσκηση 8.5.4 για έναν διαφορετικό τρόπο απόδειξης, χωρίς χρήση διπλών σειρών, του τύπου $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m \ \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ και, μάλιστα, με ασθενέστερες υποθέσεις: μόνο η μία από τις δύο σειρές $\sum_{m=0}^{+\infty} a_m$, $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ χρειάζεται να συγκλίνει απολύτως ενώ η άλλη πρέπει, απλώς, να συγκλίνει. Αν μία από τις δύο σειρές δεν συγκλίνει απολύτως, δεν μπορούμε να συμπεράνουμε, εν γένει, ότι το γινόμενο Cauchy συγκλίνει απολύτως. Ένα ακόμη σχετικό αποτέλεσμα είναι στην άσκηση 10.2.21.

Παράδειγμα 8.5.2. Γνωρίζουμε ότι οι σειρές $\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{a^m}{m!}$ και $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b^n}{n!}$ συγκλίνουν απολύτως για κάθε a, b.
Είναι $1 \cdot 1 = 1$ και, βάσει του διωνυμικού τύπου του Newton, είναι

$$\frac{a^k}{k!}1 + \frac{a^{k-1}}{(k-1)!}\frac{b^1}{1!} + \cdots + \frac{a^1}{1!}\frac{b^{k-1}}{(k-1)!} + 1\frac{b^k}{k!} = \frac{(a+b)^k}{k!}$$

για κάθε k. Άρα το γινόμενο Cauchy των $\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{a^m}{m!}$ και $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b^n}{n!}$ είναι η $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(a+b)^k}{k!}$, οπότε

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(a+b)^k}{k!} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{a^m}{m!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b^n}{n!}.$$

Οι σειρές αυτές και ο τύπος στον οποίο καταλήξαμε σχετίζονται άμεσα με την εκθετική συνάρτηση. Δείτε την άσκηση 8.5.3. Το θέμα αυτό θα μελετηθεί διεξοδικά στα παραδείγματα 10.2.13 και 10.3.3.

Ασκήσεις.

8.5.1. Αποδείξτε ότι $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k+1)(k+2)}{2} a^k = \frac{1}{(1-a)^3}$ για κάθε $a \in (-1, 1)$.

8.5.2. Αποδείξτε ότι $\frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)\cdots(x+k)} = e \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$ για κάθε $x \neq 0, -1, -2, \ldots$, χρησιμοποιώντας το τελευταίο αποτέλεσμα της άσκησης 5.2.14.

8.5.3. Για κάθε x ορίζουμε $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$. Στο παράδειγμα 8.5.2 αποδείξαμε ότι για κάθε a, b ισχύει $f(a + b) = f(a)f(b)$. Επίσης, γνωρίζουμε ότι $f(0) = 1$ και $f(1) = e$.
Αποδείξτε ότι η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στον 0.
Βάσει της άσκησης 4.2.12[γ], αποδείξτε ότι ισχύει $f(x) = e^x$ για κάθε x, δηλαδή ότι ισχύει $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ για κάθε x. Αυτό θα το ξανααποδείξουμε στα παραδείγματα 10.2.13 και 10.3.3.

8.5.4. Αποδείξτε το **θεώρημα του Mertens**: *αν η μία από τις σειρές $\sum_{m=0}^{+\infty} a_m$ και $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ συγκλίνει απολύτως και η άλλη συγκλίνει, τότε το γινόμενο Cauchy $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k$ των δύο σειρών συγκλίνει και $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$.*
Η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ συγκλίνει. Αποδείξτε ότι το γινόμενο Cauchy της σειράς αυτής με τον εαυτό της αποκλίνει.
Γνωρίζουμε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ συγκλίνει. Αποδείξτε ότι το γινόμενο Cauchy της σειράς αυτής με τον εαυτό της είναι η $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} z_k$, όπου $z_k = \frac{2}{k+1}(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k})$ για κάθε k, και ότι αυτή η σειρά συγκλίνει αλλά όχι απολύτως.
Θεωρήστε τις $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ και $\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{4^m}$ και αποδείξτε, χωρίς να εφαρμόσετε το θεώρημα του Mertens, ότι το γινόμενο Cauchy τους συγκλίνει αλλά όχι απολύτως.

8.6 Αναδιατάξεις σειρών.

ΟΡΙΣΜΟΣ 8.13. *Θεωρούμε μια ένα-προς-ένα και επί συνάρτηση $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Αυτό σημαίνει ότι οι αριθμοί $\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3), \ldots$ περιλαμβάνουν κάθε φυσικό αριθμό ακριβώς μία φορά ή, με άλλα λόγια, αποτελούν μια* **αναδιάταξη των φυσικών αριθμών**.
Τώρα, έστω ακολουθία (x_n). Αν συμβολίσουμε $x'_n = x_{\sigma(n)}$ τότε η ακολουθία (x'_n) ονομάζεται **αναδιάταξη** *της (x_n). Επίσης, λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x'_n$ είναι μια* **αναδιάταξη** *της σειράς $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.*

Αν

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k \quad \text{και} \quad s'_n = \sum_{k=1}^{n} x'_k,$$

για κάθε n, είναι τα μερικά αθροίσματα των σειρών $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n{}'$, τότε δεν μπορούμε να περιμένουμε οι αριθμοί s_n και s'_n να είναι ίδιοι. Το άθροισμα s_n περιέχει τους $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ενώ το s'_n τους $x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}$. Επομένως, δεν είναι καθόλου βέβαιο (και, εν γένει, δεν ισχύει) ότι $\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} s'_n$ ή, ισοδύναμα, $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = \sum_{n=1}^{+\infty} x'_n$. Μπορεί η μία σειρά να συγκλίνει ενώ η άλλη να αποκλίνει ή να συγκλίνουν και οι δύο αλλά να έχουν διαφορετικά αθροίσματα.

Παράδειγμα 8.6.1. Γνωρίζουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ συγκλίνει. Τώρα, η σειρά $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots$ είναι αναδιάταξη της προηγούμενης. Θα αποδείξουμε ότι και η δεύτερη σειρά συγκλίνει, αλλά ότι έχει διαφορετικό άθροισμα από την πρώτη.
Αν s_n είναι τα μερικά αθροίσματα της δεύτερης σειράς, τότε

$$s_{3n} = \left(1 + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\tfrac{1}{4n-3} + \tfrac{1}{4n-1} - \tfrac{1}{2n}\right).$$

Άρα

$$s_{3(n+1)} - s_{3n} = \tfrac{1}{4n+1} + \tfrac{1}{4n+3} - \tfrac{1}{2n+2} > 0$$

και, επομένως, η ακολουθία (s_{3n}) είναι αύξουσα. Επίσης,

$$s_{3n} = 1 + \tfrac{1}{3} - \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7}\right) - \cdots - \left(\tfrac{1}{2n-2} - \tfrac{1}{4n-3} - \tfrac{1}{4n-1}\right) - \tfrac{1}{2n} < 1 + \tfrac{1}{3} = \tfrac{4}{3},$$

επειδή κάθε παρένθεση είναι θετική. Άρα η ακολουθία (s_{3n}) είναι και άνω φραγμένη και, επομένως, συγκλίνει σε κάποιον s. Τώρα,

$$s_{3n+1} = s_{3n} + \tfrac{1}{4n+1} \to s + 0 = s \quad \text{και} \quad s_{3n+2} = s_{3n} + \tfrac{1}{4n+1} + \tfrac{1}{4n+3} \to s + 0 + 0 = s.$$

Άρα $s_n \to s$ και, επομένως,

$$1 + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{11} - \tfrac{1}{6} + \cdots = s.$$

Παρατηρούμε ότι

$$s_{3n} \geq \left(1 + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{4}\right) = \tfrac{5}{6} + \tfrac{13}{140}$$

για κάθε $n \geq 2$, οπότε $s \geq \frac{5}{6} + \frac{13}{140}$.
Έστω, τώρα,

$$t = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \cdots$$

το άθροισμα της αρχικής σειράς. Αν t_n είναι τα μερικά αθροίσματά της, τότε

$$\begin{aligned} t_{2n-1} &= 1 - \tfrac{1}{2} + \cdots - \tfrac{1}{2n-2} + \tfrac{1}{2n-1} = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{5}\right) - \cdots - \left(\tfrac{1}{2n-2} - \tfrac{1}{2n-1}\right) \\ &\leq 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} = \tfrac{5}{6} \end{aligned}$$

για κάθε n. Άρα $t \leq \frac{5}{6}$ και, επομένως, $t < s$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 8.5. *Έστω ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει απολύτως. Τότε οποιαδήποτε αναδιάταξη $\sum_{n=1}^{+\infty} x'_n$ της $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει, επίσης, απολύτως και $\sum_{n=1}^{+\infty} x'_n = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.*

Πρώτη απόδειξη. Έστω $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ η ένα-προς-ένα και επί συνάρτηση η οποία ορίζει την αναδιάταξη. Δηλαδή, $x'_n = x_{\sigma(n)}$ για κάθε n.
Ορίζουμε

$$x_{m,n} = \begin{cases} x_n = x_{\sigma(m)} = x'_m, & \text{αν } n = \sigma(m) \\ 0, & \text{αν } n \neq \sigma(m) \end{cases}$$

για κάθε m, n. Προκύπτει η διπλή σειρά $\sum_{m,n=1}^{+\infty} x_{m,n}$, η οποία συγκλίνει απολύτως, διότι

$$\textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{m=1}^{+\infty} |x_{m,n}|\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| < +\infty.$$

Από το θεώρημα 8.3 συνεπάγεται

$$\textstyle\sum_{m=1}^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} x_{m,n}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{m=1}^{+\infty} x_{m,n}\right),$$

οπότε $\sum_{m=1}^{+\infty} x'_m = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.
Δεύτερη απόδειξη: Θέτουμε $S = \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$, οπότε $0 \leq S < +\infty$.
Η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει και έστω $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = s$. Θεωρούμε τα μερικά αθροίσματα $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$, οπότε $s_n \to s$.
Παρατηρούμε ότι ισχύει $\sum_{k=1}^{n} |x'_k| \leq S$ για κάθε n, αφού οι όροι $|x'_1|, \ldots, |x'_n|$, δηλαδή οι όροι $|x_{\sigma(1)}|, \ldots, |x_{\sigma(n)}|$, είναι κάποιοι από τους $|x_1|, |x_2|, \ldots$ (χωρίς επανάληψη). Άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} |x'_n|$ συγκλίνει.
Θεωρούμε και τα μερικά αθροίσματα $s'_n = \sum_{k=1}^{n} x'_k$ και θα αποδείξουμε ότι $s'_n \to s$, δηλαδή ότι $\sum_{n=1}^{+\infty} x'_n = s$, οπότε η απόδειξη θα έχει τελειώσει.
Έστω $\epsilon > 0$. Επειδή η $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$ συγκλίνει και επειδή $s_n \to s$, υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει

$$\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} |x_n| < \tfrac{\epsilon}{2} \quad \text{και} \quad |s_n - s| < \tfrac{\epsilon}{2} \qquad \text{για κάθε } n \geq n_0. \tag{8.24}$$

Επιλέγουμε n_1 αρκετά μεγάλο ώστε οι $\sigma(1), \ldots, \sigma(n_1)$ να περιλαμβάνουν τους $1, 2, \ldots, n_0$. Είναι προφανές ότι $n_1 \geq n_0$. Αν $n \geq n_1 (\geq n_0)$, τότε στο $s'_n - s_n$ δεν περιλαμβάνονται οι $x_1, \ldots, x_{n_0}$, αφού καθένας από αυτούς περιέχεται ακριβώς μία φορά στο s_n και στο s'_n. Επομένως, αν $n \geq n_1$, από την (8.24) συνεπάγεται

$$|s'_n - s_n| \leq \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} |x_n| < \tfrac{\epsilon}{2}.$$

Από την τελευταία σχέση και πάλι από την (8.24) συνεπάγεται ότι για κάθε $n \geq n_1$ ισχύει

$$|s'_n - s| \leq |s'_n - s_n| + |s_n - s| < \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Άρα $s'_n \to s$. $\square$

Η ύπαρξη του προηγούμενου παραδείγματος 8.6.1 έχει ως βαθύτερη αιτία το ότι η αρχική σειρά συγκλίνει αλλά όχι απολύτως. Αυτό θα φανεί και από το θεώρημα του Riemann που ακολουθεί.

Σχόλιο. Η απόδειξη του θεωρήματος του Riemann συναγωνίζεται σε δυσκολία την απόδειξη του θεωρήματος 6.3!

ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ RIEMANN. *Έστω ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει υπό συνθήκη. Τότε για κάθε $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ με $a \leq b$ υπάρχει αναδιάταξη $\sum_{n=1}^{+\infty} x'_n$ της αρχικής σειράς ώστε, αν $s'_n = x'_1 + \cdots + x'_n$ είναι τα μερικά αθροίσματα της δεύτερης σειράς, να είναι*

$$\underline{\lim}\, s'_n = a, \qquad \overline{\lim}\, s'_n = b.$$

Απόδειξη. Έχουμε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει αλλά $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| = +\infty$. Έστω $s = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.
Θεωρούμε τα μερικά αθροίσματα $s_n = x_1 + \cdots + x_n$ και $S_n = |x_1| + \cdots + |x_n|$.
Από τους x_n ορίζουμε y_1 να είναι ο πρώτος ο οποίος είναι ≥ 0, y_2 ο δεύτερος ο οποίος είναι ≥ 0, y_3 ο τρίτος ο οποίος είναι ≥ 0 και ούτω καθ' εξής. Ομοίως, από τους x_n ορίζουμε z_1 να είναι ο πρώτος ο οποίος είναι < 0, z_2 ο δεύτερος ο οποίος είναι < 0, z_3 ο τρίτος ο οποίος είναι < 0 και ούτω καθ' εξής.
Θα αποδείξουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{+\infty} y_n = +\infty, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} z_n = -\infty.$$

Θεωρούμε τα μερικά αθροίσματα $t_n = y_1 + \cdots + y_n$ και $u_n = z_1 + \cdots + z_n$.
Παρατηρούμε ότι ο $\frac{s_n+S_n}{2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k+|x_k|}{2}$ είναι ίσος με το άθροισμα των μη-αρνητικών από τους $x_1, \ldots, x_n$ και, επομένως, $\frac{s_n+S_n}{2} \leq t_n$. Επειδή $\frac{s_n+S_n}{2} \to \frac{s+\infty}{2} = +\infty$, συνεπάγεται $t_n \to +\infty$. Άρα $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n = +\infty$.
Ομοίως, ο $\frac{s_n-S_n}{2} = \sum_{k=1} \frac{x_k-|x_k|}{2}$ είναι ίσος με το άθροισμα των αρνητικών από τους $x_1, \ldots, x_n$, οπότε $\frac{s_n-S_n}{2} \geq u_n$. Επειδή $\frac{s_n-S_n}{2} \to \frac{s-\infty}{2} = -\infty$, έχουμε $u_n \to -\infty$. Άρα $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n = -\infty$.
Θεωρούμε δύο συγκεκριμένες ακολουθίες (a_n), (b_n) ώστε

$$a_n \to a, \qquad b_n \to b$$

ως εξής. Ορίζουμε $a_n = a$, αν $a \in \mathbb{R}$, και $a_n = -n$, αν $a = -\infty$, και $a_n = n$, αν $a = +\infty$. Το ίδιο ακριβώς κάνουμε και με το b. Παρατηρήστε ότι ισχύει τελικά $a_n \leq b_n$.
Βήμα 1. Επειδή $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n = +\infty$, υπάρχει n_1 ώστε $y_1 + \cdots + y_{n_1} > b_1$ και έστω ότι ο n_1 είναι ο ελάχιστος με αυτήν την ιδιότητα, δηλαδή ότι $y_1 + \cdots + y_{n_1-1} \leq b_1$. Επομένως,

$$b_1 < y_1 + \cdots + y_{n_1} \leq b_1 + y_{n_1}.$$

Επειδή $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n = -\infty$, υπάρχει $n_1{}^*$ ώστε $z_1 + \cdots + z_{n_1{}^*} < a_1 - (y_1 + \cdots + y_{n_1})$ και έστω ότι ο $n_1{}^*$ είναι ο ελάχιστος με αυτήν την ιδιότητα, δηλαδή ότι $z_1 + \cdots + z_{n_1{}^*-1} \geq a_1 - (y_1 + \cdots + y_{n_1})$. Επομένως,

$$a_1 + z_{n_1{}^*} \leq y_1 + \cdots + y_{n_1} + z_1 + \cdots + z_{n_1{}^*} < a_1.$$

Βήμα 2. Επειδή $\sum_{n=n_1+1}^{+\infty} y_n = +\infty$, υπάρχει $n_2 > n_1$ ώστε $y_{n_1+1} + \cdots + y_{n_2} > b_2 - (y_1 + \cdots + y_{n_1} + z_1 + \cdots + z_{n_1{}^*})$ και έστω ότι ο n_2 είναι ο ελάχιστος με αυτήν την ιδιότητα, δηλαδή ότι $y_{n_1+1} + \cdots + y_{n_2-1} \leq b_2 - (y_1 + \cdots + y_{n_1} + z_1 + \cdots + z_{n_1{}^*})$. Επομένως,

$$b_2 < y_1 + \cdots + y_{n_1} + z_1 + \cdots + z_{n_1{}^*} + y_{n_1+1} + \cdots + y_{n_2} \leq b_2 + y_{n_2}.$$

Επειδή $\sum_{n=n_1{}^*+1}^{+\infty} z_n = -\infty$, υπάρχει $n_2{}^* > n_1{}^*$ ώστε $z_{n_1{}^*+1} + \cdots + z_{n_2{}^*} < a_1 - (y_1 + \cdots + y_{n_1} + z_1 + \cdots + z_{n_1{}^*} + y_{n_1+1} + \cdots + y_{n_2})$ και έστω ότι ο $n_2{}^*$ είναι ο ελάχιστος με αυτήν την ιδιότητα, δηλαδή ότι $z_{n_1{}^*+1} + \cdots + z_{n_2{}^*-1} \geq a_1 - (y_1 + \cdots + y_{n_1} + z_1 + \cdots + z_{n_1{}^*} + y_{n_1+1} + \cdots + y_{n_2})$. Επομένως,

$$a_2 + z_{n_2{}^*} \leq y_1 + \cdots + y_{n_1} + z_1 + \cdots + z_{n_1{}^*} + y_{n_1+1} + \cdots + y_{n_2} + z_{n_1{}^*+1} + \cdots + z_{n_2{}^*} < a_2.$$

Συνεχίζουμε επ' άπειρον, επιλέγοντας διαδοχικά τους $y_1, \ldots, y_{n_1}, z_1, \ldots, z_{n_1{}^*}, y_{n_1+1}, \ldots, y_{n_2}, z_{n_1{}^*+1}, \ldots, z_{n_2{}^*}, \ldots$ οι οποίοι, στη σειρά αυτή που εμφανίζονται, δεν είναι τίποτε άλλο από μια αναδιάταξη των x_n. Θεωρούμε, τώρα, τα μερικά αθροίσματα s'_n της συγκεκριμένης αναδιάταξης. Οι παραπάνω σχέσεις που ισχύουν σε κάθε βήμα, λένε ότι $b_1 < s'_{n_1} \leq b_1 + y_{n_1}$, $a_1 + z_{n_1{}^*} \leq s'_{n_1+n_1{}^*} < a_1$, $b_2 < s'_{n_1+n_1{}^*+n_2} \leq b_2 + y_{n_2}$, $a_2 + z_{n_2{}^*} \leq s'_{n_1+n_1{}^*+n_2+n_2{}^*} < a_2$ και, γενικότερα,

$$b_k < s'_{n_1+n_1{}^*+\cdots+n_k} \leq b_k + y_{n_k}, \qquad a_k + z_{n_k{}^*} \leq s'_{n_1+n_1{}^*+\cdots+n_k+n_k{}^*} < a_k. \tag{8.25}$$

Επειδή η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει, είναι $x_n \to 0$ και, επειδή, οι (y_n) και (z_n) είναι υποακολουθίες της (x_n), συνεπάγεται $y_{n_k} \to 0$ και $z_{n_k{}^*} \to 0$. Άρα από τις (8.25) συνεπάγεται

$$s'_{n_1+n_1{}^*+\cdots+n_k+n_k{}^*} \to a, \qquad s'_{n_1+n_1{}^*+\cdots+n_k} \to b$$

και, επομένως,

$$\underline{\lim}\, s'_n \leq a, \qquad b \leq \overline{\lim}\, s'_n. \tag{8.26}$$

Είναι σαφές ότι για κάθε $n \geq n_1$ υπάρχει μοναδικός k ώστε είτε $n_1 + n_1{}^* + \cdots + n_k \leq n < n_1 + n_1{}^* + \cdots + n_k + n_k{}^*$ είτε $n_1 + n_1{}^* + \cdots + n_k + n_k{}^* \leq n < n_1 + n_1{}^* + \cdots + n_k + n_k{}^* + n_{k+1}$. Στην πρώτη περίπτωση, είναι

$$s'_{n_1+n_1{}^*+\cdots+n_k+n_k{}^*} \leq s'_n \leq s'_{n_1+n_1{}^*+\cdots+n_k}$$

και στη δεύτερη περίπτωση είναι

$$s'_{n_1+n_1{}^*+\cdots+n_k+n_k{}^*} \leq s'_n \leq s'_{n_1+n_1{}^*+\cdots+n_k+n_k{}^*+n_{k+1}},$$

οπότε από τις (8.25) συνεπάγεται, αντιστοίχως,

$$a_k + z_{n_k{}^*} \leq s'_n \leq b_k + y_{n_k} \qquad \text{ή} \qquad a_k + z_{n_k{}^*} \leq s'_n \leq b_{k+1} + y_{n_{k+1}}.$$

Συνεπάγεται

$$a = \lim_{k\to+\infty}(a_k + z_{n_k{}^*}) \leq \underline{\lim}\, s'_n, \qquad \overline{\lim}\, s'_n \leq \lim_{k\to+\infty}(b_k + y_{n_k}) = b. \tag{8.27}$$

Από τις (8.26) και (8.27) έχουμε $\underline{\lim}\, s'_n = a$ και $\overline{\lim}\, s'_n = b$. □

Ασκήσεις.

8.6.1. Υπολογίστε το άθροισμα της σειράς $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{2^9} + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^{15}} + \frac{1}{2^{14}} + \frac{1}{2^{13}} + \frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{2^{11}} + \cdots$.

8.6.2. Έστω η συγκλίνουσα σειρά $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$. Θεωρούμε την αναδιάταξη $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} - \frac{1}{8} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \frac{1}{21} + \frac{1}{23} + \frac{1}{25} + \frac{1}{27} + \frac{1}{29} + \frac{1}{31} - \frac{1}{10} + \cdots$. Αποδείξτε ότι η δεύτερη σειρά αποκλίνει στο $+\infty$.

8.6.3. Έστω ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει υπό συνθήκη. Αποδείξτε ότι για *κάθε* s υπάρχει ακολουθία (ϵ_n) ώστε να ισχύει $\epsilon_n = \pm 1$ για κάθε n και ώστε $\sum_{n=1}^{+\infty} \epsilon_n x_n = s$.

8.6.4. Έστω $0 < p < +\infty$. Θεωρούμε την $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ και τήν αναδιατάσσουμε βάσει των εξής δύο κανόνων:

(i) δεν αλλάζουμε τη διάταξη ανάμεσα στους θετικούς όρους ούτε τη διάταξη ανάμεσα στους αρνητικούς όρους,

(ii) αν από τους αρχικούς n όρους της προκύπτουσας σειράς οι k_n είναι θετικοί και οι l_n είναι αρνητικοί (οπότε $k_n + l_n = n$), τότε $\frac{k_n}{l_n} \to p$.

Αποδείξτε ότι η προκύπτουσα σειρά έχει άθροισμα $\frac{1}{2} \log(4p)$.

8.6.5. [27] Έστω συναρτήσεις $f_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ για κάθε k. Υποθέτουμε ότι για κάθε k η f_k είναι ένα-προς-ένα, ότι $f_k(\mathbb{N}) \cap f_{k'}(\mathbb{N}) = \emptyset$ για κάθε k, k' με $k \neq k'$ και ότι $\bigcup_{k=1}^{+\infty} f_k(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$.

Για κάθε σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ η οποία συγκλίνει απολύτως αποδείξτε ότι:

(i) για κάθε k η αντίστοιχη σειρά $\sum_{m=1}^{+\infty} x_{f_k(m)}$ συγκλίνει απολύτως.

(ii) αν ορίσουμε $s_k = \sum_{m=1}^{+\infty} x_{f_k(m)}$, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} s_k$ συγκλίνει απολύτως.

(iii) αν $s = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$, τότε $\sum_{k=1}^{+\infty} s_k = s$. Δηλαδή,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{m=1}^{+\infty} x_{f_k(m)} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n.$$

[27] Εδώ περιγράφεται ο μηχανισμός της **ανάλυσης σειρών σε υποσειρές**.

Βασική βιβλιογραφία.

Apostol, T. (1974) *Mathematical Analysis, Ch 8.* Addison-Wesley.
Bartle, R. (1967) *The Elements of Real Analysis, Ch VII.* Wiley.
Bartle, R. & Sherbert, D. (2011) *Introduction to Real Analysis, Ch 3, 9.* Wiley.
Beals, R. (2004) *Analysis, an Introduction, Ch 4.* Cambridge Univ. Press.
Beardon, A. (1997) *Limits: a New Approach to Real Analysis, Ch 5, 11.* Springer.
Berberian, S. (1994) *A First Course in Real Analysis, Ch 10.* Springer.
Brand, L. (2006) *Advanced Calculus, Ch 2.* Dover.
Bromwich, T. (1991) *An Introduction to the Theory of Infinite Series, Ch I-V.* American Math. Society & Chelsea.
Buck, R. & Buck, E. (2003) *Advanced Calculus, Ch 5.* Waveland Press.
Courant, R. (1988) *Differential and Integral Calculus, Vol I, Ch VIII.* Wiley.
Courant, R. & John, F. (1989) *Introduction to Calculus and Analysis, Vol I, Ch 7.* Springer.
Davidson, K. & Donsig, A. (2010) *Real Analysis and Applications, Ch 3.* Springer.
Ghorpade, S. & Limaye, B. (2006) *A Course in Calculus and Real Analysis, Ch 9.* Springer.
Goffman, C. (1966) *Introduction to Real Analysis, Ch 3.* Harper and Row.
Goldberg, R. (1976) *Methods of Real Analysis, Ch 3.* Wiley.
Goursat, E. (2006) *A Course in Mathematical Analysis, Vol I, Ch VIII.* Dover.
Grauert, H. & Lieb, I. (1967) *Differential- und Integralrechnung, Band I, Kap III.* Springer.
Hardy, G. (2008) *A Course of Pure Mathematics, Ch IV, VIII.* Cambridge Univ. Press.
Knopp, K. (1990) *Theory and Application of Infinite Series, Ch I-IV, VIII-X.* Dover.
Knopp, K. (1956) *Infinite Sequences and Series, Ch I-III, V.* Dover.
Krantz, S. (2013) *Real Analysis and Foundations, Ch 4.* Chapman and Hall.
Landau, E. (2001) *Differential and Integral Calculus, Ch 12.* American Math. Society & Chelsea.
Nikolsky, S. (1977) *A Course of Mathematical Analysis, Vol 1, Ch 11.* Mir Publishers.
Osgood, W. (1897) *Introduction to Infinite Series, Ch I.* Harvard University.
Protter, M. (1998) *Basic Elements of Real Analysis, Ch 8.* Springer.
Rosenlicht, M. (1986) *Introduction to Analysis, Ch VII.* Dover.
Ross, K. (2013) *Elementary Analysis, Ch 2.* Springer.
Rudin, W. (1976) *Principles of Mathematical Analysis, Ch 3.* McGraw-Hill.
Smirnov, V. (1964) *A Course of Higher Mathematics, Vol 1, Ch IV.* Pergammon Press.
Spivak, M. (1994) *Calculus, Ch 23.* Cambridge Univ. Press.
Stoll, M. (2000) *Introduction to Real Analysis, Ch 7.* Pearson.
Whittaker, E. & Watson, G. (1996) *A Course of Modern Analysis, Ch II.* Cambridge Univ. Press.

Συμπληρωματική βιβλιογραφία.

Beardon, A. (1997) *Limits: a New Approach to Real Analysis, Ch 3-4.* Springer.
Gleason, A. (1991) *Fundamentals of Abstract Analysis, Ch 13.* Taylor and Francis.
Graves, L. (2009) *The Theory of Functions of Real Variables, Ch VII.* Dover.
Hardy, G., Littlewood, J. & Polya, G. (1952) *Inequalities, Ch V.* Cambridge Univ. Press.

Κεφάλαιο 9

Ακολουθίες συναρτήσεων.

9.1 Κατά σημείο σύγκλιση.

Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και συναρτήσεις $f_n : A \to \mathbb{R}$ για κάθε n. Οι f_n σχηματίζουν μια **ακολουθία συναρτήσεων** (f_n).

ΟΡΙΣΜΟΣ 9.1. *Λέμε ότι η* (f_n) **συγκλίνει** *στην* f **κατά σημείο** *στο* A *και συμβολίζουμε*

$$f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} f \quad \textit{στο } A \qquad \textit{ή} \qquad \lim_{n\to+\infty} f_n \overset{\text{κ.σ.}}{=} f \quad \textit{στο } A$$

αν για κάθε $x \in A$ *η ακολουθία αριθμών* $(f_n(x))$ *συγκλίνει στον αριθμό* $f(x)$*, δηλαδή αν για κάθε* $x \in A$ *ισχύει* $f_n(x) \to f(x)$*. Με άλλα λόγια,* $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} f$ *στο* A *αν για κάθε* $x \in A$ *και κάθε* $\epsilon > 0$ *υπάρχει* n_0 *ώστε να ισχύει* $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$ *για κάθε* $n \geq n_0$.

Όταν, λοιπόν, έχουμε μια ακολουθία συναρτήσεων (f_n) και μια συνάρτηση f, όπου όλες οι συναρτήσεις είναι ορισμένες στο ίδιο σύνολο A, και θέλουμε να δούμε αν η (f_n) συγκλίνει στην f κατά σημείο στο A, τότε παίρνουμε τον τυχόντα $x \in A$ και βλέπουμε αν, με σταθερό x, ισχύει $f_n(x) \to f(x)$ (καθώς $n \to +\infty$). Μερικές φορές δίνεται η ακολουθία (f_n) αλλά όχι η οριακή συνάρτηση f. Τότε αναζητούμε την f για την οποία θέλουμε να ισχύει ότι η (f_n) συγκλίνει στην f κατά σημείο στο A. Αυτό γίνεται ως εξής. Πάλι παίρνουμε τον τυχόντα $x \in A$ και βλέπουμε αν, με σταθερό x, η ακολουθία αριθμών $(f_n(x))$ συγκλίνει σε κάποιον αριθμό. Αν αυτό ισχύει, τότε θέτουμε $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$. Αυτό το κάνουμε για κάθε $x \in A$ και έτσι σε κάθε $x \in A$ αντιστοιχεί ένας αριθμός $f(x)$, οπότε ορίζεται μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$. Τώρα, από τον τρόπο που έχει οριστεί αυτή η f είναι προφανές ότι ισχύει $f_n(x) \to f(x)$ για κάθε $x \in A$ και, επομένως, ότι η (f_n) συγκλίνει στην f κατά σημείο στο A.

Τα επόμενα παραδείγματα πρέπει να μελετηθούν προσεκτικά, διότι θα γίνεται συχνή αναφορά σε αυτά. Θα ήταν πολύ καλό να σχεδιαστούν τα γραφήματα των συναρτήσεων που εμφανίζονται σε κάθε παράδειγμα: τόσο των οριακών συναρτήσεων f όσο και των f_n για αρχικές τιμές του n αλλά και για τον γενικό n.

Παράδειγμα 9.1.1. Έστω $f, f_n : A \to \mathbb{R}$ ώστε $f_n(x) = f(x) + \frac{1}{n}$ για κάθε $x \in A$.
Τότε $f_n(x) = f(x) + \frac{1}{n} \to f(x)$ για κάθε $x \in A$. Άρα $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} f$ στο A.

Παράδειγμα 9.1.2. Έστω $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f_n(x) = \frac{x}{1+nx}$ για κάθε $x \geq 0$.
Τότε $f_n(0) = 0 \to 0$. Αν $x > 0$, τότε $f_n(x) = \frac{x}{1+nx} \to 0$. Άρα $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} 0$ στο $[0, \infty)$, όπου 0 είναι η σταθερή συνάρτηση 0.

Παράδειγμα 9.1.3. Έστω $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f_n(x) = \begin{cases} 1/(nx), & \text{αν } 1/n < x \leq 1 \\ nx, & \text{αν } 0 \leq x \leq 1/n \end{cases}$

Πρώτον, $f_n(0) = 0 \to 0$. Αν $0 < x \leq 1$, τότε ισχύει τελικά $\frac{1}{n} < x$, οπότε ισχύει τελικά $f_n(x) = \frac{1}{nx}$ και, επομένως, $f_n(x) \to 0$. Άρα $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} 0$ στο $[0, 1]$.

Παράδειγμα 9.1.4. Έστω $f_n : (0,1] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$ για κάθε $x \in (0,1]$.
Για κάθε $x \in (0,1]$ είναι $f_n(x) \to 0$. Επομένως, $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} 0$ στο $(0,1]$.

Παράδειγμα 9.1.5. Έστω $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f_n(x) = \frac{x}{n}$ για κάθε x.
Τότε $f_n(x) \to 0$ για κάθε x. Άρα $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} 0$ στο $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 9.1.6. Έστω $f_n : (1,+\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f_n(x) = \frac{x}{x+n}$ για κάθε $x > 1$.
Τότε $f_n(x) \to 0$ για κάθε $x > 1$. Άρα $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} 0$ στο $(1,+\infty)$.

Παράδειγμα 9.1.7. Έστω $f_n : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f_n(x) = \frac{n}{x+n^2}$ για κάθε $x \geq 0$.
Τότε $f_n(x) \to 0$ για κάθε $x \geq 0$ και, επομένως, $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} 0$ στο $[0,+\infty)$.

Παράδειγμα 9.1.8. Έστω $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f_n(x) = x^n$ για κάθε $x \in [0,1]$.
Τότε $f_n(1) = 1 \to 1$ και, αν $0 \leq x < 1$, τότε $f_n(x) = x^n \to 0$. Άρα $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} f$ στο $[0,1]$, όπου $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } 0 \leq x < 1 \\ 1, & \text{αν } x = 1 \end{cases}$

Παράδειγμα 9.1.9. Έστω $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f_n(x) = \begin{cases} 1/(nx^2), & \text{αν } 1/n < x \leq 1 \\ n^2 x, & \text{αν } 0 \leq x \leq 1/n \end{cases}$
Τότε $f_n(0) = 0 \to 0$. Επίσης, αν $0 < x \leq 1$, τότε ισχύει τελικά $\frac{1}{n} < x$, οπότε ισχύει τελικά $f_n(x) = \frac{1}{nx^2}$ και, επομένως, $f_n(x) \to 0$. Άρα $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} 0$ στο $[0,1]$.

Παράδειγμα 9.1.10. Έστω $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f_n(x) = \begin{cases} 1/x, & \text{αν } 1/n < x \leq 1 \\ n^2 x, & \text{αν } 0 \leq x \leq 1/n \end{cases}$
Τότε $f_n(0) = 0 \to 0$. Αν $0 < x \leq 1$, τότε ισχύει τελικά $\frac{1}{n} < x$, οπότε ισχύει τελικά $f_n(x) = \frac{1}{x}$ και, επομένως, $f_n(x) \to \frac{1}{x}$. Άρα $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} f$ στο $[0,1]$, όπου $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \begin{cases} 1/x, & \text{αν } 0 < x \leq 1 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$

Παράδειγμα 9.1.11. Έστω $f_n : [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$ για κάθε $x \in [0,2\pi]$.
Για κάθε $x \in [0,2\pi]$ ισχύει $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n}$ για κάθε n, οπότε $f_n(x) \to 0$. Άρα $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} 0$ στο $[0,2\pi]$.

Παράδειγμα 9.1.12. Έστω $f_n : [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f_n(x) = \cos(nx)$ για κάθε $x \in [0,2\pi]$.
Είναι $f_n(\pi) = (-1)^n$, οπότε η ακολουθία αριθμών $(f_n(\pi))$ δεν συγκλίνει. Άρα η (f_n) δεν συγκλίνει σε καμιά συνάρτηση κατά σημείο στο $[0,2\pi]$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 9.1. *Έστω αριθμοί λ, μ και $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} f$ και $g_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} g$ στο A. Τότε:*
[α] $\lambda f_n + \mu g_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} \lambda f + \mu g$ *στο* A.
[β] $f_n g_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} fg$ *στο* A.
[γ] *Αν $g(x), g_n(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$ και κάθε n, τότε $\frac{f_n}{g_n} \overset{\text{κ.σ.}}{\to} \frac{f}{g}$ στο A.*

Απόδειξη. [α] Για κάθε $x \in A$ είναι $f_n(x) \to f(x)$ και $g_n(x) \to g(x)$, οπότε $\lambda f_n(x) + \mu g_n(x) \to \lambda f(x) + \mu g(x)$. Άρα $\lambda f_n + \mu g_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} \lambda f + \mu g$ στο A.
[β], [γ] Ομοίως. □

Οι επόμενες τρεις ερωτήσεις είναι πολύ σημαντικές για την Ανάλυση.

Ερώτηση 1: Έστω $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} f$ στο A και έστω ότι κάθε f_n είναι συνεχής στον $\xi \in A$. Είναι η f συνεχής στον ξ;
Απάντηση: Όχι πάντοτε.
Στο παράδειγμα 9.1.8, κάθε f_n είναι συνεχής στον 1 αλλά η f δεν είναι συνεχής στον 1.

Ερώτηση 2: Έστω $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} f$ στο $[a,b]$ και έστω κάθε f_n είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Είναι η f ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και, αν ναι, ισχύει $\int_a^b f_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx$;
Απάντηση: Όχι πάντοτε.
Στο παράδειγμα 9.1.9 είναι $\int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{3}{2} - \frac{1}{n} \to \frac{3}{2}$. Όμως, $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 0 = 0$.
Επίσης, στο παράδειγμα 9.1.10 κάθε f_n είναι συνεχής και, επομένως, ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$ αλλά η f δεν είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$ αφού δεν είναι καν φραγμένη στο $[0,1]$.

Ερώτηση 3: Έστω $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} f$ στο A και έστω ότι για κάθε n η f_n είναι παραγωγίσιμη στο A. Είναι η f παραγωγίσιμη στο A και, αν ναι, ισχύει ${f_n}' \overset{\text{κ.σ.}}{\to} f'$ στο A;
Απάντηση: Όχι πάντοτε.
Στο παράδειγμα 9.1.2, $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} 0$ στο $[0,+\infty)$. Η σταθερή συνάρτηση 0 είναι παραγωγίσιμη. Αλλά ${f_n}'(x) = \frac{1}{(1+nx)^2}$ για κάθε $x \in [0,+\infty)$, οπότε ${f_n}'(0) = 1 \to 1$ και, αν $x > 0$, τότε $f_n'(x) \to 0$. Δηλαδή, ${f_n}' \overset{\text{κ.σ.}}{\to} g$ στο $[0,+\infty)$, όπου η $g : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ έχει τύπο $g(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x > 0 \\ 1, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ οπότε δεν ισχύει ${f_n}' \overset{\text{κ.σ.}}{\to} 0' = 0$ στο $[0,+\infty)$.
Στο παράδειγμα 9.1.8, κάθε f_n είναι παραγωγίσιμη στον 1 αλλά δεν ισχύει το ίδιο για την f.
Στο παράδειγμα 9.1.11 είναι ${f_n}'(x) = \cos(nx)$ για κάθε $x \in [0,2\pi]$ και, όπως φαίνεται στο παράδειγμα 9.1.12, η (f_n') δεν συγκλίνει σε καμιά συνάρτηση κατά σημείο στο $[0,2\pi]$.

Στην επόμενη ενότητα θα ορίσουμε ένα δεύτερο είδος σύγκλισης ακολουθίας συναρτήσεων, την *ομοιόμορφη σύγκλιση*. Τότε τα δύο πρώτα ερωτήματα έχουν καταφατική απάντηση ενώ μια παραλλαγή του τρίτου ερωτήματος έχει, επίσης, καταφατική απάντηση.

Ασκήσεις.

9.1.1. Έστω $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ και $g_n(x) = \frac{n^2x}{1+n^2x^2}$ για κάθε x. Αποδείξτε ότι οι (f_n), (g_n) συγκλίνουν σε κάποιες f, g κατά σημείο στο $\mathbb{R}$. Βρείτε τις f, g.

9.1.2. Έστω $f_n(x) = \frac{x}{n}[\frac{n}{x}]$ για κάθε $x \neq 0$. Αποδείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει σε κάποια f κατά σημείο στο $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Βρείτε την f.

9.1.3. Έστω $f_n(x) = \frac{n}{x}[\frac{x}{n}]$ για κάθε $x > 0$. Αποδείξτε ότι $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} 0$ στο $(0,+\infty)$.

9.1.4. Έστω $f_n(x) = \begin{cases} \min\{nx,1\}, & \text{αν } x \geq 0 \\ \max\{nx,-1\}, & \text{αν } x \leq 0 \end{cases}$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει σε κάποια f κατά σημείο στο $\mathbb{R}$. Βρείτε την f.

9.1.5. Γνωρίζουμε[1] ότι η $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in [a,b] \cap \mathbb{Q} \\ 0, & \text{αν } x \in [a,b] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ δεν είναι ολοκληρώσιμη. Θεωρούμε οποιαδήποτε αρίθμηση $[a,b] \cap \mathbb{Q} = \{r_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ του $[a,b] \cap \mathbb{Q}$ και για κάθε n την αντίστοιχη συνάρτηση $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in \{r_1, \ldots, r_n\} \\ 0, & \text{αν } x \in [a,b] \setminus \{r_1, \ldots, r_n\} \end{cases}$
Αποδείξτε ότι $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} f$ στο $[a,b]$. Είναι κάθε f_n ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$;

9.2 Ομοιόμορφη σύγκλιση.

ΟΡΙΣΜΟΣ 9.2. *Έστω $f,g : A \to \mathbb{R}$. Ορίζουμε την* **ομοιόμορφη απόσταση** *των f, g στο A, και τη συμβολίζουμε $\|f-g\|_A$, με τον τύπο*

$$\|f-g\|_A = \sup\{|f(x)-g(x)| \,|\, x \in A\}.$$

[1] Παράδειγμα 6.2.2.

Το σύνολο $\{|f(x) - g(x)|\,|\, x \in A\}$ είναι μη-κενό. Αν το σύνολο αυτό είναι άνω φραγμένο, τότε η $\|f - g\|_A$ είναι αριθμός, ενώ, αν δεν είναι άνω φραγμένο, τότε $\|f - g\|_A = +\infty$. Επίσης, είναι $\|f - g\|_A \geq 0$ αφού ισχύει $|f(x) - g(x)| \geq 0$ για κάθε $x \in A$. Άρα

$$0 \leq \|f - g\|_A \leq +\infty.$$

Παράδειγμα 9.2.1. Έστω $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με τύπους $f(x) = x$ και $g(x) = x^2$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Τότε ισχύει $|f(x) - g(x)| = |x - x^2| = x - x^2$ για κάθε $x \in [0, 1]$ και βρίσκουμε εύκολα ότι η μέγιστη τιμή της $x - x^2$ στο $[0, 1]$ είναι $\frac{1}{4}$. Άρα $\|f - g\|_{[0,1]} = \sup\{x - x^2 \,|\, x \in [0, 1]\} = \frac{1}{4}$.

Παράδειγμα 9.2.2. Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπους $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$ και $g(x) = 0$ για κάθε x, οπότε ισχύει $|f(x) - g(x)| = \frac{x^2}{1+x^2}$ για κάθε x.
Τώρα, ισχύει $\frac{x^2}{1+x^2} < 1$ για κάθε x, οπότε ο 1 είναι άνω φράγμα του $\{\frac{x^2}{1+x^2} \,|\, x \in \mathbb{R}\}$. Επειδή $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1$, συνεπάγεται ότι, για κάθε $u < 1$, ισχύει $\frac{x^2}{1+x^2} > u$ κοντά στα $\pm\infty$. Άρα κανένας $u < 1$ δεν είναι άνω φράγμα του $\{\frac{x^2}{1+x^2} \,|\, x \in \mathbb{R}\}$.
Άρα $\|f - g\|_{\mathbb{R}} = \sup\{\frac{x^2}{1+x^2} \,|\, x \in \mathbb{R}\} = 1$.

Παράδειγμα 9.2.3. Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπους $f(x) = x$ και $g(x) = 1$ για κάθε x οπότε ισχύει $|f(x) - g(x)| = |x - 1|$ για κάθε x.
Επειδή $\lim_{x\to\pm\infty} |x - 1| = +\infty$, συνεπάγεται ότι, για κάθε u, ισχύει $|x - 1| > u$ κοντά στα $\pm\infty$. Άρα κανένας u δεν είναι άνω φράγμα του $\{|x - 1| \,|\, x \in \mathbb{R}\}$.
Άρα $\|f - g\|_{\mathbb{R}} = \sup\{|x - 1| \,|\, x \in \mathbb{R}\} = +\infty$.

Πριν προχωρήσουμε θα κάνουμε δύο γενικές παρατηρήσεις που θα φανούν χρήσιμες σε πολλά σημεία παρακάτω.

Παρατήρηση 1: *Ο ορισμός του $x_n \to x$ μπορεί να διατυπωθεί, ισοδύναμα, αντικαθιστώντας την ανισότητα $|x_n - x| < \epsilon$ με την $|x_n - x| \leq \epsilon$.*

Πράγματι, έστω $x_n \to x$. Τότε, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $|x_n - x| < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Συνεπάγεται ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $|x_n - x| \leq \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Αντιστρόφως, έστω ότι για *κάθε* $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $|x_n - x| \leq \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Συνεπάγεται ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $|x_n - x| \leq \frac{\epsilon}{2}$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $|x_n - x| < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$ και, επομένως, $x_n \to x$.

Παρατήρηση 2: $\sup B \leq u$ *αν και μόνο αν ισχύει $b \leq u$ για κάθε $b \in B$.*[2]

Πράγματι, έστω $\sup B \leq u$. Τότε ο u είναι άνω φράγμα του συνόλου B, οπότε ισχύει $b \leq u$ για κάθε $b \in B$. Αντιστρόφως, έστω ότι ισχύει $b \leq u$ για κάθε $b \in B$. Τότε ο u είναι άνω φράγμα του B και, επειδή το $\sup B$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του B, συνεπάγεται $\sup B \leq u$.

Ειδική περίπτωση ομοιόμορφης απόστασης είναι η ομοιόμορφη απόσταση μιας $f : A \to \mathbb{R}$ από τη μηδενική συνάρτηση $0 : A \to \mathbb{R}$, δηλαδή η

$$\|f\|_A = \sup\{|f(x)| \,|\, x \in A\}.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 9.2. *Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε:*
[α] $\|f\|_A = 0$ *αν και μόνο αν η f είναι η μηδενική συνάρτηση στο A.*
[β] $\|f + g\|_A \leq \|f\|_A + \|g\|_A$.
[γ] $\|\lambda f\|_A = |\lambda|\|f\|_A$.
[δ] $\|fg\|_A \leq \|f\|_A\|g\|_A$.

Απόδειξη. [α] Αν $f = 0$ στο A, τότε ισχύει $|f(x)| = 0$ για κάθε $x \in A$, οπότε $\|f\|_A = 0$. Αντιστρόφως, έστω $\|f\|_A = 0$. Τότε ισχύει $|f(x)| \leq 0$ και, επομένως, $f(x) = 0$ για κάθε $x \in A$.

[2] Δείτε την άσκηση 1.2.11.

[β] Για κάθε $x \in A$ ισχύει

$$|f(x)+g(x)| \leq |f(x)|+|g(x)| \leq \|f\|_A + \|g\|_A.$$

Άρα $\|f+g\|_A \leq \|f\|_A + \|g\|_A$.
[γ] Αν $\lambda = 0$, τότε, βάσει του [α], και οι δύο μεριές της $\|\lambda f\|_A = |\lambda|\|f\|_A$ είναι ίσες με 0. Έστω, λοιπόν, $\lambda \neq 0$.
Για κάθε $x \in A$ ισχύει

$$|\lambda f(x)| = |\lambda||f(x)| \leq |\lambda|\|f\|_A.$$

Άρα $\|\lambda f\|_A \leq |\lambda|\|f\|_A$.
Ομοίως, για κάθε $x \in A$ ισχύει

$$|f(x)| = \tfrac{1}{|\lambda|}|\lambda f(x)| \leq \tfrac{1}{|\lambda|}\|\lambda f\|_A.$$

Άρα $\|f\|_A \leq \frac{1}{|\lambda|}\|\lambda f\|_A$ και, επομένως, $|\lambda|\|f\|_A \leq \|\lambda f\|_A$.
Από τις $\|\lambda f\|_A \leq |\lambda|\|f\|_A$ και $|\lambda|\|f\|_A \leq \|\lambda f\|_A$ συνεπάγεται $\|\lambda f\|_A = |\lambda|\|f\|_A$.
[δ] Για κάθε $x \in A$ ισχύει

$$|f(x)g(x)| = |f(x)||g(x)| \leq \|f\|_A\|g\|_A.$$

Άρα $\|fg\|_A \leq \|f\|_A\|g\|_A$. □

Απλή συνέπεια της πρότασης 9.2 είναι ότι ισχύει $\|f-g\|_A = 0$ αν και μόνο αν οι f, g ταυτίζονται στο A. Επίσης, ισχύει

$$\|f-g\|_A \leq \|f-h\|_A + \|h-g\|_A\,, \qquad \|\lambda f - \lambda g\|_A = |\lambda|\|f-g\|_A$$

για κάθε $f, g, h : A \to \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 9.3. *Έστω $f_n : A \to \mathbb{R}$ για κάθε n και $f : A \to \mathbb{R}$. Λέμε ότι η (f_n)* **συγκλίνει** *στην f* **ομοιόμορφα** *στο A και συμβολίζουμε*

$$f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f \quad \text{στο } A \qquad ή \qquad \lim_{n\to+\infty} f_n \overset{\text{ομ}}{=} f \quad \text{στο } A$$

αν $\|f_n - f\|_A \to 0$. Με άλλα λόγια, $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο A αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $\sup\{|f_n(x)-f(x)| \,|\, x \in A\} = \|f_n - f\|_A \leq \epsilon$ *για κάθε $n \geq n_0$.*

Επειδή η ανισότητα $\sup\{|f_n(x)-f(x)| \,|\, x \in A\} \leq \epsilon$ ισοδυναμεί με το ότι ισχύει $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$ για κάθε $x \in A$, ο παραπάνω ορισμός διατυπώνεται και ως εξής: $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο A αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $|f_n(x)-f(x)| \leq \epsilon$ για κάθε $x \in A$ και κάθε $n \geq n_0$.

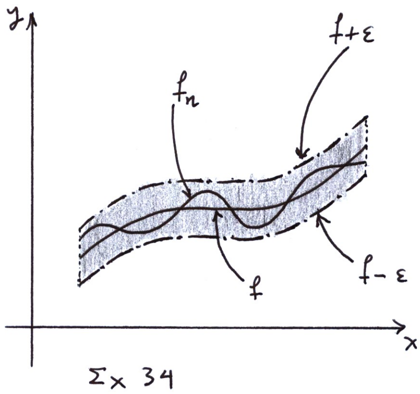
Προσέξτε *πάρα πολύ καλά* τη διαφορά του ορισμού της ομοιόμορφης σύγκλισης από τον ορισμό της κατά σημείο σύγκλισης. (i) Το $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο A σημαίνει ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0, *ο οποίος εξαρτάται από τον ϵ*, ώστε να ισχύει $|f_n(x)-f(x)| \leq \epsilon$ για κάθε $x \in A$ και κάθε $n \geq n_0$. (ii) Το $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} f$ στο A σημαίνει ότι για κάθε $\epsilon > 0$ και για κάθε $x \in A$ υπάρχει n_0, *ο οποίος εξαρτάται από τον ϵ* ***και*** *από τον x*, ώστε να ισχύει $|f_n(x)-f(x)| \leq \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$.

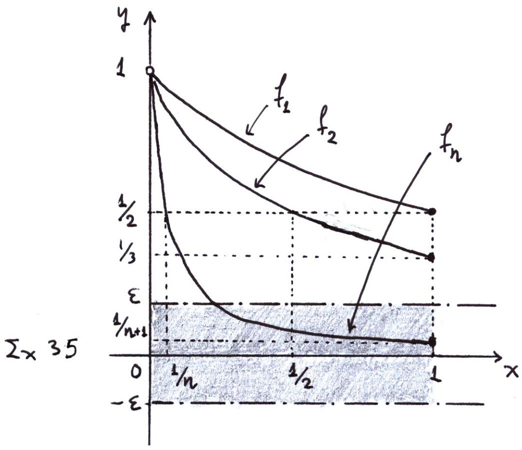
Στην ομοιόμορφη σύγκλιση η επιλογή του n_0 εξαρτάται από τον $\epsilon > 0$ αλλά είναι "ομοιόμορφη" ως προς τον $x \in A$: για τον ίδιο $\epsilon > 0$ υπάρχει *ένας, ο ίδιος*, n_0 για *κάθε* $x \in A$. Όμως, στην κατά σημείο σύγκλιση, για τον ίδιο $\epsilon > 0$, μπορεί διαφορετικοί $x \in A$ να καθορίζουν διαφορετικούς n_0.

Παράδειγμα 9.2.4. Ας δούμε πάλι το παράδειγμα 9.1.4, όπου $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$ για κάθε $x \in (0,1]$ και όπου $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} 0$ στο $(0,1]$. Θα αποδείξουμε ότι *δεν* ισχύει $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} 0$ στο $(0,1]$.
Έστω (για να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι ισχύει $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} 0$ στο $(0,1]$. Έστω $0 < \epsilon < 1$. Τότε υπάρχει

n_0 ώστε να ισχύει $\frac{1}{1+nx} = |\frac{1}{1+nx} - 0| \leq \epsilon$ για κάθε $x \in (0,1]$ και κάθε $n \geq n_0$. Άρα ισχύει $\frac{1}{1+n_0 x} \leq \epsilon$ για κάθε $x \in (0,1]$ και, επομένως, $1 = \lim_{x \to 0+} \frac{1}{1+n_0 x} \leq \epsilon$, οπότε καταλήγουμε σε άτοπο.
Θα επαναλάβουμε, υπολογίζοντας την $\|f_n - 0\|_{(0,1]} = \|f_n\|_{(0,1]}$.
Για κάθε $x \in (0,1]$ ισχύει $|\frac{1}{1+nx}| = \frac{1}{1+nx} < 1$ και, επομένως, ο 1 είναι άνω φράγμα του $\{|\frac{1}{1+nx}| \,|\, x \in (0,1]\}$. Επειδή $\lim_{x \to 0+} \frac{1}{1+nx} = 1$, συνεπάγεται ότι για κάθε $u < 1$ ισχύει $\frac{1}{1+nx} > u$ κοντά στον 0. Άρα κανένας $u < 1$ δεν είναι άνω φράγμα του $\{|\frac{1}{1+nx}| \,|\, x \in (0,1]\}$.
Άρα $\|f_n\|_{(0,1]} = \sup\{|\frac{1}{1+nx}| \,|\, x \in (0,1]\} = 1$ και, επομένως, δεν ισχύει $\|f_n\|_{(0,1]} \to 0$.

Η ανισότητα $\|f - g\|_A \leq \epsilon$ ισοδυναμεί με το ότι ισχύει $|f(x) - g(x)| \leq \epsilon$ για κάθε $x \in A$ κι αυτό με το ότι ισχύει $g(x) - \epsilon \leq f(x) \leq g(x) + \epsilon$ για κάθε $x \in A$ κι αυτό με το ότι το γράφημα της f βρίσκεται ολόκληρο ανάμεσα στο γράφημα της $g - \epsilon$ και στο γράφημα της $g + \epsilon$, δηλαδή, μέσα στη ζώνη που δημιουργείται συμμετρικά γύρω από το γράφημα της g και έχει κατακόρυφο πλάτος 2ϵ. Άρα το $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο A ισοδυναμεί με το ότι για κάθε $\epsilon > 0$ τα γραφήματα όλων των f_n από κάποιον n και πέρα βρίσκονται *ολόκληρα* μέσα στη ζώνη κατακόρυφου πλάτους 2ϵ συμμετρικά γύρω από το γράφημα της f. Δείτε το σχήμα 34.





Παράδειγμα 9.2.5. Ξαναγυρνάμε στο παράδειγμα 9.1.4 ή 9.2.4, όπου $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} 0$ στο $(0,1]$. Σχεδιάζοντας τα γραφήματα των f_n, όπως στο σχήμα 35, βλέπουμε ότι, για μικρούς $\epsilon > 0$, και συγκεκριμένα για $0 < \epsilon < 1$, τα γραφήματα αυτά έχουν *όλα* κάποιο τμήμα τους *έξω* από τη ζώνη κατακόρυφου πλάτους 2ϵ συμμετρικά γύρω από το γράφημα της 0. Άρα δεν ισχύει $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} 0$ στο $(0,1]$.

Ας επανεξετάσουμε τα δώδεκα παραδείγματα της προηγούμενης ενότητας.

Παράδειγμα 9.1.1. Εύκολα υπολογίζουμε $\|f_n - f\|_A = \frac{1}{n}$ για κάθε n. Άρα $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο A.

Παράδειγμα 9.1.2. $\|f_n\|_{[0,+\infty)} = \frac{1}{n}$ για κάθε n. Άρα $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} 0$ στο $[0,+\infty)$.

Παράδειγμα 9.1.3. $\|f_n\|_{[0,1]} = 1$ για κάθε n. Άρα $f_n \overset{\text{ομ}}{\not\to} 0$ στο $[0,1]$.

Παράδειγμα 9.1.4. $\|f_n\|_{(0,1]} = 1$ για κάθε n. Άρα $f_n \overset{\text{ομ}}{\not\to} 0$ στο $(0,1]$.

Παράδειγμα 9.1.5. $\|f_n\|_{\mathbb{R}} = +\infty$ για κάθε n. Άρα $f_n \overset{\text{ομ}}{\not\to} 0$ στο $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 9.1.6. $\|f_n\|_{(1,+\infty)} = 1$ για κάθε n. Άρα $f_n \overset{\text{ομ}}{\not\to} 0$ στο $(1,+\infty)$.

Παράδειγμα 9.1.7. $\|f_n\|_{[0,+\infty)} = \frac{1}{n}$ για κάθε n. Άρα $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} 0$ στο $[0,+\infty)$.

Παράδειγμα 9.1.8. $\|f_n - f\|_{[0,1]} = 1$ για κάθε n. Άρα $f_n \overset{\text{ομ}}{\not\to} f$ στο $[0,1]$.

Παράδειγμα 9.1.9. $\|f_n\|_{[0,1]} = n$ για κάθε n. Άρα $f_n \overset{\text{ομ}}{\not\to} 0$ στο $[0,1]$.

Παράδειγμα 9.1.10. $\|f_n\|_{[0,1]} = n$ για κάθε n. Άρα $f_n \overset{\text{ομ}}{\not\to} 0$ στο $[0,1]$.

Παράδειγμα 9.1.11. $\|f_n\|_{[0,2\pi]} = \frac{1}{n}$ για κάθε n. Άρα $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} 0$ στο $[0,2\pi]$.

Παράδειγμα 9.1.12. Λόγω της πρότασης 9.3 που ακολουθεί, η (f_n) δεν συγκλίνει σε καμιά συνάρτηση ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 9.3. *Αν $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο A, τότε $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} f$ στο A. Δηλαδή, η ομοιόμορφη σύγκλιση είναι πιο ισχυρή από την κατά σημείο σύγκλιση.*

Απόδειξη. Για κάθε $x \in A$ ισχύει $|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_A$ για κάθε n. Άρα για κάθε $x \in A$ ισχύει $f_n(x) \to f(x)$. □

Βάσει της πρότασης 9.3, μπορούμε να βρούμε πιο εύκολα τη συνάρτηση προς την οποία συγκλίνει, αν συγκλίνει, μια ακολουθία συναρτήσεων (f_n) ομοιόμορφα σε ένα σύνολο A. Πρώτα βρίσκουμε συνάρτηση f ώστε $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} f$ στο A. Αυτό είναι εύκολο, διότι για κάθε $x \in A$ έχουμε να κάνουμε με την ακολουθία *αριθμών* $(f_n(x))$. Βρίσκουμε, λοιπόν, για κάθε $x \in A$ το όριο, αν αυτό υπάρχει και είναι αριθμός, της $(f_n(x))$, ονομάζουμε αυτό το όριο $f(x)$ και δημιουργούμε τη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A. Απομένει να εξετάσουμε αν $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο A, υπολογίζοντας την $\|f_n - f\|_A$ για κάθε n.

ΟΡΙΣΜΟΣ 9.4. *Έστω $f_n : A \to \mathbb{R}$ για κάθε n. Η ακολουθία συναρτήσεων (f_n) χαρακτηρίζεται* **ομοιόμορφα φραγμένη** *στο A αν υπάρχει M ώστε να ισχύει $\|f_n\|_A \leq M$ για κάθε n ή, ισοδύναμα, αν υπάρχει M ώστε να ισχύει $|f_n(x)| \leq M$ για κάθε $x \in A$ και κάθε n.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 9.4. *Έστω αριθμοί λ, μ και $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ και $g_n \overset{\text{ομ}}{\to} g$ στο A.*
[α] *Αν $B \subseteq A$, τότε $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο B.*
[β] *$\lambda f_n + \mu g_n \overset{\text{ομ}}{\to} \lambda f + \mu g$ στο A.*
[γ] *Αν οι (f_n), (g_n) είναι ομοιόμορφα φραγμένες στο A, τότε $f_n g_n \overset{\text{ομ}}{\to} fg$ στο A.*
[δ] *Αν οι (f_n), $(\frac{1}{g_n})$ είναι ομοιόμορφα φραγμένες στο A, τότε $\frac{f_n}{g_n} \overset{\text{ομ}}{\to} \frac{f}{g}$ στο A.*

Απόδειξη. [α] Είναι

$$\|f_n - f\|_B = \sup\{|f_n(x) - f(x)| \,|\, x \in B\} \leq \sup\{|f_n(x) - f(x)| \,|\, x \in A\} = \|f_n - f\|_A$$

και, επομένως, $\|f_n - f\|_B \to 0$.
[β] Βάσει της πρότασης 9.2, για κάθε n ισχύει

$$\|(\lambda f_n + \mu g_n) - (\lambda f + \mu g)\|_A \leq |\lambda| \|f_n - f\|_A + |\mu| \|g_n - g\|_A.$$

Άρα $\|(\lambda f_n + \mu g_n) - (\lambda f + \mu g)\|_A \to 0$.
[γ] Υπάρχει M ώστε να ισχύει $\|f_n\|_A, \|g_n\|_A \leq M$ για κάθε n. Άρα ισχύει $|f_n(x)|, |g_n(x)| \leq M$ για κάθε $x \in A$ και κάθε n. Από την πρόταση 9.3 συνεπάγεται $f_n(x) \to f(x)$ και $g_n(x) \to g(x)$ και, επομένως, ισχύει $|f(x)|, |g(x)| \leq M$ για κάθε $x \in A$. Άρα $\|f\|_A, \|g\|_A \leq M$.
Τώρα, για κάθε n είναι $f_n g_n - fg = (f_n - f)(g_n - g) + f(g_n - g) + g(f_n - f)$ και, βάσει της πρότασης 9.2,

$$\begin{aligned} \|f_n g_n - fg\|_A &\leq \|f_n - f\|_A \|g_n - g\|_A + \|f\|_A \|g_n - g\|_A + \|g\|_A \|f_n - f\|_A \\ &\leq \|f_n - f\|_A \|g_n - g\|_A + M \|g_n - g\|_A + M \|f_n - f\|_A. \end{aligned}$$

Συνεπάγεται, λοιπόν, ότι $\|f_n g_n - fg\|_A \to 0$.
[δ] Άμεση συνέπεια του [γ]. Μόνο μια επισήμανση. Υπάρχει M ώστε να ισχύει $\left|\frac{1}{g_n(x)}\right| \leq M$ για

κάθε n και κάθε $x \in A$. Αυτό, ειδικώτερα, σημαίνει ότι $g_n(x) \neq 0$ για κάθε n και κάθε $x \in A$ και, επομένως, ορίζονται οι συναρτήσεις $\frac{f_n}{g_n} : A \to \mathbb{R}$. Επίσης, επειδή ισχύει $|g_n(x)| \geq \frac{1}{M} > 0$ για κάθε n και κάθε $x \in A$ και επειδή $g_n(x) \to g(x)$ για κάθε $x \in A$, συνεπάγεται $|g(x)| \geq \frac{1}{M} > 0$ για κάθε $x \in A$. Άρα ορίζεται και η $\frac{f}{g} : A \to \mathbb{R}$. □

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΤΟΥ CAUCHY. *Η (f_n) συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο A αν και μόνο αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $\|f_n - f_m\|_A \leq \epsilon$ για κάθε $n, m \geq n_0$.*

Απόδειξη. Έστω $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο A. Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει

$$\|f_n - f\|_A \leq \tfrac{\epsilon}{2} \qquad \text{για κάθε } \ n \geq n_0.$$

Επομένως, (με απλή αλλαγή συμβόλου) ισχύει

$$\|f_m - f\|_A \leq \tfrac{\epsilon}{2} \qquad \text{για κάθε } \ m \geq n_0.$$

Άρα, ισχύει

$$\|f_n - f_m\|_A \leq \|f_n - f\|_A + \|f_m - f\|_A \leq \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon \qquad \text{για κάθε } \ n, m \geq n_0.$$

Αντιστρόφως, έστω ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $\|f_n - f_m\|_A \leq \epsilon$ για κάθε $n, m \geq n_0$.
Έστω $x \in A$. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_A \leq \epsilon \qquad \text{για κάθε } \ n, m \geq n_0.$$

Άρα η ακολουθία *αριθμών* $(f_n(x))$ είναι ακολουθία Cauchy και, επομένως, συγκλίνει σε κάποιον αριθμό.
Ορίζουμε $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ για κάθε $x \in A$, οπότε δημιουργείται συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ με την ιδιότητα: $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} f$ στο A.
Η υπόθεσή μας είναι ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \epsilon \qquad \text{για κάθε } \ x \in A \ \text{ και κάθε } \ n, m \geq n_0. \tag{9.1}$$

Θεωρώντας το όριο $\lim_{m\to+\infty}$ στην (9.1), συμπεραίνουμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon \qquad \text{για κάθε } \ x \in A \ \text{ και κάθε } \ n \geq n_0.$$

Άρα για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει

$$\|f_n - f\|_A \leq \epsilon \qquad \text{για κάθε } \ n \geq n_0.$$

Άρα $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο A. □

Τώρα θα δούμε ότι με την ομοιόμορφη σύγκλιση έχουμε πιο ικανοποιητικές απαντήσεις στα τρία ερωτήματα που διατυπώθηκαν στο τέλος της ενότητας 9.1 απ' ότι με την κατά σημείο σύγκλιση.

ΘΕΩΡΗΜΑ 9.1. *Έστω $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο A και $\xi \in A$. Αν κάθε f_n είναι συνεχής στον ξ, τότε η f είναι συνεχής στον ξ. Ειδικώτερα, αν κάθε f_n είναι συνεχής στο A, τότε η f είναι συνεχής στο A.*

Απόδειξη. Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $\|f_n - f\|_A < \frac{\epsilon}{3}$ για κάθε $n \geq n_0$ και, ειδικώτερα, $\|f_{n_0} - f\|_A < \frac{\epsilon}{3}$. Αφού η f_{n_0} είναι συνεχής στον ξ, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(\xi)| < \frac{\epsilon}{3}$ για κάθε $x \in A$ με $|x - \xi| < \delta$. Άρα για κάθε $x \in A$ με $|x - \xi| < \delta$ ισχύει

$$\begin{aligned} |f(x) - f(\xi)| &\leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(\xi)| + |f_{n_0}(\xi) - f(\xi)| \\ &\leq \|f_{n_0} - f\|_A + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(\xi)| + \|f_{n_0} - f\|_A < \tfrac{\epsilon}{3} + \tfrac{\epsilon}{3} + \tfrac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

Άρα η f είναι συνεχής στον ξ. □

Παράδειγμα 9.2.6. Στο παράδειγμα 9.1.8, χωρίς να υπολογίσουμε την $\|f_n - f\|_{[0,1]}$, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι δεν ισχύει $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο $[0,1]$, αφού κάθε f_n είναι συνεχής στον 1 ενώ η f *δεν* είναι συνεχής στον 1.

ΘΕΩΡΗΜΑ 9.2. *Έστω $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο $[a,b]$. Αν κάθε f_n είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και*

$$\int_a^b f_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx.$$

Απόδειξη. Έστω $\epsilon > 0$.
Ορίζουμε $\epsilon' = \frac{\epsilon}{1+2(b-a)} > 0$, οπότε υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $\|f_n - f\|_{[a,b]} \leq \epsilon'$ για κάθε $n \geq n_0$ και, ειδικότερα,

$$\|f_{n_0} - f\|_{[a,b]} \leq \epsilon'. \tag{9.2}$$

Η f_{n_0} είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, οπότε υπάρχει διαμέριση $\Delta = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$ του $[a,b]$ ώστε

$$\overline{\Sigma}(f_{n_0}; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(f_{n_0}; a, b; \Delta) < \epsilon'. \tag{9.3}$$

Έστω u_k και l_k το supremum και το infimum της f στο $[x_{k-1}, x_k]$ καθώς και $u_k{}'$ και $l_k{}'$ οι αντίστοιχες ποσότητες για την f_{n_0}.
Για κάθε $x \in [x_{k-1}, x_k]$ ισχύει, βάσει της (9.2),

$$f(x) \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + f_{n_0}(x) \leq \|f_{n_0} - f\|_{[a,b]} + u_k{}' \leq \epsilon' + u_k{}',$$

οπότε $u_k \leq \epsilon' + u_k{}'$. Ομοίως,

$$f(x) \geq -|f(x) - f_{n_0}(x)| + f_{n_0}(x) \geq -\|f_{n_0} - f\|_{[a,b]} + l_k{}' \geq -\epsilon' + l_k{}'$$

και, επομένως, $l_k \geq -\epsilon' + l_k{}'$. Άρα

$$u_k - l_k \leq u_k{}' - l_k{}' + 2\epsilon'. \tag{9.4}$$

Από τις (9.3) και (9.4) συνεπάγεται

$$\begin{aligned}
\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) &= \textstyle\sum_{k=1}^n (u_k - l_k)(x_k - x_{k-1}) \\
&\leq \textstyle\sum_{k=1}^n (u_k{}' - l_k{}')(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=1}^n 2\epsilon'(x_k - x_{k-1}) \\
&= \overline{\Sigma}(f_{n_0}; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(f_{n_0}; a, b; \Delta) + 2\epsilon'(b-a) \\
&< (1 + 2(b-a))\epsilon' = \epsilon.
\end{aligned}$$

Άρα η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.
Άρα για κάθε n ισχύει

$$\begin{aligned}
\big| \textstyle\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \big| &= \big| \textstyle\int_a^b (f_n(x) - f(x))\,dx \big| \\
&\leq \textstyle\int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \leq \|f_n - f\|_{[a,b]}(b-a)
\end{aligned}$$

και, επομένως, $\big| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \big| \to 0$. □

Το ένα από τα δύο αποτελέσματα του θεωρήματος 9.2 γράφεται

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx.$$

Αυτή η σημαντική εναλλαγή των συμβόλων $\lim_{n\to+\infty}$ και $\int_a^b$ ισχύει *με την προϋπόθεση της ομοιόμορφης σύγκλισης στο διάστημα* $[a,b]$.

Πολλές φορές, όταν πρόκειται να εφαρμόσουμε το θεώρημα 9.2, η f είναι εμφανώς ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Για παράδειγμα, μπορεί κάθε f_n να είναι συνεχής στο $[a,b]$, οπότε, σύμφωνα με το θεώρημα 9.1, η f είναι κι αυτή συνεχής στο $[a,b]$. Ή μπορεί να γνωρίζουμε τον τύπο της f και να διακρίνουμε ότι είναι τμηματικά συνεχής ή τμηματικά μονότονη στο $[a,b]$. Σε όλες αυτές τις περιπτώσεις, το πρώτο και σαφώς πιο δύσκολο μέρος της απόδειξης του θεωρήματος 9.2 (αυτό το οποίο εξασφαλίζει την ύπαρξη του $\int_a^b f(x)\,dx$) είναι περιττό και χρειάζεται μόνο η σχετικά απλή απόδειξη του ορίου $\int_a^b f_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx$.

Παράδειγμα 9.2.7. Στο παράδειγμα 9.1.9 είναι $\int_0^1 f_n(x)\,dx \to \frac{3}{2}$ και $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$. Άρα, χωρίς να υπολογίσουμε τις $\|f_n - f\|_{[0,1]}$, συμπεραίνουμε ότι δεν ισχύει $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο $[0,1]$.

Όπως φαίνεται από τα παραδείγματα 9.1.11 και 9.1.12, δεν μπορούμε να περιμένουμε ανάλογο θεώρημα για παραγώγους. Δηλαδή, το $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο A δε συνεπάγεται το $f_n{}' \overset{\text{ομ}}{\to} f'$ στο A. Υπάρχει, όμως, ένα αποτέλεσμα στην αντίθετη κατεύθυνση.

ΘΕΩΡΗΜΑ 9.3. *Έστω διάστημα I και $g : I \to \mathbb{R}$ και κάθε $f_n : I \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $f_n{}'$ συνεχή στο I. Αν $f_n{}' \overset{\text{ομ}}{\to} g$ στο I και η $(f_n(\xi))$ συγκλίνει για τουλάχιστον έναν $\xi \in I$, τότε η (f_n) συγκλίνει σε κάποια f κατά σημείο στο I και ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I, η f είναι παραγωγίσιμη στο I και ισχύει $f'(x) = g(x)$ για κάθε $x \in I$.*

Απόδειξη. Έστω
$$f_n(\xi) \to l \in \mathbb{R}. \tag{9.5}$$
Επειδή κάθε $f_n{}'$ είναι συνεχής στο I και $f_n{}' \overset{\text{ομ}}{\to} g$ στο I, η g είναι κι αυτή συνεχής στο I. Άρα η g είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I, οπότε ορίζεται το αόριστο ολοκλήρωμα
$$f(x) = \int_\xi^x g(t)\,dt + l \qquad \text{για κάθε } \ x \in I. \tag{9.6}$$
Επίσης, ισχύει
$$f_n(x) = \int_\xi^x f_n{}'(t)\,dt + f_n(\xi) \qquad \text{για κάθε } \ x \in I \ \text{ και κάθε } \ n. \tag{9.7}$$
Επειδή $f_n{}' \overset{\text{ομ}}{\to} g$ στο I και, επομένως, και στο $[\xi, x]$ ή $[x, \xi]$, συνεπάγεται
$$\int_\xi^x f_n{}'(t)\,dt \to \int_\xi^x g(t)\,dt \qquad \text{για κάθε } \ x \in I. \tag{9.8}$$
Από τις (9.5) έως (9.8) συνεπάγεται ότι ισχύει $f_n(x) \to f(x)$ για κάθε $x \in I$. Άρα $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} f$ στο I.
Από την (9.6) και από τη συνέχεια της g στο I, ισχύει $f'(x) = g(x)$ για κάθε $x \in I$.
Τέλος, θα δούμε ότι η (f_n) συγκλίνει στην f ομοιόμορφα σε κάθε $[a,b] \subseteq I$.
Είναι εύκολο να δούμε ότι από τις (9.6) και (9.7) συνεπάγεται ότι για κάθε n και κάθε $x \in [a,b]$ ισχύει
$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f(x)| &\le |(f_n(x) - f(x)) - (f_n(a) - f(a))| + |f_n(a) - f(a)| \\
&= \left| \int_a^x f_n{}'(t)\,dt - \int_a^x g(t)\,dt \right| + |f_n(a) - f(a)| \\
&\le \int_a^x |f_n{}'(t) - g(t)|\,dt + |f_n(a) - f(a)| \\
&\le \|f_n{}' - g\|_{[a,x]}(x-a) + |f_n(a) - f(a)| \\
&\le \|f_n{}' - g\|_I (b-a) + |f_n(a) - f(a)|.
\end{aligned}$$
Άρα για κάθε n ισχύει
$$\|f_n - f\|_{[a,b]} \le \|f_n{}' - g\|_I (b-a) + |f_n(a) - f(a)|.$$
Άρα $\|f_n - f\|_{[a,b]} \to 0$, οπότε η (f_n) συγκλίνει στην f ομοιόμορφα στο $[a,b]$. □

Ένα από τα αποτελέσματα του θεωρήματος 9.3 είναι η, υπό προϋποθέσεις, εναλλαγή των συμβόλων του ορίου και της παραγώγισης:
$$\lim_{n\to+\infty} f_n{}' = \left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right)' \qquad \text{ή} \qquad \lim_{n\to+\infty} \tfrac{d}{dx} f_n(x) = \tfrac{d}{dx} \lim_{n\to+\infty} f_n(x).$$

Τώρα θα δούμε το ίδιο, ουσιαστικά, θεώρημα αλλά με λιγότερες υποθέσεις. Το θεώρημα 9.4 είναι ισχυρότερο από το θεώρημα 9.3 διότι στο θεώρημα 9.4 δεν υποθέτουμε ότι οι $f_n{}'$ είναι συνεχείς στο I. Από την άλλη μεριά, το θεώρημα 9.3 είναι αρκετό για τις περισσότερες εφαρμογές διότι συνήθως συναντάμε καταστάσεις όπου είναι δεδομένο ότι οι $f_n{}'$ είναι συνεχείς στο I. Και επειδή η απόδειξη του θεωρήματος 9.4 είναι πιο δύσκολη, μπορεί να παραληφθεί η μελέτη της κατά την πρώτη ανάγνωση.

ΘΕΩΡΗΜΑ 9.4. *Έστω διάστημα I και $g : I \to \mathbb{R}$ και κάθε $f_n : I \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο I. Αν ${f_n}' \overset{\text{ομ}}{\to} g$ στο I και η $(f_n(\xi))$ συγκλίνει για τουλάχιστον έναν $\xi \in I$, τότε η (f_n) συγκλίνει σε κάποια f κατά σημείο στο I και ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I, η f είναι παραγωγίσιμη στο I και ισχύει $f'(x) = g(x)$ για κάθε $x \in I$.*

Απόδειξη. Έστω $x \in I$. Έστω $\epsilon > 0$. Σύμφωνα με το κριτήριο του Cauchy (δύο φορές), υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει

$$\|{f_n}' - {f_m}'\|_I \leq \tfrac{\epsilon}{2|x-\xi|+1}, \quad |f_n(\xi) - f_m(\xi)| \leq \tfrac{\epsilon}{2} \qquad \text{για κάθε } n, m \geq n_0. \tag{9.9}$$

Τώρα, βάσει του θεωρήματος μέσης τιμής του Lagrange, για κάθε $n, m \geq n_0$ υπάρχει ζ ανάμεσα στους x, ξ ώστε να ισχύει

$$\begin{aligned}|f_n(x) - f_m(x)| &\leq |(f_n(x) - f_m(x)) - (f_n(\xi) - f_m(\xi))| + |f_n(\xi) - f_m(\xi)| \\ &= |{f_n}'(\zeta) - {f_m}'(\zeta)||x - \xi| + |f_n(\xi) - f_m(\xi)| \\ &\leq \|{f_n}' - {f_m}'\|_I|x - \xi| + |f_n(\xi) - f_m(\xi)| \leq \tfrac{\epsilon}{2|x-\xi|+1}|x - \xi| + \tfrac{\epsilon}{2} < \epsilon,\end{aligned}$$

όπου στην τελευταία γραμμή χρησιμοποιήσαμε τις (9.9). Άρα η $(f_n(x))$ είναι ακολουθία Cauchy και, επομένως, συγκλίνει.
Τώρα, για κάθε $x \in I$ ορίζουμε $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ και σχηματίζουμε συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ ώστε $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} f$ στο I.
Έστω $x \in I$. Θα αποδείξουμε ότι $f'(x) = g(x)$.
Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει

$$\|{f_n}' - g\|_I \leq \tfrac{\epsilon}{4} \qquad \text{για κάθε } n \geq n_0. \tag{9.10}$$

Συνεπάγεται

$$\|{f_n}' - {f_{n_0}}'\|_I \leq \|{f_n}' - g\|_I + \|{f_{n_0}}' - g\|_I \leq \tfrac{\epsilon}{4} + \tfrac{\epsilon}{4} = \tfrac{\epsilon}{2} \qquad \text{για κάθε } n \geq n_0. \tag{9.11}$$

Επίσης, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει

$$\left|\tfrac{f_{n_0}(y)-f_{n_0}(x)}{y-x} - {f_{n_0}}'(x)\right| \leq \tfrac{\epsilon}{4} \qquad \text{για κάθε } y \in I \text{ με } 0 < |y - x| < \delta. \tag{9.12}$$

Ακόμη, έχουμε

$$\begin{aligned}\left|\tfrac{f_n(y)-f_n(x)}{y-x} - g(x)\right| \leq \left|\tfrac{(f_n(y)-f_{n_0}(y))-(f_n(x)-f_{n_0}(x))}{y-x}\right| + \left|\tfrac{f_{n_0}(y)-f_{n_0}(x)}{y-x} - {f_{n_0}}'(x)\right| \\ + |{f_{n_0}}'(x) - g(x)| \qquad \text{για κάθε } n \text{ και κάθε } y \in I,\ \ y \neq x.\end{aligned} \tag{9.13}$$

Πρώτον, από την (9.10) συνεπάγεται

$$|{f_{n_0}}'(x) - g(x)| \leq \|{f_{n_0}}' - g\|_I \leq \tfrac{\epsilon}{4}. \tag{9.14}$$

Κατόπιν, βάσει του θεωρήματος μέσης τιμής του Lagrange, για κάθε $y \in I$, $y \neq x$ υπάρχει ζ ανάμεσα στους x, y ώστε

$$\left|\tfrac{(f_n(y)-f_{n_0}(y))-(f_n(x)-f_{n_0}(x))}{y-x}\right| = |{f_n}'(\zeta) - {f_{n_0}}'(\zeta)| \leq \|{f_n}' - {f_{n_0}}'\|_I$$

και, επομένως, από την (9.11),

$$\left|\tfrac{(f_n(y)-f_{n_0}(y))-(f_n(x)-f_{n_0}(x))}{y-x}\right| \leq \tfrac{\epsilon}{2} \qquad \text{για κάθε } n \geq n_0 \text{ και κάθε } y \in I,\ \ y \neq x. \tag{9.15}$$

Η (9.13), μέσω των (9.12), (9.14) και (9.15), συνεπάγεται

$$\left|\tfrac{f_n(y)-f_n(x)}{y-x} - g(x)\right| \leq \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{4} + \tfrac{\epsilon}{4} = \epsilon \qquad \text{για κάθε } n \geq n_0 \text{ και κάθε } y \in I \text{ με } 0 < |y - x| < \delta.$$

Παίρνοντας όριο καθώς $n \to +\infty$, βρίσκουμε

$$\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x} - g(x)\right| \leq \epsilon \qquad \text{για κάθε } y \in I \text{ με } 0 < |y-x| < \delta_0.$$

Αυτό σημαίνει ότι $\lim_{y\to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} = g(x)$ και, επομένως, $f'(x) = g(x)$.
Τέλος, θα δούμε ότι η (f_n) συγκλίνει στην f ομοιόμορφα σε κάθε $[a,b] \subseteq I$.
Για κάθε n και κάθε $x \in [a,b]$ υπάρχει ζ ανάμεσα στους x, a ώστε

$$\begin{aligned}|f_n(x) - f(x)| &\leq |(f_n(x) - f(x)) - (f_n(a) - f(a))| + |f_n(a) - f(a)| \\ &= |{f_n}'(\zeta) - f'(\zeta)||x-a| + |f_n(a) - f(a)| \\ &\leq \|{f_n}' - g\|_I(b-a) + |f_n(a) - f(a)|.\end{aligned}$$

Άρα για κάθε n ισχύει

$$\|f_n - f\|_{[a,b]} \leq \|{f_n}' - g\|_I(b-a) + |f_n(a) - f(a)|.$$

Επομένως, $\|f_n - f\|_{[a,b]} \to 0$, οπότε η (f_n) συγκλίνει στην f ομοιόμορφα στο $[a,b]$. $\square$

Παρατηρήστε στα θεωρήματα 9.3 και 9.4 ότι *υποθέτουμε* την ομοιόμορφη σύγκλιση της $({f_n}')$ και *συμπεραίνουμε* την ομοιόμορφη σύγκλιση της (f_n). Επίσης, για την (f_n) *αρκεί* να υποθέσουμε την κατά σημείο σύγκλιση σε *ένα μόνο* σημείο ξ.

Ασκήσεις.

9.2.1. Έστω $f_n : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f_n(x) = xe^{-nx}$ για κάθε $x \geq 0$. Αποδείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει σε κάποια f ομοιόμορφα στο $[0,+\infty)$. Ποιά είναι η f; Σχεδιάστε τα γραφήματα των συναρτήσεων.
Επαναλάβατε με τις $f_n : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f_n(x) = x^2e^{-nx}$ για κάθε $x \geq 0$.
Ομοίως με τις $f_n : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f_n(x) = (-1)^n\sqrt{n}\,xe^{-nx}$ για κάθε $x \geq 0$.

9.2.2. Έστω $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f_n(x) = x^n(1-x^n)$ για κάθε $x \in [0,1]$. Αποδείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει στη μηδενική συνάρτηση 0 κατά σημείο, αλλά όχι ομοιόμορφα, στο $[0,1]$. Σχεδιάστε τα γραφήματα των συναρτήσεων.

9.2.3. Έστω $f_n : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$ για κάθε $x \geq 0$. Αποδείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει σε κάποια f κατά σημείο, αλλά όχι ομοιόμορφα, στο $[0,+\infty)$. Ποιά είναι η f; Αποδείξτε ότι, για κάθε $a > 0$, $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ ομοιόμορφα στο $[a,+\infty)$. Σχεδιάστε τα γραφήματα των συναρτήσεων.
Να επαναλάβετε με τις $f_n : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπους $f_n(x) = \frac{\sqrt{n}\,x}{1+nx^2}$ για κάθε $x \geq 0$.
Ομοίως με τις $f_n : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπους $f_n(x) = e^{-nx}$ για κάθε $x \geq 0$.
Ομοίως με τις $f_n : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπους $f_n(x) = nxe^{-nx}$ για κάθε $x \geq 0$.

9.2.4. Έστω $f_n : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$ για κάθε $x \geq 0$. Αποδείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει σε κάποια f κατά σημείο στο $[0,+\infty)$. Ποιά είναι η f; Αποδείξτε με δύο τρόπους ότι η (f_n) δεν συγκλίνει στην f ομοιόμορφα στο $[0,+\infty)$. Για κάθε $\delta \in (0,1]$ αποδείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει στην f ομοιόμορφα σε καθένα από τα $[0,1-\delta]$, $[1+\delta,+\infty)$. Σχεδιάστε τα γραφήματα των συναρτήσεων.

9.2.5. Έστω $f_n : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f_n(x) = \frac{\sin nx}{nx}$ για κάθε $x > 0$. Αποδείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει στην μηδενική συνάρτηση 0 κατά σημείο, αλλά όχι ομοιόμορφα, στο $(0,+\infty)$. Αποδείξτε ότι για κάθε $a > 0$ η (f_n) συγκλίνει στην 0 ομοιόμορφα στο $[a,+\infty)$. Σχεδιάστε τα γραφήματα των συναρτήσεων.

9.2.6. Έστω $f, g, f_n, g_n : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπους $f_n(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{n}$, $g_n(x) = \frac{1}{n}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ και $g(x) = 0$ για κάθε $x > 0$. Αποδείξτε ότι $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$, $g_n \overset{\text{ομ}}{\to} g$ και $f_ng_n \overset{\text{ομ}}{\not\to} fg$ στο $(0,+\infty)$. Σχεδιάστε τα γραφήματα των συναρτήσεων.

9.2.7. Έστω $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x < 1/(n+1) \text{ ή } 1/n < x \\ (\sin(\pi/x))^2, & \text{αν } 1/(n+1) \le x \le 1/n \end{cases}$. Αποδείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει σε κάποια f κατά σημείο στο $\mathbb{R}$ και ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Ποιά είναι η f; Ισχύει $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο $\mathbb{R}$; Σχεδιάστε τα γραφήματα των συναρτήσεων.

9.2.8. Έστω $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f_n(x) = n^p x(1-x^2)^n$ για κάθε $x \in [0,1]$. Αποδείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει σε κάποια f κατά σημείο στο $[0,1]$. Για ποιούς p είναι η σύγκλιση ομοιόμορφη; Για ποιούς p ισχύει $\int_0^1 f_n(x)\,dx \to \int_0^1 f(x)\,dx$; Σχεδιάστε τα γραφήματα των συναρτήσεων.
Κάντε τα ίδια με τις $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με τύπους $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^p}$ για κάθε $x \in [0,1]$.

9.2.9. Έστω $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$ για κάθε x. Αποδείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει σε κάποια f ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f_n{}'(x) \to f'(x)$, αν $x \neq 0$, αλλά $f_n{}'(0) \not\to f'(0)$. Αποδείξτε ότι η $(f_n{}')$ συγκλίνει σε κάποια g κατά σημείο στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε με τρεις τρόπους ότι η $(f_n{}')$ δεν συγκλίνει στην g ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$. Σχεδιάστε τα γραφήματα των συναρτήσεων.

9.2.10. Έστω $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f_n(x) = \frac{1}{n}e^{-n^2x^2}$ για κάθε x. Αποδείξτε ότι $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} 0$ και $f_n{}' \overset{\text{κ.σ.}}{\to} 0$ στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι, για κάθε $a > 0$, $f_n{}' \overset{\text{ομ}}{\to} 0$ σε καθένα από τα $(-\infty, -a]$, $[a, +\infty)$ αλλά όχι στο $[-a, a]$. Σχεδιάστε τα γραφήματα των συναρτήσεων.

9.2.11. Έστω $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f_n(x) = |x| \sqrt[n]{|x|}$ για κάθε $x \in [-1,1]$. Αποδείξτε η (f_n) συγκλίνει σε κάποια f ομοιόμορφα στο $[-1,1]$. Ποιά είναι η f; Αποδείξτε ότι κάθε f_n είναι παραγωγίσιμη στον 0 ενώ η f δεν είναι παραγωγίσιμη στον 0. Σχεδιάστε τα γραφήματα των συναρτήσεων.

9.2.12. Έστω $f_n : [0,2] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f_n(x) = \sqrt[n]{1+x^n}$ για κάθε $x \in [0,2]$. Αποδείξτε η (f_n) συγκλίνει σε κάποια f ομοιόμορφα στο $[0,2]$. Ποιά είναι η f; Αποδείξτε ότι κάθε f_n είναι παραγωγίσιμη στο $[0,2]$ ενώ η f δεν είναι παραγωγίσιμη στον 1. Αποδείξτε ότι η $(f_n{}')$ συγκλίνει σε κάποια g κατά σημείο στο $[0,2]$. Αποδείξτε με τρεις τρόπους ότι η $(f_n{}')$ δεν συγκλίνει στην g ομοιόμορφα στο $[0,2]$. Σχεδιάστε τα γραφήματα των συναρτήσεων.

9.2.13. Έστω $A = B \cup C$ και $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο B και στο C. Αποδείξτε ότι $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο A.

9.2.14. Αν $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο A και η $g : A \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη στο A, αποδείξτε ότι $f_n g \overset{\text{ομ}}{\to} fg$ στο A. Είναι αυτό συνέπεια της πρότασης 9.4[γ];

9.2.15. Έστω $f_n : A \to [a,b]$ και $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο A. Αποδείξτε ότι $f : A \to [a,b]$. Αν, επίσης, η $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a,b]$, αποδείξτε ότι $g \circ f_n \overset{\text{ομ}}{\to} g \circ f$ στο A.

9.2.16. Αν $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο A και κάθε f_n είναι φραγμένη στο A, αποδείξτε ότι η (f_n) είναι ομοιόμορφα φραγμένη στο A.

9.2.17. Έστω $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο A. Αν κάθε f_n είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A, αποδείξτε ότι και η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A.

9.2.18. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f_n(x) = f(x + \frac{1}{n})$ για κάθε x. Αποδείξτε ότι, αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$, τότε $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο $\mathbb{R}$.

9.2.19. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η f' είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$. Αν ορίσουμε $g_n(x) = n\big(f(x+\frac{1}{n}) - f(x)\big)$ για κάθε x, αποδείξτε ότι $g_n \overset{\text{ομ}}{\to} f'$ στο $\mathbb{R}$.

9.2.20. Έστω $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο A, η ακολουθία (x_n) είναι στο A, $\xi \in A$ και $x_n \to \xi$. Αν η f είναι συνεχής στον ξ, αποδείξτε ότι $f_n(x_n) \to f(\xi)$.

9.2.21. [3] [α] Έστω $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο A, ξ σημείο συσσώρευσης του A και έστω $y_n = \lim_{x\to\xi} f_n(x)$. Αποδείξτε ότι η ακολουθία (y_n) συγκλίνει και $\lim_{x\to\xi} f(x) = \lim_{n\to+\infty} y_n$. Δηλαδή,

$$\lim_{x\to\xi} \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to\xi} f_n(x).$$

[β] Έστω $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A και κάθε $f_n : A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στον ξ και $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο $A \setminus \{\xi\}$. Αποδείξτε ότι η ακολουθία $(f_n(\xi))$ συγκλίνει και, αν ορίσουμε $f(\xi) = \lim_{n\to+\infty} f_n(\xi)$, τότε η $f : A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στον ξ.

9.2.22. Έστω $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[0,1]$ και $f_n(x) = x^n g(x)$ για κάθε $x \in [0,1]$. Αποδείξτε ότι $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} 0$ στο $[0,1]$ αν και μόνο αν $g(1) = 0$.

9.2.23. Έστω $P_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο $\mathbb{R}$. Αν κάθε P_n είναι πολυωνυμική συνάρτηση, αποδείξτε ότι και η f είναι πολυωνυμική συνάρτηση. Πώς σχετίζεται κάθε P_n με το οριακό πολυώνυμο f;

Μήπως προκύπτει το ίδιο συμπέρασμα αν υποθέσουμε ότι $P_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο A, όπου A είναι κάποιο *μη-φραγμένο* υποσύνολο του $\mathbb{R}$;

Να αντιπαραβάλετε με το θεώρημα του Weierstrass, όπως αυτό διατυπώνεται στο τέλος της ενότητας 9.3.

9.2.24. Έστω $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ και $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} f$ στο $[a,b]$.

Αν κάθε f_n είναι αύξουσα στο $[a,b]$, αποδείξτε ότι και η f είναι αύξουσα στο $[a,b]$.

Αν, επιπλέον, η f είναι συνεχής στο $[a,b]$, αποδείξτε ότι $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο $[a,b]$.

9.2.25. Αποδείξτε το **θεώρημα του Dini**: *Έστω ότι κάθε $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a,b]$ και ότι η $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a,b]$. Αν $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} f$ στο $[a,b]$ και αν ισχύει $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$ και κάθε n, τότε $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο $[a,b]$.*

9.3 Το θεώρημα του Weierstrass.

ΛΗΜΜΑ 9.1. [α] $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1$.
[β] $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx$.
[γ] $\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = (n^2-n)x^2 + nx$.

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε τον διωνυμικό τύπο $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k s^{n-k} = (t+s)^n$.

[α] Θέτουμε $t = x$ και $s = 1-x$.

[β] Παραγωγίζουμε τον διωνυμικό τύπο ως προς t, πολλαπλασιάζουμε την ισότητα που προκύπτει με t και θέτουμε $t = x$ και $s = 1-x$.

[γ] Παραγωγίζουμε τον διωνυμικό τύπο δύο φορές ως προς t, πολλαπλασιάζουμε με t και θέτουμε $t = x$ και $s = 1-x$. □

Στην ενότητα αυτή θα αποδείξουμε μόνο ένα θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ WEIERSTRASS. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b]$. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει πολυώνυμο $P(x)$ ώστε να ισχύει $|P(x) - f(x)| \leq \epsilon$ για κάθε $x \in [a,b]$ ή, ισοδύναμα, $\|P - f\|_{[a,b]} \leq \epsilon$.*

Απόδειξη. [4] Αρχικά θεωρούμε την περίπτωση του διαστήματος $[0,1]$.
Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[0,1]$. Έστω $\epsilon > 0$. Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0,1]$, οπότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει

$$|f(x') - f(x'')| < \tfrac{\epsilon}{2} \qquad \text{για κάθε } x', x'' \in [0,1] \text{ με } |x' - x''| < \delta. \tag{9.16}$$

[3] Ένα σημαντικό αποτέλεσμα. Επιτρέπει, υπό προϋποθέσεις, την εναλλαγή των ορίων $\lim_{n\to+\infty}$ και $\lim_{x\to\xi}$.

[4] Υπάρχουν πολλές αποδείξεις του θεωρήματος του Weierstrass. Η απόδειξη που θα δούμε είναι του S. Bernstein. Μια ακόμη απόδειξη υπάρχει στην άσκηση 9.3.4.

Επίσης, η f είναι φραγμένη στο $[0,1]$, οπότε υπάρχει M ώστε να ισχύει

$$|f(x)| \leq M \qquad \text{για κάθε } x \in [0,1]. \tag{9.17}$$

Θεωρούμε έναν οποιονδήποτε

$$n \geq \max\{\tfrac{1}{\delta^4}, (\tfrac{M}{\epsilon})^2\} \tag{9.18}$$

και το πολυώνυμο

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(\tfrac{k}{n}) x^k (1-x)^{n-k}.$$

Θα αποδείξουμε ότι ισχύει $|P(x) - f(x)| \leq \epsilon$ για κάθε $x \in [0,1]$.
Έστω $x \in [0,1]$. Σύμφωνα με το λήμμα 9.1, είναι

$$f(x) = f(x) \cdot 1 = f(x) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(x) x^k (1-x)^{n-k},$$

οπότε

$$P(x) - f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \big(f(\tfrac{k}{n}) - f(x)\big) x^k (1-x)^{n-k}. \tag{9.19}$$

Χωρίζουμε τους αριθμούς $0, 1, \ldots, n$ σε δύο κατηγορίες. Το σύνολο A αποτελείται από τους $k = 0, 1, \ldots, n$ με την ιδιότητα: $|x - \frac{k}{n}| < \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$. Το σύνολο B αποτελείται από τους υπόλοιπους $k = 0, 1, \ldots, n$, δηλαδή εκείνους με την ιδιότητα: $|x - \frac{k}{n}| \geq \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$.
Αν $k \in A$, από την (9.18) συνεπάγεται $|x - \frac{k}{n}| < \delta$, οπότε από την (9.16), $\big|f(\frac{k}{n}) - f(x)\big| < \frac{\epsilon}{2}$.
Επομένως, από το λήμμα 9.1 (για την ισότητα στο τέλος) έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{k \in A} \binom{n}{k} \big|f(\tfrac{k}{n}) - f(x)\big| x^k (1-x)^{n-k} &\leq \tfrac{\epsilon}{2} \sum_{k \in A} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &\leq \tfrac{\epsilon}{2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \tfrac{\epsilon}{2}. \end{aligned} \tag{9.20}$$

Αν $k \in B$, από την (9.17) και από την ιδιότητα των $k \in B$ συνεπάγεται

$$\big|f(\tfrac{k}{n}) - f(x)\big| \leq \big|f(\tfrac{k}{n})\big| + |f(x)| \leq 2M \leq 2M\sqrt{n}(\tfrac{k}{n} - x)^2,$$

οπότε, πάλι από το λήμμα 9.1 (για την τελευταια ισότητα) και από την (9.18) (για την τελευταία ανισότητα) έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{k \in B} \binom{n}{k} \big|f(\tfrac{k}{n}) - f(x)\big| x^k (1-x)^{n-k} &\leq 2M\sqrt{n} \sum_{k \in B} (\tfrac{k}{n} - x)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &\leq 2M\sqrt{n} \sum_{k=0}^{n} (\tfrac{k}{n} - x)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \tfrac{2Mx(1-x)}{\sqrt{n}} \leq \tfrac{M}{2\sqrt{n}} \leq \tfrac{\epsilon}{2}. \end{aligned} \tag{9.21}$$

Επομένως, η (9.19), με τις (9.20) και (9.21), συνεπάγεται

$$\begin{aligned} |P(x) - f(x)| &\leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \big|f(\tfrac{k}{n}) - f(x)\big| x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \sum_{k \in A} \binom{n}{k} \big|f(\tfrac{k}{n}) - f(x)\big| x^k (1-x)^{n-k} \\ &\quad + \sum_{k \in B} \binom{n}{k} \big|f(\tfrac{k}{n}) - f(x)\big| x^k (1-x)^{n-k} \\ &\leq \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Άρα ισχύει $|P(x) - f(x)| \leq \epsilon$ για κάθε $x \in [0,1]$.
Θεωρούμε, τώρα, τη γενική περίπτωση διαστήματος $[a,b]$.
Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b]$. Ορίζουμε την $\phi : [0,1] \to [a,b]$ με τύπο $\phi(t) = (b-a)t+a$ και την αντίστροφή της $\psi : [a,b] \to [0,1]$ με τύπο $\psi(x) = \frac{x-a}{b-a}$. Κατόπιν, θεωρούμε τη σύνθεση $g = f \circ \phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(t) = f((b-a)t+a)$. Η g, ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων, είναι συνεχής στο $[0,1]$. Από το πρώτο μέρος της απόδειξης συνεπάγεται ότι υπάρχει πολυώνυμο $Q(t)$ ώστε να ισχύει $|Q(t) - g(t)| \leq \epsilon$ για κάθε $t \in [0,1]$.
Τώρα, θεωρούμε τη σύνθεση $P = Q \circ \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ με τύπο $P(x) = Q(\frac{x-a}{b-a})$. Επειδή το $Q(t)$ είναι πολυώνυμο, το $P(x)$ είναι κι αυτό πολυώνυμο και, μάλιστα, ίδιου βαθμού με το Q. Από την $g = f \circ \phi$ συνεπάγεται η $f = g \circ \psi$. Τέλος, ισχύει $|P(x) - f(x)| = |Q(\psi(x)) - g(\psi(x))| \leq \epsilon$ για κάθε $x \in [a,b]$. $\square$

Παράδειγμα 9.3.1. Έστω η $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\sqrt{x}$.
Ακολουθώντας τη διαδικασία της απόδειξης του θεωρήματος του Weierstrass, θα βρούμε πολυώνυμο $P(x)$ ώστε να ισχύει $|\sqrt{x}-P(x)|\le 10^{-4}$ για κάθε $x\in[0,1]$.
Αποδεικνύεται εύκολα ότι ισχύει

$$|\sqrt{x'}-\sqrt{x''}|\le \tfrac{1}{2}10^{-4} \qquad \text{για κάθε } x',x''\in[0,1] \text{ με } |x'-x''|\le \tfrac{1}{4}10^{-8}.$$

Αυτό είναι άμεσο από τη στοιχειώδη ανισότητα $|\sqrt{x'}-\sqrt{x''}|\le\sqrt{|x'-x''|}$. Επίσης, προφανώς ισχύει

$$0\le\sqrt{x}\le 1 \qquad \text{για κάθε } x\in[0,1].$$

Άρα, βάσει της (9.18), χρειαζόμαστε

$$n\ge \max\{4^4 10^{32},10^8\}=4^4 10^{32}.$$

Άρα το ζητούμενο πολυώνυμο είναι το

$$P(x)=\textstyle\sum_{k=0}^{4^4 10^{32}}\binom{4^4 10^{32}}{k}\sqrt{\frac{k}{4^4 10^{32}}}\,x^k(1-x)^{4^4 10^{32}-k}.$$

Το πολυώνυμο αυτό είναι βαθμού $4^4 10^{32}$ και, επομένως, τελείως ασύμφορο!

Από το θεώρημα του Weierstrass συνεπάγεται ότι για κάθε n υπάρχει πολυώνυμο $P_n(x)$ ώστε $\|P_n-f\|_{[a,b]}\le\frac{1}{n}$. Άρα υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων (P_n) ώστε $P_n\overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο $[a,b]$. Αντιστρόφως, έστω ότι υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων (P_n) ώστε $P_n\overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο $[a,b]$ ή, ισοδύναμα, $\|P_n-f\|_{[a,b]}\to 0$. Τότε για κάθε $\epsilon>0$ υπάρχει n ώστε $\|P_n-f\|_{[a,b]}\le\epsilon$. Άρα μια ισοδύναμη διατύπωση του θεωρήματος του Weierstrass είναι:
Αν η $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a,b]$, τότε υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων (P_n) ώστε $P_n\overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο $[a,b]$.

Ασκήσεις.

9.3.1. Βρείτε πολυώνυμο $P(x)$ ώστε να ισχύει $\big|P(x)-|x|\big|\le\frac{1}{100}$ για κάθε $x\in[-100,100]$.
Βρείτε πολυώνυμο $P(x)$ ώστε $P(0)=0$ και ώστε να ισχύει $|P(x)-\sin x|\le\frac{1}{100}$ για κάθε $x\in[-100,100]$.

9.3.2. Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b]$ με την ιδιότητα: $\int_a^b x^n f(x)\,dx=0$ για κάθε $n\in\mathbb{Z}$, $n\ge 0$. Αποδείξτε ότι $f=0$.

9.3.3. [α] Έστω $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $[1,+\infty)$ και έστω ότι το $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ είναι αριθμός. Αποδείξτε ότι για κάθε $\epsilon>0$ υπάρχει πολυώνυμο $P(x)$ ώστε να ισχύει $|P(\frac{1}{x})-f(x)|\le\epsilon$ για κάθε $x\ge 1$.
[β] Έστω $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $[0,+\infty)$ και έστω ότι το $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ είναι αριθμός. Αποδείξτε ότι για κάθε $\epsilon>0$ υπάρχει πολυώνυμο $P(x)$ ώστε να ισχύει $|P(e^{-x})-f(x)|\le\epsilon$ για κάθε $x\ge 0$.
[γ] Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $\mathbb{R}$ και έστω ότι τα $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)$ είναι αριθμοί. Αποδείξτε ότι για κάθε $\epsilon>0$ υπάρχει πολυώνυμο $P(x)$ ώστε να ισχύει $|P(\frac{1}{1+e^x})-f(x)|\le\epsilon$ για κάθε x.

9.3.4. [5] Ορίζουμε, για κάθε $n\in\mathbb{Z}$, $n\ge 0$, συναρτήσεις $W_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ επαγωγικά ως εξής:

$$W_0(x)=0, \qquad W_{n+1}(x)=W_n(x)+\tfrac{1}{2}\big(x^2-(W_n(x))^2\big)$$

για κάθε x και κάθε $n\ge 0$. Αποδείξτε ότι για κάθε n το $W_n(x)$ είναι άρτιο πολυώνυμο βαθμού 2^n και ότι $W_n(x)\overset{\text{ομ}}{\to}|x|$ στο $[-1,1]$.

[5] Στο τέλος αυτής της άσκησης θα δούμε δεύτερη απόδειξη του θεωρήματος του Weierstrass.

Έστω $\xi \in [a,b]$ και η συνάρτηση $\phi_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } a \leq x \leq \xi \\ x-\xi, & \text{αν } \xi \leq x \leq b \end{cases}$ Αποδείξτε, βάσει του προηγουμένου, ότι υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων (T_n) ώστε $T_n \overset{\text{ομ}}{\to} \phi_\xi$ στο $[a,b]$.

Μια συνάρτηση $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ χαρακτηρίζεται **τμηματικά αφφινική** αν υπάρχουν $\xi_0, \ldots, \xi_m$ ώστε $a = \xi_0 < \cdots < \xi_m = b$ και η g είναι αφφινική σε καθένα από τα ανοικτά υποδιαστήματα $(\xi_0, \xi_1), \ldots, (\xi_{m-1}, \xi_m)$.

Έστω ότι η $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι τμηματικά αφφινική και συνεχής στο $[a,b]$ και έστω ότι ο τύπος της g σε κάθε $[\xi_{k-1}, \xi_k]$ είναι $g(x) = \lambda_k(x - \xi_{k-1}) + g(\xi_{k-1})$. Τέλος, θεωρήστε $\mu_1 = \lambda_1$ και $\mu_k = \lambda_k - \lambda_{k-1}$ για $k = 2, \ldots, m$.

Αποδείξτε ότι ισχύει $g(x) = g(a) + \mu_1\phi_{\xi_0}(x) + \cdots + \mu_m\phi_{\xi_{m-1}}(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$.

Αποδείξτε ότι υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων (P_n) ώστε $P_n \overset{\text{ομ}}{\to} g$ στο $[a,b]$.

Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b]$ και $\epsilon > 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ τμηματικά αφφινική και συνεχής στο $[a,b]$ ώστε να ισχύει $|g(x) - f(x)| \leq \epsilon$ για κάθε $x \in [a,b]$.

Αποδείξτε με δεύτερο τρόπο το θεώρημα του Weierstrass.

Βασική βιβλιογραφία.

Apostol, T. (1974) *Mathematical Analysis, Ch 9.* Addison-Wesley.
Bartle, R. & Sherbert, D. (2011) *Introduction to Real Analysis, Ch 8.* Wiley.
Brand, L. (2006) *Advanced Calculus, Ch 10.* Dover.
Buck, R. & Buck, E. (2003) *Advanced Calculus, Ch 6.* Waveland Press.
Courant, R. (1988) *Differential and Integral Calculus, Vol I, Ch VIII.* Wiley.
Courant, R. & John, F. (1989) *Introduction to Calculus and Analysis, Vol I, Ch 7.* Springer.
Davidson, K. & Donsig, A. (2010) *Real Analysis and Applications, Ch 8, 10.* Springer.
Dieudonné, J. (1971) *Infinitesimal Calculus, Ch V.* Hermann.
Goldberg, R. (1976) *Methods of Real Analysis, Ch 9-10.* Wiley.
Grauert, H. & Lieb, I. (1967) *Differential- und Integralrechnung, Band I, Kap IV-VII.* Springer.
Graves, L. (2009) *The Theory of Functions of Real Variables, Ch VII.* Dover.
Hayes Jr, C. (1964) *Concepts of Real Analysis, Ch 7.* Wiley.
Krantz, S. (2013) *Real Analysis and Foundations, Ch 9.* Chapman and Hall.
Nikolsky, S. (1977) *A Course of Mathematical Analysis, Vol 1, Ch 11.* Mir Publishers.
Protter, M. (1998) *Basic Elements of Real Analysis, Ch 8.* Springer.
Pugh, C. (2015) *Real Mathematical Analysis, Ch 4.* Springer.
Rosenlicht, M. (1986) *Introduction to Analysis, Ch IV, VII.* Dover.
Ross, K. (2013) *Elementary Analysis, Ch 4-5.* Springer.
Rudin, W. (1976) *Principles of Mathematical Analysis, Ch 7.* McGraw-Hill.
Smirnov, V. (1964) *A Course of Higher Mathematics, Vol 1, Ch IV.* Pergammon Press.
Spivak, M. (1994) *Calculus, Ch 24.* Cambridge Univ. Press.
Stoll, M. (2000) *Introduction to Real Analysis, Ch 8.* Pearson.

Συμπληρωματική βιβλιογραφία.

Bartle, R. (1967) *The Elements of Real Analysis, Ch III-VI.* Wiley.
Boas, R. (1996) *A Primer of Real Functions, Ch 2.* Math. Association of America.
Goffman, C. (1966) *Introduction to Real Analysis, Ch 6, 8.* Harper and Row.
Goffman, C. (1953) *Real Functions, Ch 8.* Rinehart.
Lang, S. (1997) *Undergraduate Analysis, Ch VIII, X-XI.* Springer.

Κεφάλαιο 10

Σειρές συναρτήσεων.

10.1 Σειρές συναρτήσεων. Ορισμοί και ιδιότητες.

ΟΡΙΣΜΟΣ 10.1. *Έστω $f_n : A \to \mathbb{R}$ για κάθε n. Θεωρούμε τα διαδοχικά αθροίσματα, δηλαδή τις συναρτήσεις $s_1 = f_1 : A \to \mathbb{R}$, $s_2 = f_1 + f_2 : A \to \mathbb{R}$ και, γενικότερα, $s_n = f_1 + f_2 + \cdots + f_n : A \to \mathbb{R}$ για κάθε n. Δηλαδή, $s_n(x) = f_1(x) + \cdots + f_n(x)$ για κάθε $x \in A$ και κάθε n.*
Αν υπάρχει συνάρτηση $s : A \to \mathbb{R}$ ώστε $s_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} s$ στο A, τότε λέμε ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ **συγκλίνει** *στη συνάρτηση s* **κατά σημείο** *στο A και γράφουμε*

$$\textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \overset{\text{κ.σ.}}{=} s \quad \text{στο } A.$$

Αν $s_n \overset{\text{ομ}}{\to} s$ στο A, τότε λέμε ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ **συγκλίνει** *στη συνάρτηση s* **ομοιόμορφα** *στο A και γράφουμε*

$$\textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \overset{\text{ομ}}{=} s \quad \text{στο } A.$$

Η συνάρτηση s_n ονομάζεται n-οστό **μερικό άθροισμα** *της σειράς συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$. Η συνάρτηση s ονομάζεται* **κατά σημείο άθροισμα** *ή* **ομοιόμορφο άθροισμα***, αντιστοίχως, της σειράς συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ στο A.*

Όπως και για τις σειρές αριθμών, υπάρχουν εναλλακτικοί συμβολισμοί ή και παραλλαγές των προηγούμενων συμβολισμών: $s \overset{\text{κ.σ.}}{=} f_1 + f_2 + \cdots$ ή $s \overset{\text{κ.σ.}}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} f_k$ ή $s \overset{\text{ομ}}{=} \sum_{n=m}^{+\infty} f_n$ κ.τ.λ.

Η ισότητα $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k \overset{\text{κ.σ.}}{=} s$ στο A ισοδυναμεί με το ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει $s_n(x) \to s(x)$ κι αυτό ισοδυναμεί με το ότι για κάθε $x \in A$ η σειρά αριθμών $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ έχει άθροισμα $s(x)$. Με άλλα λόγια,

$$\textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \overset{\text{κ.σ.}}{=} s \quad \text{στο } A \qquad \Leftrightarrow \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = s(x) \quad \text{για κάθε } x \in A.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 10.1. *Αν $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k \overset{\text{ομ}}{=} s$ στο A, τότε $\sum_{k=1}^{\infty} f_k \overset{\text{κ.σ.}}{=} s$ στο A.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τα μερικά αθροίσματα $s_n = f_1 + \cdots + f_n$ και η απόδειξη είναι άμεση συνέπεια των ορισμών και της πρότασης 9.3. □

Παράδειγμα 10.1.1. Θεωρούμε τη γνωστή μας γεωμετρική σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.
Ισχύει $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ για κάθε $x \in (-1,1)$. Άρα η σειρά συγκλίνει κατά σημείο στο $(-1,1)$ στη συνάρτηση $s : (-1,1) \to \mathbb{R}$ με τύπο $s(x) = \frac{1}{1-x}$. Δηλαδή, $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \overset{\text{κ.σ.}}{=} \frac{1}{1-x}$ στο $(-1,1)$.
Ας δούμε αν η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη στο $(-1,1)$.
Για κάθε $x \in (-1,1)$ και κάθε n ισχύει $s_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x}$, οπότε $|s_n(x) - s(x)| = \frac{|x|^n}{1-x}$. Επειδή $\lim_{x\to 1-} \frac{|x|^n}{1-x} = +\infty$, έχουμε $\|s_n - s\|_{(-1,1)} = +\infty$.
Άρα η $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ δεν συγκλίνει στη συνάρτηση $\frac{1}{1-x}$ ομοιόμορφα στο $(-1,1)$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 10.2. *Έστω αριθμοί λ, μ και $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \overset{\text{ομ}}{=} s$ στο A και $\sum_{n=1}^{+\infty} g_n \overset{\text{ομ}}{=} t$ στο A. Τότε $\sum_{n=1}^{+\infty}(\lambda f_n + \mu g_n) \overset{\text{ομ}}{=} \lambda s + \mu t$ στο A. Το ίδιο ισχύει και για την κατά σημείο σύγκλιση.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τα μερικά αθροίσματα $s_n = f_1 + \cdots + f_n$ και $t_n = g_1 + \cdots + g_n$ και εφαρμόζουμε τις προτάσεις 9.1 (για την κατά σημείο σύγκλιση) και 9.4 (για την ομοιόμορφη σύγκλιση). □

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΤΟΥ CAUCHY. *Η $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο A αν και μόνο αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $|f_{m+1}(x) + \cdots + f_n(x)| \leq \epsilon$ για κάθε $x \in A$ και κάθε $n > m \geq n_0$.*

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε στα μερικά αθροίσματα $s_n = f_1 + \cdots + f_n$ το κριτήριο του Cauchy της ενότητας 9.2. □

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι ένα εξαιρετικά χρήσιμο κριτήριο για ομοιόμορφη σύγκλιση σειρών συναρτήσεων.

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΤΟΥ WEIERSTRASS. *Έστω $f_n : A \to \mathbb{R}$ για έστω $\|f_n\|_A \leq M_n$ για κάθε n ή, ισοδύναμα, $|f_n(x)| \leq M_n$ για κάθε $x \in A$ και κάθε n. Αν η σειρά αριθμών $\sum_{n=1}^{+\infty} M_n$ συγκλίνει, τότε η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο A.*

Πρώτη απόδειξη. Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $M_{m+1} + \cdots + M_n < \epsilon$ για κάθε $n > m \geq n_0$. Άρα

$$|f_{m+1}(x) + \cdots + f_n(x)| \leq |f_{m+1}(x)| + \cdots + |f_n(x)| \leq M_{m+1} + \cdots + M_n < \epsilon$$

για κάθε $x \in A$ και κάθε $n > m \geq n_0$. Άρα, από το κριτήριο του Cauchy, η $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο A.
Δεύτερη απόδειξη. Έστω $x \in A$. Ισχύει $|f_n(x)| \leq M_n$ για κάθε n, οπότε η σειρά αριθμών $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ συγκλίνει και, μάλιστα, απολύτως σε κάποιον αριθμό.
Ορίζουμε $s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$. Αυτό γίνεται για κάθε $x \in A$, οπότε έχουμε συνάρτηση $s : A \to \mathbb{R}$ και τότε, προφανώς, ισχύει $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \overset{\text{κ.σ.}}{=} s$ στο A.
Τώρα, θεωρούμε τις συναρτήσεις $s_n = f_1 + \cdots + f_n$ και έχουμε

$$|s_n(x) - s(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_n(x)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} M_k$$

για κάθε $x \in A$. Άρα

$$\|s_n - s\|_A \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} M_k$$

για κάθε n. Από την πρόταση 8.3 συνεπάγεται $\|s_n - s\|_A \to 0$, οπότε $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \overset{\text{ομ}}{=} s$ στο A. □

Παράδειγμα 10.1.2. Έστω η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$. Επειδή ισχύει $\left|\frac{x^n}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ για κάθε $x \in [-1, 1]$ και κάθε n και επειδή η σειρά αριθμών $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο $[-1, 1]$.

Παράδειγμα 10.1.3. Έστω η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$. Επειδή ισχύει $\left|\frac{\sin(nx)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ για κάθε x και κάθε n και επειδή η σειρά αριθμών $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

Το μέρος [α] του θεωρήματος 10.1 είναι το ανάλογο για ομοιόμορφη σύγκλιση σειρών συναρτήσεων του κριτηρίου του Dirichlet για σειρές αριθμών και το μέρος [β] είναι το ανάλογο του κριτηρίου του Abel. Θα παρατηρήσετε ότι στην απόδειξη, όπως και στις αποδείξεις των κριτηρίων αυτών, χρησιμοποιείται ο τύπος άθροισης του Abel στην υποενότητα 8.3.2.

ΘΕΩΡΗΜΑ 10.1. *Έστω $f_n, g_n : A \to \mathbb{R}$ και τα μερικά αθροίσματα $s_n = f_1 + \cdots + f_n$.*

[α] *Έστω ότι η $(g_n(x))$ είναι φθίνουσα για κάθε $x \in A$, ότι $g_n \overset{\text{ομ}}{\to} 0$ και ότι η (s_n) είναι ομοιόμορφα φραγμένη στο A. Τότε η $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n g_n$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο A.*

[β] *Έστω ότι η $(g_n(x))$ είναι φθίνουσα για κάθε $x \in A$, ότι η (g_n) είναι ομοιόμορφα φραγμένη στο A και ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο A. Τότε η $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n g_n$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο A.*

Απόδειξη. [α] Υπάρχει M ώστε να ισχύει $|s_n(x)| \leq M$ για κάθε $x \in A$ και κάθε n. Επίσης, επειδή για κάθε $x \in A$ η $(g_n(x))$ είναι φθίνουσα και έχει όριο 0, συνεπάγεται ότι ισχύει $g_n(x) \geq 0$ για κάθε $x \in A$ και κάθε n.
Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $g_n(x) \leq \frac{\epsilon}{2M+1}$ για κάθε $x \in A$ και κάθε $n \geq n_0$. Χρησιμοποιώντας τον τύπο άθροισης του Abel, έχουμε ότι για κάθε $x \in A$ και κάθε n, m με $n > m \geq n_0$ ισχύει

$$\begin{aligned}\big|\textstyle\sum_{k=m+1}^{n} f_k(x) g_k(x)\big| &= \big|\textstyle\sum_{k=m+1}^{n} s_k(x)(g_k(x) - g_{k+1}(x)) \\ &\quad + s_n(x) g_{n+1}(x) - s_m(x) g_{m+1}(x)\big| \\ &\leq \textstyle\sum_{k=m+1}^{n} |s_k(x)|(g_k(x) - g_{k+1}(x)) \\ &\quad + |s_n(x)| g_{n+1}(x) + |s_m(x)| g_{m+1}(x) \\ &\leq \textstyle\sum_{k=m+1}^{n} M(g_k(x) - g_{k+1}(x)) + M g_{n+1}(x) + M g_{m+1}(x) \\ &= 2M g_{m+1}(x) \leq \tfrac{2M\epsilon}{2M+1} < \epsilon.\end{aligned}$$

Σύμφωνα με το κριτήριο του Cauchy, η $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n g_n$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο A.
[β] Υπάρχει $s : A \to \mathbb{R}$ ώστε $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \overset{\text{ομ}}{=} s$ στο A ή, ισοδύναμα, $s_n \overset{\text{ομ}}{\to} s$ στο A.
Υπάρχει M ώστε να ισχύει $|g_n(x)| \leq M$ για κάθε $x \in A$ και κάθε n.
Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $|s_n(x) - s(x)| \leq \frac{\epsilon}{4M+1}$ για κάθε $x \in A$ και κάθε $n \geq n_0$. Επομένως, για κάθε $x \in A$ και κάθε n, m με $n > m \geq n_0$ ισχύει

$$\begin{aligned}\big|\textstyle\sum_{k=m+1}^{n} f_k(x) g_k(x)\big| &= \big|\textstyle\sum_{k=m+1}^{n} s_k(x)(g_k(x) - g_{k+1}(x)) \\ &\quad + s_n(x) g_{n+1}(x) - s_m(x) g_{m+1}(x)\big| \\ &= \big|\textstyle\sum_{k=m+1}^{n} (s_k(x) - s(x))(g_k(x) - g_{k+1}(x)) \\ &\quad + (s_n(x) - s(x)) g_{n+1}(x) - (s_m(x) - s(x)) g_{m+1}(x)\big| \\ &\leq \textstyle\sum_{k=m+1}^{n} |s_k(x) - s(x)|(g_k(x) - g_{k+1}(x)) \\ &\quad + |s_n(x) - s(x)||g_{n+1}(x)| + |s_m(x) - s(x)||g_{m+1}(x)| \\ &\leq \textstyle\sum_{k=m+1}^{n} \tfrac{\epsilon}{4M+1}(g_k(x) - g_{k+1}(x)) \\ &\quad + \tfrac{\epsilon}{4M+1} M + \tfrac{\epsilon}{4M+1} M \\ &= \tfrac{\epsilon}{4M+1}(g_{m+1}(x) - g_{n+1}(x)) + \tfrac{2\epsilon}{4M+1} M \leq \tfrac{4\epsilon}{4M+1} M < \epsilon.\end{aligned}$$

Πάλι σύμφωνα με το κριτήριο του Cauchy, η $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n g_n$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο A. □

Παράδειγμα 10.1.4. Θεωρούμε τη σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ στο $(0, +\infty)$.
Ορίζουμε τις συναρτήσεις $f_n(x) = (-1)^{n-1}$ και $g_n(x) = \frac{1}{n^x}$ για κάθε $x > 0$. Παρατηρήστε ότι οι f_n είναι σταθερές συναρτήσεις. Θεωρούμε, επίσης, τα μερικά αθροίσματα $s_n = f_1 + \cdots + f_n$.
Τότε για κάθε $x > 0$, η ακολουθία αριθμών $(s_n(x))$ είναι φραγμένη, διότι ισχύει $s_n(x) = 1 + (-1) + \cdots + (-1)^{n-1} = 1$ ή 0 για κάθε n. Επίσης, η ακολουθία αριθμών $(g_n(x)) = \left(\frac{1}{n^x}\right)$ είναι φθίνουσα και $g_n(x) = \frac{1}{n^x} \to 0$. Άρα, σύμφωνα με το κριτήριο του Dirichlet για σειρές αριθμών, για κάθε $x > 0$ η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ συγκλίνει. Με άλλα λόγια, η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ συγκλίνει, ως σειρά συναρτήσεων, σε κάποια συνάρτηση, έστω s, κατά σημείο στο $(0, +\infty)$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} \overset{\text{κ.σ.}}{=} s(x) \quad \text{στο } (0, +\infty).$$

Τώρα θα δούμε ότι για κάθε $a > 0$ η ίδια σειρά συναρτήσεων συγκλίνει στη συνάρτηση s ομοιόμορφα στο $[a, +\infty)$.
Βλέπουμε ότι η ακολουθία συναρτήσεων (s_n) είναι ομοιόμορφα φραγμένη στο $[a, +\infty)$, διότι ισχύει $s_n(x) = 1 + (-1) + \cdots + (-1)^{n-1} = 1$ ή 0 για κάθε $x \geq a$ και κάθε n. Επίσης, όπως είδαμε παραπάνω, για κάθε $x \in [a, +\infty)$ η ακολουθία $(g_n(x)) = \left(\frac{1}{n^x}\right)$ είναι φθίνουσα. Τέλος, $g_n \overset{\text{ομ}}{\to} 0$ στο $[a, +\infty)$, διότι $\|g_n\|_{[a,+\infty)} = \sup\{|\frac{1}{n^x}| \,|\, x \in [a, +\infty)\} = \frac{1}{n^a} \to 0$.
Άρα η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο $[a, +\infty)$.
Επειδή η ομοιόμορφη σύγκλιση είναι ισχυρότερη από την κατά σημείο σύγκλιση, η τελευταία οριακή συνάρτηση ταυτίζεται με την s που βρήκαμε παραπάνω, διότι η σειρά συγκλίνει στην s κατά σημείο στο $(0, +\infty)$ και, επομένως, και στο $[a, +\infty)$. Άρα

$$\text{Για κάθε } \ a > 0: \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} \overset{\text{ομ}}{=} s(x) \quad \text{στο } [a, +\infty).$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 10.2. *Έστω $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \overset{\text{ομ}}{=} s$ στο A και $\xi \in A$. Αν κάθε f_n είναι συνεχής στον ξ, τότε η s είναι συνεχής στον ξ. Ειδικότερα, αν κάθε f_n είναι συνεχής στο A, τότε η s είναι συνεχής στο A.*

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το θεώρημα 9.1 στα μερικά αθροίσματα $s_n = f_1 + \cdots + f_n$. ☐

ΘΕΩΡΗΜΑ 10.3. *Έστω $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \overset{\text{ομ}}{=} s$ στο $[a, b]$. Αν κάθε f_n είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$, τότε η s είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b s(x)\, dx$.*

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το θεώρημα 9.2 στα μερικά αθροίσματα $s_n = f_1 + \cdots + f_n$. ☐

Οι σχέσεις $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b s(x)\, dx$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \overset{\text{ομ}}{=} s$ συνδυάζονται, παίρνοντας τη μορφή εναλλαγής των συμβόλων της άθροισης και της ολοκλήρωσης:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\, dx.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 10.4. *Έστω διάστημα I και $t : I \to \mathbb{R}$ και κάθε $f_n : I \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $f_n{}'$ συνεχή στο I. Αν $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n{}' \overset{\text{ομ}}{=} t$ στο I και η σειρά αριθμών $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(\xi)$ συγκλίνει για τουλάχιστον έναν $\xi \in I$, τότε η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση s κατά σημείο στο I και ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I, η s είναι παραγωγίσιμη στο I και ισχύει $s'(x) = t(x)$ για κάθε $x \in I$.*

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το θεώρημα 9.3 στα μερικά αθροίσματα $s_n = f_1 + \cdots + f_n$. ☐

Το ένα από τα αποτελέσματα του θεωρήματος 10.4 γράφεται και

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n{}' \qquad \text{ή} \qquad \frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d}{dx} f_n(x)$$

παίρνοντας τη μορφή εναλλαγής των συμβόλων της άθροισης και της παραγώγισης.
Τέλος, έχουμε και το αντίστοιχο του θεωρήματος 9.4.

ΘΕΩΡΗΜΑ 10.5. *Έστω διάστημα I και $t : I \to \mathbb{R}$ και κάθε $f_n : I \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο I. Αν $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n{}' \overset{\text{ομ}}{=} t$ στο I και η σειρά αριθμών $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(\xi)$ συγκλίνει για τουλάχιστον έναν $\xi \in I$, τότε η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση s κατά σημείο στο I και ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I, η s είναι παραγωγίσιμη στο I και ισχύει $s'(x) = t(x)$ για κάθε $x \in I$.*

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το θεώρημα 9.4 στα μερικά αθροίσματα $s_n = f_1 + \cdots + f_n$. ☐

Παράδειγμα 10.1.5. Θεωρούμε τη σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx}$.
Είναι προφανές ότι, αν $x \leq 0$, είναι $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx} \geq \sum_{n=1}^{+\infty} 1 = +\infty$, οπότε η σειρά δεν συγκλίνει

για κανένα $x \leq 0$. Αντιθέτως, για κάθε $x > 0$ η σειρά συγκλίνει διότι είναι γεωμετρική με λόγο e^{-x}. Άρα η $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx}$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $s(x)$ κατά σημείο στο $(0,+\infty)$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx} \overset{\text{κ.σ.}}{=} s(x) \quad \text{στο } (0,+\infty).$$

Αν $a > 0$, είναι $\sup\{|e^{-nx}| \,|\, x \in [a,+\infty)\} = e^{-na}$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-na} < +\infty$. Σύμφωνα με το κριτήριο του Weirstrass, η $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx}$ συγκλίνει στην s ομοιόμορφα στο $[a,+\infty)$:

$$\text{Για κάθε } a > 0 : \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx} \overset{\text{ομ}}{=} s(x) \quad \text{στο } [a,+\infty).$$

Βάσει αυτού θα αποδείξουμε ότι η $s(x)$ είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$. Πράγματι, για κάθε n η e^{-nx} είναι συνεχής στο $[a,+\infty)$, οπότε, λόγω ομοιόμορφης σύγκλισης, και η $s(x)$ είναι συνεχής στο $[a,+\infty)$. Αυτό, όμως, ισχύει για κάθε $a > 0$. Οπότε, αν θεωρήσουμε οποιονδήποτε $\xi \in (0,+\infty)$, βρίσκουμε έναν a ώστε $0 < a < \xi$ και, επειδή η $s(x)$ είναι συνεχής στο $[a,+\infty)$, είναι συνεχής και στο εσωτερικό σημείο ξ.
Τώρα, θεωρούμε τη σειρά των παραγώγων συναρτήσεων $-\sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-nx}$. Βλέπουμε εύκολα (με το κριτήριο λόγου ή ρίζας, για παράδειγμα) ότι η σειρά αυτή συγκλίνει για κάθε $x > 0$, δηλαδή ότι συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $t(x)$ κατά σημείο στο $(0,+\infty)$:

$$-\sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-nx} \overset{\text{κ.σ.}}{=} t(x) \quad \text{στο } (0,+\infty).$$

Όπως πριν, αν $a > 0$, είναι $\sup\{|-ne^{-nx}| \,|\, x \in [a,+\infty)\} = ne^{-na}$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-na} < +\infty$. Άρα, με το κριτήριο του Weierstrass, η $-\sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-nx}$ συγκλίνει στην $t(x)$ ομοιόμορφα στο $[a,+\infty)$:

$$\text{Για κάθε } a > 0 : \qquad -\sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-nx} \overset{\text{ομ}}{=} t(x) \quad \text{στο } [a,+\infty).$$

Από το θεώρημα 10.4 συνεπάγεται ότι η $s(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $[a,+\infty)$ και η παράγωγός της στο $[a,+\infty)$ είναι η $t(x)$. Βάσει αυτού θα αποδείξουμε ότι η $s(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$. Πράγματι, αν θεωρήσουμε οποιονδήποτε $\xi \in (0,+\infty)$, βρίσκουμε έναν a ώστε $0 < a < \xi$ και, επειδή η $s(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $[a,+\infty)$, είναι παραγωγίσιμη και στο εσωτερικό σημείο ξ και, μάλιστα, είναι $s'(\xi) = t(\xi)$. Άρα ισχύει $s'(x) = t(x)$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$.
Τα προηγούμενα μπορούν να επαναληφθούν με τη σειρά των δεύτερων παραγώγων $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2e^{-nx}$. Με τα ίδια επιχειρήματα βλέπουμε ότι η $t(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, οπότε η $s(x)$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$. Συνεχίζοντας επαγωγικά, αποδεικνύουμε ότι η $s(x)$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$.
Όλα τα προηγούμενα μπορούμε εύκολα να τα επιβεβαιώσουμε, αφού παρατηρήσουμε ότι

$$s(x) = \tfrac{1}{e^x-1} \qquad \text{για κάθε } x \in (0,+\infty).$$

Ασκήσεις.

10.1.1. Θεωρήστε τη σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x\sin(n^2x)}{n^2}$.
Αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $s(x)$ κατά σημείο στο $\mathbb{R}$.
Αποδείξτε ότι, για κάθε $a > 0$, η σειρά συγκλίνει στην $s(x)$ ομοιόμορφα στο $[-a,a]$.
Αποδείξτε ότι η $s(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

10.1.2. [α] Έστω $p > 2$. Θεωρήστε τη σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^p}$.
Αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $s(x)$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.
Αποδείξτε ότι η $s(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ότι η $s'(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.
[β] Θεωρήστε τη σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{(nx+1)^2}$.
Αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $s(x)$ κατά σημείο στο $[0,+\infty)$.
Αποδείξτε ότι, για κάθε $a > 0$, η σειρά συγκλίνει στην $s(x)$ ομοιόμορφα στο $[a,+\infty)$.

Αποδείξτε ότι η $s(x)$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$.

Αποδείξτε ότι η $s(x)$ δεν είναι συνεχής στον 0 και ότι $\lim_{x\to+\infty} s(x)=0$ και $\lim_{x\to 0+} s(x)=1$.

Τέλος, αποδείξτε ότι η σειρά δεν συγκλίνει στην s ομοιόμορφα στο $[0,+\infty)$.

Ποιά από τα προηγούμενα ισχύουν για τη σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1+n^2x^2}$;

10.1.3. Έστω $p>0$ και θεωρήστε τη σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x}{n^p(1+nx^2)}$.

Αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $s(x)$ κατά σημείο στο $\mathbb{R}$.

Αποδείξτε ότι, για κάθε $a>0$, η σειρά συγκλίνει στην $s(x)$ ομοιόμορφα σε καθένα από τα $(-\infty,-a]$ και $[a,+\infty)$.

Αποδείξτε ότι η $s(x)$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to\pm\infty} s(x)=0$.

Έστω $p>\frac{1}{2}$. Αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει στην $s(x)$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$ και ότι η $s(x)$ είναι συνεχής και στον 0.

Έστω $m\in\mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι, αν $p>\frac{m+1}{2}$, τότε η $s(x)$ είναι m φορές παραγωγίσιμη και στον 0.

Αν $0<p<\frac{1}{2}$, αποδείξτε ότι $\lim_{x\to 0+} s(x)=+\infty$. Αν $p=\frac{1}{2}$, βρείτε το $\lim_{x\to 0+} s(x)$ και αποδείξτε ότι η $s(x)$ είναι φραγμένη στο $\mathbb{R}$, αλλά ασυνεχής στον 0.

10.1.4. Έστω η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+x^2}$.

Αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $s(x)$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

Αποδείξτε ότι η $s(x)$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Ποιά είναι τα σημεία μεγίστου ή ελαχίστου της $s(x)$;

Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to\pm\infty} s(x)=0$.

10.1.5. Θεωρήστε τη σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty}(1-\cos\frac{x}{n})$.

Αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $s(x)$ κατά σημείο στο $\mathbb{R}$.

Αποδείξτε ότι, για κάθε $a>0$, η σειρά συγκλίνει στην $s(x)$ ομοιόμορφα στο $[-a,a]$.

Αποδείξτε ότι η $s(x)$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

10.1.6. Θεωρήστε τη σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^2+n}{n^2}$.

Αποδείξτε ότι η σειρά δεν συγκλίνει απολύτως για καμιά τιμή του x.

Αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $s(x)$ κατά σημείο στο $\mathbb{R}$. Τί είδους συνάρτηση είναι η $s(x)$;

Αποδείξτε ότι, για κάθε $a>0$, η σειρά συγκλίνει στην $s(x)$ ομοιόμορφα στο $[-a,a]$.

10.1.7. Θεωρήστε τη σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\sin(1+\frac{x}{n})$.

Αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $s(x)$ κατά σημείο στο $\mathbb{R}$.

Αποδείξτε ότι, για κάθε $a>0$, η σειρά συγκλίνει στην $s(x)$ ομοιόμορφα στο $[-a,a]$.

Αποδείξτε ότι η $s(x)$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

10.1.8. Θεωρήστε τη σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x}{1+n^ax^2}$.

Αν $a>1$, αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $s(x)$ κατά σημείο στο $\mathbb{R}$ και ότι η $s(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Αν $a>2$, αποδείξτε ότι η $s(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Αν $a>1$, αποδείξτε ότι η $s(x)$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

10.1.9. Θεωρήστε τη σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1+n^2x}$. Η σειρά, προφανώς, αποκλίνει για $x=0$.

Αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $s(x)$ κατά σημείο στο $(0,+\infty)$.

Για κάθε $a>0$, αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει στην $s(x)$ ομοιόμορφα στο $[a,+\infty)$.

Αποδείξτε ότι η $s(x)$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$. Αποδείξτε ότι η $s(x)$ είναι

γνησίως φθίνουσα και γνησίως κυρτή στο $(0,+\infty)$.
Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to 0+} s(x)=+\infty$, οπότε η $s(x)$ δεν είναι φραγμένη στο $(0,+\infty)$.
Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to +\infty} s(x)=0$.
Αποδείξτε ότι η σειρά δεν συγκλίνει στην $s(x)$ ομοιόμορφα στο $(0,+\infty)$.
Επαναλάβατε με τη σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty}\sqrt{n}\,e^{-nx}$.

10.1.10. Θεωρήστε τη σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^a}{1+n^2x^2}$.
Αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,1]$ αν και μόνο αν $a>1$.
Αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,+\infty)$ αν και μόνο αν $1<a\leq 2$.

10.1.11. [α] Θεωρήστε τη σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}e^{-nx}$.
Αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $s(x)$ ομοιόμορφα στο $[0,+\infty)$.
Αποδείξτε ότι η $s(x)$ είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ και άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$.
Αποδείξτε ότι η $s(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα και γνησίως κυρτή στο $[0,+\infty)$.
Αποδείξτε ότι $s'(0)=-\infty$.
[β] Θεωρήστε τη σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x}{1+n^2x}$.
Αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $s(x)$ ομοιόμορφα στο $[0,+\infty)$.
Αποδείξτε ότι η $s(x)$ είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ και άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$.
Αποδείξτε ότι η $s(x)$ είναι γνησίως αύξουσα και γνησίως κοίλη στο $[0,+\infty)$.
Αποδείξτε ότι $s'(0)=+\infty$.

10.1.12. Θεωρήστε τη σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+x}$.
Αποδείξτε ότι η σειρά δεν συγκλίνει απολύτως για καμιά τιμή του $x\in[0,+\infty)$.
Αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $t(x)$ ομοιόμορφα στο $[0,+\infty)$.
Αποδείξτε ότι η $t(x)$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$.
Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to 0+} t(x)=\log 2$ και $\lim_{x\to +\infty} t(x)=0$.
Αποδείξτε ότι η $t(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα και γνησίως κυρτή στο $[0,+\infty)$.

10.1.13. Θεωρήστε τη σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\log(1+\frac{x}{n})$.
Αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $s(x)$ κατά σημείο στο $[0,+\infty)$.
Αποδείξτε ότι, για κάθε $a>0$, η σειρά συγκλίνει στην $s(x)$ ομοιόμορφα στο $[0,a]$.
Αποδείξτε ότι η $s(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$.
Ποιά είναι η σχέση ανάμεσα στη συνάρτηση $s(x)$ και στη συνάρτηση $t(x)$ της άσκησης 10.1.12;

10.1.14. [1] [α] Έστω $f_n(x)=\frac{(1-x)x^n}{\log(n+1)}$ για κάθε $x\in[0,1]$ και κάθε n. Υπολογίστε τον $M_n=\|f_n\|_{[0,1]}$ για κάθε n και αποδείξτε ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty}f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,1]$ ενώ η $\sum_{n=1}^{+\infty}M_n$ αποκλίνει.
[β] Έστω $f_n(x)=\begin{cases}0, & \text{αν } 0\leq x\leq 1/(2n+1) \text{ ή } 1/(2n-1)\leq x\leq 1\\ (4n+2)x-2, & \text{αν } 1/(2n+1)\leq x\leq 1/(2n)\\ 2-(4n-2)x, & \text{αν } 1/(2n)\leq x\leq 1/(2n-1)\end{cases}$ για κάθε n. Υπολογίστε τον $M_n=\|f_n\|_{[0,1]}$ για κάθε n και αποδείξτε ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty}f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,1]$ ενώ η $\sum_{n=1}^{+\infty}M_n$ αποκλίνει.

10.1.15. Έστω γνησίως αύξουσα ακολουθία (x_n) ώστε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{x_n}$ να συγκλίνει, οπότε $x_n\to+\infty$. Θεωρήστε τη σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{x_n-x}$.
Αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $s(x)$ κατά σημείο στο σύνολο $A=\mathbb{R}\setminus\{x_n\,|\,n\in\mathbb{N}\}$.

[1] Δύο παραδείγματα όπου ισχύει η ομοιόμορφη σύγκλιση αλλά δεν εφαρμόζεται το κριτήριο του Weierstrass.

Αποδείξτε ότι, για κάθε a, η σειρά συγκλίνει στην $s(x)$ ομοιόμορφα στο $A \cap (-\infty, a]$.

Αποδείξτε ότι για κάθε n είναι $\lim_{x \to x_n-} s(x) = +\infty$ και $\lim_{x \to x_n+} s(x) = -\infty$. Επίσης, αποδείξτε ότι $\lim_{x \to -\infty} s(x) = 0$.

Αποδείξτε ότι η $s(x)$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $(-\infty, x_1)$ και σε κάθε (x_n, x_{n+1}). Επίσης, ότι η $s(x)$ είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα προηγούμενα διαστήματα.

10.1.16. Θεωρήστε τις σειρές συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n \cos(nx)$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n \sin(nx)$.

[α] Έστω $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| < +\infty$. Αποδείξτε ότι οι δύο σειρές συγκλίνουν σε δύο αντίστοιχες συναρτήσεις $c(x)$ και $s(x)$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι οι $c(x)$ και $s(x)$ είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$ και περιοδικές με περίοδο 2π.

Ως παραδείγματα θεωρήστε τις σειρές συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^p}$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^p}$ με $p > 1$ καθώς και τις $\sum_{n=1}^{+\infty} r^n \cos(nx)$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} r^n \sin(nx)$ με $0 \leq r < 1$.

[β] Έστω ότι η (x_n) είναι φθίνουσα, ότι $x_n \to 0$, οπότε $x_n \geq 0$ για κάθε n, και έστω ότι $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = +\infty$.

Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n \cos(nx)$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $c(x)$ κατά σημείο στο διάστημα $(m2\pi, (m+1)2\pi)$ για κάθε $m \in \mathbb{Z}$ και ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n \sin(nx)$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $s(x)$ κατά σημείο στο $\mathbb{R}$.[2]

Αποδείξτε ότι, για κάθε $\delta \in (0, \pi]$, οι $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n \cos(nx)$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n \sin(nx)$ συγκλίνουν στις $c(x)$ και $s(x)$ ομοιόμορφα στο $[m2\pi + \delta, (m+1)2\pi - \delta]$ για κάθε $m \in \mathbb{Z}$. Αποδείξτε ότι οι $c(x)$ και $s(x)$ είναι συνεχείς στο $(m2\pi, (m+1)2\pi)$ για κάθε $m \in \mathbb{Z}$.

Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n \sin(nx)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$ αν και μόνο αν $nx_n \to 0$.

Εξετάστε, σε σχέση με τα προηγούμενα στο [β], τις δύο σειρές συναρτήσεων στις περιπτώσεις των ακολουθιών $(\frac{1}{n})$ και $(\frac{1}{n \log n})$.

[γ] Έστω $0 \leq r < 1$. Αποδείξτε ότι οι σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n}{n} \cos(nx)$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n}{n} \sin(nx)$ συγκλίνουν σε κάποιες αντίστοιχες συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$. Χρησιμοποιώντας τους τύπους της άσκησης 8.3.8[β], αποδείξτε ότι

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n}{n} \cos(nx) = \frac{1}{2} \log \frac{1}{1 - 2r\cos x + r^2}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n}{n} \sin(nx) = \arctan \frac{r \sin x}{1 - r\cos x}.$$

[δ] Θεωρώντας τις $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n}{n} \cos(nx)$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n}{n} \sin(nx)$ ως σειρές συναρτήσεων με μεταβλητή $r \in [0, 1]$, αποδείξτε ότι

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \cos(nx) = -\log(\sin \tfrac{x}{2}), \quad \text{αν } x \in (m2\pi, (m+1)2\pi) \text{ για κάποιον } m \in \mathbb{Z}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin(nx) = \begin{cases} (\pi - x)/2, & \text{αν } x \in (m2\pi, (m+1)2\pi) \text{ για κάποιον } m \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{αν } x = m2\pi \text{ για κάποιον } m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Σχεδιάστε τα γραφήματα των συναρτήσεων αυτών.

10.1.17. Θεωρήστε τη σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin(\pi x^n)$.

Αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $s(x)$ κατά σημείο στο $[0, 1]$.

Αποδείξτε ότι, για κάθε $a \in [0, 1)$, η σειρά συγκλίνει στην $s(x)$ ομοιόμορφα στο $[0, a]$.

Αποδείξτε ότι η $s(x)$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $[0, 1)$.

10.1.18. Θεωρήστε τις $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+1} + \cos x}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n^2 x)\sin(nx)}{n + x^2}$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} \arctan(nx^2)}{n + x^2}$. Αποδείξτε ότι και οι τρεις συγκλίνουν σε κάποιες αντίστοιχες συναρτήσεις ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

10.1.19. Θεωρήστε τη σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx} \cos nx$.

Αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $s(x)$ κατά σημείο στο $(0, +\infty)$.

Αποδείξτε ότι, για κάθε $a > 0$, η σειρά συγκλίνει στην $s(x)$ ομοιόμορφα στο $[a, +\infty)$.

Αποδείξτε ότι η $s(x)$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$.

Αποδείξτε ότι η σειρά δεν συγκλίνει στην $s(x)$ ομοιόμορφα στο $(0, +\infty)$.

[2] Αυτό είναι, ουσιαστικά, το περιεχόμενο της άσκησης 8.3.8[γ].

10.1.20. Έστω $f_n : A \to \mathbb{R}$ για κάθε n ώστε να ισχύει $|f_n(x) - f_{n+1}(x)| \leq M_n$ για κάθε $x \in A$ και κάθε n. Αποδείξτε ότι, αν $\sum_{n=1}^{+\infty} M_n < +\infty$, τότε η ακολουθία συναρτήσεων (f_n) συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο A.

10.1.21. [3] [α] Έστω ξ σημείο συσσώρευσης του A, $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \overset{\text{ομ}}{=} s$ στο A και $y_n = \lim_{x\to\xi} f_n(x)$. Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνει και $\lim_{x\to\xi} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} y_n$. Δηλαδή,

$$\lim_{x\to\xi} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to\xi} f_n(x).$$

[β] Έστω $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A και κάθε $f_n : A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στον ξ και $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \overset{\text{ομ}}{=} s$ στο $A \setminus \{\xi\}$. Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(\xi)$ συγκλίνει και, αν ορίσουμε $s(\xi) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(\xi)$, τότε η $s : A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στον ξ.

10.1.22. Έστω $\mathbb{Q} = \{r_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ μια αρίθμηση του $\mathbb{Q}$. Έστω για κάθε n συνάρτηση $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x = r_n \\ 1, & \text{αν } x \neq r_n \end{cases}$ και η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2 f_n(x)}$. Αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση κατά σημείο στο $\mathbb{R}$ και ότι δεν συγκλίνει ομοιόμορφα σε κανένα διάστημα (a, b).

10.1.23. Έστω η $I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $I(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \leq 0 \\ 1, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$ Έστω ακολουθία (x_n) ώστε να ισχύει $x_n \neq x_m$ για κάθε n, m με $n \neq m$ και έστω $c_n \neq 0$ για κάθε n και $\sum_{n=1}^{+\infty} |c_n| < +\infty$.
Αποδείξτε ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n I(x - x_n)$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $s(x)$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.
Αποδείξτε ότι η $s(x)$ είναι συνεχής στον x, αν $x \neq x_n$ για κάθε n.
Αποδείξτε ότι, για κάθε n, η $s(x)$ είναι ασυνεχής στον x_n και έχει άλμα c_n στον x_n.
Σχεδιάστε το γράφημα της $s(x)$ στην περίπτωση που είναι $c_n = \frac{1}{2^n}$ για κάθε n και είτε (i) $x_n = n$ για κάθε n είτε (ii) $x_n = 1 - \frac{1}{n}$ για κάθε n.

10.1.24. Θεωρήστε τη σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx-[nx]}{n^2}$.
Αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $s(x)$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η $s(x)$ είναι περιοδική με περίοδο 1.
Αποδείξτε ότι κάθε άρρητος είναι σημείο συνέχειας της $s(x)$.
Αποδείξτε ότι κάθε ρητός είναι σημείο ασυνέχειας της $s(x)$.
Αν ο x είναι ρητός και $x = \frac{k}{l}$, όπου $k \in \mathbb{Z}$, $l \in \mathbb{N}$ και $\gcd(k, l) = 1$, αποδείξτε ότι το άλμα της $s(x)$ στον x είναι $-\frac{a}{l^2}$, όπου $a = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2}$.
Αποδείξτε ότι η $s(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$ και $\int_0^1 s(x)\, dx = \frac{a}{2}$.

10.1.25. [4] Έστω ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}}$ συγκλίνει. Θεωρήστε τη σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^x}$.
Αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $s(x)$ ομοιόμορφα στο $[x_0, +\infty)$.
Αποδείξτε ότι

$$\lim_{x\to x_0+} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}}.$$

Αποδείξτε ότι η $s(x)$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $(x_0, +\infty)$.

10.1.26. Θεωρήστε τη σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$. Γνωρίζουμε ότι η σειρά αυτή συγκλίνει για κάθε $x > 1$ και αποκλίνει στο $+\infty$ για κάθε $x \leq 1$.

[3] Ένα σημαντικό αποτέλεσμα εναλλαγής, υπό προϋποθέσεις, των συμβόλων $\lim_{x\to\xi}$ και $\sum_{n=1}^{+\infty}$. Δείτε την άσκηση 9.2.21.

[4] Δείτε και την άσκηση 8.3.12.

Συμβολίζουμε $\zeta : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ και ονομάζουμε ζ-**συνάρτηση του Riemann** τη συνάρτηση με τύπο:

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \qquad \text{για κάθε } \ x \in (1, +\infty).$$

Η συνάρτηση αυτή συνδέεται με ένα από τα σημαντικότερα προβλήματα των μαθηματικών.[5]

Αποδείξτε ότι, για κάθε $a > 1$, η σειρά συγκλίνει στην $\zeta(x)$ ομοιόμορφα στο $[a, +\infty)$.

Αποδείξτε ότι η $\zeta(x)$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ και ότι

$$\zeta^{(m)}(x) = (-1)^m \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\log n)^m}{n^x} \qquad \text{για κάθε } \ x \in (1, +\infty) \ \text{ και κάθε } \ m \in \mathbb{N}.$$

Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to 1+} \zeta(x) = +\infty$ και $\lim_{x\to +\infty} \zeta(x) = 1$.

Αποδείξτε ότι η $\zeta(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα και γνησίως κυρτή στο $(1, +\infty)$.

10.1.27. [6] Αποδείξτε το **θεώρημα του Dini**: *Έστω ότι κάθε $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a, b]$ και ότι η $s : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a, b]$. Αν $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \overset{\text{κ.σ.}}{=} s$ στο $[a, b]$ και αν ισχύει $f_n(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$ και κάθε n, τότε $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \overset{\text{ομ}}{=} s$ στο $[a, b]$.*

10.1.28. [7] Έστω $f_n, g_n : A \to \mathbb{R}$ και τα μερικά αθροίσματα $s_n = f_1 + \cdots + f_n$.

[α] Έστω ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1} |g_n - g_{n+1}|$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο A, ότι $g_n \overset{\text{ομ}}{\to} 0$ στο A και ότι η (s_n) είναι ομοιόμορφα φραγμένη στο A. Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n g_n$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο A.

[β] Έστω ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1} |g_n - g_{n+1}|$ είναι φραγμένη στο A, ότι η g_1 είναι φραγμένη στο A και ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο A. Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n g_n$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο A.

10.2 Δυναμοσειρές.

ΟΡΙΣΜΟΣ 10.2. *Κάθε σειρά συναρτήσεων με τη μορφή*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - \xi)^n = a_0 + a_1(x - \xi) + a_2(x - \xi)^2 + \cdots + a_n(x - \xi)^n + \cdots$$

*ονομάζεται **δυναμοσειρά** με **κέντρο** ξ και **συντελεστές** $a_0, a_1, a_2, \ldots$. Αυτή είναι η σειρά των συναρτήσεων a_0 (σταθερή) και $a_n(x - \xi)^n$ για κάθε n.*

Παράδειγμα 10.2.1. Η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} 0(x - \xi)^n$ με όλους τους συντελεστές ίσους με 0 ονομάζεται **μηδενική δυναμοσειρά** και συγκλίνει για κάθε τιμή του x και έχει άθροισμα ίσο με 0. Δηλαδή, $\sum_{n=0}^{+\infty} 0(x - \xi)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 0 = 0$ για κάθε x.

Παράδειγμα 10.2.2. Η **γεωμετρική δυναμοσειρά** $\sum_{n=0}^{+\infty} 1(x - \xi)^n$ με όλους τους συντελεστές ίσους με 1 συγκλίνει μόνο όταν $-1 < x - \xi < 1$ ή, ισοδύναμα, $\xi - 1 < x < \xi + 1$ και το άθροισμά της είναι ίσο με $\frac{1}{1-(x-\xi)}$. Δηλαδή,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (x - \xi)^n = \frac{1}{1-(x-\xi)} \qquad \text{για κάθε } \ x \in (\xi - 1, \xi + 1).$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 10.3. *Έστω δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - \xi)^n$. Αν $\rho = \overline{\lim}\, \sqrt[n]{|a_n|}$, οπότε $0 \leq \rho \leq +\infty$, τότε το $R = \begin{cases} 1/\rho, & \text{αν } 0 < \rho \leq +\infty \\ +\infty, & \text{αν } \rho = 0 \end{cases}$ ονομάζεται **ακτίνα σύγκλισης** της δυναμοσειράς.*

Επομένως, κάθε δυναμοσειρά έχει ακτίνα σύγκλισης η οποία είναι στοιχείο του $[0, \infty]$.

[5] Η μελέτη της ζ-συνάρτησης θα συνεχισθεί στις ασκήσεις 12.3.7, 12.4.2 και 12.5.4.

[6] Δείτε την άσκηση 9.2.25.

[7] Δείτε και τη σχετική άσκηση 8.3.27.

ΘΕΩΡΗΜΑ 10.6. *Έστω δυναμοσειρά* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ *και* R *η ακτίνα σύγκλισής της. Η δυναμοσειρά συγκλίνει απολύτως για κάθε* $x \in (\xi - R, \xi + R)$ *και αποκλίνει για κάθε* $x \notin [\xi - R, \xi + R]$. *Τέλος, για τους* $x = \xi \pm R$ *δεν υπάρχει γενικό συμπέρασμα εκτός, βέβαια, από την περίπτωση* $R = 0$, *οπότε η σειρά συγκλίνει απολύτως για* $x = \xi$.

Απόδειξη. Έστω $0 < R \leq +\infty$ ή, ισοδύναμα, $0 \leq \rho < +\infty$. Αν $|x - \xi| < R$, τότε

$$\overline{\lim}\ \sqrt[n]{|a_n(x-\xi)^n|} = |x-\xi|\,\overline{\lim}\ \sqrt[n]{|a_n|} = |x-\xi|\,\rho < 1,$$

οπότε, σύμφωνα με το κριτήριο ρίζας, η $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ συγκλίνει απολύτως.
Έστω $0 \leq R < +\infty$ ή, ισοδύναμα, $0 < \rho \leq +\infty$. Αν $|x - \xi| > R$, τότε

$$\overline{\lim}\ \sqrt[n]{|a_n(x-\xi)^n|} = |x-\xi|\,\overline{\lim}\ \sqrt[n]{|a_n|} = |x-\xi|\,\rho > 1,$$

οπότε η σειρά αποκλίνει.
Για τη δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty}(x-\xi)^n$ ισχύει $\sqrt[n]{|1|} \to 1$, οπότε $\rho = 1$ και $R = 1$. Αν $x = \xi \pm 1$, καταλήγουμε στις σειρές $\sum_{n=0}^{+\infty} 1^n$ και $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n$ οι οποίες αποκλίνουν.
Για τη δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-\xi)^n}{n^2}$ ισχύει $\sqrt[n]{|1/n^2|} \to 1$, οπότε $\rho = 1$ και $R = 1$. Αν $x = \xi \pm 1$, καταλήγουμε στις σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ οι οποίες συγκλίνουν.
Για τη δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-\xi)^n}{n}$ ισχύει $\sqrt[n]{|1/n|} \to 1$, οπότε $\rho = 1$ και $R = 1$. Αν $x = \xi + 1$, καταλήγουμε στη σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ η οποία αποκλίνει και, αν $x = \xi - 1$, στη σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ η οποία συγκλίνει.
Για τη δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{(x-\xi)^n}{n}$ ισχύει $\sqrt[n]{|(-1)^n/n|} \to 1$, οπότε $\rho = 1$ και $R = 1$. Αν $x = \xi + 1$, καταλήγουμε στη σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ η οποία συγκλίνει και, αν $x = \xi - 1$, στη σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ η οποία αποκλίνει. $\square$

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι σε κάθε δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ αντιστοιχίζεται η ακτίνα σύγκλισής της $R \in [0, +\infty]$ και ότι υπάρχουν τα εξής απλά ενδεχόμενα: (i) αν $R = +\infty$, η σειρά συγκλίνει απολύτως για κάθε $x \in (-\infty, +\infty)$, (ii) αν $R = 0$, η σειρά συγκλίνει απολύτως για $x = \xi$ και αποκλίνει για κάθε $x \neq \xi$ και (iii) αν $0 < R < +\infty$, η σειρά συγκλίνει απολύτως για κάθε $x \in (\xi - R, \xi + R)$ και αποκλίνει για κάθε $x \notin [\xi - R, \xi + R]$.

Στην περίπτωση (iii) μπορούμε να πούμε περισσότερα: η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε $x \in I$, όπου I είναι το διάστημα $(\xi - R, \xi + R)$ στο οποίο ενδέχεται να έχουν προστεθεί ένα ή και τα δύο άκρα $\xi \pm R$. Δηλαδή, $I = (\xi - R, \xi + R)$ ή $I = (\xi - R, \xi + R]$ ή $I = [\xi - R, \xi + R)$ ή $I = [\xi - R, \xi + R]$, ανάλογα με τη συγκεκριμένη σειρά. Γράφοντας $I = (-\infty, +\infty)$ στην περίπτωση (i) και $I = \{\xi\}$ στην περίπτωση (ii), βλέπουμε ότι σε κάθε περίπτωση η $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ συγκλίνει για κάθε $x \in I$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 10.4. *Άρα σε κάθε* $x \in I$ *αντιστοιχίζεται ο αριθμός*

$$s(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$$

και, επομένως, ορίζεται συνάρτηση $s : I \to \mathbb{R}$. *Λέμε ότι* **η δυναμοσειρά ορίζει τη συνάρτηση** $s : I \to \mathbb{R}$ *ή ότι* **η** $s : I \to \mathbb{R}$ **ορίζεται από τη δυναμοσειρά** *και, προφανώς, η δυναμοσειρά συγκλίνει στη συνάρτηση* s *κατά σημείο στο διάστημα* I. *Το* I *ονομάζεται* **διάστημα σύγκλισης** *της δυναμοσειράς.*

Παράδειγμα 10.2.3. Το διάστημα σύγκλισης της γεωμετρικής δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{+\infty}(x-\xi)^n$ είναι το $I = (\xi - 1, \xi + 1)$. Η δυναμοσειρά ορίζει τη συνάρτηση $s : (\xi - 1, \xi + 1) \to \mathbb{R}$ με τύπο $s(x) = \frac{1}{1-(x-\xi)}$.
Όπως φαίνεται στο παράδειγμα αυτό, η συνάρτηση s που ορίζεται από μια δυναμοσειρά ενδέχεται να επεκτείνεται και εκτός του διαστήματος σύγκλισης I της δυναμοσειράς. Μπορεί, δηλαδή, να υπάρχει συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$, όπου $I \subseteq A$, $I \neq A$, ώστε να ισχύει $f(x) = s(x)$ για κάθε $x \in I$. Πράγματι, στο παράδειγμα η $f : \mathbb{R} \setminus \{\xi + 1\} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{1}{1-(x-\xi)}$ είναι επέκταση της συνάρτησης s. Όμως, η δυναμοσειρά ορίζει τη συνάρτηση s και όχι την f, διότι συγκλίνει μόνο στο διάστημα σύγκλισης $(\xi - 1, \xi + 1)$ και όχι σε ολόκληρο το μεγαλύτερο σύνολο $\mathbb{R} \setminus \{\xi + 1\}$.

Παράδειγμα 10.2.4. Το διάστημα σύγκλισης της $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-\xi)^n}{n^2}$ είναι το $I = [\xi - 1, \xi + 1]$.

Παράδειγμα 10.2.5. Το διάστημα σύγκλισης της $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-\xi)^n}{n}$ είναι το $I = [\xi - 1, \xi + 1)$.

Παράδειγμα 10.2.6. Το διάστημα σύγκλισης της $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(x-\xi)^n}{n}$ είναι το $I = (\xi - 1, \xi + 1]$.

Παράδειγμα 10.2.7. Για τη δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} n^n (x-\xi)^n$ έχουμε $\sqrt[n]{|n^n|} = n \to +\infty$, οπότε η ακτίνα σύγκλισης της είναι $R = \frac{1}{+\infty} = 0$ και το διάστημα σύγκλισης είναι το $\{\xi\}$.

Παράδειγμα 10.2.8. Για τη δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n} (x-\xi)^n$ έχουμε $\sqrt[n]{|1/n^n|} = \frac{1}{n} \to 0$, οπότε η ακτίνα σύγκλισης είναι $R = +\infty$ και το διάστημα σύγκλισης είναι το $(-\infty, +\infty)$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 10.5. *Έστω δυναμοσειρά* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-\xi)^n$ *και* $a_n \neq 0$ *για κάθε* n. *Αν* $\rho_1 = \underline{\lim} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ *και* $\rho_2 = \overline{\lim} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, *οπότε* $0 \leq \rho_1 \leq \rho_2 \leq +\infty$, *ορίζουμε* $R_1 = \begin{cases} 1/\rho_1, & \text{αν } 0 < \rho_1 \leq +\infty \\ +\infty, & \text{αν } \rho_1 = 0 \end{cases}$ *και* $R_2 = \begin{cases} 1/\rho_2, & \text{αν } 0 < \rho_2 \leq +\infty \\ +\infty, & \text{αν } \rho_2 = 0 \end{cases}$

ΠΡΟΤΑΣΗ 10.3. *Έστω δυναμοσειρά* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-\xi)^n$ *ώστε* $a_n \neq 0$ *για κάθε* n, *έστω* R *η ακτίνα σύγκλισής της και έστω οι* R_1, R_2 *που μόλις ορίστηκαν. Τότε* $R_2 \leq R \leq R_1$.

Απόδειξη. Έστω (για να καταλήξουμε σε άτοπο) $R < R_2$. Τότε $R_2 > 0$, οπότε $\rho_2 < +\infty$. Θεωρούμε οποιονδήποτε x ώστε $R < |x-\xi| < R_2$. Τότε

$$\overline{\lim} \left|\frac{a_{n+1}(x-\xi)^{n+1}}{a_n(x-\xi)^n}\right| = |x-\xi| \, \overline{\lim} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x-\xi| \, \rho_2 < 1,$$

οπότε, σύμφωνα με το κριτήριο λόγου, η $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-\xi)^n$ συγκλίνει απολύτως. Άτοπο.
Έστω (για να καταλήξουμε σε άτοπο) $R_1 < R$. Τότε $R_1 < +\infty$, οπότε $0 < \rho_1$. Θεωρούμε οποιονδήποτε x ώστε $R_1 < |x-\xi| < R$. Τότε

$$\underline{\lim} \left|\frac{a_{n+1}(x-\xi)^{n+1}}{a_n(x-\xi)^n}\right| = |x-\xi| \, \underline{\lim} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x-\xi| \, \rho_1 > 1,$$

οπότε η σειρά αποκλίνει. Άτοπο. □

Σε πολλές περιπτώσεις η πρόταση 10.3 μας δίνει έναν χρήσιμο εναλλακτικό τρόπο υπολογισμού της ακτίνας σύγκλισης μιας δυναμοσειράς: παρατηρήστε ότι, αν υπάρχει το $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, τότε $R_1 = R_2$, οπότε $R = R_1 = R_2$.

Το θεώρημα 10.7 συμπληρώνει το θεώρημα 10.6.

ΘΕΩΡΗΜΑ 10.7. *Έστω δυναμοσειρά* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-\xi)^n$ *και* s *η συνάρτηση που ορίζεται από τη δυναμοσειρά στο διάστημα σύγκλισής της* I. *Τότε η δυναμοσειρά συγκλίνει στην* s *ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του* I.

Απόδειξη. [8] Έστω $a, b \in I$, $a \leq b$.
Έστω, ως πρώτη περίπτωση, ότι $|a-\xi| \leq |b-\xi|$.
Τότε αμέσως βλέπουμε ότι ισχύει

$$|x-\xi| \leq |b-\xi| \qquad \text{για } \ x \in [a,b]. \tag{10.1}$$

[8] Είναι φανερό ότι υπάρχει κάποια σχέση ανάμεσα στην απόδειξη που θα δούμε τώρα και στην απόδειξη του θεωρήματος 10.1[β], αφού και οι δύο αποδείξεις χρησιμοποιούν τον τύπο άθροισης του Abel. Μάλιστα, η παρούσα απόδειξη μπορεί να διατυπωθεί ως μια σχετικά απλή εφαρμογή του θεωρήματος 10.1[β]. Προτιμάμε, όμως, να δούμε την απόδειξη ανεξάρτητα από το θεώρημα 10.1, διότι είπαμε ότι το θεώρημα 10.1 μπορεί να παραληφθεί σε μια πρώτη ανάγνωση.

Θεωρούμε τα μερικά αθροίσματα $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-\xi)^k$. Προφανώς, $s_n(x) \to s(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$ και, ειδικώτερα, $s_n(b) \to s(b)$.
Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει

$$|s_n(b) - s(b)| \leq \tfrac{\epsilon}{5} \qquad \text{για κάθε } \ n \geq n_0. \tag{10.2}$$

Θέτουμε

$$g_n(x) = \left(\tfrac{x-\xi}{b-\xi}\right)^n, \tag{10.3}$$

οπότε από την (10.1) συνεπάγεται ότι ισχύει

$$|g_n(x)| \leq 1 \qquad \text{για κάθε } \ x \in [a,b] \ \text{ και κάθε } \ n. \tag{10.4}$$

Συνδυάζοντας τον τύπο άθροισης του Abel στην υποενότητα 8.3.2 με τα (10.2), (10.3) και (10.4) έχουμε ότι για κάθε $x \in [a,b]$ και κάθε n, m με $n > m \geq n_0$ ισχύει

$$\begin{aligned}
\left| \textstyle\sum_{k=m+1}^{n} a_k(x-\xi)^k \right| &= \left| \textstyle\sum_{k=m+1}^{n} a_k(b-\xi)^k g_k(x) \right| \\
&= \Big| \textstyle\sum_{k=m+1}^{n} s_k(b)(g_k(x) - g_{k+1}(x)) \\
&\qquad + s_n(b)g_{n+1}(x) - s_m(b)g_{m+1}(x) \Big| \\
&= \Big| \textstyle\sum_{k=m+1}^{n} (s_k(b) - s(b))(g_k(x) - g_{k+1}(x)) \\
&\qquad + (s_n(b) - s(b))g_{n+1}(x) - (s_m(b) - s(b))g_{m+1}(x) \Big| \\
&\leq \textstyle\sum_{k=m+1}^{n} |s_k(b) - s(b)|(g_k(x) - g_{k+1}(x)) \\
&\qquad + |s_n(b) - s(b)||g_{n+1}(x)| + |s_m(b) - s(b)||g_{m+1}(x)| \\
&\leq \textstyle\sum_{k=m+1}^{n} \frac{\epsilon}{5}(g_k(x) - g_{k+1}(x)) \\
&\qquad + \tfrac{\epsilon}{5} + \tfrac{\epsilon}{5} \\
&= \tfrac{\epsilon}{5}(g_{m+1}(x) - g_{n+1}(x)) + \tfrac{2\epsilon}{5} \leq \tfrac{4\epsilon}{5} < \epsilon.
\end{aligned}$$

Άρα, σύμφωνα με το κριτήριο του Cauchy, η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ συγκλίνει στην s ομοιόμορφα στο $[a,b]$.
Στη δεύτερη περίπτωση, δηλαδή όταν $|b-\xi| \leq |a-\xi|$, η απόδειξη είναι παρόμοια. $\square$

Το θεώρημα 10.7 λέει ότι μια δυναμοσειρά συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε *κλειστό και φραγμένο* υποδιάστημα του διαστήματος σύγκλισής της, I. Πρέπει, όμως, να τονιστεί ότι η δυναμοσειρά εν γένει δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στο I.

Παράδειγμα 10.2.9. Η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ συγκλίνει στη συνάρτηση $\frac{1}{1-x}$ κατά σημείο αλλά *όχι ομοιόμορφα* στο $(-1,1)$. Από την άλλη μεριά, η ίδια δυναμοσειρά συγκλίνει στη συνάρτηση $\frac{1}{1-x}$ ομοιόμορφα σε οποιοδήποτε διάστημα $[a,b]$ με $-1 < a \leq b < 1$.

Παράδειγμα 10.2.10. Η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση s κατά σημείο στο διάστημα σύγκλισής της, το $[-1,1)$. Επομένως, η δυναμοσειρά συγκλίνει στην s ομοιόμορφα σε οποιοδήποτε διάστημα $[a,b]$ με $-1 \leq a \leq b < 1$.

Συνήθως, σε βιβλία παρόμοιου επιπέδου αποδεικνύεται μια ασθενέστερη παραλλαγή του θεωρήματος 10.7, όπου το συμπέρασμα είναι ότι *η δυναμοσειρά συγκλίνει στην s ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του εσωτερικού του I*. Το θεώρημα 10.7 και αυτή η παραλλαγή του δεν έχουν καμιά διαφορά όταν εφαρμοστούν στο προηγούμενο παράδειγμα 10.2.9, διότι το διάστημα σύγκλισης είναι το $(-1,1)$ και είναι το ίδιο με το εσωτερικό του. Όμως, έχουν διαφορά όταν εφαρμοστούν στο παράδειγμα 10.2.10. Το διάστημα σύγκλισης είναι το $[-1,1)$ και το θεώρημα 10.7 επιτρέπει να συμπεράνουμε την ομοιόμορφη σύγκλιση της δυναμοσειράς *και* σε διαστήματα $[-1,b]$, $-1 \leq b < 1$ ενώ η ασθενέστερη παραλλαγή του επιτρέπει να συμπεράνουμε την ομοιόμορφη σύγκλιση της δυναμοσειράς μόνο σε διαστήματα $[a,b]$, $-1 < a \leq b < 1$. Η απόδειξη της παραλλαγής είναι αρκετά πιο εύκολη από την απόδειξη του θεωρήματος 10.7. Το ισχυρό θεώρημα 10.7 οφείλεται στον Abel και είναι αρκετά χρήσιμο όταν θέλουμε να βγάλουμε συμπεράσματα για τη συμπεριφορά της συνάρτησης, που ορίζεται από την δυναμοσειρά, στα άκρα του διαστήματος σύγκλισης (όταν αυτά περιέχονται στο διάστημα σύγκλισης).

Τώρα, χάριν πληρότητας, θα δούμε πώς αποδεικνύεται το ασθενέστερο αποτέλεσμα, δηλαδή η ασθενέστερη μορφή του θεωρήματος 10.7, που μόλις αναφέραμε:

Έστω δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ και s η συνάρτηση που ορίζεται από τη δυναμοσειρά στο διάστημα σύγκλισής της I. Τότε η δυναμοσειρά συγκλίνει στην s ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του εσωτερικού του I.

Έστω, λοιπόν, διάστημα $[a,b]$ στο *εσωτερικό* του I. Τότε είναι εύκολο να δει κανείς ότι υπάρχει x_1 στο I ώστε να ισχύει $|a-\xi| < |x_1-\xi|$ και $|b-\xi| < |x_1-\xi|$. Οπότε, αν θέσουμε, $r = \max\{|a-\xi|, |b-\xi|\}$, τότε ισχύει

$$|x-\xi| \le r < |x_1-\xi| \qquad \text{για κάθε } x \in [a,b]. \tag{10.5}$$

Επειδή $x_1 \in I$, η σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x_1-\xi)^n$ συγκλίνει, οπότε $a_n(x_1-\xi)^n \to 0$ και, επομένως, υπάρχει M ώστε να ισχύει

$$|a_n(x_1-\xi)^n| \le M \qquad \text{για κάθε } n. \tag{10.6}$$

Τώρα εφαρμόζουμε το κριτήριο του Weierstrass, παρατηρώντας ότι, βάσει των (10.5) και (10.6), ισχύει

$$|a_n(x-\xi)^n| = |a_n(x_1-\xi)^n|\left|\tfrac{x-\xi}{x_1-\xi}\right|^n \le M\left(\tfrac{r}{|x_1-\xi|}\right)^n$$

και ότι

$$\sum_{n=0}^{+\infty} M\left(\tfrac{r}{|x_1-\xi|}\right)^n = M\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\tfrac{r}{|x_1-\xi|}\right)^n < +\infty$$

διότι $0 \le \frac{r}{|x_1-\xi|} < 1$.

Άρα η σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[a,b]$ και τελείωσε η απόδειξη.

Στις επόμενες προτάσεις θα εξετάσουμε μερικές σημαντικές ιδιότητες της συνάρτησης η οποία ορίζεται από μια δυναμοσειρά στο διάστημα σύγκλισής της.

ΘΕΩΡΗΜΑ 10.8. *Έστω δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ με διάστημα σύγκλισης I. Η συνάρτηση s που ορίζεται από τη δυναμοσειρά στο διάστημα I είναι συνεχής στο I.*

Απόδειξη. Έστω η εσωτερικό σημείο του I. Θεωρούμε $a, b \in I$ ώστε $a < \eta < b$. Η δυναμοσειρά συγκλίνει στην s ομοιόμορφα στο $[a,b]$ και, επειδή, κάθε συνάρτηση $a_n(x-\xi)^n$ είναι συνεχής στο $[a,b]$, η s είναι συνεχής στο $[a,b]$. Επειδή ο η είναι εσωτερικό σημείο του $[a,b]$, η s είναι συνεχής στον η. Προσέξτε: αν ο η ήταν άκρο του $[a,b]$, θα συμπεραίναμε ότι η s είναι συνεχής στον η μόνο από τη μία πλευρά του.

Έστω ότι ο η είναι δεξιό άκρο του I και ανήκει στο I. Η δυναμοσειρά συγκλίνει στην s ομοιόμορφα στο $[\xi,\eta]$ και, επειδή κάθε συνάρτηση $a_n(x-\xi)^n$ είναι συνεχής στο $[\xi,\eta]$, η s είναι συνεχής στο $[\xi,\eta]$ και, επομένως, είναι συνεχής στον η. Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι, αν ο η είναι αριστερό άκρο του I και ανήκει στο I, τότε η s είναι συνεχής στον η.

Άρα η s είναι συνεχής στο I. □

ΘΕΩΡΗΜΑ 10.9. *Έστω δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ με διάστημα σύγκλισης I. Αν s είναι η συνάρτηση που ορίζεται από τη δυναμοσειρά στο διάστημα I, τότε για κάθε $a, b \in I$ ισχύει*

$$\int_a^b s(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{a_n}{n+1}\left((b-\xi)^{n+1} - (a-\xi)^{n+1}\right).$$

Απόδειξη. Αν $a, b \in I$, $a < b$, η δυναμοσειρά συγκλίνει στην s ομοιόμορφα στο $[a,b]$, οπότε το συμπέρασμα είναι άμεση συνέπεια του θεωρήματος 10.3.

Η περίπτωση $a = b$ είναι προφανής και η $b < a$ ανάγεται στην $a < b$. □

Το αποτέλεσμα του θεωρήματος 10.9 γράφεται και

$$\int_a^b \big(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n \big)\, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_a^b (x-\xi)^n\, dx.$$

και μπορεί να "διαβαστεί" ως εναλλαγή των συμβόλων της σειράς και του ολοκληρώματος.

ΘΕΩΡΗΜΑ 10.10. *Έστω οι δυναμοσειρές* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ *και* $\sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x-\xi)^{n-1}$.
[α] *Οι δύο δυναμοσειρές έχουν την ίδια ακτίνα σύγκλισης, έστω* R.
[β] *Αν* I, I' *είναι, αντιστοίχως, τα διαστήματα σύγκλισης των δύο δυναμοσειρών, τότε* $I' \subseteq I$.
Συνδυασμένα τα [α], [β] μας λένε ότι τα δύο διαστήματα έχουν το ίδιο εσωτερικό και από το I' *το πολύ να λείπουν κάποια από τα άκρα που μπορεί να περιέχει το* I.
[γ] *Αν* $R > 0$*, τότε η συνάρτηση* s *που ορίζεται από την πρώτη δυναμοσειρά στο* I *είναι παραγωγίσιμη στο* I' *και η παράγωγος συνάρτηση ταυτίζεται στο* I' *με τη συνάρτηση που ορίζεται από τη δεύτερη δυναμοσειρά. Δηλαδή,*

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x-\xi)^{n-1} \qquad \textit{για κάθε } x \in I'.$$

Απόδειξη. [α] Έστω $\rho = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$ και $\rho' = \overline{\lim} \sqrt[n]{|na_n|}$.
Αν $\rho = +\infty$, τότε, προφανώς, $\rho' \leq \rho$. Έστω $0 \leq \rho < +\infty$. Θεωρούμε οποιονδήποτε $x > \rho$ και, κατόπιν, οποιονδήποτε y ώστε $\rho < y < x$. Τότε ισχύει τελικά $\sqrt[n]{|a_n|} < y$ και, επειδή, $\sqrt[n]{n} \to 1$, ισχύει τελικά $\sqrt[n]{n} < \frac{x}{y}$. Άρα ισχύει τελικά $\sqrt[n]{|a_n|} < y$ και $\sqrt[n]{n} < \frac{x}{y}$ και, επομένως, ισχύει τελικά $\sqrt[n]{|na_n|} = \sqrt[n]{n}\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{x}{y} y = x$. Άρα $\rho' \leq x$. Επειδή αυτό το τελευταίο ισχύει για κάθε $x > \rho$, συνεπάγεται $\rho' \leq \rho$. Άρα σε κάθε περίπτωση είναι $\rho' \leq \rho$.
Αν $\rho' = +\infty$, τότε, προφανώς, $\rho \leq \rho'$. Έστω $0 \leq \rho' < +\infty$. Θεωρούμε οποιονδήποτε $x > \rho'$. Τότε ισχύει τελικά $\sqrt[n]{|na_n|} < x$ και, επειδή $\sqrt[n]{n} > 1$, ισχύει τελικά $\sqrt[n]{|a_n|} < x$. Άρα $\rho \leq x$. Επειδή αυτό το τελευταίο ισχύει για κάθε $x > \rho'$, συνεπάγεται $\rho \leq \rho'$. Άρα σε κάθε περίπτωση είναι $\rho \leq \rho'$.
Από τις $\rho' \leq \rho$ και $\rho \leq \rho'$ συνεπάγεται $\rho' = \rho$, οπότε οι δυναμοσειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x-\xi)^n$ και $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ έχουν την ίδια ακτίνα σύγκλισης, έστω R.
Αν πολλαπλασιάσουμε τη δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x-\xi)^{n-1}$ με $x-\xi$, τότε προκύπτει η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x-\xi)^n$. Άρα οι δύο δυναμοσειρές συγκλίνουν για τους ίδιους ακριβώς x, οπότε έχουν την ίδια ακτίνα σύγκλισης, δηλαδή το R.

[β,γ] Αν $R = 0$, τότε, προφανώς, $I' = I = \{\xi\}$. Για τα παρακάτω υποθέτουμε ότι $R > 0$. Επειδή οι δύο δυναμοσειρές έχουν το ίδιο κέντρο ξ και τις ίδιες ακτίνες σύγκλισης R, τα διαστήματα I, I' έχουν τα ίδια εσωτερικά σημεία και διαφέρουν *πιθανόν* ως προς τα άκρα τους.
Έστω η εσωτερικό σημείο του I' και, επομένως, και του I. Επιλέγουμε εσωτερικά σημεία a, b των I' και I ώστε $a < \eta < b$. Τότε η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x-\xi)^{n-1}$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο $[a, b]$ και η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ συγκλίνει στην s ομοιόμορφα στο $[a, b]$. Σύμφωνα με το θεώρημα 10.4, η s είναι παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ με παράγωγο $s'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x-\xi)^{n-1}$ για κάθε $x \in [a, b]$. Επειδή ο η είναι εσωτερικό σημείο του $[a, b]$, η s είναι παραγωγίσιμη στον η και $s'(\eta) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n(\eta-\xi)^{n-1}$. Προσέξτε: αν ο η ήταν άκρο του $[a, b]$, θα συμπεραίναμε ότι η s είναι παραγωγίσιμη στον η μόνο από τη μία πλευρά του.
Έστω η δεξιό άκρο του I' και έστω ότι ο η *ανήκει* στο I' . Τότε η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x-\xi)^{n-1}$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο $[\xi, \eta]$ και η $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ συγκλίνει για $x = \xi$. Σύμφωνα με το θεώρημα 10.4, η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο $[\xi, \eta]$. Ειδικότερα, η δυναμοσειρά συγκλίνει αν $x = \eta$ και, επομένως, ο η *ανήκει* στο I. Άρα η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ συγκλίνει στην s ομοιόμορφα στο $[\xi, \eta]$. Σύμφωνα, πάλι, με το θεώρημα 10.4, η s είναι παραγωγίσιμη στο $[\xi, \eta]$ με παράγωγο $s'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x-\xi)^{n-1}$ για κάθε $x \in [\xi, \eta]$. Ειδικότερα, η s είναι παραγωγίσιμη στον η και $s'(\eta) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n(\eta-\xi)^{n-1}$.
Η απόδειξη είναι ίδια αν ο η είναι αριστερό άκρο του I' . $\square$

Τονίζουμε πάλι ότι τα διαστήματα I, I' στο θεώρημα 10.10 μπορούν να διαφέρουν *μόνο ως προς τα άκρα τους* με τον εξής τρόπο: αν το I περιέχει κάποιο από τα άκρα του, το I' μπορεί να το περιέχει αλλά μπορεί και να μην το περιέχει και, αν το I δεν περιέχει κάποιο από τα άκρα του, το I' δεν το περιέχει, επίσης.

Παρατηρήστε ότι η $s'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x-\xi)^{n-1}$ γράφεται και

$$\tfrac{d}{dx}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \tfrac{d}{dx}(x-\xi)^n$$

και μπορεί να "διαβαστεί" ως εναλλαγή των συμβόλων της σειράς και της παραγώγου.

10.2.1 Τα βασικά παραδείγματα.

Θα δούμε, τώρα, μερικά σημαντικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 10.2.11. Η γεωμετρική δυναμοσειρά: $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.
Γνωρίζουμε ότι το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι το $(-1,1)$, οπότε, σύμφωνα με το θεώρημα 10.8, η συνάρτηση $s(x)$ που ορίζεται από αυτήν στο $(-1,1)$ είναι συνεχής στο $(-1,1)$. Αυτό επιβεβαιώνεται, αφού γνωρίζουμε ότι $s(x) = \frac{1}{1-x}$ για κάθε $x \in (-1,1)$. Η συνάρτηση αυτή είναι και παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ και θα δούμε ότι αυτό επιβεβαιώνει το θεώρημα 10.10.
Θεωρούμε τη δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$ και εφαρμόζουμε το θεώρημα 10.10. Η δεύτερη δυναμοσειρά έχει ακτίνα σύγκλισης, επίσης, $R=1$ και διάστημα σύγκλισης, επίσης, $(-1,1)$. Ακόμη, ισχύει

$$\tfrac{1}{(1-x)^2} = s'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$$

για κάθε $x \in (-1,1)$.[9] Επαναλαμβάνουμε την παραγώγιση όσες φορές θέλουμε, διατηρώντας το ίδιο κάθε φορά διάστημα σύγκλισης, και καταλήγουμε στο ότι

$$\tfrac{m!}{(1-x)^{m+1}} = \sum_{n=m}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-m+1)x^{n-m} \qquad \text{για κάθε } \ x\in(-1,1) \ \text{ και κάθε } \ m\in\mathbb{N}.$$

Ολοκληρώνοντας τη γεωμετρική σειρά βάσει του θεωρήματος 10.9, βρίσκουμε

$$\log(1-x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{1}{n+1}x^{n+1} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{1}{n}x^n \qquad \text{για κάθε } \ x\in(-1,1)$$

ή, ισοδύναμα,

$$\log x = \sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n \qquad \text{για κάθε } \ x\in(0,2).$$

Παράδειγμα 10.2.12. Η **λογαριθμική δυναμοσειρά**: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n$.
Η δυναμοσειρά αυτή προέκυψε στο προηγούμενο παράδειγμα, μέσω της γεωμετρικής δυναμοσειράς, αλλά θα τήν μελετήσουμε και ανεξάρτητα από τη γεωμετρική δυναμοσειρά.
Είναι $\sqrt[n]{|(-1)^{n-1}/n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1$, οπότε η ακτίνα σύγκλισης είναι $R = \frac{1}{1} = 1$ και το διάστημα σύγκλισης έχει άκρα $1-1=0$ και $1+1=2$. Για $x=0$ η δυναμοσειρά γίνεται $-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ και αποκλίνει. Για $x=2$ η δυναμοσειρά γίνεται $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ και συγκλίνει. Άρα το διάστημα σύγκλισης είναι το $(0,2]$. Έστω

$$s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n \qquad \text{για κάθε } \ x\in(0,2]$$

η συνάρτηση που ορίζεται από τη δυναμοσειρά. Τότε η $s(x)$ είναι συνεχής στο $(0,2]$.
Θεωρούμε τη δυναμοσειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\tfrac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}(x-1)^{n-1}$$

και εφαρμόζουμε το θεώρημα 10.10. Η δεύτερη δυναμοσειρά έχει ακτίνα σύγκλισης $R=1$ και διάστημα σύγκλισης το $(0,2)$ ή το $(0,2]$. Για $x=2$ η δυναμοσειρά γίνεται $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}$ και

[9] Έχουμε ήδη αποδείξει τον ίδιο τύπο στο παράδειγμα 8.5.1, χρησιμοποιώντας το γινόμενο Cauchy σειρών.

αποκλίνει, οπότε το διάστημα σύγκλισής της είναι το $(0,2)$. Άρα η $s(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,2)$ και ισχύει

$$s'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}(x-1)^{n-1}=\tfrac{1}{1-(1-x)}=\tfrac{1}{x}=\log' x$$

για κάθε $x\in(0,2)$, οπότε η συνάρτηση $s(x)-\log x$ είναι σταθερή στο διάστημα $(0,2)$. Άρα ισχύει $s(x)-\log x=s(1)-\log 1=0$ και, επομένως, $s(x)=\log x$ για κάθε $x\in(0,2)$. Επειδή η $s(x)$ είναι συνεχής στο $(0,2]$, συνεπάγεται

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{(-1)^{n-1}}{n}=s(2)=\lim_{x\to 2-}s(x)=\lim_{x\to 2-}\log x=\log 2.$$

Επομένως,

$$\log x=\sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n \qquad \text{για κάθε } \ x\in(0,2]. \tag{10.7}$$

Ξαναβρίσκουμε, λοιπόν, την τελευταία σχέση του προηγούμενου παραδείγματος αλλά *και για τον* $x=2$. Παρατηρήστε την ενδιαφέρουσα σχέση

$$\log 2=\sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{(-1)^{n-1}}{n}=1-\tfrac12+\tfrac13-\tfrac14+\tfrac15-\cdots,$$

την οποία έχουμε αναφέρει ήδη αρκετές φορές.[10]
Η σχέση (10.7) εμφανίζεται πολλές φορές με δύο εναλλακτικές μορφές. Μετατρέποντας το x σε $x+1$, βρίσκουμε

$$\log(1+x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{(-1)^{n-1}}{n}x^n \qquad \text{για κάθε } \ x\in(-1,1]$$

και, μετατρέποντας στην τελευταία σχέση το x σε $-x$, βρίσκουμε

$$\log\tfrac{1}{1-x}=\sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{1}{n}x^n \qquad \text{για κάθε } \ x\in[-1,1)$$

Παράδειγμα 10.2.13. Η **εκθετική δυναμοσειρά**: $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}x^n$.
Είναι $\sqrt[n]{1/n!}=\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}\to 0$, οπότε η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $R=+\infty$ και το διάστημα σύγκλισης είναι το $(-\infty,+\infty)$. Έστω

$$s(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\tfrac{1}{n!}x^n \qquad \text{για κάθε } \ x$$

η συνάρτηση που ορίζεται από τη δυναμοσειρά. Η $s(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και

$$s'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}n\tfrac{1}{n!}x^{n-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}\tfrac{1}{n!}x^n=s(x)$$

για κάθε x. Για τη συνάρτηση $f(x)=e^{-x}s(x)$ ισχύει

$$f'(x)=-e^{-x}s(x)+e^{-x}s'(x)=0$$

για κάθε x. Άρα η $e^{-x}s(x)$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$, οπότε ισχύει $e^{-x}s(x)=e^{-0}s(0)=1$ και, επομένως, $s(x)=e^x$ για κάθε x. Δηλαδή,

$$e^x=\sum_{n=0}^{+\infty}\tfrac{1}{n!}x^n \qquad \text{για κάθε } \ x.$$

Δείτε, επίσης, την άσκηση 8.5.3 αλλά και την επόμενη ενότητα.

Παράδειγμα 10.2.14. Οι **δυναμοσειρές του συνημιτόνου**, $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}$, και **του ημιτόνου**, $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}x^{2k-1}$.
Η ακολουθία των συντελεστών της πρώτης δυναμοσειράς έχει διπλό τύπο: $a_{2k-1}=0$ και $a_{2k}=$

[10] Μια άλλη απόδειξή της υπάρχει στην άσκηση 6.4.11.

$\frac{(-1)^k}{(2k)!}$. Άρα $\sqrt[2k-1]{|a_{2k-1}|} = 0 \to 0$ και $\sqrt[2k]{|a_{2k}|} = \frac{1}{\sqrt[2k]{(2k)!}} \to 0$ και, επομένως, $\sqrt[n]{|a_n|} \to 0$, οπότε η ακτίνα σύγκλισης είναι $R = +\infty$ και το διάστημα σύγκλισης είναι το $\mathbb{R}$. Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε το ίδιο αποτέλεσμα για τη δεύτερη δυναμοσειρά. Έστω, τώρα,

$$c(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}, \quad s(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} x^{2k-1} \qquad \text{για κάθε } x$$

οι συναρτήσεις που ορίζονται από τις δυναμοσειρές. Οι $c(x)$, $s(x)$ είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και ισχύει

$$c'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} 2k \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k-1} = -s(x), \qquad s'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (2k-1) \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} x^{2k-2} = c(x)$$

για κάθε x. Για τη συνάρτηση

$$f(x) = (c(x) - \cos x)^2 + (s(x) - \sin x)^2$$

ισχύει

$$f'(x) = 2(c(x) - \cos x)(-s(x) + \sin x) + 2(s(x) - \sin x)(c(x) - \cos x) = 0$$

για κάθε x. Άρα η $f(x)$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$, οπότε ισχύει $(c(x) - \cos x)^2 + (s(x) - \sin x)^2 = (c(0) - \cos 0)^2 + (s(0) - \sin 0)^2 = 0$ για κάθε x. Άρα ισχύει $c(x) = \cos x$ και $s(x) = \sin x$ για κάθε x. Δηλαδή,

$$\cos x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}, \quad \sin x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} x^{2k-1} \qquad \text{για κάθε } x.$$

Παράδειγμα 10.2.15. Η **δυναμοσειρά της τόξο εφαπτομένης**: $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} x^{2k-1}$.

Η ακολουθία των συντελεστών έχει διπλό τύπο: $a_{2k-1} = \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$ και $a_{2k} = 0$. Επομένως, έχουμε $\sqrt[2k-1]{|a_{2k-1}|} = \frac{1}{\sqrt[2k-1]{2k-1}} \to 1$ και $\sqrt[2k]{|a_{2k}|} = 0 \to 0$. Άρα $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, οπότε η ακτίνα σύγκλισης είναι $R = \frac{1}{1} = 1$ και το διάστημα σύγκλισης έχει άκρα -1 και 1. Για $x = -1$ η δυναμοσειρά γίνεται $-\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$ και συγκλίνει. Για $x = 1$ η δυναμοσειρά γίνεται $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$ και συγκλίνει. Άρα το διάστημα σύγκλισης είναι το $[-1, 1]$. Έστω

$$s(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} x^{2k-1} \qquad \text{για κάθε } x \in [-1, 1]$$

η συνάρτηση που ορίζεται από τη δυναμοσειρά. Η $s(x)$ είναι συνεχής στο $[-1, 1]$.
Θεωρούμε τη δυναμοσειρά

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (2k-1) \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} x^{2k-2} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{2k}$$

και εφαρμόζουμε το θεώρημα 10.10. Η δεύτερη δυναμοσειρά έχει ακτίνα σύγκλισης, επίσης, $R = 1$. Για $x = \pm 1$ γίνεται $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k$ και αποκλίνει. Άρα το διάστημα σύγκλισης της νέας δυναμοσειράς είναι το $(-1, 1)$. Άρα η $s(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, 1)$ και ισχύει

$$s'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{2k} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-x^2)^k = \frac{1}{1+x^2} = \arctan' x$$

για κάθε $x \in (-1, 1)$. Επομένως, η συνάρτηση $s(x) - \arctan x$ είναι σταθερή στο διάστημα $(-1, 1)$, οπότε ισχύει $s(x) - \arctan x = s(0) - \arctan 0 = 0$ για κάθε $x \in (-1, 1)$. Άρα ισχύει $s(x) = \arctan x$ για κάθε $x \in (-1, 1)$ και, επειδή η $s(x)$ είναι συνεχής στο $[-1, 1]$,

$$s(1) = \lim_{x \to 1-} s(x) = \lim_{x \to 1-} \arctan x = \arctan 1,$$

$$s(-1) = \lim_{x \to -1+} s(x) = \lim_{x \to -1+} \arctan x = \arctan(-1).$$

Επομένως,

$$\arctan x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} x^{2k-1} \qquad \text{για κάθε } x \in [-1, 1].$$

Παρατηρήστε τη σχέση:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots .$$

Παράδειγμα 10.2.16. Η **διωνυμική σειρά**: $\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$, όπου οι αριθμοί $\binom{\alpha}{n}$ ορίζονται για κάθε α με τους τύπους

$$\binom{\alpha}{0}=1, \qquad \binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \quad \text{αν } n\in\mathbb{N}.$$

Είναι φανερό ότι το σύμβολο $\binom{\alpha}{n}$ του **διωνυμικού συντελεστή** είναι επέκταση του γνωστού συμβόλου $\binom{m}{n}$, το οποίο είχε ορισθεί για $n,m\in\mathbb{Z}$, $0\le n\le m$.
Παρατηρήστε ότι, αν ο α είναι μη-αρνητικός ακέραιος, τότε είναι $\binom{\alpha}{n}=0$ για κάθε $n\ge\alpha+1$, οπότε η δυναμοσειρά γράφεται

$$1+\binom{\alpha}{1}x+\binom{\alpha}{2}x^2+\cdots+\binom{\alpha}{\alpha-1}x^{\alpha-1}+\binom{\alpha}{\alpha}x^{\alpha}=(1+x)^{\alpha} \qquad \text{αν } \alpha\in\mathbb{Z},\ \alpha\ge 0,\ x\in\mathbb{R},$$

βάσει του διωνυμικού τύπου του Newton. Επομένως, αν ο α είναι μη-αρνητικός ακέραιος, η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε x και το διάστημα σύγκλισής της είναι το $(-\infty,+\infty)$.
Στην περίπτωση που ο α *δεν είναι μη-αρνητικός ακέραιος*, υπολογίζουμε $\left|\binom{\alpha}{n+1}/\binom{\alpha}{n}\right|=|\frac{\alpha-n}{n+1}|\to 1$, οπότε η ακτίνα σύγκλισης είναι ίση με 1. Άρα το διάστημα σύγκλισης είναι ένα από τα: $(-1,1)$, $(-1,1]$, $[-1,1)$, $[-1,1]$.
Θα αποδείξουμε ότι (i) *αν* $\alpha\le -1$, *τότε το διάστημα σύγκλισης είναι το* $(-1,1)$, (ii) *αν* $-1<\alpha<0$, *τότε το διάστημα σύγκλισης είναι το* $(-1,1]$ *και* (iii) *αν* $\alpha\ge 0$ *και ο* α *δεν είναι μη-αρνητικός ακέραιος, τότε το διάστημα σύγκλισης είναι το* $[-1,1]$.

Στα παρακάτω θα χρησιμοποιήσουμε αρκετές φορές το λήμμα 10.1.[11]

ΛΗΜΜΑ 10.1. *Αν* $\mu,\nu>-1$, *τότε υπάρχουν δύο αριθμοί* $c_1,c_2>0$, *οι οποίοι εξαρτώνται μόνο από τους* μ,ν, *ώστε να ισχύει*

$$c_1 n^{\mu-\nu}\le\frac{(\mu+1)(\mu+2)\cdots(\mu+n)}{(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+n)}\le c_2 n^{\mu-\nu} \qquad \textit{για κάθε } n\in\mathbb{N}.$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας τη γνωστή ανισότητα $1+x\le e^x$, γράφουμε

$$\begin{aligned}\frac{(\mu+1)(\mu+2)\cdots(\mu+n)}{(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+n)}&=(1+\tfrac{\mu-\nu}{\nu+1})(1+\tfrac{\mu-\nu}{\nu+2})\cdots(1+\tfrac{\mu-\nu}{\nu+n})\\&\le e^{\frac{\mu-\nu}{\nu+1}+\frac{\mu-\nu}{\nu+2}+\cdots+\frac{\mu-\nu}{\nu+n}}=e^{(\mu-\nu)(\frac{1}{\nu+1}+\frac{1}{\nu+2}+\cdots+\frac{1}{\nu+n})}.\end{aligned} \tag{10.8}$$

Τώρα, αν $\nu\le\mu$, από την (10.8) συνεπάγεται

$$\frac{(\mu+1)(\mu+2)\cdots(\mu+n)}{(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+n)}\le e^{(\mu-\nu)(\frac{1}{\nu+1}+\int_1^n\frac{1}{\nu+x}\,dx)}=e^{\frac{\mu-\nu}{\nu+1}}(\tfrac{\nu+n}{\nu+1})^{\mu-\nu}$$

και, επειδή $\nu+n\le(\nu+2)n$, συνεπάγεται

$$\frac{(\mu+1)(\mu+2)\cdots(\mu+n)}{(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+n)}\le e^{\frac{\mu-\nu}{\nu+1}}(\tfrac{\nu+2}{\nu+1})^{\mu-\nu}n^{\mu-\nu}. \tag{10.9}$$

Αν $\mu\le\nu$, πάλι από την (10.8) συνεπάγεται

$$\frac{(\mu+1)(\mu+2)\cdots(\mu+n)}{(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+n)}\le e^{(\mu-\nu)\int_1^{n+1}\frac{1}{\nu+x}\,dx}=(\tfrac{\nu+n+1}{\nu+1})^{\mu-\nu}$$

και, επειδή $\nu+n+1\ge n$, συνεπάγεται

$$\frac{(\mu+1)(\mu+2)\cdots(\mu+n)}{(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+n)}\le\frac{1}{(\nu+1)^{\mu-\nu}}n^{\mu-\nu}. \tag{10.10}$$

Από τις (10.9) και (10.10) βλέπουμε ότι σε κάθε περίπτωση ισχύει $\frac{(\mu+1)(\mu+2)\cdots(\mu+n)}{(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+n)}\le c_2 n^{\mu-\nu}$, όπου c_2 είναι ο αριθμός $e^{\frac{\mu-\nu}{\nu+1}}(\frac{\nu+2}{\nu+1})^{\mu-\nu}$ ή ο αριθμός $\frac{1}{(\nu+1)^{\mu-\nu}}$ ανάλογα με το αν $-1<\nu\le\mu$ ή $-1<\mu\le\nu$, αντιστοίχως. Παρατηρήστε ότι ο c_2 που βρήκαμε εξαρτάται μόνο από τους μ,ν και όχι από τον n.
Αποδείχτηκε, λοιπόν, η δεξιά ανισότητα. Η αριστερή ανισότητα είναι ακριβώς ίδια με τη δεξιά, αρκεί να εναλλάξουμε τους ρόλους των μ,ν και να επιλέξουμε $c_1=\frac{1}{c_2}$. □

[11] Η τεχνική στην απόδειξή του υπάρχει στο κριτήριο ολοκληρώματος για σειρές και στις ασκήσεις 6.4.11 και 7.3.20. Δείτε, επίσης, την άσκηση 8.3.9, όπου υπάρχει μια ειδική περίπτωση του λήμματος και αναπτύσσεται η ίδια τεχνική απόδειξης που θα χρησιμοποιήσουμε για το λήμμα.

Επιστρέφουμε στη μελέτη της σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$ για $x=\pm 1$.
(i) Αν $x=1$, η δυναμοσειρά γράφεται $\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{n}$ και έχουμε τις παρακάτω δύο περιπτώσεις.
(i_a) Αν $\alpha<0$, τότε ισχύει $\binom{\alpha}{n}=(-1)^n\frac{|\alpha|(|\alpha|+1)\cdots(|\alpha|+n-1)}{n!}$ για κάθε n και έχουμε δύο υποπεριπτώσεις.
Αν $\alpha\leq -1$, τότε ισχύει $|\binom{\alpha}{n}|\geq 1$ για κάθε n, οπότε η σειρά αποκλίνει.
Αν $-1<\alpha<0$, τότε ο $\frac{|\alpha|(|\alpha|+1)\cdots(|\alpha|+n-1)}{n!}$ φθίνει καθώς ο n αυξάνει και, από το λήμμα 10.1, ισχύει $\frac{|\alpha|(|\alpha|+1)\cdots(|\alpha|+n-1)}{n!}\leq c_2\frac{1}{n^{1-|\alpha|}}$ για κάθε n, οπότε $\frac{|\alpha|(|\alpha|+1)\cdots(|\alpha|+n-1)}{n!}\to 0$. Άρα, η σειρά συγκλίνει. Παρεμπιπτόντως, από το λήμμα 10.1, ισχύει $|\binom{\alpha}{n}|=\frac{|\alpha|(|\alpha|+1)\cdots(|\alpha|+n-1)}{n!}\geq c_1\frac{1}{n^{1-|\alpha|}}$ για κάθε n, οπότε η σειρά δεν συγκλίνει απολύτως.
(i_b) Αν $\alpha\geq 0$, επειδή ο α δεν είναι μη-αρνητικός ακέραιος, ισχύει $m<\alpha<m+1$, όπου ο $m=[\alpha]$ είναι μη-αρνητικός ακέραιος. Άρα για $n\geq m+2$, πάλι από το λήμμα 10.1, ισχύει

$$|\tbinom{\alpha}{n}|=\frac{\alpha\cdots(\alpha-m)(m+1-\alpha)\cdots(n-1-\alpha)}{n!}=\frac{\alpha\cdots(\alpha-m)}{1\cdots(m+1)}\frac{(m+1-\alpha)\cdots(n-1-\alpha)}{(m+2)\cdots n}\leq c_2\frac{\alpha\cdots(\alpha-m)}{1\cdots(m+1)}\frac{1}{n^{1+\alpha}}.$$

Άρα η σειρά συγκλίνει απολύτως.
Συνοψίζουμε: ο 1 ανήκει στο διάστημα σύγκλισης I, αν $\alpha>-1$, και δεν ανήκει στο I, αν $\alpha\leq -1$.
(ii) Αν $x=-1$, η δυναμοσειρά γράφεται $\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{n}(-1)^n$ και έχουμε πάλι δύο περιπτώσεις.
(ii_a) Αν $\alpha<0$, τότε, από το λήμμα 10.1, ισχύει $\binom{\alpha}{n}(-1)^n=\frac{|\alpha|(|\alpha|+1)\cdots(|\alpha|+n-1)}{n!}\geq c_1\frac{1}{n^{1-|\alpha|}}$ για κάθε n, οπότε η σειρά αποκλίνει.
(ii_b) Αν $\alpha\geq 0$, ισχύει $m<\alpha<m+1$, όπου $m=[\alpha]$ είναι μη-αρνητικός ακέραιος. Για κάθε $n\geq m+1$, από το λήμμα 10.1, ισχύει

$$|\tbinom{\alpha}{n}(-1)^n|=\frac{\alpha\cdots(\alpha-m)(m+1-\alpha)\cdots(n-1-\alpha)}{n!}=\frac{\alpha\cdots(\alpha-m)}{1\cdots(m+1)}\frac{(m+1-\alpha)\cdots(n-1-\alpha)}{(m+2)\cdots n}\leq c_2\frac{\alpha\cdots(\alpha-m)}{1\cdots(m+1)}\frac{1}{n^{1+\alpha}},$$

οπότε η σειρά συγκλίνει απολύτως.
Συνοψίζουμε: ο -1 ανήκει στο διάστημα σύγκλισης I, αν $\alpha\geq 0$, και δεν ανήκει στο I, αν $\alpha<0$.
Τώρα έστω $s(x)$ η συνάρτηση που ορίζεται από τη δυναμοσειρά στο διάστημα σύγκλισης I. Η $s(x)$ είναι συνεχής στο I και θα βρούμε τον τύπο της. Θεωρούμε και τη δυναμοσειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty}n\tbinom{\alpha}{n}x^{n-1}=\alpha\sum_{n=0}^{+\infty}\tbinom{\alpha-1}{n}x^n$$

και εφαρμόζουμε το θεώρημα 10.10. Η νέα δυναμοσειρά έχει διάστημα σύγκλισης τουλάχιστον το $(-1,1)$, η $s(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ και ισχύει

$$s'(x)=\alpha\sum_{n=0}^{+\infty}\tbinom{\alpha-1}{n}x^n$$

για κάθε $x\in(-1,1)$. Με λίγες πράξεις, συνεπάγεται

$$(1+x)s'(x)=\alpha s(x)$$

για κάθε $x\in(-1,1)$. Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$f(x)=(1+x)^{-\alpha}s(x)$$

στο διάστημα $(-1,1)$ και έχουμε ότι

$$f'(x)=-\alpha(1+x)^{-\alpha-1}s(x)+(1+x)^{-\alpha}s'(x)=0$$

για κάθε $x\in(-1,1)$. Άρα η $f(x)$ είναι σταθερή στο διάστημα $(-1,1)$ και, επομένως, ισχύει $(1+x)^{-\alpha}s(x)=(1+0)^{-\alpha}s(0)=1$. Άρα ισχύει $s(x)=(1+x)^{\alpha}$ για κάθε $x\in(-1,1)$.
Το διάστημα I ενδέχεται να περιέχει και έναν ή και τους δύο από τους ± 1. Αν $\alpha>-1$, τότε $1\in I$ και, επειδή η $s(x)$ είναι συνεχής στο I, συνεπάγεται

$$s(1)=\lim_{x\to 1-}s(x)=\lim_{x\to 1-}(1+x)^{\alpha}=2^{\alpha}.$$

Αν $\alpha \geq 0$ και ο α δεν είναι μη-αρνητικός ακέραιος, τότε $-1 \in I$ και, για τον ίδιο λόγο, συνεπάγεται

$$s(-1) = \lim_{x\to-1+} s(x) = \lim_{x\to-1+} (1+x)^\alpha = 0.$$

Συμπέρασμα: ισχύει

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \tag{10.11}$$

(i) για κάθε $x \in (-1,1)$, αν $\alpha \leq -1$, (ii) για κάθε $x \in (-1,1]$, αν $-1 < \alpha < 0$, και (iii) για κάθε $x \in [-1,1]$, αν $\alpha \geq 0$ και ο α δεν είναι μη-αρνητικός ακέραιος.
Η σχέση (10.11) ονομάζεται **γενικός διωνυμικός τύπος του Newton**.
Αξίζει να ξεχωρίσουμε δύο ειδικές περιπτώσεις:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)} \frac{x^n}{2n-1} \qquad \text{για κάθε } x \in [-1,1].$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n} \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)} x^n \qquad \text{για κάθε } x \in (-1,1].$$

Ασκήσεις.

10.2.1. Στην άσκηση 5.6.10 αποδείξτε ότι $x_n \to +\infty$.

10.2.2. Αποδείξτε ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=0}^{+\infty}(1-x)x^n$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση κατά σημείο, αλλά όχι ομοιόμορφα στο $[0,1]$. Ποιά είναι αυτή η συνάρτηση;
Ποιά είναι τα αντίστοιχα συμπεράσματα για τις $\sum_{n=0}^{+\infty}(1-x)^2x^n$, $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(1-x)x^n$ και $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n(1-x^n)$ στο $[0,1]$;

10.2.3. Βρείτε συνοπτικούς τύπους για τις δυναμοσειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2x^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} n^3x^n$.

10.2.4. Βρείτε τα διαστήματα σύγκλισης των παρακάτω δυναμοσειρών. Μην παραβλέψετε τα άκρα των διαστημάτων σύγκλισης. $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^nx^n$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}x^n$, $\sum_{n=0}^{+\infty} n!x^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(2^n + \frac{3^n}{n}\right)x^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}x^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+1}}x^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}x^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n}x^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}x^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}x^{2n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}x^{2n-1}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n+3^n}x^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n+3}x^{3n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^{n^2}}{\sqrt{n}}x^{n^2}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}}x^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty}(\sin\frac{a}{n})x^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin an}{n}x^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_nx^n$ με $a_n = \begin{cases} 1/n, & \text{αν } n \text{ άρτιος} \\ 2^n/n, & \text{αν } n \text{ περιττός} \end{cases}$

10.2.5. Τί συμπεραίνετε για την ακτίνα σύγκλισης της $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ αν η ακολουθία (a_n) είναι φραγμένη; Τί συμπεραίνεται αν η $(\frac{1}{a_n})$ είναι φραγμένη;
Αν η $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ αποκλίνει και η ακολουθία (a_n) είναι φραγμένη, αποδείξτε ότι η ακτίνα σύγκλισης της $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ είναι 1.
Αν η $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ συγκλίνει υπό συνθήκη, αποδείξτε ότι η ακτίνα σύγκλισης της $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ είναι 1.

10.2.6. Έστω ότι η (a_n) είναι φθίνουσα, ότι $a_0 > 0$ και ότι ισχύει $a_n \geq 0$ για κάθε n.
Αποδείξτε ότι η ακτίνα σύγκλισης της $\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n$ είναι ≥ 1.
Αποδείξτε ότι για κάθε $x \in (-1,1)$ ισχύει $\left|a_0 - (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n\right| < a_0$. Αποδείξτε ότι ισχύει $\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n \neq 0$ για κάθε $x \in (-1,1)$.

10.2.7. [α] Έστω $R > 0$ η ακτίνα σύγκλισης της $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ και $s(x)$ η συνάρτηση που ορίζεται από τη δυναμοσειρά στο διάστημα $(\xi - R, \xi + R)$. Αποδείξτε ότι

$$s^{(m)}(x) = m!\sum_{n=m}^{+\infty} \binom{n}{m} a_n(x-\xi)^{n-m} \qquad \text{για κάθε } x \in (\xi - R, \xi + R),\ m \in \mathbb{Z},\ m \geq 0$$

και

$$s^{(m)}(\xi) = m!a_m \qquad \text{για κάθε } m \in \mathbb{Z},\ m \geq 0.$$

[β] Έστω $R_1 > 0$ η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,1}(x-\xi)^n$ και $s_1(x)$ η συνάρτηση που ορίζεται από τη δυναμοσειρά στο διάστημα $(\xi - R_1, \xi + R_1)$. Έστω, επίσης, $R_2 > 0$ η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,2}(x-\xi)^n$ και $s_2(x)$ η συνάρτηση που ορίζεται από τη δυναμοσειρά στο διάστημα $(\xi - R_2, \xi + R_2)$. Αν υποθέσουμε ότι οι συναρτήσεις $s_1(x)$ και $s_2(x)$ ταυτίζονται σε ένα διάστημα $(\xi - \delta, \xi + \delta)$ με $\delta > 0$, αποδείξτε ότι οι δύο δυναμοσειρές ταυτίζονται, δηλαδή ότι ισχύει $a_{n,1} = a_{n,2}$ για κάθε n.

10.2.8. Έστω $R > 0$ και έστω ότι ισχύει $s(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ για $x \in (-R, R)$.
Αποδείξτε ότι η $s(x)$ είναι άρτια στο διάστημα $(-R, R)$ αν και μόνο αν ισχύει $a_n = 0$ για κάθε περιττό $n \in \mathbb{N}$.
Αποδείξτε ότι η $s(x)$ είναι περιττή στο διάστημα $(-R, R)$ αν και μόνο αν ισχύει $a_n = 0$ για κάθε άρτιο $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$.

10.2.9. Έστω ότι η ακτίνα σύγκλισης της $\sum_{n=0}^{+\infty} {a_n}'(x-\xi)^n$ είναι R', της $\sum_{n=0}^{+\infty} {a_n}''(x-\xi)^n$ είναι R'' και της $\sum_{n=0}^{+\infty} ({a_n}' + {a_n}'')(x-\xi)^n$ είναι R.
Αποδείξτε ότι, αν $R' \neq R''$, τότε $R = \min\{R', R''\}$ και, αν $R' = R''$, τότε $R \geq R' = R''$.
Βρείτε παράδειγμα ώστε να είναι $R' = R''$ και η ακτίνα σύγκλισης του αθροίσματος να είναι $R > R' = R''$.

10.2.10. [12] Έστω $R > 0$ και έστω ότι ισχύει $s(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ για $x \in (\xi - R, \xi + R)$. Υποθέστε ότι ο ξ είναι ρίζα της $s(x)$, δηλαδή $s(\xi) = 0$ ή, ισοδύναμα, $a_0 = 0$. Αποδείξτε ότι είτε ισχύει $s(x) = 0$ για κάθε $x \in (\xi - R, \xi + R)$ είτε υπάρχει r με $0 < r \leq R$ ώστε να ισχύει $s(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\xi - r, \xi + r)$ με $x \neq \xi$. Στην δεύτερη περίπτωση, πώς προσδιορίζεται η πολλαπλότητα της ρίζας ξ της $s(x)$ από τους συντελεστές της δυναμοσειράς;

10.2.11. Αναλόγως της τιμής του p, βρείτε το διάστημα σύγκλισης της $\sum_{n=1}^{+\infty} n^p x^n$ και, αν $s(x)$ είναι η συνάρτηση που ορίζεται από τη δυναμοσειρά στο διάστημα σύγκλισής της, βρείτε σε ποιο διάστημα είναι η s παραγωγίσιμη.

10.2.12. Προσδιορίστε τα διαστήματα σύγκλισης των $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{1\cdot 4\cdots(3n-2)} x^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)} x^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \big(\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}\big)^2 x^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \big(\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}\big)^3 x^n$.

10.2.13. [13] Βρείτε το διάστημα σύγκλισης της

$$1 + \frac{ab}{1\cdot c}x + \frac{a(a+1)b(b+1)}{1\cdot 2\cdot c(c+1)}x^2 + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot c(c+1)(c+2)}x^3 + \cdots$$

ανάλογα με τις τιμές των παραμέτρων a, b, c. Για τα άκρα του διαστήματος σύγκλισης χρησιμοποιήστε το λήμμα 10.1.

10.2.14. Αποδείξτε ότι ισχύει $\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1}$ για κάθε $x \in (-1, 1)$, γράφοντας το $\frac{1}{1+t^2}$ ως γεωμετρική σειρά. Κατόπιν, αποδείξτε ότι η σχέση αυτή ισχύει και για $x = \pm 1$.

10.2.15. Αποδείξτε ότι ισχύει $\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2^{k-1}(k-1)!(2k-1)^2}\, x^{2k-1}$ για $x \in (-1, 1)$.
Αποδείξτε ότι ισχύει

$$\arcsin x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2^{k-1}(k-1)!(2k-1)^2}\, x^{2k-1} \qquad \text{για} \quad -1 \leq x \leq 1.$$

10.2.16. Χρησιμοποιώντας τον γενικό διωνυμικό τύπο του Newton με $a = -\frac{1}{2}$ και x^2 στη θέση του x, αποδείξτε ότι ισχύει

$$\operatorname{arcsinh} x = \log\big(x + \sqrt{1+x^2}\big) = \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2^{k-1}(k-1)!(2k-1)^2}\, x^{2k-1} \qquad \text{για} \quad -1 \leq x \leq 1.$$

[12] Δείτε τις ασκήσεις 5.2.8, 5.3.11 και κυρίως την 5.6.13.

[13] Η δυναμοσειρά αυτή ονομάζεται **υπεργεωμετρική σειρά** και η συνάρτηση που ορίζεται από αυτήν στο διάστημα σύγκλισής της ονομάζεται **υπεργεωμετρική συνάρτηση** και συμβολίζεται $F(a, b, c; x)$.

10.2.17. Έστω $k \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι οι $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ και $\sum_{n=0}^{+\infty} n^k a_n(x-\xi)^n$ έχουν την ίδια ακτίνα σύγκλισης.

10.2.18. Θεωρήστε την $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$. Αν $R > 0$ είναι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς, αποδείξτε ότι το σύνολο $P = \left\{r \geq 0 \,\middle|\, \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| r^n < +\infty\right\}$ είναι το διάστημα $[0, R]$ ή $[0, R)$.

10.2.19. Έστω ότι ισχύει $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = s(x)$ για κάθε $x \in (-1, 1)$. Αν ισχύει $b_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$, αποδείξτε ότι ισχύει $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = \frac{s(x)}{1-x}$ για κάθε $x \in (-1, 1)$.
Αποδείξτε τον γενικό διωνυμικό τύπο του Newton $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ όταν ο α είναι αρνητικός ακέραιος, χρησιμοποιώντας το προηγούμενο.

10.2.20. Έστω αριθμοί p, q, όχι και οι δύο ίσοι με 0, και δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Υποθέτουμε ότι ισχύει $a_{n+2} = p a_{n+1} + q a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$. Αποδείξτε ότι για κάθε x στο διάστημα σύγκλισής της η δυναμοσειρά έχει άθροισμα $\frac{a_0 + (a_1 - p a_0)x}{1 - px - qx^2}$ (μετά από απλοποίηση, αν αυτή είναι εφικτή) και υπολογίστε την ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς συναρτήσει των p, q.

10.2.21. [14] Αν οι $\sum_{m=0}^{+\infty} a_m$ και $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ συγκλίνουν και αν και το γινόμενο Cauchy $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k$ των δύο σειρών συγκλίνει, αποδείξτε ότι $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m \ \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$.

10.2.22. [15] Έστω ότι η $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ έχει ακτίνα σύγκλισης R ώστε $0 < R \leq +\infty$ και έστω $\eta \in (\xi - R, \xi + R)$, δηλαδή $|\eta - \xi| < R$. Αφού αποδείξετε ότι για κάθε $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 0$ η σειρά $\sum_{n=m}^{+\infty} \binom{n}{m} a_n (\eta - \xi)^{n-m}$ συγκλίνει απολύτως, θεωρήστε τους $b_m = \sum_{n=m}^{+\infty} \binom{n}{m} a_n (\eta - \xi)^{n-m}$ και αποδείξτε ότι
(i) η ακτίνα σύγκλισης της $\sum_{m=0}^{+\infty} b_m (x-\eta)^m$ είναι $\geq R - |\eta - \xi|$ και
(ii) για κάθε x με $|x - \eta| < R - |\eta - \xi|$ ισχύει:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n = \sum_{m=0}^{+\infty} b_m(x-\eta)^m.$$

10.2.23. [16] Έστω ότι η $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ έχει ακτίνα σύγκλισης R ώστε $0 < R \leq +\infty$ και έστω $a_0 \neq 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\sum_{m=0}^{+\infty} b_m(x-\xi)^m$ με ακτίνα σύγκλισης R^* ώστε $0 < R^* \leq +\infty$ και ώστε να ισχύει

$$\sum_{m=0}^{+\infty} b_m(x-\xi)^m \ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n = 1$$

για κάθε x με $|x - \xi| < \min\{R, R^*\}$.

10.2.24. [17] Αποδείξτε ότι, αν η $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$, τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $a_n = 0$ για κάθε $n \geq n_0$ (δηλαδή, η δυναμοσειρά “εκφυλίζεται” σε πολυώνυμο).

10.2.25. [α] Θεωρήστε τη δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$. Βρείτε το διάστημα σύγκλισής της και έναν συνοπτικό τύπο για τη συνάρτηση που ορίζεται από αυτήν, αφού πρώτα βρείτε έναν συνοπτικό τύπο για την δεύτερη παράγωγό της στο διάστημα σύγκλισης.
[β][18] Βρείτε το διάστημα σύγκλισης της $1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot (2n-1)}$ και αποδείξτε ότι η συνάρτηση $s(x)$ που ορίζεται από τη δυναμοσειρά είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης $y' - xy = 1$ στο διάστημα σύγκλισης. Βρείτε τη συνάρτηση $s(x)$.
[γ] Βρείτε το διάστημα σύγκλισης της $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$ και αποδείξτε ότι η συνάρτηση $s(x)$ που ορίζεται από τη δυναμοσειρά είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης $y'' + y' + y = e^x$ στο διάστημα σύγκλισης. Βρείτε τη συνάρτηση $s(x)$.

10.2.26. Έστω ότι ισχύει $s(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2^n}$ για κάθε $x \in (-1, 1)$. Αποδείξτε ότι υπάρχει M ώστε να ισχύει $|s'(x)| \leq \frac{M}{1-|x|}$ για κάθε $x \in (-1, 1)$.

[14] Ένα συμπλήρωμα του θεωρήματος 8.4 και του θεωρήματος του Mertens στην άσκηση 8.5.4.
[15] Εδώ περιγράφεται η διαδικασία **αλλαγής κέντρου δυναμοσειράς** μέσα στο διάστημα σύγκλισής της.
[16] Εδώ περιγράφουμε το **αντίστροφο δυναμοσειράς**.
[17] Δείτε την άσκηση 9.2.23.
[18] Δείτε τις ασκήσεις 7.2.14 και 7.2.15.

10.2.27. [19] Αποδείξτε το **θεώρημα του Tauber**: *Έστω ότι η ακτίνα σύγκλισης της* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *είναι* 1 *και* $s(x)$ *είναι η συνάρτηση που ορίζεται από τη δυναμοσειρά στο διάστημα* $(-1,1)$*. Αν* $na_n \to 0$ *και* $\lim_{x\to 1-} s(x) = p$*, τότε* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = p$*.*

10.2.28. Έστω ότι η ακτίνα σύγκλισης της $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ είναι 1 και $s(x)$ είναι η συνάρτηση που ορίζεται από τη δυναμοσειρά στο διάστημα $(-1,1)$. Αν ισχύει $a_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, αποδείξτε ότι η $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν το $\lim_{x\to 1-} s(x)$ υπάρχει και είναι αριθμός.

10.2.29. Έστω ότι η ακτίνα σύγκλισης της $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ είναι R. Αν $m \in \mathbb{N}$, βρείτε τις ακτίνες σύγκλισης των $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^m (x-x_0)^n$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^{mn}$ και $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{mn}(x-x_0)^n$.

10.3 Σειρές Taylor.

Στην προηγούμενη ενότητα είδαμε ότι κάθε δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ ορίζει μια συνάρτηση στο διάστημα σύγκλισής της, το οποίο είναι συμμετρικό ως προς τον ξ και περιέχει κανένα ή ένα ή και τα δύο άκρα του. Σ' αυτήν την ενότητα θα ακολουθήσουμε την αντίστροφη διαδικασία.

ΟΡΙΣΜΟΣ 10.6. *Έστω συνάρτηση* $f : A \to \mathbb{R}$ *και* $\xi \in A$*. Αν υπάρχει διάστημα* $I \subseteq A$ *με μέσο* ξ*, το οποίο δεν αποτελείται μόνο από τον* ξ*, και αν η* f *είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο* I*, τότε η δυναμοσειρά* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n$ *ονομάζεται* **σειρά Taylor** *της* f *στον* ξ*.*

ΟΡΙΣΜΟΣ 10.7. *Έστω συνάρτηση* $f : A \to \mathbb{R}$ *και* $\xi \in A$*. Αν υπάρχει διάστημα* $I \subseteq A$ *με μέσο* ξ*, το οποίο δεν αποτελείται μόνο από τον* ξ*, και ισχύει* $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n$ *για κάθε* $x \in I$*, τότε λέμε ότι η* f **αναπαρίσταται** *(στο* I*) από τη σειρά Taylor της στον* ξ*.*

Παράδειγμα 10.3.1. Η συνάρτηση $\frac{1}{1-x}$ έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$. Το διάστημα $(-1,1)$ με μέσο 0 περιέχεται στο σύνολο αυτό και η συνάρτηση είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$. Εύκολα βλέπουμε ότι είναι $\frac{d^n}{dx^n}\frac{1}{1-x}(0) = n!$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$. Επομένως, η $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ είναι η σειρά Taylor της $\frac{1}{1-x}$ στον 0. Όπως γνωρίζουμε, ισχύει $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ για κάθε $x \in (-1,1)$ και άρα η $\frac{1}{1-x}$ αναπαρίσταται στο $(-1,1)$ από τη σειρά Taylor της στο 0.

Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι εδώ υπάρχει κάποιο στοιχείο μοναδικότητας. Πράγματι, έστω ότι η συνάρτηση f αναπαρίσταται από μια δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ στο διάστημα I με μέσο ξ και το οποίο δεν αποτελείται μόνο από τον ξ, δηλαδή έστω ότι ισχύει $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ για κάθε $x \in I$. Τότε είναι άμεση συνέπεια της άσκησης 10.2.7 (κι αυτή είναι άμεση συνέπεια του θεωρήματος 10.10) ότι οι συντελεστές της δυναμοσειράς είναι οι αριθμοί $a_n = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$. Με άλλα λόγια, η μοναδική δυναμοσειρά η οποία είναι πιθανόν να αναπαριστά την f στο I με μέσο ξ είναι ακριβώς η σειρά Taylor της f στον ξ.

ΘΕΩΡΗΜΑ 10.11. *Έστω* $f : A \to \mathbb{R}$*,* $\xi \in A$*, διάστημα* $I \subseteq A$ *με μέσο* ξ*, το οποίο δεν αποτελείται μόνο από τον* ξ*, και έστω ότι η* f *είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο* I*. Τότε για κάθε* $x \in I$ *και κάθε* n *ισχύει*

$$f(x) = f(\xi) + \frac{f'(\xi)}{1!}(x-\xi) + \cdots + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n + R_{n,\xi}(x,\zeta) \text{ ή } R_{n,\xi}(x),$$

όπου $R_{n,\xi}(x,\zeta)$ *είναι το υπόλοιπο Schlömlich τάξης* n *και* $R_{n,\xi}(x)$ *είναι το ολοκληρωτικό υπόλοιπο τάξης* n*. Ειδικές περιπτώσεις του υπολοίπου Schlömlich τάξης* n *είναι το υπόλοιπο Lagrange και το υπόλοιπο Cauchy τάξης* n*.*
Αν για κάθε $x \in I$ *ισχύει* $\lim_{n\to+\infty} R_{n,\xi}(x,\zeta) = 0$ *ή* $\lim_{n\to+\infty} R_{n,\xi}(x) = 0$*, τότε η* f *αναπαρίσταται στο* I *από τη σειρά Taylor της στον* ξ*. Δηλαδή, ισχύει*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n \qquad \text{για κάθε } x \in I.$$

[19] Μια σημαντική άσκηση. Το θεώρημα του Tauber είναι η αρχή μιας ολόκληρης περιοχής της Αρμονικής Ανάλυσης.

Απόδειξη. Το πρώτο μέρος είναι απλή συνέπεια των θεωρημάτων 5.1 και 7.1. Το δεύτερο μέρος είναι προφανές: αν ισχύει $\lim_{n\to+\infty} R_{n,\xi}(x,\zeta)\to 0$ για κάθε $x\in I$, τότε ισχύει

$$\lim_{n\to+\infty}\big(f(\xi)+\tfrac{f'(\xi)}{1!}(x-\xi)+\cdots+\tfrac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n\big)=f(x)$$

ή, ισοδύναμα, $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n=f(x)$ για κάθε $x\in I$. □

10.3.1 Τα βασικά παραδείγματα.

Τώρα θα δούμε αρκετά παραδείγματα σειρών Taylor γνωστών συναρτήσεων. Μελετάμε τα ίδια παραδείγματα που είδαμε στην υποενότητα 10.2.1, μόνο που εδώ ακολουθούμε την αντίστροφη διαδικασία.

Πρέπει, πάντως, να τονιστεί ότι *υπάρχουν συναρτήσεις οι οποίες, σε συγκεκριμένα σημεία, δεν αναπαρίστανται από τη σειρά Taylor τους.*[20]

Παράδειγμα 10.3.2. Έστω $P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m$ πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού το πολύ m και οποιοσδήποτε ξ.
Για κάθε x και κάθε $n\geq m$ ισχύει $P^{(n+1)}(x)=0$. Άρα το αντίστοιχο υπόλοιπο Lagrange είναι $R_{n,\xi}(x,\zeta)=\frac{P^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}(x-\xi)^{n+1}=0$, οπότε $\lim_{n\to+\infty}R_{n,\xi}(x,\zeta)=0$. Άρα η σειρά Taylor της P στον ξ είναι η

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\tfrac{P^{(n)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n=P(\xi)+\tfrac{P'(\xi)}{1!}(x-\xi)+\cdots+\tfrac{P^{(m)}(\xi)}{m!}(x-\xi)^m$$

και ισχύει

$$P(x)=P(\xi)+\tfrac{P'(\xi)}{1!}(x-\xi)+\cdots+\tfrac{P^{(m)}(\xi)}{m!}(x-\xi)^m\qquad\text{για κάθε }\ x.$$

Αυτό είναι το λεγόμενο *ανάπτυγμα πολυωνύμου σε δυνάμεις του* $x-\xi$. Φυσικά, στην περίπτωση $\xi=0$, το ανάπτυγμα σε δυνάμεις του x είναι $P(x)=P(0)+\frac{P'(0)}{1!}x+\cdots+\frac{P^{(m)}(0)}{m!}x^m$.

Παράδειγμα 10.3.3. Η e^x είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και είναι $\frac{d^ne^x}{dx^n}=e^x$ για κάθε n. Ειδικότερα, είναι $\frac{d^ne^x}{dx^n}(0)=1$ για κάθε n, οπότε η σειρά Taylor της e^x στον 0 είναι η $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}x^n$.
Το υπόλοιπο Lagrange τάξης n της e^x στον 0 είναι

$$R_{n,0}(x,\zeta)=\tfrac{e^\zeta}{(n+1)!}x^{n+1}\qquad\text{όπου }\ \zeta\in[0,x]\ \text{ ή }\ \zeta\in[x,0].$$

Αν $x\geq 0$, τότε

$$|R_{n,0}(x,\zeta)|=\tfrac{e^\zeta}{(n+1)!}|x|^{n+1}\leq\tfrac{e^x}{(n+1)!}|x|^{n+1}\to 0$$

και, αν $x\leq 0$, τότε

$$|R_{n,0}(x;\zeta)|=\tfrac{e^\zeta}{(n+1)!}|x|^{n+1}\leq\tfrac{1}{(n+1)!}|x|^{n+1}\to 0.$$

Τα δύο τελευταία όρια βασίζονται στο όριο $\frac{a^n}{n!}\to 0$ του παραδείγματος 2.3.25.
Άρα η e^x αναπαρίσταται στο $(-\infty,+\infty)$ από τη σειρά Taylor της στον 0. Δηλαδή, ισχύει

$$e^x=\sum_{n=0}^{+\infty}\tfrac{1}{n!}x^n\qquad\text{για κάθε }\ x.$$

Παράδειγμα 10.3.4. Η $\cos x$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και είναι $\frac{d^n\cos x}{dx^n}=\pm\cos x$ ή $\pm\sin x$ για κάθε n. Ειδικότερα, είναι $\frac{d^n\cos x}{dx^n}(0)=1$ ή 0 ή -1 ή 0 αν είναι, αντιστοίχως, $n=4k$ ή $4k+1$ ή $4k+2$ ή $4k+3$ για κάποιον $k\in\mathbb{Z}$, $k\geq 0$. Άρα η σειρά Taylor της $\cos x$ στον 0 είναι

[20] Μερικά τέτοια παραδείγματα υπάρχουν στις ασκήσεις 10.3.7 και 10.3.8.

η $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$.
Το υπόλοιπο Lagrange τάξης n της $\cos x$ στον 0 είναι

$$R_{n,0}(x,\zeta) = \tfrac{\pm\cos\zeta}{(n+1)!} x^{n+1} \text{ ή } \tfrac{\pm\sin\zeta}{(n+1)!} x^{n+1}, \qquad \text{όπου } \zeta \in [0,x] \text{ ή } \zeta \in [x,0].$$

Τότε

$$|R_{n,0}(x,\zeta)| \le \tfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0.$$

Επομένως, η $\cos x$ αναπαρίσταται στο $(-\infty,+\infty)$ από τη σειρά Taylor της στον 0. Δηλαδή, ισχύει

$$\cos x = \sum_{k=0}^{+\infty} \tfrac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \qquad \text{για κάθε } x.$$

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι η $\sin x$ αναπαρίσταται στο $(-\infty,+\infty)$ από τη σειρά Taylor της στον 0: ισχύει

$$\sin x = \sum_{k=1}^{+\infty} \tfrac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} x^{2k-1} \qquad \text{για κάθε } x.$$

Παράδειγμα 10.3.5. Η $\log(1+x)$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $(-1,+\infty)$ και είναι $\frac{d^n \log(1+x)}{dx^n} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$ για κάθε n. Άρα είναι $\frac{d^n \log(1+x)}{dx^n}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$ για κάθε n και, επομένως, η σειρά Taylor της $\log(1+x)$ στο διάστημα $(-1,1)$ ή στο $(-1,1]$ με μέσο 0 είναι η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$. Αποκλείουμε εξ αρχής τον -1 από το υποψήφιο διάστημα διότι η συνάρτηση δεν ορίζεται καν στον -1.
Το υπόλοιπο Lagrange στον 0 ειναι

$$R_{n,0}(x,\zeta) = \tfrac{(-1)^n n!}{(1+\zeta)^{n+1}(n+1)!} x^{n+1} = \tfrac{(-1)^n}{(1+\zeta)^{n+1}(n+1)} x^{n+1}, \qquad \text{όπου } \zeta \in [0,x] \text{ ή } \zeta \in [x,0].$$

Αν $0 < x \le 1$, τότε

$$|R_{n,0}(x,\zeta)| = \tfrac{x^{n+1}}{(1+\zeta)^{n+1}(n+1)} \le \tfrac{1}{n+1} \to 0.$$

Το υπόλοιπο Lagrange δεν δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα για $-1 < x \le 0$, οπότε μελετάμε το ολοκληρωτικό υπόλοιπο στον 0. Αυτό είναι

$$R_{n,0}(x) = \tfrac{1}{n!} \int_0^x \tfrac{(-1)^n n!}{(1+t)^{n+1}} (x-t)^n \, dt = (-1)^n \int_0^x \tfrac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}} \, dt.$$

Αν $-1 < x \le 0$, τότε

$$|R_{n,0}(x)| = \big| - \int_x^0 \tfrac{(t-x)^n}{(1+t)^{n+1}} \, dt \big| = \int_x^0 \tfrac{(t-x)^n}{(1+t)^{n+1}} \, dt.$$

Επειδή ισχύει $(\frac{t-x}{1+t})^n \le |x|^n$ για κάθε $t \in [x,0]$, είναι

$$|R_{n,0}(x)| \le |x|^n \int_x^0 \tfrac{1}{1+t} \, dt = |x|^n \log \tfrac{1}{1+x} \to 0.$$

Άρα η $\log(1+x)$ αναπαρίσταται στο $(-1,1]$. Δηλαδή, ισχύει

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \qquad \text{για κάθε } x \in (-1,1].$$

Προφανώς, η σχέση αυτή είναι ισοδύναμη με την

$$\log x = \sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{(-1)^{n-1}}{n} (x-1)^n \qquad \text{για κάθε } x \in (0,2]$$

την οποία έχουμε αποδείξει στην προηγούμενη ενότητα.
Τώρα θα αποδείξουμε ότι η $\log(1+x)$ αναπαρίσταται στο $(-1,1]$ από τη σειρά Taylor της στον 0 με έναν άλλο τρόπο, χωρίς να εφαρμόσουμε το θεώρημα 10.11. Αυτός ο τρόπος θα εφαρμοστεί σε ένα ακόμη παράδειγμα, όπου θα είναι δύσκολη η εφαρμογή του θεωρήματος 10.11.

Αρχίζουμε με τον γνωστό τύπο $\frac{1-(-t)^n}{1+t} = 1 + (-t) + \cdots + (-t)^{n-1}$, ο οποίος ισχύει για κάθε $t \neq -1$, και τόν γράφουμε

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + \cdots + (-1)^{n-1}t^{n-1} + (-1)^n \frac{t^n}{1+t}.$$

Επομένως,

$$\int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = \int_0^x 1\,dt - \int_0^x t\,dt + \cdots + (-1)^{n-1}\int_0^x t^{n-1}\,dt + (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,dt$$

για κάθε $x > -1$, οπότε

$$\log(1+x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,dt \tag{10.12}$$

για κάθε $x > -1$.
Αν $0 \leq x \leq 1$, τότε

$$\left|(-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,dt\right| = \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,dt \leq \int_0^x t^n\,dt = \frac{x^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \to 0.$$

Αν $-1 < x \leq 0$, τότε

$$\left|(-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,dt\right| = \int_x^0 \frac{|t|^n}{1+t}\,dt \leq \frac{1}{1+x}\int_x^0 |t|^n\,dt = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)(1+x)} \leq \frac{1}{(n+1)(1+x)} \to 0.$$

Άρα ισχύει $(-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,dt \to 0$, οπότε από την (10.12) συνεπάγεται

$$x - \tfrac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n \to \log(1+x)$$

για κάθε $x \in (-1,1]$. Συνεπάγεται

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n \qquad \text{για κάθε } \ x \in (-1,1].$$

Παράδειγμα 10.3.6. Θα δούμε ότι η σειρά Taylor της $\arctan x$ στον 0 είναι η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$ με διάστημα σύγκλισης το $[-1,1]$ και ότι η $\arctan x$ αναπαρίσταται στο $[-1,1]$ από τη σειρά Taylor της. Δηλαδή,

$$\arctan x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1} \qquad \text{για κάθε } \ x \in [-1,1]. \tag{10.13}$$

Η συνάρτηση $\arctan x$ έχει παράγωγο $\frac{1}{x^2+1}$ αλλά ο υπολογισμός των παραγώγων ανώτερης τάξης είναι άβολος και δεν είναι άνετη η εφαρμογή του θεωρήματος 10.11. Γι αυτό καταφεύγουμε σε ένα τέχνασμα παρόμοιο με αυτό που χρησιμοποιήσαμε στο τέλος του προηγούμενου παραδείγματος. Ισχύει $\frac{1-(-t^2)^n}{1+t^2} = 1 - t^2 + \cdots + (-1)^{n-1}t^{2n-2}$, οπότε

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + \cdots + (-1)^{n-1}t^{2n-2} + (-1)^n \frac{t^{2n}}{1+t^2}$$

για κάθε t. Επομένως,

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int_0^x 1\,dt - \int_0^x t^2\,dt + \cdots + (-1)^{n-1}\int_0^x t^{2n-2}\,dt + (-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2}\,dt.$$

Αυτό το γράφουμε

$$\arctan x = x - \tfrac{1}{3}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1} + (-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2}\,dt.$$

Αν $|x| \leq 1$, τότε

$$\left|(-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2}\,dt\right| = \int_0^{|x|} \frac{t^{2n}}{1+t^2}\,dt \leq \int_0^{|x|} t^{2n}\,dt = \frac{|x|^{2n+1}}{2n+1} \leq \frac{1}{2n+1} \to 0.$$

Άρα

$$x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1} \to \arctan x$$

και έτσι προκύπτει η (10.13).

Παράδειγμα 10.3.7. Η $(1+x)^\alpha$ έχει παραγώγους $\frac{d^n(1+x)^\alpha}{dx^n} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$ για κάθε n. Ειδικώτερα, στον 0 είναι $\frac{d^n(1+x)^\alpha}{dx^n}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)$ για κάθε n. Άρα η σειρά Taylor της $(1+x)^\alpha$ στον 0 είναι η $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$.
Αν ο α είναι μη-αρνητικός ακέραιος, τότε αφ' ενός η $(1+x)^\alpha$ είναι πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού α αφ' ετέρου η παραπάνω δυναμοσειρά γίνεται, όπως έχουμε ξαναπεί, πεπερασμένο άθροισμα $1 + \binom{\alpha}{1}x + \cdots + \binom{\alpha}{\alpha-1}x^{\alpha-1} + \binom{\alpha}{\alpha}x^\alpha$. Στην περίπτωση αυτή η ισότητα

$$(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \cdots + \binom{\alpha}{\alpha-1}x^{\alpha-1} + \binom{\alpha}{\alpha}x^\alpha, \qquad \text{αν } \alpha \in \mathbb{Z},\ \alpha \geq 0$$

δεν είναι παρά ο διωνυμικός τύπος του Newton και, επομένως, η $(1+x)^\alpha$ αναπαρίσταται στο $(-\infty, +\infty)$ από τη σειρά Taylor της στον 0.
Αν ο α δεν είναι μη-αρνητικός ακέραιος, θα αποδείξουμε ότι η $(1+x)^\alpha$ αναπαρίσταται στο $(-1,1)$ ή στο $(-1,1]$ ή στο $[-1,1]$ από τη σειρά Taylor της στον 0. Δηλαδή, θα αποδείξουμε ότι

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

(i) για κάθε $x \in (-1,1)$, αν $\alpha \leq -1$, (ii) για κάθε $x \in (-1,1]$, αν $-1 < \alpha < 0$, και (iii) για κάθε $x \in [-1,1]$, αν $\alpha \geq 0$ και ο α δεν είναι μη-αρνητικός ακέραιος.
Το υπόλοιπο Lagrange είναι

$$R_{n,0}(x,\zeta) = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)(1+\zeta)^{\alpha-n-1}}{(n+1)!} x^{n+1} = \binom{\alpha}{n+1}(1+\zeta)^{\alpha-n-1}x^{n+1} \ \text{ με } \zeta \in [0,x] \text{ ή } \zeta \in [x,0].$$

(i) Αν $x \in [0,1]$, τότε $x \leq 1 \leq 1+\zeta \leq 2$ και, επομένως,

$$|R_{n,0}(x,\zeta)| = \left|\binom{\alpha}{n+1}\right|(1+\zeta)^\alpha\left(\frac{x}{1+\zeta}\right)^{n+1}.$$

(i_a) Τώρα, αν $a > 0$, εφαρμόζοντας προσεκτικά το λήμμα 10.1, βρίσκουμε ότι για $n > [\alpha]$ είναι

$$|R_{n,0}(x,\zeta)| \leq c_2\binom{\alpha}{[\alpha]+1}(n-[\alpha])^{-\alpha-1}2^\alpha \to 0.$$

(i_b) Αν $-1 < \alpha < 0$, τότε, πάλι από το λήμμα 10.1,

$$|R_{n,0}(x,\zeta)| \leq c_2(n+1)^{-\alpha-1} \to 0.$$

(i_c) Αν $x \in [0,1)$ και $\alpha \leq -1$, τότε

$$|R_{n,0}(x,\zeta)| \leq \left|\binom{\alpha}{n+1}\right| x^{n+1} \leq c_2(n+1)^{-\alpha-1}x^{n+1} \to 0.$$

(ii) Αν $x \in (-1,0]$, το ολοκληρωτικό υπόλοιπο είναι

$$R_{n,0}(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}\int_0^x (1+t)^{\alpha-n-1}(x-t)^n\,dt,$$

οπότε

$$\begin{aligned}|R_{n,0}(x)| &= \left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}\right| \int_x^0 (1+t)^{\alpha-n-1}(t-x)^n\,dt \leq \left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}\right||x|^n \int_x^0 (1+t)^{\alpha-1}\,dt \\ &= \left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}\right||x|^n \frac{1-(1+x)^\alpha}{\alpha} = (n+1)\left|\binom{\alpha}{n+1}\right||x|^n \frac{1-(1+x)^\alpha}{\alpha}.\end{aligned}$$

(ii_a) Αν $\alpha > 0$ και $n > [\alpha]$, συνεπάγεται

$$|R_{n,0}(x)| \leq c_2(n+1)\binom{\alpha}{[\alpha]+1}(n-[\alpha])^{-\alpha-1}|x|^n\frac{1-(1+x)^\alpha}{\alpha} \to 0.$$

(ii_b) Αν $\alpha < 0$, τότε

$$|R_{n,0}(x)| \leq c_2(n+1)^{-\alpha}|x|^n\frac{(1+x)^\alpha-1}{|\alpha|} \to 0.$$

Συνοψίζουμε: σε κάθε περίπτωση εκτός μιας έχουμε αποδείξει ότι $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$.
Η μόνη περίπτωση που απομένει είναι όταν $x=-1$ και $\alpha>0$. Τότε, όμως, δεν μπορεί να εφαρμοστεί το θεώρημα 10.11, οπότε κάνουμε το εξής. Χρησιμοποιούμε τις εκτιμήσεις που ισχύουν όταν $x\in(-1,0]$ στην περίπτωση (ii_a) και γράφουμε

$$\left|(1+x)^\alpha - 1 - \binom{\alpha}{1}x - \cdots - \binom{\alpha}{n}x^n\right| = |R_{n,0}(x)| \leq c_2(n+1)\binom{\alpha}{[\alpha]+1}(n-[\alpha])^{-\alpha-1}|x|^n\frac{1-(1+x)^\alpha}{\alpha}.$$

Παίρνουμε όρια καθώς $x\to -1+$ και βρίσκουμε

$$\left|0 - 1 - \binom{\alpha}{1}(-1) - \cdots - \binom{\alpha}{n}(-1)^n\right| \leq c_2(n+1)\binom{\alpha}{[\alpha]+1}(n-[\alpha])^{-\alpha-1}\frac{1}{\alpha} \to 0$$

Άρα και στην περίπτωση αυτή ισχύει $\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{n}x^n = (1+x)^\alpha$.

Ασκήσεις.

10.3.1. Χρησιμοποιήστε γνωστές σειρές Taylor για να βρείτε συνοπτικούς τύπους των δυναμοσειρών $\sum_{n=1}^{+\infty}\big(1-(-2)^n\big)x^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n-1}x^{2n-1}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n}x^{2n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n-1}{n!}x^n$, $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^{2n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+1)^2}{n!}x^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)!}x^{2n}$, $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\log a)^n}{n!}x^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n-1}\big(\frac{x-1}{x+1}\big)^{2n-1}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\big(\frac{x-1}{x+1}\big)^{2n-1}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}x^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1\cdot4\cdot7\cdots(3n-2)}{3\cdot6\cdot9\cdots(3n)}x^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}$.

10.3.2. Χρησιμοποιώντας τις σειρές Taylor των $\sin x$ και $\cos x$ στον ξ, αποδείξτε τους τύπους

$$\sin x = \sin\xi\cos(x-\xi) + \cos\xi\sin(x-\xi), \qquad \cos x = \cos\xi\cos(x-\xi) - \sin\xi\sin(x-\xi),$$

οι οποίοι είναι ισοδύναμοι με τους τύπους για το ημίτονο και το συνημίτονο αθροίσματος γωνιών.

10.3.3. Βρείτε τις σειρές Taylor στον 0 των $\cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ και $\sinh x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$.

10.3.4. Βρείτε τους αρχικούς όρους των σειρών Taylor στον 0 των $\tan x$, $\frac{1}{\cos x}$, $\arcsin x$, $\arccos x$.

10.3.5. Βρείτε τις σειρές Taylor στον 0 των $\sin(x^3)$, $(\sin x)^3$, $\sin x\sin(3x)$, $(\sin x)^6+(\cos x)^6$, $\log\frac{1+x}{1-x}$, $\log(1+x+x^2)$, $\frac{1}{1-5x+6x^2}$, $\frac{e^x}{1-x}$, $x\arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)$, $x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$.

10.3.6. Υπολογίστε τα αθροίσματα $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n)^2-1}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)^2-1}$.

10.3.7. Η άσκηση 5.6.16 λέει ότι η $h(x) = \begin{cases} e^{-1/x}, & \text{αν } x>0 \\ 0, & \text{αν } x\leq 0\end{cases}$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ότι $h^{(n)}(0)=0$ για κάθε n. Αναπαριστά σε κάποιο διάστημα με μέσο τον 0 και που δεν αποτελείται μόνο από τον 0 η σειρά Taylor $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{h^{(n)}(0)}{n!}x^n$ στον 0 την h; Ποιό είναι το διάστημα σύγκλισης αυτής της δυναμοσειράς;
Ίδια ερώτηση για την $h(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{αν } x\neq 0 \\ 0, & \text{αν } x=0\end{cases}$

10.3.8. Αποδείξτε ότι η $f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty}e^{-k}\cos(k^2x)$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ότι η σειρά Taylor $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ συγκλίνει μόνο όταν $x=0$.

10.3.9. Έστω $f:I\to\mathbb{R}$ άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα I. Η f χαρακτηρίζεται **πραγματική-αναλυτική** στο I αν για κάθε $\xi\in I$ υπάρχει $r>0$ ώστε $(\xi-r,\xi+r)\subseteq I$ και ώστε να ισχύει $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n$ για κάθε $x\in(\xi-r,\xi+r)$. Δηλαδή, η f είναι πραγματική-αναλυτική στο I αν για κάθε $\xi\in I$ η f αναπαρίσταται σε κάποιο ανοικτό διάστημα που περιέχει τον ξ από τη σειρά Taylor της στον ξ.
Έστω $f:I\to\mathbb{R}$ άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα I. Αποδείξτε ότι η f είναι πραγματική-αναλυτική στο I αν και μόνο αν για κάθε $\xi\in I$ υπάρχει ανοικτό διάστημα $J\subseteq I$

ώστε $\xi \in J$ και αριθμοί $M \geq 0$, $\rho > 0$ ώστε να ισχύει $|f^{(n)}(x)| \leq M\frac{n!}{\rho^n}$ για κάθε $x \in J$ και κάθε $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$.

Αποδείξτε το **θεώρημα του Bernstein**: *Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα I και έστω ότι ισχύει $f^{(n)}(x) \geq 0$ για κάθε $x \in I$ και κάθε $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$. Τότε η f είναι πραγματική-αναλυτική στο I.*

Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα I και έστω ότι ισχύει $(-1)^n f^{(n)}(x) \geq 0$ για κάθε $x \in I$ και κάθε $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$. Αποδείξτε ότι η f είναι πραγματική-αναλυτική στο I.

Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις της άσκησης 10.3.7 είναι πραγματικές-αναλυτικές στο $(-\infty, 0)$ και στο $(0, +\infty)$ αλλά δεν είναι πραγματικές-αναλυτικές σε κανένα ανοικτό διάστημα το οποίο περιέχει τον 0. Τί γίνεται με τη συνάρτηση της άσκησης 10.3.8;

10.3.10. [α] Έστω αριθμοί μ και $\nu \neq 0$ και $k \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις $\frac{x-\mu}{((x-\mu)^2+\nu^2)^k}$ και $\frac{1}{((x-\mu)^2+\nu^2)^k}$ αναπαρίστανται σε κάποιο ανοικτό διάστημα που περιέχει τον 0 από τις σειρές Taylor τους στον 0 και βρείτε τις ακτίνες σύγκλισης αυτών των σειρών Taylor.

[β] Αποδείξτε ότι κάθε ρητή συνάρτηση αναπαρίσταται από τη σειρά Taylor της σε κάθε σημείο στο πεδίο ορισμού της και βρείτε την αντίστοιχη ακτίνα σύγκλισης.

10.3.11. Αν $x \leq -1$, αποδείξτε ότι $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} = -\infty$.

Αν $x > 1$, αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}$ δεν έχει άθροισμα.

10.3.12. Έστω ότι ο α δεν είναι μη-αρνητικός ακέραιος.

Αποδείξτε ότι $\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = +\infty$ αν (i) $\alpha < 0$ και $x \leq -1$ ή αν (ii) $\alpha > 0$, ο $[\alpha]$ είναι περιττός και $x < -1$.

Αποδείξτε ότι $\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = -\infty$ αν $\alpha > 0$, ο $[\alpha]$ είναι άρτιος και $x < -1$.

Αποδείξτε ότι η $\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$ δεν έχει άθροισμα αν (i) $x > 1$ ή αν (ii) $x = 1$ και $\alpha \leq -1$.

10.3.13. [α] Θεωρήστε τη συνάρτηση $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $\phi(x) = \min\{x - [x], [x] + 1 - x\}$. Δείτε ότι ο $\phi(x)$ είναι ίσος με την απόσταση του x από τον κοντινότερο προς αυτόν ακέραιο.

Αποδείξτε ότι ισχύει $\phi(x+1) = \phi(x)$ και $0 \leq \phi(x) \leq \frac{1}{2}$ για κάθε x.

Έστω τυχών $x \in [0, 1)$ και έστω $0.x_1x_2x_3\ldots$ το (μοναδικό) δεκαδικό ανάπτυγμα του x. Δηλαδή, ισχύει $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{10^n}$, κάθε x_n είναι ένας από τους ακέραιους $0, 1, \ldots 9$ και η ακολουθία (x_n) δεν είναι τελικά σταθερή 9.

Αποδείξτε ότι $\phi(10^n x) = \begin{cases} 0.x_{n+1}x_{n+2}\ldots, & \text{αν } 0 \leq 0.x_{n+1}x_{n+2}\ldots \leq \frac{1}{2} \\ 1 - 0.x_{n+1}x_{n+2}\ldots, & \text{αν } \frac{1}{2} \leq 0.x_{n+1}x_{n+2}\ldots < 1 \end{cases}$ για κάθε n.

Θεωρήστε την ακολουθία (h_m) με τύπο $h_m = \begin{cases} 10^{-m}, & \text{αν } x_m \neq 4 \text{ και } x_m \neq 9 \\ -10^{-m}, & \text{αν } x_m = 4 \text{ ή } x_m = 9 \end{cases}$

Αποδείξτε ότι $\phi(10^n(x+h_m)) - \phi(10^n x) = \begin{cases} \pm 10^{n-m}, & \text{αν } 1 \leq n \leq m-1 \\ 0, & \text{αν } m \leq n \end{cases}$

[β][21] Θεωρήστε τη σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\phi(10^n x)}{10^n}$.

Αποδείξτε ότι η σειρά αυτή συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ότι ισχύει $f(x+1) = f(x)$ για κάθε x.

Έστω τυχών $x \in [0, 1)$ και η αντίστοιχη ακολουθία (h_m). Αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{f(x+h_m)-f(x)}{h_m} = \sum_{n=1}^{m-1} \pm 1$, όπου καθένας από τους όρους αυτού του αθροίσματος ισούται με ± 1 (όχι αναγκαστικά όλοι οι όροι με το ίδιο πρόσημο).

Παρατηρήστε ότι κάθε δύο διαδοχικοί όροι της ακολουθίας $\left(\frac{f(x+h_m)-f(x)}{h_m}\right)$ διαφέρουν τουλάχιστον κατά 1 και άρα η ακολουθία αυτή δεν συγκλίνει.

[21] Εδώ έχουμε ένα παράδειγμα συνάρτησης η οποία είναι συνεχής σε κάθε x και παραγωγίσιμη σε κανέναν x.

Αποδείξτε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στον x.
Τέλος, αποδείξτε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη σε κανέναν $x \in \mathbb{R}$.

10.4 Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

10.4.1 Ορισμός μέσω δυναμοσειρών.

Στην υποενότητα αυτή θα δούμε έναν από τους "αναλυτικούς" ορισμούς των τριγωνομετρικών συναρτήσεων και τις αποδείξεις των βασικών ιδιοτήτων τους. Όπως είχαμε αναφέρει στο παράδειγμα 3.1.8, μέχρι τώρα βασιστήκαμε στον "γεωμετρικό" ορισμό των συναρτήσεων αυτών, ο οποίος δεν θεωρείται αποδεικτός από τη σκοπιά της Ανάλυσης, και θεωρήσαμε γνωστές τις ιδιότητές τους.

Ξεκινάμε με τις δυναμοσειρές

$$\textstyle\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!},$$

για τις οποίες γνωρίζουμε από το παράδειγμα 10.2.14 ότι έχουν ως διάστημα σύγκλισης το $\mathbb{R}$. Εκεί, "γνωρίζοντας" τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις, είχαμε αποδείξει ότι η συνάρτηση που ορίζεται από την πρώτη δυναμοσειρά είναι η $\cos x$ και η συνάρτηση που ορίζεται από τη δεύτερη δυναμοσειρά είναι η $\sin x$. Τώρα, όμως, δεχόμαστε ότι *δεν γνωρίζουμε* τις συναρτήσεις $\cos x$, $\sin x$ και *θα τις ορίσουμε*, χρησιμοποιώντας τις δυναμοσειρές και τις ιδιότητές τους.

ΟΡΙΣΜΟΣ 10.8. *Ορίζουμε τη συνάρτηση* $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *να είναι η συνάρτηση που ορίζεται από την πρώτη δυναμοσειρά και τη συνάρτηση* $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *να είναι η συνάρτηση που ορίζεται από τη δεύτερη δυναμοσειρά. Δηλαδή, ορίζουμε:*

$$\cos x = \textstyle\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad \sin x = \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} \qquad \text{για κάθε } \ x \in \mathbb{R}. \tag{10.14}$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 10.4. *Οι συναρτήσεις* $\cos x$ *και* $\sin x$ *είναι παραγωγίσιμες στο* $\mathbb{R}$ *και*

$$\tfrac{d\cos x}{dx} = -\sin x, \qquad \tfrac{d\sin x}{dx} = \cos x.$$

Απόδειξη. Από το θεώρημα 10.10 συνεπάγεται ότι οι $\cos x$, $\sin x$ είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και από τους τύπους (10.14) έχουμε

$$\cos' x = \textstyle\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k 2k\frac{x^{2k-1}}{(2k)!} = \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = -\sin x$$

και

$$\sin' x = \textstyle\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}(2k-1)\frac{x^{2k-2}}{(2k-1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cos x$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 10.5. *Η* $\cos x$ *είναι άρτια, η* $\sin x$ *είναι περιττή και ισχύει* $\cos 0 = 1$ *και* $\sin 0 = 0$.

Απόδειξη. Όλα είναι προφανή από τους τύπους (10.14). □

ΠΡΟΤΑΣΗ 10.6. [α] *Για κάθε* x, y *ισχύει*

$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y, \qquad \sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y. \tag{10.15}$$

[β] *Για κάθε* x *ισχύει*

$$(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1.$$

[γ] *Για κάθε* x *ισχύει*

$$|\sin x| \le 1, \qquad |\cos x| \le 1.$$

Απόδειξη. [α] [22] Για κάθε y, θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \cos(y - x)\cos x - \sin(y - x)\sin x,$$

οπότε είναι

$$f'(x) = \sin(y - x)\cos x - \cos(y - x)\sin x + \cos(y - x)\sin x - \sin(y - x)\cos x = 0$$

για κάθε x. Άρα η f είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$, οπότε ισχύει

$$\cos(y - x)\cos x - \sin(y - x)\sin x = \cos(y - 0)\cos 0 - \sin(y - 0)\sin 0 = \cos y.$$

Αφού αυτή η σχέση ισχύει για κάθε x, y, μετατρέπουμε το y σε $y + x$ και καταλήγουμε στην πρώτη ισότητα (10.15). Η δεύτερη ισότητα (10.15) αποδεικνύεται είτε με παρόμοιο τρόπο είτε παραγωγίζοντας την πρώτη ισότητα ως προς το x.

[β] Θέτουμε $y = -x$ στην πρώτη ισότητα (10.15) και χρησιμοποιούμε την πρόταση 10.5.

[γ] Προφανές από το [β]. ☐

Θα αποδείξουμε, τώρα, μερικές επιπλέον ιδιότητες των συναρτήσεων $\cos x$, $\sin x$ και, κυρίως, *θα ορίσουμε τον αριθμό π.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 10.7. *Υπάρχει ελάχιστη θετική λύση της εξίσωσης $\cos x = 0$.*

Απόδειξη. Είναι $\cos 0 = 1$. Επίσης, $\cos 2 = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{2^{2k}}{(2k)!}$, οπότε

$$\textstyle\sum_{m=0}^{k}(-1)^m \frac{2^{2m}}{(2m)!} \to \cos 2 \qquad \text{όταν } \ k \to +\infty.$$

Αν ο k είναι άρτιος ≥ 4, τότε

$$\textstyle\sum_{m=0}^{k}(-1)^m \frac{2^{2m}}{(2m)!} = 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - \left(\frac{2^6}{6!} - \frac{2^8}{8!}\right) - \cdots - \left(\frac{2^{2k-2}}{(2k-2)!} - \frac{2^{2k}}{(2k)!}\right) < 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} = -\frac{1}{3},$$

επειδή κάθε παρένθεση είναι θετική. Άρα $\cos 2 \leq -\frac{1}{3} < 0$.

Επειδή η $\cos x$ είναι συνεχής και $\cos 2 < 0 < \cos 0$, συνεπάγεται ότι υπάρχει $\xi \in (0, 2)$ ώστε $\cos\xi = 0$. Τέλος, βάσει του αποτελέσματος της άσκησης 4.2.10, υπάρχει ελάχιστη θετική λύση της εξίσωσης $\cos x = 0$. ☐

ΟΡΙΣΜΟΣ 10.9. *Το σύμβολο π δηλώνει το διπλάσιο της ελάχιστης θετικής λύσης της εξίσωσης $\cos x = 0$.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 10.8. [α] *Για κάθε x ισχύει*

$$\cos\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) = -\sin x, \quad \cos(x + \pi) = -\cos x, \quad \cos\left(x + \tfrac{3\pi}{2}\right) = \sin x, \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x. \tag{10.16}$$

Ειδικότερα, οι $\cos x$ και $\sin x$ είναι περιοδικές με περίοδο 2π.

[β] *Η $\cos x$ είναι γνησίως θετική στο $[0, \frac{\pi}{2})$, γνησίως αρνητική στο $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ και γνησίως θετική στο $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$. Επίσης, $\cos 0 = \cos(2\pi) = 1$, $\cos(\pi) = -1$ και $\cos(\frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{3\pi}{2}) = 0$.*

[γ] *Η $\sin x$ είναι γνησίως θετική στο $(0, \pi)$ και γνησίως αρνητική στο $(\pi, 2\pi)$. Επίσης, $\sin 0 = \sin\pi = \sin(2\pi) = 0$, $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ και $\sin(\frac{3\pi}{2}) = -1$.*

[δ] *Η $\cos x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, \pi]$ με αντίστοιχο σύνολο τιμών το $[-1, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[\pi, 2\pi]$ με αντίστοιχο σύνολο τιμών το $[-1, 1]$.*

[ε] *Η $\sin x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, \frac{\pi}{2}]$ με αντίστοιχο σύνολο τιμών το $[0, 1]$, γνησίως φθίνουσα στο $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ με αντίστοιχο σύνολο τιμών το $[-1, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ με αντίστοιχο σύνολο τιμών το $[-1, 0]$.*

[22] Οι σχέσεις αυτές μπορούν να αποδειχτούν χρησιμοποιώντας γινόμενα Cauchy σειρών, αλλά ο τρόπος αυτός είναι αρκετά περίπλοκος.

Απόδειξη. Η $\cos x$ δεν μηδενίζεται στο $[0, \frac{\pi}{2})$ και είναι συνεχής, οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[0, \frac{\pi}{2})$ και, επειδή $\cos 0 = 1$, συνεπάγεται

$$\cos\tfrac{\pi}{2} = 0 \qquad \text{και} \qquad \cos x > 0 \quad \text{για κάθε } x \in [0, \tfrac{\pi}{2}).$$

Η σχέση $\sin' x = \cos x > 0$ για κάθε $x \in [0, \frac{\pi}{2})$ συνεπάγεται ότι η $\sin x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, \frac{\pi}{2}]$. Ειδικώτερα, έχουμε

$$\sin 0 = 0 \qquad \text{και} \qquad \sin x > 0 \quad \text{για κάθε } x \in (0, \tfrac{\pi}{2}].$$

Από την $(\sin\frac{\pi}{2})^2 + (\cos\frac{\pi}{2})^2 = 1$ παίρνουμε $\sin\frac{\pi}{2} = \pm 1$ και, επειδή $\sin\frac{\pi}{2} > 0$, συνεπάγεται $\sin\frac{\pi}{2} = 1$. Επειδή η $\sin x$ είναι και συνεχής, συνεπάγεται ότι το σύνολο τιμών της στο $[0, \frac{\pi}{2}]$ είναι το $[\sin 0, \sin\frac{\pi}{2}] = [0, 1]$. Κατόπιν, η σχέση $\cos' x = -\sin x < 0$ για κάθε $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$ συνεπάγεται ότι η $\cos x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, \frac{\pi}{2}]$. Επειδή η $\cos x$ είναι και συνεχής, συνεπάγεται ότι το σύνολο τιμών της στο $[0, \frac{\pi}{2}]$ είναι το $[\cos\frac{\pi}{2}, \cos 0] = [0, 1]$.
Τώρα, από τις ισότητες (10.15) και από τις τιμές $\cos 0 = \sin\frac{\pi}{2} = 1$ και $\cos\frac{\pi}{2} = \sin 0 = 0$ βρίσκουμε τις τιμές των $\cos x$ και $\sin x$ στα σημεία π, $\frac{3\pi}{2}$ και 2π καθώς και τις σχέσεις (10.16). Από τις σχέσεις αυτές καθώς και από τη συμπεριφορά της $\cos x$ και της $\sin x$ στο $[0, \frac{\pi}{2}]$, διακρίνουμε τη συμπεριφορά της $\cos x$ και της $\sin x$ στα διαστήματα $[\frac{\pi}{2}, \pi]$, $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$ και $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$, δηλαδή συνολικά στο $[0, 2\pi]$. $\square$

ΠΡΟΤΑΣΗ 10.9. *Για κάθε a, b με $a^2 + b^2 = 1$ υπάρχει μοναδικός $x \in [0, 2\pi)$ ώστε $\cos x = a$ και $\sin x = b$.*

Απόδειξη. Κατ'αρχάς έστω $a, b \geq 0$ με $a^2 + b^2 = 1$. Προφανώς, συνεπάγεται $0 \leq a, b \leq 1$. Επειδή η $\cos x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, \frac{\pi}{2}]$ με σύνολο τιμών το $[0, 1]$, υπάρχει μοναδικός $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ώστε $\cos x = a$. Από την $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$ συνεπάγεται $\sin x = \pm b$ και, επειδή $\sin x \geq 0$, έχουμε $\sin x = b$. Δεν υπάρχει x στο $(\frac{\pi}{2}, 2\pi)$ ώστε να είναι $\cos x = a$ και $\sin x = b$, διότι για x στο $(\frac{\pi}{2}, 2\pi)$ ένας τουλάχιστον από τους $\cos x$ και $\sin x$ είναι αρνητικός.
Έχουμε άλλες τρεις περιπτώσεις: την $a \geq 0, b < 0$ την $a < 0, b \geq 0$ και την $a < 0, b < 0$. Σε κάθε περίπτωση η απόδειξη είναι παρόμοια με την απόδειξη στην πρώτη περίπτωση που εξετάσαμε. $\square$

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να αναφέρουμε το εξής. Στα κεφάλαια 4 και 5 αποδείχτηκε η συνέχεια και η παραγωγισιμότητα των τριγωνομετρικών συναρτήσεων με βάση τον γεωμετρικό ορισμό τους. Πιο συγκεκριμένα, χρησιμοποιήθηκαν οι ανισότητες (10.17), οι οποίες, σ' αυτό το πλαίσιο, αποδεικνύονται, φυσικά, με γεωμετρικό τρόπο. Από τη στιγμή, όμως, που η συνέχεια και η παραγωγισιμότητα των τριγωνομετρικών συναρτήσεων αποδεικνύονται με βάση τον αναλυτικό ορισμό τους (ως παραδείγματα δυναμοσειρών), οι ανισότητες αυτές πρέπει να αποδειχθούν με αναλυτικό τρόπο. Ιδού η απόδειξή τους.

ΠΡΟΤΑΣΗ 10.10. *Ισχύει*

$$|\sin x| \leq |x| \quad \textit{για κάθε } x \qquad \textit{και} \qquad |x| \leq |\tan x| \quad \textit{για } |x| < \tfrac{\pi}{2}. \tag{10.17}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = x \pm \sin x$, οι οποίες είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$. Είναι $f'(x) = 1 \pm \cos x \geq 0$ για κάθε x, οπότε οι f είναι αύξουσες. Επομένως, ισχύει $x \pm \sin x = f(x) \geq f(0) = 0$ για κάθε $x \geq 0$ και $x \pm \sin x = f(x) \leq f(0) = 0$ για κάθε $x \leq 0$. Άρα ισχύει $|\sin x| \leq |x|$ για κάθε x.
Κατόπιν θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = x\cos x - \sin x$ για $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. Ισχύει $g'(x) = -x\sin x \leq 0$ για κάθε $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, οπότε η g είναι φθίνουσα στο $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Άρα ισχύει $x\cos x - \sin x = g(x) \leq g(0) = 0$ για κάθε $x \in [0, \frac{\pi}{2})$ και $x\cos x - \sin x = g(x) \geq g(0) = 0$ για κάθε $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0]$. Άρα ισχύει $|x| \leq |\tan x|$ για κάθε $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. $\square$

Μέχρι στιγμής έχουμε όλες τις ιδιότητες των συναρτήσεων $\cos x$ και $\sin x$: τις "αλγεβρικές", τις ιδιότητες μονοτονίας και περιοδικότητας και τις ιδιότητες συνέχειας και παραγωγισιμότητας. Οι ιδιότητες των ολοκληρωμάτων τους είναι άμεσες συνέπειες των προηγουμένων. Οι συναρτήσεις $\tan x$ και $\cot x$ ορίζονται με τον γνωστό τρόπο από τις $\cos x$ και $\sin x$ και οι ιδιότητές τους είναι πορίσματα των ιδιοτήτων των $\cos x$ και $\sin x$. Το ίδιο ισχύει με τους ορισμούς και τις ιδιότητες των αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Όλα αυτά έχουν περιγραφεί πλήρως στα προηγούμενα κεφάλαια και δεν θα ασχοληθούμε περαιτέρω.

Είναι εύλογο να προτιμάμε τον "γεωμετρικό" ορισμό των τριγωνομετρικών συναρτήσεων λόγω της απλότητάς του. Επίσης, υπάρχουν και άλλοι, και μάλιστα "αναλυτικοί", ορισμοί των τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Έναν από αυτούς, μέσω ολοκληρώματος, θα δούμε με συνοπτικό τρόπο στην επόμενη υποενότητα. Γι αυτό θα αποδείξουμε ότι, ασχέτως του τρόπου τον οποίο επιλέγουμε για να ορίσουμε τις συναρτήσεις αυτές, *καταλήγουμε στις ίδιες συναρτήσεις*. Θα σκεφτούμε ότι, ασχέτως του τρόπου ορισμού των $\sin x$, $\cos x$, αποδεικνύεται ότι έχουν τις εξής βασικές ιδιότητες: $\cos' x = -\sin x$, $\sin' x = \cos x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 10.11. *Έστω δύο ζεύγη συναρτήσεων $f_1, g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $f_2, g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε:*
(i) ${f_1}' = -g_1$ και ${g_1}' = f_1$,
(ii) ${f_2}' = -g_2$ και ${g_2}' = f_2$ και
(iii) $f_1(0) = f_2(0)$ και $g_1(0) = g_2(0)$.
Τότε τα δύο ζεύγη είναι τα ίδια. Δηλαδή, $f_1 = f_2$ και $g_1 = g_2$.

Απόδειξη. Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$f(x) = ((f_1(x) - f_2(x))^2 + (g_1(x) - g_2(x))^2$$

και τότε ισχύει

$$f'(x) = 2(f_1(x) - f_2(x))(-g_1(x) + g_2(x)) + 2(g_1(x) - g_2(x))(f_1(x) - f_2(x)) = 0$$

για κάθε x. Άρα η f είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$, οπότε ισχύει

$$(f_1(x) - f_2(x))^2 + (g_1(x) - g_2(x))^2 = (f_1(0) - f_2(0))^2 + (g_1(0) - g_2(0))^2 = 0$$

για κάθε x. Άρα ισχύει $f_1(x) = f_2(x)$ και $g_1(x) = g_2(x)$ για κάθε x. □

10.4.2 Ορισμός μέσω ολοκληρώματος.

Τώρα θα δούμε πολύ συνοπτικά έναν εναλλακτικό "αναλυτικό" ορισμό των τριγωνομετρικών συναρτήσεων μέσω ολοκληρώματος. Ακολουθούμε την εξής πορεία: πρώτα ορίζουμε την συνάρτηση $\arctan y$, κατόπιν την αντίστροφή της, την $\tan x$, και, τέλος τις $\sin x$ και $\cos x$. Ειδικά προς το τέλος θα παραλείψουμε αρκετές λεπτομέρειες.

ΟΡΙΣΜΟΣ 10.10. *Ορίζουμε*

$$\arctan y = \int_0^y \tfrac{1}{1+s^2}\, ds \qquad \text{για κάθε } y.$$

Δηλαδή, ορίζουμε τη συνάρτηση $\arctan : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ως ένα από τα αόριστα ολοκληρώματα της $\frac{1}{1+y^2}$ στο $\mathbb{R}$. Η $\frac{1}{1+y^2}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε η $\arctan y$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει

$$\arctan' y = \tfrac{1}{1+y^2}\,.$$

Προφανώς, $\arctan 0 = 0$ και, επειδή η παράγωγος είναι θετική, η $\arctan y$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Είναι εύκολο να δούμε ότι η $\arctan y$ είναι περιττή στο $\mathbb{R}$. Πράγματι,

$$\arctan(-y) = \int_0^{-y} \tfrac{1}{1+s^2}\, ds = -\int_0^y \tfrac{1}{1+(-s)^2}\, ds = -\arctan y$$

για κάθε $y \in \mathbb{R}$.

Για κάθε $y \geq 1$ ισχύει

$$\arctan y = \int_0^y \tfrac{1}{1+s^2}\,ds = \int_0^1 \tfrac{1}{1+s^2}\,ds + \int_1^y \tfrac{1}{1+s^2}\,ds \leq \int_0^1 1\,ds + \int_1^y \tfrac{1}{s^2}\,ds = 1 + 1 - \tfrac{1}{y} \leq 2.$$

Άρα η $\arctan y$ είναι άνω φραγμένη στο $\mathbb{R}$ και, επομένως, το $\lim_{y\to+\infty} \arctan y$ υπάρχει και είναι αριθμός.

ΟΡΙΣΜΟΣ 10.11. *Ορίζουμε*

$$\pi = 2\lim_{y\to+\infty} \arctan y.$$

Επειδή η $\arctan y$ είναι περιττή, είναι

$$\lim_{y\to-\infty} \arctan y = \lim_{y\to+\infty} \arctan(-y) = -\lim_{y\to+\infty} \arctan y = -\tfrac{\pi}{2}\,.$$

Άρα το σύνολο τιμών της $\arctan y$ είναι το $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 10.12. *Άρα ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση, την οποία συμβολίζουμε*

$$\tan : (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$$

Η $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$. Συνεπάγεται ότι

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}+} \tan x = -\infty, \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} \tan x = +\infty.$$

Κατόπιν, έστω $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$. Τότε για κάθε $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ είναι $x - k\pi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, οπότε έχει οριστεί η τιμή $\tan(x-k\pi)$. Επομένως, μπορούμε να ορίσουμε $\tan x = \tan(x-k\pi)$. Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση $\tan x$ ορίζεται στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Καθώς ο x διατρέχει το $(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$, ο $x-k\pi$ διατρέχει το $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ και μπορούμε εύκολα να δούμε ότι όλες οι ιδιότητες της $\tan x$ στο $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ "μεταφέρονται" ως ιδιότητές της στο $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$. Για παράδειγμα, η $\tan x$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ με αντίστοιχο σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$:

$$\tan : (-\tfrac{\pi}{2} + k\pi, \tfrac{\pi}{2} + k\pi) \to \mathbb{R}$$

Επίσης, είναι $\lim_{x\to(-\frac{\pi}{2}+k\pi)+} \tan x = -\infty$ και $\lim_{x\to(\frac{\pi}{2}+k\pi)-} \tan x = +\infty$.

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι η $\tan x$ ορίζεται στην ένωση $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ ή, ισοδύναμα, στο σύνολο $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$ και είναι φανερό από τον ορισμό της ότι η $\tan x$ είναι περιοδική με περίοδο π.

Εφαρμόζοντας τον κανόνα της αντίστροφης συνάρτησης, υπολογίζουμε την παράγωγο της $\tan x$ στο $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Για κάθε $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ και τον αντίστοιχο $y = \tan x \in \mathbb{R}$ είναι

$$\tan' x = \tfrac{1}{\arctan' y} = \tfrac{1}{1/(1+y^2)} = 1 + y^2 = 1 + (\tan x)^2\,.$$

Λόγω περιοδικότητας, αυτό ισχύει στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Δηλαδή,

$$\tan' x = 1 + (\tan x)^2, \qquad \text{αν } \ x \neq \tfrac{\pi}{2} + k\pi \ \text{ για κάθε } \ k \in \mathbb{Z}.$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 10.13. *Τέλος, ορίζουμε τις συναρτήσεις* $\cos, \sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *με τύπους:*

$$\cos x = \begin{cases} (-1)^k \frac{1}{\sqrt{1+(\tan x)^2}}\,, & \text{αν } -\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ για κάποιον } k \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{αν } x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ για κάποιον } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\sin x = \begin{cases} (-1)^k \frac{\tan x}{\sqrt{1+(\tan x)^2}}\,, & \text{αν } -\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ για κάποιον } k \in \mathbb{Z} \\ (-1)^k\,, & \text{αν } x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ για κάποιον } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Είναι, τώρα, πολύ εύκολο να αποδειχθούν όλες οι ιδιότητες των $\cos x$, $\sin x$. Για παράδειγμα, αμέσως αποδεικνύεται ότι ισχύει $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$ για κάθε x, ότι οι $\cos x$, $\sin x$ είναι παραγωγίσιμες στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ και ότι ισχύει $\cos' x = -\sin x$ και $\sin' x = \cos x$ σε κάθε τέτοιο διάστημα. Επίσης, μέσω του ορισμού της παραγώγου, βλέπουμε ότι είναι παραγωγίσιμες και στα σημεία $\frac{\pi}{2} + k\pi$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ και ότι οι σχέσεις $\cos' x = -\sin x$ και $\sin' x = \cos x$ ισχύουν και στα σημεία αυτά και, επομένως, ότι ισχύουν σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$. Αφήνουμε στον φιλότιμο και εργατικό αναγνώστη τις λεπτομέρειες.

Ασκήσεις.

10.4.1. Αποδείξτε τις βασικές ιδιότητες των $\cos x$ και $\sin x$ οι οποίες αναφέρονται στην τελευταία παράγραφο αυτής της ενότητας, δηλαδή μετά από τον ορισμό των συναρτήσεων αυτών μέσω ολοκληρώματος.

10.4.2. Υπολογίστε με αναλυτικό τρόπο (δηλαδή, όχι γεωμετρικά) τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ και $\frac{\pi}{3}$.

10.4.3. Αποδείξτε ότι:

(i) $\cos y = \cos x$ αν και μόνο αν $y = x + k2\pi$ ή $y = -x + k2\pi$ για κάποιον $k \in \mathbb{Z}$.

(ii) $\sin y = \sin x$ αν και μόνο αν $y = x + k2\pi$ ή $y = \pi - x + k2\pi$ για κάποιον $k \in \mathbb{Z}$.

(iii) $\tan y = \tan x$ αν και μόνο αν $y = x + k\pi$ για κάποιον $k \in \mathbb{Z}$.

(iv) $\cot y = \cot x$ αν και μόνο αν $y = x + k\pi$ για κάποιον $k \in \mathbb{Z}$.

10.4.4. Αποδείξτε ότι ισχύει $|a\cos x + b\sin x| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$ για κάθε x.

10.4.5. Έστω οποιοιδήποτε a, b όχι και οι δύο ίσοι με 0. Αποδείξτε ότι υπάρχουν αριθμοί $p > 0$ και q ώστε να ισχύει $a\cos x + b\sin x = p\cos(x - q)$ για κάθε x.

Βασική βιβλιογραφία.

Apostol, T. (1974) *Mathematical Analysis, Ch 9.* Addison-Wesley.

Bartle, R. (1967) *The Elements of Real Analysis, Ch VII.* Wiley.

Bartle, R. & Sherbert, D. (2011) *Introduction to Real Analysis, Ch 8, 9.* Wiley.

Beardon, A. (1997) *Limits: a New Approach to Real Analysis, Ch 6, 8-10.* Springer.

Brand, L. (2006) *Advanced Calculus, Ch 10.* Dover.

Bromwich, T. (1991) *An Introduction to the Theory of Infinite Series, Ch VII-IX.* American Math. Society & Chelsea.

Buck, R. & Buck, E. (2003) *Advanced Calculus, Ch 6.* Waveland Press.

Courant, R. (1988) *Differential and Integral Calculus, Vol I, Ch VIII.* Wiley.

Courant, R. & John, F. (1989) *Introduction to Calculus and Analysis, Vol I, Ch 7.* Springer.

Davidson, K. & Donsig, A. (2010) *Real Analysis and Applications, Ch 8.* Springer.

Goldberg, R. (1976) *Methods of Real Analysis, Ch 9.* Wiley.

Goursat, E. (2006) *A Course in Mathematical Analysis, Vol I, Ch VIII-IX.* Dover.

Grauert, H. & Lieb, I. (1967) *Differential- und Integralrechnung, Band I, Kap IV-VII.* Springer.

Graves, L. (2009) *The Theory of Functions of Real Variables, Ch VII.* Dover.

Knopp, K. (1990) *Theory and Application of Infinite Series, Ch V-VI, XI.* Dover.

Knopp, K. (1956) *Infinite Sequences and Series, Ch IV, VI.* Dover.

Krantz, S. (2013) *Real Analysis and Foundations, Ch 9-10.* Chapman and Hall.

Landau, E. (2001) *Differential and Integral Calculus, Ch 13-16, 19, 27.* American Math. Society & Chelsea.

Lang, S. (1997) *Undergraduate Analysis, Ch IX.* Springer.

Nikolsky, S. (1977) *A Course of Mathematical Analysis, Vol 1, Ch 11.* Mir Publishers.

Osgood, W. (1897) *Introduction to Infinite Series, Ch II-V.* Harvard University.

Protter, M. (1998) *Basic Elements of Real Analysis, Ch 8.* Springer.

Pugh, C. (2015) *Real Mathematical Analysis, Ch 4.* Springer.

Rosenlicht, M. (1986) *Introduction to Analysis, Ch VII.* Dover.

Ross, K. (2013) *Elementary Analysis, Ch 4-5.* Springer.

Rudin, W. (1976) *Principles of Mathematical Analysis, Ch 7-8.* McGraw-Hill.

Smirnov, V. (1964) *A Course of Higher Mathematics, Vol 1, Ch IV.* Pergammon Press.

Spivak, M. (1994) *Calculus, Ch 24.* Cambridge Univ. Press.

Stoll, M. (2000) *Introduction to Real Analysis, Ch 8.* Pearson.

Titchmarsh, E. (1976) *The Theory of Functions, Ch I.* Oxford Univ. Press.

Whittaker, E. & Watson, G. (1996) *A Course of Modern Analysis, Ch III.* Cambridge Univ. Press.

Συμπληρωματική βιβλιογραφία.

Beals, R. (2004) *Analysis, an Introduction, Ch 5, 9.* Cambridge Univ. Press.

Brand, L. (2006) *Advanced Calculus, Ch 3.* Dover.

Goffman, C. (1966) *Introduction to Real Analysis, Ch 6, 8-9.* Harper and Row.

Goursat, E. (2006) *A Course in Mathematical Analysis, Vol I, Ch III.* Dover.

Hardy, G. (2008) *A Course of Pure Mathematics, Ch IX.* Cambridge Univ. Press.

Κεφάλαιο 11

Μετρικοί χώροι.

11.1 Μετρικοί χώροι. Παραδείγματα.

Παράδειγμα 11.1.1. Έστω $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$. Το καρτεσιανό γινόμενο $\mathbb{R}^d = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ με d παράγοντες είναι το σύνολο με στοιχεία όλες τις διατεταγμένες d-άδες αριθμών:

$$\mathbb{R}^d = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} = \big\{(x_1, \ldots, x_d) \,|\, x_1, \ldots, x_d \in \mathbb{R}\big\}.$$

Μέσω κατάλληλης επιλογής ορθογωνίων αξόνων, το $\mathbb{R}^2$ αναπαρίσταται γεωμετρικά με το σύνολο των σημείων ενός οποιουδήποτε επιπέδου και το $\mathbb{R}^3$ αναπαρίσταται γεωμετρικά με το σύνολο των σημείων του χώρου.
Αν $d = 1$, θεωρούμε $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$, οπότε το $\mathbb{R}^1$ αναπαρίσταται γεωμετρικά με το σύνολο των σημείων μιας οποιασδήποτε ευθείας.
Αν x, y είναι οποιαδήποτε στοιχεία του $\mathbb{R}$, η Ευκλείδεια απόστασή τους ως σημεία της ευθείας είναι ίση με την ποσότητα

$$|x - y|.$$

Αν $\mathrm{x} = (x_1, x_2)$, $\mathrm{y} = (y_1, y_2)$ είναι οποιαδήποτε στοιχεία του $\mathbb{R}^2$, η Ευκλείδεια απόστασή τους ως σημεία του επιπέδου είναι ίση με

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

Τέλος, αν $\mathrm{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathrm{y} = (y_1, y_2, y_3)$ είναι οποιαδήποτε στοιχεία του $\mathbb{R}^3$, η Ευκλείδεια απόστασή τους ως σημεία του χώρου είναι ίση με

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}.$$

Η Ευκλείδεια απόσταση των x, y είναι ίση με το Ευκλείδειο μήκος του ευθύγραμμου τμήματος $[\mathrm{x}, \mathrm{y}]$ που έχει άκρα τα σημεία αυτά, είτε αυτά είναι σημεία της ευθείας είτε είναι σημεία του επιπέδου είτε είναι σημεία του χώρου.
Υπάρχουν μερικές απλές ιδιότητες της Ευκλείδειας απόστασης. Πρώτον, η Ευκλείδεια απόσταση δύο σημείων είναι μη αρνητικός αριθμός. Δεύτερον, η Ευκλείδεια απόσταση δύο σημείων είναι ίση με 0 αν και μόνο αν τα δύο σημεία ταυτίζονται. Τρίτον, η Ευκλείδεια απόσταση δύο σημείων δε μεταβάλλεται αν αλλάξουμε τη σειρά τους. Αυτή η ιδιότητα ονομάζεται **συμμετρία** της Ευκλείδειας απόστασης. Τέλος, η Ευκλείδεια απόσταση δύο σημείων δεν είναι μεγαλύτερη από το άθροισμα των Ευκλείδειων αποστάσεών τους από οποιοδήποτε τρίτο σημείο. Αυτή η σχέση ονομάζεται **τριγωνική ανισότητα** της Ευκλείδειας απόστασης, διότι, με άλλα λόγια, εκφράζει το γεγονός ότι το Ευκλείδειο μήκος μιας πλευράς τριγώνου δεν είναι μεγαλύτερο από το άθροισμα των Ευκλείδειων μηκών των δύο άλλων πλευρών. Οι αποδείξεις αυτών των ιδιοτήτων στην ευθεία, στο επίπεδο και στον χώρο είναι ζήτημα απλών πράξεων. Θα αποφύγουμε τις λεπτομέρειες, διότι θα δούμε την απόδειξη στη γενική περίπτωση του συνόλου $\mathbb{R}^d$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 11.1. *Για κάθε* $\mathrm{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ *ορίζουμε την* **Ευκλείδεια νόρμα** *του* x *στον* $\mathbb{R}^d$ *με τον τύπο*
$$\|\mathrm{x}\|_2 = ({x_1}^2 + \cdots + {x_d}^2)^{1/2}.$$
Επίσης, για κάθε $\mathrm{x} = (x_1, \dots, x_d), \mathrm{y} = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$ *ορίζουμε το* **Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο** *των* x, y *στον* $\mathbb{R}^d$ *με τον τύπο*
$$\langle \mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_d y_d.$$

ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ ΤΟΥ CAUCHY. *Για κάθε* $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{R}^d$ *ισχύει*
$$|\langle \mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle| \leq \|\mathrm{x}\|_2 \|\mathrm{y}\|_2.$$

Απόδειξη. Αν $\mathrm{x} = (x_1, \dots, x_d)$ και $\mathrm{y} = (y_1, \dots, y_d)$, τότε για κάθε $t \in \mathbb{R}$ ισχύει
$$\begin{aligned} \|t\mathrm{x} + \mathrm{y}\|_2{}^2 &= (tx_1 + y_1)^2 + \cdots + (tx_d + y_d)^2 \\ &= t^2({x_1}^2 + \cdots + {x_d}^2) + 2t(x_1 y_1 + \cdots + x_d y_d) + ({y_1}^2 + \cdots + {y_d}^2) \\ &= t^2 \|\mathrm{x}\|_2{}^2 + 2t\langle \mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle + \|\mathrm{y}\|_2{}^2. \end{aligned} \tag{11.1}$$
Επομένως, ισχύει
$$t^2 \|\mathrm{x}\|_2{}^2 + 2t\langle \mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle + \|\mathrm{y}\|_2{}^2 \geq 0 \tag{11.2}$$
για κάθε $t \in \mathbb{R}$, οπότε η διακρίνουσα της παράστασης στο αριστερό μέρος της (11.2) είναι ≤ 0. Δηλαδή, είναι $4\langle \mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle^2 - 4\|\mathrm{x}\|_2{}^2 \|\mathrm{y}\|_2{}^2 \leq 0$ και, επομένως, $|\langle \mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle| \leq \|\mathrm{x}\|_2 \|\mathrm{y}\|_2$. □

ΤΡΙΓΩΝΙΚΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ. *Για κάθε* $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{R}^d$ *ισχύει*
$$\|\mathrm{x} + \mathrm{y}\|_2 \leq \|\mathrm{x}\|_2 + \|\mathrm{y}\|_2.$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε την (11.1) με $t = 1$ και έχουμε
$$\|\mathrm{x} + \mathrm{y}\|_2{}^2 = \|\mathrm{x}\|_2{}^2 + 2\langle \mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle + \|\mathrm{y}\|_2{}^2.$$
Από την ανισότητα του Cauchy συνεπάγεται
$$\|\mathrm{x} + \mathrm{y}\|_2{}^2 \leq \|\mathrm{x}\|_2{}^2 + 2\|\mathrm{x}\|_2 \|\mathrm{y}\|_2 + \|\mathrm{y}\|_2{}^2 = \big(\|\mathrm{x}\|_2 + \|\mathrm{y}\|_2\big)^2.$$
Άρα $\|\mathrm{x} + \mathrm{y}\|_2 \leq \|\mathrm{x}\|_2 + \|\mathrm{y}\|_2$. □

ΟΡΙΣΜΟΣ 11.2. *Ορίζουμε την* **Ευκλείδεια απόσταση** *ανάμεσα στα* $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{R}^d$ *με τον τύπο*
$$d_2(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \|\mathrm{x} - \mathrm{y}\|_2$$

Η $d_2(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \|\mathrm{x} - \mathrm{y}\|_2$ αποτελεί γενίκευση στις d διαστάσεις της γνωστής Ευκλείδειας απόστασης στις διαστάσεις 1, 2 και 3 που αναφέραμε στην αρχή αυτής της ενότητας.

ΠΡΟΤΑΣΗ 11.1. *Για κάθε* $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z} \in \mathbb{R}^d$ *ισχύει:*
[α] $0 \leq d_2(\mathrm{x}, \mathrm{y}) < +\infty$.
[β] $d_2(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = 0$ *αν και μόνο αν* $\mathrm{x} = \mathrm{y}$.
[γ] $d_2(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = d_2(\mathrm{y}, \mathrm{x})$.
[δ] $d_2(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \leq d_2(\mathrm{x}, \mathrm{z}) + d_2(\mathrm{z}, \mathrm{y})$.

Απόδειξη. Οι [α], [β], [γ] είναι προφανείς.
Η [δ] προκύπτει από την τριγωνική ανισότητα $\|\mathrm{x} + \mathrm{y}\|_2 \leq \|\mathrm{x}\|_2 + \|\mathrm{y}\|_2$, αντικαθιστώντας το x με το $\mathrm{x} - \mathrm{z}$ και το y με το $\mathrm{z} - \mathrm{y}$. □

Το [γ] της πρότασης11.1 εκφράζει τη **συμμετρία** και το [δ] την **τριγωνική ανισότητα** της Ευκλείδειας απόστασης.

ΟΡΙΣΜΟΣ 11.3. *Εστω X οποιοδήποτε μη-κενό σύνολο. Ονομάζουμε* **μετρική** *στο X κάθε συνάρτηση d ορισμένη στο καρτεσιανό γινόμενο $X \times X$ και με πραγματικές τιμές*

$$d : X \times X \to \mathbb{R}$$

με τις παρακάτω ιδιότητες:
(i) $d(x,y) \geq 0$ για κάθε $x, y \in X$.
(ii) Για κάθε $x, y \in X$ ισχύει: $d(x,y) = 0$ αν και μόνο αν $x = y$.
(iii) $d(x,y) = d(y,x)$ για κάθε $x, y \in X$.
(iv) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ για κάθε $x, y, z \in X$.
Λέμε ότι το ζευγάρι (X,d) αποτελεί έναν **μετρικό χώρο** *ή ότι "το σύνολο X είναι εφοδιασμένο με τη μετρική d" ή, απλώς, λέμε "το σύνολο X με τη μετρική d". Επίσης, την τιμή $d(x,y)$ στο ζευγάρι (x,y) τήν ονομάζουμε* **απόσταση** *των x, y.*

Με απλοϊκά λόγια, μετρικός χώρος είναι ένα μη-κενό σύνολο X και ένας συγκεκριμένος τρόπος μέτρησης αποστάσεων ανάμεσα στα στοιχεία του. Βέβαια, έχουμε συνηθίσει να μελετάμε τα σύνολα $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^3$, για τα οποία έχουμε και την εμπειρική γεωμετρική εποπτεία, και να μετράμε αποστάσεις στα σύνολα αυτά με τον συγκεκριμένο Ευκλείδιο τρόπο. Όμως, υπάρχουν και άλλοι τρόποι να μετράμε αποστάσεις και στα σύνολα $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^3$ αλλά και σε πολλά άλλα ενδιαφέροντα σύνολα. Μια ακόμη παρατήρηση. Μετρικός χώρος είναι δύο πράγματα μαζί: ένα μη-κενό σύνολο X και μια μετρική $d : X \times X \to \mathbb{R}$. Τυπικά, δηλαδή, όταν έχουμε ένα σύνολο X δε μπορούμε να μιλάμε για *μετρικό χώρο* X παρά μόνον όταν είναι ήδη καθορισμένη και εννοείται από τα συμφραζόμενα μια συγκεκριμένη μετρική d στο σύνολο X.

Παράδειγμα 11.1.2. Η $d_2 : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ που έχουμε ήδη ορίσει με τύπο $d_2(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \|\mathrm{x} - \mathrm{y}\|_2$ ονομάζεται **Ευκλείδεια μετρική** στον $\mathbb{R}^d$. Το περιεχόμενο της πρότασης 11.1 είναι ακριβώς το ότι η d_2 είναι μετρική στον $\mathbb{R}^d$. Ο μετρικός χώρος $(\mathbb{R}^d, d_2)$ ονομάζεται d-**διάστατος Ευκλείδειος χώρος**. Όταν λέμε **ο Ευκλείδειος χώρος** $\mathbb{R}^d$ εννοούμε το $\mathbb{R}^d$ εφοδιασμένο με την Ευκλείδεια μετρική.
Από εδώ και πέρα, όποτε εμφανίζεται το $\mathbb{R}^d$, και ειδικώτερα τα $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, θα εννοείται ότι πρόκειται για τον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^d$, δηλαδή για το $\mathbb{R}^d$ εφοδιασμένο με την Ευκλείδεια μετρική. Και όταν μιλάμε για απόσταση ή νόρμα στο $\mathbb{R}^d$ θα εννοούμε την Ευκλείδεια απόσταση ή νόρμα. Αν θελήσουμε να εφοδιάσουμε το $\mathbb{R}^d$ με μια μετρική διαφορετική από την Ευκλείδεια, θα τήν αναφέρουμε ρητά.

Παράδειγμα 11.1.3. Έστω *οποιοδήποτε* μη-κενό σύνολο X και η συνάρτηση $d_\delta : X \times X \to \mathbb{R}$ με τύπο:

$$d_\delta(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x = y \\ 1, & \text{αν } x \neq y \end{cases}$$

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι η d_δ έχει τις τέσσερις ιδιότητες μιας μετρικής. Οι (i), (ii), (iii) είναι προφανείς. Αν $d_\delta(x,y) = 0$, η ανισότητα $d_\delta(x,y) \leq d_\delta(x,z) + d_\delta(z,y)$ ισχύει, διότι $d_\delta(x,z) \geq 0$ και $d_\delta(z,y) \geq 0$. Αν $d_\delta(x,y) = 1$, τότε $x \neq y$, οπότε ένα τουλάχιστον από τα x, y είναι διαφορετικό από το z και, επομένως, ένας τουλάχιστον από τους $d_\delta(x,z)$, $d_\delta(z,y)$ είναι ίσος με 1 (και ο άλλος είναι ≥ 0). Άρα $d_\delta(x,y) = 1 \leq d_\delta(x,z) + d_\delta(z,y)$.
Η d_δ ονομάζεται **διακριτή μετρική** στο X.

Παράδειγμα 11.1.4. Θεωρούμε οποιοδήποτε μη-κενό σύνολο A και το σύνολο $B(A)$ όλων των φραγμένων συναρτήσεων $f : A \to \mathbb{R}$. Δηλαδή,

$$B(A) = \{f \mid \text{η } f : A \to \mathbb{R} \text{ είναι φραγμένη}\}.$$

Έχουμε ήδη ορίσει στον ορισμό 9.2 την *ομοιόμορφη απόσταση*

$$\|f-g\|_A = \sup\{|f(x)-g(x)| \,|\, x \in A\}$$

οποιωνδήποτε συναρτήσεων $f, g : A \to \mathbb{R}$. Αν $f, g \in B(A)$, δηλαδή αν οι f, g είναι και φραγμένες στο A, τότε $0 \leq \|f-g\|_A < +\infty$. Πράγματι, αν υπάρχουν $M, N \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $|f(x)| \leq M$ και $|g(x)| \leq N$ για κάθε $x \in A$, τότε ισχύει

$$|f(x)-g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq M + N$$

για κάθε $x \in A$ και, επομένως, $\|f-g\|_A \leq M + N < +\infty$. Άρα ορίζεται η συνάρτηση

$$d_A : B(A) \times B(A) \to \mathbb{R}$$

με τύπο

$$d_A(f,g) = \|f-g\|_A = \sup\{|f(x)-g(x)| \,|\, x \in A\}.$$

Είναι φανερό ότι η d_A ικανοποιεί τις τρεις πρώτες ιδιότητες μιας μετρικής στο $B(A)$. Έχουμε ήδη αποδείξει, ως απλή συνέπεια της πρότασης 9.2, ότι ισχύει

$$\|f-g\|_A \leq \|f-h\|_A + \|h-g\|_A$$

για κάθε $f, g, h \in B(A)$. Άρα η d_A είναι μετρική στο $B(A)$. Η d_A ονομάζεται **ομοιόμορφη μετρική** στο $B(A)$ ή **μετρική της ομοιόμορφης σύγκλισης**[1] στο A.

Ασκήσεις.

11.1.1. Διατυπώστε με σύμβολα και αποδείξτε αλγεβρικά την τριγωνική ανισότητα της Ευκλείδειας μετρικής στους $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$.

11.1.2. [α] Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ορίζουμε πέντε συναρτήσεις d με τους τύπους $d(x,y) = (x-y)^2$, $d(x,y) = |x-y|^{1/2}$, $d(x,y) = |x^2-y^2|$, $d(x,y) = |x-2y|$ και $d(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$. Ποιές από αυτές τις d είναι μετρικές στο $\mathbb{R}$;

[β] Για κάθε $\mathrm{x} = (x_1, x_2), \mathrm{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ ορίζουμε $d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \big((x_1-y_1)^2 + 4(x_2-y_2)^2\big)^{1/2}$. Είναι η d μετρική στο $\mathbb{R}^2$;

[γ] Ορίζουμε $d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = |x_1 - y_1|$ για κάθε $\mathrm{x} = (x_1, x_2, x_3), \mathrm{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$. Είναι η d μετρική στο $\mathbb{R}^3$;

11.1.3. Για κάθε $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ ορίζουμε την p-**νόρμα** του x στον $\mathbb{R}^d$ με τον τύπο

$$\|\mathrm{x}\|_p = \begin{cases} (|x_1|^p + \cdots + |x_d|^p)^{1/p}, & \text{αν } 1 \leq p < +\infty \\ \max\{|x_1|, \ldots, |x_d|\}, & \text{αν } p = +\infty \end{cases}$$

Παρατηρήστε ότι η 2-νόρμα ταυτίζεται με την Ευκλείδεια νόρμα.

Αν $1 < p, q < +\infty$ και $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, αποδείξτε ότι ισχύει[2] $|\langle \mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle| \leq \|\mathrm{x}\|_p \|\mathrm{y}\|_q$ για κάθε $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{R}^d$. Αποδείξτε ότι το ίδιο ισχύει για τα ζεύγη $p = 1, q = +\infty$ και $p = +\infty, q = 1$.

Αποδείξτε ότι η p-νόρμα ικανοποιεί την τριγωνική ανισότητα.[3]

Ορίζουμε την $d_p : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ με τύπο $d_p(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \|\mathrm{x} - \mathrm{y}\|_p$ για κάθε $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{R}^d$. Αποδείξτε ότι η d_p είναι μετρική στον $\mathbb{R}^d$. Η d_p ονομάζεται p-**μετρική** και η απόσταση $d_p(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ ονομάζεται p-**απόσταση** των x, y.

Πώς μεταβάλλεται η p-νόρμα ενός (σταθερού) $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^d$ καθώς το p αυξάνεται στο $[1, +\infty]$; Πώς μεταβάλλεται η p-απόσταση ανάμεσα σε δύο (σταθερά) $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{R}^d$ καθώς το p αυξάνεται στο $[1, +\infty]$;

[1] Ο όρος θα αιτιολογηθεί στο παράδειγμα 11.4.3.

[2] Δείτε την ανισότητα του Hölder στις ασκήσεις 5.4.22 και 5.5.39.

[3] Δείτε την ανισότητα του Minkowski στην άσκηση 5.4.22.

11.1.4. Θεωρούμε το σύνολο $C([a,b])$ όλων των συνεχών συναρτήσεων $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Δηλαδή,

$$C([a.b]) = \{ f \mid \text{η } f : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ είναι συνεχής} \}.$$

Για κάθε $f \in C([a,b])$ ορίζουμε την p**-νόρμα** της f στον $C([a,b])$ με τον τύπο

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}, & \text{αν } 1 \le p < +\infty \\ \max\{|f(x)| \mid x \in [a,b]\}, & \text{αν } p = +\infty \end{cases}$$

Παρατηρήστε ότι $\|f\|_\infty = \|f\|_{[a,b]}$.
Επίσης, για κάθε $f, g \in C([a,b])$ ορίζουμε

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) \, dx.$$

Αν $1 < p, q < +\infty$ και $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, αποδείξτε ότι ισχύει[4] $|\langle f, g \rangle| \le \|f\|_p \|g\|_q$ για κάθε $f, g \in C([a,b])$. Αποδείξτε ότι το ίδιο ισχύει για τα ζεύγη $p = 1, q = +\infty$ και $p = +\infty, q = 1$.

Αποδείξτε ότι η p-νόρμα ικανοποιεί την τριγωνική ανισότητα.[5]

Ορίζουμε την $d_p : C([a,b]) \times C([a,b]) \to \mathbb{R}$ με τύπο $d_p(f,g) = \|f - g\|_p$ για κάθε $f, g \in C([a,b])$. Αποδείξτε ότι η d_p είναι μετρική στον $C([a,b])$. Η d_p ονομάζεται p**-μετρική** και η απόσταση $d_p(f,g)$ ονομάζεται p**-απόσταση** των f, g.

11.1.5. Έστω $1 \le p < +\infty$. Θεωρούμε το σύνολο l_p όλων των ακολουθιών $\mathrm{x} = (x_n)$ με την ιδιότητα $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^p < +\infty$. Δηλαδή,

$$l_p = \{(x_n) \mid \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^p < +\infty\}.$$

Αν $p = +\infty$, θεωρούμε το σύνολο l_∞ όλων των φραγμένων ακολουθιών $\mathrm{x} = (x_n)$, δηλαδή αυτών με την ιδιότητα $\sup\{|x_n| \mid n \in \mathbb{N}\} < +\infty$. Δηλαδή,

$$l_\infty = \{(x_n) \mid \sup\{|x_n| \mid n \in \mathbb{N}\} < +\infty\}.$$

Για κάθε $\mathrm{x} = (x_n) \in l_p$ ορίζουμε την p**-νόρμα** της x στον l_p με τον τύπο

$$\|\mathrm{x}\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}, & \text{αν } 1 \le p < +\infty \\ \sup\{|x_n| \mid n \in \mathbb{N}\}, & \text{αν } p = +\infty \end{cases}$$

Αν $1 < p, q < +\infty$ και $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ καθώς και για τα ζεύγη $p = 1, q = +\infty$ και $p = +\infty, q = 1$ ορίζουμε[6]

$$\langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle = \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} x_n y_n$$

για κάθε $\mathrm{x} = (x_n) \in l_p$ και κάθε $\mathrm{y} = (y_n) \in l_q$. Αποδείξτε ότι η σειρά η οποία ορίζει το $\langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle$ συγκλίνει και ότι ισχύει $|\langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle| \le \|\mathrm{x}\|_p \|\mathrm{y}\|_q$ για κάθε $\mathrm{x} \in l_p$ και κάθε $\mathrm{y} \in l_q$.

Αποδείξτε ότι η p-νόρμα ικανοποιεί την τριγωνική ανισότητα.[7]

Ορίζουμε την $d_p : l_p \times l_p \to \mathbb{R}$ με τύπο $d_p(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \|\mathrm{x} - \mathrm{y}\|_p$ για κάθε $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in l_p$. Αποδείξτε ότι η d_p είναι μετρική στον l_p. Η d_p ονομάζεται p**-μετρική** και η απόσταση $d_p(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ ονομάζεται p**-απόσταση** των x, y.

11.1.6. Έστω μετρικός χώρος (X, d) και μη-κενό $W \subseteq X$. Θεωρούμε τον περιορισμό της συνάρτησης $d : X \times X \to \mathbb{R}$ στο $W \times W$. Δηλαδή, για κάθε $x, y \in W$ η τιμή $d(x,y)$ του περιορισμού $d : W \times W \to \mathbb{R}$ είναι ίδια με την τιμή $d(x,y)$ της $d : X \times X \to \mathbb{R}$.

Αποδείξτε ότι η $d : W \times W \to \mathbb{R}$ είναι μετρική στο W.

Η μετρική $d : W \times W \to \mathbb{R}$ ονομάζεται **μετρική υπόχωρου** στο W και ο μετρικός χώρος (W, d) ονομάζεται **μετρικός υπόχωρος** του (X, d).

---

[4] Δείτε την ανισότητα του Hölder στην άσκηση 6.4.18.

[5] Δείτε την ανισότητα του Minkowski στην άσκηση 6.4.18.

[6] Δείτε την ανισότητα του Hölder στην άσκηση 6.4.18.

[7] Δείτε την ανισότητα του Minkowski στην άσκηση 8.3.23.

11.2 Περιοχές, ανοικτά σύνολα, κλειστά σύνολα.

ΟΡΙΣΜΟΣ 11.4. *Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος. Αν $x \in X$ και $r > 0$, ονομάζουμε r-**περιοχή** του x ή περιοχή **κέντρου** x και **ακτίνας** r και συμβολίζουμε $N_x(r)$ το σύνολο*

$$N_x(r) = \{y \in X \mid d(y, x) < r\}.$$

*Η αντίστοιχη **κλειστή περιοχή** είναι το σύνολο*

$$\overline{N}_x(r) = \{y \in X \mid d(y, x) \leq r\}.$$

Είναι προφανές ότι *κάθε r-περιοχή περιέχει τουλάχιστον το κέντρο της.*

Παράδειγμα 11.2.1. Στο $\mathbb{R}$ οι περιοχές είναι γνωστά σύνολα. Πράγματι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $r > 0$, το $N_x(r)$ είναι το σύνολο όλων των σημείων της ευθείας των οποίων η απόσταση από το x είναι μικρότερη από r, δηλαδή το ανοικτό διάστημα $(x - r, x + r)$. Ομοίως, η $\overline{N}_x(r)$ είναι το διάστημα $[x - r, x + r]$.
Στο $\mathbb{R}^2$ η περιοχή κέντρου x $\in \mathbb{R}^2$ και ακτίνας $r > 0$ είναι το σύνολο όλων των σημείων του επιπέδου των οποίων η απόσταση από το x είναι μικρότερη από r, δηλαδή ο δίσκος με κέντρο x και ακτίνα r χωρίς τη συνοριακή περιφέρειά του. Η αντίστοιχη κλειστή περιοχή είναι ο δίσκος με κέντρο x και ακτίνα r μαζί με τη συνοριακή περιφέρειά του.
Στο $\mathbb{R}^3$ η περιοχή κέντρου x $\in \mathbb{R}^3$ και ακτίνας $r > 0$ είναι το σύνολο όλων των σημείων του χώρου των οποίων η απόσταση από το x είναι μικρότερη από r, δηλαδή η μπάλα με κέντρο x και ακτίνα r χωρίς τη συνοριακή επιφάνειά της. Η αντίστοιχη κλειστή περιοχή είναι η μπάλα με κέντρο x και ακτίνα r μαζί με τη συνοριακή επιφάνειά της.
Είναι φανερό ότι από τα παραδείγματα του δίσκου και της μπάλας στα $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^3$, αντιστοίχως, προέρχονται οι όροι *κέντρο* και *ακτίνα* στη γενική περίπτωση των περιοχών σε μετρικούς χώρους. Μάλιστα, και στην περίπτωση του γενικού $\mathbb{R}^d$ χρησιμοποιούμε τον όρο *(d-διάστατη) μπάλα κέντρου* x *και ακτίνας* r για την περιοχή $N_{\mathrm{x}}(r)$.

Παράδειγμα 11.2.2. Έστω μη-κενό σύνολο X με τη διακριτή μετρική d_δ. Οι μόνες τιμές της d_δ είναι 0 και 1. Άρα για κάθε $x \in X$ είναι $N_x(r) = \{x\}$, αν $0 < r \leq 1$, και $N_x(r) = X$, αν $r > 1$. Επίσης, είναι $\overline{N}_x(r) = \{x\}$, αν $0 < r < 1$, και $\overline{N}_x(r) = X$, αν $r \geq 1$.

Το επόμενο λήμμα περιγράφει μια πολύ χαρακτηριστική ιδιότητα των περιοχών ενός μετρικού χώρου.

ΛΗΜΜΑ 11.1. *Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος και δύο διαφορετικά σημεία του X. Τότε υπάρχει μια περιοχή του ενός σημείου και μια περιοχή του άλλου σημείου (και, μάλιστα, με την ίδια ακτίνα και οι δύο περιοχές) οι οποίες είναι ξένες.*

Απόδειξη. Έστω $x, y \in X$ και $x \neq y$. Τότε $d(x, y) > 0$ και θεωρούμε τον αριθμό

$$r = \tfrac{1}{2}\, d(x, y) > 0.$$

Θα αποδείξουμε ότι

$$N_x(r) \cap N_y(r) = \emptyset.$$

Έστω (για να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι $z \in N_x(r) \cap N_y(r)$. Τότε $d(z, x) < r$ και $d(z, y) < r$ και, επομένως,

$$2r = d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) = d(z, x) + d(z, y) < r + r = 2r,$$

οπότε καταλήγουμε σε άτοπο. □

Όταν $A \subseteq X$, το συμπλήρωμα του A σε σχέση με το X θα το συμβολίζουμε $X \setminus A$ ή A^c. Το σύμβολο A^c είναι απλούστερο, αλλά θα χρησιμοποιούμε το $X \setminus A$ όταν πρέπει να δηλωθεί ποιό (ανάμεσα σε άλλα) είναι το σύνολο X σε σχέση με το οποίο θεωρούμε το συμπλήρωμα του A.

ΟΡΙΣΜΟΣ 11.5. *Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος, $A \subseteq X$ και $x \in X$.*
Το x χαρακτηρίζεται **εσωτερικό σημείο** *του A αν υπάρχει $r > 0$ ώστε $N_x(r) \subseteq A$.*
Το x χαρακτηρίζεται **εξωτερικό σημείο** *του A αν υπάρχει $r > 0$ ώστε $N_x(r) \subseteq A^c$.*
Το x χαρακτηρίζεται **συνοριακό σημείο** *του A αν για κάθε $r > 0$ ισχύει $N_x(r) \cap A \neq \emptyset$ και $N_x(r) \cap A^c \neq \emptyset$.*
Το x χαρακτηρίζεται **οριακό σημείο** *του A αν για κάθε $r > 0$ ισχύει $N_x(r) \cap A \neq \emptyset$.*
Το x χαρακτηρίζεται **σημείο συσσώρευσης** *του A αν για κάθε $r > 0$ ισχύει $(N_x(r) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$.*

Από τον ορισμό, τα εξής 1 - 7 πρέπει να είναι απολύτως σαφή.

1. *Τα εσωτερικά σημεία του A ανήκουν στο A και τα εξωτερικά σημεία του A ανήκουν στο A^c.*

2. *Τα συνοριακά σημεία του A δεν είναι ούτε εσωτερικά ούτε εξωτερικά σημεία του A και, επίσης, κάθε σημείο του X ανήκει σε μία από τις τρεις κατηγορίες σημείων: εσωτερικό σημείο, εξωτερικό σημείο, συνοριακό σημείο του A. Άρα το X χωρίζεται σε τρία ξένα μεταξύ τους σύνολα: τα σύνολα των εσωτερικών, των εξωτερικών και των συνοριακών σημείων του A.*

3. *Τα εξωτερικά σημεία του A είναι τα ίδια με τα εσωτερικά σημεία του A^c. Τα εσωτερικά σημεία του A είναι τα ίδια με τα εξωτερικά σημεία του A^c. Τα συνοριακά σημεία του A είναι τα ίδια με τα συνοριακά σημεία του A^c.*

4. *Αφού τα εσωτερικά σημεία του A ανήκουν στο A και τα εξωτερικά σημεία του A ανήκουν στο A^c, απομένει να δούμε που ανήκουν τα συνοριακά σημεία του A. Αυτό εξαρτάται από το συγκεκριμένο κάθε φορά A: κάποια από τα συνοριακά σημεία (μπορεί όλα, μπορεί μερικά, μπορεί κανένα) ανήκουν στο A και τα υπόλοιπα (μπορεί κανένα, μπορεί μερικά, μπορεί όλα) ανήκουν στο A^c.*

5. *Τα οριακά σημεία του A είναι τα εσωτερικά και τα συνοριακά σημεία του A. Κανένα εξωτερικό σημείο του A δεν είναι οριακό σημείο του A.*

6. *Ένα σημείο συσσώρευσης του A είναι οριακό σημείο του A και ένα οριακό σημείο του A που δεν ανήκει στο A είναι σημείο συσσώρευσης του A.*

7. *Το x είναι σημείο συσσώρευσης του A αν και μόνο αν είναι οριακό σημείο του $A \setminus \{x\}$. Αυτό οφείλεται στο ότι $(N_x(r) \setminus \{x\}) \cap A = N_x(r) \cap (A \setminus \{x\})$.*

ΟΡΙΣΜΟΣ 11.6. *Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Ορίζουμε*

$$A^\circ = \{x \in X \mid x \text{ εσωτερικό σημείο του } A\}, \qquad \partial A = \{x \in X \mid x \text{ συνοριακό σημείο του } A\},$$

$$\overline{A} = \{x \in X \mid x \text{ οριακό σημείο του } A\}, \qquad A' = \{x \in X \mid x \text{ σημείο συσσώρευσης του } A\}.$$

Το A° ονομάζεται **εσωτερικό** *του A, το ∂A ονομάζεται* **σύνορο** *του A, το $\overline{A}$ ονομάζεται* **κλειστότητα** *του A και το A' ονομάζεται* **παράγωγο σύνολο** *του A.*

Παράδειγμα 11.2.3. Θεωρούμε το $\mathbb{R}$ και θα εξετάσουμε διάφορα χαρακτηριστικά υποσύνολά του.
Αν A είναι οποιοδήποτε από τα $(a, b), (a, b], [a, b), [a, b]$, τότε $A^\circ = (a, b)$, $\partial A = \{a, b\}$ και $\overline{A} = A' = [a, b]$.
Αν A είναι το $[a, +\infty)$ ή το $(a, +\infty)$, τότε $A^\circ = (a, +\infty)$, $\partial A = \{a\}$ και $\overline{A} = A' = [a, +\infty)$.
Αν A είναι το $(-\infty, b]$ ή το $(-\infty, b)$, τότε $A^\circ = (-\infty, b)$, $\partial A = \{b\}$ και $\overline{A} = A' = (-\infty, b]$.
Αν $A = \{a\}$, τότε $A^\circ = \emptyset$, $\partial A = \{a\}$, $\overline{A} = \{a\}$ και $A' = \emptyset$.
Αν $A = (a, b) \cup (b, c)$, τότε $A^\circ = (a, b) \cup (b, c)$, $\partial A = \{a, b, c\}$ και $\overline{A} = A' = [a, c]$.
Αν $A = \{a\} \cup (b, c)$, όπου $a < b < c$, τότε $A^\circ = (b, c)$, $\partial A = \{a, b, c\}$, $\overline{A} = \{a\} \cup [b, c]$ και $A' = [b, c]$.
Το $\mathbb{Q}$ δεν περιέχει κανένα ανοικτό διάστημα, αφού σε κάθε ανοικτό διάστημα υπάρχει τουλάχιστον ένας άρρητος. Δηλαδή, το $\mathbb{Q}$ δεν περιέχει καμία περιοχή κανενός σημείου και, επομένως, δεν έχει κανένα εσωτερικό σημείο. Άρα $\mathbb{Q}^\circ = \emptyset$. Από την άλλη μεριά, το $\mathbb{Q}$ τέμνει και μάλιστα σε άπειρα σημεία κάθε περιοχή καθενός σημείου, οπότε κάθε σημείο είναι σημείο συσσώρευσης του $\mathbb{Q}$ και, επομένως, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}' = \mathbb{R}$. Τέλος, κάθε περιοχή καθενός σημείου τέμνει το $\mathbb{Q}$ αλλά και το $\mathbb{Q}^c$. Δηλαδή, κάθε σημείο είναι συνοριακό σημείο του $\mathbb{Q}$, οπότε $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$.
Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι $(\mathbb{Q}^c)^\circ = \emptyset$, $\overline{\mathbb{Q}^c} = (\mathbb{Q}^c)' = \mathbb{R}$ και $\partial(\mathbb{Q}^c) = \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 11.2.4. Έστω $\mathrm{a} \in \mathbb{R}^d$, $\mathrm{a} \neq 0$ και $a \in \mathbb{R}$. Το υποσύνολο

$$\Gamma = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^d \,|\, \langle \mathrm{x}, \mathrm{a} \rangle = a\}$$

του $\mathbb{R}^d$ ονομάζεται **υπερεπίπεδο** του $\mathbb{R}^d$. Στην περίπτωση $d = 1$ το υποσύνολο αυτό του $\mathbb{R}$ είναι μονοσύνολο, στην περίπτωση $d = 2$ είναι μια ευθεία στον $\mathbb{R}^2$ και στην περίπτωση $d = 3$ είναι ένα επίπεδο στον $\mathbb{R}^3$. Η εξίσωση

$$\langle \mathrm{x}, \mathrm{a} \rangle = x_1 a_1 + \cdots + x_d a_d = a$$

ονομάζεται **εξίσωση** του υπερεπιπέδου Γ. Τα σύνολα

$$A_1 = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^d \,|\, \langle \mathrm{x}, \mathrm{a} \rangle > a\}, \qquad A_2 = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^d \,|\, \langle \mathrm{x}, \mathrm{a} \rangle < a\}$$

ονομάζονται **ανοικτοί ημιχώροι** του $\mathbb{R}^d$ με συνοριακό υπερεπίπεδο το Γ. Τα

$$A_1 \cup \Gamma = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^d \,|\, \langle \mathrm{x}, \mathrm{a} \rangle \geq a\}, \qquad A_2 \cup \Gamma = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^d \,|\, \langle \mathrm{x}, \mathrm{a} \rangle \leq a\}$$

ονομάζονται **κλειστοί ημιχώροι** του $\mathbb{R}^d$ με συνοριακό υπερεπίπεδο το Γ.
Έστω οποιοδήποτε $\mathrm{x} \in A_1$, οπότε $\langle \mathrm{x}, \mathrm{a} \rangle > a$. Θέτουμε

$$\kappa = \langle \mathrm{x}, \mathrm{a} \rangle - a > 0 \qquad \text{και} \qquad r = \tfrac{\kappa}{\|a\|_2} > 0.$$

Τότε για κάθε $\mathrm{y} \in N_{\mathrm{x}}(r)$ ισχύει $\|\mathrm{y} - \mathrm{x}\|_2 < r$, οπότε

$$|\langle \mathrm{y} - \mathrm{x}, \mathrm{a} \rangle| \leq \|\mathrm{y} - \mathrm{x}\|_2 \|\mathrm{a}\|_2 < r\|\mathrm{a}\|_2 = \kappa$$

και, επομένως,

$$\langle \mathrm{y}, \mathrm{a} \rangle = \langle \mathrm{y} - \mathrm{x}, \mathrm{a} \rangle + \langle \mathrm{x}, \mathrm{a} \rangle > -\kappa + \langle \mathrm{x}, \mathrm{a} \rangle = a.$$

Άρα για κάθε $\mathrm{y} \in N_{\mathrm{x}}(r)$ ισχύει $\mathrm{y} \in A_1$ που σημαίνει ότι $N_{\mathrm{x}}(r) \subseteq A_1$. Δηλαδή κάθε σημείο του A_1 είναι εσωτερικό σημείο του A_1.
Ομοίως, αποδεικνύεται ότι κάθε σημείο του A_2 είναι εσωτερικό σημείο του A_2. (Εξ άλλου, το σύνολο A_2 είναι του *ίδιου τύπου* με το A_1 και αυτό φαίνεται αν θεωρήσουμε το $-\mathrm{a}$ στη θέση του a και το $-a$ στη θέση του a, οπότε η ανισότητα $\langle \mathrm{x}, \mathrm{a} \rangle < a$ που καθορίζει το A_2 γράφεται ισοδύναμα $\langle \mathrm{x}, -\mathrm{a} \rangle > -a$.) Επομένως, κάθε σημείο του A_2 είναι εξωτερικό σημείο του A_1.
Τέλος, μπορούμε να δούμε ότι κάθε σημείο του Γ είναι συνοριακό σημείο του A_1 και του A_2. Πράγματι, αν $\mathrm{x} \in \Gamma$, τότε $\langle \mathrm{x}, \mathrm{a} \rangle = a$ και αν πάρουμε οποιοδήποτε $r > 0$ και θεωρήσουμε τα δύο σημεία $\mathrm{x} \pm \frac{r}{2\|\mathrm{a}\|_2}\mathrm{a}$, τότε το ένα από αυτά ανήκει στο $N_{\mathrm{x}}(r) \cap A_1$ και το άλλο στο $N_{\mathrm{x}}(r) \cap A_2$. Για παράδειγμα, για το $\mathrm{x} + \frac{r}{2\|\mathrm{a}\|_2}\mathrm{a}$ έχουμε

$$\Big\|\big(\mathrm{x} + \tfrac{r}{2\|\mathrm{a}\|_2}\mathrm{a}\big) - \mathrm{x}\Big\|_2 = \tfrac{r}{2\|\mathrm{a}\|_2}\|\mathrm{a}\|_2 < r, \quad \big\langle \mathrm{x} + \tfrac{r}{2\|\mathrm{a}\|_2}\mathrm{a}, \mathrm{a} \big\rangle = \langle \mathrm{x}, \mathrm{a} \rangle + \tfrac{r}{2\|\mathrm{a}\|_2}\langle \mathrm{a}, \mathrm{a} \rangle = a + \tfrac{r}{2}\|\mathrm{a}\|_2 > a,$$

οπότε το σημείο αυτό ανήκει στο $N_{\mathrm{x}}(r) \cap A_1$. Ομοίως, το $\mathrm{x} - \frac{r}{2\|\mathrm{a}\|_2}\mathrm{a}$ ανήκει στο $N_{\mathrm{x}}(r) \cap A_2$. Δηλαδή, για κάθε $r > 0$ ισχύει $N_{\mathrm{x}}(r) \cap A_1 \neq \emptyset$ και $N_{\mathrm{x}}(r) \cap A_2 \neq \emptyset$.
Από τα προηγούμενα συμπεραίνουμε εύκολα ότι $A_1{}^\circ = A_1$, $\partial A_1 = \Gamma$ και $\overline{A_1} = A_1 \cup \Gamma$.
Ακόμη, $(A_1 \cup \Gamma)^\circ = A_1$, $\partial(A_1 \cup \Gamma) = \Gamma$ και $\overline{A_1 \cup \Gamma} = A_1 \cup \Gamma$.
Τα ανάλογα ισχύουν για τους ημιχώρους A_2 και $A_2 \cup \Gamma$.
Τέλος, για το υπερεπίπεδο Γ είναι $\Gamma^\circ = \emptyset$, $\partial\Gamma = \Gamma$ και $\overline{\Gamma} = \Gamma$.

Παράδειγμα 11.2.5. Τώρα θεωρούμε το $\mathbb{R}^2$ και μια απλή σχετικά καμπύλη Γ στο επίπεδο η οποία χωρίζει το επίπεδο σε τρία υποσύνολα: το σύνολο A_1 των σημείων που βρίσκονται στη μία μεριά της Γ, το σύνολο A_2 των σημείων που βρίσκονται στην άλλη μεριά της Γ και το σύνολο των σημείων της Γ. Η Γ θα μπορούσε να είναι ένας κύκλος ή μια έλλειψη ή μια ευθεία (όπως στο παράδειγμα 11.2.4) ή μια κλειστή τεθλασμένη γραμμή (η περιφέρεια ενός τετραγώνου ή ενός παραλληλογράμμου, για παράδειγμα).
Έστω ότι το A είναι το A_1 μαζί με μερικά από τα σημεία της Γ. Τότε $A^\circ = A_1$, $\overline{A} = A_1 \cup \Gamma$ και $\partial A = \Gamma$.
Έστω ότι $A = \Gamma$. Τότε $A^\circ = \emptyset$, $\overline{A} = \Gamma$ και $\partial A = \Gamma$.
Λίγο πιο γενικά, αν το A είναι ένα υποσύνολο της Γ, τότε $A^\circ = \emptyset$.

Παράδειγμα 11.2.6. Έστω ότι έχουμε μια απλή σχετικά επιφάνεια Γ στο $\mathbb{R}^3$ η οποία χωρίζει τον χώρο σε τρία υποσύνολα: το σύνολο A_1 των σημείων που βρίσκονται στη μια μεριά της Γ, το σύνολο A_2 των σημείων που βρίσκονται στην άλλη μεριά της Γ και το σύνολο των σημείων της Γ. Παραδείγματα τέτοιων Γ είναι ένα επίπεδο (όπως στο παράδειγμα 11.2.4), μια σφαιρική επιφάνεια, η επιφάνεια ενός παραλληλεπιπέδου.
Αν ως A θεωρήσουμε το A_1 μαζί με κάποια από τα σημεία της Γ, τότε $A^\circ = A_1$, $\overline{A} = A_1 \cup \Gamma$ και $\partial A = \Gamma$.
Επίσης, αν $A = \Gamma$, τότε $A^\circ = \emptyset$, $\overline{A} = \Gamma$ και $\partial A = \Gamma$.
Αν το A είναι υποσύνολο της Γ, τότε $A^\circ = \emptyset$.

Παράδειγμα 11.2.7. Έστω μη-κενό X με τη διακριτή μετρική d_δ και οποιοδήποτε $A \subseteq X$. Αν $x \in A$, τότε $N_x(1) = \{x\} \subseteq A$. Άρα κάθε $x \in A$ είναι εσωτερικό σημείο του A. Για τον ίδιο λόγο, κάθε $x \in A^c$ είναι εξωτερικό σημείο του A. Επομένως, κανένα $x \in X$ δεν είναι συνοριακό σημείο του A. Τέλος, κανένα x δεν είναι σημείο συσσώρευσης του A, διότι $N_x(1) \setminus \{x\} = \emptyset$, οπότε το $N_x(1) \setminus \{x\}$ δεν περιέχει κανένα σημείο του A. Συμπεραίνουμε ότι για κάθε $A \subseteq X$ είναι $A^\circ = \overline{A} = A$ και $A' = \partial A = \emptyset$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 11.2. *Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Τότε*
[α] $\partial A = \partial(A^c)$.
[β] $A^\circ = A \setminus \partial A$.
[γ] $\overline{A} = A \cup \partial A$.
[δ] $\overline{A} = A \cup A'$.
[ε] $(\overline{A})^c = (A^c)^\circ$.

Απόδειξη. [α] Τα συνοριακά σημεία του A είναι τα ίδια με τα συνοριακά σημεία του A^c.

[β] Αν το $x \in X$ είναι εσωτερικό σημείο του A, τότε ανήκει στο A και δεν είναι συνοριακό σημείο του A. Άρα $A^\circ \subseteq A \setminus \partial A$. Αντιστρόφως, αν το x ανήκει στο A και δεν είναι συνοριακό σημείο του A, τότε είναι εσωτερικό σημείο του A. Άρα $A \setminus \partial A \subseteq A^\circ$.

[γ] Αν το $x \in X$ είναι οριακό σημείο του A, τότε είναι είτε εσωτερικό σημείο του A (οπότε ανήκει στο A) είτε συνοριακό σημείο του A. Άρα $\overline{A} \subseteq A \cup \partial A$. Αντιστρόφως, αν το x ανήκει στο A ή είναι συνοριακό σημείο του A, τότε είναι είτε εσωτερικό σημείο του A είτε συνοριακό σημείο του A, οπότε είναι οριακό σημείο του A. Άρα $A \cup \partial A \subseteq \overline{A}$.

[δ] Αν το $x \in X$ είναι οριακό σημείο του A, τότε είτε ανήκει στο A είτε δεν ανήκει στο A και, σ' αυτήν την δεύτερη περίπτωση, είναι σημείο συσσώρευσης του A. Άρα $\overline{A} \subseteq A \cup A'$. Αντιστρόφως, αν το x ανήκει στο A ή είναι σημείο συσσώρευσης του A, τότε και στις δύο περιπτώσεις είναι οριακό σημείο του A. Άρα $A \cup A' \subseteq \overline{A}$.

[ε] Το $x \in X$ δεν είναι οριακό σημείο του A αν και μόνο αν είναι εξωτερικό σημείο του A αν και μόνο αν είναι εσωτερικό σημείο του A^c. □

ΟΡΙΣΜΟΣ 11.7. *Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος και $A \subseteq X$.*

Το A χαρακτηρίζεται **ανοικτό** *αν αποτελείται μόνο από τα εσωτερικά του σημεία.*

Το A χαρακτηρίζεται **κλειστό** *αν περιέχει όλα τα οριακά του σημεία.*

Παράδειγμα 11.2.8. Θεωρούμε το $\mathbb{R}$ και τα διαστήματα κάθε τύπου: (a, b), $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$, $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$, $(-\infty, +\infty)$.
Από αυτά τα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ εκείνα που είναι ανοικτά σύνολα είναι τα: (a, b), $(a, +\infty)$, $(-\infty, b)$, $(-\infty, +\infty)$. Ενώ εκείνα που είναι κλειστά είναι τα: $[a, b]$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, b]$, $(-\infty, +\infty)$. Έτσι δικαιολογείται ο όρος "ανοικτό διάστημα" που χρησιμοποιούμε για τα πρώτα και ο όρος "κλειστό διάστημα" που χρησιμοποιούμε για τα δεύτερα διαστήματα.
Τα διαστήματα $[a, b)$, $(a, b]$ δεν είναι ούτε ανοικτά ούτε κλειστά σύνολα. Άρα δεν πρέπει να μείνει η εντύπωση ότι κάθε υποσύνολο ενός μετρικού χώρου οφείλει να είναι είτε ανοικτό είτε κλειστό υποσύνολό του. Δηλαδή, *δεν ισχύει ότι η έννοια του ανοικτού υποσυνόλου είναι η άρνηση της έννοιας του κλειστού υποσυνόλου.*

Παράδειγμα 11.2.9. Στο παράδειγμα 11.2.4 οι δύο ανοικτοί ημιχώροι A_1 και A_2 είναι ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$ και οι κλειστοί ημιχώροι $A_1 \cup \Gamma$ και $A_2 \cup \Gamma$ καθώς και το υπερεπίπεδο Γ είναι κλειστά υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$.

Παράδειγμα 11.2.10. Στο παράδειγμα 11.2.5 τα σύνολα A_1 και A_2 είναι ανοικτά και τα σύνολα $A_1 \cup \Gamma$, $A_2 \cup \Gamma$ και Γ είναι κλειστά.

Παράδειγμα 11.2.11. Στο παράδειγμα 11.2.6 τα σύνολα A_1 και A_2 είναι ανοικτά και τα σύνολα $A_1 \cup \Gamma$, $A_2 \cup \Gamma$ και Γ είναι κλειστά.

Παράδειγμα 11.2.12. Έστω μη-κενό X με τη διακριτή μετρική d_δ. Σύμφωνα με το παράδειγμα 11.2.7, κάθε $A \subseteq X$ είναι ανοικτό *και* κλειστό.

ΠΡΟΤΑΣΗ 11.3. *Έστω μετρικός χώρος* (X, d).
[α] *Το* X *και το* $\emptyset$ *είναι ανοικτά.*
[β] *Το* X *και το* $\emptyset$ *είναι κλειστά.*
[γ] *Κάθε* r*-περιοχή είναι ανοικτή.*
[δ] *Κάθε κλειστή* r*-περιοχή είναι κλειστή.*
[ε] *Κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του* X *είναι κλειστό.*

Απόδειξη. [α] Για κάθε $x \in X$ και για κάθε $r > 0$ είναι $N_x(r) \subseteq X$. Άρα κάθε $x \in X$ είναι εσωτερικό σημείο του X, οπότε το X είναι ανοικτό.
Αν το $\emptyset$ δεν ήταν ανοικτό, θα υπήρχε $x \in \emptyset$ το οποίο δεν θα ήταν εσωτερικό σημείο του $\emptyset$. Αυτό, όμως, είναι αδύνατο διότι δεν υπάρχει κανένα $x \in \emptyset$. Άρα το $\emptyset$ είναι ανοικτό.

[β] Το X περιέχει όλα τα οριακά του σημεία, αφού, απλούστατα, περιέχει όλα τα σημεία του. Άρα το X είναι κλειστό.
Αν κάποιο $x \in X$ ήταν οριακό σημείο του $\emptyset$, για κάθε $r > 0$ θα ίσχυε $N_x(r) \cap \emptyset \neq \emptyset$, το οποίο είναι αδύνατο. Άρα κανένα $x \in X$ δεν είναι οριακό σημείο του $\emptyset$. Επομένως, δεν υπάρχει κάποιο οριακό σημείο του $\emptyset$ το οποίο να μην περιέχεται στο $\emptyset$. Επομένως, το $\emptyset$ περιέχει όλα τα οριακά του σημεία και άρα είναι κλειστό.

[γ] Έστω $x \in X$ και $r > 0$. Έστω $y \in N_x(r)$. Θα αποδείξουμε την ύπαρξη κάποιου $s > 0$ ώστε $N_y(s) \subseteq N_x(r)$.
Επειδή $y \in N_x(r)$, είναι $d(y, x) < r$ και θεωρούμε τον

$$s = r - d(y, x) > 0.$$

Αν $w \in N_y(s)$, τότε $d(w, y) < s$, οπότε

$$d(w, x) \leq d(w, y) + d(y, x) < s + d(y, x) = r$$

και, επομένως, $w \in N_x(r)$. Άρα $N_y(s) \subseteq N_x(r)$.
Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι για κάθε $y \in N_x(r)$ υπάρχει περιοχή του y η οποία περιέχεται στο $N_x(r)$. Άρα κάθε $y \in N_x(r)$ είναι εσωτερικό σημείο της $N_x(r)$, οπότε η $N_x(r)$ είναι ανοικτή.

[δ] Έστω $x \in X$ και $r > 0$ και έστω y οριακό σημείο της $\overline{N}_x(r)$.
Θεωρούμε τυχόντα $\epsilon > 0$ και έχουμε ότι υπάρχει $z \in \overline{N}_x(r) \cap N_y(\epsilon)$. Τότε

$$d(y, x) \leq d(y, z) + d(z, x) < \epsilon + r$$

και, επειδή αυτό ισχύει για κάθε $\epsilon > 0$, συνεπάγεται $d(y, x) \leq r$ ή, ισοδύναμα, $y \in \overline{N}_x(r)$.
Άρα η $\overline{N}_x(r)$ περιέχει κάθε οριακό σημείο της, οπότε είναι κλειστή.

[ε] Έστω $A = \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq X$. Έστω $x \in A^c$, οπότε $d(x, x_1) > 0, \ldots, d(x, x_n) > 0$.
Θεωρούμε τον

$$r = \min\{d(x, x_1), \ldots, d(x, x_n)\} > 0.$$

Κανένα από τα $x_1, \ldots, x_n$ δεν ανήκει στην $N_x(r)$ και, επομένως, $N_x(r) \subseteq A^c$. Άρα κάθε $x \in A^c$ είναι εξωτερικό σημείο του A. Επομένως, το A περιέχει όλα τα οριακά του σημεία και άρα είναι κλειστό. $\square$

ΠΡΟΤΑΣΗ 11.4. *Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος και $A \subseteq X$.*

[α] *Το A είναι ανοικτό αν και μόνο αν $A \cap \partial A = \emptyset$.*

[β] *Το A είναι κλειστό αν και μόνο αν $\partial A \subseteq A$.*

Απόδειξη. [α] Κάθε σύνολο A περιέχει τα εσωτερικά του σημεία και πιθανόν κάποια από τα συνοριακά του σημεία. Άρα το A είναι ανοικτό αν και μόνο αν δεν περιέχει κανένα συνοριακό του σημείο.

[β] Τα οριακά σημεία του A είναι τα εσωτερικά του σημεία, τα οποία ούτως ή άλλως περιέχονται στο A, και τα συνοριακά του σημεία. Άρα το A είναι κλειστό αν και μόνο αν περιέχει όλα τα συνοριακά του σημεία. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 11.5. *Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Το A είναι κλειστό αν και μόνο αν το A^c είναι ανοικτό.*

Απόδειξη. Έχουμε τις εξής διαδοχικές ισοδυναμίες. "Το A είναι κλειστό" αν και μόνο αν "το A περιέχει όλα τα οριακά σημεία του A" αν και μόνο αν "το A^c δεν περιέχει κανένα οριακό σημείο του A" αν και μόνο αν "το A^c περιέχει μόνο εξωτερικά σημεία του A" αν και μόνο αν "το A^c περιέχει μόνο εσωτερικά σημεία του A^c" αν και μόνο αν "το A^c είναι ανοικτό". □

Το συμπλήρωμα του συμπληρώματος ενός συνόλου είναι το ίδιο το σύνολο, οπότε:
Το A είναι ανοικτό αν και μόνο αν το A^c είναι κλειστό.

ΠΡΟΤΑΣΗ 11.6. *Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος και $A \subseteq X$.*

[α] *Το $\overline{A}$ είναι το μικρότερο κλειστό σύνολο το οποίο περιέχει το A.*

[β] *Το A° είναι το μεγαλύτερο ανοικτό σύνολο το οποίο περιέχεται στο A.*

[γ] *Το A είναι κλειστό αν και μόνο αν $A = \overline{A}$.*

[δ] *Το A είναι ανοικτό αν και μόνο αν $A^\circ = A$.*

Απόδειξη. [α] Πρώτον, είναι ήδη σαφές ότι $A \subseteq \overline{A}$.
Κατόπιν, θα δούμε ότι το $\overline{A}$ είναι κλειστό.
Έστω x τυχόν οριακό σημείο του $\overline{A}$ και έστω τυχόν $r > 0$. Επειδή το x είναι οριακό σημείο του $\overline{A}$, υπάρχει τουλάχιστον ένα $y \in \overline{A}$ μέσα στην περιοχή $N_x(r)$. Και, επειδή η $N_x(r)$ είναι ανοικτή, υπάρχει $s > 0$ ώστε $N_y(s) \subseteq N_x(r)$. Τώρα, επειδή το y είναι οριακό σημείο του A, υπάρχει τουλάχιστον ένα $w \in A$ μέσα στην περιοχή $N_y(s)$ και, επομένως, μέσα στην $N_x(r)$. Άρα για κάθε $r > 0$ υπάρχει τουλάχιστον ένα $w \in A$ μέσα στην περιοχή $N_x(r)$. Άρα το x είναι οριακό σημείο του A, δηλαδή $x \in \overline{A}$.
Αποδείξαμε ότι το τυχόν οριακό σημείο του $\overline{A}$ ανήκει στο $\overline{A}$, οπότε το $\overline{A}$ είναι κλειστό.
Τέλος, θα δούμε ότι το $\overline{A}$ είναι το *μικρότερο* κλειστό υπερσύνολο του A.
Έστω κλειστό B με $A \subseteq B$.
Έστω τυχόν $x \in \overline{A}$, δηλαδή οριακό σημείο του A. Τότε για κάθε $r > 0$ ισχύει $N_x(r) \cap A \neq \emptyset$, οπότε, επειδή $A \subseteq B$, ισχύει $N_x(r) \cap B \neq \emptyset$. Άρα το x είναι οριακό σημείο του B και, επειδή το B είναι κλειστό, συνεπάγεται $x \in B$.
Αποδείξαμε ότι για κάθε $x \in \overline{A}$ ισχύει $x \in B$, οπότε $\overline{A} \subseteq B$.

[β] Πρώτον, είναι προφανές ότι $A^\circ \subseteq A$.
Τώρα θα δούμε ότι το A° είναι ανοικτό.
Έστω $x \in A^\circ$, δηλαδή εσωτερικό σημείο του A. Τότε υπάρχει $r > 0$ ώστε $N_x(r) \subseteq A$. Για κάθε $y \in N_x(r)$ υπάρχει $s > 0$ ώστε $N_y(s) \subseteq N_x(r)$ και, επομένως, $N_y(s) \subseteq A$ και, επομένως, το y είναι εσωτερικό σημείο του A. Αποδείξαμε ότι κάθε $y \in N_x(r)$ είναι εσωτερικό σημείο του A, δηλαδή $y \in A^\circ$. Άρα $N_x(r) \subseteq A^\circ$, οπότε το x είναι εσωτερικό σημείο του A°.
Αποδείξαμε ότι κάθε $x \in A^\circ$ είναι εσωτερικό σημείο του A°, οπότε το A° είναι ανοικτό.
Τέλος, θα δούμε ότι το A° είναι το *μεγαλύτερο* ανοικτό υποσύνολο του A.
Έστω ανοικτό B με $B \subseteq A$.

Έστω τυχόν $x \in B$. Επειδή το B είναι ανοικτό, το x είναι εσωτερικό σημείο του B, οπότε υπάρχει $r > 0$ ώστε $N_x(r) \subseteq B$ και, επομένως, $N_x(r) \subseteq A$. Άρα το x είναι εσωτερικό σημείο του A, δηλαδή $x \in A^\circ$.
Αποδείξαμε ότι για κάθε $x \in B$ ισχύει $x \in A^\circ$, οπότε $B \subseteq A^\circ$.
Τα [γ] και [δ] είναι άμεσες συνέπειες των [α] και [β], αντιστοίχως. □

Όταν μιλάμε για μια **οικογένεια συνόλων** ή **συλλογή συνόλων** Σ εννοούμε ότι κάθε $A \in \Sigma$ είναι σύνολο. Την ένωση όλων των συνόλων/στοιχείων της συλλογής Σ τη συμβολίζουμε $\bigcup_{A\in\Sigma} A$ ή $\bigcup\{A \,|\, A \in \Sigma\}$. Φυσικά, $x \in \bigcup_{A\in\Sigma} A$ αν και μόνο αν $x \in A$ για τουλάχιστον ένα $A \in \Sigma$. Την τομή όλων των συνόλων/στοιχείων της συλλογής Σ τη συμβολίζουμε $\bigcap_{A\in\Sigma} A$ ή $\bigcap\{A \,|\, A \in \Sigma\}$. Ομοίως, $x \in \bigcap_{A\in\Sigma} A$ αν και μόνο αν $x \in A$ για κάθε $A \in \Sigma$.

Πολλές φορές μια συλλογή συνόλων περιγράφεται και με έναν διαφορετικό (αλλά, τελικά, ισοδύναμο) τρόπο. Ξεκινάμε με ένα σύνολο δεικτών Λ και σε κάθε $\lambda \in \Lambda$ αντιστοιχίζουμε ένα σύνολο A_λ. Παίρνουμε έτσι τη συλλογή συνόλων $\Sigma = \{A_\lambda \,|\, \lambda \in \Lambda\}$. Τώρα, το να λέμε ότι το A είναι στοιχείο της συλλογής Σ είναι ισοδύναμο με το να λέμε ότι $A = A_\lambda$ για κάποιο $\lambda \in \Lambda$. Επίσης, η ένωση $\bigcup_{A\in\Sigma} A$ και η τομή $\bigcap_{A\in\Sigma} A$ συμβολίζονται, ισοδύναμα, $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ ή $\bigcup\{A_\lambda \,|\, \lambda \in \Lambda\}$ και $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ ή $\bigcap\{A_\lambda \,|\, \lambda \in \Lambda\}$, αντιστοίχως. Στην ειδική περίπτωση πεπερασμένης συλλογής, οπότε ως σύνολο δεικτών παίρνουμε το $\Lambda = \{1, \dots, n\}$ για κάποιο n, η ένωση και η τομή συμβολίζονται και $\bigcup_{k=1}^n A_k$ ή $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ και $\bigcap_{k=1}^n A_k$ ή $A_1 \cap \cdots \cap A_n$. Στην περίπτωση που σύνολο δεικτών είναι το $\mathbb{N}$, η ένωση συμβολίζεται και $\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k$ ή $A_1 \cup A_n \cup \cdots$ και η τομή συμβολίζεται και $\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k$ ή $A_1 \cap A_2 \cap \cdots$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 11.1. *Έστω μετρικός χώρος (X, d).*
[α] *Έστω συλλογή συνόλων Σ κάθε στοιχείο της οποίας είναι ανοικτό υποσύνολο του X και έστω M η ένωση των στοιχείων της Σ, δηλαδή $M = \bigcup_{A\in\Sigma} A$. Τότε το M είναι ανοικτό.*
[β] *Έστω πεπερασμένου πλήθους ανοικτά υποσύνολα $A_1, \dots, A_n$ του X και M η τομή τους, δηλαδή $M = A_1 \cap \cdots \cap A_n$. Τότε το M είναι ανοικτό.*
[γ] *Έστω συλλογή συνόλων Σ κάθε στοιχείο της οποίας είναι κλειστό υποσύνολο του X και έστω M η τομή των στοιχείων της Σ, δηλαδή $M = \bigcap_{A\in\Sigma} A$. Τότε το M είναι κλειστό.*
[δ] *Έστω πεπερασμένου πλήθους κλειστά υποσύνολα $A_1, \dots, A_n$ του X και η ένωσή τους, δηλαδή $M = A_1 \cup \cdots \cup A_n$. Τότε το M είναι κλειστό.*

Απόδειξη. [α] Έστω $x \in M$. Τότε υπάρχει $A \in \Sigma$ ώστε $x \in A$. Το A είναι ανοικτό, οπότε υπάρχει περιοχή $N_x(r)$ του x ώστε $N_x(r) \subseteq A$. Επομένως, $N_x(r) \subseteq M$, οπότε το x είναι εσωτερικό σημείο του M.
[β] Έστω $x \in M$, οπότε $x \in A_1, \dots, x \in A_n$. Αφού κάθε A_k είναι ανοικτό, υπάρχουν περιοχές $N_x(r_1) \subseteq A_1, \dots, N_x(r_n) \subseteq A_n$. Ορίζουμε

$$r = \min\{r_1, \dots, r_n\},$$

οπότε $N_x(r) \subseteq N_x(r_1) \subseteq A_1, \dots, N_x(r) \subseteq N_x(r_n) \subseteq A_n$. Άρα $N_x(r) \subseteq A_1 \cap \cdots \cap A_n = M$, οπότε το x είναι εσωτερικό σημείο του M.
[γ] Το σύνολο $M^c = \bigcup_{A\in\Sigma} A^c$ είναι ανοικτό, διότι για κάθε $A \in \Sigma$ το A^c είναι ανοικτό. Άρα το M είναι κλειστό.
[δ] Το $M^c = {A_1}^c \cap \cdots \cap {A_n}^c$ είναι ανοικτό, διότι όλα τα ${A_1}^c, \dots, {A_n}^c$ είναι ανοικτά. Άρα το M είναι κλειστό. □

Παράδειγμα 11.2.13. Ένωση πεπερασμένου πλήθους κλειστών διαστημάτων είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 11.2.14. Ένωση οποιασδήποτε συλλογής ανοικτών διαστημάτων είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 11.2.15. Στο $\mathbb{R}$ θεωρούμε το σύνολο $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$.
Τότε $A^c = (-\infty, 0] \cup (1, +\infty) \cup \bigcup_{n=1}^{+\infty} (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$. Παρατηρούμε ότι $0 \in A^c$ αλλά δεν υπάρχει καμιά περιοχή του 0 η οποία να περιέχεται στο A^c. Άρα το A^c δεν είναι ανοικτό και, επομένως, το A δεν είναι κλειστό.
Εναλλακτικά, βλέπουμε ότι κάθε περιοχή του 0 τέμνει το A και, επομένως, ο 0 είναι οριακό σημείο του A. Όμως, ο 0 δεν ανήκει στο A, οπότε το A δεν είναι κλειστό.

Παράδειγμα 11.2.16. Στο $\mathbb{R}$ θεωρούμε το σύνολο $B = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$. Τώρα, $B^c = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty) \cup \bigcup_{n=1}^{+\infty} (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$, το οποίο, ως ένωση ανοικτών διαστημάτων, είναι ανοικτό. Άρα το B είναι κλειστό.

Παράδειγμα 11.2.17. Αν έχουμε μια άπειρη συλλογή ανοικτών υποσυνόλων ενός μετρικού χώρου, η τομή της είναι άλλοτε ανοικτό υποσύνολο του χώρου και άλλοτε όχι.
Για παράδειγμα, στο $\mathbb{R}$, αν $A_n = (0, 1)$ για κάθε n, τότε $\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n = (0, 1)$, το οποίο είναι ανοικτό σύνολο. Αλλά, αν $A_n = (-1 - 1/n, 1 + 1/n)$ για κάθε n, τότε $\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n = [-1, 1]$, το οποίο δεν είναι ανοικτό σύνολο.
Τα ίδια μπορούμε να πούμε για άπειρη συλλογή κλειστών υποσυνόλων και την ένωσή της.
Για παράδειγμα, πάλι στο $\mathbb{R}$, αν $A_n = [-1, 1]$ για κάθε n, τότε $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = [-1, 1]$, το οποίο είναι κλειστό σύνολο, ενώ, αν $A_n = [-1 + 1/n, 1 - 1/n]$ για κάθε n, τότε $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = (-1, 1)$, το οποίο δεν είναι κλειστό σύνολο.

Παράδειγμα 11.2.18. Το

$$(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_d, b_d) = \{(x_1, \ldots, x_d) \,|\, a_k < x_k < b_k \text{ για κάθε } k = 1, \ldots, d\}$$

ονομάζεται **ανοικτό ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο** στον $\mathbb{R}^d$ με ακμές παράλληλες στους κύριους άξονες. Αν για κάθε $k = 1, \ldots, d$ θεωρήσουμε το σημείο $\mathrm{e}_k \in \mathbb{R}^d$ το οποίο έχει όλες τις συντεταγμένες του ίσες με 0 εκτός από την k-οστή η οποία είναι ίση με 1, τότε βλέπουμε εύκολα ότι το παραπάνω ανοικτό ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο είναι ίσο με την εξής τομή $2d$ ανοικτών ημιχώρων:

$$\bigcap_{k=1}^{d} \big(\{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^d \,|\, \langle \mathrm{x}, \mathrm{e}_k \rangle > a_k\} \cap \{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^d \,|\, \langle \mathrm{x}, \mathrm{e}_k \rangle < b_k\}\big).$$

Όπως είδαμε, κάθε ανοικτός ημιχώρος είναι ανοικτό σύνολο οπότε κάθε ανοικτό ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με ακμές παράλληλες στους κύριους άξονες είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$.
Αναλόγως, το

$$[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d] = \{(x_1, \ldots, x_d) \,|\, a_k \le x_k \le b_k \text{ για κάθε } k = 1, \ldots, d\}$$

ονομάζεται **κλειστό ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο** στον $\mathbb{R}^d$ με ακμές παράλληλες στους κύριους άξονες. Τώρα, αυτό είναι ίσο με την τομή $2d$ κλειστών ημιχώρων

$$\bigcap_{k=1}^{d} \big(\{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^d \,|\, \langle \mathrm{x}, \mathrm{e}_k \rangle \ge a_k\} \cap \{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^d \,|\, \langle \mathrm{x}, \mathrm{e}_k \rangle \le b_k\}\big),$$

Άρα κάθε κλειστό ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με ακμές παράλληλες στους κύριους άξονες είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$.

Ασκήσεις.

11.2.1. Αποδείξτε ότι κάθε μη-κενό ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ περιέχει και ρητούς και άρρητους αριθμούς. Βρείτε ένα απλό κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ το οποίο να περιέχει μόνο ρητούς αριθμούς και ένα άλλο το οποίο να περιέχει μόνο άρρητους αριθμούς.

11.2.2. Ποιά από τα παρακάτω είναι ανοικτά ή κλειστά υποσύνολα του $\mathbb{R}$;
Το A και το $\mathbb{R} \setminus A$, όπου A είναι τυχόν πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, και τα $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \setminus \{1/n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$, $\mathbb{R} \setminus \big(\{0\} \cup \{1/n \,|\, n \in \mathbb{N}\}\big)$, $[0, 1) \cup \{1 + 1/n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$.
Βρείτε το εσωτερικό, την κλειστότητα, το σύνορο και το παράγωγο σύνολο καθενός από αυτά τα σύνολα.

11.2.3. Ποιά από τα παρακάτω είναι ανοικτά ή κλειστά υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$;

Τα A και $\mathbb{R}^2 \setminus A$, όπου A είναι τυχόν πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$, και τα $\{(x_1,x_2)\,|\,x_1 > 0\}$, $\{(x_1,x_2)\,|\,x_1x_2 > 1\}$, $\{(x_1,x_2)\,|\,x_1x_2 \leq 1\}$, $\mathbb{R}^2 \setminus \{(n,0)\,|\,n \in \mathbb{N}\}$, $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1/n,0)\,|\,n \in \mathbb{N}\}$, $\mathbb{R}^2 \setminus \big(\{(0,0)\} \cup \{(1/n,1/m)\,|\,n,m \in \mathbb{N}\}\big)$, $\{(x_1,0)\,|\,a \leq x_1 \leq b\}$, $\{(x_1,0)\,|\,a < x_1 < b\}$, $\mathbb{R}^2\setminus\{(x_1,0)\,|\,a \leq x_1 \leq b\}$, $\mathbb{R}^2\setminus\{(x_1,0)\,|\,a < x_1 < b\}$, $\mathbb{Q}^2$, $\mathbb{R}^2\setminus\mathbb{Q}^2$, $\mathbb{R}^2\setminus\big([0,1]\big)\times\{1/n\,|\,n \in \mathbb{N}\}\big)$, $\mathbb{R}^2 \setminus \big([0,1] \times (\{0\} \cup \{1/n\,|\,n \in \mathbb{N}\})\big)$.

Βρείτε το εσωτερικό, την κλειστότητα, το σύνορο και το παράγωγο σύνολο καθενός από αυτά τα σύνολα.

11.2.4. Ποιά από τα παρακάτω είναι ανοικτά ή κλειστά υποσύνολα του $\mathbb{R}^3$;

Τα A και $\mathbb{R}^3 \setminus A$, όπου A είναι τυχόν πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$, και τα $\{(x_1,x_2,x_3)\,|\,x_1 + x_2 + x_3 > 1\}$, $\{(x_1,x_2,x_3)\,|\,{x_1}^2 + {x_2}^2 < x_3\}$, $\{(x_1,x_2,x_3)\,|\,x_1 > 0\}$, $\mathbb{R}^3 \setminus \{(n,0,1)\,|\,n \in \mathbb{N}\}$, $\mathbb{R}^3 \setminus \big(\{(0,0,0)\} \cup \{(\frac{1}{n},0,0)\,|\,n \in \mathbb{N}\}\big)$, $\{(x_1,0,0)\,|\,a < x_1 < b\}$, $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x_1,0,0)\,|\,a \leq x_1 \leq b\}$, $\mathbb{Q}^3$, $\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{Q}^3$, $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x_1,x_2,0)\,|\,a \leq x_1 \leq b, c \leq x_2 \leq d\}$.

Βρείτε το εσωτερικό, την κλειστότητα, το σύνορο και το παράγωγο σύνολο καθενός από αυτά τα σύνολα.

11.2.5. Στο $\mathbb{R}^d$ θεωρούμε τις p-μετρικές d_p για $1 \leq p \leq +\infty$.

Στην περίπτωση $d = 1$ παρατηρήστε ότι όλες οι μετρικές d_p ταυτίζονται.

Αν $d = 2$ περιγράψτε γεωμετρικά πώς μεταβάλλονται οι περιοχές ενός σταθερού σημείου με μία σταθερή ακτίνα όταν το p μεταβάλλεται από 1 μέχρι $+\infty$. Ειδικώτερα, ζωγραφίστε ακριβώς τις περιοχές για $p = 1$, $p = 2$ και $p = +\infty$.

Κάντε τα ίδια στην περίπτωση $d = 3$.

11.2.6. Αν το A είναι μη-κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, αποδείξτε ότι $\sup A \in \overline{A}$. Ομοίως, αν το A είναι μη-κενό και κάτω φραγμένο, αποδείξτε ότι $\inf A \in \overline{A}$.

11.2.7. Βρείτε υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ με ακριβώς δύο σημεία συσσώρευσης για το καθένα.

11.2.8. [α] Θεωρήστε το κλειστό διάστημα $I_0 = [0,1]$. Πάρτε το υποσύνολό του $I_1 = [0,\frac{1}{3}]\cup[\frac{2}{3},1]$. Δηλαδή, κρατήστε τα δύο ακριανά κλειστά διαστήματα μήκους, το καθένα, το $\frac{1}{3}$ του μήκους του αρχικού I_0. Κάντε το ίδιο σε καθένα από τα δύο υποδιαστήματα του I_1. Δηλαδή, πάρτε $I_2 = [0,\frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9},\frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3},\frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9},1]$. Συνεχίστε επαγωγικά, δημιουργώντας τα $I_3, I_4, \ldots$. Αν, δηλαδή, έχετε φτιάξει το I_n ως ένωση κλειστών διαστημάτων, τότε καθένα από αυτά τα διαστήματα θα *γεννήσει* δύο νέα κλειστά διαστήματα: τα δύο ακριανά του με μήκος, το καθένα, το $\frac{1}{3}$ του μήκους του. Ορίζουμε $C = \bigcap_{n=1}^{+\infty} I_n$. Το C ονομάζεται **σύνολο του Cantor**.

Από πόσα κλειστά διαστήματα αποτελείται κάθε I_n και ποιό είναι το συνολικό μήκος αυτών των διαστημάτων;

Αποδείξτε ότι το C είναι κλειστό.

Αποδείξτε ότι το C δεν περιέχει κανένα ανοικτό διάστημα και, επομένως, ότι $C^\circ = \emptyset$.

Γράψτε το $\mathbb{R} \setminus C$ ως ένωση κατάλληλης συλλογής ανοικτών διαστημάτων.

Αποδείξτε ότι το C είναι υπεραριθμήσιμο.

[β] Περιγράψτε κατασκευή συνόλου Cantor στο $\mathbb{R}^2$: πάρτε το τετράγωνο $I_0 = [0,1] \times [0,1]$, φτιάξτε το $I_1 = \big([0,\frac{1}{3}] \times [0,\frac{1}{3}]\big) \cup \big([0,\frac{1}{3}] \times [\frac{2}{3},1]\big) \cup \big([\frac{2}{3},1] \times [0,\frac{1}{3}]\big) \cup \big([\frac{2}{3},1] \times [\frac{2}{3},1]\big)$ και συνεχίστε επαγωγικά με τα $I_2, I_3, \ldots$.

Κάθε I_n αποτελείται από ξένα ανά δύο κλειστά τετράγωνα. Καθένα από αυτά πόσα καινούρια τετράγωνα θα γεννήσει και πού βρίσκονται αυτά; Από πόσα τετράγωνα απαρτίζεται το I_n και ποιό είναι το συνολικό εμβαδό αυτών των τετραγώνων;

Θεωρήστε το $C = \bigcap_{n=1}^{+\infty} I_n$ και αποδείξτε ότι το C είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$.

Αποδείξτε ότι το C δεν περιέχει κανέναν ανοικτό δίσκο, οπότε $C^\circ = \emptyset$.

11.2.9. Έστω μετρικός χώρος (X, d). Αποδείξτε ότι $\bigcup_{r>0} N_x(r) = X$ και $\bigcap_{r>0} N_x(r) = \{x\}$ για κάθε $x \in X$.

11.2.10. Έστω μετρικός χώρος (X, d), $A \subseteq X$ και $x \in X$. Αποδείξτε ότι: το x είναι σημείο συσσώρευσης του A αν και μόνον αν κάθε περιοχή του x περιέχει άπειρα σημεία του A.

11.2.11. Έστω μετρικός χώρος (X, d), $x \in X$ και $r > 0$. Αποδείξτε ότι $\overline{N_x(r)} \subseteq \overline{N}_x(r)$.
Στο $\mathbb{R}^d$ αποδείξτε ότι $\overline{N_{\mathrm{x}}(r)} = \overline{N}_{\mathrm{x}}(r)$.
Ισχύει πάντοτε ότι $\overline{N_x(r)} = \overline{N}_x(r)$; Θεωρήστε, για παράδειγμα, μη-κενό σύνολο X με την διακριτή μετρική d_δ και συγκρίνατε τα $\overline{N_x(1)}$ και $\overline{N}_x(1)$.

11.2.12. Έστω μετρικός χώρος (X, d), ανοικτό $A \subseteq X$ και κλειστό $B \subseteq X$. Αποδείξτε ότι το $A \setminus B$ είναι ανοικτό και το $B \setminus A$ είναι κλειστό.

11.2.13. Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $A \subseteq X$. Αποδείξτε ότι $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$ και $\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ$.

11.2.14. Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $A, B, A_1, \ldots, A_n \subseteq X$ και Σ μια συλλογή υποσυνόλων του X.
[α] Αν $A \subseteq B$, αποδείξτε ότι $A^\circ \subseteq B^\circ$ και $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.
[β] Αποδείξτε ότι $(A^\circ)^\circ = A^\circ$ και $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$.
[γ] Αποδείξτε ότι $(A_1 \cap \cdots \cap A_n)^\circ = {A_1}^\circ \cap \cdots \cap {A_n}^\circ$ και $\overline{A_1 \cup \cdots \cup A_n} = \overline{A_1} \cup \cdots \cup \overline{A_n}$.
Αποδείξτε ότι $(\bigcap_{A\in\Sigma} A)^\circ \subseteq \bigcap_{A\in\Sigma} A^\circ$ και $\overline{\bigcup_{A\in\Sigma} A} \supseteq \bigcup_{A\in\Sigma} \overline{A}$.
Βρείτε συλλογή Σ υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ ώστε $(\bigcap_{A\in\Sigma} A)^\circ \neq \bigcap_{A\in\Sigma} A^\circ$. Βρείτε συλλογή Σ υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ ώστε $\overline{\bigcup_{A\in\Sigma} A} \neq \bigcup_{A\in\Sigma} \overline{A}$.
[ε] Αποδείξτε ότι $(\bigcup_{A\in\Sigma} A)^\circ \supseteq \bigcup_{A\in\Sigma} A^\circ$ και $\overline{\bigcap_{A\in\Sigma} A} \subseteq \bigcap_{A\in\Sigma} \overline{A}$.
Βρείτε δύο υποσύνολα A, B του $\mathbb{R}$ ώστε $(A \cup B)^\circ \neq A^\circ \cup B^\circ$. Βρείτε δύο υποσύνολα A, B του $\mathbb{R}$ ώστε $\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$.
[στ] Αποδείξτε ότι $A^\circ \subseteq (\overline{A})^\circ$ και $\overline{(A^\circ)} \subseteq \overline{A}$.
Βρείτε υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ ώστε $A^\circ \neq (\overline{A})^\circ$. Βρείτε υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ ώστε $\overline{(A^\circ)} \neq \overline{A}$.

11.2.15. Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $A \subseteq X$. Αποδείξτε ότι: το A είναι κλειστό αν και μόνον αν $A' \subseteq A$.

11.2.16. Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $A, B \subseteq X$.
[α] Αποδείξτε ότι το A' είναι κλειστό.
[β] Αποδείξτε ότι $A' = (\overline{A})'$. Δηλαδή, τα A και $\overline{A}$ έχουν τα ίδια σημεία συσσώρευσης.
[γ] Αν $A \subseteq B$, αποδείξτε ότι $A' \subseteq B'$.
[δ] Αποδείξτε ότι $(A')' \subseteq A'$.
Βρείτε υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ ώστε $(A')' \neq A'$.

11.2.17. Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $A, B \subseteq X$.
Αν $A^\circ = B^\circ = \emptyset$ και το A είναι κλειστό, αποδείξτε ότι $(A \cup B)^\circ = \emptyset$.
Βρείτε υποσύνολα A και B του $\mathbb{R}$ ώστε $A^\circ = B^\circ = \emptyset$ και $(A \cup B)^\circ = \mathbb{R}$.

11.2.18. Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $A, B \subseteq X$.
[α] Αν το A είναι ανοικτό ή κλειστό, αποδείξτε ότι $(\partial A)^\circ = \emptyset$.
Βρείτε υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ ώστε $(\partial A)^\circ = \mathbb{R}$.
[β] Αποδείξτε ότι $\partial(A \cup B) \subseteq \partial A \cup \partial B$.
Αν $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$, αποδείξτε ότι $\partial(A \cup B) = \partial A \cup \partial B$.
Βρείτε υποσύνολα A, B του $\mathbb{R}$ ώστε $\partial(A \cup B) \neq \partial A \cup \partial B$.

11.2.19. Έστω μετρικός χώρος (X, d), μη-κενό $A \subseteq X$ και $x \in X$. Ορίζουμε την **απόσταση** του x από το A με τον τύπο $d(x, A) = \inf\{d(x, y) \,|\, y \in A\}$.
Αποδείξτε ότι $d(x, A) = 0$ αν και μόνο αν $x \in \overline{A}$.

11.2.20. Έστω μετρικός χώρος (X, d), μη-κενό $A \subseteq X$ και $r > 0$. Ορίζουμε την r-**περιοχή** του A να είναι το σύνολο

$$N_A(r) = \{x \in X \,|\, \text{υπάρχει } y \in A \text{ ώστε } d(y, x) < r\} = \{x \in X \,|\, N_x(r) \cap A \neq \emptyset\}.$$

Αποδείξτε ότι $N_A(r) = \bigcup_{x \in A} N_x(r)$.
Για παράδειγμα, στο $\mathbb{R}$ ποιά είναι τα $N_A(r)$ για κάθε $r > 0$ και για καθένα A από τα: $\{1\}$, $[0, 1]$, $(0, 1)$, $\{0, 1\}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ και $\{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$;
Αποδείξτε ότι το $N_A(r)$ είναι ανοικτό και $A \subseteq N_A(r)$.
Αν το A είναι κλειστό, αποδείξτε ότι $A = \bigcap_{n=1}^{+\infty} N_A(\frac{1}{n})$. Συμπεράνατε ότι κάθε μη-κενό κλειστό σύνολο είναι τομή αριθμήσιμης συλλογής ανοικτών συνόλων.

11.2.21. Θεωρήστε τον μετρικό χώρο $B\big([0, 1]\big)$ με την ομοιόμορφη μετρική και το στοιχείο $f \in B\big([0, 1]\big)$ με τύπο $f(x) = x^2$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Περιγράψτε όλα τα στοιχεία της περιοχής με κέντρο f με ακτίνα $r > 0$.

11.2.22. Θεωρήστε τον μετρικό χώρο $B\big([0, 1]\big)$ με την ομοιόμορφη μετρική και το στοιχείο $f \in B\big([0, 1]\big)$ με τύπο $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } 0 \le x \le 1/3 \\ 1, & \text{αν } 1/3 < x \le 1 \end{cases}$ Αποδείξτε ότι *όλα* τα στοιχεία της περιοχής του f με ακτίνα $r \le \frac{1}{2}$ είναι συναρτήσεις στο $[0, 1]$ οι οποίες *δεν* είναι συνεχείς στο $\frac{1}{3}$. Αποδείξτε, όμως, ότι η περιοχή του f με ακτίνα $r > \frac{1}{2}$ περιέχει τουλάχιστον ένα στοιχείο το οποίο είναι συνάρτηση συνεχής στο $[0, 1]$.

11.2.23. Ένα μη-κενό υποσύνολο A του $\mathbb{R}^d$ χαρακτηρίζεται **κυρτό**, αν για κάθε $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in A$ και κάθε $t \in (0, 1)$ ισχύει $t\mathrm{x} + (1 - t)\mathrm{y} \in A$. Ποιό είναι το γεωμετρικό νόημα αυτού του ορισμού στα $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^3$;
Αποδείξτε ότι τα μόνα κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ είναι τα διαστήματα.
Αποδείξτε ότι κάθε d-διάστατη (ανοικτή ή κλειστή) μπάλα, κάθε d-διάστατο (ανοικτό ή κλειστό) ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, κάθε υπερεπίπεδο και κάθε (ανοικτός ή κλειστός) ημιχώρος στον $\mathbb{R}^d$ είναι κυρτό σύνολο.
Αν A είναι κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$, αποδείξτε ότι τα A° (στην περίπτωση που είναι μη-κενό) και $\overline{A}$ είναι κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$.

11.2.24. [α] Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $A \subseteq X$. Το A χαρακτηρίζεται **πυκνό**, αν $\overline{A} = X$.
Αποδείξτε ότι το A είναι πυκνό και μόνον αν κάθε περιοχή $N_x(r)$ καθενός $x \in X$ περιέχει τουλάχιστον ένα στοιχείο του A.
Είναι το $\mathbb{Q}$ πυκνό στο $\mathbb{R}$; Είναι το $\mathbb{Q}^2$ πυκνό στο $\mathbb{R}^2$; Είναι το $\mathbb{Q}^d$ πυκνό στο $\mathbb{R}^d$;
Βρείτε τα πυκνά υποσύνολα του μη-κενού X με τη διακριτή μετρική d_δ.
[β] Ένας μετρικός χώρος (X, d) χαρακτηρίζεται **διαχωρίσιμος** αν υπάρχει αριθμήσιμο, πυκνό υποσύνολο του X.
Είναι ο $\mathbb{R}$ διαχωρίσιμος; Είναι ο $\mathbb{R}^d$ διαχωρίσιμος;
Αν το μη-κενό X είναι εφοδιασμένο με τη διακριτή μετρική d_δ, αποδείξτε ότι το X είναι διαχωρίσιμο αν και μόνον αν είναι αριθμήσιμο.
[γ] Έστω διαχωρίσιμος μετρικός χώρος (X, d) και $A \subseteq X$ και $x \in X$. Το x χαρακτηρίζεται **σημείο συμπύκνωσης** του A, αν για κάθε $r > 0$ η περιοχή $N_x(r)$ περιέχει υπεραριθμήσιμου πλήθους στοιχεία του A.
Αν το A είναι αριθμήσιμο, αποδείξτε ότι το A δεν έχει κανένα σημείο συμπύκνωσης.

Αν το A είναι υπεραριθμήσιμο και P είναι το σύνολο όλων των σημείων συμπύκνωσης του A, αποδείξτε ότι $P' = P$ και ότι το $A \setminus P$ είναι αριθμήσιμο.

[δ] Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $P \subseteq X$. Το P χαρακτηρίζεται **τέλειο**, αν $P' = P$.

Βρείτε μερικά απλά παραδείγματα τέλειων υποσυνόλων του $\mathbb{R}$.

Αν ο (X, d) είναι διαχωρίσιμος και το $A \subseteq X$ είναι κλειστό, αποδείξτε ότι υπάρχει κάποιο τέλειο σύνολο P και κάποιο αριθμήσιμο σύνολο Z ώστε $A = P \cup Z$ και $P \cap Z = \emptyset$.

11.2.25. [α] Έστω μη-κενό σύνολο X και μετρικές d_1 και d_2 στο X. Λέμε ότι οι δύο μετρικές είναι **ισοδύναμες** αν κάθε $A \subseteq X$ το οποίο είναι ανοικτό στον (X, d_1) είναι ανοικτό και στον (X, d_2) και, αντιστρόφως, κάθε $A \subseteq X$ το οποίο είναι ανοικτό στον (X, d_2) είναι ανοικτό και στον (X, d_1).

Αποδείξτε ότι οι d_1 και d_2 είναι ισοδύναμες αν και μόνον αν κάθε $A \subseteq X$ το οποίο είναι κλειστό στον (X, d_1) είναι κλειστό και στον (X, d_2) και, αντιστρόφως, κάθε $A \subseteq X$ το οποίο είναι κλειστό στον (X, d_2) είναι κλειστό και στον (X, d_1).

Έστω X οποιοδήποτε πεπερασμένο μη-κενό σύνολο. Αποδείξτε ότι οποιεσδήποτε δύο μετρικές στο X είναι ισοδύναμες.

Συμβολίζουμε $N_x^{d_1}(r)$ και $N_x^{d_2}(r)$ τις περιοχές του $x \in X$ στους μετρικούς χώρους (X, d_1) και (X, d_2), αντιστοίχως. Αποδείξτε ότι τα παρακάτω (i), (ii) είναι ισοδύναμα.

(i) Οι d_1 και d_2 είναι ισοδύναμες.

(ii) Για κάθε $x \in X$ και κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $N_x^{d_1}(\delta) \subseteq N_x^{d_2}(\epsilon)$ και, αντιστρόφως, για κάθε $x \in X$ και κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $N_x^{d_2}(\delta) \subseteq N_x^{d_1}(\epsilon)$.

[β] Έστω μετρικός χώρος (X, d). Ορίζουμε $d' : X \times X \to \mathbb{R}$ με τον τύπο $d'(x, y) = \frac{d(x,y)}{d(x,y)+1}$ για κάθε $x, y \in X$.

Αποδείξτε ότι η d' είναι φραγμένη μετρική στο X ισοδύναμη με την d.

[γ] Δείτε την άσκηση 11.1.3. Αποδείξτε ότι για κάθε $p_1, p_2 \in [1, +\infty]$ η p_1-μετρική και p_2-μετρική στον $\mathbb{R}^d$ είναι ισοδύναμες.

11.2.26. Δείτε την άσκηση 11.1.6. Έστω μετρικός χώρος (X, d) και μη-κενό $W \subseteq X$.

[α] Αν $x \in W$ και $N_x^X(r)$ είναι η r-περιοχή του x στον μετρικό χώρο (X, d) και $N_x^W(r)$ είναι η r-περιοχή του x στον μετρικό υπόχωρο (W, d), αποδείξτε ότι $N_x^W(r) = N_x^X(r) \cap W$.

[β] Θεωρήστε το $A = (0, 1]$ ως υποσύνολο του υπόχωρου $W = (0, 1]$ του Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι $A^0 = (0, 1]$, $\overline{A} = (0, 1]$ και $\partial A = \emptyset$.

[γ] Έστω $A \subseteq W$. Αποδείξτε ότι το A είναι ανοικτό υποσύνολο του (W, d) αν και μόνο αν υπάρχει ανοικτό υποσύνολο B του (X, d) ώστε $A = B \cap W$. Αποδείξτε ότι το A είναι κλειστό υποσύνολο του (W, d) αν και μόνο αν υπάρχει κλειστό υποσύνολο B του (X, d) ώστε $A = B \cap W$.

[δ] Έστω $A \subseteq W$. Αν $A^{\circ, X}$ είναι το εσωτερικό του A ως υποσύνολο του (X, d) και $A^{\circ, W}$ είναι το εσωτερικό του A ως υποσύνολο του (W, d), αποδείξτε ότι $A^{\circ, X} \subseteq A^{\circ, W}$.

[ε] Έστω $A \subseteq W$. Αν $\overline{A}^X$ είναι η κλειστότητα του A ως υποσύνολο του (X, d) και $\overline{A}^W$ είναι η κλειστότητα του A ως υποσύνολο του (W, d), αποδείξτε ότι $\overline{A}^W = \overline{A}^X \cap W$.

[στ] Έστω $A \subseteq W$. Αν $\partial_X A$ είναι το σύνορο του A ως υποσύνολο του (X, d) και $\partial_W A$ είναι το σύνορο του A ως υποσύνολο του (W, d), αποδείξτε ότι $\partial_W A \subseteq \partial_X A \cap W$.

11.3 Όρια και συνέχεια συναρτήσεων.

ΟΡΙΣΜΟΣ 11.8. *Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $A \subseteq X$ και $x_0 \in X$ σημείο συσσώρευσης του A. Αν μια ιδιότητα έχει νόημα (είτε ισχύει είτε όχι) για κάθε $x \in A$, τότε λέμε ότι η ιδιότητα αυτή ισχύει* **κοντά στο** *x_0 αν υπάρχει $r > 0$ ώστε η ιδιότητα να ισχύει για κάθε $x \in A$ με $0 < d(x, x_0) < r$ ή, ισοδύναμα, για κάθε $x \in (N_{x_0}(r) \setminus \{x_0\}) \cap A$.*

Μπορούμε να δούμε εύκολα ότι:

Αν δύο ιδιότητες ισχύουν για κάθε x στο ίδιο σύνολο A και αν η μία ισχύει κοντά στο x_0 και η άλλη ισχύει, επίσης, κοντά στο x_0, τότε ισχύουν και οι δύο ταυτόχρονα ιδιότητες κοντά στο x_0.

Πράγματι, υπάρχει $r_1 > 0$ ώστε η πρώτη ιδιότητα να ισχύει για κάθε $x \in A$ με $0 < d(x, x_0) < r_1$ και υπάρχει $r_2 > 0$ ώστε η δεύτερη ιδιότητα να ισχύει για κάθε $x \in A$ με $0 < d(x, x_0) < r_2$. Θεωρούμε

$$r = \min\{r_1, r_2\} > 0$$

και τότε για κάθε $x \in A$ με $0 < d(x, x_0) < r$ συνεπάγεται $0 < d(x, x_0) < r_1$ και $0 < d(x, x_0) < r_2$ και, επομένως, ισχύει και η πρώτη ιδιότητα αλλά και η δεύτερη ιδιότητα.

ΟΡΙΣΜΟΣ 11.9. *Έστω μετρικοί χώροι (X, d) και (Y, ρ), $A \subseteq X$, $f : A \to Y$, $x_0 \in X$ σημείο συσσώρευσης του A και $y_0 \in Y$. Λέμε ότι το y_0 είναι* **όριο** *της f στο x_0, και συμβολίζουμε*

$$y_0 = \lim_{x \to x_0} f(x),$$

αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $f(x) \in N_{y_0}(\epsilon)$ για κάθε $x \in (N_{x_0}(\delta) \setminus \{x_0\}) \cap A$ ή, ισοδύναμα, αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $\rho(f(x), y_0) < \epsilon$ για κάθε $x \in A$ με $0 < d(x, x_0) < \delta$ ή, ισοδύναμα, αν για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει $\rho(f(x), y_0) < \epsilon$ κοντά στο x_0.

Ο ορισμός αυτός είναι η άμεση γενίκευση του ορισμού του ορίου συνάρτησης που είδαμε στην ενότητα 3.2 όπου και οι δύο μετρικοί χώροι (X, d) και (Y, ρ) είναι ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 11.3.1. Έστω ότι το μη-κενό σύνολο X είναι εφοδιασμένο με τη διακριτή μετρική d_δ. Τότε για καμία συνάρτηση ορισμένη σε υποσύνολο του X δεν έχει νόημα η μελέτη ορίου, διότι κάθε υποσύνολο του X δεν έχει κανένα σημείο συσσώρευσης.

ΠΡΟΤΑΣΗ 11.7. *Έστω μετρικοί χώροι (X, d) και (Y, ρ), $A \subseteq X$, $f : A \to Y$ και $x_0 \in X$ σημείο συσσώρευσης του A. Αν υπάρχει στο Y κάποιο όριο της f στο x_0, αυτό είναι μοναδικό.*

Απόδειξη. Έστω $y_0' = \lim_{x \to x_0} f(x)$ και $y_0'' = \lim_{x \to x_0} f(x)$, όπου y_0' και y_0'' είναι στοιχεία του Y, και υποθέτουμε (για να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι $y_0' \neq y_0''$.
Βάσει του λήμματος 11.1, υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε $N_{y_0'}(\epsilon) \cap N_{y_0''}(\epsilon) = \emptyset$.
Τότε ισχύει $f(x) \in N_{y_0'}(\epsilon)$ κοντά στο x_0 και, επίσης, ισχύει $f(x) \in N_{y_0''}(\epsilon)$ κοντά στο x_0. Άρα ισχύει $f(x) \in N_{y_0'}(\epsilon)$ *και* $f(x) \in N_{y_0''}(\epsilon)$ κοντά στο x_0 και καταλήγουμε σε άτοπο. $\square$

Βάσει του αποτελέσματος της πρότασης 11.7, μπορούμε να μιλάμε για **το** όριο μιας συνάρτησης σε κάποιο σημείο.

Και τώρα θα δούμε τη γενίκευση του ορισμού της συνέχειας συνάρτησης που είδαμε στην ενότητα 4.1 όταν και οι δύο μετρικοί χώροι (X, d) και (Y, ρ) είναι ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 11.10. *Έστω μετρικοί χώροι (X, d) και (Y, ρ), $A \subseteq X$, $f : A \to Y$ και $x_0 \in A$. Λέμε ότι η f είναι* **συνεχής** *στο x_0 αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $f(x) \in N_{f(x_0)}(\epsilon)$ για κάθε $x \in N_{x_0}(\delta) \cap A$ ή, ισοδύναμα, αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $\rho(f(x), f(x_0)) < \epsilon$ για κάθε $x \in A$ με $d(x, x_0) < \delta$.*

Αν το $x_0 \in A$ δεν είναι σημείο συσσώρευσης του A (δηλαδή είναι **μεμονωμένο σημείο** του A), τότε μπορούμε να δούμε[8] πολύ εύκολα, ακριβώς όπως όταν και οι δύο μετρικοί χώροι είναι ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}$, ότι η f είναι αυτομάτως συνεχής στο x_0. Αναλόγως, αν το $x_0 \in A$ είναι σημείο συσσώρευσης του A, τότε η f είναι συνεχής στο x_0 αν και μόνο αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 11.11. *Έστω μετρικοί χώροι (X, d) και (Y, ρ), $A \subseteq X$ και $f : A \to Y$. Λέμε ότι η f είναι* **συνεχής** *στο A αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του A.*

[8] Άσκηση 11.3.2.

ΘΕΩΡΗΜΑ 11.2. [9] *Έστω μετρικοί χώροι (X, d) και (Y, ρ), $A \subseteq X$ και $f : A \to Y$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*
(i) *Η f είναι συνεχής στο A.*
(ii) *Για κάθε ανοικτό $W \subseteq Y$ υπάρχει ανοικτό $U \subseteq X$ ώστε $f^{-1}(W) = U \cap A$.*
(iii) *Για κάθε κλειστό $F \subseteq Y$ υπάρχει κλειστό $G \subseteq X$ ώστε $f^{-1}(F) = G \cap A$.*

Απόδειξη. $[i \Rightarrow ii]$. Έστω ανοικτό $W \subseteq Y$ και τυχόν $x \in f^{-1}(W)$, οπότε $f(x) \in W$.
Επειδή το W είναι ανοικτό, υπάρχει $\epsilon_x > 0$ ώστε

$$N_{f(x)}(\epsilon_x) \subseteq W.$$

Κατόπιν, επειδή η f είναι συνεχής στο x, υπάρχει $\delta_x > 0$ ώστε να ισχύει

$$f(x') \in N_{f(x)}(\epsilon_x) \qquad \text{για κάθε } \ x' \in N_x(\delta_x) \cap A.$$

Άρα ισχύει $f(x') \in W$ ή, ισοδύναμα, $x' \in f^{-1}(W)$ για κάθε $x' \in N_x(\delta_x) \cap A$. Δηλαδή ισχύει

$$N_x(\delta_x) \cap A \subseteq f^{-1}(W) \qquad \text{για κάθε } \ x \in f^{-1}(W). \tag{11.3}$$

Τώρα ορίζουμε

$$U = \bigcup_{x \in f^{-1}(W)} N_x(\delta_x). \tag{11.4}$$

Το U είναι ανοικτό υποσύνολο του X, διότι είναι ένωση περιοχών, δηλαδή ανοικτών υποσυνόλων του X.
Από τις (11.3) και (11.4) συνεπάγεται

$$U \cap A = \bigcup_{x \in f^{-1}(W)} \big(N_x(\delta_x) \cap A\big) \subseteq f^{-1}(W). \tag{11.5}$$

Από την άλλη μεριά, για κάθε $x \in f^{-1}(W)$ ισχύει, προφανώς, $x \in A$. Επίσης, σύμφωνα με την (11.4), για κάθε $x \in f^{-1}(W)$ ισχύει $x \in U$. Άρα

$$f^{-1}(W) \subseteq U \cap A. \tag{11.6}$$

Από τις (11.5) και (11.6) συνεπάγεται $f^{-1}(W) = U \cap A$.
$[ii \Rightarrow i]$. Παίρνουμε τυχόν $x \in A$ για να αποδείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο x.
Έστω τυχών $\epsilon > 0$. Η $N_{f(x)}(\epsilon)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του Y, οπότε υπάρχει ανοικτό $U \subseteq X$ ώστε

$$f^{-1}\big(N_{f(x)}(\epsilon)\big) = U \cap A. \tag{11.7}$$

Επειδή $f(x) \in N_{f(x)}(\epsilon)$, είναι $x \in f^{-1}\big(N_{f(x)}(\epsilon)\big) = U \cap A$ και, επομένως, $x \in U$. Επειδή το U είναι ανοικτό υποσύνολο του X, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $N_x(\delta) \subseteq U$. Από την (11.7) συνεπάγεται

$$N_x(\delta) \cap A \subseteq f^{-1}\big(N_{f(x)}(\epsilon)\big).$$

Άρα για κάθε $x' \in N_x(\delta) \cap A$ ισχύει $x' \in f^{-1}\big(N_{f(x)}(\epsilon)\big)$ και, επομένως, $f(x') \in N_{f(x)}(\epsilon)$. Αυτό σημαίνει ότι η f είναι συνεχής στο x.
$[ii \Rightarrow iii]$. Έστω τυχόν κλειστό $F \subseteq Y$. Το $W = Y \setminus F$ είναι ανοικτό υποσύνολο του Y, οπότε υπάρχει ανοικτό $U \subseteq X$ ώστε $f^{-1}(W) = U \cap A$. Το $G = X \setminus U$ είναι κλειστό υποσύνολο του X και

$$f^{-1}(F) = f^{-1}(Y \setminus W) = A \setminus f^{-1}(W) = A \setminus (U \cap A) = (X \setminus U) \cap A = G \cap A.$$

[9] Το "σωστό" πλαίσιο για το θεώρημα αυτό είναι το πλαίσιο του *μετρικού υπόχωρου*. Δείτε τις ασκήσεις 11.1.6 και 11.2.26 (ειδικά το [γ]). Σ' αυτό το πλαίσιο το (ii) διατυπώνεται: *για κάθε ανοικτό υποσύνολο W του (Y, ρ) το $f^{-1}(W)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του (A, d)*. Και το (iii) διατυπώνεται: *για κάθε κλειστό υποσύνολο W του (Y, ρ) το $f^{-1}(W)$ είναι κλειστό υποσύνολο του (A, d)*.

$[iii \Rightarrow ii]$. Έστω τυχόν ανοικτό $W \subseteq Y$. Το $F = Y \setminus W$ είναι κλειστό υποσύνολο του Y, οπότε υπάρχει κλειστό $G \subseteq X$ ώστε $f^{-1}(F) = G \cap A$. Το $U = X \setminus G$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X και

$$f^{-1}(W) = f^{-1}(Y \setminus F) = A \setminus f^{-1}(F) = A \setminus (G \cap A) = (X \setminus G) \cap A = U \cap A.$$

□

Παράδειγμα 11.3.2. Θα δούμε τώρα μια σημαντική μέθοδο αναγνώρισης ανοικτών ή κλειστών υποσυνόλων ενός μετρικού χώρου. *Θεωρούμε συναρτήσεις με τιμές στο* $\mathbb{R}$.
Έστω υποσύνολο A του μετρικού χώρου (X, d), $f : A \to \mathbb{R}$ συνεχής στο A και $a, b \in \mathbb{R}$.
Αν το πεδίο ορισμού A της f είναι *ανοικτό* υποσύνολο του X, τότε τα

$$\{x \in A \,|\, a < f(x)\} = f^{-1}((a, +\infty)), \qquad \{x \in A \,|\, f(x) < b\} = f^{-1}((-\infty, b)),$$
$$\{x \in A \,|\, a < f(x) < b\} = f^{-1}((a, b))$$

είναι ανοικτά υποσύνολα του X.
Πράγματι, επειδή το $(a, +\infty)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, υπάρχει ανοικτό $U \subseteq X$ ώστε $f^{-1}((a, +\infty)) = U \cap A$. Επειδή και το A είναι ανοικτό υποσύνολο του X, συνεπάγεται ότι το $f^{-1}((a, +\infty)) = U \cap A$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X. Τα επιχειρήματα είναι ίδια και για τα υπόλοιπα σύνολα αλλά και για το επόμενο ανάλογο αποτέλεσμα.
Αν το πεδίο ορισμού A της f είναι *κλειστό* υποσύνολο του X, τότε τα

$$\{x \in A \,|\, a \le f(x)\} = f^{-1}([a, +\infty)), \qquad \{x \in A \,|\, f(x) \le b\} = f^{-1}((-\infty, b]),$$
$$\{x \in A \,|\, a \le f(x) \le b\} = f^{-1}([a, b])$$

είναι κλειστά υποσύνολα του X.
Φυσικά, εκτός από διαστήματα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε οποιοδήποτε άλλο ανοικτό ή κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.
Η εφαρμογή αυτής της μεθόδου προϋποθέτει, βέβαια, ότι μπορούμε να αναγνωρίζουμε *συνεχείς* συναρτήσεις $f : A \to \mathbb{R}$ ορισμένες σε υποσύνολα A ενός μετρικού χώρου. Οι επόμενες προτάσεις θα μας βοηθήσουν να αποκτήσουμε ένα σημαντικό απόθεμα συνεχών συναρτήσεων.

ΠΡΟΤΑΣΗ 11.8. *Έστω (X, d), (Y, ρ) και (Z, τ) τρεις μετρικοί χώροι, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$, $x_0 \in A$, $f : A \to B$ και $g : B \to Z$. Αν η f είναι συνεχής στο x_0 και η g είναι συνεχής στο $y_0 = f(x_0)$, τότε η $g \circ f : A \to Z$ είναι συνεχής στο x_0.*

Απόδειξη. Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $\delta' > 0$ ώστε να ισχύει

$$\tau(g(y), g(y_0)) < \epsilon \qquad \text{για κάθε } \; y \in B \; \text{ με } \; \rho(y, y_0) < \delta'. \tag{11.8}$$

Κατόπιν, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει

$$\rho(f(x), y_0) = \rho(f(x), f(x_0)) < \delta' \qquad \text{για κάθε } \; x \in A \; \text{ με } \; d(x, x_0) < \delta. \tag{11.9}$$

Από την (11.9) και από την (11.8) με $y = f(x)$ συνεπάγεται ότι για κάθε $x \in A$ με $d(x, x_0) < \delta$ ισχύει $\tau(g(f(x)), g(f(x_0))) < \epsilon$. Άρα η $g \circ f : A \to Z$ είναι συνεχής στο x_0. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 11.9. *Έστω μετρικός χώρος (X, d), $A \subseteq X$, $x_0 \in A$ και $f, g : A \to \mathbb{R}$ συνεχείς στο x_0. Τότε:*
[α] *η $\lambda f + \mu g : A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο x_0 για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.*
[β] *η $fg : A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο x_0.*
[γ] *αν $B = \{x \in A \,|\, g(x) \neq 0\}$ και $g(x_0) \neq 0$, τότε η $\frac{1}{g} : B \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο x_0.*

Απόδειξη. Αν το x_0 δεν είναι σημείο συσσώρευσης του A, τότε όλες οι συναρτήσεις είναι αυτομάτως συνεχείς στο x_0. Οπότε υποθέτουμε ότι το x_0 είναι σημείο συσσώρευσης του A.
[α] Έστω τυχών $\epsilon > 0$. Τότε ισχύει $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{2(|\lambda|+1)}$ και $|g(x) - g(x_0)| < \frac{\epsilon}{2(|\mu|+1)}$ κοντά στο x_0. Άρα ισχύει

$$\begin{aligned}\big|(\lambda f(x) + \mu g(x)) - (\lambda f(x_0) + \mu g(x_0))\big| &\leq |\lambda||f(x) - f(x_0)| + |\mu||g(x) - g(x_0)| \\ &\leq |\lambda|\tfrac{\epsilon}{2(|\lambda|+1)} + |\mu|\tfrac{\epsilon}{2(|\mu|+1)} < \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon\end{aligned}$$

κοντά στο x_0, οπότε η $\lambda f + \mu g : A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο x_0.
[β] Θεωρούμε τυχόντα $\epsilon > 0$ και θέτουμε

$$\epsilon_1 = \min\big\{(\tfrac{\epsilon}{3})^{1/2}, \tfrac{\epsilon}{3(|f(x_0)|+1)}, \tfrac{\epsilon}{3(|g(x_0)|+1)}\big\} > 0.$$

Τότε ισχύει $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon_1$ και $|g(x) - g(x_0)| < \epsilon_1$ κοντά στο x_0. Άρα ισχύει

$$\begin{aligned}|f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)| &\leq |f(x) - f(x_0)||g(x) - g(x_0)| + |f(x_0)||g(x) - g(x_0)| \\ &\quad + |g(x_0)||f(x) - f(x_0)| \\ &\leq {\epsilon_1}^2 + |f(x_0)|\epsilon_1 + |g(x_0)|\epsilon_1 < \tfrac{\epsilon}{3} + \tfrac{\epsilon}{3} + \tfrac{\epsilon}{3} = \epsilon\end{aligned}$$

κοντά στο x_0, οπότε η $fg : A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο x_0.
[γ] Επειδή $\frac{|g(x_0)|}{2} > 0$, ισχύει $|g(x) - g(x_0)| < \frac{|g(x_0)|}{2}$ κοντά στο x_0. Συνεπάγεται ότι ισχύει

$$|g(x)| = |g(x_0) + (g(x) - g(x_0))| \geq |g(x_0)| - |g(x) - g(x_0)| > |g(x_0)| - \tfrac{|g(x_0)}{2} = \tfrac{|g(x_0)|}{2}$$

κοντά στο x_0.
Θεωρούμε τυχόντα $\epsilon > 0$. Τότε ισχύει $|g(x) - g(x_0)| < \frac{g(x_0)^2}{2}\epsilon$ κοντά στο x_0.
Άρα ισχύει $|g(x)| > \frac{|g(x_0)|}{2}$ και $|g(x) - g(x_0)| < \frac{g(x_0)^2}{2}\epsilon$ κοντά στο x_0 και, επομένως, ισχύει

$$\big|\tfrac{1}{g(x)} - \tfrac{1}{g(x_0)}\big| = \tfrac{|g(x)-g(x_0)|}{|g(x)||g(x_0)|} \leq \tfrac{2|g(x)-g(x_0)|}{g(x_0)^2} < \epsilon$$

κοντά στο x_0. Άρα η $\frac{1}{g} : B \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο x_0. □

Συνδυάζοντας τις δύο τελευταίες προτάσεις, μπορούμε, ξεκινώντας από πολύ απλές συνεχείς συναρτήσεις, να κατασκευάζουμε όλο και πιο πολύπλοκες.

Παράδειγμα 11.3.3. Στον $\mathbb{R}^d$ ορίζεται για κάθε k με $1 \leq k \leq d$ η συνάρτηση k-**προβολή**

$$\pi_k : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$$

με τύπο

$$\pi_k(\mathrm{x}) = x_k \qquad \text{για κάθε } \mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d.$$

Κάθε π_k είναι συνεχής, διότι ισχύει

$$|\pi_k(\mathrm{x}) - \pi_k(\mathrm{y})| = |x_k - y_k| \leq \big((x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_d - y_d)^2\big)^{1/2} = \|\mathrm{x} - \mathrm{y}\|_2$$

για κάθε $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ και $\mathrm{y} = (y_1, \ldots, y_d)$ στον $\mathbb{R}^d$.
Άρα, αν η $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε η $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(\mathrm{x}) = g(x_k) \qquad \text{για κάθε } \mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$$

είναι συνεχής, διότι $f = g \circ \pi_k$.
Άρα *πολυωνυμικές συναρτήσεις* $p : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, δηλαδή συναρτήσεις με τύπο

$$p(x_1, \ldots, x_d) = A{x_1}^{a_1} \cdots {x_d}^{a_d} + B{x_1}^{b_1} \cdots {x_d}^{b_d} + \cdots,$$

όπου όλοι οι εκθέτες είναι μη αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί, όλοι οι συντελεστές είναι πραγματικοί αριθμοί και το άθροισμα είναι πεπερασμένο, είναι συνεχείς. *Ρητές συναρτήσεις*, δηλαδή λόγοι πολυωνυμικών συναρτήσεων, είναι επίσης συνεχείς (εκτός από τα σημεία στα οποία μηδενίζεται ο παρονομαστής) όπως και συναρτήσεις οι οποίες είναι απλοί συνδυασμοί εκθετικών, τριγωνομετρικών κ.λ.π. συναρτήσεων των συντεταγμένων.

Παράδειγμα 11.3.4. Έστω μετρικός χώρος (X, d) και μη-κενό $A \subseteq X$. Θεωρούμε το σύνολο $BC(A)$ όλων των φραγμένων, συνεχών συναρτήσεων $f : A \to \mathbb{R}$. Δηλαδή,

$$BC(A) = \{f \mid \text{η } f : A \to \mathbb{R} \text{ είναι φραγμένη και συνεχής}\}.$$

Το $BC(A)$ είναι, προφανώς, υποσύνολο του $B(A)$. Το $B(A)$ ορίστηκε για οποιοδήποτε μη-κενό σύνολο A αλλά το ότι το A είναι υποσύνολο ενός μετρικού χώρου (X, d) μας επιτρέπει να θεωρήσουμε συνεχείς συναρτήσεις ορισμένες στο A και έτσι να σχηματίσουμε το σύνολο $BC(A)$. Ανάμεσα στα στοιχεία $f, g \in BC(A)$ θεωρούμε την ίδια *ομοιόμορφη απόσταση*

$$d_A(f, g) = \|f - g\|_A = \sup\{|f(x) - g(x)| \mid x \in A\}$$

που έχουν ως στοιχεία και του $B(A)$. Το ότι η συνάρτηση

$$d_A : BC(A) \times BC(A) \to \mathbb{R}$$

που ορίζεται με αυτόν τον τρόπο έχει τις ιδιότητες μετρικής στον χώρο $BC(A)$ είναι προφανές. Πράγματι, είδαμε στο παράδειγμα 11.1.4 ότι η d_A έχει τις ιδιότητες $(i) - (iv)$ μιας μετρικής για κάθε $f, g, h \in B(A)$, οπότε, επειδή τα στοιχεία του $BC(A)$ είναι στοιχεία και του $B(A)$, συνεπάγεται ότι η d_A έχει τις ιδιότητες $(i) - (iv)$ για κάθε $f, g, h \in BC(A)$.

Ασκήσεις.

11.3.1. Έστω μετρικοί χώροι (X, d) και (Y, ρ), $A \subseteq X$, $x_0 \in X$ σημείο συσσώρευσης του A και $f : A \to Y$ η οποία είναι σταθερή κοντά στο x_0, δηλαδή υπάρχει $y_0 \in Y$ και $r > 0$ ώστε να ισχύει $f(x) = y_0$ για κάθε $x \in N_{x_0}(r) \cap A$. Αποδείξτε ότι $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$.

11.3.2. Έστω μετρικοί χώροι (X, d) και (Y, ρ), $A \subseteq X$, $x_0 \in A$ και $f : A \to Y$.
Αν το x_0 δεν είναι σημείο συσσώρευσης του A, αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο x_0.
Αν το x_0 είναι σημείο συσσώρευσης του A, αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 αν και μόνον αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

11.3.3. Αποδείξτε ότι κάθε συνάρτηση f ορισμένη σε οποιοδήποτε υποσύνολο A μετρικού χώρου (X, d_δ), όπου d_δ είναι η διακριτή μετρική, είναι συνεχής στο A.

11.3.4. Έστω μετρικοί χώροι (X, d) και (Y, ρ), $B \subseteq A \subseteq X$ ώστε $A \subseteq \overline{B}$, $y_0 \in Y$ και $f : A \to Y$ συνεχής στο A. Αν $f(x) = y_0$ για κάθε $x \in B$, αποδείξτε ότι $f(x) = y_0$ για κάθε $x \in A$.

11.3.5. Αποδείξτε ότι τα $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x^3 - x < 4\}$ και $\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\sin x}{2} < e^x < \sin x\}$ είναι ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Είναι το $\{x \in [0, 1] \mid \frac{1}{4} < x^2 < 4\}$ ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$;
Αποδείξτε ότι το $\{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \mid e^{-\|\mathrm{x}\|_2} + \sin \|\mathrm{x}\|_2 > 0\}$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Είναι το $\{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \mid \|\mathrm{x}\|_2 - \|\mathrm{x}\|_2{}^3 \leq 3\}$ κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$;

11.3.6. Έστω μετρικοί χώροι (X, d) και (Y, ρ) και $f : X \to Y$. Αποδείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:
(i) Η f είναι συνεχής στο X.
(ii) $f^{-1}(B^\circ) \subseteq \big(f^{-1}(B)\big)^\circ$ για κάθε $B \subseteq Y$.
(iii) $f(\overline{B}) \subseteq \overline{f(B)}$ για κάθε $B \subseteq X$.

11.3.7. Έστω μετρικός χώρος (X, d), $A \subseteq X$, x_0 σημείο συσσώρευσης του A, $f, g : A \to \mathbb{R}$ και $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ και $\lim_{x \to x_0} g(x) = m$.
Αποδείξτε ότι $\lim_{x \to x_0} (f + g)(x) = l + m$ και $\lim_{x \to x_0} (fg)(x) = lm$.
Αν, επιπλέον, $m \neq 0$, θεωρήστε το $B = \{x \in A \mid g(x) \neq 0\}$ και αποδείξτε ότι το x_0 είναι σημείο συσσώρευσης του B και ότι για την $\frac{1}{g} : B \to \mathbb{R}$ ισχύει $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{m}$.

11.3.8. [α] Έστω μετρικός χώρος (X,d), μη-κενό $A \subseteq X$ και η συνάρτηση $d(\cdot\,,A) : X \to \mathbb{R}$ που ορίσθηκε στην άσκηση 11.2.19. Αποδείξτε ότι ισχύει $|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y)$ για κάθε $x, y \in X$ και ότι η $d(\cdot\,,A) : X \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής.
[β] Έστω μετρικός χώρος (X,d) και μη-κενά *κλειστά* υποσύνολα A και B του X με $A \cap B = \emptyset$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{d(x,A)}{d(x,A)+d(x,B)}$ για κάθε $x \in X$.
Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής.
Αποδείξτε ότι ισχύει $f(x) = 1$ αν και μόνο αν $x \in B$ καθώς και ότι ισχύει $f(x) = 0$ αν και μόνο αν $x \in A$.
Ορίζουμε $K = f^{-1}\big((-\infty, \frac{1}{2})\big)$ και $L = f^{-1}\big((\frac{1}{2}, +\infty)\big)$. Αποδείξτε ότι τα K και L είναι ανοικτά υποσύνολα του X, ότι $K \cap L = \emptyset$ και ότι $A \subseteq K$ και $B \subseteq L$.

11.4 Ακολουθίες.

Ο επόμενος ορισμός είναι γενίκευση του ορισμού που υπάρχει στην ενότητα 2.2 του ορίου ακολουθίας στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 11.12. *Έστω μετρικός χώρος (X,d), $x \in X$ και ακολουθία (x_n) στο X. Λέμε ότι η (x_n)* **συγκλίνει** *στο x στον (X,d) ή ότι το x είναι* **όριο** *της (x_n) στον (X,d), και συμβολίζουμε*

$$x_n \to x \qquad \text{ή} \qquad \lim_{n\to+\infty} x_n = x,$$

αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $x_n \in N_x(\epsilon)$ για κάθε $n \geq n_0$ ή, ισοδύναμα, αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $d(x_n, x) < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$ ή, ισοδύναμα, αν για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει τελικά $d(x_n, x) < \epsilon$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 11.10. *Έστω μετρικός χώρος (X,d) και ακολουθία (x_n) στο X. Αν υπάρχει όριο της (x_n), τότε το όριο αυτό είναι μοναδικό.*

Απόδειξη. Έστω $x_n \to x'$ και $x_n \to x''$ και (για να καταλήξουμε σε άτοπο) ας υποθέσουμε ότι $x' \neq x''$.
Γνωρίζουμε ότι υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε $N_{x'}(\epsilon) \cap N_{x''}(\epsilon) = \emptyset$. Τότε ισχύει τελικά $x_n \in N_{x'}(\epsilon)$ και $x_n \in N_{x''}(\epsilon)$ και αυτό είναι, προφανώς, άτοπο. □

Σύμφωνα με την πρόταση 11.10, μπορούμε να μιλάμε για **το** όριο μιας ακολουθίας.

Παράδειγμα 11.4.1. Έστω μετρικός χώρος (X,d), $x \in X$ και (x_n) στον X η οποία από κάποιον δείκτη και πέρα είναι σταθερή και ίση με x. Τότε $x_n \to x$.
Πράγματι, έστω ότι υπάρχει κάποιο n_0 ώστε να ισχύει $x_n = x$ για κάθε $n \geq n_0$. Παίρνουμε τυχόντα $\epsilon > 0$ και τότε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $d(x_n, x) = 0 < \epsilon$. Άρα $x_n \to x$.

Η επόμενη πρόταση ανάγει τη σύγκλιση ακολουθιών στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^d$ στη σύγκλιση ακολουθιών πραγματικών αριθμών.

ΠΡΟΤΑΣΗ 11.11. *Έστω $\mathrm{x}_n = (x_{n,1}, \ldots, x_{n,d}) \in \mathbb{R}^d$ για κάθε n και $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα.*
(i) $\mathrm{x}_n \to \mathrm{x}$ στο $\mathbb{R}^d$.
(ii) $x_{n,k} \to x_k$ στο $\mathbb{R}$ για κάθε $k = 1, \ldots, d$.

Απόδειξη. $[i \Rightarrow ii]$. Έστω $\mathrm{x}_n \to \mathrm{x}$ στο $\mathbb{R}^d$. Θεωρούμε τυχόντα $\epsilon > 0$ και τότε ισχύει τελικά $\|\mathrm{x}_n - \mathrm{x}\|_2 < \epsilon$. Επομένως, για κάθε $k = 1, \ldots, d$ ισχύει τελικά

$$0 \leq |x_{n,k} - x_k| \leq \big((x_{n,1} - x_1)^2 + \cdots + (x_{n,d} - x_d)^2\big)^{1/2} = \|\mathrm{x}_n - \mathrm{x}\|_2 < \epsilon.$$

Άρα για κάθε $k = 1, \ldots, d$ έχουμε ότι $x_{n,k} \to x_k$ στο $\mathbb{R}$.

$[ii \Rightarrow i]$. Έστω $x_{n,k} \to x_k$ στο $\mathbb{R}$ για κάθε $k = 1, \ldots, d$. Θεωρούμε τυχόντα $\epsilon > 0$ και έχουμε ότι ισχύει τελικά $|x_{n,k} - x| < \epsilon/\sqrt{d}$ για κάθε $k = 1, \ldots, d$. Άρα ισχύει τελικά

$$\|\mathrm{x}_n - \mathrm{x}\|_2 = \big((x_{n,1} - x_1)^2 + \cdots + (x_{n,d} - x_d)^2\big)^{1/2} < (d\,\tfrac{\epsilon^2}{d})^{1/2} = \epsilon.$$

Άρα $\mathrm{x}_n \to \mathrm{x}$ στο $\mathbb{R}^d$. □

Παράδειγμα 11.4.2. Σε μη-κενό σύνολο X με την διακριτή μετρική d_δ ισχύει $N_x(\epsilon) = \{x\}$, αν $0 < \epsilon \leq 1$, και $N_x(\epsilon) = X$, αν $1 < \epsilon$.
Αν μια ακολουθία (x_n) συγκλίνει στο x, τότε για $\epsilon = \frac{1}{2}$ υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $x_n \in N_x(\frac{1}{2}) = \{x\}$ ή, ισοδύναμα, $x_n = x$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα η (x_n) είναι τελικά σταθερή. Το αντίστροφο, σύμφωνα με το παράδειγμα 11.4.1, ισχύει σε κάθε μετρικό χώρο.
Άρα οι συγκλίνουσες ακολουθίες στον (X, d_δ) είναι εκείνες και μόνον εκείνες οι οποίες είναι τελικά σταθερές.

Παράδειγμα 11.4.3. Όπως στο παράδειγμα 11.1.4, θεωρούμε τον μετρικό χώρο $(B(A), d_A)$, όπου A είναι ένα μη-κενό σύνολο και $B(A)$ είναι το σύνολο όλων των φραγμένων συναρτήσεων $f : A \to \mathbb{R}$. Η απόσταση δύο συναρτήσεων $f, g \in B(A)$ ορίστηκε να είναι

$$d_A(f, g) = \|f - g\|_A = \sup\{|f(x) - g(x)\,|\,x \in A\}.$$

Αν θεωρήσουμε μια ακολουθία (f_n) στον χώρο $B(A)$, τότε το ότι η (f_n) συγκλίνει στην συνάρτηση $f \in B(A)$ στον μετρικό χώρο $(B(A), d_A)$ ισοδυναμεί με το ότι για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει τελικά $\|f_n - f\|_A = d_A(f_n, f) < \epsilon$, δηλαδή με το ότι

$$\|f_n - f\|_A \to 0.$$

Αυτό, όμως, το τελευταίο ισοδυναμεί, σύμφωνα με τον ορισμό 9.3, με το ότι η ακολουθία συναρτήσεων (f_n) συγκλίνει στην f ομοιόμορφα στο σύνολο A. Βλέπουμε, λοιπόν, ότι *η σύγκλιση ακολουθίας στον μετρικό χώρο $(B(A), d_A)$ ισοδυναμεί με την ομοιόμορφη σύγκλιση ακολουθίας συναρτήσεων στο σύνολο A*. Αυτός είναι ο λόγος που η μετρική d_A ονομάστηκε, εκτός από ομοιόμορφη μετρική στο $B(A)$, και *μετρική της ομοιόμορφης σύγκλισης στο A*.
Τα ίδια μπορούμε να πούμε για την περίπτωση του μετρικού χώρου $(BC(A), d_A)$ του παραδείγματος 11.3.4 στην περίπτωση που το A είναι μη-κενό υποσύνολο ενός μετρικού χώρου, $BC(A)$ είναι το σύνολο όλων των φραγμένων και συνεχών συναρτήσεων $f : A \to \mathbb{R}$ και d_A είναι η ομοιόμορφη μετρική στο $BC(A)$. Και πάλι η σύγκλιση ακολουθίας στον μετρικό χώρο $(BC(A), d_A)$ ισοδυναμεί με την ομοιόμορφη σύγκλιση ακολουθίας συναρτήσεων στο σύνολο A. Η μόνη διαφορά είναι ότι οι συναρτήσεις μας είναι φραγμένες και συνεχείς και όχι μόνο φραγμένες.

Θα δούμε, τώρα, την πολύ ισχυρή σχέση ανάμεσα στην έννοια της σύγκλισης ακολουθιών και σε διάφορες έννοιες που έχουμε ήδη μελετήσει: τις έννοιες του οριακού σημείου και του σημείου συσσώρευσης, την έννοια του κλειστού υποσυνόλου (και, εμμέσως, του ανοικτού υποσυνόλου) και, τέλος, τις έννοιες του ορίου συνάρτησης και της συνέχειας συνάρτησης.

ΠΡΟΤΑΣΗ 11.12. *Έστω μετρικός χώρος (X, d), $A \subseteq X$ και $x \in X$.*
[α] Το x είναι οριακό σημείο του A αν και μόνον αν υπάρχει ακολουθία (x_n) στο A ώστε $x_n \to x$.
[β] Το x είναι σημείο συσσώρευσης του A αν και μόνον αν υπάρχει ακολουθία (x_n) στο $A \setminus \{x\}$ ώστε $x_n \to x$.

Απόδειξη. [α] Έστω ότι το x είναι οριακό σημείο του A και έστω τυχόν $n \in \mathbb{N}$. Στην περιοχή $N_x(\frac{1}{n})$ υπάρχει τουλάχιστον ένα στοιχείο του A και έστω x_n ένα τέτοιο στοιχείο. Δηλαδή, ισχύει $x_n \in A$ και $d(x_n, x) < \frac{1}{n}$ για κάθε n και, επομένως, για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει τελικά $d(x_n, x) < \epsilon$
Άρα υπάρχει ακολουθία (x_n) στο A ώστε $x_n \to x$.
Αντιστρόφως, έστω ότι υπάρχει ακολουθία (x_n) στο A ώστε $x_n \to x$. Παίρνουμε τυχόντα $\epsilon > 0$,

οπότε ισχύει τελικά $x_n \in N_x(\epsilon)$ και, επομένως, η περιοχή $N_x(\epsilon)$ του x περιέχει τουλάχιστον ένα στοιχείο του A. Άρα το x είναι οριακό σημείο του A.

[β] Άμεση συνέπεια του [α], διότι το x είναι σημείο συσσώρευσης του A αν και μόνον αν είναι οριακό σημείο του $A \setminus \{x\}$. □

Παράδειγμα 11.4.4. Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $A \subseteq X$. Κάθε $x \in A$ είναι οριακό σημείο του A, διότι υπάρχει η σταθερή ακολουθία (x) στο A με όριο x.

Παράδειγμα 11.4.5. Έστω $a < b$ και το διάστημα $[a, b]$ στο $\mathbb{R}$. Από το προηγούμενο παράδειγμα γνωρίζουμε ότι κάθε $x \in [a, b]$ είναι οριακό σημείο του $[a, b]$. Επίσης, κάθε $x \in [a, b]$ είναι σημείο συσσώρευσης του $[a, b]$. Πράγματι, αν $a \leq x < b$, υπάρχει η ακολουθία $\big(x + \frac{b-x}{n}\big)$ στο $[a, b] \setminus \{x\}$ με όριο το x και, αν $x = b$, υπάρχει η ακολουθία $\big(b - \frac{b-a}{n}\big)$ στο $[a, b] \setminus \{b\}$ με όριο το b.
Έστω, τώρα, $a < b < c$ και το $[a, b] \cup \{c\}$ στο $\mathbb{R}$. Κάθε $x \in [a, b] \cup \{c\}$ είναι οριακό σημείο του $[a, b] \cup \{c\}$. Επίσης, με την αιτιολόγηση του προηγούμενου παραδείγματος, κάθε $x \in [a, b]$ είναι σημείο συσσώρευσης του $[a, b] \cup \{c\}$. Όμως, το c δεν είναι σημείο συσσώρευσης του $[a, b] \cup \{c\}$, διότι δεν υπάρχει καμία ακολουθία (x_n) στο $\big([a, b] \cup \{c\}\big) \setminus \{c\} = [a, b]$ με όριο το c.

ΠΡΟΤΑΣΗ 11.13. *Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $A \subseteq X$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα.*
(i) *Το A είναι κλειστό.*
(ii) *Κάθε x, το οποίο είναι όριο ακολουθίας στο A, ανήκει στο A.*

Απόδειξη. $[i \Rightarrow ii]$. Έστω τυχόν x για το οποίο υπάρχει (x_n) στο A ώστε $x_n \to x$. Βάσει της πρότασης 11.12, το x είναι οριακό σημείο του A, οπότε, επειδή το A είναι κλειστό, ισχύει $x \in A$.

$[ii \Rightarrow i]$. Έστω τυχόν οριακό σημείο x του A. Τότε, από την πρόταση 11.12, υπάρχει ακολουθία στο A με όριο x και, επομένως, το x ανήκει στο A. Άρα το A περιέχει όλα τα οριακά σημεία του, οπότε είναι κλειστό. □

Παράδειγμα 11.4.6. Θεωρούμε το διάστημα $[a, b]$ στο $\mathbb{R}$ και οποιοδήποτε x το οποίο είναι όριο ακολουθίας (x_n) στο $[a, b]$. Δηλαδή, ισχύει $a \leq x_n \leq b$ για κάθε n και $x_n \to x$. Παίρνοντας όριο καθώς $n \to +\infty$, βρίσκουμε ότι $a \leq x \leq b$, δηλαδή, $x \in [a, b]$. Άρα το $[a, b]$ είναι κλειστό σύνολο.
Ομοίως, κάθε κλειστό διάστημα $[a, +\infty)$, $(-\infty, b]$, $(-\infty, +\infty)$ είναι κλειστό σύνολο.
Για το (a, b) υπάρχει ένα τουλάχιστον x, συγκεκριμένα το $x = a$ ή το $x = b$, το οποίο είναι όριο ακολουθίας στο (a, b), συγκεκριμένα της $(a + (b - a)/2n)$ ή της $(b - (b - a)/2n)$, αντιστοίχως, αλλά δεν ανήκει στο (a, b). Άρα το (a, b) δεν είναι κλειστό σύνολο.
Ομοίως αποδεικνύεται ότι τα $(a, +\infty)$, $(-\infty, b)$, $[a, b)$, $(a, b]$ δεν είναι κλειστά σύνολα.

Οι προτάσεις 11.14 και 11.15 είναι γενικεύσεις των θεωρημάτων 3.1 και 4.1, αντιστοίχως, τα οποία ισχύουν στο πλαίσιο του $\mathbb{R}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 11.14. *Έστω μετρικοί χώροι (X, d) και (Y, ρ), $A \subseteq X$, x_0 σημείο συσσώρευσης του A, $y_0 \in Y$ και $f : A \to Y$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα.*
(i) $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$.
(ii) *Για κάθε (x_n) στο $A \setminus \{x_0\}$ με $x_n \to x_0$ ισχύει $f(x_n) \to y_0$.*

Απόδειξη. $[i \Rightarrow ii]$. Έστω (x_n) στο $A \setminus \{x_0\}$ ώστε $x_n \to x_0$. Θεωρούμε τυχόντα $\epsilon > 0$, οπότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει

$$d(f(x), y_0) < \epsilon \qquad \text{για κάθε } x \in A \text{ με } 0 < d(x, x_0) < \delta. \tag{11.10}$$

Κατόπιν, υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει

$$d(x_n, x_0) < \delta \qquad \text{για κάθε } n \geq n_0. \tag{11.11}$$

Επειδή ισχύει $x_n \neq x_0$ για κάθε n, από την (11.11) καθώς και από την (11.10) με $x = x_n$ συνεπάγεται ότι για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $d(f(x_n), y_0) < \epsilon$. Άρα $f(x_n) \to y_0$.
$[ii \Rightarrow i]$. Έστω ότι *δεν* είναι $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$. Τότε υπάρχει κάποιος $\epsilon > 0$ ώστε για κάθε $\delta > 0$ να υπάρχει $x \in A$ με $0 < d(x, x_0) < \delta$ και $\rho(f(x), y_0) \geq \epsilon$. Άρα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει

$$x_n \in A \ \text{ με } \ 0 < d(x_n, x_0) < \tfrac{1}{n} \ \text{ και } \ \rho(f(x_n), y_0) \geq \epsilon.$$

Τότε η ακολουθία (x_n) είναι στο $A \setminus \{x_0\}$ και ισχύει $x_n \to x_0$ αλλά όχι $f(x_n) \to y_0$. Καταλήγουμε σε άτοπο, οπότε $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$. □

Η απόδειξη της πρότασης 11.15 είναι σχεδόν κατά λέξη επανάληψη της απόδειξης της πρότασης 11.14.

ΠΡΟΤΑΣΗ 11.15. *Έστω μετρικοί χώροι (X, d) και (Y, ρ), $A \subseteq X$, $x_0 \in A$ και $f : A \to Y$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα.*
(i) Η f είναι συνεχής στο x_0.
(ii) Για κάθε (x_n) στο A με $x_n \to x_0$ ισχύει $f(x_n) \to f(x_0)$.

Απόδειξη. $[i \Rightarrow ii]$. Έστω (x_n) στο A ώστε $x_n \to x_0$. Θεωρούμε τυχόντα $\epsilon > 0$, οπότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει

$$d(f(x), f(x_0)) < \epsilon \qquad \text{για κάθε } \ x \in A \ \text{ με } \ d(x, x_0) < \delta. \tag{11.12}$$

Κατόπιν, υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει

$$d(x_n, x_0) < \delta \qquad \text{για κάθε } \ n \geq n_0. \tag{11.13}$$

Από την (11.13) καθώς και από την (11.12) με $x = x_n$ συνεπάγεται ότι για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $d(f(x_n), f(x_0)) < \epsilon$. Άρα $f(x_n) \to f(x_0)$.
$[ii \Rightarrow i]$. Έστω ότι η f *δεν* είναι συνεχής στο x_0. Τότε υπάρχει κάποιος $\epsilon > 0$ ώστε για κάθε $\delta > 0$ να υπάρχει $x \in A$ με $d(x, x_0) < \delta$ και $\rho(f(x), f(x_0)) \geq \epsilon$. Άρα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει

$$x_n \in A \ \text{ με } \ d(x_n, x_0) < \tfrac{1}{n} \ \text{ και } \ \rho(f(x_n), f(x_0)) \geq \epsilon.$$

Τότε η ακολουθία (x_n) είναι στο A και ισχύει $x_n \to x_0$ αλλά όχι $f(x_n) \to f(x_0)$. Καταλήγουμε σε άτοπο και άρα η f είναι συνεχής στο x_0. □

Ασκήσεις.

11.4.1. Έστω $x_n \to x$ στον μετρικό χώρο (X, d) και υποακολουθία (x_{n_k}). Αποδείξτε ότι $x_{n_k} \to x$ στον (X, d).

11.4.2. Έστω ότι $x_n \to x$ και $y_n \to y$ στον (X, d). Αποδείξτε ότι $d(x_n, y_n) \to d(x, y)$ στο $\mathbb{R}$.

11.4.3. Έστω μετρικός χώρος (X, d), $A \subseteq X$ και $x \in X$. Αποδείξτε ότι το x είναι συνοριακό σημείο του A αν και μόνον αν υπάρχουν (x'_n) στο A και (x''_n) στο A^c ώστε $x'_n \to x$ και $x''_n \to x$.

11.4.4. Θεωρούμε τις ακολουθίες (x_n) και (y_n) στο $\mathbb{R}^d$ και ακολουθία (λ_n) στο $\mathbb{R}$. Αν $\mathrm{x}_n \to \mathrm{x}$, $\mathrm{y}_n \to \mathrm{y}$ στο $\mathbb{R}^d$ και $\lambda_n \to \lambda$ στο $\mathbb{R}$, αποδείξτε ότι $\mathrm{x}_n + \mathrm{y}_n \to \mathrm{x} + \mathrm{y}$ και $\lambda_n \mathrm{x}_n \to \lambda \mathrm{x}$ στο $\mathbb{R}^d$ και $\langle \mathrm{x}_n, \mathrm{y}_n \rangle \to \langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle$ στο $\mathbb{R}$.

11.4.5. Χρησιμοποιώντας ακολουθίες, αποδείξτε ότι το $\{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ δεν είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ ενώ το $\{0\} \cup \{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

11.4.6. Χρησιμοποιώντας ακολουθίες, αποδείξτε ότι κάθε κλειστή μπάλα, κάθε υπερεπίπεδο, κάθε κλειστός ημιχώρος και κάθε κλειστό ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο στο $\mathbb{R}^d$ με ακμές παράλληλες στους κύριους άξονες είναι κλειστά υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$.

11.4.7. Έστω μη-κενό σύνολο X με τη διακριτή μετρική d_δ. Χρησιμοποιώντας ακολουθίες, αποδείξτε ότι κάθε $A \subseteq X$ είναι κλειστό.

11.4.8. Θεωρήστε τον χώρο $(BC([a,b]), d_A)$ των φραγμένων και συνεχών συναρτήσεων στο διάστημα $[a,b]$ με την ομοιόμορφη μετρική και την συνάρτηση $I : BC([a,b]) \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{για κάθε } \ f \in BC([a,b]).$$

Αποδείξτε ότι η I είναι συνεχής.

11.4.9. Έστω μετρικός χώρος (X,d) και ακολουθία (x_n) στο X. Αποδείξτε ότι το σύνολο των υποακολουθιακών ορίων της (x_n) στο X είναι κλειστό.

11.5 Πληρότητα.

Ο ορισμός 11.13 και η πρόταση 11.16 αποτελούν γενίκευση του ορισμού 2.18 και της πρότασης 2.17 για το $\mathbb{R}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 11.13. *Έστω μετρικός χώρος (X,d) και ακολουθία (x_n) στο X. Λέμε ότι η (x_n) είναι* **ακολουθία Cauchy** *αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $d(x_n, x_m) < \epsilon$ για κάθε $n, m \geq n_0$.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 11.16. *Έστω μετρικός χώρος (X,d) και ακολουθία (x_n) στο X. Αν η (x_n) συγκλίνει, τότε είναι ακολουθία Cauchy.*

Απόδειξη. Έστω $x_n \to x$ και έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $d(x_n, x) < \frac{\epsilon}{2}$ για κάθε $n \geq n_0$. Με απλή αλλαγή του συμβόλου του δείκτη, ισχύει $d(x_m, x) < \frac{\epsilon}{2}$ για κάθε $m \geq n_0$. Άρα για κάθε $n, m \geq n_0$ ισχύει

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) \leq \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Άρα η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy. □

ΟΡΙΣΜΟΣ 11.14. *Έστω μετρικός χώρος (X,d) και $A \subseteq X$. Το A χαρακτηρίζεται* **πλήρες** *αν κάθε ακολουθία (x_n) στο A, η οποία είναι ακολουθία Cauchy, συγκλίνει σε στοιχείο του A.*
Ο ίδιος ο χώρος (X,d) χαρακτηρίζεται **πλήρης** *αν το X είναι πλήρες, δηλαδή αν κάθε ακολουθία (x_n) στο X, η οποία είναι ακολουθία Cauchy, συγκλίνει σε στοιχείο του X.*

Παράδειγμα 11.5.1. Βάσει των αποτελεσμάτων της ενότητας 2.6, ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}$ είναι πλήρης.

Παράδειγμα 11.5.2. Έστω μη-κενό X με την διακριτή μετρική d_δ και έστω ακολουθία Cauchy (x_n). Τότε για $\epsilon = 1$ υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $d_\delta(x_n, x_m) < 1$ για κάθε $n, m \geq n_0$. Άρα ισχύει $x_n = x_m$ για κάθε $n, m \geq n_0$ και, επομένως, η (x_n) είναι τελικά σταθερή, οπότε συγκλίνει. Άρα ο μετρικός χώρος (X, d_δ) είναι πλήρης.

ΘΕΩΡΗΜΑ 11.3. *Ο χώρος $\mathbb{R}^d$ είναι πλήρης.*

Απόδειξη. Έστω ότι η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy στο $\mathbb{R}^d$. Θεωρούμε τυχόντα $\epsilon > 0$, οπότε υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $\|\mathrm{x}_n - \mathrm{x}_m\|_2 < \epsilon$ για κάθε $n, m \geq n_0$. Αν $\mathrm{x}_n = (x_{n,1}, \ldots, x_{n,d})$, τότε για κάθε $k = 1, \ldots, d$ ισχύει

$$|x_{n,k} - x_{m,k}| \leq \|\mathrm{x}_n - \mathrm{x}_m\|_2 < \epsilon$$

για κάθε $n, m \geq n_0$ και, επομένως, για κάθε $k = 1, \ldots, d$ η $(x_{n,k})$ είναι ακολουθία Cauchy στο $\mathbb{R}$. Όμως, ο $\mathbb{R}$ είναι πλήρης, οπότε για κάθε $k = 1, \ldots, d$ υπάρχει $x_k \in \mathbb{R}$ ώστε $x_{n,k} \to x_k$ στο $\mathbb{R}$. Τώρα ορίζουμε $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ και έχουμε ότι $\mathrm{x}_n \to \mathrm{x}$ στο $\mathbb{R}^d$. □

ΘΕΩΡΗΜΑ 11.4. *Ο μετρικός χώρος $(B(A), d_A)$ είναι πλήρης.*

Απόδειξη. Έστω ακολουθία Cauchy (f_n) στον $(B(A), d_A)$. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $\|f_n - f_m\|_A \leq \epsilon$ για κάθε $n, m \geq n_0$.
Έστω $x \in A$. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_A \leq \epsilon \qquad \text{για κάθε } \ n, m \geq n_0.$$

Άρα η ακολουθία *αριθμών* $(f_n(x))$ είναι ακολουθία Cauchy και, επομένως, συγκλίνει σε κάποιον αριθμό.
Ορίζουμε $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ για κάθε $x \in A$, οπότε δημιουργείται συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$.
Είδαμε πιο πάνω ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \epsilon \qquad \text{για κάθε } \ x \in A \ \text{ και κάθε } \ n, m \geq n_0. \tag{11.14}$$

Θεωρώντας το όριο $\lim_{m\to+\infty}$ στην (11.14), συμπεραίνουμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon \qquad \text{για κάθε } \ x \in A \ \text{ και κάθε } \ n \geq n_0. \tag{11.15}$$

Τώρα μπορούμε να δούμε ότι η συνάρτηση f είναι φραγμένη στο A, δηλαδή είναι στοιχείο του χώρου $B(A)$. Πράγματι, από την (11.15) με $n = n_0$ και χρησιμοποιώντας ότι η f_{n_0} είναι φραγμένη στο A, οπότε υπάρχει M ώστε να ισχύει $|f_{n_0}(x)| \leq M$ για κάθε $x \in A$, βρίσκουμε ότι ισχύει

$$|f(x)| \leq |f_{n_0}(x) - f(x)| + |f_{n_0}(x)| \leq \epsilon + M \qquad \text{για κάθε } \ x \in A.$$

Επίσης, η (11.15) μας λέει ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει

$$\|f_n - f\|_A \leq \epsilon \qquad \text{για κάθε } \ n \geq n_0.$$

Άρα η (f_n) συγκλίνει στην f στον $(B(A), d_A)$. □

ΘΕΩΡΗΜΑ 11.5. *Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $A \subseteq X$. Ο μετρικός χώρος $(BC(A), d_A)$ είναι πλήρης.*

Απόδειξη. Έστω ακολουθία Cauchy (f_n) στον $(BC(A), d_A)$. Επειδή το $BC(A)$ είναι υποσύνολο του $B(A)$, η ακολουθία (f_n) είναι ακολουθία και στον $B(A)$. Και, επειδή η μετρική d_A που χρησιμοποιούμε στον $BC(A)$ είναι η ίδια με την μετρική d_A που χρησιμοποιούμε στον μεγαλύτερο χώρο $B(A)$, συνεπάγεται ότι η (f_n) είναι ακολουθία Cauchy και στον $(B(A), d_A)$. Άρα, σύμφωνα με το θεώρημα 11.4, υπάρχει $f \in B(A)$ ώστε η (f_n) να συγκλίνει στην f στον $(B(A), d_A)$. Απομένει να αποδείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο A ώστε η f να είναι στοιχείο του $BC(A)$.
Έστω $\xi \in A$ και $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $\|f_n - f\|_A < \frac{\epsilon}{3}$ για κάθε $n \geq n_0$ και, ειδικώτερα, $\|f_{n_0} - f\|_A < \frac{\epsilon}{3}$. Αφού η f_{n_0} είναι συνεχής στο ξ, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(\xi)| < \frac{\epsilon}{3}$ για κάθε $x \in N_\xi(\delta) \cap A$. Άρα για κάθε $x \in N_\xi(\delta) \cap A$ ισχύει

$$\begin{aligned} |f(x) - f(\xi)| &\leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(\xi)| + |f_{n_0}(\xi) - f(\xi)| \\ &\leq \|f_{n_0} - f\|_A + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(\xi)| + \|f_{n_0} - f\|_A < \tfrac{\epsilon}{3} + \tfrac{\epsilon}{3} + \tfrac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

Άρα η f είναι συνεχής στο ξ. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 11.17. *Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $A \subseteq X$. Αν το A είναι πλήρες, τότε το A είναι κλειστό.*

Απόδειξη. Έστω οριακό σημείο x του A. Τότε υπάρχει (x_n) στο A ώστε $x_n \to x$. Επειδή η (x_n) συγκλίνει, είναι ακολουθία Cauchy. Επειδή το A είναι πλήρες, η (x_n) συγκλίνει σε στοιχείο του A. Λόγω μοναδικότητας του ορίου, αυτό το στοιχείο του A είναι το x.
Άρα το A περιέχει κάθε οριακό σημείο του, οπότε είναι κλειστό. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 11.18. *Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $A \subseteq B \subseteq X$. Αν το B είναι πλήρες και το A είναι κλειστό, τότε το A είναι πλήρες.*

Απόδειξη. Έστω ακολουθία (x_n) στο A, η οποία είναι ακολουθία Cauchy. Η (x_n) είναι και στο B και, επειδή το B είναι πλήρες, η (x_n) συγκλίνει σε στοιχείο, έστω x, του B. Επειδή η (x_n) είναι στο A, το x είναι οριακό σημείο του A και, επειδή το A είναι κλειστό, το x ανήκει στο A.
Άρα κάθε ακολουθία (x_n) στο A, η οποία είναι ακολουθία Cauchy, συγκλίνει σε στοιχείο του A, οπότε το A είναι πλήρες. □

ΟΡΙΣΜΟΣ 11.15. *Έστω μετρικός χώρος (X, d) και μη-κενό $M \subseteq X$. Ονομάζουμε* **διάμετρο** *του M, και συμβολίζουμε* diam M, *το*

$$\text{diam } M = \sup\{d(x, y) \,|\, x, y \in M\}.$$

Το σύνολο $\{d(x, y) \,|\, x, y \in M\}$ είναι μη-κενό, διότι το M είναι μη-κενό και, αν $x \in M$, το $d(x, x) = 0$ είναι στοιχείο του συνόλου αυτού. Επίσης, το σύνολο αυτό είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και τα στοιχεία του είναι μη-αρνητικοί αριθμοί. Αν το σύνολο αυτό είναι άνω φραγμένο, το supremum του υπάρχει και είναι αριθμός ≥ 0 ενώ, αν το σύνολο αυτό δεν είναι άνω φραγμένο, το supremum του είναι το $+\infty$. Άρα, η διάμετρος του M είναι καλώς ορισμένη και

$$0 \leq \text{diam } M \leq +\infty.$$

Παράδειγμα 11.5.3. Στο $\mathbb{R}^d$ η διάμετρος ενός ευθυγράμμου τμήματος είναι ίση με το μήκος του και η διάμετρος μιας d-διάστατης μπάλας είναι ίση με το διπλάσιο της ακτίνας της.

Παράδειγμα 11.5.4. Σε κάθε μετρικό χώρο (X, d) και για κάθε $x \in X$ και κάθε $r > 0$ ισχύει diam $\overline{N}_x(r) \leq 2r$. Πράγματι, για κάθε $y, z \in \overline{N}_x(r)$ ισχύει

$$d(y, z) \leq d(y, x) + d(x, z) \leq r + r = 2r.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 11.19. *Έστω μετρικός χώρος (X, d) και ακολουθία $F_1, F_2. \ldots$ μη-κενών πλήρων υποσυνόλων του X ώστε να ισχύει $F_{n+1} \subseteq F_n$ για κάθε n και* diam $F_n \to 0$. *Τότε υπάρχει μοναδικό στοιχείο το οποίο ανήκει σε όλα τα F_n ή, ισοδύναμα, η τομή $\bigcap_{n=1}^{+\infty} F_n$ περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο.*

Απόδειξη. Θεωρούμε ένα οποιοδήποτε x_n από κάθε F_n και σχηματίζουμε μια ακολουθία (x_n). Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει n_0 ώστε diam $F_{n_0} < \epsilon$. Τώρα για κάθε $n, m \geq n_0$ ισχύει $x_n \in F_n \subseteq F_{n_0}$ και $x_m \in F_m \subseteq F_{n_0}$ και, επομένως,

$$d(x_n, x_m) \leq \text{diam } F_{n_0} < \epsilon.$$

Άρα η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy και, επειδή η ακολουθία αυτή είναι ολόκληρη στο F_1 και το F_1 είναι πλήρες, συνεπάγεται ότι η (x_n) συγκλίνει σε στοιχείο του F_1. Δηλαδή, υπάρχει $x \in F_1$ ώστε $x_n \to x$. Παρατηρούμε, όμως, ότι από τον οποιονδήποτε δείκτη m και πέρα η (x_n) είναι στο F_m και, επομένως, το x είναι οριακό σημείο του F_m. Τώρα, επειδή το F_m είναι πλήρες, είναι και κλειστό, οπότε περιέχει όλα τα οριακά σημεία του και άρα περιέχει και το x. Άρα το x ανήκει σε κάθε F_m, δηλαδή ανήκει στην τομή $\bigcap_{m=1}^{+\infty} F_m$.
Αν η $\bigcap_{m=1}^{+\infty} F_m$ περιέχει, εκτός από το x, και κάποιο y, τότε για κάθε m ισχύει $x, y \in F_m$, οπότε

$$0 \leq d(x, y) \leq \text{diam } F_m \to 0.$$

Άρα $d(x, y) = 0$, οπότε $y = x$. Δηλαδή η $\bigcap_{n=1}^{+\infty} F_n$ περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο. □

ΟΡΙΣΜΟΣ 11.16. *Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $A \subseteq X$. Το A χαρακτηρίζεται* **πυκνό** *αν $\overline{A} = X$.*

Παράδειγμα 11.5.5. Το $\mathbb{Q}$ είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ BAIRE. *Έστω πλήρης μετρικός χώρος (X, d). Αν για κάθε n το U_n είναι ανοικτό και πυκνό υποσύνολο του X, τότε η τομή $\bigcap_{n=1}^{+\infty} U_n$ είναι πυκνό υποσύνολο του X.*

Απόδειξη. Θεωρούμε οποιοδήποτε $x \in X$ και οποιονδήποτε $r > 0$.
Επειδή το U_1 είναι πυκνό, δηλαδή $\overline{U_1} = X$, το x είναι οριακό σημείο του U_1, οπότε η τομή $U_1 \cap N_x(r)$ είναι μη-κενό και ανοικτό σύνολο (ως τομή δύο ανοικτών συνόλων). Άρα υπάρχει $x_1 \in X$ και $r_1 > 0$ ώστε

$$\overline{N}_{x_1}(r_1) \subseteq U_1 \cap N_x(r).$$

Παίρνοντας, αν χρειάζεται, μικρότερο r_1, μπορούμε να υποθέσουμε ότι, επιπλέον,

$$0 < r_1 < 1.$$

Επειδή το U_2 είναι πυκνό, δηλαδή $\overline{U_2} = X$, το x_1 είναι οριακό σημείο του U_2, οπότε η τομή $U_2 \cap N_{x_1}(r_1)$ είναι μη-κενό και ανοικτό σύνολο. Άρα υπάρχει $x_2 \in X$ και $r_2 > 0$ ώστε

$$\overline{N}_{x_2}(r_2) \subseteq U_2 \cap N_{x_1}(r_1).$$

Παίρνοντας, αν χρειάζεται, μικρότερο r_2, μπορούμε να υποθέσουμε ότι, επιπλέον,

$$0 < r_2 < \tfrac{1}{2}.$$

Είναι φανερό ότι, συνεχίζοντας αυτήν την διαδικασία επαγωγικά, δημιουργείται μια ακολουθία περιοχών $\big(N_{x_n}(r_n)\big)$ έτσι ώστε

$$\overline{N}_{x_{n+1}}(r_{n+1}) \subseteq U_{n+1} \cap N_{x_n}(r_n), \qquad 0 < r_n < \tfrac{1}{n} \qquad \text{για κάθε } n.$$

Τώρα, κάθε $\overline{N}_{x_n}(r_n)$ είναι κλειστό και, επομένως, πλήρες υποσύνολο του πλήρους X. Επίσης, τα σύνολα αυτά αποτελούν εγκιβωτισμένη ακολουθία και

$$0 \leq \operatorname{diam} \overline{N}_{x_n}(r_n) \leq 2r_n < \tfrac{2}{n} \to 0.$$

Άρα, σύμφωνα με την πρόταση 11.19, υπάρχει (μοναδικό) y το οποίο ανήκει σε κάθε $\overline{N}_{x_n}(r_n)$. Ειδικώτερα, το y ανήκει στο $\overline{N}_{x_1}(r_1)$ και, επομένως, στην αρχική περιοχή $N_x(r)$. Επιπλέον, επειδή ισχύει $\overline{N}_{x_n}(r_n) \subseteq U_n$ για κάθε n, το y ανήκει στην τομή $\bigcap_{n=1}^{+\infty} U_n$.
Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι η $\bigcap_{n=1}^{+\infty} U_n$ τέμνει κάθε περιοχή του x, οπότε το x είναι οριακό σημείο της $\bigcap_{n=1}^{+\infty} U_n$. Αυτό ισχύει για κάθε $x \in X$, οπότε η $\bigcap_{n=1}^{+\infty} U_n$ είναι πυκνό σύνολο. □

Ασκήσεις.

11.5.1. Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $A \subseteq X$. Το A χαρακτηρίζεται **πουθενά πυκνό** αν το $\overline{A}$ δεν έχει κανένα εσωτερικό σημείο.
Αποδείξτε ότι, αν ο X είναι πλήρης και αν για κάθε n το F_n είναι κλειστό και πουθενά πυκνό υποσύνολο του X, τότε η ένωση $\bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n$ δεν έχει κανένα εσωτερικό σημείο.

11.5.2. Αποδείξτε την **αρχή ομοιόμορφου φράγματος**. *Έστω πλήρης μετρικός χώρος (X, d) και συλλογή $\mathcal{F}$ συνεχών συναρτήσεων $f : X \to \mathbb{R}$ έτσι ώστε για κάθε $x \in X$ να υπάρχει αριθμός M_x ώστε να ισχύει $|f(x)| \leq M_x$ για κάθε $f \in \mathcal{F}$. Τότε υπάρχει μη-κενό ανοικτό σύνολο $U \subseteq X$ και αριθμός M ώστε να ισχύει $|f(x)| \leq M$ για κάθε $f \in \mathcal{F}$ και κάθε $x \in U$.*

11.5.3. Δείτε τις ασκήσεις 11.1.4 και 11.1.5.
Αν $1 \leq p \leq +\infty$, αποδείξτε ότι ο μετρικός χώρος (l_p, d_p) είναι πλήρης.
Αν $1 \leq p < +\infty$, αποδείξτε ότι ο μετρικός χώρος $\big(C([a, b]), d_p\big)$ δεν είναι πλήρης.

11.5.4. [10] Έστω μετρικός χώρος (X, d). Αν για κάθε ακολουθία $F_1, F_2. \ldots$ μη-κενών κλειστών υποσυνόλων του X, για την οποία ισχύει $F_{n+1} \subseteq F_n$ για κάθε n και $\operatorname{diam} F_n \to 0$, η τομή $\bigcap_{n=1}^{+\infty} F_n$ είναι μη-κενή, αποδείξτε ότι ο μετρικός χώρος είναι πλήρης.

[10] Ουσιαστικά, το αντίστροφο της πρότασης 11.19.

11.5.5. [11] Έστω μετρικός χώρος (X, d) και πλήρες $A \subseteq X$. Αν $0 \leq M < 1$ και για την $f : A \to A$ ισχύει $d(f(x), f(y)) \leq M d(x, y)$ για κάθε $x, y \in A$, αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο A και ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in A$ ώστε $f(\xi) = \xi$.

11.6 Συμπάγεια.

ΟΡΙΣΜΟΣ 11.17. *Έστω μη-κενό σύνολο X και $M \subseteq X$ και μια οικογένεια Σ υποσυνόλων του X. Δηλαδή, κάθε $A \in \Sigma$ είναι ένα υποσύνολο του X.*
Η Σ ονομάζεται **κάλυψη** *του M αν $M \subseteq \bigcup_{A \in \Sigma} A$. Αν, επιπλέον, η Σ είναι πεπερασμένη, τότε ονομάζεται* **πεπερασμένη κάλυψη** *του M.*
Έστω Σ και Σ' δύο καλύψεις του M. Αν $\Sigma' \subseteq \Sigma$, τότε λέμε ότι η Σ είναι **μεγαλύτερη ή ίση** *της Σ' και ότι η Σ' είναι* **μικρότερη ή ίση** *της Σ.*
Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $M \subseteq X$. Αν η Σ είναι κάλυψη του M και όλα τα $A \in \Sigma$ είναι ανοικτά, τότε η Σ ονομάζεται **ανοικτή κάλυψη** *του M.*

Είναι προφανές ότι, αν οι Σ και Σ' είναι καλύψεις του M και $\Sigma' \subseteq \Sigma$ και η Σ είναι ανοικτή κάλυψη του M, τότε και η Σ' είναι ανοικτή κάλυψη του M. Είναι, επίσης, προφανές ότι, αν η Σ είναι κάλυψη του M και $N \subseteq M$, τότε η Σ είναι κάλυψη και του N.

Παράδειγμα 11.6.1. Στο $\mathbb{R}$ θεωρούμε το διάστημα $[0, 1]$, τα διαστήματα $A_x = \left(x - \frac{1}{100}, x + \frac{1}{100}\right)$ και τη συλλογή $\Sigma = \{A_x \,|\, x \in \mathbb{R}\}$.
Η Σ είναι, προφανώς, ανοικτή κάλυψη του $[0, 1]$.
Αν κρατήσουμε μονάχα τα διαστήματα $A_{x_k} = \left(x_k - \frac{1}{100}, x_k + \frac{1}{100}\right)$, όπου $x_k = \frac{k}{100}$ για $k = 0, \ldots, 100$, τότε η συλλογή $\Sigma' = \{A_{x_k} \,|\, k = 0, \ldots, 100\}$ είναι μια πεπερασμένη κάλυψη του $[0, 1]$ μικρότερη ή ίση της Σ.
Άρα για τη συγκεκριμένη ανοικτή κάλυψη Σ του $[0, 1]$ *υπάρχει* μια πεπερασμένη κάλυψη του $[0, 1]$ μικρότερη ή ίση της Σ.

Παράδειγμα 11.6.2. Στο $\mathbb{R}$ θεωρούμε το υποσύνολο $\mathbb{R}$, τα διαστήματα $A_x = \left(x - \frac{1}{100}, x + \frac{1}{100}\right)$ του προηγούμενου παραδείγματος και την $\Sigma = \{A_x \,|\, x \in \mathbb{R}\}$, η οποία είναι ανοικτή κάλυψη του $\mathbb{R}$. Η Σ είναι άπειρη συλλογή και τίθεται το ερώτημα αν υπάρχει πεπερασμένη κάλυψη του $\mathbb{R}$ μικρότερη ή ίση της Σ.
Η απάντηση είναι "όχι". Πράγματι, αν πάρουμε οποιαδήποτε πεπερασμένου πλήθους διαστήματα $A_{x_1} = \left(x_1 - \frac{1}{100}, x_1 + \frac{1}{100}\right), \ldots, A_{x_n} = \left(x_n - \frac{1}{100}, x_n + \frac{1}{100}\right)$ και θεωρήσουμε την $\Sigma' = \{A_{x_k} \,|\, k = 1, \ldots, n\}$, τότε η Σ' δεν είναι κάλυψη του $\mathbb{R}$. Διότι, αν θέσουμε $l = \min\{x_1, \ldots, x_n\}$ και $u = \max\{x_1, \ldots, x_n\}$, τότε $\bigcup_{A \in \Sigma'} A \subseteq \left(l - \frac{1}{100}, u + \frac{1}{100}\right)$.
Άρα για τη συγκεκριμένη ανοικτή κάλυψη Σ του $\mathbb{R}$ δεν υπάρχει *καμία* πεπερασμένη κάλυψη του $\mathbb{R}$ μικρότερη ή ίση της Σ.

Παράδειγμα 11.6.3. Στο $\mathbb{R}$ θεωρούμε το υποσύνολο $\mathbb{R}$, τα διαστήματα $(-n, +\infty)$ και $(-\infty, n)$ και έστω $\Sigma = \{(-n, +\infty), (-\infty, n) \,|\, n \in \mathbb{N}\}$.
Προφανώς, η Σ είναι ανοικτή κάλυψη του $\mathbb{R}$ και η $\Sigma' = \{(-1, +\infty), (-\infty, 1)\}$ είναι, επίσης, κάλυψη του $\mathbb{R}$ και, μάλιστα, μικρότερη ή ίση της Σ.
Άρα για τη συγκεκριμένη ανοικτή κάλυψη Σ του $\mathbb{R}$ *υπάρχει* μια πεπερασμένη κάλυψη του $\mathbb{R}$ μικρότερη ή ίση της Σ.

Παράδειγμα 11.6.4. Στο $\mathbb{R}$ θεωρούμε το διάστημα $(0, 1)$ και τη συλλογή $\Sigma = \{A_x \,|\, x \in \mathbb{R}\}$ του παραδείγματος 11.6.1, όπου $A_x = \left(x - \frac{1}{100}, x + \frac{1}{100}\right)$. Η Σ είναι ανοικτή κάλυψη του $(0, 1)$. Η $\Sigma' = \{A_{x_k} \,|\, k = 0, \ldots, 100\}$, όπου $x_k = \frac{k}{100}$, είναι, όπως και στο παράδειγμα 11.6.1, πεπερασμένη κάλυψη του $(0, 1)$ μικρότερη ή ίση της Σ.
Άρα για τη συγκεκριμένη ανοικτή κάλυψη του $(0, 1)$ *υπάρχει* μια πεπερασμένη κάλυψη του $(0, 1)$ μικρότερη ή ίση της Σ.

[11] Γενίκευση της άσκησης 4.3.5.

Παράδειγμα 11.6.5. Στο $\mathbb{R}$ θεωρούμε το διάστημα $(0,1)$, τα ανοικτά διαστήματα $A_n = (\frac{1}{n}, 1)$ και την $\Sigma = \{A_n \,|\, n = 2, 3, \dots\}$.
Η Σ είναι ανοικτή κάλυψη του $(0,1)$, διότι κάθε x στο $(0,1)$ περιέχεται σε κάποιο $(\frac{1}{n}, 1)$, αρκεί το n να είναι αρκετά μεγάλο ώστε $\frac{1}{n} < x < 1$. Αν πάρουμε οποιαδήποτε πεπερασμένου πλήθους από τα διαστήματα αυτά, για παράδειγμα τα $A_{n_1} = \big(\frac{1}{n_1}, 1\big), \dots, A_{n_N} = \big(\frac{1}{n_N}, 1\big)$, και θεωρήσουμε την $\Sigma' = \{A_{n_k} \,|\, k = 1, \dots, N\}$, τότε η Σ' δεν είναι κάλυψη του $(0,1)$. Πράγματι, αν θέσουμε $m = \max\{n_1, \dots, n_N\}$, τότε $\bigcup_{A \in \Sigma'} A = (\frac{1}{m}, 1)$.
Άρα για τη συγκεκριμένη ανοικτή κάλυψη Σ του $(0,1)$ δεν υπάρχει *καμία* πεπερασμένη κάλυψη του $(0,1)$ μικρότερη ή ίση της Σ.

Στα προηγούμενα παραδείγματα, όλα στο πλαίσιο του $\mathbb{R}$:
(i) Στις περιπτώσεις $M = (0,1)$ και $M = \mathbb{R}$ είδαμε συγκεκριμένες ανοικτές καλύψεις Σ του M για τις οποίες υπάρχουν πεπερασμένες καλύψεις Σ' του M ώστε $\Sigma' \subseteq \Sigma$ και συγκεκριμένες ανοικτές καλύψεις Σ του M για τις οποίες δεν υπάρχει καμία πεπερασμένη κάλυψη Σ' του M ώστε $\Sigma' \subseteq \Sigma$.
(ii) Στην περίπτωση $M = [0,1]$ είδαμε συγκεκριμένη ανοικτή κάλυψη Σ του M για την οποία υπάρχει πεπερασμένη κάλυψη Σ' του M ώστε $\Sigma' \subseteq \Sigma$ αλλά δεν είδαμε καμία ανοικτή κάλυψη Σ του $[0,1]$ για την οποία δεν υπάρχει καμία πεπερασμένη κάλυψη Σ' του M ώστε $\Sigma' \subseteq \Sigma$.
Είναι δυνατόν να βρούμε ανοικτή κάλυψη Σ του $[0,1]$ για την οποία δεν υπάρχει καμία πεπερασμένη κάλυψη Σ' του M ώστε $\Sigma' \subseteq \Sigma$; Λίγο παρακάτω θα αποδείξουμε ότι αυτό είναι αδύνατο!

Η ερώτηση που διατυπώθηκε για το διάστημα $[0,1]$, μπορεί, φυσικά, να διατυπωθεί για οποιοδήποτε υποσύνολο όχι μόνο του $\mathbb{R}$ αλλά και οποιουδήποτε μετρικού χώρου:
Δοθέντος μετρικού χώρου (X,d) και υποσυνόλου M του X, είναι δυνατόν να βρούμε ανοικτή κάλυψη Σ του M για την οποία δεν υπάρχει καμία πεπερασμένη κάλυψη Σ' του M ώστε $\Sigma' \subseteq \Sigma$;

Όσο περίεργο κι αν φαίνεται ένα τέτοιο ερώτημα, η αλήθεια είναι ότι η δυνατότητα απάντησης σ' αυτό παίζει *ιδιαίτερα σημαντικό* ρόλο στην Ανάλυση. Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε ορισμένες εκφάνσεις αυτού του ρόλου, αφού κωδικοποιήσουμε το ερώτημα με τον επόμενο ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ 11.18. *Έστω μετρικός χώρος (X,d) και $M \subseteq X$. Το M χαρακτηρίζεται* ***συμπαγές*** *αν για κάθε ανοικτή κάλυψη Σ του M υπάρχει τουλάχιστον μία πεπερασμένη κάλυψη Σ' του M μικρότερη ή ίση της Σ.*

Παράδειγμα 11.6.6. Σύμφωνα με τα παραδείγματα 11.6.2 και 11.6.5, το $\mathbb{R}$ και το $(0,1)$ δεν είναι συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 11.6.7. Έστω μετρικός χώρος (X,d) και πεπερασμένο $M \subseteq X$. Δηλαδή, $M = \{x_1, \dots, x_n\}$ για κάποια $x_1, \dots, x_n \in X$. Θα δούμε ότι το M είναι συμπαγές.
Θεωρούμε τυχούσα ανοικτή κάλυψη Σ του M. Τότε κάθε $x_k \in M$ περιέχεται σε κάποιο $A_k \in \Sigma$. Είναι, τώρα, προφανές ότι $M = \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq A_1 \cup \cdots \cup A_n$ και, επομένως, η $\Sigma' = \{A_1, \dots, A_n\}$ είναι πεπερασμένη κάλυψη του M με $\Sigma' \subseteq \Sigma$. Άρα το M είναι συμπαγές.

Παράδειγμα 11.6.8. Έστω μη-κενό σύνολο X με τη διακριτή μετρική d_δ και $M \subseteq X$. Θα δούμε ότι το M είναι συμπαγές αν και μόνο αν είναι πεπερασμένο.
Στο προηγούμενο παράδειγμα είδαμε ότι, αν το M είναι πεπερασμένο, τότε είναι συμπαγές και, μάλιστα, αυτό ισχύει στο πλαίσιο οποιουδήποτε μετρικού χώρου.
Αντιστρόφως, έστω ότι το M είναι συμπαγές. Για κάθε $x \in M$ θεωρούμε το σύνολο $A_x = \{x\}$, το οποίο είναι ανοικτό, και έχουμε την ανοικτή κάλυψη $\Sigma = \{A_x \,|\, x \in M\}$ του M. Επειδή το M είναι συμπαγές, υπάρχει κάποια πεπερασμένη κάλυψη Σ' του M με $\Sigma' \subseteq \Sigma$. Αυτό σημαίνει ότι $\Sigma' = \{A_{x_1}, \dots, A_{x_n}\}$ για κάποια $x_1, \dots, x_n \in M$ και ότι $M \subseteq A_{x_1} \cup \cdots \cup A_{x_n} = \{x_1\} \cup \cdots \cup \{x_n\} = \{x_1, \dots, x_n\}$. Επειδή, μάλιστα, $x_1, \dots, x_n \in M$, συνεπάγεται $M = \{x_1, \dots, x_n\}$ και, επομένως, το M είναι πεπερασμένο.

ΟΡΙΣΜΟΣ 11.19. *Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $M \subseteq X$. Το M χαρακτηρίζεται* **φραγμένο** *αν υπάρχει $x_0 \in X$ και θετικός αριθμός R ώστε $M \subseteq N_{x_0}(R)$ ή, ισοδύναμα, ώστε να ισχύει $d(x, x_0) < R$ για κάθε $x \in M$.*

Είναι προφανές ότι, αν ένα M είναι φραγμένο και $N \subseteq M$, τότε και το N είναι φραγμένο.

Παράδειγμα 11.6.9. Στο $\mathbb{R}$ ένα υποσύνολο M είναι φραγμένο αν και μόνο αν περιέχεται σε κάποιο διάστημα (a, b). Γενικά, στο $\mathbb{R}^d$ ένα υποσύνολο M είναι φραγμένο αν και μόνον αν περιέχεται σε κάποιο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με ακμές παράλληλες στους κύριους άξονες.
Πράγματι, αν το M είναι φραγμένο στο $\mathbb{R}^d$, υπάρχουν $R < +\infty$ και $\mathrm{x}_0 = (x_{0,1}, \dots, x_{0,d})$ ώστε να ισχύει

$$\big((x_1 - x_{0,1})^2 + \cdots + (x_d - x_{0,d})^2\big)^{1/2} = \|\mathrm{x} - \mathrm{x}_0\|_2 < R$$

για κάθε $\mathrm{x} = (x_1, \dots, x_d) \in M$. Τότε ισχύει $|x_k - x_{0,k}| < R$ για κάθε $k = 1, \dots, d$ και κάθε $\mathrm{x} = (x_1, \dots, x_d) \in M$. Άρα για κάθε $\mathrm{x} \in M$ ισχύει

$$\mathrm{x} \in [x_{0,1} - R, x_{0,1} + R] \times \cdots \times [x_{0,d} - R, x_{0,d} + R],$$

οπότε το M περιέχεται στο ορθ. παραλληλεπίπεδο $[x_{0,1} - R, x_{0,1} + R] \times \cdots \times [x_{0,d} - R, x_{0,d} + R]$.
Αντιστρόφως, έστω ότι το M περιέχεται στο $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d]$. Θέτουμε $x_{0,k} = \frac{a_k + b_k}{2}$ για κάθε $k = 1, \dots, d$ και $R = \sqrt{d}\max\{\frac{b_k - a_k}{2} \,|\, 1 \leq k \leq d\}$. Τότε για κάθε $\mathrm{x} = (x_1, \dots, x_d) \in M$ έχουμε $|x_k - x_{0,k}| \leq \frac{R}{\sqrt{d}}$ για κάθε $k = 1, \dots, d$ και, επομένως,

$$\|\mathrm{x} - \mathrm{x}_0\|_2 = \big((x_1 - x_{0,1})^2 + \cdots + (x_d - x_{0,d})^2\big)^{1/2} \leq \big(d\,\tfrac{R^2}{d}\big)^{1/2} = R.$$

Άρα το M είναι φραγμένο στο $\mathbb{R}^d$.

Παράδειγμα 11.6.10. Έστω μη-κενό σύνολο X με την διακριτή μετρική d_δ. Τότε κάθε $M \subseteq X$ είναι φραγμένο και, ειδικώτερα, το ίδιο το X είναι φραγμένο.
Αυτό οφείλεται στο ότι η d_δ έχει δύο μόνον τιμές, 0 και 1. Αν, λοιπόν, επιλέξουμε οποιοδήποτε $x_0 \in X$, ισχύει $d_\delta(x, x_0) \leq 1$ για κάθε $x \in X$.

Παρατηρούμε ότι το αν ένα υποσύνολο M ενός μετρικού χώρου είναι φραγμένο ή όχι εξαρτάται από τη συγκεκριμένη μετρική του χώρου. Για παράδειγμα, το $\mathbb{R}$ δεν είναι φραγμένο στο $\mathbb{R}$ με την Ευκλείδια μετρική ενώ είναι φραγμένο στο $\mathbb{R}$ με τη διακριτή μετρική.

ΠΡΟΤΑΣΗ 11.20. *Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $M \subseteq X$. Αν το M είναι συμπαγές, τότε είναι φραγμένο και κλειστό.*

Απόδειξη. Παίρνουμε οποιοδήποτε $x_0 \in X$ και θεωρούμε τη συλλογή $\Sigma = \{N_{x_0}(n) \,|\, n \in \mathbb{N}\}$. Η Σ είναι ανοικτή κάλυψη του M (και, μάλιστα, είναι ανοικτή κάλυψη ολόκληρου του X), οπότε υπάρχει πεπερασμένη κάλυψη Σ' του M η οποία είναι μικρότερη ή ίση της Σ. Δηλαδή, υπάρχουν $n_1, \dots, n_N$ ώστε $M \subseteq N_{x_0}(n_1) \cup \cdots \cup N_{x_0}(n_N)$. Αν θέσουμε $R = \max\{n_1, \dots, n_N\}$, συνεπάγεται $M \subseteq N_{x_0}(R)$ και, επομένως, το M είναι φραγμένο.
Παίρνουμε τυχόν $x_0 \in M^c$. Θεωρούμε $A_n = \{x \in X \,|\, d(x, x_0) > \frac{1}{n}\} = \big(\overline{N}_{x_0}(\frac{1}{n})\big)^c$ και τη συλλογή $\Sigma = \{A_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$. Η Σ είναι ανοικτή κάλυψη του M, οπότε υπάρχει πεπερασμένη κάλυψη Σ' του M μικρότερη ή ίση της Σ. Δηλαδή, υπάρχουν $n_1, \dots, n_N$ ώστε $M \subseteq A_{n_1} \cup \cdots \cup A_{n_N}$. Αν θέσουμε $n = \max\{n_1, \dots, n_N\}$, συνεπάγεται $M \subseteq A_n$ και, επομένως, $N_{x_0}(\frac{1}{n}) \subseteq M^c$. Αποδείξαμε ότι κάθε $x_0 \in M^c$ είναι εσωτερικό σημείο του M^c. Άρα το M^c είναι ανοικτό και, επομένως, το M είναι κλειστό. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 11.21. *Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $N \subseteq M \subseteq X$. Αν το M είναι συμπαγές και το N κλειστό, τότε το N είναι συμπαγές.*

Απόδειξη. Έστω τυχούσα ανοικτή κάλυψη Σ του N. Τότε η $\Sigma_1 = \{N^c\} \cup \Sigma$ είναι ανοικτή κάλυψη του M (και, μάλιστα, είναι ανοικτή κάλυψη ολόκληρου του X). Πράγματι,

$$M \subseteq X = N^c \cup N \subseteq N^c \cup \bigcup_{A\in\Sigma} A = \bigcup_{A\in\Sigma_1} A.$$

Επειδή το M είναι συμπαγές, υπάρχει πεπερασμένη κάλυψη Σ_1' του M μικρότερη ή ίση της Σ_1. Δηλαδή, υπάρχουν $A_1, \ldots, A_n \in \Sigma_1$ (μπορούμε να τα πάρουμε διαφορετικά ανά δύο) ώστε $M \subseteq A_1 \cup \cdots \cup A_n$. Διακρίνουμε, τώρα, περιπτώσεις σε σχέση με το αν το N^c είναι ένα από τα $A_1, \ldots, A_n$ ή όχι.
Στην πρώτη περίπτωση μπορούμε να υποθέσουμε ότι $N^c = A_n$ (με αναδιάταξη των $A_1, \ldots, A_n$). Τότε η $M \subseteq A_1 \cup \cdots \cup A_n$ γράφεται $M \subseteq A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1} \cup N^c$, οπότε $N \subseteq A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}$. Αυτό σημαίνει ότι η $\Sigma' = \{A_1, \ldots, A_{n-1}\}$ είναι πεπερασμένη κάλυψη του N μικρότερη ή ίση της Σ.
Στη δεύτερη περίπτωση όλα τα $A_1, \ldots, A_n$ ανήκουν στην Σ, οπότε η $\Sigma' = \{A_1, \ldots, A_n\}$ είναι πεπερασμένη κάλυψη του N μικρότερη ή ίση της Σ.
Άρα, σε κάθε περίπτωση, υπάρχει πεπερασμένη κάλυψη του N μικρότερη ή ίση της Σ. $\square$

Η πρόταση 11.22 λέει ότι αν δύο σύνολα, το ένα συμπαγές και το άλλο κλειστό, είναι ξένα, τότε υπάρχει *θετική* απόσταση ανάμεσά τους.

ΠΡΟΤΑΣΗ 11.22. *Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $M, N \subseteq X$ με $M \cap N = \emptyset$. Αν το M είναι συμπαγές και το N κλειστό, τότε υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε να ισχύει $d(x, y) \geq \epsilon$ για κάθε $x \in M$ και $y \in N$.*

Απόδειξη. Για κάθε $x \in M$ ισχύει $x \in N^c$ και, επειδή το N^c είναι ανοικτό, υπάρχει $\epsilon_x > 0$ ώστε $N_x(\epsilon_x) \subseteq N^c$ και, επομένως, $N_x(\epsilon_x) \cap N = \emptyset$. Αυτό, φυσικά, σημαίνει ότι ισχύει

$$d(x, y) \geq \epsilon_x \qquad \text{για κάθε } x \in M \text{ και } y \in N. \tag{11.16}$$

Η συλλογή $\{N_x(\frac{\epsilon_x}{2}) \,|\, x \in M\}$ αποτελεί ανοικτή κάλυψη του M, οπότε, επειδή το M είναι συμπαγές, υπάρχουν $x_1, \ldots, x_n \in M$ ώστε

$$M \subseteq N_{x_1}(\tfrac{\epsilon_{x_1}}{2}) \cup \cdots \cup N_{x_n}(\tfrac{\epsilon_{x_n}}{2}). \tag{11.17}$$

Θέτουμε

$$\epsilon = \min\{\tfrac{\epsilon_{x_1}}{2}, \ldots, \tfrac{\epsilon_{x_n}}{2}\} > 0. \tag{11.18}$$

Τότε για κάθε $x \in M$ υπάρχει, σύμφωνα με την (11.17), $k = 1, \ldots, n$ ώστε $x \in N_{x_k}(\frac{\epsilon_{x_k}}{2})$ και, επομένως, βάσει των (11.16) και (11.18), για κάθε $y \in N$ έχουμε

$$d(x, y) \geq d(y, x_k) - d(x, x_k) \geq \epsilon_{x_k} - \tfrac{\epsilon_{x_k}}{2} = \tfrac{\epsilon_{x_k}}{2} \geq \epsilon.$$

Άρα ισχύει $d(x, y) \geq \epsilon$ για κάθε $x \in M$ και $y \in N$. $\square$

Το θεώρημα 11.6 είναι γενίκευση του γνωστού αποτελέσματος για ακολουθίες εγκιβωτισμένων κλειστών και φραγμένων διαστημάτων στο $\mathbb{R}$: *αν $[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \ldots \supseteq [a_n, b_n] \supseteq \ldots$, τότε υπάρχει x το οποίο ανήκει σε όλα τα $[a_n, b_n]$ και, αν, επιπλέον, $b_n - a_n \to 0$, τότε αυτό το x είναι μοναδικό.*

ΘΕΩΡΗΜΑ 11.6. *Έστω μετρικός χώρος (X, d) και ακολουθία $K_1, K_2. \ldots$ μη-κενών συμπαγών υποσυνόλων του X ώστε να ισχύει $K_{n+1} \subseteq K_n$ για κάθε n. Τότε υπάρχει στοιχείο το οποίο ανήκει σε όλα τα K_n ή, ισοδύναμα, η τομή $\bigcap_{n=1}^{+\infty} K_n$ δεν είναι κενή. Αν, επιπλέον,* $\mathrm{diam}\, K_n \to 0$, *τότε το κοινό στοιχείο των K_n είναι μοναδικό.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε $\bigcap_{n=1}^{+\infty} K_n = \emptyset$. Θεωρούμε την $\Sigma = \{{K_n}^c \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ και παρατηρούμε ότι αυτή είναι ανοικτή κάλυψη του K_1 (και, μάλιστα, είναι ανοικτή κάλυψη ολόκληρου του X). Πράγματι,

$$K_1 \subseteq X = \emptyset^c = \bigcup_{n=1}^{+\infty} {K_n}^c.$$

Άρα υπάρχει πεπερασμένη κάλυψη του K_1 μικρότερη ή ίση της Σ, δηλαδή υπάρχουν $n_1, \ldots, n_N$ ώστε $K_1 \subseteq {K_{n_1}}^c \cup \cdots \cup {K_{n_N}}^c$. Θέτουμε $n = \max\{n_1, \ldots, n_N\}$, οπότε $K_1 \subseteq {K_n}^c$, το οποίο είναι άτοπο, διότι $K_n \subseteq K_1$ και $K_n \neq \emptyset$.
Έστω diam $K_n \to 0$. Αν τα x, y ανήκουν και τα δύο σε όλα τα K_n, τότε ισχύει

$$0 \leq d(x, y) \leq \text{diam } K_n$$

για κάθε n. Άρα $d(x, y) = 0$ και, επομένως, $x = y$. □

Το θεώρημα 11.7 είναι πολύ βασικό και πολύ χρήσιμο, αφού παρέχει έναν εναλλακτικό τρόπο χειρισμού της έννοιας της συμπάγειας, ανάγοντάς την στην έννοια της σύγκλισης ακολουθιών.[12]

ΘΕΩΡΗΜΑ 11.7. *Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $M \subseteq X$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα.*
(i) *Το M είναι συμπαγές.*
(ii) *Κάθε ακολουθία στο M έχει τουλάχιστον μία υποακολουθία που συγκλίνει σε στοιχείο του M.*

Απόδειξη. $[i \Rightarrow ii]$. Έστω τυχούσα (x_n) στο M.
Ας υποθέσουμε ότι για κάθε $x \in M$ υπάρχει περιοχή $N_x(\epsilon_x)$ του x (το ϵ_x εξαρτάται από το x), η οποία περιέχει πεπερασμένου πλήθους όρους της (x_n). Η $\Sigma = \{N_x(\epsilon_x) \,|\, x \in M\}$ είναι ανοικτή κάλυψη του M. Άρα υπάρχει πεπερασμένη κάλυψη Σ' του M μικρότερη ή ίση της Σ. Δηλαδή, υπάρχουν $x_1, \ldots, x_n$ ώστε

$$M \subseteq N_{x_1}(\epsilon_{x_1}) \cup \cdots \cup N_{x_n}(\epsilon_{x_n}).$$

Αφού καθεμιά από αυτές τις περιοχές περιέχει πεπερασμένου πλήθους όρους της (x_n), η ένωσή τους και, επομένως, και το M, περιέχει πεπερασμένου πλήθους όρους της (x_n). Αυτό, όμως, αντιφάσκει με το ότι ολόκληρη η (x_n) περιέχεται στο M.
Επομένως, η αρχική υπόθεση δεν ισχύει, οπότε υπάρχει κάποιο $x_0 \in M$ ώστε για κάθε $\epsilon > 0$ η $N_{x_0}(\epsilon)$ να περιέχει άπειρους όρους της (x_n). Άρα η $N_{x_0}(1)$ περιέχει άπειρους όρους της (x_n), οπότε υπάρχει $n_1 \geq 1$ ώστε $x_{n_1} \in N_{x_0}(1)$. Ομοίως, η $N_{x_0}(\frac{1}{2})$ περιέχει άπειρους όρους της (x_n), οπότε υπάρχει $n_2 > n_1$ ώστε $x_{n_2} \in N_{x_0}(\frac{1}{2})$. Ομοίως, η $N_{x_0}(\frac{1}{3})$ περιέχει άπειρους όρους της (x_n), οπότε υπάρχει $n_3 > n_2$ ώστε $x_{n_3} \in N_{x_0}(\frac{1}{3})$. Συνεχίζοντας επαγωγικά, βρίσκουμε υποακολουθία (x_{n_k}) της (x_n) έτσι ώστε να ισχύει $x_{n_k} \in N_{x_0}(\frac{1}{k})$ ή, ισοδύναμα, $d(x_{n_k}, x_0) < \frac{1}{k}$ για κάθε k. Άρα $x_{n_k} \to x_0$ στον (X, d).
$[ii \Rightarrow i]$. *Βήμα 1.* Έστω $\epsilon > 0$. Θα αποδείξουμε ότι *υπάρχουν πεπερασμένου πλήθους στοιχεία $x_1, \ldots, x_n$ του M ώστε*

$$M \subseteq N_{x_1}(\epsilon) \cup \cdots \cup N_{x_n}(\epsilon).$$

Έστω ότι αυτό δεν ισχύει. Διαλέγουμε τυχόν $x_1 \in M$. Τότε $M \nsubseteq N_{x_1}(\epsilon)$. Άρα υπάρχει $x_2 \in M$ με $x_2 \notin N_{x_1}(\epsilon)$. Τότε $M \nsubseteq N_{x_1}(\epsilon) \cup N_{x_2}(\epsilon)$. Άρα υπάρχει $x_3 \in M$ με $x_3 \notin N_{x_1}(\epsilon) \cup N_{x_2}(\epsilon)$. Τότε

[12] Ουσιαστικά, το θεώρημα 11.7 διατυπώνει έναν εναλλακτικό ορισμό της έννοιας της συμπάγειας.

ΟΡΙΣΜΟΣ *Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $M \subseteq X$. Το M χαρακτηρίζεται* **συμπαγές** *αν κάθε ακολουθία στο M έχει τουλάχιστον μία υποακολουθία η οποία συγκλίνει σε στοιχείο του M.*

Ίσως ο δεύτερος ορισμός της έννοιας της συμπάγειας φαίνεται πιο εύληπτος από τον πρώτο, αφού στο στάδιο αυτό ο αναγνώστης είναι συνήθως πιο εξοικειωμένος με την έννοια της ακολουθίας (και της υποακολουθίας) παρά με την έννοια της ανοικτής κάλυψης. Επιλέγουμε, όμως, τον πρώτο ορισμό διότι στο πλαίσιο των *τοπολογικών χώρων*, το οποίο είναι ευρύτερο από το πλαίσιο των μετρικών χώρων, δεν ισχύει το θεώρημα 11.7 και, για λόγους που δεν θα μας απασχολήσουν τώρα (αφού δεν θα ασχοληθούμε με τους τοπολογικούς χώρους), ο κατάλληλος ορισμός είναι ο πρώτος, αυτός με τις ανοικτές καλύψεις. Ούτως ή άλλως, η έννοια της ανοικτής κάλυψης, σε σχέση με την έννοια της συμπάγειας, είναι αρκετά χρήσιμη στην Ανάλυση και, επομένως, όποιον ορισμό κι αν επιλέξουμε, το θεώρημα 11.7 που εξασφαλίζει την ισοδυναμία των δύο ορισμών είναι αναπόφευκτο.

$M \not\subseteq N_{x_1}(\epsilon) \cup N_{x_2}(\epsilon) \cup N_{x_3}(\epsilon)$. Άρα υπάρχει $x_4 \in M$ με $x_4 \notin N_{x_1}(\epsilon) \cup N_{x_2}(\epsilon) \cup N_{x_3}(\epsilon)$. Συνεχίζοντας επαγωγικά βλέπουμε ότι υπάρχει ακολουθία (x_n) στο M ώστε να ισχύει $d(x_n, x_m) \geq \epsilon$ για κάθε n, m με $n \neq m$. Αυτό, όμως, αποκλείει τη δυνατότητα να υπάρχει υποακολουθία της (x_n) η οποία να συγκλίνει και καταλήγουμε σε άτοπο.

Βήμα 2. Έστω τυχούσα ανοικτή κάλυψη Σ του M. Θα αποδείξουμε ότι *υπάρχει* $\epsilon > 0$ *με την ιδιότητα: για κάθε* $x \in M$ *η περιοχή* $N_x(\epsilon)$ *περιέχεται σε κάποιο από τα* $A \in \Sigma$.[13]
Έστω ότι δεν υπάρχει $\epsilon > 0$ με την ιδιότητα αυτή. Δηλαδή, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει αντίστοιχο $x \in M$ ώστε το $N_x(\epsilon)$ να μην περιέχεται σε κανένα από τα $A \in \Sigma$. Εφαρμόζουμε με $\epsilon = \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και έχουμε ότι για κάθε n υπάρχει $x_n \in M$ ώστε η περιοχή $N_{x_n}(\frac{1}{n})$ να μην περιέχεται σε κανένα από τα $A \in \Sigma$. Υπάρχει, όμως, υποακολουθία (x_{n_k}) της (x_n) η οποία συγκλίνει σε κάποιο $x_0 \in M$. Το x_0 ανήκει σε κάποιο απο τα $A \in \Sigma$. Έστω $x_0 \in A_0 \in \Sigma$. Αφού το A_0 είναι ανοικτό, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $N_{x_0}(\delta) \subseteq A_0$. Επιλέγουμε αρκετά μεγάλο n_k ώστε

$$d(x_{n_k}, x_0) < \frac{\delta}{2} \text{ και } \frac{1}{n_k} < \frac{\delta}{2}.$$

Τότε για κάθε $x \in N_{x_{n_k}}(\frac{1}{n_k})$ ισχύει

$$d(x, x_0) \leq d(x, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_0) < \frac{1}{n_k} + d(x_{n_k}, x_0) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$$

και, επομένως, $N_{x_{n_k}}(\frac{1}{n_k}) \subseteq N_{x_0}(\delta) \subseteq A_0$ και καταλήγουμε σε άτοπο, διότι η περιοχή $N_{x_{n_k}}(\frac{1}{n_k})$ δεν πρέπει να περιέχεται σε κανένα από τα $A \in \Sigma$.

Βήμα 3. Έστω τυχούσα ανοικτή κάλυψη Σ του M. Τότε, σύμφωνα με το βήμα 2, υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε για κάθε $x \in M$ το $N_x(\epsilon)$ να περιέχεται σε κάποιο από τα $A \in \Sigma$. Σύμφωνα με το βήμα 1, υπάρχουν πεπερασμένου πλήθους στοιχεία $x_1, \ldots, x_n$ του M ώστε

$$M \subseteq N_{x_1}(\epsilon) \cup \ldots \cup N_{x_n}(\epsilon).$$

Καθένα, όμως, από τα $N_{x_k}(\epsilon)$ περιέχεται σε κάποιο από τα $A \in \Sigma$. Έστω $N_{x_k}(\epsilon) \subseteq A_k \in \Sigma$. Τότε

$$M \subseteq N_{x_1}(\epsilon) \cup \cdots \cup N_{x_n}(\epsilon) \subseteq A_1 \cup \cdots \cup A_n.$$

Επομένως, η $\Sigma' = \{A_1, \ldots, A_n\}$ είναι πεπερασμένη κάλυψη του M μικρότερη ή ίση της Σ. □

Παράδειγμα 11.6.11. Θεωρούμε το $(a, b]$ στο $\mathbb{R}$ και την ακολουθία (x_n) με $x_n = a + \frac{b-a}{n}$ για κάθε n. Επειδή $x_n \to a$, κάθε υποακολουθία της (x_n) συγκλίνει στο a. Άρα η (x_n) περιέχεται στο $(a, b]$ και δεν έχει καμία υποακολουθία η οποία να συγκλίνει σε στοιχείο του $(a, b]$. Άρα το $(a, b]$ δεν είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 11.6.12. Θεωρούμε το $[a, b]$ στο $\mathbb{R}$ και τυχούσα ακολουθία (x_n) η οποία περιέχεται στο $[a, b]$. Η (x_n) είναι φραγμένη. Άρα, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano - Weierstrass στο $\mathbb{R}$, η (x_n) έχει τουλάχιστον μία υποακολουθία (x_{n_k}) η οποία συγκλίνει σε κάποιο $x \in \mathbb{R}$. Επειδή το $[a, b]$ είναι κλειστό και η (x_{n_k}) περιέχεται στο $[a, b]$, συνεπάγεται $x \in [a, b]$. Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι κάθε ακολουθία στο $[a, b]$ έχει υποακολουθία η οποία συγκλίνει σε στοιχείο του $[a, b]$ και, επομένως, το $[a, b]$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 11.6.13. Θεωρούμε το $[a, +\infty)$ στο $\mathbb{R}$ και την ακολουθία (x_n) με $x_n = a + n$ για κάθε n. Επειδή $x_n \to +\infty$, κάθε υποακολουθία της αποκλίνει στο $+\infty$. Άρα η (x_n) περιέχεται στο $[a, +\infty)$ και δεν έχει καμία υποακολουθία η οποία συγκλίνει σε στοιχείο του $[a, +\infty)$. Άρα το $[a, +\infty)$ δεν είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Εν γένει, το να αποδείξουμε ότι ένα συγκεκριμένο σύνολο M *δεν είναι* συμπαγές είναι σχετικά απλό πρόβλημα: αρκεί να βρούμε *μια συγκεκριμένη* ακολουθία στο M ώστε καμία υποακολουθία της να μη συγκλίνει σε στοιχείο του M. Ενώ το να αποδείξουμε ότι ένα σύνολο M *είναι* συμπαγές

[13]Ο αριθμός ϵ με την ιδιότητα αυτή ονομάζεται **αριθμός Lebesgue** της ανοικτής κάλυψης Σ του M.

είναι πιο δύσκολο πρόβλημα: πρέπει να θεωρήσουμε *τυχούσα* ακολουθία στο M και να αποδείξουμε ότι έχει υποακολουθία η οποία συγκλίνει σε στοιχείο του M. Η δυσκολία είναι φανερή στο παράδειγμα 11.6.12, όπου χρειάστηκε να χρησιμοποιήσουμε το δύσκολο θεώρημα Bolzano - Weierstrass στο $\mathbb{R}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 11.23. *Κάθε κλειστό ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο στο $\mathbb{R}^d$ με ακμές παράλληλες στους κύριους άξονες είναι συμπαγές.*

Πρώτη απόδειξη. Έστω $M = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d]$. Θεωρούμε τυχούσα ακολουθία (x_n) στο M και έστω $\mathrm{x}_n = (x_{n,1}, \ldots, x_{n,d})$ για κάθε n.
Χωρίζοντας κάθε ακμή $[a_k, b_k]$ στα ισομήκη υποδιαστήματα $[a_k, \frac{a_k+b_k}{2}]$ και $[\frac{a_k+b_k}{2}, b_k]$, χωρίζουμε το M σε 2^d ορθογώνια παραλληλεπίπεδα. Καθένα από αυτά περιέχεται, φυσικά, στο M και έχει διάμετρο υποδιπλάσια της διαμέτρου του M και μήκη ακμών υποδιπλάσια των μηκών των αντίστοιχων ακμών του M. Τώρα, επειδή ολόκληρη η ακολουθία (x_n) περιέχεται στο M, τουλάχιστον ένα από τα 2^d αυτά ορθογώνια παραλληλεπίπεδα πρέπει να περιέχει *άπειρους* όρους της (x_n). Παίρνουμε ένα τέτοιο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο και το συμβολίζουμε $M_1 = [a_{1,1}, b_{1,1}] \times \cdots \times [a_{1,d}, b_{1,d}]$. Χωρίζοντας κάθε ακμή $[a_{1,k}, b_{1,k}]$ στα $[a_{1,k}, \frac{a_{1,k}+b_{1,k}}{2}]$ και $[\frac{a_{1,k}+b_{1,k}}{2}, b_{1,k}]$, χωρίζουμε το M_1 σε 2^d ορθογώνια παραλληλεπίπεδα. Καθένα από αυτά περιέχεται στο M_1 και έχει διάμετρο υποδιπλάσια της διαμέτρου του M_1 και μήκη ακμών υποδιπλάσια των μηκών των αντίστοιχων ακμών του M_1 και, επειδή άπειροι όροι της (x_n) περιέχονται στο M_1, τουλάχιστον ένα από τα 2^d αυτά ορθογώνια παραλληλεπίπεδα θα περιέχει, επίσης, άπειρους όρους της (x_n). Παίρνουμε ένα τέτοιο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο και το συμβολίζουμε $M_2 = [a_{2,1}, b_{2,1}] \times \cdots \times [a_{2,d}, b_{2,d}]$. Συνεχίζοντας αυτήν τη διαδικασία επαγωγικά, δημιουργούμε ακολουθία ορθογώνιων παραλληλεπιπέδων $M_l = [a_{l,1}, b_{l,1}] \times \cdots \times [a_{l,d}, b_{l,d}]$ με τις ιδιότητες:
(i) κάθε M_l περιέχει άπειρους όρους της (x_n).
(ii) $M \supseteq M_1 \supseteq \ldots \supseteq M_{l-1} \supseteq M_l \supseteq \ldots$.
(iii) για κάθε $k = 1, \ldots, d$ ισχύει

$$a_k \leq a_{1,k} \leq \ldots \leq a_{l-1,k} \leq a_{l,k} \leq \ldots \leq b_{l,k} \leq b_{l-1,k} \leq \ldots \leq b_{1,k} \leq b_k.$$

(iv) για κάθε $k = 1, \ldots, d$ και κάθε $l \geq 2$ ισχύει

$$b_{l,k} - a_{l,k} = \tfrac{b_{l-1,k} - a_{l-1,k}}{2} = \ldots = \tfrac{b_{1,k} - a_{1,k}}{2^{l-1}} = \tfrac{b_k - a_k}{2^l},$$

οπότε $b_{l,k} - a_{l,k} \to 0$ και
(v) για κάθε $l \geq 2$ ισχύει

$$\text{diam } M_l = \tfrac{\text{diam } M_{l-1}}{2} = \ldots = \tfrac{\text{diam } M_1}{2^{l-1}} = \tfrac{\text{diam } M}{2^l},$$

οπότε diam $M_l \to 0$.
Επειδή το M_1 περιέχει άπειρους όρους της (x_n) υπάρχει $\mathrm{x}_{n_1} \in M_1$. Επειδή το M_2 περιέχει άπειρους όρους της (x_n) υπάρχει $\mathrm{x}_{n_2} \in M_2$ με $n_2 > n_1$. Επειδή το M_3 περιέχει άπειρους όρους της (x_n) υπάρχει $\mathrm{x}_{n_3} \in M_3$ με $n_3 > n_2$. Συνεχίζοντας επαγωγικά, βρίσκουμε υποακολουθία (x_{n_l}) της (x_n) ώστε να ισχύει $\mathrm{x}_{n_l} \in M_l$ για κάθε $l \geq 1$. Αυτό γράφεται:

$$a_{l,k} \leq x_{n_l,k} \leq b_{l,k} \qquad \text{για κάθε } \ k = 1, \ldots, d \ \text{ και } \ l \geq 1. \tag{11.19}$$

Από την (iii) συνεπάγεται για κάθε $k = 1, \ldots, d$ ότι η $(a_{l,k})$ είναι αύξουσα και φραγμένη, η $(b_{l,k})$ είναι φθίνουσα και φραγμένη και, επομένως, οι δύο ακολουθίες συγκλίνουν σε δύο αντίστοιχα όρια, τα οποία, λόγω της (iv), είναι ο ίδιος αριθμός. Θέτουμε

$$x_k = \lim_{l \to +\infty} a_{l,k} = \lim_{l \to +\infty} b_{l,k}. \tag{11.20}$$

Από την (11.19) συνεπάγεται

$$x_{n_l,k} \to x_k$$

και, επειδή αυτό ισχύει για κάθε $k = 1, \ldots, d$, συνεπάγεται

$$\mathrm{x}_{n_l} \to \mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_d).$$

Βλέπουμε, επίσης, ότι $\mathrm{x} \in M_l$ για κάθε $l \geq 1$, διότι, λόγω του (iii) και της (11.20), ισχύει

$$a_{l,k} \leq x_k \leq b_{l,k} \qquad \text{για κάθε } \ k = 1, \ldots, d \ \text{ και } \ l \geq 1.$$

Δηλαδή, το x ανήκει σε κάθε M_l (και, φυσικά, και στο M το οποίο περιέχει όλα τα M_l).
Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι οποιαδήποτε ακολουθία (x_n) στο M έχει τουλάχιστον μία υποακολουθία η οποία συγκλίνει σε στοιχείο του M, οπότε το M είναι συμπαγές.

Δεύτερη απόδειξη. Θεωρούμε τυχούσα ανοικτή κάλυψη Σ του M και υποθέτουμε, για να καταλήξουμε σε άτοπο, ότι δεν υπάρχει πεπερασμένη κάλυψη Σ' του M μικρότερη ή ίση της Σ. Όπως και στην πρώτη απόδειξη, χωρίζουμε το M στα ίδια 2^d ορθογώνια παραλληλεπίπεδα και παρατηρούμε ότι για τουλάχιστον ένα από αυτά δεν υπάρχει πεπερασμένη κάλυψή του μικρότερη ή ίση της Σ. Σε αντίθετη περίπτωση, θα είχαμε για καθένα υπο-παραλληλεπίπεδο μια πεπερασμένη κάλυψη μικρότερη ή ίση της Σ, οπότε η ένωσή τους θα ήταν *πεπερασμένη* κάλυψη του M μικρότερη ή ίση της Σ. Επιλέγουμε ένα τέτοιο παραλληλεπίπεδο και το συμβολίζουμε M_1. Όπως πριν, χωρίζουμε το M_1 σε 2^d υπο-παραλληλεπίπεδα για ένα τουλάχιστον από τα οποία δεν υπάρχει πεπερασμένη κάλυψή του μικρότερη ή ίση της Σ. Επιλέγουμε ένα τέτοιο και το συμβολίζουμε M_2. Συνεχίζοντας επαγωγικά, κατασκευάζουμε ακολουθία (M_l) ορθογώνιων παραλληλεπιπέδων με ακριβώς τις ίδιες ιδιότητες $(ii) - (v)$ όπως και η αντίστοιχη ακολουθία στην πρώτη απόδειξη και με την (i) να έχει αντικατασταθεί από την:
(i') για κάθε l δεν υπάρχει καμία πεπερασμένη κάλυψη του M_l μικρότερη ή ίση της Σ.
Όπως πριν, υπάρχει μοναδικό $\mathrm{x} \in M$ το οποίο περιέχεται σε όλα τα M_l. Επειδή η Σ είναι κάλυψη του M, υπάρχει κάποιο $A_0 \in \Sigma$ ώστε $\mathrm{x} \in A_0$. Επειδή το A_0 είναι ανοικτό σύνολο, υπάρχει $\epsilon_0 > 0$ ώστε $N_{\mathrm{x}}(\epsilon_0) \subseteq A_0$. Επειδή diam $M_l \to 0$, υπάρχει l_0 αρκετά μεγάλο ώστε diam $M_{l_0} < \epsilon_0$. Τότε για κάθε $\mathrm{y} \in M_{l_0}$ (και επειδή $\mathrm{x} \in M_{l_0}$) έχουμε

$$\|\mathrm{y} - \mathrm{x}\|_2 \leq \text{diam } M_{l_0} < \epsilon_0$$

και, επομένως, $\mathrm{y} \in N_{\mathrm{x}}(\epsilon_0)$. Άρα $M_{l_0} \subseteq N_{\mathrm{x}}(\epsilon_0) \subseteq A_0$. Αυτό σημαίνει ότι η $\Sigma' = \{A_0\}$ είναι πεπερασμένη κάλυψη του M_{l_0} μικρότερη ή ίση της Σ και καταλήγουμε σε άτοπο. □

Τώρα θα αποδείξουμε το θεώρημα των Bolzano - Weierstrass στον Ευκλείδιο χώρο $\mathbb{R}^d$, το οποίο διατυπώνεται με δύο (ισοδύναμες) μορφές.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΩΝ BOLZANO - WEIERSTRASS. [α] *Κάθε φραγμένη ακολουθία στο $\mathbb{R}^d$ έχει συγκλίνουσα υποακολουθία.*
[β] *Κάθε φραγμένο άπειρο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ έχει τουλάχιστον ένα σημείο συσσώρευσης.*

Απόδειξη. [α] Έστω (x_n) φραγμένη ακολουθία στον $\mathbb{R}^d$. Τότε υπάρχει κάποιο κλειστό ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο M με ακμές παράλληλες στους κύριους άξονες ώστε να ισχύει $\mathrm{x}_n \in M$ για κάθε n. Σύμφωνα με την πρόταση 11.23, το M είναι συμπαγές, οπότε, βάσει του θεωρήματος 11.7, υπάρχει υποακολουθία της (x_n) η οποία συγκλίνει (σε στοιχείο του M).
[β] Έστω K τυχόν άπειρο και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Επειδή το K είναι άπειρο, υπάρχει ακολουθία (x_n) στο K με όρους διαφορετικούς ανά δύο. Το K είναι φραγμένο, οπότε η (x_n) είναι φραγμένη, οπότε, σύμφωνα με το [α], υπάρχει υποακολουθία (x_{n_k}) της (x_n) η οποία συγκλίνει σε κάποιο $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^d$. Επειδή οι όροι της (x_{n_k}) είναι διαφορετικοί ανά δύο, το πολύ ένας από αυτούς είναι ίσος με x. Άρα η ακολουθία (x_{n_k}) από κάποιον δείκτη και πέρα έχει όλους τους όρους της διαφορετικούς από το x και συγκλίνει στο x. Από την πρόταση 11.12 συνεπάγεται ότι το x είναι σημείο συσσώρευσης του K. □

Ερχόμαστε, τώρα, σε ένα πολύ σημαντικό αποτέλεσμα το οποίο χαρακτηρίζει όλα τα συμπαγή υποσύνολα ενός Ευκλείδιου χώρου. Η αναγνώριση ενός συμπαγούς συνόλου στον Ευκλείδειο χώρο είναι πολύ απλή υπόθεση: *πρέπει και αρκεί να δούμε ότι το σύνολο είναι κλειστό και φραγμένο.*

ΘΕΩΡΗΜΑ 11.8. *Έστω $M \subseteq \mathbb{R}^d$. Το M είναι συμπαγές αν και μόνον αν είναι φραγμένο και κλειστό.*

Πρώτη απόδειξη. Η πρόταση 11.20 αποδεικνύει τη μία κατεύθυνση.
Έστω ότι το M είναι κλειστό και φραγμένο. Θεωρούμε τυχούσα ακολουθία (x_n) στο M. Επειδή το M είναι φραγμένο, η (x_n) είναι φραγμένη και, σύμφωνα με το θεώρημα των Bolzano - Weierstrass, έχει υποακολουθία (x_{n_k}) η οποία συγκλίνει, δηλαδή, $\mathrm{x}_{n_k} \to \mathrm{x}$ για κάποιο $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^d$. Επειδή το M είναι κλειστό και η (x_{n_k}) περιέχεται στο M, συνεπάγεται ότι $\mathrm{x} \in M$. Άρα κάθε ακολουθία στο M έχει υποακολουθία η οποία συγκλίνει σε στοιχείο του M και, επομένως, από το θεώρημα 11.7 συνεπάγεται ότι το M είναι συμπαγές.
Δεύτερη απόδειξη. Πάλι η πρόταση 11.20 αποδεικνύει τη μία κατεύθυνση.
Επειδή το M είναι φραγμένο, υπάρχει κλειστό ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο N με ακμές παράλληλες στους κύριους άξονες ώστε $M \subseteq N$. Από την πρόταση 11.23 συνεπάγεται ότι το N είναι συμπαγές και, επειδή το M είναι κλειστό, το M είναι, σύμφωνα με την πρόταση 11.21, συμπαγές. □

Παράδειγμα 11.6.14. Οποιαδήποτε κλειστή μπάλα $\overline{N}_{x_0}(R)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$.

Το θεώρημα 11.8 λέει ότι το αντίστροφο της πρότασης 11.20 ισχύει στο $\mathbb{R}^d$. Δεν είναι, όμως, σωστό ότι ισχύει σε κάθε μετρικό χώρο.

Παράδειγμα 11.6.15. Σύμφωνα με τα παραδείγματα 11.6.8 και 11.6.10, κάθε άπειρο υποσύνολο ενός άπειρου συνόλου X με την διακριτή μετρική d_δ είναι μεν κλειστό και φραγμένο αλλά δεν είναι συμπαγές.

ΠΡΟΤΑΣΗ 11.24. *Κάθε μη-κενό συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έχει μέγιστο και ελάχιστο στοιχείο.*

Απόδειξη. Έστω μη-κενό συμπαγές υποσύνολο M του $\mathbb{R}$. Αφού το M είναι μη-κενό και φραγμένο, το M έχει supremum το οποίο είναι αριθμός και θέτουμε $u = \sup M$. Γνωρίζουμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $x \in M$ ώστε $u - \epsilon < x \leq u$ και, επομένως, $x \in N_u(\epsilon)$. Άρα το u είναι οριακό σημείο του M και, επειδή το M είναι κλειστό, $u \in M$. Άρα το u είναι το μέγιστο στοιχείο του M. Η απόδειξη είναι ίδια για την ύπαρξη ελαχίστου στοιχείου. □

ΘΕΩΡΗΜΑ 11.9. *Έστω μετρικοί χώροι (X, d) και (Y, ρ), $M \subseteq X$ και $f : M \to Y$. Αν η f είναι συνεχής στο M και το M είναι συμπαγές, τότε το $f(M)$ είναι συμπαγές.*

Πρώτη απόδειξη. Έστω (y_n) οποιαδήποτε ακολουθία στο $f(M)$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η (y_n) έχει υποακολουθία η οποία συγκλίνει σε στοιχείο του $f(M)$. Για κάθε n υπάρχει $x_n \in M$ ώστε $f(x_n) = y_n$. Αφού το M είναι συμπαγές, υπάρχει υποακολουθία (x_{n_k}) η οποία συγκλίνει σε στοιχείο του M, δηλαδή $x_{n_k} \to x$ για κάποιο $x \in M$. Αφού η f είναι συνεχής στο M, συνεπάγεται $y_{n_k} = f(x_{n_k}) \to f(x) \in f(M)$.
Δεύτερη απόδειξη. Έστω τυχούσα ανοικτή κάλυψη T του $f(M)$. Σύμφωνα με το θεώρημα 11.2, για κάθε $B \in T$ υπάρχει ανοικτό $A_B \subseteq X$ ώστε

$$f^{-1}(B) = A_B \cap M. \tag{11.21}$$

Επειδή $f(M) \subseteq \bigcup_{B \in T} B$, συνεπάγεται

$$M \subseteq \bigcup_{B \in T} f^{-1}(B) \subseteq \bigcup_{B \in T} A_B.$$

Επομένως, η συλλογή $\Sigma = \{A_B \,|\, B \in T\}$ είναι ανοικτή κάλυψη του M. Επειδή το M είναι συμπαγές, υπάρχουν $B_1, \ldots, B_n \in T$ ώστε

$$M \subseteq A_{B_1} \cup \cdots \cup A_{B_n}.$$

Από αυτήν την σχέση και την (11.21) συνεπάγεται

$$M \subseteq (A_{B_1} \cup \cdots \cup A_{B_n}) \cap M = (A_{B_1} \cap M) \cup \cdots \cup (A_{B_n} \cap M) = f^{-1}(B_1) \cup \cdots \cup f^{-1}(B_n),$$

οπότε $f(M) \subseteq B_1 \cup \cdots \cup B_n$. Άρα η $\{B_1, \ldots, B_n\}$ είναι πεπερασμένη κάλυψη του $f(M)$ μικρότερη ή ίση της T. □

Το θεώρημα 11.10 γενικεύει τα γνωστά θεωρήματα φραγμένης συνάρτησης και μέγιστης - ελάχιστης τιμής για συνεχείς συναρτήσεις $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ στο πλαίσιο του $\mathbb{R}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 11.10. *Έστω μετρικός χώρος (X, d), $M \subseteq X$ και $f : M \to \mathbb{R}$. Αν η f είναι συνεχής στο M και το M είναι συμπαγές, τότε η f είναι φραγμένη και έχει μέγιστη τιμή και ελάχιστη τιμή.*

Απόδειξη. Από το θεώρημα 11.9 συνεπάγεται ότι το $f(M)$ είναι συμπαγές. Άρα, σύμφωνα με την πρόταση 11.24, το $f(M)$ είναι φραγμένο και έχει μέγιστο και ελάχιστο στοιχείο. □

Παράδειγμα 11.6.16. Θα ξαναγυρίσουμε στις περιπτώσεις των μετρικών χώρων $(B(A), d_A)$ και $(BC(A), d_A)$ με την ομοιόμορφη μετρική d_A στο A, όπου A είναι υποσύνολο ενός μετρικού χώρου (X, d). Υπάρχει και ένα τρίτο σύνολο με στοιχεία συναρτήσεις $f : A \to \mathbb{R}$, το σύνολο

$$C(A) = \{f \mid \text{η } f : A \to \mathbb{R} \text{ είναι συνεχής}\}.$$

Είναι προφανές ότι

$$BC(A) = B(A) \cap C(A),$$

αλλά δεν μπορούμε να πούμε ότι, γενικά, ένα από τα $B(A), C(A)$ είναι υποσύνολο του άλλου. Ανάλογα με το συγκεκριμένο A μπορεί να υπάρχουν συναρτήσεις φραγμένες στο A αλλά όχι συνεχείς στο A και συναρτήσεις συνεχείς στο A αλλά όχι φραγμένες στο A.
Όμως, *αν το A είναι συμπαγές*, τότε κάθε συνεχής συνάρτηση στο A είναι και φραγμένη στο A, οπότε

$$BC(A) = C(A) \subseteq B(A).$$

Τέλος, θα δούμε την γενίκευση του ορισμού της ομοιόμορφης συνέχειας.

ΟΡΙΣΜΟΣ 11.20. *Έστω μετρικοί χώροι (X, d) και (Y, ρ), $A \subseteq X$ και $f : A \to Y$. Η f χαρακτηρίζεται* **ομοιόμορφα συνεχής** *στο A αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $\rho(f(x'), f(x'')) < \epsilon$ για κάθε $x', x'' \in A$ με $d(x', x'') < \delta$.*

ΘΕΩΡΗΜΑ 11.11. *Έστω μετρικοί χώροι (X, d) και (Y, ρ), $M \subseteq X$ και $f : M \to Y$. Αν η f είναι συνεχής στο M και το M είναι συμπαγές, τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο M.*

Πρώτη απόδειξη. Έστω ότι η f *δεν* είναι ομοιόμορφα συνεχής στο M. Τότε υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε για κάθε $\delta > 0$ να υπάρχουν $x', x'' \in M$ για τα οποία ισχύει $d(x', x'') < \delta$ και $\rho(f(x'), f(x'')) \geq \epsilon$. Άρα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχουν $x'_n, x''_n \in M$ ώστε

$$d(x'_n, x''_n) < \tfrac{1}{n} \ \text{ και } \ \rho(f(x'_n), f(x''_n)) \geq \epsilon.$$

Το M είναι συμπαγές, οπότε η (x'_n) έχει υποακολουθία (x'_{n_k}) η οποία συγκλίνει σε στοιχείο του M, δηλαδή $x'_{n_k} \to x$ για κάποιο $x \in M$. Τότε, όμως,

$$d(x''_{n_k}, x) \leq d(x''_{n_k}, x'_{n_k}) + d(x'_{n_k}, x) < \tfrac{1}{n_k} + d(x'_{n_k}, x) \to 0$$

και, επομένως, $x''_{n_k} \to x$. Λόγω συνέχειας της f στο x, είναι $f(x'_{n_k}) \to f(x)$ και $f(x''_{n_k}) \to f(x)$. Άρα

$$\rho\big(f(x'_{n_k}), f(x''_{n_k})\big) \leq \rho\big(f(x'_{n_k}), f(x)\big) + \rho\big(f(x), f(x''_{n_k})\big) \to 0.$$

Το τελευταίο αντιφάσκει με το ότι ισχύει $\rho\big(f(x'_{n_k}), f(x''_{n_k})\big) \geq \epsilon$ για κάθε k.

Δεύτερη απόδειξη. Έστω $\epsilon > 0$. Επειδή η f είναι συνεχής στο M, για κάθε $x \in M$ υπάρχει $\delta_x > 0$ ώστε να ισχύει

$$\rho(f(y), f(x)) < \tfrac{\epsilon}{2} \qquad \text{για κάθε } \ y \in M \ \text{ με } \ d(y,x) < \delta_x. \tag{11.22}$$

Τώρα, η συλλογή $\{N_x(\frac{\delta_x}{2}) \,|\, x \in M\}$ είναι ανοικτή κάλυψη του M και, επειδή το M είναι συμπαγές, υπάρχουν $x_1, \dots, x_n \in M$ ώστε

$$M \subseteq N_{x_1}(\tfrac{\delta_{x_1}}{2}) \cup \cdots \cup N_{x_n}(\tfrac{\delta_{x_n}}{2}). \tag{11.23}$$

Θέτουμε

$$\delta = \min\{\tfrac{\delta_{x_1}}{2}, \dots, \tfrac{\delta_{x_n}}{2}\} > 0 \tag{11.24}$$

και παίρνουμε οποιαδήποτε $x', x'' \in M$ με $d(x', x'') < \delta$. Το x' ανήκει στο M, οπότε, βάσει της (11.23), υπάρχει κάποιο $k = 1, \dots, n$ ώστε $x' \in N_{x_k}(\frac{\delta_{x_k}}{2})$ και, επομένως,

$$d(x', x_k) < \tfrac{\delta_{x_k}}{2} < \delta_{x_k}. \tag{11.25}$$

Από τις (11.24) και (11.25) συνεπάγεται

$$d(x'', x_k) \leq d(x'', x') + d(x', x_k) < \delta + \tfrac{\delta_{x_k}}{2} \leq \delta_{x_k}. \tag{11.26}$$

Από τις (11.25), (11.26) και (11.22) συνεπάγεται $\rho(f(x'), f(x_k)) < \frac{\epsilon}{2}$ και $\rho(f(x''), f(x_k)) < \frac{\epsilon}{2}$. Άρα

$$\rho(f(x'), f(x'')) \leq \rho(f(x'), f(x_k)) + \rho(f(x''), f(x_k)) < \epsilon.$$

Αποδείξαμε ότι για κάθε $x', x'' \in M$ με $d(x', x'') < \delta$ ισχύει $\rho(f(x'), f(x'')) < \epsilon$. Άρα η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο M. $\square$

Ασκήσεις.

11.6.1. Αποδείξτε ότι το $\{(x_1, x_2) \,|\, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq 1\}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ και ότι το $\{(x_1, x_2, x_3) \,|\, {x_1}^2 + {x_2}^2 \leq x_3 \leq 1\}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$.

11.6.2. Θεωρήστε το $(0,1)$ στο $\mathbb{R}$ και τα σύνολα $A_x = (\frac{x}{2}, \frac{1+x}{2})$ για $0 < x < 1$. Αποδείξτε ότι η $\Sigma = \{A_x \,|\, 0 < x < 1\}$ είναι ανοικτή κάλυψη του $(0,1)$ και ότι δεν υπάρχει καμία πεπερασμένη κάλυψη Σ' του $(0,1)$ μικρότερη ή ίση της Σ.

Θεωρήστε το $[0,1]$ στο $\mathbb{R}$ και τα $A_x = (\frac{x}{2}, \frac{1+x}{2})$ για $0 < x < 1$. Έστω I και J δύο ανοικτά διαστήματα με $0 \in I$ και $1 \in J$. Αποδείξτε ότι η $\Sigma = \{I, J\} \cup \{A_x \,|\, 0 < x < 1\}$ είναι ανοικτή κάλυψη του $[0,1]$ και ότι υπάρχει πεπερασμένη κάλυψη Σ' του $[0,1]$ μικρότερη ή ίση της Σ. Μη χρησιμοποιήσετε ότι το $[0,1]$ είναι συμπαγές.

11.6.3. Υπολογίστε τη διάμετρο στον $\mathbb{R}^d$ κάθε ανοικτής και κάθε κλειστής μπάλας και κάθε ανοικτού και κάθε κλειστού παραλληλεπιπέδου με ακμές παράλληλες στους κύριους άξονες.

11.6.4. Υπολογίστε τη διάμετρο του X στον (X, d_δ), όπου d_δ είναι η διακριτή μετρική στο μη-κενό X, διακρίνοντας δύο περιπτώσεις: (i) το X είναι μονοσύνολο και (ii) το X περιέχει περισσότερα από ένα στοιχεία. Στη δεύτερη περίπτωση πάρτε οποιοδήποτε $x_0 \in X$ και υπολογίστε τη διάμετρο της κλειστής περιοχής $\overline{N}_{x_0}(1)$. Συμφωνεί το αποτέλεσμα με τον "κανόνα" *διάμετρος = δύο φορές η ακτίνα*;

11.6.5. Δείτε την άσκηση 11.1.3. Έστω $1 \leq p < q \leq +\infty$ και $M \subseteq \mathbb{R}^d$. Αποδείξτε ότι το M είναι φραγμένο στον μετρικό χώρο $(\mathbb{R}^d, d_p)$ αν και μόνο αν είναι φραγμένο στον $(\mathbb{R}^d, d_q)$.

11.6.6. [α] Θεωρήστε το υποσύνολο $A = \{(x_1, x_2) \,|\, {x_1}^2 + {x_2}^2 \leq 1\}$ του $\mathbb{R}^2$. Έχει η συνάρτηση $f(x_1, x_2) = e^{x_1 + x_2}$ μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο A;

[β] Θεωρήστε το υποσύνολο $A = \{(x_1, x_2, x_3) \,|\, {x_1}^2 + {x_2}^2 + x_2 \leq 1, |x_3| \leq 2\}$ του $\mathbb{R}^3$. Έχει η συνάρτηση $f(x_1, x_2, x_3) = e^{x_1 + x_3} \sin(x_1 x_2)$ μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο A;

11.6.7. Έστω $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ με $f(\mathrm{x}) \to 0$ καθώς $\|\mathrm{x}\|_2 \to +\infty$. Αυτό σημαίνει, εξ ορισμού, ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $R > 0$ ώστε να ισχύει $|f(\mathrm{x})| < \epsilon$ για κάθε $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^d$ με $\|\mathrm{x}\|_2 > R$.

Αν υπάρχει $\mathrm{x}_0 \in \mathbb{R}^d$ ώστε $f(\mathrm{x}_0) \geq 0$, αποδείξτε ότι η f έχει μέγιστη τιμή.

Αν υπάρχει $\mathrm{x}_0 \in \mathbb{R}^d$ ώστε $f(\mathrm{x}_0) \leq 0$, αποδείξτε ότι η f έχει ελάχιστη τιμή.

Αποδείξτε ότι η $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x_1, x_2) = x_1 e^{-{x_1}^2 - {x_2}^2}$ έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή και υπολογίστε τις τιμές αυτές.

11.6.8. Έστω μετρικός χώρος (X, d). Αποδείξτε ότι το $\emptyset$ είναι συμπαγές υποσύνολο του X.

11.6.9. Έστω μετρικός χώρος (X, d), ακολουθία (x_n) στο X, $x \in X$ ώστε να ισχύει $x_n \neq x$ για κάθε n και $x_n \to x$. Αποδείξτε ότι το $\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ δεν είναι συμπαγές ενώ το $\{x\} \cup \{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ είναι συμπαγές.

11.6.10. Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $M_1, \ldots, M_n \subseteq X$.

Αν τα $M_1, \ldots, M_n$ είναι συμπαγή, αποδείξτε ότι το $M_1 \cup \cdots \cup M_n$ είναι συμπαγές.

Βρείτε συμπαγή υποσύνολα $M_1, M_2, \ldots$ του $\mathbb{R}$ ώστε το $\bigcup_{n=1}^{+\infty} M_n$ να μην είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

11.6.11. Έστω μετρικός χώρος (X, d) και μη-κενό $M \subseteq X$. Αποδείξτε ότι το M είναι φραγμένο αν και μόνο αν $\operatorname{diam} M < +\infty$.

11.6.12. Έστω μετρικός χώρος (X, d).

Αποδείξτε ότι το $\emptyset$ είναι φραγμένο υποσύνολο του X.

Αν $M, N \subseteq X$ και τα M και N είναι φραγμένα, αποδείξτε ότι το $M \cup N$ είναι φραγμένο.

11.6.13. Έστω μετρικός χώρος (X, d), $M \subseteq X$ και $x_0', x_0'' \in X$. Αποδείξτε ότι υπάρχει R' ώστε $M \subseteq N_{x_0'}(R')$ αν και μόνον αν υπάρχει R'' ώστε $M \subseteq N_{x_0''}(R'')$.

11.6.14. Στο $\mathbb{R}$ θεωρούμε τη μετρική d που ορίζεται με τον τύπο $d(x, y) = \frac{|x-y|}{|x-y|+1}$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Σύμφωνα με την άσκηση 11.2.25[β], η d και η Ευκλείδια μετρική είναι ισοδύναμες.

Αποδείξτε ότι το $\mathbb{R}$ είναι φραγμένο με την μετρική d ενώ δεν είναι φραγμένο με την Ευκλείδια μετρική. Υπολογίστε τη διάμετρο του $\mathbb{R}$ με τη μετρική d και τη διάμετρο του $\mathbb{R}$ με την Ευκλείδια μετρική.

11.6.15. Έστω μετρικός χώρος (X, d).

Αν $\emptyset \neq N \subseteq M \subseteq X$, αποδείξτε ότι $\operatorname{diam} N \leq \operatorname{diam} M$.

Αν $\emptyset \neq M, N \subseteq X$ και $M \cap N \neq \emptyset$, αποδείξτε ότι $\operatorname{diam}(M \cup N) \leq \operatorname{diam} M + \operatorname{diam} N$.

11.6.16. Έστω μετρικός χώρος (X, d) και μη-κενό $M \subseteq X$. Αποδείξτε ότι $\operatorname{diam} M = \operatorname{diam} \overline{M}$.

11.6.17. Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $A, B \subseteq X$. Αν το A είναι συμπαγές και το B κλειστό, αποδείξτε ότι το $A \cap B$ είναι συμπαγές.

11.6.18. Έστω μετρικός χώρος (X, d), $x_0 \in X$ και μη-κενά M και N συμπαγή υποσύνολα του X.

Αποδείξτε ότι υπάρχουν $x', y' \in M$ ώστε $d(x', y') = \operatorname{diam} M$.

Αποδείξτε ότι υπάρχει $x' \in M$ ώστε $d(x_0, x') = \inf\{d(x_0, x) \,|\, x \in M\}$.

Αποδείξτε ότι υπάρχουν $x' \in M$ και $y' \in N$ ώστε $d(x', y') = \inf\{d(x, y) \,|\, x \in M, y \in N\}$.

11.6.19. Έστω $\mathrm{x}_0 \in \mathbb{R}^d$, μη-κενό κλειστό υποσύνολο M του $\mathbb{R}^d$ και μη-κενό συμπαγές υποσύνολο N του $\mathbb{R}^d$.

Αποδείξτε ότι υπάρχει $\mathrm{x}' \in M$ ώστε $\|\mathrm{x}_0 - \mathrm{x}'\|_2 = \inf\{\|\mathrm{x}_0 - \mathrm{x}\|_2 \,|\, \mathrm{x} \in M\}$.

Αποδείξτε ότι υπάρχουν $\mathrm{x}' \in M$ και $\mathrm{y}' \in N$ ώστε $\|\mathrm{x}' - \mathrm{y}'\|_2 = \inf\{\|\mathrm{x} - \mathrm{y}\|_2 \,|\, \mathrm{x} \in M, \mathrm{y} \in N\}$.

11.6.20. Έστω φραγμένο υποσύνολο M του $\mathbb{R}^d$. Αποδείξτε ότι τα $\overline{M}$, M' και ∂M είναι συμπαγή.

11.6.21. Φτιάξτε συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με άπειρου αριθμήσιμου πλήθους σημεία συσσώρευσης.

11.6.22. Έστω μετρικοί χώροι (X, d) και (Y, ρ), $M \subseteq X$, $N \subseteq Y$ και $f : M \to N$ η οποία είναι ένα-προς-ένα και επί. Αν η f είναι συνεχής στο M και το M είναι συμπαγές, αποδείξτε ότι η αντίστροφη $f^{-1} : N \to M$ είναι συνεχής στο N.

11.6.23. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $f : A \to \mathbb{R}$. Το $G_f = \{(x, f(x)) \,|\, x \in A\} \subseteq \mathbb{R}^2$ ονομάζεται **γράφημα** της f.

Έστω ότι η f είναι φραγμένη. Αποδείξτε ότι, αν το G_f είναι κλειστό, τότε η f είναι συνεχής.

Έστω ότι το A είναι κλειστό. Αποδείξτε ότι, αν η f είναι συνεχής, τότε το G_f είναι κλειστό.

Έστω ότι το A είναι συμπαγές. Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής αν και μόνον αν το G_f είναι συμπαγές.

11.6.24. Έστω μετρικοί χώροι (X, d) και (Y, ρ), $B \subseteq A \subseteq X$ και $f : A \to Y$. Αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A, αποδείξτε ότι είναι ομοιόμορφα συνεχής και στο B.

11.6.25. Έστω μετρικοί χώροι (X, d), (Y, ρ) και (Z, τ), $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$, $f : A \to B$ και $g : B \to Z$. Αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A και η g ομοιόμορφα συνεχης στο B, αποδείξτε ότι η $g \circ f : A \to Z$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A.

11.6.26. Έστω μετρικοί χώροι (X, d) και (Y, ρ), $A \subseteq X$ και $f : A \to Y$ και έστω ότι ο (Y, ρ) είναι πλήρης. Αποδείξτε ότι τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(i) Υπάρχει ομοιόμορφα συνεχής επέκταση της f στο $\overline{A}$, δηλαδή συνάρτηση $F : \overline{A} \to Y$ ομοιόμορφα συνεχής στο $\overline{A}$ ώστε να ισχύει $F(x) = f(x)$ για κάθε $x \in A$.

(ii) Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A.

11.6.27. Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $M \subseteq X$. Αν το M είναι συμπαγές, αποδείξτε ότι υπάρχει αριθμήσιμο $A \subseteq M$ ώστε $M = \overline{A}$.

11.6.28. [14] Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $M \subseteq X$.

Το M χαρακτηρίζεται **ολικά φραγμένο** αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχουν πεπερασμένου πλήθους σημεία του M ώστε κάθε άλλο σημείο του M να έχει απόσταση μικρότερη από ϵ από τουλάχιστον ένα από αυτά ή, ισοδύναμα, αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχουν πεπερασμένου πλήθους ανοικτές περιοχές με κέντρα στο M και ακτίνας ϵ οι οποίες να καλύπτουν το M.

Αποδείξτε ότι το M είναι συμπαγές αν και μόνο αν είναι πλήρες και ολικά φραγμένο.

11.6.29. [15] Δείτε τις ασκήσεις 11.1.6 και 11.2.26. Έστω μετρικός χώρος (X, d) και μη-κενό $M \subseteq X$. Αποδείξτε ότι το M είναι συμπαγές υποσύνολο του (X, d) αν και μόνο αν το M είναι συμπαγές υποσύνολο του (M, d).

11.6.30. [α] Έστω συναρτήσεις $x, y : [a, b] \to \mathbb{R}$ και $f : K \to \mathbb{R}$ όπου οι x, y είναι ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$, η f είναι συνεχής στο συμπαγές $K \subseteq \mathbb{R}^2$ και ισχύει $(x(t), y(t)) \in K$ για κάθε $t \in [a, b]$. Αποδείξτε ότι η $f \circ (x, y) : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε διαμέριση $\Delta = \{a = t_0, \ldots, t_n = b\}$ του $[a, b]$ με $w(\Delta) < \delta$ και κάθε δύο επιλογές $\Xi' = \{{\xi_1}', \ldots, {\xi_n}'\}$ και $\Xi'' = \{{\xi_1}'', \ldots, {\xi_n}''\}$ ενδιάμεσων σημείων για την Δ ισχύει $\big|\sum_{k=1}^n f(x({\xi_k}'), y({\xi_k}''))(t_k - t_{k-1}) - \int_a^b f(x(t), y(t))\, dt\big| < \epsilon$.

[β] Δείτε την άσκηση 6.5.6 και αποδείξτε ότι, αν μια καμπύλη Γ έχει παραμετρικές εξισώσεις $x = x(t)$ και $y = y(t)$ στο διάστημα $[a, b]$ με παραγώγους ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$, τότε

$$l(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt.$$

[14] Μια πολύ σημαντική άσκηση. Όπως στο θεώρημα 11.7, ένας ακόμη χαρακτηρισμός της έννοιας της συμπάγειας με βάση, τώρα, την έννοια της πληρότητας.

[15] Η άσκηση αυτή μας λέει ότι το να είναι ή να μην είναι το σύνολο M συμπαγές εξαρτάται μόνο από το ίδιο το σύνολο M (και την μετρική του) και όχι από τον περιβάλλοντα χώρο.

11.6.31. Έστω μετρικός χώρος (X, d).
[α] Θεωρούμε το σύνολο

$$Z_b = \{A \,|\, A \text{ μη-κενό και φραγμένο υποσύνολο του } X\}.$$

Για κάθε $A, B \in Z_b$ ορίζουμε το

$$\widetilde{d}(A, B) = \inf\big\{\mu > 0 \,|\, A \subseteq \bigcup_{b\in B} N_b(\mu) \text{ και } B \subseteq \bigcup_{a\in A} N_a(\mu)\big\}.$$

Αποδείξτε ότι το σύνολο του οποίου το infimum ορίζει το $\widetilde{d}(A, B)$ είναι μη-κενό με κάτω φράγμα το 0 και, επομένως, $0 \leq \widetilde{d}(A, B) < +\infty$.
Αποδείξτε ότι η $\widetilde{d}$ είναι **ψευδομετρική** στο Z_b. Δηλαδή, ότι ικανοποιεί όλες τις ιδιότητες μιας μετρικής εκτός της (ii), η οποία αντικαθίσταται από την: *για κάθε* $A \in Z_b$ *ισχύει* $\widetilde{d}(A, A) = 0$.
Αποδείξτε ότι για κάθε $A, B \in Z_b$ ισχύει $\widetilde{d}(A, B) = 0$ αν και μόνο αν $\overline{A} = \overline{B}$.
[β] Έστω

$$Z_{bc} = \{A \,|\, A \text{ μη-κενό, φραγμένο και κλειστό υποσύνολο του } X\}.$$

Για κάθε $A, B \in Z_{bc}$ ορίζουμε με τον ίδιο τύπο το $\widetilde{d}(A, B)$.
Αποδείξτε ότι η $\widetilde{d}$ είναι μετρική στο Z_{bc}. Η $\widetilde{d}$ ονομάζεται **μετρική Hausdorff** στον χώρο Z_{bc} των μη-κενών, κλειστών και φραγμένων υποσυνόλων ενός μετρικού χώρου (X, d).
Τώρα, ως (X, d) θεωρούμε τον $\mathbb{R}^d$ με την Ευκλείδια μετρική. Έστω ακολουθία (A_n) μη-κενών, κλειστών και φραγμένων (δηλαδή, συμπαγών) υποσυνόλων του $\mathbb{R}^d$ και έστω $\widetilde{d}(A_n, A) \to 0$, όπου το A είναι, επίσης, μη-κενό, κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Αποδείξτε ότι, αν όλα τα A_n είναι κυρτά, τότε και το A είναι κυρτό.
Προσπαθήστε να δείτε τί σημαίνει γεωμετρικά η σχέση $\widetilde{d}(A, B) \leq \epsilon$ ανάμεσα σε δύο συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$ ή του $\mathbb{R}^3$.

11.6.32. Για κάθε ανοικτό διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$ συμβολίζουμε $|I|$ το μήκος του I.
[α] Λέμε ότι ένα $A \subseteq \mathbb{R}$ έχει **μηδενικό μέτρο** αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει ακολουθία (I_n) ανοικτών διαστημάτων στο $\mathbb{R}$ ώστε $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} |I_n| < \epsilon$.
Αποδείξτε ότι το κενό σύνολο καθώς και κάθε μονοσύνολο στο $\mathbb{R}$ έχει μηδενικό μέτρο.
Αν $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$ και το B έχει μηδενικό μέτρο, αποδείξτε ότι το A έχει μηδενικό μέτρο.
Αν κάθε $A_m \subseteq \mathbb{R}$ με $m \in \mathbb{N}$ έχει μηδενικό μέτρο, αποδείξτε ότι το $A = \bigcup_{m=1}^{+\infty} A_m$ έχει μηδενικό μέτρο.
Αποδείξτε ότι το $\mathbb{Q}$ έχει μηδενικό μέτρο.
Έστω συμπαγές $A \subseteq \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι το A έχει μηδενικό μέτρο αν και μόνο αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχουν ανοικτά διαστήματα $I_1, \ldots, I_n$ ώστε $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} I_k$ και $\sum_{k=1}^{n} |I_k| < \epsilon$.
Αποδείξτε ότι κάθε διάστημα A με μη-μηδενικό μήκος δεν έχει μηδενικό μέτρο.
[β][16] Δείτε την άσκηση 4.1.16. Έστω φραγμένη $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.
Για κάθε $\epsilon > 0$ ορίζουμε το σύνολο $A(\epsilon) = \{x \in [a, b] \,|\, \omega(f; x) \geq \epsilon\}$. Προφανώς, αν $0 < \epsilon_1 < \epsilon_2$, τότε ισχύει $A(\epsilon_2) \subseteq A(\epsilon_1)$.
Αποδείξτε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ το $A(\epsilon)$ είναι συμπαγές.
Έστω $A = \{x \in [a, b] \,|\, \text{ο } x \text{ είναι σημείο ασυνέχειας της } f\}$. Αποδείξτε ότι $A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A(\frac{1}{n})$.
Αν η f είναι ολοκληρώσιμη, αποδείξτε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ το $A(\epsilon)$ έχει μηδενικό μέτρο και, επομένως, ότι το A έχει μηδενικό μέτρο.
Αντιστρόφως, αν το A έχει μηδενικό μέτρο, αποδείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη.

[16] Εδώ έχουμε το εξής σημαντικό κριτήριο ολοκληρωσιμότητας: *μια συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν το σύνολο των σημείων ασυνέχειάς της έχει μηδενικό μέτρο.*

11.7 Συνεκτικότητα.

ΟΡΙΣΜΟΣ 11.21. *Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $A \subseteq X$. Λέμε ότι τα B, C αποτελούν* **διάσπαση** *του A αν (i) $B \cup C = A$, (ii) $B \cap C = \emptyset$, (iii) $B \neq \emptyset$, $C \neq \emptyset$, (iv) κανένα από τα B, C δεν περιέχει οριακό σημείο του άλλου.*

Όταν ισχύουν τα (i), (ii), (iii), λέμε ότι τα B, C αποτελούν *διαμέριση* του A.

Παράδειγμα 11.7.1. Στο $\mathbb{R}^2$ θεωρούμε τους κλειστούς δίσκους $B = \overline{N_0}(1)$, $C = \overline{N_3}(1)$ και την ένωση $A = B \cup C$. Είναι σαφές ότι τα B, C αποτελούν διάσπαση του A.
Αν θεωρήσουμε τους ανοικτούς δίσκους $B = N_0(1)$, $C = N_2(1)$ και το $A = B \cup C$, τότε οι δίσκοι B, C εφάπτονται αλλά, και πάλι, αποτελούν διάσπαση του A.
Αν θεωρήσουμε τον κλειστό δίσκο $B = \overline{N_0}(1)$, τον ανοικτό δίσκο $C = N_2(1)$ και το $A = B \cup C$, τότε οι δίσκοι B, C εφάπτονται αλλά *δεν* αποτελούν διάσπαση του A: το B περιέχει το σημείο 1 το οποίο είναι οριακό σημείο του C.

ΟΡΙΣΜΟΣ 11.22. *Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $A \subseteq X$. Το σύνολο A χαρακτηρίζεται* **συνεκτικό** *αν δεν υπάρχει καμιά διάσπασή του, δηλαδή αν δεν υπάρχει κανένα ζευγάρι συνόλων B, C με τις ιδιότητες (i) - (iv) του παραπάνω ορισμού*

Παράδειγμα 11.7.2. Τα πρώτα δύο σύνολα A του παραδείγματος 11.7.1 είναι μη-συνεκτικά υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$ διότι για το καθένα υπάρχει συγκεκριμένη διάσπαση.
Δεν μπορούμε, όμως, να αποφασίσουμε αυτή τη στιγμή αν το τρίτο σύνολο A του παραδείγματος 11.7.1 είναι συνεκτικό ή όχι. Γνωρίζουμε ότι τα συγκεκριμένα B, C που σχετίζονται με το συγκεκριμένο A δεν αποτελούν διάσπαση του A. *Όμως, για να είναι αποφασίσουμε ότι το A είναι συνεκτικό πρέπει να αποδείξουμε ότι, όχι μόνο το συγκεκριμένο ζευγάρι, αλλά ότι ένα οποιοδήποτε ζευγάρι συνόλων δεν αποτελεί διάσπαση του A.*

Παράδειγμα 11.7.3. Είναι προφανές ότι το $\emptyset$ αλλά και κάθε μονοσύνολο $\{x\}$ είναι συνεκτικό σύνολο. Τα σύνολα αυτά δεν έχουν καν διαμέριση αφού για να επιδέχεται ένα σύνολο διαμέριση πρέπει να έχει τουλάχιστον δύο στοιχεία.

ΛΗΜΜΑ 11.2. *Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $A, B, C \subseteq X$ με $B \cap C = \emptyset$ και έστω ότι κανένα από τα B, C δεν περιέχει οριακό σημείο του άλλου. Αν το A είναι συνεκτικό και $A \subseteq B \cup C$, τότε είτε $A \subseteq B$ είτε $A \subseteq C$.*

Απόδειξη. Ορίζουμε
$$B_1 = A \cap B, \qquad C_1 = A \cap C.$$
Προφανώς, είναι $B_1 \cup C_1 = A$ και $B_1 \cap C_1 = \emptyset$.
Τώρα, έστω $x \in B_1$. Τότε $x \in B$, οπότε το x δεν είναι οριακό σημείο του C. Άρα υπάρχει $r > 0$ ώστε το C να μην τέμνει την περιοχή $N_x(r)$ και τότε, επειδή $C_1 \subseteq C$, ούτε το C_1 τέμνει την $N_x(r)$. Άρα το x δεν είναι οριακό σημείο ούτε του C_1. Καταλήγουμε στο ότι το B_1 δεν περιέχει οριακό σημείο του C_1. Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι το C_1 δεν περιέχει οριακό σημείο του B_1.
Αν ήταν $B_1 \neq \emptyset$ και $C_1 \neq \emptyset$, τότε τα B_1, C_1 θα αποτελούσαν διάσπαση του A αλλά αυτό είναι αδύνατο, αφού το A είναι συνεκτικό. Άρα είτε $B_1 = \emptyset$ είτε $C_1 = \emptyset$ και, επομένως, είτε $A \subseteq C$ είτε $A \subseteq B$, αντιστοίχως. ☐

ΠΡΟΤΑΣΗ 11.25. *Έστω μετρικός χώρος (X, d) και μια συλλογή Σ συνεκτικών υποσυνόλων του X και έστω ότι όλα τα σύνολα της συλλογής Σ έχουν ένα κοινό σημείο. Τότε η ένωση $\bigcup_{A \in \Sigma} A$ είναι συνεκτική.*

Απόδειξη. Θέτουμε $U = \bigcup_{A \in \Sigma} A$ και θα αποδείξουμε ότι το U είναι συνεκτικό.
Ονομάζουμε, επίσης, x_0 το κοινό σημείο όλων των $A \in \Sigma$.
Έστω ότι το U δεν είναι συνεκτικό, οπότε υπάρχουν σύνολα B, C ώστε $B \cup C = U$, $B \cap C = \emptyset$, $B \neq \emptyset$, $C \neq \emptyset$ και κανένα από τα B, C δεν περιέχει οριακό σημείο του άλλου.

Προφανώς, ισχύει $x_0 \in U$, οπότε $x_0 \in B$ ή $x_0 \in C$. Ας υποθέσουμε ότι $x_0 \in B$ (η απόδειξη είναι ίδια αν $x_0 \in C$).
Για κάθε $A \in \Sigma$ ισχύει $A \subseteq U$ και, επομένως, $A \subseteq B \cup C$. Σύμφωνα με το λήμμα 11.2, κάθε σύνολο $A \in \Sigma$ περιέχεται είτε στο B είτε στο C. Η δεύτερη περίπτωση αποκλείεται: αν ένα $A \in \Sigma$ περιείχετο στο C, δεν θα μπορούσε να περιέχει το κοινό σημείο x_0 το οποίο βρίσκεται στο B. Άρα, λοιπόν, κάθε $A \in \Sigma$ περιέχεται στο B. Άρα και η ένωση $U = \bigcup_{A \in \Sigma} A$ περιέχεται στο B. Δηλαδή $U \subseteq B$ και καταλήγουμε σε άτοπο διότι το C είναι μη-κενό υποσύνολο του U.
Άρα το U είναι συνεκτικό. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 11.26. *Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $A \subseteq X$. Αν το A είναι συνεκτικό και $A \subseteq D \subseteq \overline{A}$, τότε και το D είναι συνεκτικό.*

Απόδειξη. Έστω ότι το D δεν είναι συνεκτικό, οπότε υπάρχουν σύνολα B, C ώστε $B \cup C = D$, $B \cap C = \emptyset$, $B \neq \emptyset$, $C \neq \emptyset$ και κανένα από τα B, C δεν περιέχει οριακό σημείο του άλλου.
Επειδή $A \subseteq D$, συνεπάγεται $A \subseteq B \cup C$. Επειδή το A είναι συνεκτικό, από το λήμμα 11.2 συνεπάγεται $A \subseteq B$ ή $A \subseteq C$. Έστω $A \subseteq B$. (Η απόδειξη είναι ίδια αν $A \subseteq C$.)
Επειδή $D \subseteq \overline{A}$, κάθε σημείο του D είναι οριακό σημείο του A και, επομένως, οριακό σημείο και του B (αφού $A \subseteq B$). Άρα κανένα σημείο του D δεν ανήκει στο C (αφού το C δεν περιέχει οριακά σημεία του B). Αυτό είναι άτοπο διότι το C είναι μη-κενό υποσύνολο του D.
Άρα το D είναι συνεκτικό. □

ΘΕΩΡΗΜΑ 11.12. *Έστω μετρικοί χώροι (X, d), (Y, ρ), $A \subseteq X$ και $f : A \to Y$ συνεχής στο A. Αν το A είναι συνεκτικό, τότε το $f(A)$ είναι συνεκτικό.*

Απόδειξη. Έστω ότι το $f(A)$ δεν είναι συνεκτικό.
Τότε υπάρχουν σύνολα B', C' ώστε $B' \cup C' = f(A)$, $B' \cap C' = \emptyset$, $B' \neq \emptyset$, $C' \neq \emptyset$ και κανένα από τα B', C' δεν περιέχει οριακό σημείο του άλλου.
Θεωρούμε τις αντίστροφες εικόνες των B', C' μέσα στο A, δηλαδή τα σύνολα

$$B = f^{-1}(B') = \{x \in A \,|\, f(x) \in B'\}, \qquad C = f^{-1}(C') = \{x \in A \,|\, f(x) \in C'\}.$$

Είναι φανερό ότι ισχύει $B \cup C = A$, $B \cap C = \emptyset$, $B \neq \emptyset$, $C \neq \emptyset$.
Τώρα, έστω ότι το B περιέχει οριακό σημείο του C, δηλαδή έστω $b \in B$ και b οριακό σημείο του C. Τότε υπάρχει ακολουθία (c_n) στο C ώστε $c_n \to b$. Επειδή η f είναι συνεχής στο b, συνεπάγεται $f(c_n) \to f(b)$. Παρατηρούμε ότι η ακολουθία $(f(c_n))$ είναι στο C' και, επομένως, το $f(b)$ είναι οριακό σημείο του C'. Όμως, $f(b) \in B'$ και καταλήγουμε σε άτοπο διότι το B' δεν περιέχει οριακό σημείο του C'. Άρα το B δεν περιέχει οριακό σημείο του C.
Τελείως συμμετρικά αποδεικνύεται ότι το C δεν περιέχει οριακό σημείο του B.
Άρα τα B, C αποτελούν διάσπαση του A. Αυτό είναι άτοπο διότι το A είναι συνεκτικό. Άρα το $f(A)$ είναι συνεκτικό. □

ΟΡΙΣΜΟΣ 11.23. *Έστω μετρικός χώρος (X, d), $x, y \in X$ και $r > 0$. Κάθε πεπερασμένο σύνολο $\{z_0, \ldots, z_n\} \subseteq X$ με $z_0 = x$, $z_n = y$ και $d(z_k, z_{k-1}) < r$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$ χαρακτηρίζεται* r-**αλληλουχία σημείων** *που συνδέει τα x, y. Αν, επιπλέον, ισχύει $z_k \in A$ για κάθε $k = 0, \ldots, n$, τότε λέμε ότι η r-αλληλουχία σημείων είναι στο A.*

ΘΕΩΡΗΜΑ 11.13. *Έστω μετρικός χώρος (X, d) και συμπαγές υποσύνολο K του X. Το K είναι συνεκτικό αν και μόνο αν για κάθε $x, y \in K$ και για κάθε $r > 0$ υπάρχει r-αλληλουχία σημείων στο K η οποία συνδέει τα x, y.*

Απόδειξη. Έστω ότι το K είναι συνεκτικό.
Θεωρούμε οποιαδήποτε $x, y \in K$ και οποιονδήποτε $r > 0$ και (για να καταλήξουμε σε άτοπο) υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει r-αλληλουχία σημείων στο K που συνδέει τα x, y.
Ορίζουμε τα σύνολα

$$B = \{b \in K \,|\, \text{υπάρχει } r\text{-αλληλουχία σημείων στο } K \text{ που συνδέει τα } x, b\},$$

$$C = \{c \in K \,|\, \text{δεν υπάρχει } r\text{-αλληλουχία σημείων στο } K \text{ που συνδέει τα } x, c\}.$$

Είναι φανερό ότι $B \cup C = K$, $B \cap C = \emptyset$, $B \neq \emptyset$ (διότι $x \in B$) και $C \neq \emptyset$ (διότι $y \in C$).

Ας υποθέσουμε ότι το B περιέχει κάποιο οριακό σημείο, έστω b, του C. Τότε (επειδή $b \in B$) υπάρχει r-αλληλουχία σημείων στο K που συνδέει τα x, b και, επίσης, (επειδή το b είναι οριακό σημείο του C) υπάρχει $c \in C$ ώστε $d(c, b) < r$. Αν στην r-αλληλουχία σημείων του K που συνδέει τα x, b επισυνάψουμε (ως τελευταίο σημείο μετά το b) το c, τότε προκύπτει r-αλληλουχία σημείων του K που συνδέει τα x, c. Αυτό, όμως, είναι άτοπο διότι $c \in C$. Άρα *το B δεν περιέχει οριακό σημείο του C*.

Ας υποθέσουμε, τώρα, ότι το C περιέχει κάποιο οριακό σημείο, έστω c, του B. Τότε (επειδή το c είναι οριακό σημείο του B) υπάρχει $b \in B$ ώστε $d(c, b) < r$ και (επειδή $b \in B$) υπάρχει r-αλληλουχία σημείων του K που συνδέει τα x, b. Αν στην r-αλληλουχία σημείων του K που συνδέει τα x, b επισυνάψουμε (ως τελευταίο σημείο μετά το b) το c, τότε προκύπτει r-αλληλουχία σημείων του K που συνδέει τα x, c. Αυτό, όμως, είναι άτοπο διότι $c \in C$. Άρα *το C δεν περιέχει οριακό σημείο του B*.

Άρα τα B, C αποτελούν διάσπαση του K και αυτό είναι άτοπο διότι το K είναι συνεκτικό.

Άρα υπάρχει r-αλληλουχία σημείων στο K που συνδέει τα x, y.

Αντιστρόφως, έστω ότι για κάθε $x, y \in K$ και για κάθε $r > 0$ υπάρχει r-αλληλουχία σημείων στο K η οποία συνδέει τα x, y.

Υποθέτουμε (για να καταλήξουμε σε άτοπο) ότι το K δεν είναι συνεκτικό. Τότε υπάρχουν σύνολα B, C ώστε $B \cup C = K$, $B \cap C = \emptyset$, $B \neq \emptyset$, $C \neq \emptyset$ και κανένα από τα B, C δεν περιέχει οριακό σημείο του άλλου.

Έστω x οριακό σημείο του B. Επειδή $B \subseteq K$, το x είναι οριακό σημείο και του K. Επειδή το K είναι κλειστό, συνεπάγεται $x \in K$. Επειδή $x \notin C$ (διότι το C δεν περιέχει οριακό σημείο του B) συνεπάγεται $x \in B$. Άρα το B περιέχει όλα τα οριακά σημεία του και, επομένως, είναι κλειστό. Τέλος, επειδή $B \subseteq K$ και το K είναι συμπαγές, συνεπάγεται ότι και το B είναι συμπαγές.

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο αποδεικνύεται ότι και το C είναι συμπαγές.

Συμπεραίνουμε ότι τα B, C είναι συμπαγή και ξένα, οπότε, από την πρόταση 11.22, υπάρχει $r > 0$ ώστε να ισχύει $d(b, c) \geq r$ για κάθε $b \in B$ και $c \in C$. Αφού $B \neq \emptyset$, $C \neq \emptyset$, θεωρούμε κάποιο $b' \in B$ και κάποιο $c' \in C$. Τώρα είναι εύκολο να δούμε ότι δεν υπάρχει r-αλληλουχία σημείων στο K που να συνδέει τα b', c', οπότε καταλήγουμε σε άτοπο.

Πράγματι, έστω ότι υπάρχει r-αλληλουχία $\{z_0, \ldots, z_n\}$ σημείων στο K ώστε $z_0 = b'$, $z_n = c'$ και $d(z_k, z_{k-1}) < r$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$. Επειδή $z_0 \in B$, $z_n \in C$, συνεπάγεται ότι υπάρχει κάποιος k ώστε $z_{k-1} \in B$, $z_k \in C$. Τότε το $d(z_k, z_{k-1}) < r$ αντιφάσκει με το ότι ισχύει $d(b, c) \geq r$ για κάθε $b \in B$, $c \in C$. ☐

ΠΡΟΤΑΣΗ 11.27. *Ένα σύνολο $I \subseteq \mathbb{R}$ είναι συνεκτικό αν και μόνο αν είναι διάστημα.*

Απόδειξη. Έστω ότι το I είναι συνεκτικό. Αν το I δεν είναι διάστημα, υπάρχουν, σύμφωνα με την πρόταση 1.4, x_1, x_2, x ώστε $x_1 < x < x_2$ και $x_1, x_2 \in I$ και $x \notin I$. Τότε τα σύνολα $B = I \cap (-\infty, x)$ και $C = I \cap (x, +\infty)$ αποτελούν διάσπαση του I και καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα το I είναι διάστημα.

Αντιστρόφως, έστω ότι το I είναι διάστημα.

Αν το I είναι μονοσύνολο, τότε είναι συνεκτικό.

Αν $I = [a, b]$ με $a < b$, τότε το $[a, b]$ είναι συμπαγές και αν πάρουμε δύο οποιαδήποτε σημεία x, y του $[a, b]$ και έναν οποιονδήποτε $r > 0$, είναι φανερό ότι μπορούμε να βρούμε πεπερασμένου πλήθους διαδοχικά σημεία πάνω στο $[a, b]$, ξεκινώντας από το x και καταλήγοντας στο y, ώστε καθένα από αυτά να απέχει από τα γειτονικά του απόσταση $< r$. (Όσο μικρότερος είναι ο r τόσο περισσότερα σημεία πρέπει να πάρουμε.) Άρα το $[a, b]$ είναι συνεκτικό.

Αν το I είναι διάστημα οποιουδήποτε άλλου τύπου, μπορούμε να βρούμε μια ακολουθία διαστημάτων $I_n = [a_n, b_n]$ τα οποία να αυξάνονται και η ένωσή τους να είναι το διάστημα I. Κάθε I_n είναι συνεκτικό, οπότε από την πρόταση 11.25 συνεπάγεται ότι το διάστημα I είναι κι αυτό συνεκτικό. ☐

Τώρα έχουμε το εξής πόρισμα του θεωρήματος 11.12.

ΠΡΟΤΑΣΗ 11.28. *Έστω μετρικός χώρος (X, d), $A \subseteq X$ και $f : A \to \mathbb{R}$ συνεχής στο A. Αν το A είναι συνεκτικό, τότε η f έχει την ιδιότητα ενδιάμεσης τιμής στο A.*

Απόδειξη. Το $f(A)$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και, επομένως, είναι διάστημα. Έστω, τώρα, ότι οι αριθμοί u_1, u_2 είναι τιμές της f στο A, δηλαδή οι u_1, u_2 ανήκουν στο διάστημα $f(A)$. Τότε κάθε αριθμός u με $u_1 < u < u_2$ ανήκει κι αυτός στο διάστημα $f(A)$. Δηλαδή, κάθε αριθμός ενδιάμεσος των τιμών u_1, u_2 της f στο A είναι τιμή της f στο A. □

Ειδική περίπτωση της πρότασης 11.28 είναι το γνωστό μας *θεώρημα ενδιάμεσης τιμής* που λέει ότι, *αν η $f : I \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο διάστημα $I \subseteq R$, τότε έχει την ιδιότητα ενδιάμεσης τιμής στο I*. Πράγματι, στην περίπτωση αυτή το διάστημα I είναι συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 11.24. *Έστω μετρικός χώρος (X, d), διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$ και συνάρτηση $\gamma : I \to X$ συνεχής στο I. Η γ χαρακτηρίζεται* **καμπύλη** *στον (X, d). Το σύνολο $\gamma^* = \gamma(I) = \{\gamma(t) \,|\, t \in I\}$ ονομάζεται* **τροχιά** *της καμπύλης γ.*
Αν $\gamma^* \subseteq A \subseteq X$, τότε λέμε ότι η καμπύλη είναι στο A.

Παράδειγμα 11.7.4. Από την πρόταση 11.27 και από το θεώρημα 11.12 συνεπάγεται ότι η τροχιά κάθε καμπύλης στον μετρικό χώρο (X, d) είναι συνεκτικό υποσύνολο του X. Επίσης, αν το διάστημα I (το πεδίο ορισμού της καμπύλης) είναι κλειστό και φραγμένο (και, επομένως, συμπαγές) υποσύνολο του $\mathbb{R}$, τότε από το θεώρημα 11.9 συνεπάγεται ότι η τροχιά της καμπύλης είναι συμπαγές υποσύνολο του X.
Για παράδειγμα, κάθε πολυγωνική γραμμή στο $\mathbb{R}^d$ είναι συνεκτικό και συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Επίσης, κάθε τόξο κύκλου στο $\mathbb{R}^2$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ και, αν το τόξο περιέχει τα άκρα του, τότε είναι και συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 11.25. *Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $A \subseteq X$. Το A χαρακτηρίζεται* **κατά καμπύλες συνεκτικό** *αν για κάθε δύο σημεία του A υπάρχει καμπύλη στο A η οποία συνδέει τα δύο αυτά σημεία.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 11.29. *Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $A \subseteq X$. Αν το A είναι κατά καμπύλες συνεκτικό, τότε είναι συνεκτικό.*

Απόδειξη. Έστω οποιοδήποτε σημείο $x_0 \in A$.
Για κάθε $x \in A$ υπάρχει καμπύλη γ_x στο A η οποία συνδέει το x_0 με το x. Δηλαδή, ${\gamma_x}^* \subseteq A$ και $x_0, x \in {\gamma_x}^*$. Τότε $\bigcup_{x \in A} {\gamma_x}^* \subseteq A$. Αντιστρόφως, επειδή κάθε $x \in A$ περιέχεται στην αντίστοιχη τροχιά ${\gamma_x}^*$ και, επομένως, και στην ένωσή τους, συνεπάγεται ότι $A \subseteq \bigcup_{x \in A} {\gamma_x}^*$.
Άρα

$$A = \bigcup_{x \in A} {\gamma_x}^*.$$

Τώρα, επειδή κάθε ${\gamma_x}^*$ είναι συνεκτικό και επειδή όλα τα ${\gamma_x}^*$ έχουν κοινό σημείο το x_0, συνεπάγεται ότι το A είναι συνεκτικό. □

Παράδειγμα 11.7.5. Κάθε κυρτό σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^d$ είναι κατά καμπύλες συνεκτικό και, επομένως, συνεκτικό. Πράγματι, αν πάρουμε δύο οποιαδήποτε σημεία του A το ευθύγραμμο τμήμα που τα ενώνει περιέχεται ολόκληρο στο A.
Για παράδειγμα, κάθε μπάλα και κάθε ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο είναι συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$.

Παράδειγμα 11.7.6. Ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^d$ χαρακτηρίζεται **αστρόμορφο** αν υπάρχει ένα συγκεκριμένο σημείο $\mathrm{x}_0 \in A$ ώστε για κάθε $\mathrm{x} \in A$ το ευθ. τμήμα $[\mathrm{x}_0, \mathrm{x}]$ να περιέχεται ολόκληρο στο A. Ένα τέτοιο x_0 χαρακτηρίζεται *κέντρο* του αστρόμορφου A. Το κέντρο μπορεί να μην είναι μοναδικό, αλλά αυτό δεν σημαίνει ότι κάθε σημείο του αστρόμορφου A είναι κέντρο του.
Είναι φανερό ότι ένα αστρόμορφο A είναι κατά καμπύλες συνεκτικό και, επομένως, συνεκτικό.

Πράγματι, δύο οποιαδήποτε σημεία του A μπορούν να συνδεθούν με μια πολυγωνική γραμμή στο A η οποία αποτελείται από δύο ευθύγραμμα τμήματα: ένα ευθ. τμήμα από το ένα σημείο στο x_0 και ένα ευθ. τμήμα από το x_0 στο άλλο σημείο.

Παράδειγμα 11.7.7. Κάθε δακτύλιος είναι συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$.

Παράδειγμα 11.7.8. Το $A = \overline{N_0}(1) \cup N_2(1)$ που είδαμε στα παραδείγματα 11.7.1 και 11.7.2 είναι συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$, διότι είναι αστρόμορφο με κέντρο το σημείο 1.

ΘΕΩΡΗΜΑ 11.14. *Έστω ανοικτό υποσύνολο A του $\mathbb{R}^d$. Το A είναι συνεκτικό αν και μόνο αν είναι κατά καμπύλες συνεκτικό.*

Απόδειξη. Αν το A είναι κατά καμπύλες συνεκτικό, τότε, σύμφωνα με την πρόταση 11.29, είναι συνεκτικό.
Αντιστρόφως, έστω ότι το A είναι συνεκτικό.
Θεωρούμε οποιαδήποτε $x, y \in A$ και (για να καταλήξουμε σε άτοπο) υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει πολυγωνική γραμμή στο A η οποία συνδέει τα x, y.
Ορίζουμε τα σύνολα

$$B = \{b \in A \,|\, \text{υπάρχει πολυγωνική γραμμή στο } A \text{ που συνδέει τα } x, b\},$$

$$C = \{c \in A \,|\, \text{δεν υπάρχει πολυγωνική γραμμή στο } A \text{ που συνδέει τα } x, c\}.$$

Είναι φανερό ότι $B \cup C = U$, $B \cap C = \emptyset$, $B \neq \emptyset$ (διότι $x \in B$) και $C \neq \emptyset$ (διότι $y \in C$).
Υποθέτουμε ότι το B περιέχει κάποιο οριακό σημείο, έστω b, του C. Τότε (επειδή $b \in B$) υπάρχει πολυγωνική γραμμή στο A η οποία συνδέει τα x, b. Επειδή το A είναι ανοικτό, υπάρχει $r > 0$ ώστε $N_b(r) \subseteq A$ και (επειδή το b είναι οριακό σημείο του C) υπάρχει $c \in N_b(r) \cap C$. Αν στην πολυγωνική γραμμή στο A που συνδέει τα x, b επισυνάψουμε (ως τελευταίο) το ευθ. τμήμα $[b, c]$ (το οποίο περιέχεται στην περιοχή $N_b(r)$, οπότε και στο A), προκύπτει πολυγωνική γραμμή στο A που συνδέει τα x, c. Αυτό, όμως, είναι άτοπο διότι $c \in C$. Άρα *το B δεν περιέχει οριακό σημείο του C.*
Υποθέτουμε, τώρα, ότι το C περιέχει κάποιο οριακό σημείο, έστω c, του B. Επειδή το A είναι ανοικτό, υπάρχει $r > 0$ ώστε $N_c(r) \subseteq A$. Τότε (επειδή το c είναι οριακό σημείο του B) υπάρχει $b \in N_c(r) \cap B$. Όπως πριν, (επειδή $b \in B$) υπάρχει πολυγωνική γραμμή στο A που συνδέει τα x, b και, αν σ' αυτήν επισυνάψουμε (ως τελευταίο) το ευθ. τμήμα $[b, c]$ (το οποίο περιέχεται στην περιοχή $N_c(r)$, οπότε και στο A), προκύπτει πολυγωνική γραμμή στο A που συνδέει τα x, c. Αυτό, όμως, είναι άτοπο διότι $c \in C$. Άρα *το C δεν περιέχει οριακό σημείο του B.*
Από τις ιδιότητες των B, C προκύπτει ότι αυτά αποτελούν διάσπαση του A και αυτό είναι άτοπο διότι το A είναι συνεκτικό.
Άρα υπάρχει πολυγωνική γραμμή στο A που συνδέει τα x, y. Όμως, μια πολυγωνική γραμμή είναι, προφανώς, τροχιά κάποιας καμπύλης. □

ΟΡΙΣΜΟΣ 11.26. *Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $A \subseteq X$. Ένα $C \subseteq A$ χαρακτηρίζεται* **συνεκτική συνιστώσα** *του A αν το C είναι συνεκτικό με την εξής ιδιότητα: αν $C \subseteq C' \subseteq A$ και το C' είναι συνεκτικό, τότε $C = C'$.*

Με άλλα λόγια, το C είναι συνεκτική συνιστώσα του A αν *είναι συνεκτικό υποσύνολο του A και δεν υπάρχει γνησίως μεγαλύτερο συνεκτικό υποσύνολο του A.*

Ας δούμε μια χαρακτηριστική ιδιότητα των συνεκτικών συνιστωσών. Έστω ότι το C είναι συνεκτική συνιστώσα του A και έστω B οποιοδήποτε συνεκτικό υποσύνολο του A ώστε $C \cap B \neq \emptyset$. Τότε το $C \cup B$ είναι συνεκτικό σύνολο, ως ένωση συνεκτικών συνόλων με κοινό σημείο, και είναι $C \subseteq C \cup B \subseteq A$. Επειδή το C είναι συνεκτική συνιστώσα του A, συνεπάγεται $C \cup B = C$ και, επομένως, $B \subseteq C$. Με άλλα λόγια:
Μια συνεκτική συνιστώσα του A "καταπίνει" οποιοδήποτε συνεκτικό υποσύνολο του A τήν τέμνει.

Έστω C_1, C_2 δύο *διαφορετικές* συνεκτικές συνιστώσες του A και ας υποθέσουμε ότι $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$. Επειδή το C_1 είναι συνεκτικό υποσύνολο του A και τέμνει την συνεκτική συνιστώσα C_2 του A, συνεπάγεται $C_1 \subseteq C_2$. Με συμμετρικό τρόπο συνεπάγεται $C_2 \subseteq C_1$ και, επομένως, $C_1 = C_2$. Καταλήγουμε σε άτοπο, οπότε $C_1 \cap C_2 = \emptyset$. Συμπεραίνουμε ότι:

Διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες του A είναι ξένες.

ΠΡΟΤΑΣΗ 11.30. *Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $A \subseteq X$. Το A είναι ίσο με την ένωση των (ξένων ανά δύο) συνεκτικών συνιστωσών του.*

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε ότι κάθε σημείο του A ανήκει σε μια συνεκτική συνιστώσα του A.
Παίρνουμε $x \in A$ και ορίζουμε C_x να είναι η ένωση όλων των συνεκτικών υποσυνόλων B του A που περιέχουν το x. (Ένα τέτοιο σύνολο είναι το μονοσύνολο $\{x\}$.) Δηλαδή

$$C_x = \bigcup \{B \,|\, B \text{ συνεκτικό } \subseteq A \text{ και } x \in B\}.$$

Το C_x είναι υποσύνολο του A, αφού είναι ένωση υποσυνόλων B του A. Το C_x περιέχει το x και είναι συνεκτικό, διότι είναι ένωση συνεκτικών συνόλων B με κοινό σημείο το x.
Τώρα, αν $C_x \subseteq C' \subseteq A$ και το C' είναι συνεκτικό σύνολο, τότε το C' είναι ένα από τα συνεκτικά υποσύνολα B του A που περιέχουν το x, οπότε από τον ορισμό του C_x συνεπάγεται $C' \subseteq C_x$ και, επομένως, $C_x = C'$.
Άρα το C_x είναι συνεκτική συνιστώσα του A και περιέχει το x. □

Είναι προφανές ότι το σύνολο A είναι συνεκτικό αν και μόνο αν το A είναι η μοναδική συνεκτική συνιστώσα του A.

Παράδειγμα 11.7.9. Έστω $A = N_0(1) \cup N_3(1)$ στο $\mathbb{R}^2$.
Οι δίσκοι $N_0(1)$ και $N_3(1)$ είναι συνεκτικά υποσύνολα του A.
Εφαρμόζοντας το λήμμα 11.2 με $B = N_0(1)$ και $C = N_3(1)$, βλέπουμε ότι οποιοδήποτε συνεκτικό υποσύνολο του A περιέχεται είτε ολόκληρο στο $N_0(1)$ είτε ολόκληρο στο $N_3(1)$. Δηλαδή, δεν υπάρχει συνεκτικό υποσύνολο του A γνησίως μεγαλύτερο είτε του $N_0(1)$ είτε του $N_3(1)$.
Άρα οι δίσκοι $N_0(1)$ και $N_3(1)$ είναι οι συνεκτικές συνιστώσες του A.

Παράδειγμα 11.7.10. Θεωρούμε το υποσύνολο $\mathbb{Z}$ του $\mathbb{R}$ και οποιοδήποτε μονοσύνολο $\{n\}$ με $n \in \mathbb{Z}$.
Το $\{n\}$ είναι συνεκτικό σύνολο. Έστω $\{n\} \subseteq C' \subseteq \mathbb{Z}$ και $C' \neq \{n\}$. Τότε $C' = \{n\} \cup \big(C' \setminus \{n\}\big)$. Τα $\{n\}$ και $C' \setminus \{n\}$ αποτελούν διάσπαση του C', αφού κανένα από τα δύο δεν περιέχει οριακό σημείο του άλλου. Άρα το C' δεν είναι συνεκτικό σύνολο. Επομένως, το $\{n\}$ είναι συνεκτική συνιστώσα του $\mathbb{Z}$.
Άρα το $\mathbb{Z}$ έχει άπειρες συνεκτικές συνιστώσες, όλες μονοσύνολα.

ΠΡΟΤΑΣΗ 11.31. *Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $A \subseteq X$. Αν το A είναι κλειστό, τότε κάθε συνεκτική συνιστώσα του A είναι κλειστή.*

Απόδειξη. Έστω συνεκτική συνιστώσα C του A.
Επειδή $C \subseteq A$ και το A είναι κλειστό και το $\overline{C}$ είναι το μικρότερο κλειστό υπερσύνολο του C, συνεπάγεται $C \subseteq \overline{C} \subseteq A$.
Από την πρόταση 11.26 συνεπάγεται ότι το $\overline{C}$ είναι συνεκτικό και επειδή το C είναι συνεκτική συνιστώσα του A, συνεπάγεται $C = \overline{C}$. Άρα το C είναι κλειστό. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 11.32. *Έστω ανοικτό υποσύνολο A του $\mathbb{R}^d$. Κάθε συνεκτική συνιστώσα του A είναι ανοικτή.*

Απόδειξη. Έστω συνεκτική συνιστώσα C του A και έστω $x \in C$.
Τότε $x \in A$ και, επειδή το A είναι ανοικτό, υπάρχει $r > 0$ ώστε $N_x(r) \subseteq A$. Επειδή η περιοχή $N_x(r)$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του A και τέμνει την συνεκτική συνιστώσα C του A, συνεπάγεται $N_x(r) \subseteq C$. Άρα το x είναι εσωτερικό σημείο του C.
Άρα το C είναι ανοικτό. □

Άρα, σύμφωνα με τις προτάσεις 11.30 και 11.32, κάθε ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ είναι ένωση ξένων ανά δύο ανοικτών και συνεκτικών συνόλων.

Αν έχουμε μια συλλογή από ξένα ανά δύο ανοικτά διαστήματα, τότε η ένωσή της είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Τώρα θα αποδείξουμε το αντίστροφο και θα έχουμε μια ικανοποιητική *εικόνα* των ανοικτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 11.15. *Έστω μη-κενό ανοικτό υποσύνολο A του $\mathbb{R}$. Τότε το A είναι ένωση ξένων ανά δύο ανοικτών διαστημάτων. Πιο συγκεκριμένα, υπάρχει μια συλλογή Σ ξένων ανά δύο ανοικτών διαστημάτων ώστε $A = \bigcup_{I\in\Sigma} I$. Επίσης, η συλλογή Σ είναι αριθμήσιμη, δηλαδή είτε πεπερασμένη είτε άπειρη αριθμήσιμη.*

Απόδειξη. Το πρώτο μέρος είναι άμεση συνέπεια των προτάσεων 11.27, 11.30 και 11.32.
Για το δεύτερο μέρος, επιλέγουμε έναν ρητό αριθμό σε κάθε συνιστώσα του A. Επειδή οι συνιστώσες του A είναι ξένες ανά δύο, οι ρητοί οι οποίοι αντιστοιχούν σε κάθε συνιστώσα είναι διαφορετικοί ανά δύο. Άρα υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία ανάμεσα στη συλλογή Σ των συνιστωσών του A και σε ένα υποσύνολο Λ του $\mathbb{Q}$. Το Λ είναι αριθμήσιμο, ως υποσύνολο του $\mathbb{Q}$, οπότε η Σ είναι αριθμήσιμη. □

Ασκήσεις.

11.7.1. Βρείτε ποιά από τα παρακάτω υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$ είναι συνεκτικά και βρείτε τις συνεκτικές συνιστώσες τους. $\{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^2 \,|\, \|\mathrm{x} - (0,1)\|_e \neq 2\}$, $\mathbb{R}^2 \setminus \big([(1,0),(1,1)] \cup [(1,1),(0,2)]\big)$, $\mathbb{R}^2 \setminus \big([(1,0),(1,1)] \cup [(1,1),(0,2)] \cup [(0,2),(1,0)]\big)$, $N_{(0,0)}(1) \cup N_{(3,0)}(1) \cup [(1,0),(2,0)]$, $\bigcup_{n=1}^{+\infty} N_{(0,n)}(1)$, $\{(\frac{1}{n},0) | n \in \mathbb{N}\}$, $\{(0,0)\} \cup \{(\frac{1}{n},0) | n \in \mathbb{N}\}$, $[(0,0),(1,0)] \cup \bigcup_{n=1}^{+\infty} [(0,\frac{1}{n}),(1,\frac{1}{n})]$, $\bigcup_{n=1}^{+\infty} \{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^2 \,|\, \|\mathrm{x}\|_e = 1 + \frac{1}{n}\}$, $\{(x,0) \,|\, x \in \mathbb{Q}\}$, $\{(x,y) \,|\, x,y \in \mathbb{Q}\}$.

11.7.2. Αποδείξτε ότι είναι συνεκτικά τα σύνολα $\{(x,\sin x) \,|\, x \in \mathbb{R}\}$, $\{(x,\sin\frac{1}{x}) \,|\, 0 < x \leq 1\}$, $\{(x,\sin\frac{1}{x}) \,|\, 0 < x \leq 1\} \cup [(0,-1),(0,1)]$ στο $\mathbb{R}^2$.

11.7.3. Έστω $d \geq 2$, ανοικτό και συνεκτικό σύνολο $U \subseteq \mathbb{R}^d$ και $a_1, \ldots, a_n \in U$. Αποδείξτε ότι το $U \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$ είναι ανοικτό και συνεκτικό. Τί από αυτά ισχύει αν $d = 1$;

11.7.4. Έστω υπερεπίπεδο L στον $\mathbb{R}^d$ και οι δύο ανοικτοί ημιχώροι του $\mathbb{R}^d$ που ορίζονται από το L. Αν μια καμπύλη γ στον $\mathbb{R}^d$ συνδέει ένα σημείο στον ένα ανοικτό ημιχώρο και ένα σημείο στον άλλο ανοικτό ημιχώρο, αποδείξτε ότι η τροχιά της γ τέμνει το L.

11.7.5. Δείτε την άσκηση 11.2.8 και αποδείξτε ότι κάθε συνεκτική συνιστώσα του συνόλου C του Cantor είναι μονοσύνολο.

11.7.6. Έστω μετρικός χώρος (X,d) και έστω ότι κάθε $A_n \subseteq X$ είναι συνεκτικό σύνολο και $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι η ένωση $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ είναι συνεκτική.

11.7.7. Βρείτε απλό παράδειγμα δύο συνεκτικών συνόλων στο $\mathbb{R}^2$ των οποίων η τομή *δεν* είναι συνεκτική.

11.7.8. Βρείτε απλό παράδειγμα συνεκτικού συνόλου A στον $\mathbb{R}^2$ ώστε το ∂A να μην είναι συνεκτικό.
Βρείτε απλό παράδειγμα συνεκτικού συνόλου A στον $\mathbb{R}^2$ ώστε το A° να μην είναι συνεκτικό.

11.7.9. Έστω υποσύνολο $B \subseteq \mathbb{R}^d$. Αν το B είναι ανοικτό και, ταυτόχρονα, κλειστό, αποδείξτε ότι είτε $B = \emptyset$ είτε $B = \mathbb{R}^d$.

11.7.10. Έστω ανοικτό και συνεκτικό σύνολο U στον $\mathbb{R}^d$. Αποδείξτε ότι οποιαδήποτε δύο σημεία του U μπορούν να ενωθούν με πολυγωνική γραμμή στο U η οποία αποτελείται μόνο από ευθύγραμμα τμήματα τα οποία είναι παράλληλα στους κύριους άξονες.

11.7.11. Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $A \subseteq X$.

Αν το A είναι κλειστό, αποδείξτε ότι το A είναι συνεκτικό αν και μόνο αν δεν υπάρχουν B, C κλειστά ώστε $B \cup C = A$, $B \cap C = \emptyset$, $B, C \neq \emptyset$.

Αν το A είναι ανοικτό, αποδείξτε ότι το A είναι συνεκτικό αν και μόνο αν δεν υπάρχουν B, C ανοικτά ώστε $B \cup C = A$, $B \cap C = \emptyset$, $B, C \neq \emptyset$.

11.7.12. Έστω ανοικτό σύνολο $U \subseteq \mathbb{R}^d$. Αποδείξτε ότι το πλήθος των συνεκτικών συνιστωσών του U είναι αριθμήσιμο (δηλαδή είτε πεπερασμένο είτε άπειρο αριθμήσιμο).

11.7.13. Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $A \subseteq X$. Αποδείξτε ότι το A είναι συνεκτικό αν και μόνο αν οι μόνες συναρτήσεις $f : A \to \{0, 1\}$ που είναι συνεχείς στο A είναι οι σταθερές συναρτήσεις. Τί γίνεται αν αντικαταστήσουμε το $\{0, 1\}$ με το $\mathbb{Z}$;

11.7.14. Έστω μετρικός χώρος (X, d) και συνεκτικό (όχι αναγκαστικά συμπαγές) $A \subseteq X$. Αποδείξτε ότι για κάθε $r > 0$ και για κάθε $x, y \in A$ υπάρχει r-αλληλουχία σημείων στο A η οποία συνδέει τα x, y.

11.7.15. Έστω μετρικός χώρος (X, d). Ο (X, d) χαρακτηρίζεται **τοπικά συνεκτικός** αν για κάθε $x \in X$ και κάθε $r > 0$ υπάρχει ανοικτό και συνεκτικό U ώστε $x \in U \subseteq N_x(r)$.

Αποδείξτε ότι ο (X, d) είναι τοπικά συνεκτικός αν και μόνο αν για κάθε ανοικτό $A \subseteq X$ όλες οι συνεκτικές συνιστώσες του A είναι ανοικτές.

11.7.16. Έστω μετρικός χώρος (X, d). Ο (X, d) χαρακτηρίζεται **τοπικά κατά καμπύλες συνεκτικός** αν για κάθε $x \in X$ και κάθε $r > 0$ υπάρχει ανοικτό και κατά καμπύλες συνεκτικό U ώστε $x \in U \subseteq N_x(r)$.

Αν ο (X, d) είναι τοπικά κατά καμπύλες συνεκτικός, αποδείξτε ότι κάθε ανοικτό $A \subseteq X$ είναι συνεκτικό αν και μόνο αν είναι κατά καμπύλες συνεκτικό.

11.7.17. [17] Δείτε τις ασκήσεις 11.1.6 και 11.2.26. Έστω μετρικός χώρος (X, d) και μη-κενό $A \subseteq X$. Αποδείξτε ότι το A είναι συνεκτικό υποσύνολο του (X, d) αν και μόνο αν το A είναι συνεκτικό υποσύνολο του (A, d).

[17] Η άσκηση αυτή μας λέει ότι το να είναι ή να μην είναι το σύνολο A συνεκτικό εξαρτάται μόνο από το ίδιο το σύνολο A (και την μετρική του) και όχι από τον περιβάλλοντα χώρο.

Βασική βιβλιογραφία.

Apostol, T. (1974) *Mathematical Analysis, Ch 3-4.* Addison-Wesley.
Bartle, R. (1967) *The Elements of Real Analysis, Ch II-IV.* Wiley.
Beals, R. (2004) *Analysis, an Introduction, Ch 6-7.* Cambridge Univ. Press.
Buck, R. & Buck, E. (2003) *Advanced Calculus, Ch 1-2.* Waveland Press.
Copson, E. (1988) *Metric Spaces.* Cambridge Univ. Press.
Davidson, K. & Donsig, A. (2010) *Real Analysis and Applications, Ch 4.* Springer.
Dieudonné, J. (1969) *Foundations of Modern Analysis, Vol 1, Ch 3.* Academic Press.
Gleason, A. (1991) *Fundamentals of Abstract Analysis, Ch 14.* Taylor and Francis.
Goldberg, R. (1976) *Methods of Real Analysis, Ch 4-6.* Wiley.
Protter, M. (1998) *Basic Elements of Real Analysis, Ch 6.* Springer.
Pugh, C. (2015) *Real Mathematical Analysis, Ch 2.* Springer.
Rosenlicht, M. (1986) *Introduction to Analysis, Ch III-IV.* Dover.
Ross, K. (2013) *Elementary Analysis, Ch 2-3.* Springer.
Rudin, W. (1976) *Principles of Mathematical Analysis, Ch 2-4.* McGraw-Hill.
Simmons, G. (2004) *Introduction to Topology and Modern Analysis*, *Ch 1-7.* McGraw-Hill.

Συμπληρωματική βιβλιογραφία.

Bartle, R. & Sherbert, D. (2011) *Introduction to Real Analysis, Ch 11.* Wiley.
Berberian, S. (1994) *A First Course in Real Analysis, Ch 4-6.* Springer.
Boas, R. (1996) *A Primer of Real Functions, Ch 1.* Math. Association of America.
Goffman, C. (1953) *Real Functions, Ch 4-6.* Rinehart.
Lang, S. (1997) *Undergraduate Analysis, Ch VI-VIII.* Springer.
Stoll, M. (2000) *Introduction to Real Analysis, Ch 3-4.* Pearson.

Κεφάλαιο 12

Γενικευμένα ολοκληρώματα.

12.1 Ορισμοί και βασικές ιδιότητες.

Στο κεφάλαιο 6 εξετάσαμε πότε μια *φραγμένη* συνάρτηση ορισμένη σε *κλειστό και φραγμένο* διάστημα είναι Riemann ολοκληρώσιμη σε αυτό. Παραδείγματα τέτοιων συναρτήσεων είναι οι τμηματικά συνεχείς και οι τμηματικά μονότονες συναρτήσεις. Όμως, από τον ορισμό των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων δεν καλύπτονται δύο σημαντικές κατηγορίες συναρτήσεων: οι συναρτήσεις που δεν είναι φραγμένες και οι συναρτήσεις που ορίζονται σε μη-φραγμένα ή μη-κλειστά διαστήματα.

Περίπτωση 1. Έστω $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ και $f : [a, b) \to \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του $[a, b)$ και, ειδικότερα, στο $[a, x]$ για κάθε $x \in [a, b)$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 12.1. *Το σύμβολο $\int_a^{\to b} f(x)\, dx$ ονομάζεται* **γενικευμένο ολοκλήρωμα** *της f στο $[a, b)$ και η τιμή του, αν υπάρχει, καθορίζεται με την εξής διαδικασία.*
Αν υπάρχει το $\lim_{x\to b-} \int_a^x f(t)\, dt \in \overline{\mathbb{R}}$, τότε αυτό το όριο ορίζεται να είναι η **τιμή** *του γενικευμένου ολοκληρώματος $\int_a^{\to b} f(x)\, dx$ και γράφουμε*

$$\int_a^{\to b} f(x)\, dx = \lim_{x\to b-} \int_a^x f(t)\, dt.$$

Αν το $\lim_{x\to b-} \int_a^x f(t)\, dt$ είναι αριθμός, τότε λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^{\to b} f(x)\, dx$ **συγκλίνει** *και, αν $\lim_{x\to b-} \int_a^x f(t)\, dt = \pm\infty$, τότε λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^{\to b} f(x)\, dx$* **αποκλίνει** *στο $\pm\infty$.*
Αν δεν υπάρχει το $\lim_{x\to b-} \int_a^x f(t)\, dt$, λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^{\to b} f(x)\, dx$ **αποκλίνει** *και ότι* **δεν έχει τιμή**.

Παρατηρήστε ότι το σύμβολο $\int_a^{\to b} f(x)\, dx$ έχει διπλό περιεχόμενο. Αφ' ενός συμβολίζει το γενικευμένο ολοκλήρωμα της f στο $[a, b)$, ανεξάρτητα από το αν αυτό έχει τιμή ή όχι. Αφ' ετέρου, στην περίπτωση που το γενικευμένο ολοκλήρωμα έχει τιμή, συμβολίζει και την τιμή του γενικευμένου ολοκληρώματος.

Παράδειγμα 12.1.1. Είναι $\int_1^{\to+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{1}{t^2}\, dt = \lim_{x\to+\infty}(1 - \frac{1}{x}) = 1$. Δηλαδή, το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^{\to+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ συγκλίνει και έχει τιμή 1.

Παράδειγμα 12.1.2. Είναι $\int_1^{\to+\infty} \frac{1}{x}\, dx = \lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{1}{t}\, dt = \lim_{x\to+\infty} \log x = +\infty$. Δηλαδή, το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^{\to+\infty} \frac{1}{x}\, dx$ αποκλίνει στο $+\infty$ και έχει τιμή $+\infty$.

Παράδειγμα 12.1.3. Είναι $\int_0^{\to1} \frac{1}{x-1}\, dx = \lim_{x\to1-} \int_0^x \frac{1}{t-1}\, dt = \lim_{x\to1-} \log(1-x) = -\infty$. Δηλαδή, το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{\to1} \frac{1}{x-1}\, dx$ αποκλίνει στο $-\infty$ και έχει τιμή $-\infty$.

Παράδειγμα 12.1.4. Είναι $\int_0^{\to 1} \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx = \lim_{x\to 1-} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t}}\,dt = \lim_{x\to 1-}(2 - 2\sqrt{1-x}) = 2$ και, επομένως, το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{\to 1} \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$ συγκλίνει και έχει τιμή 2.

Παράδειγμα 12.1.5. Το όριο $\lim_{x\to +\infty} \int_0^x \cos t\,dt = \lim_{x\to+\infty} \sin x$ δεν υπάρχει. Άρα το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{\to+\infty} \cos x\,dx$ αποκλίνει και δεν έχει τιμή.

Η πρόταση 12.1 αποδεικνύει ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα είναι γενίκευση του ολοκληρώματος.

ΠΡΟΤΑΣΗ 12.1. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Τότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^{\to b} f(x)\,dx$ συγκλίνει και $\int_a^{\to b} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.*

Απόδειξη. Η f είναι φραγμένη στο $[a,b]$, οπότε υπάρχει M ώστε να ισχύει $|f(x)| \le M$ για κάθε $x \in [a,b]$. Ακόμη, η f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό υποδιάστημα του $[a,b]$ και, επομένως, στο $[a,x]$ για κάθε $x \in [a,b)$. Επίσης,

$$\Big| \int_a^x f(t)\,dt - \int_a^b f(t)\,dt \Big| = \Big| - \int_x^b f(t)\,dt \Big| \le M(b-x)$$

για κάθε $x \in [a,b)$, οπότε $\lim_{x\to b-} \int_a^x f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt$. □

Περίπτωση 2. Έστω $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ και $f : (a,b] \to \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του $(a,b]$ και, ειδικότερα, στο $[x,b]$ για κάθε $x \in (a,b]$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 12.2. *Το σύμβολο $\int_{a\leftarrow}^b f(x)\,dx$ ονομάζεται* **γενικευμένο ολοκλήρωμα** *της f στο $(a,b]$ και η τιμή του, αν υπάρχει, καθορίζεται με την εξής διαδικασία.*
Αν υπάρχει το $\lim_{x\to a+} \int_x^b f(t)\,dt \in \overline{\mathbb{R}}$, τότε αυτό το όριο ορίζεται να είναι η **τιμή** *του γενικευμένου ολοκληρώματος $\int_{a\leftarrow}^b f(x)\,dx$ και γράφουμε*

$$\int_{a\leftarrow}^b f(x)\,dx = \lim_{x\to a+} \int_x^b f(t)\,dt.$$

Αν το $\lim_{x\to a+} \int_x^b f(t)\,dt$ είναι αριθμός, τότε λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{a\leftarrow}^b f(x)\,dx$ **συγκλίνει** *και, αν $\lim_{x\to a+} \int_x^b f(t)\,dt = \pm\infty$, τότε λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{a\leftarrow}^b f(x)\,dx$* **αποκλίνει** *στο $\pm\infty$.*
Αν δεν υπάρχει το $\lim_{x\to a+} \int_x^b f(t)\,dt$, λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{a\leftarrow}^b f(x)\,dx$ **αποκλίνει** *και ότι* **δεν έχει τιμή**.

Παράδειγμα 12.1.6. Είναι $\int_{0\leftarrow}^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{x\to 0+} \int_x^2 \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = \lim_{x\to 0+}(2\sqrt{2} - 2\sqrt{x}) = 2\sqrt{2}$. Δηλαδή, το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{0\leftarrow}^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ συγκλίνει και έχει τιμή $2\sqrt{2}$.

Παράδειγμα 12.1.7. Είναι $\int_{0\leftarrow}^2 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{x\to 0+} \int_x^2 \frac{1}{t}\,dt = \lim_{x\to 0+}(\log 2 - \log x) = +\infty$. Δηλαδή, το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{0\leftarrow}^2 \frac{1}{x}\,dx$ αποκλίνει στο $+\infty$ και έχει τιμή $+\infty$.

Παράδειγμα 12.1.8. Είναι $\int_{-\infty\leftarrow}^0 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \lim_{x\to-\infty} \int_x^0 \frac{1}{(t-1)^2}\,dt = \lim_{x\to-\infty}(1 - \frac{1}{1-x}) = 1$. Δηλαδή, το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{-\infty\leftarrow}^0 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$ συγκλίνει και η τιμή του είναι 1.

Παράδειγμα 12.1.9. Το όριο $\lim_{x\to 0+} \int_x^1 \frac{1}{t^2} \cos\frac{1}{t}\,dt = \lim_{x\to 0+}(\sin\frac{1}{x} - \sin 1)$ δεν υπάρχει. Άρα το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{0\leftarrow}^1 \frac{1}{t^2}\cos\frac{1}{t}\,dt$ αποκλίνει και δεν έχει τιμή.

Ισχύει, επίσης, η πρόταση 12.1, καταλλήλως προσαρμοσμένη.

ΠΡΟΤΑΣΗ 12.2. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Τότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{a\leftarrow}^b f(x)\,dx$ συγκλίνει και $\int_{a\leftarrow}^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.*

Απόδειξη. Η f είναι φραγμένη στο $[a,b]$, οπότε υπάρχει M ώστε να ισχύει $|f(x)| \le M$ για κάθε $x \in [a,b]$. Ακόμη, η f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό υποδιάστημα του $[a,b]$ και, επομένως, στο $[x,b]$ για κάθε $x \in (a,b]$. Επίσης,

$$\big|\int_x^b f(t)\,dt - \int_a^b f(t)\,dt\big| = \big| - \int_a^x f(t)\,dt\big| \le M(x-a)$$

για κάθε $x \in (a,b]$, οπότε $\lim_{x\to a+} \int_x^b f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt$. □

Περίπτωση 3. Έστω $a \in \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ και $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του (a,b).

ΟΡΙΣΜΟΣ 12.3. *Το σύμβολο $\int_{a\leftarrow}^{\to b} f(x)\,dx$ ονομάζεται* **γενικευμένο ολοκλήρωμα** *της f στο (a,b) και η τιμή του, αν υπάρχει, καθορίζεται ως εξής. Θεωρούμε οποιονδήποτε d με $a<d<b$. Αν ένα τουλάχιστον από τα γενικευμένα ολοκληρώματα $\int_{a\leftarrow}^{d} f(x)\,dx$ και $\int_{d}^{\to b} f(x)\,dx$ δεν έχει τιμή, τότε και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{a\leftarrow}^{\to b} f(x)\,dx$* **δεν έχει τιμή**. *Επίσης, αν και τα δύο γενικευμένα ολοκληρώματα $\int_{a\leftarrow}^{d} f(x)\,dx$, $\int_{d}^{\to b} f(x)\,dx$ έχουν τιμή και το άθροισμα των τιμών $\int_{a\leftarrow}^{d} f(x)\,dx + \int_{d}^{\to b} f(x)\,dx$ είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{a\leftarrow}^{\to b} f(x)\,dx$* **δεν έχει τιμή**. *Τέλος, αν και τα δύο γενικευμένα ολοκληρώματα $\int_{a\leftarrow}^{d} f(x)\,dx$, $\int_{d}^{\to b} f(x)\,dx$ έχουν τιμή και το $\int_{a\leftarrow}^{d} f(x)\,dx + \int_{d}^{\to b} f(x)\,dx$ δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{a\leftarrow}^{\to b} f(x)\,dx$* **έχει τιμή** *η οποία ορίζεται να είναι*

$$\int_{a\leftarrow}^{\to b} f(x)\,dx = \int_{a\leftarrow}^{d} f(x)\,dx + \int_{d}^{\to b} f(x)\,dx.$$

Αν η τιμή του γενικευμένου ολοκληρώματος $\int_{a\leftarrow}^{\to b} f(x)\,dx$ είναι αριθμός, τότε λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{a\leftarrow}^{\to b} f(x)\,dx$ **συγκλίνει** *και, αν η τιμή του είναι $\pm\infty$, τότε λέμε ότι* **αποκλίνει** *στο $\pm\infty$, αντιστοίχως.*

Το λήμμα 12.1 λέει ότι, αν γίνει διαφορετική επιλογή του ενδιάμεσου d, δεν επηρεάζεται η σύγκλιση ή η απόκλιση ή η τιμή του γενικευμένου ολοκληρώματος $\int_{a\leftarrow}^{\to b} f(x)\,dx$.

ΛΗΜΜΑ 12.1. *Έστω $a \in \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ και $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του (a,b). Έστω $a<d<d'<b$. Αν ορίζεται το άθροισμα $\int_{a\leftarrow}^{d} f(x)\,dx+\int_{d}^{\to b} f(x)\,dx$, τότε ορίζεται και το άθροισμα $\int_{a\leftarrow}^{d'} f(x)\,dx+\int_{d'}^{\to b} f(x)\,dx$ και τα δύο αθροίσματα έχουν τις ίδιες τιμές.*

Απόδειξη. Ισχύει

$$\int_{d'}^{x} f(t)\,dt = \int_{d}^{x} f(t)\,dt + \int_{d'}^{d} f(t)\,dt$$

για κάθε $x \in (a,b)$ και το $\int_{d'}^{d} f(t)\,dt$ είναι αριθμός. Επειδή υπάρχει το $\lim_{x\to b-} \int_{d}^{x} f(t)\,dt$, συνεπάγεται ότι υπάρχει και το $\lim_{x\to b-} \int_{d'}^{x} f(t)\,dt$ και ισχύει

$$\lim_{x\to b-} \int_{d'}^{x} f(t)\,dt = \lim_{x\to b-} \int_{d}^{x} f(t)\,dt + \int_{d'}^{d} f(t)\,dt.$$

Δηλαδή,

$$\int_{d'}^{\to b} f(x)\,dx = \int_{d}^{\to b} f(x)\,dx + \int_{d'}^{d} f(x)\,dx. \tag{12.1}$$

Ομοίως, ισχύει

$$\int_{x}^{d'} f(t)\,dt = \int_{x}^{d} f(t)\,dt - \int_{d'}^{d} f(t)\,dt$$

για κάθε $x \in (a,b)$ και το $\int_{d'}^{d} f(t)\,dt$ είναι αριθμός. Επειδή υπάρχει το $\lim_{x\to a+} \int_{x}^{d} f(t)\,dt$, συνεπάγεται ότι υπάρχει και το $\lim_{x\to a+} \int_{x}^{d'} f(t)\,dt$ και ισχύει

$$\lim_{x\to a+} \int_{x}^{d'} f(t)\,dt = \lim_{x\to a+} \int_{x}^{d} f(t)\,dt - \int_{d'}^{d} f(t)\,dt.$$

Δηλαδή,

$$\int_{a\leftarrow}^{d'} f(x)\,dx = \int_{a\leftarrow}^{d} f(x)\,dx - \int_{d'}^{d} f(x)\,dx. \tag{12.2}$$

Το $\int_{d'}^{d} f(x)\,dx$ είναι αριθμός, οπότε, προσθέτοντας τις ισότητες (12.1) και (12.2), συμπεραίνουμε ότι

$$\int_{a\leftarrow}^{d'} f(x)\,dx + \int_{d'}^{\to b} f(x)\,dx = \int_{a\leftarrow}^{d} f(x)\,dx + \int_{d}^{\to b} f(x)\,dx.$$

□

Η πρόταση 12.3 είναι ανάλογη των προτάσεων 12.1 και 12.2.

ΠΡΟΤΑΣΗ 12.3. *Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Τότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{a\leftarrow}^{\to b} f(x)\,dx$ συγκλίνει και $\int_{a\leftarrow}^{\to b} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.*

Απόδειξη. Έστω $a<d<b$. Η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,d]$ και στο $[d,b]$. Από τις προτάσεις 12.1 και 12.2 συνεπάγεται $\int_{a\leftarrow}^{d} f(x)\,dx = \int_a^d f(x)\,dx$ και $\int_d^{\to b} f(x)\,dx = \int_d^b f(x)\,dx$ και, προσθέτοντας, $\int_{a\leftarrow}^{\to b} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$. □

Παράδειγμα 12.1.10. Είναι $\int_0^{\to+\infty} \frac{x}{x^2+1}\,dx = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x \frac{t}{t^2+1}\,dt = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\log(x^2+1) = +\infty$ και $\int_{-\infty\leftarrow}^{0} \frac{x}{x^2+1}\,dx = \lim_{x\to-\infty}\int_x^0 \frac{t}{t^2+1}\,dt = -\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2}\log(x^2+1) = -\infty$. Άρα το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{-\infty\leftarrow}^{\to+\infty} \frac{x}{x^2+1}\,dx$ αποκλίνει και δεν ορίζεται τιμή του.

Παράδειγμα 12.1.11. Είναι $\int_0^{\to+\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x \frac{1}{t^2+1}\,dt = \lim_{x\to+\infty}\arctan x = \frac{\pi}{2}$ και $\int_{-\infty\leftarrow}^{0} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{x\to-\infty}\int_x^0 \frac{1}{t^2+1}\,dt = -\lim_{x\to-\infty}\arctan x = \frac{\pi}{2}$. Άρα

$$\int_{-\infty\leftarrow}^{\to+\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \pi.$$

Στο εξής, τα γενικευμένα ολοκληρώματα $\int_a^{\to b} f(x)\,dx$, $\int_{a\leftarrow}^{b} f(x)\,dx$, $\int_{a\leftarrow}^{\to b} f(x)\,dx$, που εξετάσαμε στις τρεις προηγούμενες περιπτώσεις, θα τα συμβολίζουμε όλα

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης του γενικευμένου ολοκληρώματος με το ολοκλήρωμα, διότι, σύμφωνα με τις προτάσεις 12.1, 12.2 και 12.3, αν ορίζεται το ολοκλήρωμα (δηλαδή, αν η συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη) τότε ορίζεται και το γενικευμένο ολοκλήρωμα και οι τιμές τους συμπίπτουν. Εξυπακούεται, φυσικά, και θεωρείται δεδομένο ότι, ανάλογα με τη συγκεκριμένη συνάρτηση και το συγκεκριμένο διάστημα, μπορούμε να διακρίνουμε αν πρόκειται για γενικευμένο ολοκλήρωμα ή για ολοκλήρωμα.

Περίπτωση 4. Η περίπτωση αυτή συνδυάζει όλες τις προηγούμενες περιπτώσεις.
Έστω $a\in\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$, $b\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ και f ορισμένη στο διάστημα (a,b) εκτός, ίσως, από πεπερασμένου πλήθους σημεία. Δηλαδή, μπορεί να υπάρχουν $\xi_1,\ldots,\xi_{n-1}$ ώστε

$$f:(a,\xi_1)\cup(\xi_1,\xi_2)\cup\cdots\cup(\xi_{n-2},\xi_{n-1})\cup(\xi_{n-1},b)\to\mathbb{R}.$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 12.4. *Αν τα γενικευμένα ολοκληρώματα $\int_a^{\xi_1} f(x)\,dx$, $\int_{\xi_1}^{\xi_2} f(x)\,dx,\ldots,\int_{\xi_{n-2}}^{\xi_{n-1}} f(x)\,dx$, $\int_{\xi_{n-1}}^{b} f(x)\,dx$ συγκλίνουν, τότε λέμε ότι το γεν. ολοκλήρωμα της f στο (a,b)* **συγκλίνει** *και η* **τιμή** *του είναι*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{\xi_1} f(x)\,dx + \int_{\xi_1}^{\xi_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{\xi_{n-2}}^{\xi_{n-1}} f(x)\,dx + \int_{\xi_{n-1}}^{b} f(x)\,dx.$$

Αν όλα τα γεν. ολοκληρώματα έχουν τιμή και ένα τουλάχιστον από αυτά αποκλίνει στο $+\infty$ και κανένα δεν αποκλίνει στο $-\infty$, τότε λέμε ότι το γεν. ολοκλήρωμα της f στο (a,b) **αποκλίνει** *στο $+\infty$ και γράφουμε $\int_a^b f(x)\,dx = +\infty$. Ομοίως, αν όλα τα γεν. ολοκληρώματα έχουν τιμή και ένα τουλάχιστον από αυτά αποκλίνει στο $-\infty$ και κανένα δεν αποκλίνει στο $+\infty$, τότε λέμε ότι το γεν. ολοκλήρωμα της f στο (a,b)* **αποκλίνει** *στο $-\infty$ και γράφουμε $\int_a^b f(x)\,dx = -\infty$. Σε κάθε άλλη περίπτωση, λέμε ότι το γεν. ολοκλήρωμα της f στο (a,b)* **αποκλίνει** *και ότι* **δεν έχει τιμή**.

Στη θεωρητική μας συζήτηση από εδώ και πέρα θα περιοριστούμε στην πρώτη περίπτωση. Δηλαδή, το γεν. ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)\,dx$ θα είναι το $\int_a^{\to b} f(x)\,dx$. Μάλιστα, θα περιοριστούμε ακόμη περισσότερο στην περίπτωση $b = +\infty$, δηλαδή στα γεν. ολοκληρώματα της μορφής

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Αυτό σημαίνει ότι η $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ θα είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του $[a, +\infty)$ και

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int_a^{\to +\infty} f(x)\,dx = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,dt,$$

αν το όριο υπάρχει. Σε κάθε άλλη περίπτωση τα θεωρητικά μας αποτελέσματα είναι ανάλογα και αποδεικνύονται με ανάλογο τρόπο.

ΠΡΟΤΑΣΗ 12.4. *Έστω $a < c$. Τότε το $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ έχει τιμή αν και μόνο αν το $\int_c^{+\infty} f(x)\,dx$ έχει τιμή και $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^{+\infty} f(x)\,dx$.*

Απόδειξη. Ισχύει

$$\int_a^x f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^x f(t)\,dt$$

για κάθε $x \in [a, +\infty)$. Το $\int_a^c f(t)\,dt$ είναι αριθμός, οπότε το $\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,dt$ υπάρχει αν και μόνο αν το $\lim_{x\to+\infty} \int_c^x f(t)\,dt$ υπάρχει και, σ' αυτήν την περίπτωση, είναι

$$\begin{aligned}\int_a^{+\infty} f(x)\,dx &= \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \lim_{x\to+\infty} \int_c^x f(t)\,dt \\ &= \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^{+\infty} f(x)\,dx.\end{aligned}$$

□

ΠΡΟΤΑΣΗ 12.5. *Αν οι f, g ταυτίζονται κοντά στο $+\infty$, τότε το $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ έχει τιμή αν και μόνο αν το $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ έχει τιμή. Ακόμη, οι τιμές των δύο γεν. ολοκληρωμάτων είναι είτε και οι δύο αριθμοί είτε και οι δύο $+\infty$ είτε και οι δύο $-\infty$.*

Απόδειξη. Έστω ότι υπάρχει $c \in [a, +\infty)$ ώστε να ισχύει $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in [c, +\infty)$. Τότε, προφανώς, το $\int_c^{+\infty} f(x)\,dx$ έχει τιμή αν και μόνο αν το $\int_c^{+\infty} g(x)\,dx$ έχει τιμή και είναι $\int_c^{+\infty} f(x)\,dx = \int_c^{+\infty} g(x)\,dx$. Τα υπόλοιπα είναι συνέπεια της πρότασης 12.4. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 12.6. *Αν τα $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ έχουν τιμή και το $\int_a^{+\infty} f(x)dx+\int_a^{+\infty} g(x)dx$ δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε το $\int_a^{+\infty}(f(x) + g(x))\,dx$ έχει τιμή και*

$$\int_a^{+\infty}(f(x) + g(x))\,dx = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx + \int_a^{+\infty} g(x)\,dx.$$

Απόδειξη. Ισχύει

$$\int_a^x (f(t) + g(t))\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \int_a^x g(t)\,dt$$

για κάθε $x \in [a, +\infty)$ και, επομένως,

$$\begin{aligned}\int_a^{+\infty}(f(x) + g(x))\,dx &= \lim_{x\to+\infty} \int_a^x (f(t) + g(t))\,dt \\ &= \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,dt + \lim_{x\to+\infty} \int_a^x g(t)\,dt \\ &= \int_a^{+\infty} f(x)\,dx + \int_a^{+\infty} g(x)\,dx.\end{aligned}$$

□

ΠΡΟΤΑΣΗ 12.7. *Αν το $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ έχει τιμή και το $\lambda \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε το $\int_a^{+\infty} \lambda f(x)\,dx$ έχει τιμή και*

$$\int_a^{+\infty} \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Απόδειξη. Ισχύει

$$\int_a^x \lambda f(t)\,dt = \lambda \int_a^x f(t)\,dt$$

για κάθε $x \in [a,+\infty)$, οπότε

$$\int_a^{+\infty} \lambda f(x)\,dx = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x \lambda f(t)\,dt = \lambda \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,dt = \lambda \int_a^{+\infty} f(x)\,dx.$$

□

ΠΡΟΤΑΣΗ 12.8. *Έστω ότι ισχύει $f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in [a,+\infty)$.*
[α] *Αν τα $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ έχουν τιμή, τότε $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \leq \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$.*
[β] *Αν $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$, τότε $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx = +\infty$.*
[γ] *Αν $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx = -\infty$, τότε $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = -\infty$.*

Απόδειξη. [α] Ισχύει $\int_a^x f(t)\,dt \leq \int_a^x g(t)\,dt$ για κάθε $x \in [a,+\infty)$ και, επομένως,

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,dt \leq \lim_{x\to+\infty} \int_a^x g(t)\,dt = \int_a^{+\infty} g(x)\,dx.$$

[β] Ισχύει $\int_a^x f(t)\,dt \leq \int_a^x g(t)\,dt$ για κάθε $x \in [a,+\infty)$. Επειδή $\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,dt = +\infty$, συνεπάγεται $\lim_{x\to+\infty} \int_a^x g(t)\,dt = +\infty$.
[γ] Όπως στο [β]. □

Τα δύο αποτελέσματα της πρότασης 12.9 είναι πολύ χρήσιμα. Ο ρόλος τους είναι ο ίδιος με τον ρόλο των ανάλογων αποτελεσμάτων για τα συνήθη ολοκληρώματα: χρησιμεύουν σε υπολογισμούς ολοκληρωμάτων.

ΠΡΟΤΑΣΗ 12.9. [α] *Έστω f, g με συνεχή παράγωγο στο $[a,+\infty)$. Αν το $\int_a^{+\infty} f'(x)g(x)\,dx$ έχει τιμή, αν υπάρχει το $\lim_{x\to+\infty} f(x)g(x)$ και αν το $\lim_{x\to+\infty} f(x)g(x) - \int_a^{+\infty} f'(x)g(x)\,dx$ δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε και το $\int_a^{+\infty} f(x)g'(x)\,dx$ έχει τιμή και είναι:*

$$\int_a^{+\infty} f(x)g'(x)\,dx = \lim_{x\to+\infty} f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_a^{+\infty} f'(x)g(x)\,dx.$$

[β] *Έστω $\phi : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο στο $[a,+\infty)$, $\lim_{x\to+\infty} \phi(x) = +\infty$ και f συνεχής στο $\phi([a,+\infty))$. Τότε το $\int_{\phi(a)}^{+\infty} f(y)\,dy$ έχει τιμή αν και μόνο αν το $\int_a^{+\infty} f(\phi(x))\phi'(x)\,dx$ έχει τιμή και, σ' αυτήν την περίπτωση,*

$$\int_{\phi(a)}^{+\infty} f(y)\,dy = \int_a^{+\infty} f(\phi(x))\phi'(x)\,dx.$$

Απόδειξη. [α] Για κάθε $x \in [a,+\infty)$ ισχύει

$$\int_a^x f(t)g'(t)\,dt = f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_a^x f'(t)g(t)\,dt.$$

Άρα

$$\begin{aligned}\int_a^{+\infty} f(x)g'(x)\,dx &= \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)g'(t)\,dt \\ &= \lim_{x\to+\infty} f(x)g(x) - f(a)g(a) - \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f'(t)g(t)\,dt \\ &= \lim_{x\to+\infty} f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_a^{+\infty} f'(x)g(x)\,dx.\end{aligned}$$

[β] Για κάθε $x \in [a,+\infty)$ ισχύει

$$\int_a^x f(\phi(t))\phi'(t)\,dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(x)} f(s)\,ds.$$

Άρα

$$\begin{aligned}\int_a^{+\infty} f(\phi(x))\phi'(x)\,dx &= \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(\phi(t))\phi'(t)\,dt = \lim_{x\to+\infty} \int_{\phi(a)}^{\phi(x)} f(s)\,ds \\ &= \lim_{y\to+\infty} \int_{\phi(a)}^{y} f(s)\,ds = \int_{\phi(a)}^{+\infty} f(y)\,dy.\end{aligned}$$

□

ΟΡΙΣΜΟΣ 12.5. *Έστω $f:[a,c)\cup(c,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό υποδιάστημα του $[a,c)$ και σε κάθε κλειστό υποδιάστημα του $(c,b]$. Ονομάζουμε* **πρωτεύουσα τιμή** *του γενικευμένου ολοκληρώματος $\int_a^b f(x)\,dx$ το όριο, αν υπάρχει, $\lim_{\epsilon\to 0+}\big(\int_a^{c-\epsilon} f(x)\,dx+\int_{c+\epsilon}^b f(x)\,dx\big)$ και τη συμβολίζουμε P.V. $\int_a^b f(x)\,dx$. Δηλαδή,*

$$\text{P.V.}\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\epsilon\to 0+}\Big(\int_a^{c-\epsilon} f(x)\,dx+\int_{c+\epsilon}^b f(x)\,dx\Big).$$

Υπάρχουν παραδείγματα όπου το γενικευμένο ολοκλήρωμα δεν έχει τιμή ενώ έχει πρωτεύουσα τιμή.

Παράδειγμα 12.1.12. Το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\,dx$ δεν έχει τιμή.
Πράγματι, αφ' ενός είναι $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx=\lim_{x\to 0+}\int_x^1\frac{1}{t}\,dt=\lim_{x\to 0+}(-\log x)=+\infty$ αφ' ετέρου $\int_{-1}^0\frac{1}{x}\,dx=\lim_{x\to 0-}\int_{-1}^x\frac{1}{t}\,dt=\lim_{x\to 0-}\log|x|=-\infty$.
Επομένως, το $\int_{-1}^0\frac{1}{x}\,dx+\int_0^1\frac{1}{x}\,dx=(-\infty)+(+\infty)$ είναι απροσδιόριστη μορφή.
Από την άλλη μεριά, P.V. $\int_{-1}^1\frac{1}{x}\,dx=\lim_{\epsilon\to 0+}\big(\int_{-1}^{-\epsilon}\frac{1}{x}\,dx+\int_\epsilon^1\frac{1}{x}\,dx\big)=\lim_{\epsilon\to 0+}0=0$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 12.10. *Έστω $f:[a,c)\cup(c,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό υποδιάστημα του $[a,c)$ και σε κάθε κλειστό υποδιάστημα του $(c,b]$. Αν το γεν. ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)\,dx$ έχει τιμή, τότε η πρωτεύουσα τιμή P.V. $\int_a^b f(x)\,dx$ υπάρχει και είναι ίση με την τιμή του $\int_a^b f(x)\,dx$.*

Απόδειξη. Επειδή το γεν. ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)\,dx$ έχει τιμή, συνεπάγεται ότι και τα γεν. ολοκληρώματα $\int_a^c f(x)\,dx$, $\int_c^b f(x)\,dx$ έχουν τιμή. Επομένως,

$$\lim_{\epsilon\to 0+}\int_a^{c-\epsilon} f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx,\qquad \lim_{\epsilon\to 0+}\int_{c+\epsilon}^b f(x)\,dx=\int_c^b f(x)\,dx.$$

Επειδή το $\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$ δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, συνεπάγεται

$$\begin{aligned}\text{P.V.}\int_a^b f(x)\,dx&=\lim_{\epsilon\to 0+}\big(\int_a^{c-\epsilon} f(x)\,dx+\int_{c+\epsilon}^b f(x)\,dx\big)\\&=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx.\end{aligned}$$

□

Ασκήσεις.

12.1.1. Ποιά από τα $\int_1^3\frac{1}{x}\,dx$, $\int_{-1}^7\frac{1}{x^2-x}\,dx$, $\int_1^3\frac{2}{x-2}\,dx$, $\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x}\,dx$, $\int_2^7\log\frac{x}{x-1}\,dx$, $\int_0^{+\infty}\log x\,dx$ είναι γενικευμένα ολοκληρώματα;

12.1.2. Είναι σαφές ότι τα $\int_0^1 x\log x\,dx$, $\int_0^1\frac{\sin x}{x}\,dx$, $\int_1^5\frac{\log x}{x-1}\,dx$, $\int_0^1\log x\log(1+x)\,dx$ είναι γενικευμένα ολοκληρώματα. Πώς πρέπει να χειριστούμε τις ολοκληρωτέες συναρτήσεις ώστε αυτά να μπορούν να θεωρηθούν (απλά) ολοκληρώματα;

12.1.3. Μπορούν να θεωρηθούν τα $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sin x}\,dx$, $\int_0^{+\infty}\log|\cos x|\,dx$, $\int_0^1\frac{1}{\sin(1/x)}\,dx$ γενικευμένα ολοκληρώματα;

12.1.4. Βρείτε τα $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2(x^2+1)}dx$, $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(x+1)}\,dx$, $\int_0^{+\infty}\frac{x}{x^2+a^2}\,dx$, $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+a^2}\,dx$, $\int_0^{+\infty}e^{-x}\,dx$, $\int_0^{+\infty}xe^{-x^2}\,dx$, $\int_0^{+\infty}\frac{x}{x^3+x^2+x+1}\,dx$, $\int_{\sqrt{2}}^{+\infty}\frac{1}{(x^2-1)\sqrt{x^2+1}}\,dx$, $\int_a^b\frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\,dx$, $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx$.

12.1.5. Βρείτε τα $\int_0^{+\infty}e^{-ax}\cos bx\,dx$, $\int_0^{+\infty}e^{-ax}\sin bx\,dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{e^{ax}+e^{-ax}}\,dx$.

12.1.6. Αποδείξτε ότι $\int_0^{+\infty}x^ne^{-x}\,dx=n!$ για κάθε $n\in\mathbb{Z}$, $n\geq 0$.

12.1.7. Αποδείξτε ότι $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+2x\cos\theta+1}\,dx=\frac{\theta}{\sin\theta}$ για κάθε $\theta\in(0,\pi)$.

12.1.8. Αποδείξτε ότι $\int_0^1 x^p \log x\,dx = -\frac{1}{(p+1)^2}$, αν $p > -1$, και $\int_1^{+\infty} x^p \log x\,dx = \frac{1}{(p+1)^2}$, αν $p < -1$.

12.1.9. Αποδείξτε ότι $\int_0^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(1+x)^{n+m}}\,dx = \frac{(n-1)!(m-1)!}{(n+m-1)!}$ για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$.

12.1.10. Βρείτε το $\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{(x+1)^2}\,dx$.

12.1.11. Μελετήστε ως προς τη σύγκλιση το $\int_0^{+\infty} (-1)^{[x]}\,dx$.

12.1.12. Έστω f ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του $(0, +\infty)$ και $0 < A \le B < +\infty$.
[α] Ορίζουμε την $g(x) = \frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt$ για $0 < x < +\infty$ και έστω ότι το όριο $L = \lim_{x\to+\infty} g(x)$ υπάρχει και είναι αριθμός. Αποδείξτε ότι:
(i) $\int_A^B \frac{f(x)}{x}\,dx = g(B) - g(A) + \int_A^B \frac{g(x)}{x}\,dx$.
(ii) $\lim_{T\to+\infty} \int_{AT}^{BT} \frac{f(x)}{x}\,dx = L \log\frac{B}{A}$.
(iii) $\int_1^{+\infty} \frac{f(Ax)-f(Bx)}{x}\,dx = -L\log\frac{B}{A} + \int_A^B \frac{f(x)}{x}\,dx$.
[β] Ορίζουμε την $h(x) = x\int_x^1 \frac{f(t)}{t^2}\,dt$ για $0 < x < +\infty$ και έστω ότι το όριο $l = \lim_{x\to 0+} h(x)$ υπάρχει και είναι αριθμός. Αποδείξτε ότι:
(i) $\int_A^B \frac{f(x)}{x}\,dx = h(A) - h(B) + \int_A^B \frac{h(x)}{x}\,dx$.
(ii) $\lim_{t\to 0+} \int_{At}^{Bt} \frac{f(x)}{x}\,dx = l\log\frac{B}{A}$.
(iii) $\int_0^1 \frac{f(Ax)-f(Bx)}{x}\,dx = l\log\frac{B}{A} - \int_A^B \frac{f(x)}{x}\,dx$.
[γ] Με τις υποθέσεις των [α], [β], αποδείξτε ότι $\int_0^{+\infty} \frac{f(Ax)-f(Bx)}{x}\,dx = (L-l)\log\frac{A}{B}$.
Αποδείξτε ότι $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(Ax)-\cos(Bx)}{x}\,dx = \log\frac{B}{A}$ και $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-Ax}-e^{-Bx}}{x}\,dx = \log\frac{B}{A}$.

12.2 Μη-αρνητικές συναρτήσεις.

ΘΕΩΡΗΜΑ 12.1. *Αν ισχύει $f(x) \ge 0$ για κάθε $x \in [a, +\infty)$, τότε το $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ έχει τιμή και αυτή είναι αριθμός ≥ 0 ή $+\infty$. Δηλαδή, $0 \le \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \le +\infty$.*
Ειδικότερα, το $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει, αν η $\int_a^x f(x)\,dx$ είναι, ως συνάρτηση του x στο $[a, +\infty)$, άνω φραγμένη, και αποκλίνει στο $+\infty$, αν η ίδια συνάρτηση δεν είναι άνω φραγμένη.

Απόδειξη. Αν $a \le x_1 < x_2$, συνεπάγεται

$$\int_a^{x_2} f(t)\,dt = \int_a^{x_1} f(t)\,dt + \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt \ge \int_a^{x_1} f(t)\,dt.$$

Άρα η $\int_a^x f(t)\,dt$ είναι, ως συνάρτηση του x, αύξουσα στο $[a, +\infty)$. Άρα το $\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,dt$ υπάρχει και είναι αριθμός ή $+\infty$. Μάλιστα, ισχύει $\int_a^x f(t)\,dt \ge 0$ για κάθε $x \in [a, +\infty)$, οπότε $\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,dt \ge 0$.
Τέλος, αν η συνάρτηση $\int_a^x f(t)\,dt$ είναι άνω φραγμένη, το $\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,dt$ είναι αριθμός, ενώ αν δεν είναι άνω φραγμένη, το $\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,dt$ είναι $+\infty$. □

Βλέπουμε ότι το γεν. ολοκλήρωμα μη-αρνητικής συνάρτησης έχει πάντοτε τιμή, η οποία είναι είτε αριθμός ≥ 0 είτε $+\infty$. Μπορούμε, επίσης, να πούμε ότι η σύγκλιση του $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ ισοδυναμεί με $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty$ ενώ η απόκλισή του ισοδυναμεί με $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 12.11. [α] *Έστω ότι ισχύει $0 \le f(x) \le g(x)$ για κάθε $x \in [a, +\infty)$. Τότε $0 \le \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \le \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$.*
Αν, επιπλέον, το $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ συγκλίνει, τότε και το $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει.
[β] *Έστω ότι ισχύει $f(x) \ge 0$, $g(x) > 0$ για κάθε $x \in [a, +\infty)$ και έστω ότι το $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ υπάρχει και είναι αριθμός ή, γενικότερα, ότι η συνάρτηση $\frac{f(x)}{g(x)}$ είναι φραγμένη κοντά στο $+\infty$. Αν το $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ συγκλίνει, τότε και το $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει.*

Απόδειξη. [α] Βάσει του θεωρήματος 12.1, τα $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ έχουν τιμή, οπότε από την πρόταση 12.8 συνεπάγεται $0 \leq \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \leq \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$. Αν το $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ συγκλίνει, συνεπάγεται $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx < +\infty$, οπότε $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty$ και, επομένως, το $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει.

[β] Υπάρχουν M και $c \in [a, +\infty)$ ώστε να ισχύει $0 \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq M$ για κάθε $x \in [c, +\infty)$. Το $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ συγκλίνει, οπότε και το $\int_c^{+\infty} g(x)\,dx$ συγκλίνει. Άρα

$$\int_c^{+\infty} f(x)\,dx \leq \int_c^{+\infty} Mg(x)\,dx = M\int_c^{+\infty} g(x)\,dx < +\infty.$$

Άρα το $\int_c^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει και, επομένως, το $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει. □

Ας δούμε, τώρα, μερικά παραδείγματα συναρτήσεων οι οποίες χρησιμοποιούνται συχνότατα ως *συναρτήσεις σύγκρισης* στο πλαίσιο είτε της πρότασης 12.11 είτε, αργότερα, της πρότασης 12.12.

Παράδειγμα 12.2.1. Θα μελετήσουμε το $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$.
Αν $p \neq 1$, τότε $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{1}{t^p}\,dt = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{1-p}-1}{1-p}$. Άρα $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = +\infty$, αν $p < 1$, και $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \frac{1}{p-1}$, αν $p > 1$.
Τέλος, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \lim_{x\to+\infty} \log x = +\infty$.
Συνοψίζουμε:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{p-1}, & \text{αν } p > 1 \\ +\infty, & \text{αν } p \leq 1 \end{cases}$$

Παράδειγμα 12.2.2. Όπως πριν, θα μελετήσουμε το $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$.
Αν $p \neq 1$, τότε $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{x\to 0+} \int_x^1 \frac{1}{t^p}\,dt = \lim_{x\to 0+} \frac{1-x^{1-p}}{1-p}$. Άρα $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx = \frac{1}{1-p}$, αν $p < 1$, και $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx = +\infty$, αν $p > 1$.
Τέλος, $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{x\to 0+} \int_x^1 \frac{1}{t}\,dt = -\lim_{x\to 0+} \log x = +\infty$.
Συνοψίζουμε:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{1-p}, & \text{αν } p < 1 \\ +\infty, & \text{αν } p \geq 1 \end{cases}$$

Από τα παραδείγματα 12.2.1 και 12.2.2 βλέπουμε ότι

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = +\infty \qquad \text{για κάθε } p.$$

Παράδειγμα 12.2.3. Έστω $c, q > 0$. Θα μελετήσουμε το $\int_1^{+\infty} x^p e^{-cx^q}\,dx$.
Θεωρούμε $n > \frac{p+1}{q}$. Για κάθε $x \geq 0$ ισχύει $e^x \geq \frac{x^n}{n!}$. Αντικαθιστούμε το x με το cx^q και βρίσκουμε $e^{cx^q} \geq \frac{c^n}{n!} x^{qn}$. Άρα ισχύει $0 < x^p e^{-cx^q} \leq \frac{n!}{c^n} \frac{1}{x^{qn-p}}$ για κάθε $x > 0$. Επειδή $qn - p > 1$, βάσει του παραδείγματος 12.2.1, το γεν. ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{qn-p}}\,dx$ συγκλίνει. Άρα και το γεν. ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} x^p e^{-cx^q}\,dx$ συγκλίνει:

$$0 \leq \int_1^{+\infty} x^p e^{-cx^q}\,dx < +\infty \qquad \text{για } c, q > 0.$$

Η θεωρία των γενικευμένων ολοκληρωμάτων μοιάζει πολύ με τη θεωρία των σειρών. Αυτό πρέπει να έχει ήδη φανεί και θα το δούμε και με τα παρακάτω σχόλια, τα οποία είναι παρόμοια με κάποια ανάλογα σχόλια για την πρόταση 8.7.

Το αποτέλεσμα της πρότασης 12.11[β] λέει, ισοδύναμα, ότι: *αν το $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ αποκλίνει στο $+\infty$, τότε και το $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ αποκλίνει στο $+\infty$.*

Κατόπιν, αν ισχύει $f(x), g(x) > 0$ για κάθε $x \in [a, +\infty)$ και $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \rho$, όπου ο ρ είναι ένας θετικός αριθμός, δηλαδή $0 < \rho < +\infty$, τότε το συμπέρασμα για τα $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$

και $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ είναι το εξής: *είτε και τα δύο γεν. ολοκληρώματα συγκλίνουν είτε και τα δύο αποκλίνουν στο* $+\infty$. Διότι, από το $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \rho$ και το ότι ο ρ είναι αριθμός, συνεπάγεται ότι, αν το $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ συγκλίνει, τότε και το $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει. Αλλά και από το $\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{1}{\rho}$ και το ότι ο $\frac{1}{\rho}$ είναι αριθμός, συνεπάγεται ότι, αν το $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει, τότε και το $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ συγκλίνει. Επίσης, αν ισχύει $f(x), g(x) > 0$ για κάθε $x \in [a,+\infty)$ και $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, συμπεραίνουμε, σύμφωνα με την πρόταση 12.11[β], ότι αν το $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ συγκλίνει, τότε και το $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει. Το αντίστροφο δεν ισχύει γενικά.

Παράδειγμα 12.2.4. Είναι $\lim_{x\to+\infty} \frac{1/x^2}{1/x} = 0$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx < +\infty$ και $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = +\infty$.

Βέβαια, αν ισχύει $f(x), g(x) > 0$ για κάθε $x \in [a,+\infty)$ και $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$, συμπεραίνουμε ότι αν το $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει, τότε και το $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ συγκλίνει. Και πάλι αυτό προκύπτει από το $\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$ και την πρόταση 12.11[β].

Και μια τελευταία παρατήρηση για τον τρόπο που εφαρμόζεται πολλές φορές η "σύγκριση" γεν. ολοκληρωμάτων στο πλαίσιο της πρότασης 12.11. Αν έχουμε ένα γενικευμένο ολοκλήρωμα με περίπλοκη ολοκληρωτέα συνάρτηση, προσπαθούμε να το συγκρίνουμε με ένα γεν. ολοκλήρωμα με απλούστερη ολοκληρωτέα συνάρτηση ώστε να είναι πιο εύκολο να αποφανθούμε για τη σύγκλιση ή απόκλιση του απλούστερου γεν. ολοκληρώματος. Η μετάβαση από την περίπλοκη στην απλούστερη συνάρτηση γίνεται πολλές φορές με την αναγνώριση "κύριων όρων". Δείτε, πάλι, την υποενότητα 5.8.2.

Παράδειγμα 12.2.5. Θεωρούμε το $\int_1^{+\infty} \frac{e^{2x}+3e^x+1}{e^{3x}+x^2}\,dx$.
Οι κύριοι όροι στον αριθμητή και τον παρονομαστή του $\frac{e^{2x}+3e^x+1}{e^{3x}+x^2}$ είναι οι e^{2x} και e^{3x}, αντιστοίχως. Οπότε γράφουμε

$$\frac{e^{2x}+3e^x+1}{e^{3x}+x^2} = \frac{e^{2x}}{e^{3x}}\,\frac{1+3e^{-x}+e^{-2x}}{1+x^2e^{-3x}}$$

για κάθε $x \in [1,+\infty)$ και βλέπουμε ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{2x}+3e^x+1}{e^{3x}+x^2}\right)/\left(\frac{e^{2x}}{e^{3x}}\right) = 1.$$

Τώρα συγκρίνουμε το αρχικό γεν. ολοκλήρωμα με το

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{2x}}{e^{3x}}\,dx = \int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx.$$

Το δεύτερο γεν. ολοκλήρωμα συγκλίνει, οπότε συγκλίνει και το πρώτο.

Παράδειγμα 12.2.6. Θεωρούμε το $\int_1^{+\infty} \frac{x^3+3}{2x^4+x+1}\,dx$.
Οι κύριοι όροι στον αριθμητή και στον παρονομαστή του $\frac{x^3+3}{2x^4+x+1}$ είναι οι x^3 και $2x^4$, αντιστοίχως. Γράφουμε

$$\frac{x^3+3}{2x^4+x+1} = \frac{x^3}{2x^4}\,\frac{1+3x^{-3}}{1+(1/2)x^{-3}+(1/2)x^{-4}}$$

και

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3+3}{2x^4+x+1}\right)/\left(\frac{x^3}{2x^4}\right) = 1.$$

Επειδή ο 1 είναι *θετικός* και

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^3}{2x^4}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = +\infty,$$

προκύπτει ότι $\int_1^{+\infty} \frac{x^3+3}{2x^4+x+1} = +\infty$.

Παράδειγμα 12.2.7. Έστω το $\int_1^{+\infty} \sin\frac{1}{x}\,dx$.
Έχουμε το όριο

$$\lim_{x\to+\infty}(\sin\tfrac{1}{x})/(\tfrac{1}{x}) = 1.$$

Ο 1 είναι *θετικός* και το $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ αποκλίνει στο $+\infty$, οπότε το ίδιο ισχύει για το $\int_1^{+\infty} \sin\frac{1}{x}\,dx$.

Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι το κριτήριο ολοκληρώματος για σειρές αριθμών μπορεί να αναδιατυπωθεί ως αποτέλεσμα που συνδυάζει σειρές και γενικευμένα ολοκληρώματα. Επομένως, να μια ακόμη ομοιότητα ανάμεσα στα γεν. ολοκληρώματα και στις σειρές.

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ. *Έστω φθίνουσα ακολουθία (x_n) ώστε να ισχύει $x_n \geq 0$ για κάθε n. Έστω ότι υπάρχει $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ φθίνουσα στο $[1, +\infty)$ ώστε να ισχύει $f(n) = x_n$ για κάθε n. Τότε το $\int_1^{+\infty} f(t)\, dt$ έχει τιμή, η οποία είναι αριθμός ≥ 0 ή $+\infty$ και*
(i) $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n < +\infty$ αν και μόνο αν $\int_1^{+\infty} f(t)\, dt < +\infty$,
(ii) $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = +\infty$ αν και μόνο αν $\int_1^{+\infty} f(t)\, dt = +\infty$.
Επιπλέον,

$$\int_1^{n+1} f(u)\, du \leq x_1 + \cdots + x_n \leq x_1 + \int_1^n f(u)\, du \qquad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}$$

$$\int_1^{+\infty} f(t)\, dt \leq \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \leq x_1 + \int_1^{+\infty} f(t)\, dt.$$

Ασκήσεις.

12.2.1. Αποδείξτε ότι $\int_1^{+\infty} (\sin \frac{1}{x})^2\, dx \leq 1$ και $\int_0^{+\infty} \frac{(\sin x)^2}{x^2}\, dx \leq 2$.

12.2.2. Αποδείξτε ότι το $\int_0^1 \frac{1}{x^p(1-x)^q}\, dx$ συγκλίνει αν και μόνο αν $p, q < 1$.

12.2.3. Αποδείξτε ότι το $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p(x^q+1)}\, dx$ συγκλίνει αν και μόνο αν $1 - q < p < 1$.

12.2.4. Αποδείξτε ότι τα $\int_0^{+\infty} e^{-(x+x^{-1})}\, dx$, $\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x\sqrt{x^2-1}}\, dx$ συγκλίνουν.

12.2.5. Αποδείξτε ότι το $\int_0^{+\infty} x^x e^{-x^p}\, dx$ συγκλίνει αν και μόνο αν $p > 1$.

12.2.6. Αποδείξτε ότι το $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^p(\log x)^q}\, dt$ συγκλίνει αν και μόνο αν είτε (i) $p > 1$ είτε (ii) $p = 1$ και $q > 1$.

12.2.7. Αποδείξτε ότι τα $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^8(\sin x)^2}\, dx$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^4(\sin x)^2}\, dx$ συγκλίνουν.
Αποδείξτε ότι τα $\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^8(\sin x)^2}\, dx$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2(\sin x)^2}\, dx$ αποκλίνουν στο $+\infty$.

12.2.8. Εδώ εξετάζουμε μια διαφορά ανάμεσα σε γεν. ολοκληρώματα και σε σειρές.
Βρείτε $f : [1, +\infty) \to [0, +\infty)$ ώστε να συγκλίνει το $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ και να μην υπάρχει το $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
Έστω $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$. Αν υπάρχει το $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ και συγκλίνει το $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$, αποδείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

12.2.9. Έστω $f, g : [a, +\infty) \to [0, +\infty)$ συνεχείς στο $[a, +\infty)$ και $p, q > 1$ με $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
[α] Αν $\int_a^{+\infty} (f(x))^p\, dx < +\infty$ και $\int_a^{+\infty} (g(x))^q\, dx < +\infty$, αποδείξτε την **ανισότητα του Hölder** για γεν. ολοκληρώματα:

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\, dx \leq \Big(\int_a^{+\infty} (f(x))^p\, dx \Big)^{1/p} \Big(\int_a^{+\infty} (g(x))^q\, dx \Big)^{1/q}.$$

Ειδική περίπτωση είναι η **ανισότητα των Schwarz, Buniakowsky** για γεν. ολοκληρώματα:

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\, dx \leq \Big(\int_a^{+\infty} (f(x))^2\, dx \Big)^{1/2} \Big(\int_a^{+\infty} (g(x))^2\, dx \Big)^{1/2}.$$

Αποδείξτε ότι η ανισότητα του Hölder ισχύει ως ισότητα αν και μόνο αν υπάρχουν $s, t \geq 0$ όχι και οι δύο ίσοι με 0 ώστε να ισχύει $s(f(x))^p = t(g(x))^q$ για κάθε $x \in [a, +\infty)$.
[β] Αν $\int_a^{+\infty} (f(x))^p dx < +\infty$, $\int_a^{+\infty} (g(x))^p dx < +\infty$, αποδείξτε την **ανισότητα του Minkowski** για γεν. ολοκληρώματα:

$$\Big(\int_a^{+\infty} (f(x) + g(x))^p\, dx \Big)^{1/p} \leq \Big(\int_a^{+\infty} (f(x))^p\, dx \Big)^{1/p} + \Big(\int_a^{+\infty} (g(x))^p\, dx \Big)^{1/p}.$$

Αποδείξτε ότι η ανισότητα του Minkowski ισχύει ως ισότητα αν και μόνο αν υπάρχουν $s, t \geq 0$ όχι και οι δύο ίσοι με 0 ώστε να ισχύει $sf(x) = tg(x)$ για κάθε $x \in [a, +\infty)$.

12.3 Κριτήρια σύγκλισης.

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΤΟΥ CAUCHY. *Το* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *συγκλίνει αν και μόνο αν για κάθε* $\epsilon > 0$ *υπάρχει* $c_0 \in [a, +\infty)$ *ώστε να ισχύει* $\big| \int_{x'}^{x''} f(t)\,dt \big| < \epsilon$ *για κάθε* $x', x'' \in (c_0, +\infty)$.

Απόδειξη. Ορίζουμε τη συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ για κάθε $x \in [a, +\infty)$.
Τότε είναι $F(x'') - F(x') = \int_{x'}^{x''} f(t)\,dt$ και, επομένως, το αποτέλεσμα είναι άμεση εφαρμογή στη συνάρτηση F του κριτηρίου του Cauchy για όρια συναρτήσεων. $\Box$

12.3.1 Απόλυτη σύγκλιση.

ΟΡΙΣΜΟΣ 12.6. *Λέμε ότι το* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ **συγκλίνει απολύτως** *αν το* $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ *συγκλίνει ή, ισοδύναμα,* $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx < +\infty$.

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΠΟΛΥΤΗΣ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ. *Αν το* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *συγκλίνει απολύτως, τότε συγκλίνει και*

$$\Big| \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \Big| \leq \int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx.$$

Πρώτη απόδειξη. Έστω ότι το $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ συγκλίνει. Έστω $\epsilon > 0$. Τότε, σύμφωνα με το κριτήριο του Cauchy, υπάρχει $c_0 \in [a, +\infty)$ ώστε να ισχύει $\int_{x'}^{x''} |f(t)|\,dt < \epsilon$ και, επομένως,

$$\Big| \int_{x'}^{x''} f(t)\,dt \Big| \leq \int_{x'}^{x''} |f(t)|\,dt < \epsilon$$

για κάθε $x', x'' \in (c_0, +\infty)$. Άρα το $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει.
Τέλος, επειδή για κάθε $x \in [a, +\infty)$ ισχύει $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$, συνεπάγεται

$$-\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx = \int_a^{+\infty} (-|f(x)|)\,dx \leq \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \leq \int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx.$$

Άρα $\big| \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \big| \leq \int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$.
Δεύτερη απόδειξη. Ορίζουμε τις συναρτήσεις $f^+, f^- : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπους

$$f^+(x) = (f(x))^+, \qquad f^-(x) = (f(x))^-.$$

Ισχύει

$$0 \leq f^+(x) \leq |f(x)|, \ \ 0 \leq f^-(x) \leq |f(x)|, \ \ f^+(x) + f^-(x) = |f(x)|, \ \ f^+(x) - f^-(x) = f(x)$$

για κάθε $x \in [a, +\infty)$.
Επειδή $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx < +\infty$, συνεπάγεται ότι τα $\int_a^{+\infty} f^+(x)\,dx$, $\int_a^{+\infty} f^-(x)\,dx$ συγκλίνουν.
Επειδή $f = f^+ - f^-$, το $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει και

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int_a^{+\infty} (f^+(x) - f^-(x))\,dx = \int_a^{+\infty} f^+(x)\,dx - \int_a^{+\infty} f^-(x)\,dx.$$

Επίσης,

$$\begin{aligned} \Big| \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \Big| &= \Big| \int_a^{+\infty} f^+(x)\,dx - \int_a^{+\infty} f^-(x)\,dx \Big| \leq \Big| \int_a^{+\infty} f^+(x)\,dx \Big| + \Big| \int_a^{+\infty} f^-(x)\,dx \Big| \\ &= \int_a^{+\infty} f^+(x)\,dx + \int_a^{+\infty} f^-(x)\,dx = \int_a^{+\infty} (f^+(x) + f^-(x))\,dx \\ &= \int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx. \end{aligned}$$

$\Box$

ΠΡΟΤΑΣΗ 12.12. [α] *Αν ισχύει* $|f(x)| \leq g(x)$ *για κάθε* $x \in [a, +\infty)$ *και το* $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *συγκλίνει, τότε το* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *συγκλίνει απολύτως, οπότε συγκλίνει. Επίσης,* $\big| \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \big| \leq \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$.
[β] *Έστω* $g(x) > 0$ *για κάθε* $x \in [a, +\infty)$ *και έστω ότι το* $\lim_{x \to +\infty} \frac{|f(x)|}{g(x)}$ *υπάρχει και είναι αριθμός ή, γενικότερα, ότι η συνάρτηση* $\frac{|f(x)|}{g(x)}$ *είναι φραγμένη κοντά στο* $+\infty$. *Αν το* $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *συγκλίνει, τότε το* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *συγκλίνει απολύτως και, επομένως, συγκλίνει.*

Απόδειξη. [α] Επειδή το $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ συγκλίνει, συνεπάγεται ότι το $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ συγκλίνει, οπότε και το $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει και

$$\left|\int_a^{+\infty} f(x)\,dx\right| \leq \int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx \leq \int_a^{+\infty} g(x)\,dx.$$

[β] Άμεση συνέπεια της πρότασης 12.11 και του κριτηρίου απόλυτης σύγκλισης. □

Τα σχόλια που έγιναν μετά από την πρόταση 12.11 ισχύουν και εδώ, μόνο που εφαρμόζονται στο $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ αντί του $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$. Δηλαδή, τα ίδια σχόλια διατυπώνονται σε σχέση με την *απόλυτη σύγκλιση* του $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Παράδειγμα 12.3.1. Το $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,dx$ συγκλίνει απολύτως, διότι ισχύει $|\frac{\sin x}{x^2}| \leq \frac{1}{x^2}$ για κάθε $x \in [1,+\infty)$ και το $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ συγκλίνει.

Παράδειγμα 12.3.2. Θα αποδείξουμε ότι $\int_\pi^{+\infty} |\frac{\sin x}{x}|\,dx = \int_\pi^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx = +\infty$, δηλαδή ότι το $\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ δεν συγκλίνει απολύτως.
Είναι

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \geq \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x|\,dx = \frac{2}{(k+1)\pi}$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Άρα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_\pi^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}.$$

Επειδή $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \to +\infty$, συνεπάγεται $\int_\pi^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \to +\infty$, οπότε $\int_\pi^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx = +\infty$.
Σε λίγο θα δούμε ότι το $\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ συγκλίνει.

12.3.2 Υπό συνθήκη σύγκλιση.

ΟΡΙΣΜΟΣ 12.7. *Λέμε ότι το* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ ***συγκλίνει υπό συνθήκη*** *αν συγκλίνει αλλά δεν συγκλίνει απολύτως.*

ΘΕΩΡΗΜΑ 12.2. *Έστω* $f, g : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ *και* $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ *για κάθε* $x \in [a,+\infty)$ *και έστω ότι η* f *είναι συνεχής στο* $[a,+\infty)$ *και η* g *έχει συνεχή παράγωγο στο* $[a,+\infty)$.
[α] Έστω ότι η g *είναι φθίνουσα στο* $[a,+\infty)$, *ότι* $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$ *και ότι η* F *είναι φραγμένη στο* $[a,+\infty)$. *Τότε το* $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ *συγκλίνει.*
[β] Έστω ότι η g *είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη στο* $[a,+\infty)$ *και ότι το* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *συγκλίνει. Τότε το* $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ *συγκλίνει.*

Απόδειξη. [α] Υπάρχει M ώστε να ισχύει $|F(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [a,+\infty)$. Επειδή η f είναι συνεχής, ισχύει $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [a,+\infty)$. Επίσης, ισχύει $g'(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [a,+\infty)$.
Ισχύει

$$\int_a^x f(t)g(t)\,dt = \int_a^x F'(t)g(t)\,dt = F(x)g(x) - \int_a^x F(t)g'(t)\,dt \tag{12.3}$$

για κάθε $x \in [a,+\infty)$. Το $\int_a^{+\infty} F(x)g'(x)\,dx$ συγκλίνει απολύτως, διότι

$$\begin{aligned}\int_a^{+\infty} |F(x)g'(x)|\,dx \leq M \int_a^{+\infty} |g'(x)|\,dx = -M \int_a^{+\infty} g'(x)\,dx = -M \lim_{x\to+\infty} \int_a^x g'(t)\,dt \\ = -M \lim_{x\to+\infty}(g(x) - g(a)) = Mg(a) < +\infty.\end{aligned}$$

Άρα το $\int_a^{+\infty} F(x)g'(x)\,dx$ συγκλίνει, οπότε το $\lim_{x\to+\infty} \int_a^x F(t)g'(t)\,dt$ υπάρχει και είναι αριθμός. Επειδή ισχύει $|F(x)g(x)| \leq Mg(x)$ για κάθε $x \in [a,+\infty)$, συνεπάγεται

$$\lim_{x\to+\infty} F(x)g(x) = 0.$$

Τώρα, από την (12.3) συνεπάγεται ότι το

$$\lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)g(t)\,dt = -\lim_{x\to+\infty}\int_a^x F(t)g'(t)\,dt$$

υπάρχει και είναι αριθμός, οπότε το $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ συγκλίνει.
[β] Το $l=\lim_{x\to+\infty} g(x)$ υπάρχει και είναι αριθμός. Σύμφωνα με το [α], το $\int_a^{+\infty} f(x)(g(x)-l)\,dx$ συγκλίνει. Τότε

$$\begin{aligned}\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx &= \int_a^{+\infty} f(x)(g(x)-l)\,dx + \int_a^{+\infty} f(x)l\,dx\\ &= \int_a^{+\infty} f(x)(g(x)-l)\,dx + l\int_a^{+\infty} f(x)\,dx,\end{aligned}$$

οπότε και το $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ συγκλίνει. □

Παράδειγμα 12.3.3. Θα δούμε ότι το $\int_\pi^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$ συγκλίνει, δηλαδή, βάσει του παραδείγματος 12.3.2, ότι συγκλίνει υπό συνθήκη.
Η συνάρτηση $\frac{1}{x}$ είναι φθίνουσα με συνεχή παράγωγο στο $[\pi,+\infty)$ και είναι $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$. Η συνάρτηση $\sin x$ είναι συνεχής στο $[\pi,+\infty)$ και ισχύει

$$\left|\int_\pi^x \sin t\,dt\right| = |\cos\pi-\cos x|\le 2$$

για κάθε $x\ge\pi$. Άρα το $\int_\pi^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$ συγκλίνει.

Παράδειγμα 12.3.4. Για το $\int_0^\pi\frac{\sin x}{x}\,dx$ η κατάσταση είναι πιο απλή.
Παρατηρούμε ότι η $g:[0,\pi]\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & \text{αν } 0<x\le\pi\\ 1, & \text{αν } x=0\end{cases}$ είναι συνεχής και, επομένως, ολοκληρώσιμη στο $[0,\pi]$. Άρα το *γενικευμένο* ολοκλήρωμα $\int_0^\pi\frac{\sin x}{x}\,dx=\int_0^\pi g(x)\,dx$ έχει τιμή ίση με την τιμή του *απλού* ολοκληρώματος $\int_0^\pi g(x)\,dx$.

Παράδειγμα 12.3.5. Συνδυάζοντας τα δύο προηγούμενα παραδείγματα, βλέπουμε ότι το

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\int_0^\pi\frac{\sin x}{x}\,dx+\int_\pi^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$$

συγκλίνει. Για τον υπολογισμό της τιμής του $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$ δείτε την άσκηση 12.3.12 καθώς και το παράδειγμα 12.4.6. Προς το παρόν θα δούμε ότι η τιμή αυτή είναι θετικός αριθμός.
Με ολοκλήρωση κατά μέρη, βρίσκουμε

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx &= \int_0^{+\infty}\frac{(1-\cos x)'}{x}\,dx=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\cos x}{x}-\lim_{x\to0+}\frac{1-\cos x}{x}+\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}\,dx\\ &= \int_0^{+\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}\,dx.\end{aligned}$$

Άρα

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\int_0^{\pi/4}\frac{1-\cos x}{x^2}\,dx+\int_{\pi/4}^{7\pi/4}\frac{1-\cos x}{x^2}\,dx+\int_{7\pi/4}^{+\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}\,dx\ge\int_{\pi/4}^{7\pi/4}\frac{1-\cos x}{x^2}\,dx.$$

Επειδή ισχύει $1-\cos x\ge 1-\cos\frac{\pi}{4}$ για κάθε $x\in[\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{4}]$, συνεπάγεται

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx\ge\left(1-\cos\frac{\pi}{4}\right)\int_{\pi/4}^{7\pi/4}\frac{1}{x^2}\,dx=\frac{12(2-\sqrt{2})}{7\pi}>0.$$

Τα σχόλια που είχαμε κάνει για την έννοια της σύγκλισης μιας σειράς μετά από το παράδειγμα 8.3.8 ισχύουν σε μεγάλο βαθμό και για την έννοια της σύγκλισης ενός γεν. ολοκληρώματος.
Έστω αρχικά ένα γεν. ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ με *μη-αρνητική* ολοκληρωτέα συνάρτηση $f:[a,+\infty)\to[0,+\infty)$. Το να συγκλίνει το γεν. ολοκλήρωμα ισοδυναμεί με το ότι τα ολοκληρώματα $\int_a^x f(t)\,dt$ είναι φραγμένα και αυτό συνεπάγεται ότι η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι μικρή: "μικρότερη συνάρτηση έχει μικρότερα ολοκληρώματα". Το να ισχύει $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ είναι

κάτι το οποίο διευκολύνει τη σύγκλιση του γεν. ολοκληρώματος, αλλά δεν είναι αρκετό. Για παράδειγμα, και στα δύο γεν. ολοκληρώματα $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ και $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ η ολοκληρωτέα συνάρτηση έχει όριο 0 στο $+\infty$, αλλά το πρώτο γεν. ολοκλήρωμα συγκλίνει ενώ το δεύτερο δεν συγκλίνει. Βλέπουμε ότι οι τιμές της $\frac{1}{x^2}$ είναι *πολύ μικρότερες* από τις αντίστοιχες τιμές της $\frac{1}{x}$. Πράγματι: $\lim_{x\to+\infty} \frac{1/(x^2)}{1/x} = 0$. Δηλαδή, το μέγεθος των τιμών της $\frac{1}{x^2}$ είναι αρκετά μικρό ώστε το γεν. ολοκλήρωμά της συγκλίνει ενώ το μέγεθος των τιμών της $\frac{1}{x}$ δεν είναι τόσο μικρό όσο θα έπρεπε για να συγκλίνει και το δικό της γεν. ολοκλήρωμα. Αυτό φαίνεται καθαρά και στην πρόταση 12.11. Το βασικό συμπέρασμά της είναι ότι, αν ένα γεν. ολοκλήρωμα με μεγαλύτερη συνάρτηση συγκλίνει, τότε και το γεν. ολοκλήρωμα με τη μικρότερη συνάρτηση συγκλίνει.
Όλα τα προηγούμενα έχουν ως βασική προϋπόθεση ότι αναφερόμαστε σε γεν. ολοκληρώματα με μη-αρνητικές συναρτήσεις.
Η κατάσταση είναι διαφορετική για τα γεν. ολοκληρώματα των οποίων οι συναρτήσεις έχουν μεταβαλλόμενο πρόσημο. Για να συγκλίνει το γεν. ολοκλήρωμα, πρέπει οι τιμές της ολοκληρωτέας συνάρτησης να έχουν και πάλι μικρό μέγεθος. Όμως, το μέγεθος των τιμών της συνάρτησης δεν παίζει πια τον καθοριστικό ρόλο. Δείτε, για παράδειγμα τα γεν. ολοκληρώματα $\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ και $\int_\pi^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx$. Οι τιμές των δύο συναρτήσεων έχουν ακριβώς το ίδιο μέγεθος. Όμως, ενώ το μέγεθος αυτό δεν είναι αρκετά μικρό ώστε να συγκλίνει το δεύτερο γεν. ολοκλήρωμα, είναι αρκετά μικρό ώστε να συγκλίνει το πρώτο γεν. ολοκλήρωμα. Ο λόγος είναι ότι από τα διαφορετικά πρόσημα προκαλείται αλληλοαναίρεση των τιμών κατά την ολοκλήρωσή τους. Αυτό ακριβώς το φαινόμενο παρατηρείται σε οποιοδήποτε γεν. ολοκλήρωμα που συγκλίνει υπό συνθήκη. Το μέγεθος των τιμών της ολοκληρωτέας συνάρτησης δεν είναι αρκετά μικρό ώστε να συγκλίνει το γεν. ολοκλήρωμα απολύτως αλλά είναι αρκετά μικρό ώστε, *μετά και από τις αλληλοαναιρέσεις λόγω διαφορετικών προσήμων*, το γεν. ολοκλήρωμα να συγκλίνει.
Αυτή η διαφορά ανάμεσα στα γεν. ολοκληρώματα με μη-αρνητικές συναρτήσεις και στα γεν. ολοκληρώματα με γενικές συναρτήσεις αντανακλάται στην διαφορά ανάμεσα στις χρησιμοποιούμενες μεθόδους μελέτης της σύγκλισής τους. Η “σύγκριση” αντίστοιχων τιμών συναρτήσεων όπως αυτή εκφράζεται στις προτάσεις 12.11 και 12.12 δεν εφαρμόζεται σε γεν. ολοκληρώματα που συγκλίνουν υπό συνθήκη, ακριβώς επειδή πρόκειται για σύγκριση των *μεγεθών* των αντίστοιχων τιμών. Η μέθοδος της “σύγκρισης” εφαρμόζεται μόνο για τη μελέτη της σύγκλισης γεν. ολοκληρωμάτων μη-αρνητικών συναρτήσεων ή της απόλυτης σύγκλισης γεν. ολοκληρωμάτων. Η μελέτη της σύγκλισης γεν. ολοκληρωμάτων, τα οποία δεν συγκλίνουν απολύτως, γίνεται κυρίως με τις μεθόδους του θεωρήματος 12.2.

Ασκήσεις.

12.3.1. Έστω $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ αν $x \in [n-1, n)$ για κάποιον $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι το $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει υπό συνθήκη.

12.3.2. Αποδείξτε ότι τα $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx$, $\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos x\,dx$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\,dx$ συγκλίνουν απολύτως.

12.3.3. Αποδείξτε ότι, αν $p > 1$, το $\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}\,dx$ συγκλίνει απολύτως ενώ, αν $0 < p \le 1$, το ίδιο γεν. ολοκλήρωμα συγκλίνει υπό συνθήκη.
Αποδείξτε ότι το $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2+p^2}\,dx$ συγκλίνει απολύτως για κάθε $p \neq 0$ και ότι αποκλίνει για $p = 0$.

12.3.4. Αποδείξτε ότι τα $\int_1^{+\infty} \frac{x\sin x}{1+x+x^2}dx$, $\int_2^{+\infty} \frac{\sin x}{\log x}\,dx$, $\int_1^{+\infty} \frac{x\cos(x^2)}{1+\log x}\,dx$, $\int_1^{+\infty} \frac{x(\sqrt{x}+1)\sin(x^2)}{x+\sin x}\,dx$, $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\cos x}{x+1}\,dx$, $\int_0^{+\infty} \frac{x\sin x}{(x+1)(x+\sin x)}\,dx$, $\int_1^{+\infty} \cos x \sin\frac{1}{x}\,dx$ συγκλίνουν υπό συνθήκη.

12.3.5. Έστω ρητή συνάρτηση $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, όπου τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ δεν έχουν κοινούς διαιρέτες.
Αποδείξτε ότι το $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,dx$ συγκλίνει αν και μόνο αν το $Q(x)$ δεν έχει καμία πραγματική ρίζα και $\deg Q(x) \ge \deg P(x) + 2$.

Αποδείξτε ότι το $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \sin x \, dx$ συγκλίνει αν και μόνο αν όλες οι πραγματικές ρίζες του $Q(x)$ ανήκουν στο σύνολο $\{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ και έχουν πολλαπλότητα 1 και $\deg Q(x) \geq \deg P(x) + 1$.

12.3.6. Δείτε την άσκηση 7.3.16.

Έστω ότι η $\phi : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ έχει μονότονη παράγωγο και συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $[a, +\infty)$ και ότι $\lim_{x\to+\infty} \phi'(x) = +\infty$. Αποδείξτε ότι το $\int_a^{+\infty} \sin(\phi(x)) \, dx$ συγκλίνει.

Αποδείξτε ότι τα $\int_1^{+\infty} \sin(x^a) \, dx$, $\int_1^{+\infty} \cos(x^a) \, dx$ συγκλίνουν, αν $|a| > 1$, και αποκλίνουν, αν $|a| \leq 1$. Ειδικότερα, τα $\int_0^{+\infty} \sin(x^2) \, dx$, $\int_0^{+\infty} \cos(x^2) \, dx$ συγκλίνουν.[1]

12.3.7. Αν $1 < x < +\infty$ ορίζουμε $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$. Δείτε τις ασκήσεις 10.1.26 και 7.3.20.

Αποδείξτε ότι ισχύει $\zeta(x) = x \int_1^{+\infty} \frac{[t]}{t^{x+1}} \, dt$ και $\frac{1}{x-1} \leq x \int_1^{+\infty} \frac{[t]}{t^{x+1}} \, dt \leq \frac{x}{x-1}$ για κάθε $x > 1$, βρίσκοντας έτσι με δεύτερο τρόπο τις ήδη γνωστές ανισότητες $\frac{1}{x-1} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \leq \frac{x}{x-1}$.

Αποδείξτε ότι ισχύει $\zeta(x) = \frac{x}{x-1} - x \int_1^{+\infty} \frac{t-[t]}{t^{x+1}} \, dt$ για κάθε $x > 1$. Αποδείξτε ότι το τελευταίο γεν. ολοκλήρωμα συγκλίνει για κάθε $x > 0$. Συμβολίστε $\zeta_0(x)$ τη συνάρτηση που ορίζεται από το δεξιό μέλος του τελευταίου τύπου και παρατηρήστε ότι η $\zeta_0(x)$ ορίζεται στο $(0, 1) \cup (1, +\infty)$ και ταυτίζεται με την $\zeta(x)$ στο $(1, +\infty)$. Επομένως, η συνάρτηση $\zeta(x)$ επεκτείνεται, μέσω του τύπου αυτού, και στο διάστημα $(0, 1)$.

Θεωρήστε την $\phi(x)$ του [η] της άσκησης 7.3.20 και, βάσει της άσκησης 7.1.8, δημιουργήστε συναρτήσεις $\phi_n(x)$ ώστε να είναι $\phi_1(x) = \phi(x)$ και $\phi_{n+1}(x) = \int_1^x (\phi_n(t) - \mu_n) \, dt$, όπου $\mu_n = \int_1^2 \phi_n(t) \, dt$, για κάθε n. Αποδείξτε ότι, για κάθε n, η $\phi_n(x)$ είναι περιοδική με περίοδο 1, συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $\phi_n(1) = 0$. Ειδικότερα, η $\phi_n(x)$ είναι φραγμένη στο $\mathbb{R}$. Κατόπιν, ξεκινώντας με τον τύπο στο [β], αποδείξτε επαγωγικά ότι ισχύει

$$\begin{aligned}\zeta(x) = \tfrac{x+1}{x-1} - \mu_1 x - \mu_2 x(x+1) - \cdots - \mu_{n-1} x(x+1)\cdots(x+n-2) \\ - x(x+1)\cdots(x+n) \int_1^{+\infty} \tfrac{\phi_n(t)}{t^{x+n+1}} \, dt\end{aligned}$$

για κάθε $x > 1$ και κάθε n. Αποδείξτε ότι το τελευταίο γεν. ολοκλήρωμα συγκλίνει για κάθε $x > -n$. Συμβολίστε $\zeta_{-n}(x)$ τη συνάρτηση που ορίζεται από το δεξιό μέλος του τελευταίου τύπου και παρατηρήστε ότι η $\zeta_{-n}(x)$ ορίζεται στο $(-n, 1) \cup (1, +\infty)$ και ταυτίζεται με την $\zeta(x)$ στο $(1, +\infty)$. Επομένως, η συνάρτηση $\zeta(x)$ επεκτείνεται, μέσω του τύπου αυτού, και στο διάστημα $(-n, 1)$.

Τώρα, παρατηρήστε ότι, αν $n < m$, οι συναρτήσεις $\zeta_{-n}(x)$ και $\zeta_{-m}(x)$ ταυτίζονται στο $(-n, 1) \cup (1, +\infty)$, δηλαδή στο κοινό μέρος των πεδίων ορισμού τους. Να συμπεράνετε ότι ορίζεται μια συνάρτηση στο $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ η οποία, για κάθε n, ταυτίζεται με την $\zeta_{-n}(x)$ στο $(-n, 1) \cup (1, +\infty)$.

Η συνάρτηση που ορίζεται με αυτόν τον τρόπο ονομάζεται, επίσης, ζ-συνάρτηση του Riemann και συμβολίζεται $\zeta : (-\infty, 1) \cup (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ και είναι επέκταση της $\zeta : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$, η οποία είχε οριστεί στην άσκηση 10.1.26.[2]

12.3.8. [3] [α] Έστω $f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{αν } 0 \leq x \leq n \\ 0, & \text{αν } x > n \end{cases}$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει στην 0 ομοιόμορφα στο $[0, +\infty)$ αλλά ότι $\int_0^{+\infty} f_n(x) \, dx \not\to \int_0^{+\infty} 0 \, dx$.

[β] Έστω $f, f_n : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ για κάθε n και $g : [a, +\infty) \to [0, +\infty)$. Υποθέτουμε ότι ισχύει $|f_n(x)| \leq g(x)$ για κάθε $x \in [a, +\infty)$, ότι για κάθε $c > a$ η (f_n) συγκλίνει στην f ομοιόμορφα στο $[a, c]$ και ότι το $\int_a^{+\infty} g(x) \, dx$ συγκλίνει. Αποδείξτε ότι το $\int_a^{+\infty} f(x) \, dx$ συγκλίνει και ότι $\int_a^{+\infty} f_n(x) \, dx \to \int_a^{+\infty} f(x) \, dx$.

[1] Τα δύο αυτά γεν. ολοκληρώματα ονομάζονται **ολοκληρώματα Fresnel**.

[2] Συνέχεια στις ασκήσεις 12.4.2 και 12.5.4.

[3] Ομοιόμορφη σύγκλιση ακολουθίας συναρτήσεων και γενικευμένο ολοκλήρωμα.

12.3.9. Έστω ότι η $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[0,1]$, ότι $f(0)=0$ και ότι η f είναι παραγωγίσιμη στον 0. Αποδείξτε ότι το $\int_0^1 f(x)x^{-\frac{3}{2}}\,dx$ συγκλίνει απολύτως.

12.3.10. Για ποιές τιμές του p το $\int_0^{+\infty}\frac{\sin(\sqrt{x})}{x+p^2x^2}\,dx$ συγκλίνει είτε απολύτως είτε υπό συνθήκη;
Για ποιές τιμές των p,q τα $\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{x-1}\,dx$, $\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x^p)}{x^q}\,dx$ συγκλίνουν είτε απολύτως είτε υπό συνθήκη;

12.3.11. Αποδείξτε ότι το $\int_1^{+\infty}\frac{x-[x]-(1/2)}{x^p}\,dx$ συγκλίνει για κάθε $p>0$.

12.3.12. Με τους τύπους (6.40), αποδείξτε ότι:
(i) $\int_0^{\pi}\frac{\sin((n+(1/2))x)}{\sin(x/2)}\,dx=\pi$ για κάθε n,
(ii) $\int_0^{\pi}\frac{\sin(nx)}{\sin x}\,dx=\pi$ ή 0, αν ο n είναι περιττός ή άρτιος, αντιστοίχως,
(iii) $\int_0^{\pi}\big(\frac{\sin(nx)}{\sin x}\big)^2\,dx=n\pi$ για κάθε n.
Θεωρήστε την $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sin(x/2)}-\frac{2}{x}, & \text{αν } 0<x\leq\pi\\ 0, & \text{αν } x=0\end{cases}$ Αποδείξτε ότι η $f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[0,\pi]$. Από την άσκηση 7.3.22[α] συνεπάγεται $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi}f(x)\sin((n+\frac{1}{2})x)\,dx=0$. Αποδείξτε ότι $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi}\frac{2}{x}\sin((n+\frac{1}{2})x)\,dx=\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin((n+(1/2))x)}{\sin(x/2)}\,dx=\pi$. Συμπεράνατε ότι[4]

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}.$$

12.3.13. Έστω $f,g:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ συνεχείς στο $[a,+\infty)$ και $p,q>1$ με $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.
[α] Αν $\int_a^{+\infty}|f(x)|^p\,dx<+\infty$ και $\int_a^{+\infty}|g(x)|^q\,dx<+\infty$, αποδείξτε ότι το $\int_a^{+\infty}f(x)g(x)\,dx$ συγκλίνει απολύτως και ότι ισχύει η **ανισότητα του Hölder** για γενικευμένα ολοκληρώματα:

$$\Big|\int_a^{+\infty}f(x)g(x)\,dx\Big|\leq\Big(\int_a^{+\infty}|f(x)|^p\,dx\Big)^{1/p}\Big(\int_a^{+\infty}|g(x)|^q\,dx\Big)^{1/q}.$$

Ειδική περίπτωση είναι η **ανισότητα των Schwarz, Buniakowsky**:

$$\Big|\int_a^{+\infty}f(x)g(x)\,dx\Big|\leq\Big(\int_a^{+\infty}|f(x)|^2\,dx\Big)^{1/2}\Big(\int_a^{+\infty}|g(x)|^2\,dx\Big)^{1/2}.$$

Αποδείξτε ότι η ανισότητα του Hölder ισχύει ως ισότητα αν και μόνο αν υπάρχουν $s,t\geq 0$ όχι και οι δύο ίσοι με 0 ώστε να ισχύει $s|f(x)|^p=t|g(x)|^q$ για κάθε $x\in[a,+\infty)$ και είτε $f(x)g(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[a,+\infty)$ είτε $f(x)g(x)\leq 0$ για κάθε $x\in[a,+\infty)$.
[β] Αν $\int_a^{+\infty}|f(x)|^p dx<+\infty$, $\int_a^{+\infty}|g(x)|^p dx<+\infty$, αποδείξτε την **ανισότητα του Minkowski** για γενικευμένα ολοκληρώματα:

$$\Big(\int_a^{+\infty}|f(x)+g(x)|^p\,dx\Big)^{1/p}\leq\Big(\int_a^{+\infty}|f(x)|^p\,dx\Big)^{1/p}+\Big(\int_a^{+\infty}|g(x)|^p\,dx\Big)^{1/p}.$$

Αποδείξτε ότι η ανισότητα του Minkowski ισχύει ως ισότητα αν και μόνο αν υπάρχουν $s,t\geq 0$ όχι και οι δύο ίσοι με 0 ώστε να ισχύει $s|f(x)|=t|g(x)|$ για κάθε $x\in[a,+\infty)$ και είτε $f(x)g(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[a,+\infty)$ είτε $f(x)g(x)\leq 0$ για κάθε $x\in[a,+\infty)$.

12.3.14. Έστω $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ και $w:[a,+\infty)\to(0,+\infty)$ ώστε $\int_a^{+\infty}w(x)\,dx=1$ και ώστε να έχει τιμή το $\int_a^{+\infty}f(x)w(x)\,dx$. Συμβολίζουμε $E_w(f;a,+\infty)=\int_a^{+\infty}f(x)w(x)\,dx$.[5]
Αποδείξτε την εξής *γενικευμένη ανισότητα του Jensen*.[6] Έστω $f:[a,+\infty)\to(c,d)$ συνεχής στο $[a,+\infty)$ και $g:(c,d)\to\mathbb{R}$ κυρτή στο (c,d). Έστω, επίσης, $w:[a,+\infty)\to(0,+\infty)$ συνεχής

[4] Θα δούμε κι άλλην απόδειξη αυτής της ισότητας στο παράδειγμα 12.4.6.

[5] Το $E_w(f;a,+\infty)=\int_a^{+\infty}f(x)w(x)\,dx$ ονομάζεται **μέση τιμή** της f ως προς την w στο $[a,+\infty)$ και σ' αυτό το πλαίσιο, η συνάρτηση w ονομάζεται **συνάρτηση βάρους**.

[6] Δείτε τις ασκήσεις 6.4.19[α,β] και 8.3.24.

στο $[a,+\infty)$ ώστε $\int_a^{+\infty} w(x)\,dx = 1$. Αν το $E_w(f;a,+\infty) = \int_a^{+\infty} f(x)w(x)\,dx$ είναι αριθμός, αποδείξτε ότι $g\big(E_w(f;a,+\infty)\big) \leq E_w(g\circ f;a,+\infty)$ ή, ισοδύναμα,

$$g\big(\int_a^{+\infty} f(x)w(x)\,dx\big) \leq \int_a^{+\infty} g(f(x))w(x)\,dx.$$

Αν η g είναι κοίλη στο (c,d), τότε ισχύει η αντίστροφη της ανισότητας αυτής.

Αν η g είναι, επιπλέον, γνησίως κυρτή (κοίλη) στο (c,d), αποδείξτε ότι η ανισότητα Jensen ισχύει ως ισότητα αν και μόνο αν η f είναι σταθερή στο $[a,+\infty)$.

12.4 Ολοκληρώματα και γενικευμένα ολοκληρώματα με παράμετρο.

12.4.1 Ολοκληρώματα με παράμετρο.

ΟΡΙΣΜΟΣ 12.8. *Έστω διάστημα I και συνάρτηση δύο μεταβλητών $f : I\times[c,d] \to \mathbb{R}$. Αν για κάποιον $x\in I$ η $f(x,y)$, ως συνάρτηση του $y\in[c,d]$, είναι ολοκληρώσιμη στο $[c,d]$, τότε ορίζεται το ολοκλήρωμα $\int_c^d f(x,y)\,dy$. Αν αυτό ισχύει για κάθε $x\in I$, τότε ορίζεται η συνάρτηση $g : I\to\mathbb{R}$ με τύπο*

$$g(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy \qquad \text{για κάθε } x\in I.$$

Σ' αυτήν την περίπτωση λέμε ότι θεωρούμε το ολοκλήρωμα $\int_c^d f(x,y)\,dy$ με **παράμετρο** *$x\in I$. Ειδικότερα, αν η f είναι συνεχής στο $I\times[c,d]$, τότε για κάθε $x\in I$ η $f(x,y)$, ως συνάρτηση του $y\in[c,d]$, είναι συνεχής στο $[c,d]$ και, επομένως, ολοκληρώσιμη στο $[c,d]$.*

Στα θεωρήματα 12.3 και 12.4 θα δούμε ότι, με κατάλληλες υποθέσεις, η g είναι συνεχής ή παραγωγίσιμη, αντιστοίχως, στο I.

ΘΕΩΡΗΜΑ 12.3. *Έστω διάστημα I και $f : I\times[c,d]\to\mathbb{R}$. Αν η f είναι συνεχής στο $I\times[c,d]$, τότε η $g : I\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$ είναι συνεχής στο I.*

Απόδειξη. Έστω $\xi\in I$. Θεωρούμε διάστημα $[a,b]\subseteq I$ ώστε: αν ο ξ είναι δεξιό ή αριστερό άκρο του I, τότε ο ξ να είναι, ομοίως, δεξιό ή αριστερό άκρο του $[a,b]$ και, αν ο ξ είναι εσωτερικό σημείο του I, τότε ο ξ να είναι, ομοίως, εσωτερικό σημείο του $[a,b]$. Άρα για να αποδείξουμε ότι η g είναι συνεχής στον ξ αρκεί να αποδείξουμε ότι ο περιορισμός της g στο $[a,b]$ είναι συνεχής στον ξ.
Έστω $\epsilon>0$. Η f είναι συνεχής στο $[a,b]\times[c,d]$, οπότε υπάρχει $\delta>0$ ώστε να ισχύει

$$|f(x',y')-f(x'',y'')| < \tfrac{\epsilon}{d-c+1} \tag{12.4}$$

για κάθε $(x',y'),(x'',y'')\in[a,b]\times[c,d]$ με $|(x',y')-(x'',y'')|<\delta$.
Τότε για κάθε $x\in[a,b]$ με $|x-\xi|<\delta$ και κάθε $y\in[c,d]$ ισχύει $(x,y),(\xi,y)\in[a,b]\times[c,d]$ και $|(x,y)-(\xi,y)| = |x-\xi|<\delta$, οπότε η (12.4) συνεπάγεται

$$|f(x,y)-f(\xi,y)| < \tfrac{\epsilon}{d-c+1}. \tag{12.5}$$

Άρα για κάθε $x\in[a,b]$ με $|x-\xi|<\delta$, η (12.5) συνεπάγεται

$$|g(x)-g(\xi)| = \big|\int_c^d (f(x,y)-f(\xi,y))\,dy\big| \leq \tfrac{\epsilon}{d-c+1}(d-c) < \epsilon.$$

Άρα ο περιορισμός της g στο $[a,b]$ είναι συνεχής στον ξ. $\square$

ΟΡΙΣΜΟΣ 12.9. *Το όριο $\lim_{x\to\xi}\frac{f(x,\eta)-f(\xi,\eta)}{x-\xi}$, αν υπάρχει, ονομάζεται* **μερική παράγωγος** *ως προς x της f στο σημείο (ξ,η). Ομοίως, το όριο $\lim_{y\to\eta}\frac{f(\xi,y)-f(\xi,\eta)}{y-\eta}$, αν υπάρχει, ονομάζεται* **μερική παράγωγος** *ως προς y της f στο σημείο (ξ,η). Συμβολίζουμε*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,\eta) = \lim_{x\to\xi}\frac{f(x,\eta)-f(\xi,\eta)}{x-\xi}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(\xi,\eta) = \lim_{y\to\eta}\frac{f(\xi,y)-f(\xi,\eta)}{y-\eta}.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 12.4. *Έστω διάστημα I και $f : I \times [c,d] \to \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής στο $I \times [c,d]$ και η $\frac{\partial f}{\partial x}$ είναι, επίσης, συνεχής στο $I \times [c,d]$. Τότε η $g : I \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$ για κάθε $x \in I$ είναι παραγωγίσιμη στο I και ισχύει*

$$g'(x) = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy \qquad \text{για κάθε } x \in I.$$

Απόδειξη. Έστω $\xi \in I$. Όπως στην απόδειξη του θεωρήματος 12.3, θεωρούμε διάστημα $[a,b] \subseteq I$ που περιέχει τον ξ στο εσωτερικό του, αν ο ξ είναι στο εσωτερικό του I, ή ως άκρο του, αν ο ξ είναι άκρο του I. Επομένως, αρκεί να αποδείξουμε ότι ο περιορισμός της g στο $[a,b]$ έχει παράγωγο στον ξ ίση με $g'(\xi) = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(\xi,y)\,dy$.
Έστω $\epsilon > 0$. Η $\frac{\partial f}{\partial x}$ είναι συνεχής στο $[a,b] \times [c,d]$, οπότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x',y') - \frac{\partial f}{\partial x}(x'',y'')\right| < \frac{\epsilon}{d-c+1} \tag{12.6}$$

για κάθε $(x',y'), (x'',y'') \in [a,b] \times [c,d]$ με $|(x',y') - (x'',y'')| < \delta$.
Έστω $x \in [a,b]$, $y \in [c,d]$ και $|x-\xi| < \delta$. Τότε υπάρχει ζ ανάμεσα στους x, ξ ώστε

$$\frac{f(x,y)-f(\xi,y)}{x-\xi} = \frac{\partial f}{\partial x}(\zeta,y)$$

και, επειδή $|\zeta-\xi| \le |x-\xi| < \delta$, από την (12.6) συνεπάγεται

$$\left|\frac{f(x,y)-f(\xi,y)}{x-\xi} - \frac{\partial f}{\partial x}(\xi,y)\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial x}(\zeta,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(\xi,y)\right| < \frac{\epsilon}{d-c+1}. \tag{12.7}$$

Άρα για κάθε $x \in [a,b]$ με $|x-\xi| < \delta$, από την (12.7) συνεπάγεται ότι ισχύει

$$\left|\frac{g(x)-g(\xi)}{x-\xi} - \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(\xi,y)\,dy\right| = \left|\int_c^d \Big(\frac{f(x,y)-f(\xi,y)}{x-\xi} - \frac{\partial f}{\partial x}(\xi,y)\Big)\,dy\right| \le \frac{\epsilon}{d-c+1}(d-c) < \epsilon.$$

Άρα $\lim_{x\to\xi} \frac{g(x)-g(\xi)}{x-\xi} = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(\xi,y)\,dy$ και, επομένως, ο περιορισμός της g στο $[a,b]$ έχει παράγωγο στον ξ ίση με $g'(\xi) = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(\xi,y)\,dy$. $\square$

Παράδειγμα 12.4.1. Έστω $f(x) = \big(\int_0^x e^{-s^2}\,ds\big)^2$ και $g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(y^2+1)}}{y^2+1}\,dy$.
Τότε, πρώτον, ισχύει $f'(x) = 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-s^2}\,ds$ για κάθε x.
Η $\frac{e^{-x^2(y^2+1)}}{y^2+1}$ έχει μερική παράγωγο ως προς x την $-2xe^{-x^2(y^2+1)}$ και αυτή είναι συνεχής στο $\mathbb{R} \times [0,1]$, οπότε από το θεώρημα 12.4 συνεπάγεται

$$g'(x) = -2x\int_0^1 e^{-x^2(y^2+1)}\,dy = -2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{-x^2y^2}\,dy = -2e^{-x^2}\int_0^x e^{-s^2}\,ds = -f'(x)$$

για κάθε x. Άρα η $f+g$ είναι σταθερή συνάρτηση στο $\mathbb{R}$, οπότε ισχύει

$$f(x) + g(x) = f(0) + g(0) = 0 + \int_0^1 \frac{1}{y^2+1}\,dy = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4} \tag{12.8}$$

για κάθε x. Παρατηρούμε ότι ισχύει

$$0 \le g(x) \le \int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{1+y^2}\,dy = \frac{\pi}{4}e^{-x^2}$$

για κάθε x και, επομένως, $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$. Άρα η (12.8) συνεπάγεται

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{4} - \lim_{x\to+\infty} g(x) = \frac{\pi}{4}.$$

Άρα

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Τέλος, επειδή η e^{-x^2} είναι άρτια, εύκολα βλέπουμε ότι $\int_{-\infty}^0 e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ και καταλήγουμε, επομένως, στο πάρα πολύ σημαντικό **ολοκλήρωμα του Gauss**:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

12.4.2 Γενικευμένα ολοκληρώματα με παράμετρο.

ΟΡΙΣΜΟΣ 12.10. *Έστω διάστημα I και $f : I \times [c, +\infty) \to \mathbb{R}$. Έστω ότι για κάποιον $x \in I$ η $f(x, y)$, ως συνάρτηση του $y \in [c, +\infty)$, είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του $[c, +\infty)$ και ότι το $\int_c^{+\infty} f(x, y)\, dy$ συγκλίνει. Αν αυτό ισχύει για κάθε $x \in I$, τότε ορίζεται, και πάλι, συνάρτηση $g : I \to \mathbb{R}$ με τύπο*

$$g(x) = \int_c^{+\infty} f(x, y)\, dy \qquad \text{για κάθε } x \in I$$

*και λέμε ότι πρόκειται για **γεν. ολοκλήρωμα με παράμετρο** $x \in I$ και ότι το $\int_c^{+\infty} f(x, y)\, dy$ **συγκλίνει** στην $g(x)$ **κατά σημείο** στο διάστημα I.*

Θα δούμε κάτω από ποιές υποθέσεις η g είναι συνεχής ή παραγωγίσιμη στο διάστημα I.

Παράδειγμα 12.4.2. Θεωρούμε το $\int_0^{+\infty} e^{-xy}\, dy$ με παράμετρο x.
Για κάθε $y \geq 0$ είναι $\int_0^y e^{-xt}\, dt = \begin{cases} -(e^{-xy} - 1)/x, & \text{αν } x \neq 0 \\ y, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ οπότε, θεωρώντας το $\lim_{y \to +\infty}$, βρίσκουμε ότι $\int_0^{+\infty} e^{-xy}\, dy = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } x \leq 0 \\ 1/x, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$ Άρα το $\int_0^{+\infty} e^{-xy}\, dy$ συγκλίνει στη συνάρτηση $\frac{1}{x}$ κατά σημείο στο $(0, +\infty)$.
Βλέπουμε ότι η συνάρτηση $\int_0^{+\infty} e^{-xy}\, dy = \frac{1}{x}$ είναι συνεχής και, μάλιστα, παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$.

Παράδειγμα 12.4.3. Θεωρούμε το $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xy)}{y}\, dy$ με παράμετρο x.
Αν $x = 0$, το γεν. ολοκλήρωμα έχει τιμή 0.
Έστω, τώρα, ότι $x > 0$. Με αλλαγή μεταβλητής βρίσκουμε ότι $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xy)}{y}\, dy = \int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y}\, dy$.
Έχουμε ήδη αποδείξει ότι το $\int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y}\, dy$ συγκλίνει και έστω A η τιμή του. Άρα $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xy)}{y}\, dy = A$ για κάθε $x > 0$.
Αν $x < 0$, τότε $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xy)}{y}\, dy = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(-|x|y)}{y}\, dy = -\int_0^{+\infty} \frac{\sin(|x|y)}{y}\, dy = -A$.
Άρα το $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xy)}{y}\, dy$ συγκλίνει στη συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} A, & \text{αν } x > 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \\ -A, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$ κατά σημείο στο $\mathbb{R}$.
Έχουμε, επίσης, δει ότι $A > 0$ και, επομένως, η g δεν είναι συνεχής στον 0 ενώ είναι συνεχής και, μάλιστα, παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 12.11. *Λέμε ότι το $\int_c^{+\infty} f(x, y)\, dy$ **συγκλίνει** στη συνάρτηση $g(x)$ **ομοιόμορφα** στο διάστημα I αν*

$$\lim_{y \to +\infty} \sup \left\{ \left| g(x) - \int_c^y f(x, t)\, dt \right| \,\middle|\, x \in I \right\} = 0$$

ή, ισοδύναμα, αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $c_0 \in [c, +\infty)$ ώστε να ισχύει $\left| g(x) - \int_c^y f(x, t)\, dt \right| \leq \epsilon$ για κάθε $x \in I$ και κάθε $y \in (c_0, +\infty)$.

Για να τονίσουμε τη διαφορά ανάμεσα στην κατά σημείο σύγκλιση και στην ομοιόμορφη σύγκλιση γεν. ολοκληρώματος, καμιά φορά χρησιμοποιούμε τα σύμβολα

$$\int_c^{+\infty} f(x, y)\, dy \overset{\text{κ.σ.}}{=} g(x) \quad \text{στο } I \qquad\qquad \int_c^{+\infty} f(x, y)\, dy \overset{\text{ομ}}{=} g(x) \quad \text{στο } I$$

ακριβώς όπως και για τη σύγκλιση σειράς συναρτήσεων. Το πρώτο σύμβολο, με την κατά σημείο σύγκλιση, απλώς σημαίνει ότι ισχύει $\int_c^{+\infty} f(x, y)\, dy = g(x)$ για κάθε $x \in I$ ή, ισοδύναμα, ότι ισχύει $\lim_{y \to +\infty} \int_c^y f(x, t)\, dt = g(x)$ για κάθε $x \in I$.

Τώρα, για κάθε $y \in [c, +\infty)$ θεωρούμε τη συνάρτηση $g_y : I \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$g_y(x) = \int_c^y f(x, t)\, dt \qquad \text{για κάθε } x \in I.$$

Τότε μπορούμε να γράψουμε

$$\sup\left\{\left|g(x) - \int_c^y f(x,t)\,dt\right| \mid x \in I\right\} = \sup\{|g(x) - g_y(x)| \mid x \in I\} = \|g_y - g\|_I.$$

Άρα ο παραπάνω ορισμός αναδιατυπώνεται ως εξής: *το $\int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy$ συγκλίνει στη συνάρτηση $g(x)$ ομοιόμορφα στο διάστημα I αν*

$$\lim_{y\to+\infty} \|g_y - g\|_I = 0.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 12.13. *Αν το $\int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy$ συγκλίνει στη συνάρτηση $g(x)$ ομοιόμορφα στο διάστημα I, τότε συγκλίνει στην $g(x)$ και κατά σημείο στο I.*

Απόδειξη. Έστω $\xi \in I$. Τότε

$$\left|g(\xi) - \int_c^y f(\xi,t)\,dt\right| \le \sup\left\{\left|g(x) - \int_c^y f(x,t)\,dt\right| \mid x \in I\right\} = \|g_y - g\|_I,$$

οπότε $\lim_{y\to+\infty} \int_c^y f(\xi,t)\,dt = g(\xi)$.
Επειδή αυτό ισχύει για κάθε $\xi \in I$, συμπεραίνουμε ότι το $\int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy$ συγκλίνει στη συνάρτηση $g(x)$ κατά σημείο στο I. □

Παράδειγμα 12.4.4. Έχουμε ήδη αποδείξει ότι το $\int_0^{+\infty} e^{-xy}\,dy$ συγκλίνει στη συνάρτηση $\frac{1}{x}$ κατά σημείο στο $(0,+\infty)$. Δηλαδή

$$\int_0^{+\infty} e^{-xy}\,dy \overset{\text{κ.σ.}}{=} \frac{1}{x} \qquad \text{στο } (0,+\infty).$$

Θα δούμε, τώρα, ότι η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη στο $(0,+\infty)$.
Είναι $\left|\frac{1}{x} - \int_0^y e^{-xt}\,dt\right| = \frac{e^{-xy}}{x}$ για κάθε $x > 0$ και $y \ge 0$. Άρα

$$\sup\left\{\left|\tfrac{1}{x} - \int_0^y e^{-xt}\,dt\right| \mid x \in (0,+\infty)\right\} = \sup\{\tfrac{e^{-xy}}{x} \mid x > 0\} = +\infty$$

για κάθε $y \ge 0$. Άρα δεν ισχύει ότι $\lim_{y\to+\infty} \sup\left\{\left|\frac{1}{x} - \int_0^y e^{-xt}\,dt\right| \mid x \in (0,+\infty)\right\} = 0$, οπότε το $\int_0^{+\infty} e^{-xy}\,dy$ δεν συγκλίνει στη συνάρτηση $\frac{1}{x}$ ομοιόμορφα στο $(0,+\infty)$.
Από την άλλη μεριά, θεωρώντας οποιονδήποτε $a > 0$, θα αποδείξουμε ότι το $\int_0^{+\infty} e^{-xy}\,dy$ συγκλίνει στη συνάρτηση $\frac{1}{x}$ ομοιόμορφα στο $[a,+\infty)$. Δηλαδή,

$$\text{για κάθε } a > 0: \qquad \int_0^{+\infty} e^{-xy}\,dy \overset{\text{ομ}}{=} \frac{1}{x} \quad \text{στο } [a,+\infty).$$

Πράγματι,

$$\sup\left\{\left|\tfrac{1}{x} - \int_0^y e^{-xt}\,dt\right| \mid x \in [a,+\infty)\right\} = \sup\{\tfrac{e^{-xy}}{x} \mid x \ge a\} = \frac{e^{-ay}}{a}$$

για κάθε $y > 0$ και, επομένως,

$$\lim_{y\to+\infty} \sup\left\{\left|\tfrac{1}{x} - \int_0^y e^{-xt}\,dt\right| \mid x \in [a,+\infty)\right\} = \lim_{y\to+\infty} \frac{e^{-ay}}{a} = 0.$$

Έστω ακολουθία (y_n) στο $[c,+\infty)$ ώστε $y_n \to +\infty$. Έχουμε ήδη ορίσει τις συναρτήσεις $g_{y_n} : I \to \mathbb{R}$ με τύπους

$$g_{y_n}(x) = \int_c^{y_n} f(x,t)\,dt \qquad \text{για κάθε } x \in I \text{ και κάθε } n.$$

Παρατηρούμε ότι, σύμφωνα με τους ορισμούς, αν το $\int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy$ συγκλίνει στη συνάρτηση $g(x)$ κατά σημείο ή ομοιόμορφα στο I, τότε, αντιστοίχως, $g_{y_n} \overset{\text{κ.σ.}}{\to} g$ ή $g_{y_n} \overset{\text{ομ}}{\to} g$ στο I. Αυτή η παρατήρηση θα μας βοηθήσει να μελετήσουμε τις ιδιότητες συνέχειας και παραγωγισιμότητας της g, διότι θα μας επιτρέψει να χρησιμοποιήσουμε τα σχετικά αποτελέσματα για ακολουθίες συναρτήσεων.

ΘΕΩΡΗΜΑ 12.5. *Έστω διάστημα I και $f : I\times[c,+\infty) \to \mathbb{R}$. Αν η f είναι συνεχής στο $I\times[c,+\infty)$ και το $\int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy$ συγκλίνει στη συνάρτηση $g(x)$ ομοιόμορφα στο I, τότε η $g : I \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο I.*

Απόδειξη. Θεωρούμε ακολουθία (y_n) στο $[c,+\infty)$ ώστε $y_n \to +\infty$. Κατόπιν, ορίζουμε τις συναρτήσεις $g_{y_n} : I \to \mathbb{R}$ με τύπους $g_{y_n}(x) = \int_c^{y_n} f(x,t)\,dt$. Τότε $g_{y_n} \overset{\text{ομ}}{\to} g$ στο I. Η f είναι συνεχής στο $I\times[c,y_n]$, αφού αυτό είναι υποσύνολο του $I\times[c,+\infty)$, οπότε, σύμφωνα με το θεώρημα 12.3, για κάθε n, η g_{y_n} είναι συνεχής στο I. Άρα η g είναι συνεχής στο I. □

ΘΕΩΡΗΜΑ 12.6. *Έστω διάστημα I και $f : I\times[c,+\infty) \to \mathbb{R}$. Έστω ότι οι f, $\frac{\partial f}{\partial x}$ είναι συνεχείς στο $I\times[c,+\infty)$, ότι το $\int_c^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy$ συγκλίνει σε μια συνάρτηση $h(x)$ ομοιόμορφα στο I και ότι το $\int_c^{+\infty} f(\xi,y)\,dy$ συγκλίνει για τουλάχιστον έναν $\xi\in I$. Τότε το $\int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy$ συγκλίνει σε μια συνάρτηση $g(x)$ κατά σημείο στο I και ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I, η g είναι παραγωγίσιμη στο I και ισχύει $g'(x) = h(x)$ για κάθε $x\in I$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε οποιαδήποτε ακολουθία (y_n) στο $[c,+\infty)$ ώστε $y_n \to +\infty$ και ορίζουμε τις συναρτήσεις $g_{y_n} : I \to \mathbb{R}$ με τύπους $g_{y_n}(x) = \int_c^{y_n} f(x,t)\,dt$.
Σύμφωνα με το θεώρημα 12.4, ισχύει ${g_{y_n}}'(x) = \int_c^{y_n} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$ για κάθε $x\in I$. Λόγω της υπόθεσης, ισχύει ${g_{y_n}}' \overset{\text{ομ}}{\to} h$ στο I. Επίσης, λόγω της υπόθεσης, η ακολουθία $(g_{y_n}(\xi))$ συγκλίνει.
Από το θεώρημα 9.3 συνεπάγεται ότι η (g_{y_n}) συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση g κατά σημείο στο I και ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I, ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο I και ότι ισχύει $g'(x) = h(x)$ για κάθε $x\in I$. Ειδικότερα, ισχύει

$$g(x) = \lim_{n\to+\infty} g_{y_n}(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_c^{y_n} f(x,t)\,dt = \int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy$$

για κάθε $x\in I$. Άρα το $\int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy$ συγκλίνει στη συνάρτηση $g(x)$ κατά σημείο στο I.
Μένει να αποδείξουμε ότι το $\int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy$ συγκλίνει στη συνάρτηση $g(x)$ *ομοιόμορφα* σε κάθε $[a,b]\subseteq I$.
Ορίζουμε την $F : [c,+\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $F(y) = \|g_y - g\|_{[a,b]}$.
Σύμφωνα με τον ορισμό, το $\int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy$ συγκλίνει στη συνάρτηση $g(x)$ ομοιόμορφα στο $[a,b]$ αν και μόνο αν $\lim_{y\to+\infty} F(y) = 0$. Τώρα, θεωρούμε οποιαδήποτε ακολουθία (y_n) στο $[c,+\infty)$ ώστε $y_n \to +\infty$ και τις αντίστοιχες συναρτήσεις $g_{y_n}(x) = \int_c^{y_n} f(x,t)\,dt$ για κάθε $x\in I$. Επειδή η (g_{y_n}) συγκλίνει στην g ομοιόμορφα στο $[a,b]$, συνεπάγεται $F(y_n) = \|g_{y_n} - g\|_{[a,b]} \to 0$. Σύμφωνα με το θεώρημα 3.1, συνεπάγεται $\lim_{y\to+\infty} F(y) = 0$. □

Για την εφαρμογή των θεωρημάτων 12.5 και 12.6 χρειαζόμαστε ένα κριτήριο ομοιόμορφης σύγκλισης γενικευμένων ολοκληρωμάτων. Θα δούμε, τώρα, ένα σημαντικό κριτήριο ομοιόμορφης σύγκλισης γενικευμένων ολοκληρωμάτων, το οποίο είναι το ανάλογο του κριτηρίου Weierstrass για ομοιόμορφη σύγκλιση σειρών συναρτήσεων.

ΘΕΩΡΗΜΑ 12.7. *Έστω διάστημα I και $f : I\times[c,+\infty) \to \mathbb{R}$ και $F : [c,+\infty) \to \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $|f(x,y)| \leq F(y)$ για κάθε $y\in[c,+\infty)$, $x\in I$. Αν το $\int_c^{+\infty} F(y)\,dy$ συγκλίνει, τότε το $\int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάποια συνάρτηση στο I.*

Απόδειξη. Βάσει της πρότασης 12.12, για κάθε $x\in I$ το $\int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy$ συγκλίνει. Άρα ορίζεται η $g : I \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy$. Ορίζουμε, επίσης, και τις $g_y : I \to \mathbb{R}$ με τύπους $g_y(x) = \int_c^{y} f(x,t)\,dt$.
Μένει να δούμε αν το $\int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy$ συγκλίνει στη συνάρτηση $g(x)$ *ομοιόμορφα* στο I ή, ισοδύναμα, αν $\lim_{y\to+\infty} \|g_y - g\|_I = 0$.
Για κάθε $y\in[c,+\infty)$, $x\in I$ είναι

$$\begin{aligned}|g(x) - g_y(x)| &= \Big| \int_c^{+\infty} f(x,t)\,dt - \int_c^{y} f(x,t)\,dt\Big| = \Big| \int_y^{+\infty} f(x,t)\,dt\Big| \leq \int_y^{+\infty} |f(x,t)|\,dt \\ &\leq \int_y^{+\infty} F(t)\,dt,\end{aligned}$$

οπότε

$$\|g_y - g\|_I \le \int_y^{+\infty} F(t)\,dt = \int_c^{+\infty} F(t)\,dt - \int_c^y F(t)\,dt.$$

Επειδή $\lim_{y\to+\infty} \int_c^y F(t)\,dt = \int_c^{+\infty} F(t)\,dt$, συνεπάγεται $\lim_{y\to+\infty} \|g_y - g\|_I = 0$. □

Παράδειγμα 12.4.5. Θεωρούμε το $\int_0^{+\infty} e^{-y}\sin(xy)\,dy$ με παράμετρο x.
Ισχύει $|e^{-y}\sin(xy)| \le e^{-y}$ για κάθε $y \in [0,+\infty)$, $x \in \mathbb{R}$ και το $\int_0^{+\infty} e^{-y}\,dy$ συγκλίνει.
Άρα, σύμφωνα με το θεώρημα 12.7, το $\int_0^{+\infty} e^{-y}\sin(xy)\,dy$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $g(x)$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$. Δηλαδή,

$$\int_0^{+\infty} e^{-y}\sin(xy)\,dy \overset{\text{ομ}}{=} g(x) \qquad \text{στο } \mathbb{R}.$$

Από το θεώρημα 12.5 συνεπάγεται ότι η $g(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.
Ειδικώτερα, ισχύει $\int_0^{+\infty} e^{-y}\sin(xy)\,dy \overset{\text{κ.σ.}}{=} g(x)$ στο $\mathbb{R}$ ή, ισοδύναμα,

$$g(x) = \int_0^{+\infty} e^{-y}\sin(xy)\,dy \qquad \text{για κάθε } x.$$

Η συνάρτηση $e^{-y}\sin(xy)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}\times[0,+\infty)$. Άρα, σύμφωνα με το θεώρημα 12.5, η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.
Η μερική παράγωγος ως προς x της συνάρτησης $e^{-y}\sin(xy)$ είναι η $ye^{-y}\cos(xy)$, η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}\times[0,+\infty)$. Επίσης, ισχύει $|ye^{-y}\cos(xy)| \le ye^{-y}$ για κάθε $y \in [0,+\infty)$, $x \in \mathbb{R}$ και το $\int_0^{+\infty} ye^{-y}\,dy$ συγκλίνει.
Άρα το $\int_0^{+\infty} ye^{-y}\cos(xy)\,dy$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $h(x)$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$. Δηλαδή,

$$\int_0^{+\infty} ye^{-y}\cos(xy)\,dy \overset{\text{ομ}}{=} h(x) \qquad \text{στο } \mathbb{R}.$$

Και, επειδή το $\int_0^{+\infty} e^{-y}\sin(xy)\,dy$ συγκλίνει στην $g(x)$ κατά σημείο στο $\mathbb{R}$, από το θεώρημα 12.6 συνεπάγεται ότι η $g(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει

$$g'(x) = h(x) = \int_0^{+\infty} ye^{-y}\cos(xy)\,dy \qquad \text{για κάθε } x.$$

Παρεμπιπτόντως, μπορούμε να υπολογίσουμε το $g(x) = \int_0^{+\infty} e^{-y}\sin(xy)\,dy$ με ολοκληρώσεις κατά μέρη:

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} e^{-y}\sin(xy)\,dy &= -\int_0^{+\infty} \tfrac{d\,e^{-y}}{dy}\sin(xy)\,dy \\
&= -\lim_{y\to+\infty} e^{-y}\sin(xy) + x\int_0^{+\infty} e^{-y}\cos(xy)\,dy \\
&= -x\int_0^{+\infty} \tfrac{d\,e^{-y}}{dy}\cos(xy)\,dy \\
&= -x\lim_{y\to+\infty} e^{-y}\cos(xy) + x - x^2\int_0^{+\infty} e^{-y}\sin(xy)dy \\
&= x - x^2\int_0^{+\infty} e^{-y}\sin(xy)dy.
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε τα όρια $\lim_{y\to+\infty} e^{-y}\sin(xy) = \lim_{y\to+\infty} e^{-y}\cos(xy) = 0$, τα οποία ισχύουν διότι $|e^{-y}\sin(xy)| \le e^{-y}$ και $|e^{-y}\cos(xy)| \le e^{-y}$.
Άρα

$$\int_0^{+\infty} e^{-y}\sin(xy)\,dy = \tfrac{x}{1+x^2}.$$

Μπορούμε, επίσης, να χρησιμοποιήσουμε κατ' ευθείαν τους τύπους στο παράδειγμα 7.3.7.

Παράδειγμα 12.4.6. Θεωρούμε το $\int_0^{+\infty} e^{-xy}\frac{\sin y}{y}\,dy$ με παράμετρο $x > 0$.
Ισχύει $\left|e^{-xy}\frac{\sin y}{y}\right| \le e^{-xy}$ για κάθε $y \in (0,+\infty)$ και κάθε $x \in (0,+\infty)$ και το $\int_0^{+\infty} e^{-xy}\,dy$ συγκλίνει.
Άρα, σύμφωνα με την πρόταση 12.12, το $\int_0^{+\infty} e^{-xy}\frac{\sin y}{y}\,dy$ συγκλίνει για κάθε $x \in (0,+\infty)$ και ορίζει συνάρτηση

$$g(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xy}\frac{\sin y}{y}\,dy \qquad \text{για κάθε } x \in (0,+\infty).$$

Μπορούμε, δηλαδή, να πούμε ότι $\int_0^{+\infty} e^{-xy}\frac{\sin y}{y}\,dy \overset{\text{κ.σ.}}{=} g(x)$ στο $(0,+\infty)$.
Έστω $a > 0$. Παρατηρούμε ότι $\left|e^{-xy}\frac{\sin y}{y}\right| \le e^{-xy} \le e^{-ay}$ για κάθε $y \in (0,+\infty)$ και $x \in [a,+\infty)$. Το $\int_0^{+\infty} e^{-ay}\,dy$ συγκλίνει, οπότε, σύμφωνα με το θεώρημα 12.7, το $\int_0^{+\infty} e^{-xy}\frac{\sin y}{y}\,dy$ συγκλίνει στη συνάρτηση $g(x)$ ομοιόμορφα στο $[a,+\infty)$.
Με άλλα λόγια,

$$\text{για κάθε } a>0: \qquad \int_0^{+\infty} e^{-xy}\frac{\sin y}{y}\,dy \overset{\text{ομ}}{=} g(x) \quad \text{στο } [a,+\infty).$$

Η συνάρτηση $e^{-xy}\frac{\sin y}{y}$ είναι συνεχής στο $[a,+\infty)\times(0,+\infty)$. Άρα, σύμφωνα με το θεώρημα 12.5, η g είναι συνεχής στο $[a,+\infty)$. Επειδή αυτό ισχύει για κάθε $a > 0$, συνεπάγεται ότι η g είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$.
Η μερική παράγωγος ως προς x της συνάρτησης $e^{-xy}\frac{\sin y}{y}$ είναι η $-e^{-xy}\sin y$, η οποία είναι συνεχής στο $[a,+\infty)\times(0,+\infty)$. Επίσης, ισχύει $|-e^{-xy}\sin y| \le e^{-xy} \le e^{-ay}$ για κάθε $y \in (0,+\infty)$, $x \in [a,+\infty)$ και το $\int_0^{+\infty} e^{-ay}\,dy$ συγκλίνει. Άρα το $-\int_0^{+\infty} e^{-xy}\sin y\,dy$ συγκλίνει σε μια συνάρτηση $h(x)$ ομοιόμορφα στο $[a,+\infty)$.
Δηλαδή,

$$\text{για κάθε } a>0: \qquad -\int_0^{+\infty} e^{-xy}\sin y\,dy \overset{\text{ομ}}{=} h(x) \quad \text{στο } [a,+\infty).$$

Από το θεώρημα 12.6 συνεπάγεται ότι η $g(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $[a,+\infty)$ και ισχύει

$$g'(x) = h(x) = -\int_0^{+\infty} e^{-xy}\sin y\,dy \qquad \text{για κάθε } \ x \in [a,+\infty).$$

Μετά από αλλαγή μεταβλητής, $g'(x) = -\frac{1}{x}\int_0^{+\infty} e^{-y}\sin(\frac{y}{x})\,dy$, οπότε από το παράδειγμα 12.4.5 συνεπάγεται ότι ισχύει

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2+1} \qquad \text{για κάθε } \ x \in [a,+\infty).$$

Επειδή αυτό ισχύει για κάθε $a > 0$, συμπεραίνουμε ότι ισχύει

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2+1} = -\arctan' x \qquad \text{για κάθε } \ x > 0.$$

Άρα υπάρχει σταθερά c ώστε να ισχύει

$$g(x) = -\arctan x + c \qquad \text{για κάθε } \ x > 0.$$

Τώρα, είναι

$$|g(x)| \le \int_0^{+\infty} e^{-xy}\left|\frac{\sin y}{y}\right|dy \le \int_0^{-\infty} e^{-xy}\,dy = \frac{1}{x}$$

για κάθε $x > 0$, οπότε $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$. Άρα $0 = -\lim_{x\to+\infty}\arctan x + c$, οπότε $c = \frac{\pi}{2}$. Άρα ισχύει

$$\int_0^{+\infty} e^{-xy}\frac{\sin y}{y}\,dy = \frac{\pi}{2} - \arctan x \qquad \text{για κάθε } \ x > 0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(y) = \int_0^y \frac{\sin t}{t}\,dt$.
Σύμφωνα με το παράδειγμα 12.3.5, το $A = \lim_{y\to+\infty} F(y) = \int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt$ υπάρχει και είναι αριθμός. Θα αποδείξουμε ότι $\lim_{x\to0+}\int_0^{+\infty} e^{-xy}\frac{\sin y}{y}\,dy = A$.
Πρώτον, είναι σαφές ότι ισχύει $F'(y) = \frac{\sin y}{y}$ για κάθε $y > 0$.
Τώρα έχουμε

$$\begin{aligned} A - \int_0^{+\infty} e^{-xy}\frac{\sin y}{y}\,dy &= \int_0^{+\infty}(1-e^{-xy})\frac{\sin y}{y}\,dy = \int_0^{+\infty}(1-e^{-xy})\frac{d\,(F(y)-A)}{dy}\,dy \\ &= -x\int_0^{+\infty} e^{-xy}(F(y)-A)\,dy, \end{aligned}$$

οπότε

$$\left|A - \int_0^{+\infty} e^{-xy}\frac{\sin y}{y}\,dy\right| \le x\int_0^{+\infty} e^{-xy}|F(y)-A|\,dy.$$

Η συνάρτηση F είναι φραγμένη στο $[0,+\infty)$ διότι είναι συνεχής και το $\lim_{y\to+\infty} F(y) = A$ είναι αριθμός. Άρα υπάρχει $M \geq 0$ ώστε να ισχύει $|F(y) - A| \leq M$ για κάθε $y \geq 0$.
Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $y_0 > 0$ ώστε να ισχύει $|F(y) - A| < \frac{\epsilon}{4}$ για κάθε $y \geq y_0$. Επειδή $\lim_{x\to 0+} e^{-xy_0} = 1$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $1 - e^{-xy_0} < \frac{\epsilon}{4M+1}$ για κάθε $x \in (0,\delta)$. Τότε, για κάθε $x \in (0,\delta)$ ισχύει

$$\begin{aligned}\left|A - \int_0^{+\infty} e^{-xy} \tfrac{\sin y}{y}\, dy\right| &\leq x \int_0^{y_0} e^{-xy} |F(y) - A|\, dy + x \int_{y_0}^{+\infty} e^{-xy} |F(y) - A|\, dy \\ &\leq Mx \int_0^{y_0} e^{-xy}\, dy + \tfrac{\epsilon}{4} x \int_{y_0}^{+\infty} e^{-xy}\, dy \\ &= M(1 - e^{-xy_0}) + \tfrac{\epsilon}{4} e^{-xy_0} \leq \tfrac{\epsilon}{4} + \tfrac{\epsilon}{4} < \epsilon\end{aligned}$$

και, επομένως, αποδείξαμε ότι $\lim_{x\to 0+} \int_0^{+\infty} e^{-xy} \frac{\sin y}{y}\, dy = A$.
Άρα $A = \lim_{x\to 0+}(\frac{\pi}{2} - \arctan x) = \frac{\pi}{2}$, οπότε

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y}\, dy = \frac{\pi}{2}.$$ [7]

Ασκήσεις.

12.4.1. Θεωρήστε το $\int_0^{+\infty} e^{-y^2} \cos(2xy)\, dy$ με παράμετρο x.
Αποδείξτε ότι το γεν. ολοκλήρωμα συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $g(x)$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$. Δηλαδή, $\int_0^{+\infty} e^{-y^2} \cos(2xy)\, dy \overset{\text{ομ}}{=} g(x)$ στο $\mathbb{R}$.
Αποδείξτε ότι η $g(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ότι ισχύει $g'(x) + 2xg(x) = 0$ για κάθε x. Κατόπιν, αποδείξτε ότι ισχύει $g(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-x^2}$ για κάθε x.

12.4.2. Συνέχεια της άσκησης 12.3.7.
Αποδείξτε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το $\int_1^{+\infty} \frac{\phi_n(t)}{t^{x+n+1}}\, dt$ με παράμετρο x συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση κατά σημείο στο $(-n,+\infty)$ και, για κάθε $a > -n$, ομοιόμορφα στο διάστημα $[a,+\infty)$.
Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $\zeta(x)$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $(-\infty,1) \cup (1,+\infty)$ και ότι η $(x-1)\zeta(x)$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $(-\infty,+\infty)$.

12.4.3. Με βάση το $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$, αποδείξτε ότι $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x \cos x}{x}\, dx = \frac{\pi}{4}$, $\int_0^{+\infty} \frac{(\sin x)^2}{x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}$, $\int_0^{+\infty} \frac{(\sin x)^4}{x^2}\, dx = \frac{\pi}{4}$, $\int_0^{+\infty} \frac{(\sin x)^4}{x^4}\, dx = \frac{\pi}{3}$.

12.4.4. Θεωρήστε το $\int_0^{+\infty} \frac{1}{y^2+1} \frac{\sin(xy)}{y}\, dy$ με παράμετρο $x \geq 0$.
Αποδείξτε ότι το γεν. ολοκλήρωμα συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $g(x)$ κατά σημείο στο $[0,+\infty)$. Δηλαδή, $\int_0^{+\infty} \frac{1}{y^2+1} \frac{\sin(xy)}{y}\, dy \overset{\text{κ.σ.}}{=} g(x)$ στο $[0,+\infty)$.
Αποδείξτε ότι, για κάθε $a > 0$, το γεν. ολοκλήρωμα συγκλίνει στην $g(x)$ ομοιόμορφα στο $[0,a]$. Δηλαδή, $\int_0^{+\infty} \frac{1}{y^2+1} \frac{\sin(xy)}{y}\, dy \overset{\text{ομ}}{=} g(x)$ στο $[0,a]$ για κάθε $a > 0$.
Αποδείξτε ότι η $g(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$.

12.4.5. Έστω $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ φραγμένη στο $[0,+\infty)$ με $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$. Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-y} f(xy)\, dy = l$.

12.4.6. [α] Θεωρήστε το $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2y^2}\, dy$ με παράμετρο x.
Αποδείξτε ότι το γεν. ολοκλήρωμα συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $g(x)$ κατά σημείο, αλλά όχι ομοιόμορφα, στο $\mathbb{R}$.
Αποδείξτε ότι, για κάθε $a > 0$, το γεν. ολοκλήρωμα συγκλίνει στην $g(x)$ ομοιόμορφα στο $(-\infty,a]$ και στο $[a,+\infty)$.
Ποιά είναι η $g(x)$;
[β] Επαναλάβατε το [α] στο σύνολο $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ με το $\int_0^{+\infty} e^{-x^2y} \cos y\, dy$.

[7] Ένας ακόμη υπολογισμός αυτού του ολοκληρώματος είναι στην άσκηση 12.3.12. Παρόμοιοι υπολογισμοί, αλλά με άλλη αφορμή, υπάρχουν στην άσκηση 12.4.5. Όμως, η βαθύτερη “αρχή” πίσω από αυτούς τους υπολογισμούς εκτίθεται στην άσκηση 12.4.12 και δεν είναι άλλη από τις ιδέες των κριτηρίων του Dirichlet και του Abel.

12.4.7. Αποδείξτε ότι το $\int_2^{+\infty} \frac{\cos y}{y+\sin x}\, dy$ με παράμετρο x συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.
Αποδείξτε ότι το $\int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{x+y}\, dy$ με παράμετρο $x \geq 0$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο $[0, +\infty)$.
Αποδείξτε ότι το $\int_0^{+\infty} e^{-xy} \sin \frac{y}{x}\, dy$ με παράμετρο $x > 0$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο $(0, +\infty)$.

12.4.8. [α] Έστω η $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{y^2}, & \text{αν } 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ -\frac{1}{x^2}, & \text{αν } 0 \leq y < x \leq 1 \end{cases}$ Αποδείξτε ότι $\int_0^1 \big(\int_0^1 f(x,y)\, dy \big)\, dx \neq \int_0^1 \big(\int_0^1 f(x,y)\, dx \big)\, dy$.
[β] Έστω $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b] \times [c,d]$. Γνωρίζουμε ότι η $\int_c^d f(x,y)\, dy$ είναι, ως συνάρτηση του x, συνεχής στο $[a,b]$. Άρα ορίζεται το $\int_a^b \big(\int_c^d f(x,y)\, dy \big)\, dx$. “Συμμετρικά”, η $\int_a^b f(x,y)\, dx$ είναι, ως συνάρτηση του y, συνεχής στο $[c,d]$. Άρα ορίζεται και το $\int_c^d \big(\int_a^b f(x,y)\, dx \big)\, dy$. Αποδείξτε ότι

$$\int_a^b \Big(\int_c^d f(x,y)\, dy \Big)\, dx = \int_c^d \Big(\int_a^b f(x,y)\, dx \Big)\, dy.$$

[γ] Έστω $f : [a,b] \times [c,+\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b] \times [c,+\infty)$ και έστω ότι το $\int_c^{+\infty} f(x,y)\, dy$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[a,b]$. Γνωρίζουμε ότι η $\int_c^{+\infty} f(x,y)\, dy$ είναι, ως συνάρτηση του x, συνεχής στο $[a,b]$. Άρα ορίζεται το $\int_a^b \big(\int_c^{+\infty} f(x,y)\, dy \big)\, dx$. “Συμμετρικά”, η $\int_a^b f(x,y)\, dx$ είναι, ως συνάρτηση του y, συνεχής στο $[c,+\infty)$. Αποδείξτε ότι το $\int_c^{+\infty} \big(\int_a^b f(x,y)\, dx \big)\, dy$ συγκλίνει και ότι

$$\int_a^b \Big(\int_c^{+\infty} f(x,y)\, dy \Big)\, dx = \int_c^{+\infty} \Big(\int_a^b f(x,y)\, dx \Big)\, dy.$$

[δ] Αν $0 < a < b$, αποδείξτε ότι $\int_a^b \big(\int_0^{+\infty} e^{-xy}\, dy \big)\, dx = \int_0^{+\infty} \big(\int_a^b e^{-xy}\, dx \big)\, dy$.
Υπολογίστε το $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ay} - e^{-by}}{y}\, dy$.
[ε] Αποδείξτε ότι $\int_0^1 \big(\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2+y^2}\, dy \big)\, dx = \int_0^{+\infty} \big(\int_0^1 \frac{1}{1+x^2+y^2}\, dx \big)\, dy$.
Αποδείξτε ότι $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\arctan(\sin t)}{\sin t}\, dt = \frac{\pi}{2} \log(1 + \sqrt{2})$.

12.4.9. [α] Αποδείξτε ότι το $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \sin y)\, dy$ με παράμετρο x συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $g(x)$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$, ότι η $g(x)$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ότι είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης[8] $xz'' + z' + xz = 0$ στο $\mathbb{R}$.
[β] Αποδείξτε ότι το $\int_0^{+\infty} e^{-xy} \frac{1}{y+1}\, dy$ με παράμετρο x συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $g(x)$ κατά σημείο στο $(0,+\infty)$ και ομοιόμορφα στο $[a,+\infty)$ για κάθε $a > 0$. Τέλος, αποδείξτε ότι η $g(x)$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ότι είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης $-xz' + xz = 1$ στο $(0,+\infty)$.

12.4.10. Θεωρήστε το $\int_0^{+\infty} e^{-y^2} \cosh(xy)\, dy$ με παράμετρο x.
Αποδείξτε ότι το γεν. ολοκλήρωμα συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $g(x)$ κατά σημείο στο $\mathbb{R}$ και, για κάθε $a > 0$, ομοιόμορφα στο $[-a, a]$.
Αποδείξτε ότι η g είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ότι ισχύει $2g'(x) - xg(x) = 0$ για κάθε x.
Βρείτε τον τύπο της $g(x)$.

12.4.11. Θεωρήστε το $\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt) \arctan(yt)}{t^2}\, dt$ με δύο παραμέτρους $x, y > 0$.
Αποδείξτε ότι το γεν. ολοκλήρωμα συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $g(x,y)$ κατά σημείο στο $(0,+\infty) \times (0,+\infty)$.

[8] Αυτή η διαφορική εξίσωση ονομάζεται **διαφορική εξίσωση του Bessel** τάξης 0.

Αποδείξτε ότι η $g(x,y)$ είναι παραγωγίσιμη και ως προς τις δύο μεταβλητές και ότι η μικτή παράγωγος της g είναι $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2t^2)(1+y^2t^2)}\,dt = \frac{1}{x+y}$ για κάθε $x,y>0$.
Αποδείξτε ότι ισχύει $g(x,y) = (x+y)\log(x+y) - x\log x - y\log y$ για κάθε $x,y>0$.

12.4.12. Έστω διάστημα I, $f,g : I\times[c,+\infty)\to\mathbb{R}$ και $F(x,y) = \int_c^y f(x,t)\,dt$ για κάθε $x\in I$ και $y\in[c,+\infty)$ και έστω ότι οι f, $\frac{\partial g}{\partial y}$ είναι συνεχείς στο $I\times[c,+\infty)$.
[α] Αν για κάθε $x\in I$ η $g(x,y)$ είναι, ως συνάρτηση του y, φθίνουσα στο $[c,+\infty)$, αν ισχύει $\lim_{y\to+\infty} g(x,y) = 0$ ομοιόμορφα στο I και αν η F είναι φραγμένη στο $I\times[c,+\infty)$, αποδείξτε ότι το $\int_c^{+\infty} f(x,y)g(x,y)\,dy$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο I.
[β] Αν για κάθε $x\in I$ η $g(x,y)$ είναι, ως συνάρτηση του y, φθίνουσα στο $[c,+\infty)$, αν η $g(x,y)$ είναι κάτω φραγμένη στο $I\times[c,+\infty)$ και αν το $\int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο I, αποδείξτε ότι το $\int_c^{+\infty} f(x,y)g(x,y)\,dy$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο I.

12.4.13. Για την απόδειξη του $\int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y}\,dy = \frac{\pi}{2}$ χρειαστήκαμε το $\lim_{x\to 0+}\int_0^{+\infty} e^{-xy}\frac{\sin y}{y}\,dy = A$, όπου $A = \int_0^{+\infty}\frac{\sin y}{y}\,dy$. Αποδείξτε το όριο αυτό χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα της άσκησης 12.4.12[β] και τις $f(x,y) = \frac{\sin y}{y}$ και $g(x,y) = e^{-xy}$ στο $[0,+\infty)\times[0,+\infty)$.

12.4.14. Μερικά ακόμη συμπεράσματα για τις συναρτήσεις Hermite στην άσκηση 5.5.22.
Θεωρούμε, προσωρινά, τις συναρτήσεις $\phi_n(x) = H_n(x)e^{-\frac{x^2}{2}} = (2^n n!\sqrt{\pi})^{\frac{1}{2}}\psi_n(x)$.
Βάσει της άσκησης 5.5.22 αποδείξτε ότι ισχύει

$$(i)\quad \phi_{n+1}(x) = x\phi_n(x) - {\phi_n}'(x), \qquad (ii)\quad {\phi_n}''(x) = (x^2-2n-2)\phi_n(x)$$

για κάθε x και κάθε $n\in\mathbb{Z}$, $n\geq 0$.
Από την (ii) αποδείξτε ότι $\frac{d}{dx}\big(\phi_m(x){\phi_n}'(x) - {\phi_m}'(x)\phi_n(x)\big) = 2(m-n)\phi_m(x)\phi_n(x)$ για κάθε x και κάθε $m,n\in\mathbb{Z}$, $m,n\geq 0$. Να συμπεράνετε ότι $2(m-n)\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_m(x)\phi_n(x)\,dx = 0$ για κάθε $m,n\in\mathbb{Z}$, $m,n\geq 0$ και, επομένως, ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_m(x)\psi_n(x)\,dx = 0, \qquad \text{αν}\ \ m,n\in\mathbb{Z},\ \ m,n\geq 0,\ \ m\neq n.$$

Με ολοκλήρωση κατά μέρη, αποδείξτε ότι $2\int_{-\infty}^{+\infty} x\phi_n(x){\phi_n}'(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{+\infty}(\phi_n(x))^2\,dx$ για κάθε $n\in\mathbb{Z}$, $n\geq 0$.
Από τα προηγούμενα αποδείξτε ότι $\int_{-\infty}^{+\infty}(\phi_{n+1}(x))^2\,dx = 2(n+1)\int_{-\infty}^{+\infty}(\phi_n(x))^2\,dx$ για κάθε $n\in\mathbb{Z}$, $n\geq 0$ και συμπεράνατε ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(\psi_{n+1}(x))^2\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty}(\psi_n(x))^2\,dx$$

για κάθε $n\in\mathbb{Z}$, $n\geq 0$. Τέλος, χρησιμοποιώντας το ολοκλήρωμα του Gauss, αποδείξτε ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(\psi_n(x))^2\,dx = 1, \qquad \text{αν}\ \ n\in\mathbb{Z},\ \ n\geq 0.$$

12.5 Η συνάρτηση Γ.

Θεωρούμε το γενικευμένο ολοκλήρωμα[9]

$$\int_0^{+\infty} y^{x-1}e^{-y}\,dy$$

με παράμετρο $x\in(0,+\infty)$.

[9]Το ολοκλήρωμα αυτό ονομάζεται **δεύτερο ολοκλήρωμα του Euler**. Για το πρώτο ολοκλήρωμα του Euler δείτε την άσκηση 12.5.8.

Αν $x > 1$, η $y^{x-1}e^{-y}$ ως συνάρτηση του y είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$. Στο παράδειγμα 12.2.3 αποδείξαμε ότι το $\int_1^{+\infty} y^{x-1}e^{-y}\, dy$ συγκλίνει. Επίσης, το $\int_0^1 y^{x-1}e^{-y}\, dy$ υφίσταται ως απλό ολοκλήρωμα. Επομένως, το $\int_0^{+\infty} y^{x-1}e^{-y}\, dy$ συγκλίνει και η τιμή του είναι το άθροισμα των δύο προηγουμένων.

Αν $x \leq 1$, η $y^{x-1}e^{-y}$ ως συνάρτηση του y είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$. Το $\int_1^{+\infty} y^{x-1}e^{-y}\, dy$ συγκλίνει και πάλι. Το $\int_0^1 y^{x-1}e^{-y}\, dy$ είναι, τώρα, κι αυτό γεν. ολοκλήρωμα (μη-αρνητικής συνάρτησης) και βλέπουμε ότι

$$\int_0^1 y^{x-1}e^{-y}\, dy \leq \int_0^1 y^{x-1}\, dy < +\infty$$

όταν $0 < x \leq 1$. Άρα, αν $0 < x \leq 1$, το $\int_0^{+\infty} y^{x-1}e^{-y}\, dy$ συγκλίνει και η τιμή του είναι το άθροισμα των δύο προηγουμένων.
Άρα, σε κάθε περίπτωση, αν $x > 0$, το $\int_0^{+\infty} y^{x-1}e^{-y}\, dy$ συγκλίνει.

Θεωρούμε, επίσης, για κάθε n, το

$$\int_0^{+\infty} y^{x-1}(\log y)^n e^{-y}\, dy.$$

Τώρα, η $y^{x-1}(\log y)^n e^{-y}$, ως συνάρτηση του y, είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ και χωρίζουμε το γεν. ολοκλήρωμα σε δύο γεν. ολοκληρώματα. Αφ' ενός είναι

$$\int_1^{+\infty} y^{x-1}(\log y)^n e^{-y}\, dy \leq \int_1^{+\infty} y^{x+n-1}e^{-y}\, dy < +\infty.$$

Αφ' ετέρου,

$$\int_0^1 y^{x-1}|\log y|^n e^{-y}\, dy \leq \int_0^1 y^{x-1}|\log y|^n\, dy = \int_0^{+\infty} t^n e^{-xt}\, dt = \tfrac{1}{x^{n+1}} \int_0^{+\infty} s^n e^{-s}\, ds < +\infty$$

όταν $x > 0$. Άρα τα $\int_1^{+\infty} y^{x-1}(\log y)^n e^{-y}\, dy$ και $\int_0^1 y^{x-1}(\log y)^n e^{-y}\, dy$ συγκλίνουν όταν $x > 0$, οπότε και το $\int_0^{+\infty} y^{x-1}(\log y)^n e^{-y}\, dy$ συγκλίνει.

ΛΗΜΜΑ 12.2. *Τα $\int_0^{+\infty} y^{x-1}e^{-y}\, dy$ και $\int_0^{+\infty} y^{x-1}(\log y)^n e^{-y}\, dy$ συγκλίνουν για κάθε $x > 0$ και $n \in \mathbb{N}$. Επίσης, τα γενικευμένα αυτά ολοκληρώματα συγκλίνουν σε αντίστοιχες συναρτήσεις ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα $[a, b] \subseteq (0, +\infty)$.*

Απόδειξη. Είδαμε προηγουμένως ότι τα δύο γεν. ολοκληρώματα συγκλίνουν για κάθε $x > 0$. Για συντομία, εδώ θα θεωρήσουμε το πρώτο γεν. ολοκλήρωμα ως ειδική περίπτωση του δεύτερου με $n = 0$. Έχουμε, λοιπόν, ότι το $\int_0^{+\infty} y^{x-1}(\log y)^n e^{-y}\, dy$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $g(x)$ κατά σημείο στο $(0, +\infty)$. Δηλαδή,

$$\int_0^{+\infty} y^{x-1}(\log y)^n e^{-y}\, dy \overset{\text{κ.σ.}}{=} g(x) \qquad \text{στο } (0, +\infty). \tag{12.9}$$

Θεωρούμε a, b ώστε $0 < a \leq b < +\infty$ και $x \in [a, b]$.
Αν $y \geq 1$, τότε

$$|y^{x-1}(\log y)^n e^{-y}| \leq y^{n+x-1}e^{-y} \leq y^{n+b-1}e^{-y}$$

και, επειδή $\int_1^{+\infty} y^{n+b-1}e^{-y}\, dy < +\infty$, το $\int_1^{+\infty} y^{x-1}(\log y)^n e^{-y}\, dy$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $h(x)$ ομοιόμορφα στο $[a, b]$. Δηλαδή,

$$\int_1^{+\infty} y^{x-1}(\log y)^n e^{-y}\, dy \overset{\text{ομ}}{=} h(x) \qquad \text{στο } [a, b]. \tag{12.10}$$

Αν $0 < y \leq 1$, τότε

$$|y^{x-1}(\log y)^n e^{-y}| \leq y^{a-1}|\log y|^n$$

και, επειδή $\int_0^1 y^{a-1}|\log y|^n\, dy < +\infty$, το $\int_0^1 y^{x-1}(\log y)^n e^{-y}\, dy$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $q(x)$ ομοιόμορφα στο $[a, b]$. Δηλαδή,

$$\int_0^1 y^{x-1}(\log y)^n e^{-y}\, dy \overset{\text{ομ}}{=} q(x) \qquad \text{στο } [a, b]. \tag{12.11}$$

Από τις (12.10) και (12.11) συνεπάγεται ότι

$$\int_0^{+\infty} y^{x-1}(\log y)^n e^{-y}\, dy \overset{\text{ομ}}{=} q(x) + h(x) \qquad \text{στο } [a,b].$$

Άρα $\int_0^{+\infty} y^{x-1}(\log y)^n e^{-y}\, dy \overset{\text{κ.σ.}}{=} q(x) + h(x)$ στο $[a,b]$, οπότε η (12.9) συνεπάγεται $q(x) + h(x) = g(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$ και, επομένως,

$$\int_0^{+\infty} y^{x-1}(\log y)^n e^{-y}\, dy \overset{\text{ομ}}{=} g(x) \qquad \text{στο } [a,b].$$

□

ΟΡΙΣΜΟΣ 12.12. *Συμβολίζουμε $\Gamma : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ και ονομάζουμε* **συνάρτηση** Γ *την συνάρτηση η οποία ορίζεται από το $\int_0^{+\infty} y^{x-1} e^{-y}\, dy$. Δηλαδή,*

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} y^{x-1} e^{-y}\, dy \qquad \text{για κάθε } x \in (0,+\infty).$$

Η συνάρτηση Γ είναι εξαιρετικά σημαντική.

ΠΡΟΤΑΣΗ 12.14. *Η Γ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και*

$$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} y^{x-1}(\log y)^n e^{-y}\, dy \qquad \text{για κάθε } x \in (0,+\infty),\ n \in \mathbb{N}.$$

Απόδειξη. Έστω $\xi \in (0,+\infty)$. Θεωρούμε a, b ώστε $0 < a < \xi < b < +\infty$ και παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $y^{x-1}e^{-y}$ και η μερική παράγωγός της ως προς x, δηλαδή η $y^{x-1}(\log y)e^{-y}$, είναι συνεχείς στο $[a,b] \times (0,+\infty)$.
Σύμφωνα με το λήμμα 12.2, τα $\int_0^{+\infty} y^{x-1}e^{-y}\, dy$ και $\int_0^{+\infty} y^{x-1}(\log y)e^{-y}\, dy$ συγκλίνουν σε κάποιες συναρτήσεις - το πρώτο στην $\Gamma(x)$ - ομοιόμορφα στο $[a,b]$. Άρα από το θεώρημα 12.6 συνεπάγεται ότι η Γ είναι παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ και, ειδικώτερα,

$$\Gamma'(\xi) = \int_0^{+\infty} y^{\xi-1}(\log y)e^{-y}\, dy.$$

Επαναλαμβάνουμε με τη συνάρτηση $y^{x-1}(\log y)e^{-y}$ και τη μερική της παράγωγο ως προς x, δηλαδή την $y^{x-1}(\log y)^2 e^{-y}$, οι οποίες είναι συνεχείς στο $[a,b] \times (0,+\infty)$. Σύμφωνα με το λήμμα 12.2, τα $\int_0^{+\infty} y^{x-1}(\log y)e^{-y}\, dy$ και $\int_0^{+\infty} y^{x-1}(\log y)^2 e^{-y}\, dy$ συγκλίνουν σε κάποιες συναρτήσεις ομοιόμορφα στο $[a,b]$, οπότε από το θεώρημα 12.6 συνεπάγεται ότι

$$\Gamma''(\xi) = \int_0^{+\infty} y^{\xi-1}(\log y)^2 e^{-y}\, dy.$$

Η επαγωγική γενίκευση για παραγώγους ανώτερης τάξης είναι προφανής. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 12.15. *Η συνάρτηση Γ έχει τις παρακάτω ιδιότητες:*
(i) *Ισχύει $\Gamma(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$.*
(ii) $\lim_{x\to+\infty} \Gamma(x) = +\infty$ *και* $\lim_{x\to 0+} \Gamma(x) = +\infty$.
(iii) *Ισχύει $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$.*
(iv) $\Gamma(1) = 1$ *και ισχύει $\Gamma(n) = (n-1)!$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*
(v) *Η $\log\Gamma$ είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$.*

Απόδειξη. (i) Επειδή ισχύει $y^{x-1}e^{-y} > 0$ για κάθε $y > 0$, συνεπάγεται

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} y^{x-1}e^{-y}\, dy \ge 0.$$

Για τη γνήσια ανισότητα, παρατηρούμε ότι η τιμή της $y^{x-1}e^{-y}$ για $y = 1$ είναι $\frac{1}{e} > 0$, οπότε, λόγω συνέχειας, υπάρχουν c, d ώστε $0 < c < 1 < d < +\infty$ και ώστε να ισχύει $y^{x-1}e^{-y} \ge \frac{1}{2e}$ για κάθε $y \in [c,d]$. Συνεπάγεται

$$\Gamma(x) \ge \int_c^d \tfrac{1}{2e}\, dy = \tfrac{d-c}{2e} > 0.$$

(ii) Για κάθε $x > 0$ ισχύει

$$\Gamma(x) \geq \int_0^1 y^{x-1}e^{-y}\,dy \geq e^{-1}\int_0^1 y^{x-1}\,dy = \tfrac{1}{ex}.$$

Άρα $\lim_{x\to 0+}\Gamma(x) = +\infty$.
Επίσης, για κάθε $x \geq 1$ ισχύει

$$\Gamma(x) \geq \int_2^{+\infty} y^{x-1}e^{-y}\,dy \geq 2^{x-1}\int_2^{+\infty} e^{-y}\,dy = 2^{x-1}e^{-2}.$$

Άρα $\lim_{x\to +\infty}\Gamma(x) = +\infty$.
(iii) Με ολοκλήρωση κατά μέρη, έχουμε για κάθε $x \in (0,+\infty)$ ότι

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} y^x e^{-y}\,dy = x\int_0^{+\infty} y^{x-1}e^{-y}\,dy = x\Gamma(x).$$

(iv) $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-y}\,dy = 1$. Από την $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, με την αρχή της επαγωγής, συμπεραίνουμε ότι $\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2\cdot 1 = 2!$, $\Gamma(4) = 3\Gamma(3) = 3\cdot 2! = 3!$ και, γενικότερα, ότι $\Gamma(n) = (n-1)!$.
(v) Για κάθε $x \in (0,+\infty)$ και κάθε t έχουμε

$$t^2\Gamma''(x) + 2t\Gamma'(x) + \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} y^{x-1}(t\log y + 1)^2 e^{-y}\,dy \geq 0.$$

Άρα ισχύει $\Gamma''(x)\Gamma(x) \geq (\Gamma'(x))^2$ και, επομένως, $(\log\Gamma)''(x) \geq 0$ για κάθε $x > 0$. □

Παρατηρήστε ότι η συνάρτηση Γ είναι ορισμένη σε ολόκληρο το διάστημα $(0,+\infty)$ και στα σημεία του $\mathbb{N}$ ταυτίζεται με τη συνάρτηση *παραγοντικό*:

$$\Gamma(n) = (n-1)! \qquad \text{για κάθε } \ n \in \mathbb{N}.$$

Στις επόμενες ασκήσεις μελετώνται διάφορες σημαντικές ιδιότητες της συνάρτησης Γ. Για παράδειγμα, στην άσκηση 12.5.9 αποδεικνύεται ένας τύπος για τον όγκο μιας μπάλας ακτίνας 1 στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^d$ συναρτήσει της Γ.

Ασκήσεις.

12.5.1. Αποδείξτε ότι $\int_0^1 (\log\frac{1}{y})^{x-1}\,dy = \Gamma(x)$ για κάθε $x > 0$.

12.5.2. Στην απόδειξη της πρότασης 12.15 υπάρχει η ανισότητα $\Gamma''(x)\Gamma(x) \geq (\Gamma'(x))^2$ η οποία είναι ισοδύναμη με την κυρτότητα της $\log\Gamma(x)$. Αποδείξτε την ανισότητα αυτή με δεύτερο τρόπο χρησιμοποιώντας την ανισότητα των Schwarz, Buniakowsky της άσκησης 12.3.13.

12.5.3. Χρησιμοποιώντας το ολοκλήρωμα του Gauss, $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, και κάνοντας κατάλληλη αλλαγή μεταβλητής αποδείξτε ότι $\Gamma\big(\frac{1}{2}\big) = \sqrt{\pi}$. Αποδείξτε ότι

$$\Gamma\big(n+\tfrac{1}{2}\big) = \tfrac{(2n)!}{4^n n!}\sqrt{\pi} \qquad \text{για κάθε } \ n \in \mathbb{Z}, \ \ n \geq 0.$$

12.5.4. Σε όλα τα επόμενα υποθέτουμε ότι $x > 1$.
Αποδείξτε ότι, αν $a > 0$, τότε η $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-ny}y^{x-1}$ συγκλίνει, ως σειρά συναρτήσεων του y, ομοιόμορφα στη συνάρτηση $\frac{y^{x-1}}{e^y-1}$ στο $[a,+\infty)$.
Αποδείξτε ότι $\int_a^b \frac{y^{x-1}}{e^y-1}\,dy = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_a^b e^{-ny}y^{x-1}\,dy \leq \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-ny}y^{x-1}\,dy$, αν $0 < a < b < +\infty$. Να συμπεράνετε ότι $\int_0^{+\infty}\frac{y^{x-1}}{e^y-1}\,dy \leq \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-ny}y^{x-1}\,dy$.
Αποδείξτε ότι για κάθε n ισχύει $\sum_{k=1}^{n}\int_0^{+\infty} e^{-ky}y^{x-1}\,dy \leq \int_0^{+\infty}\frac{y^{x-1}}{e^y-1}\,dy$. Να συμπεράνετε ότι $\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-ny}y^{x-1}\,dy \leq \int_0^{+\infty}\frac{y^{x-1}}{e^y-1}\,dy$.
Από τα προηγούμενα συνεπάγεται αμέσως ότι

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-ny}y^{x-1}\,dy = \int_0^{+\infty}\frac{y^{x-1}}{e^y-1}\,dy \qquad \text{για κάθε } \ x > 1.$$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ αποδείξτε ότι $\int_0^{+\infty} e^{-ny} y^{x-1}\, dy = \frac{\Gamma(x)}{n^x}$.
Συνέχεια των ασκήσεων 12.4.2 και 12.3.7. Αποδείξτε ότι ισχύει

$$\zeta(x)\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \frac{y^{x-1}}{e^y-1}\, dy \qquad \text{για κάθε } \ x > 1.$$

12.5.5. Αποδείξτε ότι $\int_0^n y^{x-1}(1-\frac{y}{n})^n\, dy \to \Gamma(x)$ για κάθε $x > 0$.
Αποδείξτε με διαδοχικές ολοκληρώσεις κατά μέρη ότι $\int_0^n y^{x-1}(1-\frac{y}{n})^n\, dy = \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$ και, επομένως, ότι ισχύει ο **τύπος του Gauss**:[10]

$$\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} \to \Gamma(x) \qquad \text{για κάθε } \ x > 0.$$

Εφαρμόζοντας τον τύπο του Gauss με $x = \frac{1}{2}$ βρίσκουμε με δεύτερο τρόπο τον τύπο του Wallis στην άσκηση 7.3.11.
Αποδείξτε ότι ισχύει ο λεγόμενος **τύπος διπλασιασμού**:

$$\Gamma(x)\Gamma(x+\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}\, 2^{1-2x}\Gamma(2x) \qquad \text{για κάθε } \ x > 0.$$

Βάσει του τύπου του Gauss, αποδείξτε ότι

$$\log\Gamma(x) = -\gamma x - \log x + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\tfrac{x}{n} - \log(1+\tfrac{x}{n})\right) \qquad \text{για κάθε } x > 0$$

όπου $\gamma = \lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n)$ είναι η σταθερά του Euler στις ασκήσεις 2.4.6, 6.4.11 και 7.3.20.

12.5.6. Έστω $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με τις εξής ιδιότητες: (i) ισχύει $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$, (ii) $f(1) = 1$, (iii) ισχύει $f(x+1) = xf(x)$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$ και (iv) η $\log f$ είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$.
Αποδείξτε ότι $\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} \to f(x)$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$.
Συμπεράνατε ότι μια συνάρτηση f με τις παραπάνω ιδιότητες είναι μοναδική και, επειδή η Γ έχει τις ιδιότητες αυτές, ισχύει $f = \Gamma$ και έχουμε αυτομάτως μια δεύτερη απόδειξη του τύπου του Gauss της άσκησης 12.5.5.

12.5.7. Αποδείξτε ότι

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x}{n(n+x)} \qquad \text{για κάθε } \ x > 0,$$

όπου $\gamma = \lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n)$ είναι η σταθερά του Euler στις ασκήσεις 2.4.6, 6.4.11 και 7.3.20.

12.5.8. Ορίζουμε τη συνάρτηση δύο μεταβλητών[11]

$$\mathrm{B}(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt \qquad \text{για κάθε } \ x, y > 0.$$

Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται **συνάρτηση** B.
Αποδείξτε ότι ισχύει $\mathrm{B}(x,y) = \mathrm{B}(y,x)$ για κάθε $x, y > 0$ και ότι ισχύει $\mathrm{B}(x,1) = \frac{1}{x}$ και $\mathrm{B}(1,y) = \frac{1}{y}$ για κάθε $x, y > 0$.
Αποδείξτε ότι ισχύει $\mathrm{B}(x+1,y) = \frac{x}{x+y}\,\mathrm{B}(x,y)$ για κάθε $x, y > 0$ με κατάλληλες αλλαγές μεταβλητής και ολοκληρώσεις κατά μέρη.
Αποδείξτε ότι, θεωρώντας τον $y > 0$ σταθερό και παραγωγίζοντας ως προς τον x, είναι $\mathrm{B}'(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\log t\, dt$ και $\mathrm{B}''(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}(\log t)^2\, dt$. Κατόπιν, μιμηθείτε την απόδειξη του ότι η $\log\Gamma$ είναι κυρτή και αποδείξτε ότι, με σταθερό $y > 0$, η $\log\mathrm{B}(x,y)$ είναι, ως

[10] Δεύτερη απόδειξη του τύπου του Gauss στην άσκηση 12.5.6.
[11] Το ολοκλήρωμα ονομάζεται **πρώτο ολοκλήρωμα του Euler**.

συνάρτηση του x, κυρτή στο $(0,+\infty)$.
Για κάθε $y>0$, θεωρήστε τη συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{\Gamma(y)}\,\mathrm{B}(x,y)\Gamma(x+y)$ για $x\in(0,+\infty)$. Αποδείξτε ότι η f έχει τις εξής ιδιότητες: (i) ισχύει $f(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$, (ii) $f(1)=1$, (iii) ισχύει $f(x+1)=xf(x)$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ και (iv) η $\log f$ είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$. Βάσει της άσκησης 12.5.6, συμπεράνατε ότι $f=\Gamma$, οπότε

$$\mathrm{B}(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \qquad \text{για κάθε } \ x,y>0.$$

Ξαναδείτε την άσκηση 7.3.13.

12.5.9. Έστω V_d ο όγκος μιας μπάλας με ακτίνα 1 στον d-διάστατο Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^d$. Για παράδειγμα: $V_1=2$, $V_2=\pi$, $V_3=\frac{4\pi}{3}$.
Έστω $k\in\mathbb{N}$, $k\geq 2$. Γνωρίζουμε ότι, αν μια μπάλα στον $\mathbb{R}^k$ έχει ακτίνα $r>0$, τότε ο όγκος της είναι r^kV_k. Θεωρήστε την μπάλα στον $\mathbb{R}^k$ με κέντρο την αρχή των αξόνων 0 και ακτίνα 1 και παρατηρήστε ότι για κάθε $x_1\in[-1,1]$ η διατομή της η οποία είναι κάθετη στον x_1-άξονα στο σημείο x_1 είναι μια μπάλα στον $\mathbb{R}^{k-1}$ με ακτίνα $\sqrt{1-x_1{}^2}$, οπότε ο όγκος αυτής της διατομής είναι $(1-x_1{}^2)^{\frac{k-1}{2}}V_{k-1}$. Επομένως, αποδείξτε ότι

$$V_k=V_{k-1}\int_{-1}^1(1-x_1{}^2)^{\frac{k-1}{2}}\,dx_1=V_{k-1}\int_0^1(1-t)^{\frac{k-1}{2}}t^{-\frac{1}{2}}\,dt.$$

Βάσει της άσκησης 12.5.8 και, κατόπιν, του $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$ από την άσκηση 12.5.3, ισχύει

$$V_k=V_{k-1}B(\tfrac{k+1}{2},\tfrac{1}{2})=V_{k-1}\frac{\Gamma(\frac{k+1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{k}{2}+1)}=\sqrt{\pi}V_{k-1}\frac{\Gamma(\frac{k-1}{2}+1)}{\Gamma(\frac{k}{2}+1)}.$$

Χρησιμοποιώντας το τελευταίο, αποδείξτε ότι $V_d=\pi^{\frac{d-1}{2}}V_1\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+1)}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}$ και συμπεράνατε ότι

$$V_d=\frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}.$$

Βασική βιβλιογραφία.

Artin, E. (2015) *The Gamma Function.* Dover.

Bartle, R. (1967) *The Elements of Real Analysis, Ch VI.* Wiley.

Brand, L. (2006) *Advanced Calculus, Ch 6-7, 10.* Dover.

Buck, R. & Buck, E. (2003) *Advanced Calculus, Ch 4, 6.* Waveland Press.

Courant, R. (1988) *Differential and Integral Calculus, Vol I, Ch IV and Vol II, Ch IV.* Wiley.

Courant, R. & John, F. (1989) *Introduction to Calculus and Analysis, Vol I, Ch 3, 7 and Vol II, Ch 4.* Springer.

Dieudonné, J. (1971) *Infinitesimal Calculus, Ch III-IV.* Hermann.

Ghorpade, S. & Limaye, B. (2006) *A Course in Calculus and Real Analysis, Ch 9.* Springer.

Goldberg, R. (1976) *Methods of Real Analysis, Ch 7.* Wiley.

Goursat, E. (2006) *A Course in Mathematical Analysis, Vol I, Ch IV, VIII.* Dover.

Hardy, G. (2008) *A Course of Pure Mathematics, Ch IV, VIII.* Cambridge Univ. Press.

Landau, E. (2001) *Differential and Integral Calculus, Ch 28-30.* American Math. Society & Chelsea.

Lang, S. (1997) *Undergraduate Analysis, Ch XIII.* Springer.

Nikolsky, S. (1977) *A Course of Mathematical Analysis, Vol 1, Ch 9.* Mir Publishers.

Protter, M. (1998) *Basic Elements of Real Analysis, Ch 9.* Springer.

Whittaker, E. & Watson, G. (1996) *A Course of Modern Analysis, Ch III.* Cambridge Univ. Press.

Συμπληρωματική βιβλιογραφία.

Rudin, W. (1976) *Principles of Mathematical Analysis, Ch 8.* McGraw-Hill.

Κεφάλαιο 13

Η αξιωματική θεμελίωση.

13.1 Οι φυσικοί και τα αξιώματα του Peano.

Θεωρούμε δεδομένο ένα σύνολο, το οποίο συμβολίζουμε $\mathbb{N}$ και του οποίου τα στοιχεία ονομάζουμε **φυσικούς**. Δεχόμαστε, επίσης, ότι το σύνολο $\mathbb{N}$ έχει τις εξής πρωταρχικές ιδιότητες, οι οποίες δεν αποδεικνύονται και γι αυτό ονομάζονται **αξιώματα**, τα αξιώματα του **Peano**, και από τις οποίες αποδεικνύονται (σύμφωνα με τους στοιχειώδεις κανόνες της λογικής) όλες οι άλλες ιδιότητες του $\mathbb{N}$.

Τα Αξιώματα του Peano:

1. *Το $\mathbb{N}$ έχει τουλάχιστον ένα στοιχείο, το οποίο συμβολίζουμε* 1.
2. *Σε κάθε $n \in \mathbb{N}$ αντιστοιχίζεται ακριβώς ένας $n' \in \mathbb{N}$, ο οποίος ονομάζεται* **επόμενος** *του n.*
3. *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $n' \neq 1$.*
   Δηλαδή, ο 1 δεν είναι επόμενος κανενός φυσικού.
4. *Αν $n, m \in \mathbb{N}$ και $n' = m'$, τότε $n = m$.*
   Ισοδύναμα, αν $n, m \in \mathbb{N}$ και $n \neq m$, τότε $n' \neq m'$.
5. *Έστω ότι ένα σύνολο $K \subseteq \mathbb{N}$ έχει τις ιδιότητες: (i) $1 \in K$ και (ii) αν $n \in K$, τότε $n' \in K$. Τότε $K = \mathbb{N}$.*

Το Αξίωμα 2 λέει ότι η απεικόνιση $n \mapsto n'$ είναι *συνάρτηση* με πεδίο ορισμού το $\mathbb{N}$ και σύνολο τιμών υποσύνολο του $\mathbb{N}$. Τώρα, το Αξίωμα 3 λέει ότι ο 1 δεν ανήκει στο σύνολο τιμών της συνάρτησης αυτής και το Αξίωμα 4 λέει ότι η συνάρτηση αυτή είναι ένα-προς-ένα. Το Αξίωμα 5 ονομάζεται και **Αξίωμα της Επαγωγής** ή **Αρχή της Επαγωγής**.

13.1.1 Πρόσθεση.

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.1. *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $n' \neq n$.*

Απόδειξη. Έστω K το σύνολο των $n \in \mathbb{N}$ για τους οποίους ισχύει $n' \neq n$. Από τα Αξιώματα 1 και 3 συνεπάγεται $1 \in K$. Έστω $n \in K$. Τότε $n \in \mathbb{N}$ και $n' \neq n$. Από το Αξίωμα 4 συνεπάγεται $(n')' \neq n'$ και, επομένως, $n' \in K$. Από το Αξίωμα της Επαγωγής συνεπάγεται $K = \mathbb{N}$. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.2. *Για κάθε $m \in \mathbb{N}$, $m \neq 1$ υπάρχει ακριβώς ένας $n \in \mathbb{N}$ ώστε $n' = m$.*

Απόδειξη. Έστω K το σύνολο με στοιχεία τον 1 και κάθε $m \in \mathbb{N}$ για τον οποίο υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $n' = m$. Τότε $1 \in K$ και έστω $m \in K$. Τότε $m' \in \mathbb{N}$ και υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ (συγκεκριμένα: ο m) ώστε $n' = m'$. Άρα $m' \in K$. Από το Αξίωμα της Επαγωγής συνεπάγεται $K = \mathbb{N}$. Άρα κάθε $m \in \mathbb{N}$ ανήκει στο K, οπότε, αν $m \neq 1$, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $n' = m$. Από το Αξίωμα 4 συνεπάγεται ότι ο $n \in \mathbb{N}$ για τον οποίο ισχύει $n' = m$ είναι μοναδικός. □

Η πρόταση 13.2 λέει ότι το σύνολο τιμών της συνάρτησης $n \mapsto n'$ είναι ακριβώς το $\mathbb{N} \setminus \{1\}$, οπότε, σύμφωνα και με τα προηγούμενα συμπεράσματα, η συνάρτηση αυτή είναι αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία $\mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 13.1. *Υπάρχει μοναδική συνάρτηση* $\phi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *με τις εξής ιδιότητες:* (i) *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *ισχύει* $\phi(n, 1) = n'$ *και* (ii) *για κάθε* $n, m \in \mathbb{N}$ *ισχύει* $\phi(n, m') = (\phi(n, m))'$.

Απόδειξη. Έστω K το σύνολο των $n \in \mathbb{N}$ με την εξής ιδιότητα: υπάρχει συνάρτηση $f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ώστε (i) $f_n(1) = n'$ και (ii) για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ισχύει $f_n(m') = (f_n(m))'$.
Πρώτον, $1 \in K$. Πράγματι, ορίζουμε τη συνάρτηση $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ με τύπο $f_1(m) = m'$. Τότε (i) $f_1(1) = 1'$ και (ii) για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ισχύει $f_1(m') = (m')' = (f_1(m))'$.
Τώρα, έστω $n \in K$. Δηλαδή, έστω ότι υπάρχει συνάρτηση $f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ώστε (i) $f_n(1) = n'$ και (ii) για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ισχύει $f_n(m') = (f_n(m))'$. Θα αποδείξουμε ότι $n' \in K$. Ορίζουμε συνάρτηση $f_{n'} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ με τύπο $f_{n'}(m) = (f_n(m))'$. Τότε (i) $f_{n'}(1) = (f_n(1))' = (n')'$ και (ii) για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ισχύει $f_{n'}(m') = (f_n(m'))' = ((f_n(m))')' = (f_{n'}(m))'$. Άρα $n' \in K$.
Άρα $K = \mathbb{N}$. Δηλαδή για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει συνάρτηση $f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ώστε (i) $f_n(1) = n'$ και (ii) για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ισχύει $f_n(m') = (f_n(m))'$.
Τώρα, ορίζουμε $\phi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ με τύπο $\phi(n, m) = f_n(m)$. Η ϕ έχει τις ιδιότητες: (i) $\phi(n, 1) = f_n(1) = n'$ και (ii) για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ ισχύει $\phi(n, m') = f_n(m') = (f_n(m))' = (\phi(n, m))'$.
Τώρα θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση ϕ με τις ιδιότητες $(i), (ii)$ είναι μοναδική. Έστω ότι υπάρχει και συνάρτηση $\psi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ με τις ιδιότητες: (i) για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $\psi(n, 1) = n'$ και (ii) για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ ισχύει $\psi(n, m') = (\psi(n, m))'$. Θεωρούμε οποιονδήποτε $n \in \mathbb{N}$ και έστω K το σύνολο των $m \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα: $\phi(n, m) = \psi(n, m)$. Τότε $1 \in K$, διότι $\phi(n, 1) = n' = \psi(n, 1)$. Κατόπιν, έστω $m \in K$, δηλαδή $\phi(n, m) = \psi(n, m)$. Τότε $\phi(n, m') = (\phi(n, m))' = (\psi(n, m))' = \psi(n, m')$ και, επομένως, $m' \in K$. Άρα $K = \mathbb{N}$. Άρα για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ισχύει $\phi(n, m) = \psi(n, m)$ και, επειδή αυτό ισχύει για οποιονδήποτε $n \in \mathbb{N}$, συνεπάγεται $\phi(n, m) = \psi(n, m)$ για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$. Άρα οι ϕ, ψ ταυτίζονται. □

ΟΡΙΣΜΟΣ 13.1. *Το στοιχείο* $\phi(n, m) \in \mathbb{N}$ *που, σύμφωνα με το θεώρημα 13.1, αντιστοιχίζεται στους* $n, m \in \mathbb{N}$ *ονομάζεται* ***άθροισμα*** *των* n, m *και συμβολίζεται*

$$n + m.$$

Δηλαδή, $n + m = \phi(n, m)$. *Η πράξη που σε κάθε* $n, m \in \mathbb{N}$ *αντιστοιχίζει το άθροισμά τους ονομάζεται* ***πρόσθεση*** *στο* $\mathbb{N}$.

Σύμφωνα με το θεώρημα 13.1 και με την απόδειξή του, η πρόσθεση έχει τις εξής ιδιότητες: $n+1 = \phi(n, 1) = n'$, $1+n = \phi(1, n) = f_1(n) = n'$, $n+m' = \phi(n, m') = (\phi(n, m))' = (n+m)'$ και $n' + m = \phi(n', m) = f_{n'}(m) = (f_n(m))' = (\phi(n, m))' = (n + m)'$. Συνοπτικά:

$$n + 1 = n' = 1 + n, \qquad n + m' = (n + m)' = n' + m.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.3. *Για κάθε* $n, m \in \mathbb{N}$ *ισχύει* $n + m = m + n$.

Απόδειξη. Έστω $n \in \mathbb{N}$ και έστω K το σύνολο των $m \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα: $n + m = m + n$.
Ισχύει $n + 1 = n' = 1 + n$. Άρα $1 \in K$. Κατόπιν, έστω $m \in K$, οπότε $n + m = m + n$. Τότε $n + m' = (n + m)' = (m + n)' = m' + n$, οπότε $m' \in K$.
Άρα $K = \mathbb{N}$. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.4. *Για κάθε* $n, m, k \in \mathbb{N}$ *ισχύει* $(n + m) + k = n + (m + k)$.

Απόδειξη. Έστω $n, m \in \mathbb{N}$ και έστω K το σύνολο των $k \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα: $(n + m) + k = n + (m + k)$.
Ισχύει $(n + m) + 1 = (n + m)' = n + m' = n + (m + 1)$. Άρα $1 \in K$. Κατόπιν, έστω $k \in K$, οπότε $(n + m) + k = n + (m + k)$. Τότε $(n + m) + k' = ((n + m) + k)' = (n + (m + k))' = n + (m + k)' = n + (m + k')$, οπότε $k' \in K$.
Άρα $K = \mathbb{N}$. □

Βάσει της μεταθετικής και της προσεταιριστικής ιδιότητας, οι οποίες εκφράζονται στις προτάσεις 13.3 και 13.4, αντιστοίχως, αποδεικνύεται ότι το τελικό αποτέλεσμα διαδοχικών προσθέσεων δεν εξαρτάται από τη σειρά με την οποία γίνονται αυτές οι προσθέσεις. Για παράδειγμα: $(m+n)+(k+l) = ((n+l)+m)+k$, διότι $(m+n)+(k+l) = (n+m)+(l+k) = ((n+m)+l)+k = (n+(m+l))+k = (n+(l+m))+k = ((n+l)+m)+k$. Επομένως, στο εξής θα ακολουθούμε τη συνήθη πρακτική να παραλείπουμε τις παρενθέσεις σε παραστάσεις με αθροίσματα καθώς και να αλλάζουμε τη σειρά εκτέλεσης διαδοχικών προσθέσεων. Για παράδειγμα: τα δύο ίσα αθροίσματα $(m+n)+(k+l)$, $((n+l)+m)+k$ θα τα γράφουμε $n+m+k+l$ (ή $n+l+k+m$ ή $k+m+l+n$ κ.τ.λ.).

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.5. *Για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ ισχύει $m \neq n+m$.*

Απόδειξη. Έστω $n \in \mathbb{N}$ και έστω K το σύνολο των $m \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα: $m \neq n+m$.
Ισχύει $1 \neq n' = n+1$, οπότε $1 \in K$. Τώρα, έστω $m \in K$, οπότε $m \neq n+m$. Τότε $m' \neq (n+m)' = n+m'$, οπότε $m' \in K$.
Άρα $K = \mathbb{N}$. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.6. *Έστω $n, m, k \in \mathbb{N}$. Αν $m \neq k$, τότε $n+m \neq n+k$.*

Απόδειξη. Έστω $m, k \in \mathbb{N}$, $m \neq k$ και έστω K το σύνολο των $n \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα: $n+m \neq n+k$.
Ισχύει $1+m = m' \neq k' = 1+k$, οπότε $1 \in K$. Τώρα, έστω $n \in K$, οπότε $n+m \neq n+k$. Τότε $n'+m = (n+m)' \neq (n+k)' = n'+k$, οπότε $n' \in K$.
Άρα $K = \mathbb{N}$. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.7. *Για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ ακριβώς ένα από τα παρακάτω είναι σωστό: (i) $n = m$, (ii) υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $n = m+k$ και (iii) υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $m = n+k$. Ο k στα (ii), (iii) είναι μοναδικός.*

Απόδειξη. Έστω $n \in \mathbb{N}$ και έστω K το σύνολο των $m \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει ένα τουλάχιστον από τα $(i)-(iii)$.
Πρώτον, $1 \in K$. Πράγματι, αν $n = 1$, τότε ισχύει το (i) για τον 1. Και, αν $n \neq 1$, τότε υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $n = k' = 1+k$, οπότε ισχύει το (ii) για τον 1.
Έστω $m \in K$, οπότε ισχύει ένα τουλάχιστον από τα $(i)-(iii)$ για τον m. Αν ισχύει το (i) για τον m, τότε $n = m$, οπότε $n+1 = n' = m'$ και, επομένως, ισχύει το (iii) για τον m'. Έστω ότι ισχύει το (ii) για τον m, οπότε υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $n = m+k$. Αν $k = 1$, τότε $n = m+1 = m'$, οπότε ισχύει το (i) για τον m'. Αν $k \neq 1$, τότε υπάρχει $l \in \mathbb{N}$ ώστε $k = l'$, οπότε $n = m+l' = (m+l)' = m'+l$ και, επομένως, ισχύει το (ii) για τον m'. Τέλος, έστω ότι ισχύει το (iii) για τον m, οπότε υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $m = n+k$. Τότε $m' = (n+k)' = n+k'$, οπότε ισχύει το (iii) για τον m'. Άρα, σε κάθε περίπτωση, για τον m' ισχύει ένα τουλάχιστον από τα $(i)-(iii)$ και, επομένως, $m' \in K$.
Άρα $K = \mathbb{N}$.
Το ότι ο k στα (ii), (iii) είναι μοναδικός είναι άμεση συνέπεια της πρότασης 13.6.
Τα (i), (ii) δε μπορούν να ισχύουν συγχρόνως λόγω της πρότασης 13.5. Για τον ίδιο λόγο, τα (i), (iii) δε μπορούν να ισχύουν συγχρόνως. Αν ίσχυαν συγχρόνως τα (ii), (iii), δηλαδή αν $n = m+k$ και $m = n+l$ για κάποιους $k, l \in \mathbb{Z}$, τότε θα ήταν $n = m+k = n+l+k = (l+k)+n$, που απαγορεύεται από την πρόταση 13.5. Άρα ισχύει ακριβώς ένα από τα $(i)-(iii)$. □

13.1.2 Διάταξη.

ΟΡΙΣΜΟΣ 13.2. *Έστω $n, m \in \mathbb{N}$. Αν υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $n = m+k$, τότε λέμε ότι ο n είναι* ***μεγαλύτερος από*** *τον m και γράφουμε $n > m$ ή, ισοδύναμα, ότι ο m είναι* ***μικρότερος από*** *τον n και γράφουμε $m < n$.*

*Έστω $n, m \in \mathbb{N}$. Αν $n > m$, τότε ο $k \in \mathbb{N}$ για τον οποίο ισχύει $n = m + k$ ονομάζεται **διαφορά** των n, m και συμβολίζεται*
$$n - m.$$
*Η πράξη η οποία σε κάθε $n, m \in \mathbb{N}$, $n > m$ αντιστοιχίζει τον $n - m$ ονομάζεται **αφαίρεση** στο $\mathbb{N}$.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.8. *Για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ ακριβώς ένα από τα παρακάτω είναι σωστό: $n = m$, $n > m$, $n < m$.*

Απόδειξη. Άμεση συνέπεια της πρότασης 13.7. $\square$

ΟΡΙΣΜΟΣ 13.3. *Έστω $n, m \in \mathbb{N}$. Αν $n > m$ ή $n = m$ ή, ισοδύναμα, αν $m < n$ ή $m = n$, τότε λέμε ότι ο n είναι **μεγαλύτερος από ή ίσος με** τον m και γράφουμε $n \geq m$ ή, ισοδύναμα, ότι ο m είναι **μικρότερος από ή ίσος με** τον n και γράφουμε $m \leq n$.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.9. *Έστω $m, n, k \in \mathbb{N}$.*

[α] *Αν $n < m$ και $m < k$, τότε $n < k$.*

[β] *Αν $n \leq m$ και $m < k$ ή αν $n < m$ και $m \leq k$, τότε $n < k$.*

[γ] *Αν $n \leq m$ και $m \leq k$, τότε $n \leq k$.*

Απόδειξη. [α] Έστω $n < m$ και $m < k$. Τότε υπάρχουν $p, q \in \mathbb{N}$ ώστε $m = n + p$ και $k = m + q$. Συνεπάγεται $k = m + q = n + p + q = n + (p + q)$, οπότε $n < k$.

[β], [γ] Προφανή, λόγω του [α]. $\square$

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.10. *Για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ ισχύει $n + m > n$.*

Απόδειξη. Προφανής. $\square$

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.11. *Έστω $m, n, k \in \mathbb{N}$. Ισχύει $n < m$ αν και μόνο αν $n + k < m + k$. Επίσης, ισχύει $n = m$ αν και μόνο αν $n + k = m + k$.*

Απόδειξη. Έστω $n < m$. Τότε υπάρχει $l \in \mathbb{N}$ ώστε $m = n + l$. Άρα $m + k = n + l + k = (n + k) + l$ και, επομένως, $n + k < m + k$.
Έστω $n + k < m + k$. Αν $n = m$, τότε $n + k = m + k$ και, αν $m < n$, τότε $m + k < n + k$. Και στις δύο περιπτώσεις καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα $n < m$.
Προφανώς, αν $n = m$, τότε $n + k = m + k$. Έστω $n + k = m + k$. Αν $n < m$, τότε $n + k < m + k$ και, αν $m < n$, τότε $m + k < n + k$. Και στις δύο περιπτώσεις καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα $n = m$. $\square$

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.12. *Έστω $m, n, k, l \in \mathbb{N}$.*

[α] *Αν $n < m$ και $k < l$, τότε $n + k < m + l$.*

[β] *Αν $n \leq m$ και $k < l$ ή αν $n < m$ και $k \leq l$, τότε $n + k < m + l$.*

[γ] *Αν $n \leq m$ και $k \leq l$, τότε $n + k \leq m + l$.*

Απόδειξη. [α] Έστω $n < m$ και $k < l$. Τότε, σύμφωνα με την πρόταση 13.11, $n + k < m + k < m + l$.

[β], [γ] Προφανή, λόγω του [α]. $\square$

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.13. *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $n \geq 1$.*

Απόδειξη. Αν $n = 1$, τότε $n \geq 1$. Αν $n \neq 1$, τότε υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε $n = m' = m + 1 > 1$. $\square$

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.14. *Έστω $m, n \in \mathbb{N}$.*

[α] *Αν $n > m$, τότε $n \geq m + 1$.*

[β] *Αν $n < m + 1$, τότε $n \leq m$.*

Απόδειξη. [α] Αν $n > m$, τότε υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $n = m + k$. Επειδή $k \geq 1$, ισχύει $n \geq m + 1$.
[β] Προφανές, λόγω του [α]. $\square$

ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΚΑΛΗΣ ΔΙΑΤΑΞΗΣ. *Κάθε μη-κενό υποσύνολο του* $\mathbb{N}$ *έχει ελάχιστο στοιχείο.*

Απόδειξη. Έστω μη-κενό $M \subseteq \mathbb{N}$ και έστω $m_0 \in M$. Θεωρούμε το σύνολο K των $n \in \mathbb{N}$ οι οποίοι είναι $\leq m$ για κάθε $m \in M$.
Προφανώς, $1 \in K$. Επειδή $m_0 + 1 > m_0$ και $m_0 \in M$, ο $m_0 + 1$ δεν ανήκει στο K. Άρα το K είναι γνήσιο υποσύνολο του $\mathbb{N}$, οπότε, σύμφωνα με το Αξίωμα της Επαγωγής, υπάρχει $n_0 \in K$ ώστε $n_0 + 1 = n_0{}' \notin K$.
Τώρα, ισχύει (i) $n_0 \leq m$ για κάθε $m \in M$. Αυτό είναι προφανές, διότι $n_0 \in K$. Κατόπιν, έστω $n_0 \notin M$. Τότε για κάθε $m \in M$ ισχύει $n_0 < m$ και, επομένως, $n_0 + 1 \leq m$. Άρα $n_0 + 1 \in K$ και αυτό είναι άτοπο. Άρα (ii) $n_0 \in M$.
Από τα (i), (ii) συνεπάγεται ότι ο n_0 είναι το ελάχιστο στοιχείο του M. $\square$

13.1.3 Πολλαπλασιασμός.

ΘΕΩΡΗΜΑ 13.2. *Υπάρχει μοναδική συνάρτηση* $\phi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *με τις εξής ιδιότητες:* (i) *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *ισχύει* $\phi(n, 1) = n$ *και* (ii) *για κάθε* $n, m \in \mathbb{N}$ *ισχύει* $\phi(n, m') = \phi(n, m) + n$.

Απόδειξη. Έστω K το σύνολο των $n \in \mathbb{N}$ με την εξής ιδιότητα: υπάρχει συνάρτηση $f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ώστε (i) $f_n(1) = n$ και (ii) για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ισχύει $f_n(m') = f_n(m) + n$.
Πρώτον, $1 \in K$. Πράγματι, ορίζουμε τη συνάρτηση $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ με τύπο $f_1(m) = m$. Τότε (i) $f_1(1) = 1$ και (ii) για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ισχύει $f_1(m') = m' = m + 1 = f_1(m) + 1$.
Τώρα, έστω $n \in K$. Δηλαδή, έστω ότι υπάρχει συνάρτηση $f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ώστε (i) $f_n(1) = n$ και (ii) για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ισχύει $f_n(m') = f_n(m) + n$. Θα αποδείξουμε ότι $n' \in K$. Ορίζουμε συνάρτηση $f_{n'} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ με τύπο $f_{n'}(m) = f_n(m) + m$. Τότε (i) $f_{n'}(1) = f_n(1) + 1 = n + 1 = n'$ και (ii) για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ισχύει $f_{n'}(m') = f_n(m') + m' = f_n(m) + n + m' = f_n(m) + n' + m = f_{n'}(m) + n'$. Άρα $n' \in K$.
Άρα $K = \mathbb{N}$. Δηλαδή για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει συνάρτηση $f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ώστε (i) $f_n(1) = n$ και (ii) για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ισχύει $f_n(m') = f_n(m) + n$.
Τώρα, ορίζουμε $\phi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ με τύπο $\phi(n, m) = f_n(m)$. Η ϕ έχει τις ιδιότητες: (i) $\phi(n, 1) = f_n(1) = n$ και (ii) για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ ισχύει $\phi(n, m') = f_n(m') = f_n(m) + n = \phi(n, m) + n$.
Τώρα θα αποδείξουμε η συνάρτηση ϕ με τις ιδιοτητες $(i), (ii)$ είναι μοναδική. Έστω ότι υπάρχει και συνάρτηση $\psi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ με τις ιδιότητες: (i) για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $\psi(n, 1) = n$ και (ii) για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ ισχύει $\psi(n, m') = \psi(n, m) + n$. Θεωρούμε οποιονδήποτε $n \in \mathbb{N}$ και έστω K το σύνολο των $m \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα: $\phi(n, m) = \psi(n, m)$. Τότε $1 \in K$, διότι $\phi(n, 1) = n = \psi(n, 1)$. Κατόπιν, έστω $m \in K$, δηλαδή $\phi(n, m) = \psi(n, m)$. Τότε $\phi(n, m') = \phi(n, m) + n = \psi(n, m) + n = \psi(n, m')$ και, επομένως, $m' \in K$. Άρα $K = \mathbb{N}$. Άρα για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ισχύει $\phi(n, m) = \psi(n, m)$ και, επειδή αυτό ισχύει για οποιονδήποτε $n \in \mathbb{N}$, συνεπάγεται $\phi(n, m) = \psi(n, m)$ για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$. Άρα οι ϕ, ψ ταυτίζονται. $\square$

ΟΡΙΣΜΟΣ 13.4. *Το στοιχείο* $\phi(n, m) \in \mathbb{N}$ *που, σύμφωνα με το θεώρημα 13.2, αντιστοιχίζεται στους* $n, m \in \mathbb{N}$ *ονομάζεται* ***γινόμενο*** *των* n, m *και συμβολίζεται*

$$n \cdot m.$$

Δηλαδή, $n \cdot m = \phi(n, m)$. *Η πράξη που σε κάθε* $n, m \in \mathbb{N}$ *αντιστοιχίζει το γινόμενό τους ονομάζεται* ***πολλαπλασιασμός*** *στο* $\mathbb{N}$.

Σύμφωνα με το θεώρημα 13.2 και με την απόδειξή του, ο πολλαπλασιασμός έχει τις εξής ιδιότητες: $n \cdot 1 = \phi(n, 1) = n$, $1 \cdot n = \phi(1, n) = f_1(n) = n$, $n \cdot m' = \phi(n, m') = \phi(n, m) + n = n \cdot m + n$ και $n' \cdot m = \phi(n', m) = f_{n'}(m) = f_n(m) + m = \phi(n, m) + m = n \cdot m + m$. Συνοπτικά:

$$n \cdot 1 = n = 1 \cdot n, \qquad n \cdot m' = n \cdot m + n, \qquad n' \cdot m = n \cdot m + m.$$

Το $n \cdot m$ θα το γράφουμε πιο συνοπτικά nm και οι παραπάνω ιδιότητες γράφονται

$$n1 = n = 1n, \qquad nm' = nm + n, \qquad n'm = nm + m.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.15. *Για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ ισχύει $nm = mn$.*

Απόδειξη. Έστω $n \in \mathbb{N}$ και έστω K το σύνολο των $m \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα: $nm = mn$.
Ισχύει $n1 = n = 1n$. Άρα $1 \in K$. Κατόπιν, έστω $m \in K$, οπότε $nm = mn$. Τότε $nm' = nm + n = mn + n = m'n$, οπότε $m' \in K$.
Άρα $K = \mathbb{N}$. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.16. *Για κάθε $n, m, k \in \mathbb{N}$ ισχύει $n(m + k) = nm + nk$.*

Απόδειξη. Έστω $n, m \in \mathbb{N}$ και έστω K το σύνολο των $k \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα: $n(m + k) = nm + nk$.
Ισχύει $n(m + 1) = nm' = nm + n = nm + n1$. Άρα $1 \in K$. Κατόπιν, έστω $k \in K$, οπότε $n(m+k) = nm+nk$. Τότε $n(m+k') = n(m+k)' = n(m+k)+n = nm+nk+n = nm+nk'$, οπότε $k' \in K$.
Άρα $K = \mathbb{N}$. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.17. *Για κάθε $n, m, k \in \mathbb{N}$ ισχύει $(nm)k = n(mk)$.*

Απόδειξη. Έστω $n, m \in \mathbb{N}$ και έστω K το σύνολο των $k \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα: $(nm)k = n(mk)$.
Ισχύει $(nm)1 = nm = n(m1)$. Άρα $1 \in K$. Κατόπιν, έστω $k \in K$, οπότε $(nm)k = n(mk)$. Τότε $(nm)k' = (nm)k + nm = n(mk) + nm = n(mk + m) = n(mk')$, οπότε $k' \in K$.
Άρα $K = \mathbb{N}$. □

Ακριβώς όπως και στην περίπτωση της πρόσθεσης, η μεταθετική και η προσεταιριστική ιδιότητα, οι οποίες εκφράζονται στις προτάσεις 13.15 και 13.17, αντιστοίχως, μας επιτρέπουν να παραλείπουμε τις παρενθέσεις όταν εκτελούμε διαδοχικούς πολλαπλασιασμούς καθώς και να αλλάζουμε κατά βούληση τη σειρά εκτέλεσης διαδοχικών πολλαπλασιασμών.

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.18. *Έστω $m, n, k \in \mathbb{N}$. Ισχύει $n < m$ αν και μόνο αν $nk < mk$. Επίσης, ισχύει $n = m$ αν και μόνο αν $nk = mk$.*

Απόδειξη. Έστω $n < m$. Τότε υπάρχει $l \in \mathbb{N}$ ώστε $m = n + l$. Άρα $mk = nk + lk$ και, επομένως, $nk < mk$.
Έστω $nk < mk$. Αν $n = m$, τότε $nk = mk$ και, αν $m < n$, τότε $mk < nk$. Και στις δύο περιπτώσεις καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα $n < m$.
Προφανώς, αν $n = m$, τότε $nk = mk$. Έστω $nk = mk$. Αν $n < m$, τότε $nk < mk$ και, αν $m < n$, τότε $mk < nk$. Και στις δύο περιπτώσεις καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα $n = m$. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.19. *Έστω $m, n, k, l \in \mathbb{N}$.*
[α] *Αν $n < m$ και $k < l$, τότε $nk < ml$.*
[β] *Αν $n \le m$ και $k < l$ ή αν $n < m$ και $k \le l$, τότε $nk < ml$.*
[γ] *Αν $n \le m$ και $k \le l$, τότε $nk \le ml$.*

Απόδειξη. [α] Έστω $n < m$ και $k < l$. Τότε, σύμφωνα με την πρόταση 13.18, $nk < mk < ml$.
[β], [γ] Προφανή, λόγω του [α]. □

13.2 Οι θετικοί ρητοί.

Θεωρούμε όλα τα ζεύγη φυσικών (n_1, n_2), δηλαδή τα στοιχεία του $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Λέμε ότι δύο τέτοια ζεύγη (n_1, n_2), (m_1, m_2) είναι **ισοδύναμα** και γράφουμε

$$(n_1, n_2) \sim (m_1, m_2)$$

αν $n_1 m_2 = m_1 n_2$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.20. *Έστω* $(n_1, n_2), (m_1, m_2), (k_1, k_2) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$.
[α] $(n_1, n_2) \sim (n_1, n_2)$.
[β] *Αν* $(n_1, n_2) \sim (m_1, m_2)$, *τότε* $(m_1, m_2) \sim (n_1, n_2)$.
[α] *Αν* $(n_1, n_2) \sim (m_1, m_2)$ *και* $(m_1, m_2) \sim (k_1, k_2)$, *τότε* $(n_1, n_2) \sim (k_1, k_2)$.

Απόδειξη. [α] Ισχύει $n_1 n_2 = n_1 n_2$, οπότε $(n_1, n_2) \sim (n_1, n_2)$.
[β] Έστω $(n_1, n_2) \sim (m_1, m_2)$, οπότε $n_1 m_2 = m_1 n_2$. Συνεπάγεται $m_1 n_2 = n_1 m_2$, οπότε $(m_1, m_2) \sim (n_1, n_2)$.
[γ] Έστω $(n_1, n_2) \sim (m_1, m_2)$ και $(m_1, m_2) \sim (k_1, k_2)$, οπότε $n_1 m_2 = m_1 n_2$ και $m_1 k_2 = k_1 m_2$. Συνεπάγεται $n_1 m_2 m_1 k_2 = m_1 n_2 k_1 m_2$, οπότε $n_1 k_2 = k_1 n_2$. Άρα $(n_1, n_2) \sim (k_1, k_2)$. □

ΟΡΙΣΜΟΣ 13.5. *Άρα η σχέση* $\sim$ *ανάμεσα στα ζεύγη φυσικών είναι* ***σχέση ισοδυναμίας*** *και, επομένως, το σύνολο* $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ *διαμερίζεται σε ξένες ανά δύο κλάσεις ισοδυναμίας: κάθε δύο ζεύγη φυσικών, τα οποία είναι ισοδύναμα, ανήκουν στην ίδια κλάση ισοδυναμίας και κάθε δύο ζεύγη φυσικών, τα οποία δεν είναι ισοδύναμα, ανήκουν σε διαφορετικές κλάσεις ισοδυναμίας. Κάθε τέτοια κλάση ισοδυναμίας ονομάζεται* ***θετικός ρητός*** *και το σύνολο των θετικών ρητών συμβολίζεται* $\mathbb{Q}_+$. *Αν* r *είναι οποιοσδήποτε θετικός ρητός (δηλαδή, κλάση ισοδυναμίας), τότε κάθε ζεύγος φυσικών που ανήκει στον* r *ονομάζεται* ***αντιπρόσωπος*** *του* r. *Επομένως, δύο ισοδύναμα ζεύγη φυσικών είναι αντιπρόσωποι του ίδιου θετικού ρητού και δύο μη-ισοδύναμα ζεύγη φυσικών είναι αντιπρόσωποι διαφορετικών θετικών ρητών.*

13.2.1 Διάταξη.

ΟΡΙΣΜΟΣ 13.6. *Έστω* $(n_1, n_2), (m_1, m_2) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$. *Λέμε ότι το* (n_1, n_2) *είναι* ***μεγαλύτερο από*** *το* (m_1, m_2) *και γράφουμε* $(n_1, n_2) \succ (m_1, m_2)$ *ή, ισοδύναμα, ότι το* (m_1, m_2) *είναι* ***μικρότερο από*** *το* (n_1, n_2) *και γράφουμε* $(m_1, m_2) \prec (n_1, n_2)$ *αν ισχύει* $n_1 m_2 > m_1 n_2$ *ή, ισοδύναμα,* $m_1 n_2 < n_1 m_2$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.21. *Έστω* $(n_1, n_2), (m_1, m_2), (k_1, k_2), (l_1, l_2) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$. *Αν* $(n_1, n_2) \succ (m_1, m_2)$, $(n_1, n_2) \sim (k_1, k_2)$, $(m_1, m_2) \sim (l_1, l_2)$, *τότε* $(k_1, k_2) \succ (l_1, l_2)$.

Απόδειξη. Έστω $(n_1, n_2) \succ (m_1, m_2)$, $(n_1, n_2) \sim (k_1, k_2)$ και $(m_1, m_2) \sim (l_1, l_2)$. Τότε $n_1 m_2 > m_1 n_2$, $n_1 k_2 = k_1 n_2$ και $m_1 l_2 = l_1 m_2$. Τότε $k_1 n_2 m_1 l_2 = l_1 m_2 n_1 k_2 > l_1 k_2 n_2 m_1$. Άρα $k_1 l_2 > l_1 k_2$ και, επομένως, $(k_1, k_2) \succ (l_1, l_2)$. □

Η πρόταση 13.21 λέει ότι αν κάποιος αντιπρόσωπος ενός θετικού ρητού r είναι μεγαλύτερος από κάποιον αντιπρόσωπο ενός άλλου θετικού ρητού s, τότε κάθε αντιπρόσωπος του r είναι μεγαλύτερος από κάθε αντιπρόσωπο του s. Μπορούμε, επομένως, να διατυπώσουμε τον εξής ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ 13.7. *Έστω* $r, s \in \mathbb{Q}_+$. *Λέμε ότι ο* r *είναι* ***μεγαλύτερος από*** *τον* s *και γράφουμε* $r > s$ *ή, ισοδύναμα, ότι ο* s *είναι* ***μικρότερος από*** *τον* r *και γράφουμε* $s < r$ *αν ισχύει* $(n_1, n_2) \succ (m_1, m_2)$ *για οποιονδήποτε (και, επομένως, για κάθε) αντιπρόσωπο* (n_1, n_2) *του* r *και για οποιονδήποτε (και, επομένως, για κάθε) αντιπρόσωπο* (m_1, m_2) *του* s.

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.22. *Για κάθε* $r, s \in \mathbb{Q}_+$ *ακριβώς ένα από τα παρακάτω είναι σωστό:* $r = s$, $r > s$, $r < s$.

Απόδειξη. Έστω οποιοιδήποτε αντιπρόσωποι $(n_1, n_2), (m_1, m_2)$ των r, s, αντιστοίχως. Βάσει των ορισμών, το να ισχύει ακριβώς ένα από τα $r = s$, $r > s$, $r < s$ είναι ισοδύναμο με το να ισχύει ακριβώς ένα από τα $(n_1, n_2) \sim (m_1, m_2)$, $(n_1, n_2) \succ (m_1, m_2)$, $(n_1, n_2) \prec (m_1, m_2)$ και αυτό είναι ισοδύναμο με το να ισχύει ακριβώς ένα από τα $n_1m_2 = m_1n_2$, $n_1m_2 > m_1n_2$, $n_1m_2 < m_1n_2$. □

ΟΡΙΣΜΟΣ 13.8. *Επίσης, λέμε ότι ο r είναι **μεγαλύτερος από ή ίσος με** τον s και γράφουμε $r \geq s$ ή, ισοδύναμα, ότι ο s είναι **μικρότερος από ή ίσος με** τον r και γράφουμε $s \leq r$ αν ισχύει $r > s$ ή $r = s$ ή, ισοδύναμα, αν ισχύει $s < r$ ή $s = r$.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.23. *Έστω $r, s, t \in \mathbb{Q}_+$.*

[α] *Αν $r < s$ και $s < t$, τότε $r < t$.*

[β] *Αν $r \leq s$ και $s < t$ ή αν $r < s$ και $s \leq t$, τότε $r < t$.*

[γ] *Αν $r \leq s$ και $s \leq t$, τότε $r \leq t$.*

Απόδειξη. [α] Έστω $r < s$ και $s < t$. Έστω οποιοιδήποτε αντιπρόσωποι (n_1, n_2), (m_1, m_2), (k_1, k_2) των r, s, t, αντιστοίχως. Τότε ισχύει $(n_1, n_2) \prec (m_1, m_2)$ και $(m_1, m_2) \prec (k_1, k_2)$, οπότε $n_1m_2 < m_1n_2$ και $m_1k_2 < k_1m_2$. Συνεπάγεται $n_1m_2m_1k_2 < m_1n_2k_1m_2$ και, επομένως, $n_1k_2 < k_1n_2$. Άρα $(n_1, n_2) \prec (k_1, k_2)$, οπότε $r < t$.

[β], [γ]. Προφανή, λόγω του [α]. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.24. [α] *Για κάθε $r \in \mathbb{Q}_+$ υπάρχει $s \in \mathbb{Q}_+$ ώστε $s > r$.*

[β] *Για κάθε $r \in \mathbb{Q}_+$ υπάρχει $s \in \mathbb{Q}_+$ ώστε $s < r$.*

[γ] *Για κάθε $r, s \in \mathbb{Q}_+$, $r < s$ υπάρχει $t \in \mathbb{Q}_+$ ώστε $r < t < s$.*

Απόδειξη. [α] Έστω $r \in \mathbb{Q}_+$ και οποιοσδήποτε αντιπρόσωπος (n_1, n_2) του r. Θεωρούμε το ζεύγος $(n_1 + n_1, n_2)$ και τον $s \in \mathbb{Q}_+$, ο οποίος έχει το $(n_1 + n_1, n_2)$ ως αντιπρόσωπο. Ισχύει $(n_1 + n_1, n_2) \succ (n_1, n_2)$ διότι $(n_1 + n_1)n_2 = n_1n_2 + n_1n_2 > n_1n_2$. Άρα $s > r$.

[β] Έστω $r \in \mathbb{Q}_+$ και οποιοσδήποτε αντιπρόσωπος (n_1, n_2) του r. Θεωρούμε το ζεύγος $(n_1, n_2 + n_2)$ και τον $s \in \mathbb{Q}_+$, ο οποίος έχει το $(n_1, n_2 + n_2)$ ως αντιπρόσωπο. Ισχύει $(n_1, n_2 + n_2) \prec (n_1, n_2)$ διότι $n_1(n_2 + n_2) = n_1n_2 + n_1n_2 > n_1n_2$. Άρα $s < r$.

[γ] Έστω $r, s \in \mathbb{Q}_+$, $r < s$ και οποιοιδήποτε αντιπρόσωποι (n_1, n_2) και (m_1, m_2) των r, s, αντιστοίχως. Επομένως, ισχύει $(n_1, n_2) \prec (m_1, m_2)$, οπότε $n_1m_2 < m_1n_2$. Θεωρούμε το ζεύγος $(n_1 + m_1, n_2 + m_2)$ και τον $t \in \mathbb{Q}_+$, ο οποίος έχει το $(n_1 + m_1, n_2 + m_2)$ ως αντιπρόσωπο.
Από την $n_1m_2 < m_1n_2$ συνεπάγεται $n_1n_2 + n_1m_2 < n_1n_2 + m_1n_2$, οπότε $n_1(n_2 + m_2) < (n_1 + m_1)n_2$. Άρα $(n_1, n_2) \prec (n_1 + m_1, n_2 + m_2)$ και, επομένως, $r < t$.
Από την $n_1m_2 < m_1n_2$ συνεπάγεται $n_1m_2 + m_1m_2 < m_1n_2 + m_1m_2$, οπότε $(n_1 + m_1)m_2 < m_1(n_2 + m_2)$. Άρα $(n_1 + m_1, n_2 + m_2) \prec (m_1, m_2)$ και, επομένως, $t < s$. □

13.2.2 Πρόσθεση.

ΟΡΙΣΜΟΣ 13.9. *Έστω $(n_1, n_2), (m_1, m_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Ορίζουμε ως **άθροισμα** των ζευγών αυτών και το συμβολίζουμε $(n_1, n_2) + (m_1, m_2)$ το ζεύγος $(n_1m_2 + m_1n_2, n_2m_2)$.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.25. *Έστω $(n_1, n_2), (m_1, m_2), (k_1, k_2), (l_1, l_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Αν $(n_1, n_2) \sim (k_1, k_2)$ και $(m_1, m_2) \sim (l_1, l_2)$, τότε $(n_1, n_2) + (m_1, m_2) \sim (k_1, k_2) + (l_1, l_2)$.*

Απόδειξη. Έστω $(n_1, n_2) \sim (k_1, k_2)$ και $(m_1, m_2) \sim (l_1, l_2)$. Τότε $n_1k_2 = k_1n_2$ και $m_1l_2 = l_1m_2$. Για να αποδείξουμε ότι $(n_1, n_2) + (m_1, m_2) \sim (k_1, k_2) + (l_1, l_2)$ ή, ισοδύναμα, $(n_1m_2 + m_1n_2, n_2m_2) \sim (k_1l_2 + l_1k_2, k_2l_2)$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $(n_1m_2 + m_1n_2)k_2l_2 = (k_1l_2 + l_1k_2)n_2m_2$. Αυτό, όμως, είναι άμεση συνέπεια των $n_1k_2 = k_1n_2$ και $m_1l_2 = l_1m_2$. □

Η πρόταση 13.25 λέει το εξής. Έστω ότι προσθέτουμε έναν αντιπρόσωπο ενός θετικού ρητού r και έναν αντιπρόσωπο ενός άλλου θετικού ρητού s και βρίσκουμε κάποιο άθροισμα. Το άθροισμα αυτό είναι αντιπρόσωπος κάποιου τρίτου θετικού ρητού t. Αν προσθέσουμε έναν άλλο αντιπρόσωπο του r και έναν άλλο αντιπρόσωπο του s, τότε το νέο άθροισμα θα είναι ισοδύναμο με το προηγούμενο άθροισμα, οπότε θα είναι αντιπρόσωπος του ίδιου t. Μπορούμε, επομένως, να διατυπώσουμε τον εξής ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ 13.10. *Έστω $r, s \in \mathbb{Q}_+$. Ορίζουμε ως **άθροισμα** των r, s και το συμβολίζουμε*

$$r + s$$

*τον θετικό ρητό ο οποίος έχει αντιπρόσωπο το άθροισμα $(n_1, n_2) + (m_1, m_2)$ οποιουδήποτε (και, επομένως, κάθε) αντιπρόσωπου (n_1, n_2) του r και οποιουδήποτε (και, επομένως, κάθε) αντιπρόσωπου (m_1, m_2) του s. Η πράξη η οποία σε κάθε $r, s \in \mathbb{Q}_+$ αντιστοιχίζει τον $r + s$ ονομάζεται **πρόσθεση** στο $\mathbb{Q}_+$.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.26. *Για κάθε $r, s \in \mathbb{Q}_+$ ισχύει $r + s = s + r$.*

Απόδειξη. Έστω $(n_1, n_2), (m_1, m_2)$ αντιπρόσωποι των r, s, αντιστοίχως. Ο $(n_1, n_2)+(m_1, m_2) = (n_1m_2 + m_1n_2, n_2m_2)$ είναι αντιπρόσωπος του $r + s$ και ο $(m_1, m_2) + (n_1, n_2) = (m_1n_2 + n_1m_2, m_2n_2)$ είναι αντιπρόσωπος του $s+r$. Άρα αρκεί να αποδειχθεί ότι $(n_1m_2+m_1n_2, n_2m_2) \sim (m_1n_2 + n_1m_2, m_2n_2)$. Αυτό, όμως, είναι προφανές, διότι τα δύο αυτά ζεύγη είναι ίδια. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.27. *Για κάθε $r, s, t \in \mathbb{Q}_+$ ισχύει $(r + s) + t = r + (s + t)$.*

Απόδειξη. Έστω (n_1, n_2), (m_1, m_2) και (k_1, k_2) αντιπρόσωποι των r, s και t, αντιστοίχως. Τότε ο $((n_1, n_2) + (m_1, m_2)) + (k_1, k_2) = (n_1m_2 + m_1n_2, n_2m_2) + (k_1, k_2) = (n_1m_2k_2 + m_1n_2k_2 + k_1n_2m_2, n_2m_2k_2)$ είναι αντιπρόσωπος του $(r + s) + t$ και ο $(n_1, n_2) + ((m_1, m_2) + (k_1, k_2)) = (n_1, n_2)+(m_1k_2+k_1m_2, m_2k_2) = (n_1m_2k_2+m_1k_2n_2+k_1m_2n_2, n_2m_2k_2)$ είναι αντιπρόσωπος του $r + (s + t)$. Άρα αρκεί να αποδείξουμε ότι $(n_1m_2k_2 + m_1n_2k_2 + k_1n_2m_2, n_2m_2k_2) \sim (n_1m_2k_2 + m_1k_2n_2 + k_1m_2n_2, n_2m_2k_2)$. Αυτό, όμως, είναι προφανές, διότι τα δύο ζεύγη είναι ίδια. □

Η μεταθετική και η προσεταιριστική ιδιότητα, οι οποίες εκφράζονται στις προτάσεις 13.26 και 13.27, αντιστοίχως, επιτρέπουν να παραλείπουμε τις παρενθέσεις όταν εκτελούμε διαδοχικές προσθέσεις καθώς και να αλλάζουμε κατά βούληση τη σειρά εκτέλεσης διαδοχικών προσθέσεων.

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.28. *Για κάθε $r, s \in \mathbb{Q}_+$ ισχύει $r + s > r$.*

Απόδειξη. Έστω $(n_1, n_2), (m_1, m_2)$ αντιπρόσωποι των r, s, αντιστοίχως. Ο $(n_1, n_2)+(m_1, m_2) = (n_1m_2 + m_1n_2, n_2m_2)$ είναι αντιπρόσωπος του $r + s$, οπότε, για να αποδείξουμε ότι $r + s > r$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $(n_1m_2 + m_1n_2, n_2m_2) \succ (n_1, n_2)$ ή, ισοδύναμα, $n_1m_2n_2 + m_1n_2n_2 > n_1n_2m_2$, το οποίο είναι σωστό. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.29. *Έστω $r, s, t \in \mathbb{Q}_+$. Ισχύει $r < s$ αν και μόνο αν $r + t < s + t$. Επίσης, ισχύει $r = s$ αν και μόνο αν $r + t = s + t$.*

Απόδειξη. Έστω $r < s$ και (n_1, n_2), (m_1, m_2), (k_1, k_2) αντιπρόσωποι των r, s, t, αντιστοίχως. Τότε ισχύει $(n_1, n_2) \prec (m_1, m_2)$ ή, ισοδύναμα, $n_1m_2 < m_1n_2$. Οι $(n_1, n_2) + (k_1, k_2) = (n_1k_2 + k_1n_2, n_2k_2)$, $(m_1, m_2) + (k_1, k_2) = (m_1k_2 + k_1m_2, m_2k_2)$ είναι αντιπρόσωποι των $r + t$, $s + t$, αντιστοίχως. Επομένως, για να αποδείξουμε ότι $r + t < s + t$ αρκεί να αποδείξουμε ότι $(n_1k_2 + k_1n_2, n_2k_2) \prec (m_1k_2 + k_1m_2, m_2k_2)$ ή, ισοδύναμα, ότι $n_1k_2m_2k_2 + k_1n_2m_2k_2 < m_1k_2n_2k_2 + k_1m_2n_2k_2$. Αυτό, όμως, είναι άμεση συνέπεια του $n_1m_2 < m_1n_2$.
Έστω $r + t < s + t$. Αν $r = s$, τότε $r + t = s + t$ και, αν $s < r$, τότε $s + t < r + t$. Και στις δύο περιπτώσεις καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα $r < s$.
Προφανώς, αν $r = s$, τότε $r + t = s + t$. Έστω $r + t = s + t$. Αν $r < s$, τότε $r + t < s + t$ και, αν $s < r$, τότε $s + t < r + t$. Και στις δύο περιπτώσεις καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα $r = s$. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.30. *Έστω $r, s, t, u \in \mathbb{Q}_+$.*
[α] *Αν $r < s$ και $t < u$, τότε $r + t < s + u$.*
[β] *Αν $r \le s$ και $t < u$ ή αν $r < s$ και $t \le u$, τότε $r + t < s + u$.*
[γ] *Αν $r \le s$ και $t \le u$, τότε $r + t \le s + u$.*

Απόδειξη. [α] Έστω $r < s$ και $t < u$. Τότε, $r + t < s + t < s + u$.
[β], [γ]. Προφανή, λόγω του [α]. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.31. *Έστω $r, s \in \mathbb{Q}_+$. Αν $r < s$, τότε υπάρχει μοναδικός $t \in \mathbb{Q}_+$ ώστε $r + t = s$. Αντιθέτως, αν $r \ge s$, τότε δεν υπάρχει κανένας $t \in \mathbb{Q}_+$ ώστε $r + t = s$.*

Απόδειξη. Έστω $r < s$ και (n_1, n_2), (m_1, m_2) αντιπρόσωποι των r, s, αντιστοίχως. Τότε ισχύει $(n_1, n_2) \prec (m_1, m_2)$ ή, ισοδύναμα, $n_1 m_2 < m_1 n_2$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $n_1 m_2 + k = m_1 n_2$. Θεωρούμε τον $t \in \mathbb{Q}_+$ ο οποίος έχει ως αντιπρόσωπο το ζεύγος $(k, n_2 m_2)$. Τότε ο $r + t$ έχει ως αντιπρόσωπο το $(n_1, n_2) + (k, n_2 m_2) = (n_1 n_2 m_2 + k n_2, n_2 n_2 m_2)$ και, για να αποδείξουμε ότι $r + t = s$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $(n_1 n_2 m_2 + k n_2, n_2 n_2 m_2) \sim (m_1, m_2)$ ή, ισοδύναμα, $n_1 n_2 m_2 m_2 + k n_2 m_2 = m_1 n_2 n_2 m_2$. Αυτό, όμως, είναι άμεση συνέπεια του $n_1 m_2 + k = m_1 n_2$.
Το ότι ο t είναι μοναδικός είναι συνέπεια της πρότασης 13.29.
Γνωρίζουμε ότι από $r + t = s$ συνεπάγεται $s > r$. Άρα, αν $r \ge s$, τότε δεν υπάρχει κανένας $t \in \mathbb{Q}_+$ ώστε $r + t = s$. □

ΟΡΙΣΜΟΣ 13.11. *Αν $r, s \in \mathbb{Q}_+$, $r < s$, τότε ο μοναδικός $t \in \mathbb{Q}_+$ που ικανοποιεί την $r + t = s$ ονομάζεται **διαφορά** των s, r και συμβολίζεται*

$$s - r.$$

*Η πράξη η οποία σε κάθε $r, s \in \mathbb{Q}_+$, $r < s$ αντιστοιχίζει τον $s - r$ ονομάζεται **αφαίρεση** στο $\mathbb{Q}_+$.*

13.2.3 Πολλαπλασιασμός.

ΟΡΙΣΜΟΣ 13.12. *Έστω $(n_1, n_2), (m_1, m_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Ορίζουμε ως **γινόμενο** των ζευγών αυτών και το συμβολίζουμε $(n_1, n_2) \cdot (m_1, m_2)$ το ζεύγος $(n_1 m_1, n_2 m_2)$.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.32. *Έστω $(n_1, n_2), (m_1, m_2), (k_1, k_2), (l_1, l_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Αν $(n_1, n_2) \sim (k_1, k_2)$ και $(m_1, m_2) \sim (l_1, l_2)$, τότε $(n_1, n_2) \cdot (m_1, m_2) \sim (k_1, k_2) \cdot (l_1, l_2)$.*

Απόδειξη. Έστω $(n_1, n_2) \sim (k_1, k_2)$ και $(m_1, m_2) \sim (l_1, l_2)$. Τότε $n_1 k_2 = k_1 n_2$ και $m_1 l_2 = l_1 m_2$. Συνεπάγεται $n_1 k_2 m_1 l_2 = k_1 n_2 l_1 m_2$ και, επομένως, $(n_1 m_1, n_2 m_2) \sim (k_1 l_1, k_2 l_2)$, δηλαδή $(n_1, n_2) \cdot (m_1, m_2) \sim (k_1, k_2) \cdot (l_1, l_2)$. □

Η πρόταση 13.32 λέει το εξής. Έστω ότι πολλαπλασιάζουμε έναν αντιπρόσωπο ενός θετικού ρητού r και έναν αντιπρόσωπο ενός άλλου θετικού ρητού s και βρίσκουμε κάποιο γινόμενο. Το γινόμενο αυτό είναι αντιπρόσωπος κάποιου τρίτου θετικού ρητού t. Αν πολλαπλασιάσουμε έναν άλλο αντιπρόσωπο του r και έναν άλλο αντιπρόσωπο του s, τότε το νέο γινόμενο θα είναι αντιπρόσωπος του ίδιου t. Μπορούμε, επομένως, να διατυπώσουμε τον εξής ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ 13.13. *Έστω $r, s \in \mathbb{Q}_+$. Ορίζουμε ως **γινόμενο** των r, s και το συμβολίζουμε*

$$r \cdot s$$

*τον θετικό ρητό ο οποίος έχει αντιπρόσωπο το γινόμενο $(n_1, n_2) \cdot (m_1, m_2)$ οποιουδήποτε (και, επομένως, κάθε) αντιπρόσωπου (n_1, n_2) του r και οποιουδήποτε (και, επομένως, κάθε) αντιπρόσωπου (m_1, m_2) του s. Η πράξη η οποία σε κάθε $r, s \in \mathbb{Q}_+$ αντιστοιχίζει τον $r \cdot s$ ονομάζεται **πολλαπλασιασμός** στο $\mathbb{Q}_+$.*

Στο εξής, θα γράφουμε rs αντί $r \cdot s$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.33. *Για κάθε $r, s \in \mathbb{Q}_+$ ισχύει $rs = sr$.*

Απόδειξη. Έστω (n_1, n_2), (m_1, m_2) αντιπρόσωποι των r, s, αντιστοίχως. Ο $(n_1, n_2)(m_1, m_2) = (n_1m_1, n_2m_2)$ είναι αντιπρόσωπος του rs και ο $(m_1, m_2)(n_1, n_2) = (m_1n_1, m_2n_2)$ είναι αντιπρόσωπος του sr. Άρα αρκεί να αποδείξουμε ότι $(n_1m_1, n_2m_2) \sim (m_1n_1, m_2n_2)$. Αυτό, όμως, είναι προφανές, διότι τα δύο ζεύγη είναι ίδια. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.34. *Για κάθε $r, s, t \in \mathbb{Q}_+$ ισχύει $(rs)t = r(st)$.*

Απόδειξη. Έστω αντιπρόσωποι (n_1, n_2), (m_1, m_2), (k_1, k_2), αντιστοίχως, των r, s, t.
Ο $((n_1, n_2)(m_1, m_2))(k_1, k_2) = (n_1m_1, n_2m_2)(k_1, k_2) = (n_1m_1k_1, n_2m_2k_2)$ είναι αντιπρόσωπος του $(rs)t$ και ο $(n_1, n_2)((m_1, m_2)(k_1, k_2)) = (n_1, n_2)(m_1k_1, m_2k_2) = (n_1m_1k_1, n_2m_2k_2)$ είναι αντιπρόσωπος του $r(st)$. Αρκεί να αποδειχθεί ότι $(n_1m_1k_1, n_2m_2k_2) \sim (n_1m_1k_1, n_2m_2k_2)$. Αυτό, όμως, είναι προφανές, διότι τα δύο ζεύγη είναι ίδια. □

Η μεταθετική και η προσεταιριστική ιδιότητα που εκφράζονται από τις προτάσεις 13.33 και 13.34, αντιστοίχως, επιτρέπουν να παραλείπουμε τις παρενθέσεις όταν εκτελούμε διαδοχικούς πολλαπλασιασμούς καθώς και να αλλάζουμε κατά βούληση τη σειρά εκτέλεσης διαδοχικών πολλαπλασιασμών.

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.35. *Για κάθε $r, s, t \in \mathbb{Q}_+$ ισχύει $r(s + t) = rs + rt$.*

Απόδειξη. Έστω (n_1, n_2), (m_1, m_2), (k_1, k_2) αντιπρόσωποι, αντιστοίχως, των r, s, t.
Ο $(n_1, n_2)((m_1, m_2)+(k_1, k_2)) = (n_1m_1k_2+n_1k_1m_2, n_2m_2k_2)$ είναι αντιπρόσωπος του $r(s+t)$ και ο $(n_1, n_2)(m_1, m_2) + (n_1, n_2)(k_1, k_2) = (n_1m_1n_2k_2 + n_1k_1n_2m_2, n_2m_2n_2k_2)$ είναι αντιπρόσωπος του $rs + rt$. Άρα, για να αποδείξουμε ότι $r(s + t) = rs + rt$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $(n_1m_1k_2 + n_1k_1m_2, n_2m_2k_2) \sim (n_1m_1n_2k_2 + n_1k_1n_2m_2, n_2m_2n_2k_2)$. Το τελευταίο είναι ισοδύναμο με $(n_1m_1k_2 + n_1k_1m_2)n_2m_2n_2k_2 = (n_1m_1n_2k_2 + n_1k_1n_2m_2)n_2m_2k_2$, που είναι προφανές. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.36. *Έστω $r, s, t \in \mathbb{Q}_+$. Ισχύει $r < s$ αν και μόνο αν $rt < st$. Επίσης, ισχύει $r = s$ αν και μόνο αν $rt = st$.*

Απόδειξη. Έστω $r < s$ και (n_1, n_2), (m_1, m_2), (k_1, k_2) αντιπρόσωποι των r, s, t, αντιστοίχως. Τότε ισχύει $(n_1, n_2) \prec (m_1, m_2)$ ή, ισοδύναμα, $n_1m_2 < m_1n_2$. Οι $(n_1, n_2)(k_1, k_2) = (n_1k_1, n_2k_2)$, $(m_1, m_2)(k_1, k_2) = (m_1k_1, m_2k_2)$ είναι αντιπρόσωποι των rt, st, αντιστοίχως. Άρα για να αποδείξουμε ότι $rt < st$ αρκεί να αποδείξουμε ότι $(n_1k_1, n_2k_2) \prec (m_1k_1, m_2k_2)$ ή, ισοδύναμα, ότι $n_1k_1m_2k_2 < m_1k_1n_2k_2$. Αυτό, όμως, είναι άμεση συνέπεια του $n_1m_2 < m_1n_2$.
Έστω $rt < st$. Αν $r = s$, τότε $rt = st$ και, αν $s < r$, τότε $st < rt$. Και στις δύο περιπτώσεις καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα $r < s$.
Προφανώς, αν $r = s$, τότε $rt = st$. Έστω $rt = st$. Αν $r < s$, τότε $rt < st$ και, αν $s < r$, τότε $st < rt$. Και στις δύο περιπτώσεις καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα $r = s$. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.37. *Έστω $r, s, t, u \in \mathbb{Q}_+$.*
[α] *Αν $r < s$ και $t < u$, τότε $rt < su$.*
[β] *Αν $r \leq s$ και $t < u$ ή αν $r < s$ και $t \leq u$, τότε $rt < su$.*
[γ] *Αν $r \leq s$ και $t \leq u$, τότε $rt \leq su$.*

Απόδειξη. [α] Έστω $r < s$ και $t < u$. Τότε $rt < st < su$.
[β], [γ]. Προφανή, λόγω του [α]. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.38. *Έστω $r, s \in \mathbb{Q}_+$. Τότε υπάρχει μοναδικός $t \in \mathbb{Q}_+$ ώστε $rt = s$.*

Απόδειξη. Έστω οι αντιπρόσωποι (n_1, n_2), (m_1, m_2), αντιστοίχως, των r, s. Θεωρούμε τον $t \in \mathbb{Q}_+$, ο οποίος έχει ως αντιπρόσωπο το ζεύγος (m_1n_2, n_1m_2). Τότε το $(n_1, n_2)(m_1n_2, n_1m_2) = (n_1m_1n_2, n_2n_1m_2)$ είναι αντιπρόσωπος του rt. Άρα, για να αποδείξουμε ότι $rt = s$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $(n_1m_1n_2, n_2n_1m_2) \sim (m_1, m_2)$ ή, ισοδύναμα, $n_1m_1n_2m_2 = m_1n_2n_1m_2$, το οποίο είναι προφανές.
Το ότι ο t είναι μοναδικός είναι συνέπεια της πρότασης 13.36. □

ΟΡΙΣΜΟΣ 13.14. *Αν $r, s \in \mathbb{Q}_+$, τότε ο μοναδικός $t \in \mathbb{Q}_+$ που ικανοποιεί την $rt = s$ ονομάζεται* ***λόγος*** *των s, r και συμβολίζεται*

$$\frac{s}{r}.$$

Η πράξη η οποία σε κάθε $r, s \in \mathbb{Q}_+$ αντιστοιχίζει τον $\frac{s}{r}$ ονομάζεται ***διαίρεση*** *στο $\mathbb{Q}_+$.*

13.2.4 Οι θετικοί ακέραιοι και οι φυσικοί.

ΟΡΙΣΜΟΣ 13.15. *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε τον θετικό ρητό με αντιπρόσωπο το ζεύγος $(n, 1)$ και τον συμβολίζουμε $\overline{n}$. Κάθε $r \in \mathbb{Q}_+$, ο οποίος γράφεται $r = \overline{n}$ για κάποιον $n \in \mathbb{N}$ ονομάζεται* ***θετικός ακέραιος****. Το σύνολο των θετικών ακεραίων συμβολίζεται $\mathbb{Z}_+$. Δηλαδή, $\mathbb{Z}_+ = \{\overline{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ και είναι $\mathbb{Z}_+ \subseteq \mathbb{Q}_+$.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.39. *Έστω $n, m \in \mathbb{N}$. Τότε ισχύει $n < m$ αν και μόνο αν $\overline{n} < \overline{m}$. Επίσης, ισχύει $n = m$ αν και μόνο αν $\overline{n} = \overline{m}$.*

Απόδειξη. Οι $\overline{n}$ και $\overline{m}$ έχουν αντιπροσώπους τους $(n, 1)$ και $(m, 1)$, αντιστοίχως. Άρα το $\overline{n} < \overline{m}$ είναι ισοδύναμο με το $(n, 1) \prec (m, 1)$ κι αυτό είναι ισοδύναμο με το $n1 < m1$. Ομοίως, το $\overline{n} = \overline{m}$ είναι ισοδύναμο με το $(n, 1) \sim (m, 1)$ κι αυτό είναι ισοδύναμο με το $n1 = m1$. □

Μια άμεση συνέπεια της πρότασης 13.39 είναι ότι για κάθε θετικό ακέραιο $r \in \mathbb{Z}_+$ υπάρχει *ακριβώς* ένας $n \in \mathbb{N}$ ώστε $r = \overline{n}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.40. *Έστω $r, s \in \mathbb{Q}_+$. Τότε υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\overline{n}r > s$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τον $t = \frac{s}{r} \in \mathbb{Q}_+$, για τον οποίο ισχύει $tr = s$. Έστω (n_1, n_2) οποιοσδήποτε αντιπρόσωπος του t και έστω $n = n_1 + 1$. Επειδή $n_2 \geq 1$, ισχύει $nn_2 \geq n > n_1 = n_11$, οπότε $(n, 1) \succ (n_1, n_2)$. Άρα $\overline{n} > t$ και, επομένως, $\overline{n}r > tr = s$. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.41. *Έστω $r \in \mathbb{Q}_+$. Τότε υπάρχουν $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε $r = \frac{\overline{n_1}}{\overline{n_2}}$. Ειδικώτερα, το ζεύγος (n_1, n_2) είναι αντιπρόσωπος του r αν και μόνο αν $r = \frac{\overline{n_1}}{\overline{n_2}}$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε οποιονδήποτε αντιπρόσωπο (n_1, n_2) του $r \in \mathbb{Q}_+$. Οι $(n_1, 1)$ και $(n_2, 1)$ είναι αντιπρόσωποι των $\overline{n_1}$ και $\overline{n_2}$, αντιστοίχως. Άρα ο $(n_2, 1)(n_1, n_2) = (n_2n_1, n_2)$ είναι αντιπρόσωπος του $\overline{n_2}\,r$ και, επειδή, $(n_2n_1, n_2) \sim (n_1, 1)$, συνεπάγεται ότι $\overline{n_2}\,r = \overline{n_1}$. Άρα $r = \frac{\overline{n_1}}{\overline{n_2}}$.
Αντιστρόφως, έστω $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε $r = \frac{\overline{n_1}}{\overline{n_2}}$ και, επομένως $\overline{n_2}\,r = \overline{n_1}$. Αν (m_1, m_2) είναι οποιοσδήποτε αντιπρόσωπος του r, τότε το $(n_2, 1)(m_1, m_2) = (n_2m_1, m_2)$ είναι αντιπρόσωπος του $\overline{n_2}\,r$, οπότε ισχύει $(n_2m_1, m_2) \sim (n_1, 1)$ ή, ισοδύναμα, $n_2m_1 = n_1m_2$ ή, ισοδύναμα, $(n_1, n_2) \sim (m_1, m_2)$. Άρα το (n_1, n_2) είναι αντιπρόσωπος του r. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.42. *Έστω $n, m, k \in \mathbb{N}$.*
[α] *Ισχύει $n + m = k$ αν και μόνο αν $\overline{n} + \overline{m} = \overline{k}$.*
[β] *Ισχύει $nm = k$ αν και μόνο αν $\overline{n}\,\overline{m} = \overline{k}$.*

Απόδειξη. [α] Οι $(n, 1)$, $(m, 1)$, $(k, 1)$ είναι αντιπρόσωποι των $\overline{n}$, $\overline{m}$, $\overline{k}$. Άρα ο $(n, 1) + (m, 1) = (n1 + m1, 11) = (n + m, 1)$ είναι αντιπρόσωπος του $\overline{n} + \overline{m}$. Άρα ισχύει $\overline{n} + \overline{m} = \overline{k}$ αν και μόνο αν $(n + m, 1) \sim (k, 1)$ αν και μόνο αν $(n + m)1 = k1$ αν και μόνο αν $n + m = k$.

[β] Ο $(n, 1)(m, 1) = (nm, 11) = (nm, 1)$ είναι αντιπρόσωπος του $\overline{n}\,\overline{m}$. Άρα ισχύει $\overline{n}\,\overline{m} = \overline{k}$ αν και μόνο αν $(nm, 1) \sim (k, 1)$ αν και μόνο αν $nm1 = k1$ αν και μόνο αν $nm = k$. □

Μια συνέπεια της πρότασης 13.42 είναι η εξής: *το άθροισμα και το γινόμενο θετικών ακεραίων είναι θετικοί ακέραιοι*. Πράγματι, το άθροισμα $\overline{n}+\overline{m}$ των θετικών ακεραίων $\overline{n}, \overline{m}$ είναι ίσο με τον θετικό ακέραιο $\overline{k}$, όπου $k = n + m$. Με άλλα λόγια, ισχύει $\overline{n}+\overline{m} = \overline{n+m}$. Ομοίως, το γινόμενο $\overline{n}\,\overline{m}$ των θετικών ακεραίων $\overline{n}, \overline{m}$ είναι ίσο με τον θετικό ακέραιο $\overline{k}$, όπου $k = nm$. Δηλαδή, ισχύει $\overline{n}\,\overline{m} = \overline{nm}$.

Μια πιο σημαντική συνέπεια των προτάσεων 13.39 και 13.42 είναι η εξής. Ας υποθέσουμε ότι αντικαθιστούμε κάθε $n \in \mathbb{N}$ με τον αντίστοιχο $\overline{n} \in \mathbb{Z}_+$ ή, αντιστρόφως, ότι αντικαθιστούμε κάθε $\overline{n} \in \mathbb{Z}_+$ με τον αντίστοιχο $n \in \mathbb{N}$. Τότε *οι σχέσεις διάταξης καθώς και οι αριθμητικές σχέσεις ανάμεσα στα στοιχεία του $\mathbb{N}$ μένουν αμετάβλητες ως σχέσεις διάταξης καθώς και αριθμητικές σχέσεις ανάμεσα στα αντίστοιχα στοιχεία του $\mathbb{Z}_+$ και αντιστρόφως*. Πιο συγκεκριμένα: (i) ισχύει $n < m$ αν και μόνο αν ισχύει $\overline{n} < \overline{m}$ και ισχύει $n = m$ αν και μόνο αν ισχύει $\overline{n} = \overline{m}$, (ii) ισχύει $n + m = k$ αν και μόνο αν ισχύει $\overline{n} + \overline{m} = \overline{k}$ και (iii) ισχύει $nm = k$ αν και μόνο αν ισχύει $\overline{n}\,\overline{m} = \overline{k}$. Αυτό μας επιτρέπει να αντικαταστήσουμε το σύνολο $\mathbb{N}$ με το σύνολο $\mathbb{Z}_+$ ή, αντιστρόφως, το σύνολο $\mathbb{Z}_+$ με το σύνολο $\mathbb{N}$ χωρίς καμιά ουσιαστική αλλαγή στις βασικές δομές των δύο συνόλων, τη δομή διάταξης και τις αλγεβρικές δομές. Μπορούμε να φανταστούμε ότι πρόκειται για το ίδιο βασικό σύνολο του οποίου κάθε στοιχείο εμφανίζεται με δύο ονόματα: το όνομα n και το όνομα $\overline{n}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 13.16. *Στο εξής, θεωρούμε ότι κάθε φυσικός n έχει αντικατασταθεί από τον αντίστοιχο θετικό ακέραιο $\overline{n}$ και, επομένως, ότι το σύνολο $\mathbb{N}$ έχει αντικατασταθεί από το σύνολο $\mathbb{Z}_+$. Αφού, λοιπόν, "πετάξουμε" και "ξεχάσουμε" τους n και το σύνολό τους $\mathbb{N}$, θα συμφωνήσουμε να χρησιμοποιούμε το απλούστερο σύμβολο n στη θέση του αντίστοιχου στοιχείου $\overline{n}$ του $\mathbb{Z}_+$. Επίσης, θα συμφωνήσουμε να χρησιμοποιούμε εναλλακτικά και τα δύο σύμβολα $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_+$ για το σύνολο $\mathbb{Z}_+$ και να χρησιμοποιούμε και τις δύο ονομασίες "φυσικός" και "θετικός ακέραιος" για τα στοιχεία του $\mathbb{Z}_+$. Ουσιαστικά, λοιπόν, ταυτίζουμε τα σύνολα $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_+$, έτσι ώστε κάθε φυσικός να θεωρείται θετικός ρητός και το σύνολο $\mathbb{N}$ να θεωρείται υποσύνολο του συνόλου $\mathbb{Q}_+$.*

Για παράδειγμα, στην πρόταση 13.40 θα αντικαταστήσουμε το σύμβολο $\overline{n}$ με το n και θα πούμε: *για κάθε δύο θετικούς ρητούς r, s υπάρχει θετικός ακέραιος n ώστε $nr > s$*. Και, επειδή τους θετικούς ακεραίους θα τούς λέμε και φυσικούς, θα πούμε:

Για κάθε δύο θετικούς ρητούς r, s υπάρχει φυσικός n ώστε $nr > s$.

Ένα ακόμη παράδειγμα. Η πρόταση 13.41 λέει: *κάθε θετικός ρητός r είναι ίσος με τον λόγο $\frac{n_1}{n_2}$ δύο θετικών ακεραίων* ή, ισοδύναμα,

Κάθε θετικός ρητός r είναι ίσος με τον λόγο $\frac{n_1}{n_2}$ δύο φυσικών.

Με άλλα λόγια, η πρόταση 13.41 διατυπώνει τη γνωστή μας σχέση ανάμεσα σε θετικούς ρητούς και φυσικούς.

13.3 Οι θετικοί πραγματικοί.

ΟΡΙΣΜΟΣ 13.17. *Ονομάζουμε **θετικό πραγματικό** κάθε υποσύνολο x του $\mathbb{Q}_+$, το οποίο έχει τις εξής τρεις ιδιότητες: (i) το x δεν είναι κενό και δεν είναι ολόκληρο το $\mathbb{Q}_+$, (ii) κάθε στοιχείο του x είναι μικρότερο από κάθε στοιχείο του $\mathbb{Q}_+$ το οποίο δεν ανήκει στο σύνολο x και (iii) το x δεν έχει μέγιστο στοιχείο, δηλαδή για κάθε στοιχείο του x υπάρχει άλλο μεγαλύτερο στοιχείο του x.*
Το σύνολο των θετικών πραγματικών συμβολίζεται $\mathbb{R}_+$.

Τονίζουμε: *κάθε θετικός πραγματικός είναι (σύμφωνα με τον ορισμό του) σύνολο θετικών ρητών*.

ΟΡΙΣΜΟΣ 13.18. *Τα σύνολα με τις ιδιότητες $(i) - (iii)$, τα οποία ονομάσαμε θετικούς πραγματικούς, ονομάζονται, επίσης, **τομές** ή και **τομές Dedekind**.*

Η επόμενη πρόταση εκφράζει μερικές απλές ιδιότητες των θετικών πραγματικών.

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.43. *Έστω $x \in \mathbb{R}_+$.*
[α] *Για κάθε $r, s \in \mathbb{Q}_+$: αν $r \notin x$ και $s > r$, τότε $s \notin x$.*

[β] *Για κάθε* $r, s \in \mathbb{Q}_+$ *: αν* $r \in x$ *και* $s < r$, *τότε* $s \in x$.

[γ] *Για κάθε* $r \in x$ *υπάρχει* $s \in x$, $s > r$.

Απόδειξη. Καθένα από τα [α], β] είναι ισοδύναμο με την ιδιότητα (ii) του x. Το [γ] είναι ισοδύναμο με την ιδιότητα (iii) του x. □

ΟΡΙΣΜΟΣ 13.19. *Έστω* $x \in \mathbb{R}_+$. *Λόγω της ιδιότητας* (ii) *του* x, *κάθε στοιχείο του* x *χαρακτηρίζεται* ***κατώτερος αριθμός*** *του* x *και κάθε στοιχείο εκτός του* x *χαρακτηρίζεται* ***ανώτερος αριθμός*** *του* x.

Το να αποδείξουμε ότι κάποιο υποσύνολο του $\mathbb{Q}_+$ είναι θετικός πραγματικός, δηλαδή ότι έχει τις ιδιότητες $(i) - (iii)$, είναι ισοδύναμο με το να αποδείξουμε τα εξής: (i) το σύνολο περιέχει τουλάχιστον έναν θετικό ρητό και δεν περιέχει τουλάχιστον έναν θετικό ρητό, (ii) για κάθε θετικό ρητό που περιέχεται στο σύνολο, στο σύνολο περιέχεται και *κάθε* θετικός ρητός μικρότερός του και (iii) για κάθε θετικό ρητό που περιέχεται στο σύνολο, στο σύνολο περιέχεται και *κάποιος* θετικός ρητός μεγαλύτερός του.

13.3.1 Διάταξη.

ΟΡΙΣΜΟΣ 13.20. *Αν* $x, y \in \mathbb{R}_+$, *λέμε ότι ο* y *είναι* ***μεγαλύτερος από*** *τον* x *και γράφουμε* $y > x$ *ή, ισοδύναμα, ότι ο* x *είναι* ***μικρότερος από*** *τον* y *και γράφουμε* $x < y$ *αν είναι* $y \supset x$ *ή, ισοδύναμα,* $x \subset y$.

Θυμηθείτε: το σύμβολο $\supset$ σημαίνει γνήσιο υπερσύνολο και το $\subset$ σημαίνει γνήσιο υποσύνολο ενώ το $\supseteq$ σημαίνει υπερσύνολο και το $\subseteq$ σημαίνει υποσύνολο.

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.44. *Έστω* $x, y \in \mathbb{R}_+$. *Ισχύει* $x < y$ *αν και μόνο αν υπάρχει* $r \in \mathbb{Q}_+$ *ώστε* $r \in y$ *και* $r \notin x$.

Απόδειξη. Έστω $x < y$, δηλαδή $x \subset y$. Τότε υπάρχει $r \in \mathbb{Q}_+$ ώστε $r \in y$ και $r \notin x$.
Έστω ότι υπάρχει $r \in \mathbb{Q}_+$ ώστε $r \in y$ και $r \notin x$. Έστω $s \in x$. Τότε $s < r$ και, επομένως, $s \in y$. Άρα $x \subseteq y$ και, λόγω του r, ισχύει $x \subset y$. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.45. *Για κάθε* $x, y \in \mathbb{R}_+$ *ακριβώς ένα από τα παρακάτω είναι σωστό:* $x = y$, $x > y$, $x < y$.

Απόδειξη. Επειδή τα $x = y$, $x > y$, $x < y$ είναι ισοδύναμα, αντιστοίχως, με τα $x = y$, $x \supset y$, $x \subset y$, είναι σαφές ότι τα τρία αυτά ενδεχόμενα αλληλοαποκλείονται.
Έστω $x \neq y$. Τότε είτε (i) υπάρχει $r \in \mathbb{Q}_+$ ώστε $r \in y$ και $r \notin x$ είτε (ii) υπάρχει $r \in \mathbb{Q}_+$ ώστε $r \in x$ και $r \notin y$. Στην περίπτωση (i) ισχύει, σύμφωνα με την πρόταση 13.44, $x < y$ και στην περίπτωση (ii) ισχύει, για τον ίδιο λόγο, $x > y$. □

ΟΡΙΣΜΟΣ 13.21. *Αν* $x, y \in \mathbb{R}_+$, *λέμε ότι ο* y *είναι* ***μεγαλύτερος από ή ίσος με*** *τον* x *και γράφουμε* $y \geq x$ *ή, ισοδύναμα, ότι ο* x *είναι* ***μικρότερος από ή ίσος με*** *τον* y *και γράφουμε* $x \leq y$ *αν είναι* $y > x$ *ή* $y = x$ *ή, ισοδύναμα,* $x < y$ *ή* $x = y$. *Με άλλα λόγια, είναι* $y \geq x$ *ή, ισοδύναμα,* $x \leq y$ *αν και μόνο αν* $y \supseteq x$ *ή, ισοδύναμα,* $x \subseteq y$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.46. *Έστω* $x, y, z \in \mathbb{R}_+$.

[α] *Αν* $x < y$ *και* $y < z$, *τότε* $x < z$.

[β] *Αν* $x \leq y$ *και* $y < z$ *ή αν* $x < y$ *και* $y \leq z$, *τότε* $x < z$.

[γ] *Αν* $x \leq y$ *και* $y \leq z$, *τότε* $x \leq z$.

Απόδειξη. [α] Έστω $x < y$ και $y < z$. Τότε $x \subset y$ και $y \subset z$ και, επομένως, $x \subset z$. Άρα $x < z$.
[β], [γ]. Ομοίως. □

13.3.2 Πρόσθεση.

ΘΕΩΡΗΜΑ 13.3. *Έστω $x, y \in \mathbb{R}_+$. Τότε το σύνολο $z = \{r + s \,|\, r \in x, s \in y\}$ είναι θετικός πραγματικός, δηλαδή στοιχείο του $\mathbb{R}_+$. Επίσης, για κάθε $t, u \in \mathbb{Q}_+$, $t \notin x$, $u \notin y$ ισχύει $t + u \notin z$.*

Απόδειξη. Υπάρχουν $r \in x$, $s \in y$ και, τότε, $r + s \in z$. Άρα το σύνολο z δεν είναι κενό. Επίσης, υπάρχουν $t, u \in \mathbb{Q}_+$, $t \notin x$, $u \notin y$. Τότε, για κάθε $r \in x$, $s \in y$ ισχύει $r < t$, $s < u$, οπότε $r + s < t + u$. Άρα κάθε στοιχείο του z είναι $\neq t + u$, οπότε $t + u \notin z$. Συμπεραίνουμε ότι το z έχει την ιδιότητα (i) των θετικών πραγματικών.
Αποδείξαμε, επίσης, ότι για κάθε $t, u \in \mathbb{Q}_+$, $t \notin x$, $u \notin y$ ισχύει $t + u \notin z$.
Έστω οποιοδήποτε στοιχείο του z. Δηλαδή έστω το $r + s$, όπου $r \in x$, $s \in y$. Έστω οποιοσδήποτε $t \in \mathbb{Q}_+$, $t < r + s$. Επειδή $\frac{t}{r+s}(r + s) = t < r + s = 1(r + s)$, συνεπάγεται $\frac{t}{r+s} < 1$. Άρα $r\frac{t}{r+s} < r1 = r$ και $s\frac{t}{r+s} < s1 = s$. Συνεπάγεται $r\frac{t}{r+s} \in x$ και $s\frac{t}{r+s} \in y$ και, επομένως, $r\frac{t}{r+s} + s\frac{t}{r+s} \in z$. Όμως, $r\frac{t}{r+s} + s\frac{t}{r+s} = (r + s)\frac{t}{r+s} = t$, οπότε $t \in z$. Άρα το z έχει και την ιδιότητα (ii) των θετικών πραγματικών.
Πάλι, έστω οποιοδήποτε στοιχείο του z. Δηλαδή έστω το $r + s$, όπου $r \in x$, $s \in y$. Υπάρχουν $t \in x$, $u \in y$ ώστε $r < t$, $s < u$. Συνεπάγεται $r + s < t + u$ και το $t + u$ είναι στοιχείο του z. Άρα το z έχει και την ιδιότητα (iii) των θετικών πραγματικών.
Άρα $z \in \mathbb{R}_+$. □

ΟΡΙΣΜΟΣ 13.22. *Έστω $x, y \in \mathbb{R}_+$. Τότε το στοιχείο $z \in \mathbb{R}_+$ στο θεώρημα 13.3 ονομάζεται **άθροισμα** των x, y και συμβολίζεται*

$$x + y.$$

*Δηλαδή, $x + y = \{r + s \,|\, r \in x, s \in y\}$. Η πράξη η οποία σε κάθε $x, y \in \mathbb{R}_+$ αντιστοιχίζει το άθροισμα $x + y$ ονομάζεται **πρόσθεση** στο $\mathbb{R}_+$.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.47. *Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}_+$ ισχύει $x + y = y + x$.*

Απόδειξη. $x + y = \{r + s \,|\, r \in x, s \in y\} = \{s + r \,|\, s \in y, r \in x\} = y + x$. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.48. *Για κάθε $x, y, z \in \mathbb{R}_+$ ισχύει $(x + y) + z = x + (y + z)$.*

Απόδειξη. Ισχύει $x + y = \{r + s \,|\, r \in x, s \in y\}$ και $y + z = \{s + t \,|\, s \in y, t \in z\}$. Άρα $(x + y) + z = \{(r + s) + t \,|\, r \in x, s \in y, t \in z\} = \{r + (s + t) \,|\, r \in x, s \in y, t \in z\} = x + (y + z)$. □

Η μεταθετική και η προσεταιριστική ιδιότητα επιτρέπουν να παραλείπουμε τις παρενθέσεις όταν εκτελούμε διαδοχικές προσθέσεις καθώς και να αλλάζουμε κατά βούληση τη σειρά εκτέλεσης διαδοχικών προσθέσεων.

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.49. *Έστω $t \in \mathbb{Q}_+$ και $x \in \mathbb{R}_+$. Υπάρχουν $r \in x$, $s \in \mathbb{Q}_+$, $s \notin x$ ώστε $s - r = t$.*

Απόδειξη. Υπάρχει $r_1 \in x$ και $s_1 \in \mathbb{Q}_+$, $s_1 \notin x$. Τότε ισχύει $s_1 > r_1$, οπότε $s_1 - r_1 \in \mathbb{Q}_+$. Σύμφωνα με την πρόταση 13.40, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $nt > s_1 - r_1$, οπότε $r_1 + nt > s_1$. Άρα το $\{n \in \mathbb{N} \,|\, r_1 + nt \notin x\}$ δεν είναι κενό, οπότε έχει ελάχιστο στοιχείο n_0.
Αν $n_0 = 1$, τότε ορίζουμε $r = r_1$, $s = r_1 + n_0t = r_1 + t$, οπότε ισχύει $r \in x$, $s \in \mathbb{Q}_+$, $s \notin x$ και $s - r = t$. Αν $n_0 > 1$, τότε ορίζουμε $r = r_1 + (n_0 - 1)t \in x$, $s = r_1 + n_0t \notin x$, οπότε ισχύει $r \in x$, $s \in \mathbb{Q}_+$, $s \notin x$ και $s - r = t$. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.50. *Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}_+$ ισχύει $x + y > x$.*

Απόδειξη. Υπάρχει $t \in y$. Βάσει της πρότασης 13.49, υπάρχουν $r \in x$, $s \in \mathbb{Q}_+$, $s \notin x$ ώστε $s - r = t$. Τότε, ισχύει $r + t = s \notin x$ και $r + t \in x + y$. Άρα, από την πρόταση 13.44, ισχύει $x < x + y$. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.51. *Έστω $x, y, z \in \mathbb{R}_+$. Ισχύει $x < y$ αν και μόνο αν $x + z < y + z$. Επίσης, ισχύει $x = y$ αν και μόνο αν $x + z = y + z$.*

Απόδειξη. Έστω $x < y$. Υπάρχει $t_1 \notin x$, $t_1 \in y$. Κατόπιν, υπάρχει $t_2 \in y$, $t_2 > t_1$, οπότε $t_2 - t_1 \in \mathbb{Q}_+$. Βάσει της πρότασης 13.49, υπάρχουν $r \in z$, $s \in \mathbb{Q}_+$, $s \notin z$ ώστε $s - r = t_2 - t_1$. Ορίζουμε $t = t_1 + s = t_2 + r$. Επειδή $t_2 \in y$, $r \in z$, ισχύει $t \in y + z$. Επειδή $t_1 \notin x$, $s \notin z$, ισχύει $t \notin x + z$. Άρα $x + z < y + z$.
Έστω $x + z < y + z$. Αν $x = y$, τότε $x + z = y + z$ και, αν $y < x$, τότε $y + z < x + z$. Και στις δύο περιπτώσεις καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα $x < y$.
Προφανώς, αν $x = y$, τότε $x + z = y + z$. Έστω $x + z = y + z$. Αν $x < y$, τότε $x + z < y + z$ και, αν $y < x$, τότε $y + z < x + z$. Και στις δύο περιπτώσεις καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα $x = y$. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.52. *Έστω $x, y, z, w \in \mathbb{R}_+$.*
[α] *Αν $x < y$ και $z < w$, τότε $x + z < y + w$.*
[β] *Αν $x \leq y$ και $z < w$ ή αν $x < y$ και $z \leq w$, τότε $x + z < y + w$.*
[γ] *Αν $x \leq y$ και $z \leq w$, τότε $x + z \leq y + w$.*

Απόδειξη. [α] Έστω $x < y$ και $z < w$. Τότε $x + z < y + z < y + w$.
[β], [γ]. Προφανή, λόγω του [α]. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.53. *Έστω $x, y \in \mathbb{R}_+$. Αν $x < y$, υπάρχει μοναδικός $z \in \mathbb{R}_+$ ώστε $x + z = y$. Αντιθέτως, αν $x \geq y$, δεν υπάρχει κανένας $z \in \mathbb{R}_+$ ώστε $x + z = y$.*

Απόδειξη. Το τελευταίο μέρος είναι σαφές, διότι $x + z > x$. Επίσης, η μοναδικότητα του z είναι συνέπεια της πρότασης 13.51.
Έστω $x < y$. Ορίζουμε το σύνολο $z = \{s - r \,|\, s \in y, r \notin x, s > r\}$ και θα αποδείξουμε ότι $z \in \mathbb{R}_+$ και $x + z = y$.
Υπάρχει $t_1 \notin x$, $t_1 \in y$. Τώρα, υπάρχει $t_2 \in y$, $t_2 > t_1$. Τότε $t_2 - t_1 \in z$. Κατόπιν, υπάρχει $t \in \mathbb{Q}_+$, $t \notin y$. Για κάθε $s \in y$, $r \notin x$, $s > r$, ισχύει $s - r < (s - r) + r = s < t$. Άρα $t \notin z$. Άρα το z έχει την ιδιότητα (i) των θετικών πραγματικών.
Έστω $s - r \in z$, δηλαδή ώστε $s \in y$, $r \notin x$, $s > r$. Έστω $t \in \mathbb{Q}_+$, $t < s - r$. Τότε $t + r < (s - r) + r = s$, οπότε $t + r \in y$. Επίσης, $t + r > r$. Άρα $t = (t + r) - r \in z$. Άρα το z έχει την ιδιότητα (ii) των θετικών πραγματικών.
Πάλι, έστω $s - r \in z$, δηλαδή ώστε $s \in y$, $r \notin x$, $s > r$. Υπάρχει $t \in y$, $t > s$, οπότε και $t > r$. Τότε $t - r = (t - s) + (s - r) > s - r$ και ο $t - r \in z$. Άρα το z έχει και την ιδιότητα (iii) των θετικών πραγματικών.
Άρα $z \in \mathbb{R}_+$.
Κατόπιν, θα αποδείξουμε ότι $x + z \subseteq y$. Έστω οποιοδήποτε στοιχείο $r_1 + (s - r)$ του $x + z$, δηλαδή ώστε $r_1 \in x$, $s \in y$, $r \notin x$, $s > r$. Τότε $(r_1 + (s - r)) + (r - r_1) = s$ και $r > r_1$, οπότε $r_1 + (s - r) < s$. Άρα $r_1 + (s - r) \in y$.
Τέλος, θα αποδείξουμε ότι $y \subseteq x + z$. (i) Έστω $s \in y$, $s \notin x$. Υπάρχει $s_1 \in y$, $s_1 > s$. Επίσης, υπάρχουν $r \in x$, $s_2 \in \mathbb{Q}_+$, $s_2 \notin x$ ώστε $s_2 - r = s_1 - s$. Τότε ισχύει $s = r + (s_1 - s_2)$, όπου $r \in x$, $s_1 \in y$, $s_2 \notin x$ και $s_1 > s_2$ (διότι $s_1 = s_2 + (s - r)$ και $s > r$). Άρα $s \in x + z$. (ii) Έστω $s \in y$, $s \in x$. Υπάρχει $s_1 \in y$, $s_1 \notin x$ και ισχύει $s < s_1$. Στο (i) είδαμε ότι $s_1 \in x + z$. Άρα $s \in x + z$.
Από $x + z \subseteq y$ και $y \subseteq x + z$ συνεπάγεται $x + z = y$. □

ΟΡΙΣΜΟΣ 13.23. *Αν $x, y \in \mathbb{R}_+$, $x < y$, τότε ο μοναδικός $z \in \mathbb{R}_+$ που ικανοποιεί την $x + z = y$ ονομάζεται **διαφορά** των y, x και συμβολίζεται*

$$y - x.$$

*Η πράξη η οποία σε κάθε $x, y \in \mathbb{R}_+$, $x < y$ αντιστοιχίζει τον $y - x$ ονομάζεται **αφαίρεση** στο $\mathbb{R}_+$.*

13.3.3 Πολλαπλασιασμός.

ΘΕΩΡΗΜΑ 13.4. *Έστω $x, y \in \mathbb{R}_+$. Τότε το σύνολο $z = \{rs \,|\, r \in x, s \in y\}$ είναι θετικός πραγματικός, δηλαδή στοιχείο του $\mathbb{R}_+$. Επίσης, για κάθε $t, u \in \mathbb{Q}_+$, $t \notin x$, $u \notin y$ είναι $tu \notin z$.*

Απόδειξη. Υπάρχουν $r \in x$, $s \in y$ και, τότε, $rs \in z$. Άρα το σύνολο z δεν είναι κενό. Επίσης, υπάρχουν $t, u \in \mathbb{Q}_+$, $t \notin x$, $u \notin y$. Τότε, για κάθε $r \in x$, $s \in y$ ισχύει $r < t$, $s < u$, οπότε $rs < tu$. Άρα κάθε στοιχείο του z είναι $\neq tu$, οπότε $tu \notin z$. Συμπεραίνουμε ότι το z έχει την ιδιότητα (i) των θετικών πραγματικών.
Αποδείξαμε, επίσης, ότι για κάθε $t, u \in \mathbb{Q}_+$, $t \notin x$, $u \notin y$ ισχύει $tu \notin z$.
Έστω οποιοδήποτε στοιχείο του z. Δηλαδή έστω το rs, όπου $r \in x$, $s \in y$. Έστω οποιοσδήποτε $t \in \mathbb{Q}_+$, $t < rs$. Επειδή $r\frac{t}{r} = t < rs$, συνεπάγεται $\frac{t}{r} < s$. Άρα $\frac{t}{r} \in y$ και, επομένως, $t = r\frac{t}{r} \in z$. Άρα το z έχει και την ιδιότητα (ii) των θετικών πραγματικών.
Πάλι, έστω οποιοδήποτε στοιχείο του z. Δηλαδή έστω το rs, όπου $r \in x$, $s \in y$. Υπάρχουν $t \in x$, $u \in y$ ώστε $r < t$, $s < u$. Συνεπάγεται $rs < tu$ και το tu είναι στοιχείο του z. Άρα το z έχει και την ιδιότητα (iii) των θετικών πραγματικών.
Άρα $z \in \mathbb{R}_+$. □

ΟΡΙΣΜΟΣ 13.24. *Έστω $x, y \in \mathbb{R}_+$. Τότε το στοιχείο $z \in \mathbb{R}_+$ στο θεώρημα 13.4 ονομάζεται **γινόμενο** των x, y και συμβολίζεται*

$$x \cdot y.$$

*Δηλαδή, $x \cdot y = \{rs \,|\, r \in x, s \in y\}$. Η πράξη η οποία σε κάθε $x, y \in \mathbb{R}_+$ αντιστοιχίζει το γινόμενο $x \cdot y$ ονομάζεται **πολλαπλασιασμός** στο $\mathbb{R}_+$.*

Το $x \cdot y$, στο εξής, θα το γράφουμε xy.

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.54. *Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}_+$ ισχύει $xy = yx$.*

Απόδειξη. $xy = \{rs \,|\, r \in x, s \in y\} = \{sr \,|\, s \in y, r \in x\} = yx$. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.55. *Για κάθε $x, y, z \in \mathbb{R}_+$ ισχύει $(xy)z = x(yz)$.*

Απόδειξη. Ισχύει $xy = \{rs \,|\, r \in x, s \in y\}$ και $yz = \{st \,|\, s \in y, t \in z\}$. Άρα $(xy)z = \{(rs)t \,|\, r \in x, s \in y, t \in z\} = \{r(st) \,|\, r \in x, s \in y, t \in z\} = x(yz)$. □

Η μεταθετική και η προσεταιριστική ιδιότητα επιτρέπουν να παραλείπουμε τις παρενθέσεις όταν εκτελούμε διαδοχικούς πολλαπλασιασμούς καθώς και να αλλάζουμε κατά βούληση τη σειρά εκτέλεσης διαδοχικών πολλαπλασιασμών.

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.56. *Για κάθε $x, y, z \in \mathbb{R}_+$ ισχύει $x(y + z) = xy + xz$.*

Απόδειξη. Ένα οποιοδήποτε στοιχείο του $x(y + z)$ γράφεται $r(s + t)$, όπου $r \in x$, $s \in y$, $t \in z$. Όμως, τότε $r(s + t) = rs + rt \in xy + xz$. Άρα $x(y + z) \subseteq xy + xz$.
Ένα οποιοδήποτε στοιχείο του $xy + xz$ γράφεται $r_1 s + r_2 t$, όπου $r_1, r_2 \in x$, $s \in y$, $t \in z$. Ορίζουμε r να είναι ο μεγαλύτερος από τους r_1, r_2. Τότε $r \in x$ και $rs \geq r_1 s$, $rt \geq r_2 t$, οπότε $r(s + t) \geq r_1 s + r_2 t$. Επειδή $r(s + t) \in x(y + z)$, συνεπάγεται $r_1 s + r_2 t \in x(y + z)$. Άρα $xy + xz \subseteq x(y + z)$.
Άρα $x(y + z) = xy + xz$. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.57. *Έστω $x, y, z \in \mathbb{R}_+$. Ισχύει $x < y$ αν και μόνο αν $xz < yz$. Επίσης, ισχύει $x = y$ αν και μόνο αν $xz = yz$.*

Απόδειξη. Έστω $x < y$. Βάσει της πρότασης 13.53, υπάρχει $w \in \mathbb{R}_+$ ώστε $x + w = y$. Τότε ισχύει $yz = (x + w)z = xz + wz > xz$.
Έστω $xz < yz$. Αν $x = y$, τότε $xz = yz$ και, αν $y < x$, τότε $yz < xz$. Και στις δύο περιπτώσεις καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα $x < y$.
Προφανώς, αν $x = y$, τότε $xz = yz$. Έστω $xz = yz$. Αν $x < y$, τότε $xz < yz$ και, αν $y < x$, τότε $yz < xz$. Και στις δύο περιπτώσεις καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα $x = y$. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.58. *Έστω $x, y, z, w \in \mathbb{R}_+$.*
[α] *Αν $x < y$ και $z < w$, τότε $xz < yw$.*
[β] *Αν $x \le y$ και $z < w$ ή αν $x < y$ και $z \le w$, τότε $xz < yw$.*
[γ] *Αν $x \le y$ και $z \le w$, τότε $xz \le yw$.*

Απόδειξη. [α] Έστω $x < y$ και $z < w$. Τότε $xz < yz < yw$.
[β], [γ]. Προφανή, λόγω του [α]. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.59. *Έστω $r \in \mathbb{Q}_+$. Τότε το σύνολο $r^* = \{s \in \mathbb{Q}_+ \,|\, s < r\}$ είναι θετικός πραγματικός, δηλαδή στοιχείο του $\mathbb{R}_+$.*

Απόδειξη. Υπάρχει $s \in \mathbb{Q}_+$, $s < r$ και, προφανώς, ο r δεν ανήκει στο r^*. Άρα το r^* έχει την ιδιότητα (i) των θετικών πραγματικών.
Έστω $s \in r^*$ και $t \in \mathbb{Q}_+$, $t < s$. Τότε $s < r$, οπότε $t < r$ και, επομένως, $t \in r^*$. Άρα το r^* έχει την ιδιότητα (ii) των θετικών πραγματικών.
Έστω $s \in r^*$. Δηλαδή $s \in \mathbb{Q}_+$, $s < r$. Τότε υπάρχει $s_1 \in \mathbb{Q}_+$ ώστε $s < s_1 < r$. Άρα $s_1 \in r^*$ και $s_1 > s$. Άρα το r^* έχει και την ιδιότητα (iii) των θετικών πραγματικών. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.60. *Για κάθε $x \in \mathbb{R}_+$ ισχύει $x1^* = x$.*

Απόδειξη. Έστω οποιοδήποτε στοιχείο του $x1^*$. Δηλαδή έστω το rs, όπου $r \in x$, $s \in \mathbb{Q}_+$, $s < 1$. Τότε ισχύει $rs \in \mathbb{Q}_+$ και $rs < r1 = r$, οπότε $rs \in x$. Άρα $x1^* \subseteq x$.
Έστω $r \in x$. Υπάρχει $r_1 \in x$, $r_1 > r$. Τότε $\frac{r}{r_1} r_1 = r < r_1 = 1r_1$, οπότε $\frac{r}{r_1} < 1$ και, επομένως, $\frac{r}{r_1} \in 1^*$. Άρα $r = r_1 \frac{r}{r_1} \in x1^*$. Άρα $x \subseteq x1^*$.
Άρα $x1^* = x$. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.61. *Για κάθε $x \in \mathbb{R}_+$ υπάρχει μοναδικός $y \in \mathbb{R}_+$ ώστε $xy = 1^*$.*

Απόδειξη. Η μοναδικότητα του y είναι συνέπεια της πρότασης 13.57.
Αν δεν υπάρχει ελάχιστος $s \in \mathbb{Q}_+$, $s \notin x$, ορίζουμε $y = \{\frac{1}{s} \,|\, s \in \mathbb{Q}_+, s \notin x\}$. Αν υπάρχει ελάχιστος $s \in \mathbb{Q}_+$, $s \notin x$ και αυτός είναι ο s_0, ορίζουμε $y = \{\frac{1}{s} \,|\, s \in \mathbb{Q}_+, s \notin x, s \neq s_0\}$.
Υπάρχει $s \in \mathbb{Q}_+$, $s \notin x$. Τότε $s + s \in \mathbb{Q}_+$, $s + s > s$, οπότε $s + s \notin x$ και ο $s + s$ δεν είναι ο ελάχιστος s_0 (αν αυτός υπάρχει). Άρα ο $\frac{1}{s+s}$ είναι στοιχείο του y. Κατόπιν, υπάρχει $r \in x$. Για κάθε $s \in \mathbb{Q}_+$, $s \notin x$ ισχύει $s \neq r$ και, επειδή $s\frac{1}{s} = 1 = r\frac{1}{r}$, συνεπάγεται $\frac{1}{r} \neq \frac{1}{s}$. Άρα ο $\frac{1}{r}$ δεν είναι ίσος με κανένα στοιχείο του y. Άρα το y έχει την ιδιότητα (i) των θετικών πραγματικών.
Έστω οποιοδήποτε στοιχείο $\frac{1}{s}$ του y, δηλαδή έστω $s \in \mathbb{Q}_+$, $s \notin x$. Έστω $r < \frac{1}{s}$. Τότε $r\frac{1}{r} = 1 = \frac{1}{s}s$, οπότε $s < \frac{1}{r}$. Άρα $\frac{1}{r} \in \mathbb{Q}_+$, $\frac{1}{r} \notin x$ και ο $\frac{1}{r}$ δεν είναι ο ελάχιστος s_0 (αν αυτός υπάρχει). Άρα $r = \frac{1}{1/r} \in y$. Άρα το y έχει την ιδιότητα (ii) των θετικών πραγματικών.
Έστω οποιοδήποτε στοιχείο $\frac{1}{s}$ του y, δηλαδή έστω $s \in \mathbb{Q}_+$, $s \notin x$ και ο s δεν είναι ο ελάχιστος s_0 (αν αυτός υπάρχει). Άρα υπάρχει $s_1 \in \mathbb{Q}_+$, $s_1 \notin x$, $s_1 < s$ και, επομένως, υπάρχει $s_2 \in \mathbb{Q}_+$, $s_1 < s_2 < s$. Τότε, φυσικά, $s_2 \notin x$ και ο s_2 δεν είναι ο ελάχιστος s_0 (αν αυτός υπάρχει). Άρα $\frac{1}{s_2} \in y$ και $\frac{1}{s} < \frac{1}{s_2}$. Άρα το y έχει και την ιδιότητα (iii) των θετικών πραγματικών.
Άρα $y \in \mathbb{R}_+$.
Τώρα, θα αποδείξουμε ότι $xy \subseteq 1^*$. Έστω οποιοδήποτε στοιχείο $r\frac{1}{s}$ του xy, δηλαδή έστω $r \in x$, $s \in \mathbb{Q}_+$, $s \notin x$. Τότε $s > r$, οπότε $r\frac{1}{s} < s\frac{1}{s} = 1$ και $r\frac{1}{s} \in \mathbb{Q}_+$. Άρα $r\frac{1}{s} \in 1^*$.
Τέλος, θα αποδείξουμε ότι $1^* \subseteq xy$. Έστω $t \in \mathbb{Q}_+$, $t < 1$. Υπάρχει $r \in x$ και, κατόπιν, υπάρχουν $r_1 \in x$, $s_1 \in \mathbb{Q}_+$, $s_1 \notin x$ ώστε $s_1 - r_1 = (1-t)r$. Τότε $\frac{r_1}{t} \in \mathbb{Q}_+$ και $\frac{r_1}{t} > s_1$ (διότι $(1-t)s_1 > (1-t)r$, οπότε $r_1 = s_1 - (1-t)r > ts_1$). Άρα $\frac{r_1}{t} \notin x$ και δεν είναι ο ελάχιστος s_0 (αν αυτός υπάρχει). Άρα $\frac{1}{r_1/t} \in y$. Τέλος, ισχύει $t = r_1 \frac{1}{r_1/t} \in xy$.
Από $xy \subseteq 1^*$ και $1^* \subseteq xy$ συνεπάγεται $xy = 1^*$. □

ΟΡΙΣΜΟΣ 13.25. *Ο y της πρότασης 13.61 ονομάζεται* ***αντίστροφος*** *του x και συμβολίζεται*

$$x^{-1}.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.62. *Έστω $x, y \in \mathbb{R}_+$. Τότε υπάρχει μοναδικός $z \in \mathbb{R}_+$ ώστε $xz = y$.*

Απόδειξη. Η μοναδικότητα του z είναι συνέπεια της πρότασης 13.57.
Έστω $x, y \in \mathbb{R}_+$. Αν $z = x^{-1}y \in \mathbb{R}_+$, τότε $xz = xx^{-1}y = 1^*y = y$. □

ΟΡΙΣΜΟΣ 13.26. *Αν $x, y \in \mathbb{R}_+$, τότε ο μοναδικός $z \in \mathbb{R}_+$ που ικανοποιεί την $xz = y$, δηλαδή ο $x^{-1}y$, ονομάζεται **λόγος** των y, x και συμβολίζεται*

$$\frac{y}{x}.$$

*Η πράξη η οποία σε κάθε $x, y \in \mathbb{R}_+$ αντιστοιχίζει τον $\frac{y}{x}$ ονομάζεται **διαίρεση** στο $\mathbb{R}_+$.*

13.3.4 Η ιδιότητα supremum του $\mathbb{R}_+$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 13.27. *Ένα μη-κενό $A \subseteq \mathbb{R}_+$ χαρακτηρίζεται **άνω φραγμένο** αν υπάρχει $u \in \mathbb{R}_+$ με την ιδιότητα: $a \leq u$ για κάθε $a \in A$. Κάθε u με αυτήν την ιδιότητα χαρακτηρίζεται **άνω φράγμα** του A.*

ΘΕΩΡΗΜΑ 13.5. *Έστω μη-κενό και άνω φραγμένο $A \subseteq \mathbb{R}_+$. Το A έχει μοναδικό ελάχιστο άνω φράγμα.*

Απόδειξη. Ορίζουμε $u_0 = \bigcup\{a \,|\, a \in A\} = \{r \in \mathbb{Q}_+ \,|\, r \in a$ για κάποιο $a \in A\}$. Δηλαδή, το u_0 είναι η ένωση όλων των συνόλων a $(a \in A)$.
Υπάρχει κάποιο $a_0 \in A$ και υπάρχει κάποιος $r_0 \in \mathbb{Q}_+$, $r_0 \in a_0$. Άρα $r_0 \in u_0$. Κατόπιν, υπάρχει κάποιο άνω φράγμα u του A και υπάρχει κάποιος $s \in \mathbb{Q}_+$, $s \notin u$. Έστω $r \in u_0$. Τότε υπάρχει $a \in A$ ώστε $r \in a$. Επειδή $a \leq u$ (δηλαδή $a \subseteq u$), ισχύει $r \in u$, οπότε $r \neq s$. Συμπεραίνουμε ότι $r \neq s$ για κάθε $r \in u_0$, οπότε $s \notin u_0$. Άρα το u_0 έχει την ιδιότητα (i) των θετικών πραγματικών.
Έστω $r \in u_0$ και $r_1 \in \mathbb{Q}_+$, $r_1 < r$. Τότε υπάρχει $a \in A$ ώστε $r \in a$, οπότε $r_1 \in a$. Άρα $r_1 \in u_0$. Άρα το u_0 έχει την ιδιότητα (ii) των θετικών πραγματικών.
Έστω $r \in u_0$. Τότε υπάρχει $a \in A$ ώστε $r \in a$. Επομένως, υπάρχει $r_1 \in a$, $r_1 > r$. Άρα υπάρχει $r_1 \in u_0$, $r_1 > r$. Άρα το u_0 έχει και την ιδιότητα (iii) των θετικών πραγματικών.
Άρα $u_0 \in \mathbb{R}_+$.
Από τον ορισμό του το u_0 έχει την ιδιότητα: $a \subseteq u_0$ για κάθε $a \in A$. Επομένως, $a \leq u_0$ για κάθε $a \in A$, οπότε το u_0 είναι άνω φράγμα του A. Κατόπιν, έστω u άνω φράγμα του A. Επειδή $a \leq u$ για κάθε $a \in A$, ισχύει $a \subseteq u$ για κάθε $a \in A$ και, επομένως, $u_0 \subseteq u$. Άρα ισχύει $u_0 \leq u$ για κάθε άνω φράγμα u του A. Άρα το u_0 είναι ελάχιστο άνω φράγμα του A.
Έστω, επίσης, $u_0{}'$ ελάχιστο άνω φράγμα του A. Επειδή το u_0 είναι ελάχιστο άνω φράγμα του A και το $u_0{}'$ είναι άνω φράγμα του A, ισχύει $u_0 \leq u_0{}'$. Ομοίως, επειδή το $u_0{}'$ είναι ελάχιστο άνω φράγμα του A και το u_0 είναι άνω φράγμα του A, ισχύει $u_0{}' \leq u_0$. Άρα $u_0 = u_0{}'$. □

ΟΡΙΣΜΟΣ 13.28. *Έστω μη-κενό, άνω φραγμένο $A \subseteq \mathbb{R}_+$. Το ελάχιστο άνω φράγμα του A, η ύπαρξη και μοναδικότητα του οποίου εξασφαλίζεται από το θεώρημα 13.5, ονομάζεται **supremum** του A και συμβολίζεται*

$$\sup A.$$

13.3.5 Οι ρητοί θετικοί πραγματικοί.

ΟΡΙΣΜΟΣ 13.29. *Για κάθε $r \in \mathbb{Q}_+$, ο θετικός πραγματικός $r^* \in \mathbb{R}_+$ ονομάζεται **ρητός θετικός πραγματικός** και για κάθε $n \in \mathbb{Z}_+ (= \mathbb{N})$, ο θετικός πραγματικός $n^* \in \mathbb{R}_+$ ονομάζεται **ακέραιος θετικός πραγματικός**. Θα συμβολίσουμε (προσωρινά) ${\mathbb{Q}_+}^*$ το υποσύνολο του $\mathbb{R}_+$ με στοιχεία τους ρητούς θετικούς πραγματικούς r^* $(r \in \mathbb{Q}_+)$ και θα συμβολίσουμε (προσωρινά) ${\mathbb{Z}_+}^*$ το υποσύνολο του $\mathbb{R}_+$ με στοιχεία τους ακέραιους θετικούς πραγματικούς n^* $(n \in \mathbb{Z}_+ (= \mathbb{N}))$. Δηλαδή, ${\mathbb{Q}_+}^* = \{r^* \,|\, r \in \mathbb{Q}_+\}$ και ${\mathbb{Z}_+}^* = \{r^* \,|\, r \in \mathbb{Z}_+ (= \mathbb{N})\}$.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.63. *Έστω $r, s \in \mathbb{Q}_+$. Τότε ισχύει $r < s$ αν και μόνο αν $r^* < s^*$. Επίσης, ισχύει $r = s$ αν και μόνο αν $r^* = s^*$.*

Απόδειξη. Έστω $r < s$. Τότε $r \in s^*$ και $r \notin r^*$. Άρα $r^* < s^*$.
Έστω $r^* < s^*$. Αν $r = s$, τότε $r^* = s^*$ και, αν $s < r$, τότε $s^* < r^*$. Και στις δύο περιπτώσεις καταλήγουμε σε άτοπο, οπότε $r < s$.
Αν $r = s$, τότε, προφανώς, $r^* = s^*$. Έστω $r^* = s^*$. Αν $r < s$, τότε $r^* < s^*$ και, αν $s < r$, τότε $s^* < r^*$. Και στις δύο περιπτώσεις καταλήγουμε σε άτοπο, οπότε $r = s$. $\square$

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.64. *Έστω $r, s, t \in \mathbb{Q}_+$.*
[α] *Ισχύει $r + s = t$ αν και μόνο αν $r^* + s^* = t^*$.*
[β] *Ισχύει $r - s = t$ αν και μόνο αν $r^* - s^* = t^*$.*
[γ] *Ισχύει $rs = t$ αν και μόνο αν $r^*s^* = t^*$.*
[δ] *Ισχύει $\frac{r}{s} = t$ αν και μόνο αν $\frac{r^*}{s^*} = t^*$.*

Απόδειξη. [α] Έστω $r + s = t$. Έστω οποιοδήποτε στοιχείο $r_1 + s_1$ του $r^* + s^*$, δηλαδή έστω $r_1, s_1 \in \mathbb{Q}_+$, $r_1 < r$, $s_1 < s$. Τότε $r_1 + s_1 \in \mathbb{Q}_+$ και $r_1 + s_1 < r + s = t$, οπότε $r_1 + s_1 \in t^*$. Άρα $r^* + s^* \subseteq t^*$.
Αντιστρόφως έστω $t_1 \in t^*$, δηλαδή $t_1 \in \mathbb{Q}_+$, $t_1 < t = r+s$. Τότε είναι $\frac{t_1}{r+s} < 1$, οπότε $\frac{t_1}{r+s}r < r$ και $\frac{t_1}{r+s}s < s$ και, επομένως, $\frac{t_1}{r+s}r \in r^*$ και $\frac{t_1}{r+s}s \in s^*$. Άρα $t_1 = \frac{t_1}{r+s}r + \frac{t_1}{r+s}s \in r^* + s^*$. Άρα $t^* \subseteq r^* + s^*$.
Άρα $r^* + s^* = t^*$.
Αντιστρόφως, έστω $r^* + s^* = t^*$ και $r + s = u$. Τότε ισχύει $u^* = r^* + s^* = t^*$ και, επομένως, $u = t$.
[β] Συνέπεια του [α].
[γ] Έστω $rs = t$. Έστω οποιοδήποτε στοιχείο r_1s_1 του r^*s^*, δηλαδή έστω $r_1, s_1 \in \mathbb{Q}_+$, $r_1 < r$, $s_1 < s$. Τότε $r_1s_1 \in \mathbb{Q}_+$ και $r_1s_1 < rs = t$, οπότε $r_1s_1 \in t^*$. Άρα $r^*s^* \subseteq t^*$.
Αντιστρόφως έστω $t_1 \in t^*$, δηλαδή $t_1 \in \mathbb{Q}_+$, $t_1 < t = rs$. Υπάρχει $t_2 \in \mathbb{Q}_+$ ώστε $t_1 < t_2 < rs$. Τότε ισχύει $\frac{t_2}{s} < r$ και $\frac{t_1}{t_2}s < s$ και, επομένως, $\frac{t_2}{s} \in r^*$ και $\frac{t_1}{t_2}s \in s^*$. Άρα $t_1 = \frac{t_2}{s}\frac{t_1}{t_2}s \in r^*s^*$. Άρα $t^* \subseteq r^*s^*$.
Άρα $r^*s^* = t^*$.
Αντιστρόφως, έστω $r^*s^* = t^*$ και $rs = u$. Τότε ισχύει $u^* = r^*s^* = t^*$ και, επομένως, $u = t$.
[δ] Συνέπεια του [γ]. $\square$

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.65. *Έστω $x \in \mathbb{R}_+$. Τότε $x \in \mathbb{Q}_+{}^*$ αν και μόνο αν υπάρχει ελάχιστος $s \in \mathbb{Q}_+$ ώστε $s \notin x$. Στην περίπτωση αυτή, αν ο r είναι ο ελάχιστος $s \in \mathbb{Q}_+$ ώστε $s \notin x$, τότε $x = r^*$.*

Απόδειξη. Έστω $x \in \mathbb{Q}_+{}^*$. Συγκεκριμένα, έστω $x = r^*$, όπου $r \in \mathbb{Q}_+$. Τότε, $x = \{t \in \mathbb{Q}_+ \,|\, t < r\}$, οπότε είναι φανερό ότι ο r είναι ο ελάχιστος $s \in \mathbb{Q}_+$ ώστε $s \notin x$. Αντιστρόφως, έστω ότι υπάρχει ελάχιστος $s \in \mathbb{Q}_+$ ώστε $s \notin x$ και ότι αυτός ο ελάχιστος s είναι ο r. Τότε για κάθε $t \in x$ συνεπάγεται $t < r$ (διότι $r \notin x$) και, αντιστρόφως, αν $t \in \mathbb{Q}_+$, $t < r$, συνεπάγεται $t \in x$. Άρα $x = \{t \in \mathbb{Q}_+ \,|\, t < r\} = r^*$. $\square$

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.66. *Έστω $x \in \mathbb{R}_+$, $r \in \mathbb{Q}_+$. Τότε (i) ισχύει $r \in x$ αν και μόνο αν $r^* < x$ και (ii) ισχύει $r \notin x$ αν και μόνο αν $r^* \geq x$.*

Απόδειξη. (i) Έστω $r \in x$. Επειδή $r \notin r^*$, συνεπάγεται $r^* < x$. Αντιστρόφως, έστω $r^* < x$. Τότε υπάρχει $r_1 \in x$, $r_1 \notin r^*$. Άρα $r_1 \in x$ και $r_1 \geq r$, οπότε $r \in x$.
Το (ii) είναι ισοδύναμο με το (i). $\square$

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.67. *Έστω $x, y \in \mathbb{R}_+$, $x < y$. Τότε υπάρχει $r \in \mathbb{Q}_+$ ώστε $x < r^* < y$.*

Απόδειξη. Έστω $x < y$. Τότε υπάρχει $s \in y$, $s \notin x$. Επίσης, υπάρχει $r \in y$, $r > s$. Τότε ισχύει $r \in y$ και $r \notin r^*$, οπότε $r^* < y$. Επίσης, ισχύει $s \in r^*$ και $s \notin x$, οπότε $x < r^*$. $\square$

Μια συνέπεια των προτάσεων 13.63 και 13.64 είναι η εξής. Ας υποθέσουμε ότι αντικαθιστούμε κάθε $r \in \mathbb{Q}_+$ με τον αντίστοιχο $r^* \in \mathbb{Q}_+{}^*$. Τότε *οι σχέσεις διάταξης καθώς και οι αριθμητικές σχέσεις ανάμεσα στα στοιχεία r του $\mathbb{Q}_+$ μένουν αμετάβλητες ως σχέσεις διάταξης καθώς και αριθμητικές σχέσεις ανάμεσα στα αντίστοιχα στοιχεία r^* του $\mathbb{Q}_+{}^*$.* Αυτό μας επιτρέπει να αντικαταστήσουμε το σύνολο $\mathbb{Q}_+$ των *θετικών ρητών* r με το υποσύνολο $\mathbb{Q}_+{}^*$ του $\mathbb{R}_+$ που αποτελείται από τους αντίστοιχους *ρητούς θετικούς πραγματικούς* r^*.

ΟΡΙΣΜΟΣ 13.30. *Στο εξής, θα θεωρούμε ότι κάθε θετικός ρητός r έχει αντικατασταθεί από τον αντίστοιχο ρητό θετικό πραγματικό r^* και, επομένως, ότι το σύνολο $\mathbb{Q}_+$ έχει αντικατασταθεί από το αντίστοιχο υποσύνολο $\mathbb{Q}_+{}^*$ του $\mathbb{R}_+$. Αφού, λοιπόν, "πετάξουμε" και "ξεχάσουμε" τους r και το σύνολό τους $\mathbb{Q}_+$, θα συμφωνήσουμε να χρησιμοποιούμε το απλούστερο σύμβολο r στη θέση του αντίστοιχου στοιχείου r^* του $\mathbb{Q}_+{}^*$. Επίσης, θα συμφωνήσουμε να χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\mathbb{Q}_+$ για το σύνολο $\mathbb{Q}_+{}^*$ και να χρησιμοποιούμε την ονομασία "θετικός ρητός" αντί "ρητός θετικός πραγματικός" για τα στοιχεία του $\mathbb{Q}_+{}^*$. Ουσιαστικά, λοιπόν, ταυτίζουμε τα σύνολα $\mathbb{Q}_+$, $\mathbb{Q}_+{}^*$, έτσι ώστε κάθε θετικός ρητός να θεωρείται ρητός θετικός πραγματικός και το σύνολο $\mathbb{Q}_+$ να θεωρείται υποσύνολο του συνόλου $\mathbb{R}_+$.*
Αυτομάτως, κάθε θετικός ακέραιος (δηλαδή, φυσικός) n αντικαθίσταται από τον αντίστοιχο ακέραιο θετικό πραγματικό n^*, οπότε το σύνολο $\mathbb{Z}_+$ αντικαθίσταται από το αντίστοιχο υποσύνολο $\mathbb{Z}_+{}^*$ του $\mathbb{R}_+$. Όμως, χρησιμοποιούμε το απλούστερο σύμβολο n στη θέση του αντίστοιχου στοιχείου n^* του $\mathbb{Z}_+{}^*$. Επίσης, χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\mathbb{Z}_+$ ή, ισοδύναμα, το σύμβολο $\mathbb{N}$ για το σύνολο $\mathbb{Z}_+{}^*$ και χρησιμοποιούμε την ονομασία "θετικός ακέραιος" αντί "ακέραιος θετικός πραγματικός" για τα στοιχεία του $\mathbb{Z}_+{}^*$. Δηλαδή, ταυτίζουμε τα σύνολα $\mathbb{Z}_+, \mathbb{Z}_+{}^*$, ώστε κάθε θετικός ακέραιος να θεωρείται ακέραιος θετικός πραγματικός και το $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$ να θεωρείται υποσύνολο του συνόλου $\mathbb{R}_+$.

Μετά από αυτές τις αλλαγές, έχει ενδιαφέρον να δούμε πώς διατυπώνονται μερικές από τις προηγούμενες προτάσεις.

Η πρόταση 13.67 λέει:

Ανάμεσα σε δύο οποιουσδήποτε θετικούς πραγματικούς υπάρχει τουλάχιστον ένας θετικός ρητός.

Η πρόταση 13.66 περιγράφει την αντιστοιχία ανάμεσα στη σχέση διάταξης των (νέων) θετικών ρητών με τους θετικούς πραγματικούς και στη σχέση εγκλεισμού των (παλαιών) θετικών ρητών με τους θετικούς πραγματικούς: *ένας (νέος) θετικός ρητός είναι μικρότερος από έναν θετικό πραγματικό αν και μόνο αν ο αντίστοιχος (παλαιός) θετικός ρητός περιέχεται στον ίδιο θετικό πραγματικό και ένας (νέος) θετικός ρητός είναι μεγαλύτερος από ή ίσος με έναν θετικό πραγματικό αν και μόνο αν ο αντίστοιχος (παλαιός) θετικός ρητός δεν περιέχεται στον ίδιο θετικό πραγματικό.*

Μετά από αυτά, η πρόταση 13.65 λέει το εξής "προφανές": *ένας θετικός πραγματικός είναι θετικός ρητός αν και μόνο αν υπάρχει ελάχιστος θετικός ρητός μεγαλύτερος από ή ίσος με αυτόν και, σ' αυτήν την περίπτωση, αυτός ο ελάχιστος θετικός ρητός είναι ο ίδιος ο εαυτός του.*

Η πρόταση 13.60 λέει:

$x1 = x$ για κάθε x θετικό πραγματικό.

Η πρόταση 13.61 λέει:

Για κάθε θετικό πραγματικό x υπάρχει θετικός πραγματικός y ώστε $xy = 1$.

13.4 Οι πραγματικοί.

ΟΡΙΣΜΟΣ 13.31. *Εκτός από τους θετικούς πραγματικούς, δηλαδή τα στοιχεία του $\mathbb{R}_+$, δημιουργούμε ένα στοιχείο το οποίο ονομάζουμε **μηδέν** και συμβολίζουμε 0. Θεωρούμε τον 0 διαφορετικό από κάθε $x \in \mathbb{R}_+$. Επίσης, για κάθε στοιχείο $x \in \mathbb{R}_+$, δημιουργούμε ένα νέο στοιχείο το οποίο ονομάζουμε **μείον** x ή **αντίθετο** του x και συμβολίζουμε $-x$. Θεωρούμε ότι κάθε $-x$ $(x \in \mathbb{R}_+)$ είναι διαφορετικός από τον 0 καθώς και από κάθε $y \in \mathbb{R}_+$. Επίσης, θεωρούμε ότι, για κάθε δύο διαφορετικούς $x, y \in \mathbb{R}_+$, οι αντίστοιχοι $-x, -y$ είναι διαφορετικοί.*

*Οι $-x$ $(x \in \mathbb{R}_+)$ ονομάζονται **αρνητικοί πραγματικοί** και συμβολίζουμε το σύνολό τους $\mathbb{R}_-$. Δηλαδή, $\mathbb{R}_- = \{-x \,|\, x \in \mathbb{R}_+\}$. Οι θετικοί πραγματικοί, το μηδέν και οι αρνητικοί πραγματικοί ονομάζονται **πραγματικοί** και συμβολίζουμε $\mathbb{R}$ το σύνολό τους. Δηλαδή, $\mathbb{R} = \mathbb{R}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{R}_+$.*
*Οι $-r$ $(r \in \mathbb{Q}_+)$ ονομάζονται **αρνητικοί ρητοί** και συμβολίζουμε το σύνολό τους $\mathbb{Q}_-$. Δηλαδή, $\mathbb{Q}_- = \{-r \,|\, r \in \mathbb{Q}_+\}$. Οι θετικοί ρητοί, το μηδέν και οι αρνητικοί ρητοί ονομάζονται **ρητοί** και συμβολίζουμε $\mathbb{Q}$ το σύνολό τους. Δηλαδή, $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}_+$.*
*Τέλος, οι $-n$ $(n \in \mathbb{Z}_+ = \mathbb{N})$ ονομάζονται **αρνητικοί ακέραιοι** και συμβολίζουμε το σύνολό τους $\mathbb{Z}_-$. Δηλαδή, $\mathbb{Z}_- = \{-n \,|\, n \in \mathbb{Z}_+\}$. Οι θετικοί ακέραιοι, το μηδέν και οι αρνητικοί ακέραιοι ονομάζονται **ακέραιοι** και συμβολίζουμε $\mathbb{Z}$ το σύνολό τους. Δηλαδή, $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}_+$.*

13.4.1 Διάταξη.

ΟΡΙΣΜΟΣ 13.32. *Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ συμβολίζουμε $|x|$ και ονομάζουμε **απόλυτη τιμή** του x τον πραγματικό που ορίζεται με τον τύπο*

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{αν } x \in \mathbb{R}_+ \\ 0, & \text{αν } x = 0 \\ y, & \text{αν } x = -y, y \in \mathbb{R}_+ \end{cases}$$

Παρατηρήστε ότι, αν ο x δεν είναι μηδέν, τότε ο $|x|$ είναι θετικός πραγματικός.

ΟΡΙΣΜΟΣ 13.33. *Έστω ότι $x, y \in \mathbb{R}$. Το νόημα του $x > y$ ή του ισοδύναμου $y < x$ είναι ήδη γνωστό στην περίπτωση που οι x, y είναι και οι δύο θετικοί. Τώρα, έστω ότι οι x, y δεν είναι και οι δύο θετικοί. Τότε λέμε ότι ο x είναι **μεγαλύτερος από** τον y και συμβολίζουμε $x > y$ ή, ισοδύναμα, ότι ο y είναι **μικρότερος από** τον x και συμβολίζουμε $y < x$ αν (i) οι x, y είναι και οι δύο αρνητικοί και $|x| < |y|$ ή (ii) είναι ο x θετικός και ο y αρνητικός ή (iii) είναι ο x θετικός και $y = 0$ ή (iv) είναι $x = 0$ και ο y αρνητικός.*

Η πρόταση 13.68 είναι προφανής.

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.68. *Έστω $x \in \mathbb{R}$. Ο x είναι θετικός αν και μόνο αν $x > 0$. Επίσης, ο x είναι αρνητικός αν και μόνο αν $x < 0$.*

Οι προτάσεις 13.69 και 13.70, παρακάτω, αποδεικνύονται με απλή εφαρμογή των ορισμών διακρίνοντας περιπτώσεις ως προς το αν οι πραγματικοί είναι θετικοί ή αρνητικοί ή μηδέν και με αναγωγή στην περίπτωση των θετικών πραγματικών. Θα αποφύγουμε να γράψουμε τις τελείως στοιχειώδεις αποδείξεις.

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.69. *Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ακριβώς ένα από τα παρακάτω είναι σωστό: $x = y$, $x > y$, $x < y$.*

ΟΡΙΣΜΟΣ 13.34. *Αν $x, y \in \mathbb{R}$, τότε λέμε ότι ο x είναι **μεγαλύτερος από ή ίσος με** τον y και συμβολίζουμε $x \geq y$ ή, ισοδύναμα, ότι ο y είναι **μικρότερος από ή ίσος με** τον x και συμβολίζουμε $y \leq x$ αν $x > y$ ή $x = y$ ή, ισοδύναμα, αν $y < x$ ή $y = x$.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.70. *Έστω $x, y, z \in \mathbb{R}$.*
[α] *Αν $x < y$ και $y < z$, τότε $x < z$.*
[β] *Αν $x \leq y$ και $y < z$ ή αν $x < y$ και $y \leq z$, τότε $x < z$.*
[γ] *Αν $x \leq y$ και $y \leq z$, τότε $x \leq z$.*

13.4.2 Πρόσθεση.

ΟΡΙΣΜΟΣ 13.35. *Έστω $x, y \in \mathbb{R}$. Έχει ήδη οριστεί το άθροισμα $x + y$ αν οι x, y είναι και οι δύο θετικοί. Τώρα, έστω ότι οι x, y δεν είναι και οι δύο θετικοί. Ορίζουμε το **άθροισμα** των x, y και το συμβολίζουμε*

$$x + y$$

να είναι (i) ο $-(|x|+|y|)$ αν $x<0$, $y<0$, (ii) ο $|x|-|y|$ αν $x>0$, $y<0$, $|x|>|y|$, (iii) ο $-(|y|-|x|)$ αν $x>0$, $y<0$, $|x|<|y|$, (iv) ο 0 αν $x>0$, $y<0$, $|x|=|y|$, (v) ο $|y|-|x|$ αν $x<0$, $y>0$, $|y|>|x|$, (vi) ο $-(|x|-|y|)$ αν $x<0$, $y>0$, $|y|<|x|$, (vii) ο 0 αν $x<0$, $y>0$, $|x|=|y|$, $(viii)$ ο x αν $y=0$ και (ix) ο y αν $x=0$.
Έτσι, η πράξη ***πρόσθεση*** *επεκτείνεται σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$.*

Όλες οι επόμενες προτάσεις αποδεικνύονται με αναγωγή σε περιπτώσεις όπου όλες οι μεταβλητές έχουν θετικές τιμές. Παραλείπουμε τις βαρετές πράξεις - δεν προσφέρουν τίποτα ουσιαστικό.

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.71. *Για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ ισχύει $x+y=y+x$.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.72. *Για κάθε $x,y,z\in\mathbb{R}$ ισχύει $(x+y)+z=x+(y+z)$.*

ΟΡΙΣΜΟΣ 13.36. *Έστω $x\in\mathbb{R}$. Έχουμε ορίσει τον αντίθετο του x αν ο x είναι θετικός. Αν, τώρα, ο x δεν είναι θετικός, ορίζουμε τον* ***αντίθετο*** *του x και τον συμβολίζουμε*

$$-x$$

να είναι (i) ο 0 αν $x=0$ και (ii) ο $|x|$ αν $x<0$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.73. *Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $x>0$ ή $x=0$ ή $x<0$ αν και μόνο αν, αντιστοίχως, $-x<0$ ή $-x=0$ ή $-x>0$.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.74. *Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $-(-x)=x$, $|-x|=|x|$ και $x+(-x)=0$.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.75. *Για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ ισχύει $-(x+y)=-x+(-y)$.*

ΟΡΙΣΜΟΣ 13.37. *Για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ ονομάζουμε* ***διαφορά*** *των x,y και συμβολίζουμε*

$$x-y$$

τον $x+(-y)$. Έτσι, η πράξη ***αφαίρεση*** *επεκτείνεται σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.76. *Για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ ισχύει $-(x-y)=y-x$.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.77. *Για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ ισχύει $x>y$ αν και μόνο αν $x-y>0$ αν και μόνο αν $y-x<0$.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.78. *Για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ ισχύει $x>y$ αν και μόνο αν $-x<-y$. Επίσης, ισχύει $x=y$ αν και μόνο αν $-x=-y$.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.79. *Έστω $x,y,z\in\mathbb{R}$. Ισχύει $x<y$ αν και μόνο αν $x+z<y+z$. Επίσης, ισχύει $x=y$ αν και μόνο αν $x+z=y+z$.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.80. *Έστω $x,y,z,w\in\mathbb{R}$.*
[α] *Αν $x<y$ και $z<w$, τότε $x+z<y+w$.*
[β] *Αν $x\le y$ και $z<w$ ή αν $x<y$ και $z\le w$, τότε $x+z<y+w$.*
[γ] *Αν $x\le y$ και $z\le w$, τότε $x+z\le y+w$.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.81. *Για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ υπάρχει μοναδικός $z\in\mathbb{R}$ ώστε $x+z=y$.*

Ο μοναδικός z στην πρόταση 13.81 είναι ο $y+(-x)=y-x$.

13.4.3 Πολλαπλασιασμός.

ΟΡΙΣΜΟΣ 13.38. *Έστω $x, y \in \mathbb{R}$. Έχει ήδη οριστεί το γινόμενο xy αν οι x, y είναι και οι δύο θετικοί. Τώρα, έστω ότι οι x, y δεν είναι και οι δύο θετικοί. Ορίζουμε το **γινόμενο** των x, y και το συμβολίζουμε*

$$x \cdot y$$

ή, πιο απλά, xy να είναι (i) ο $|x||y|$ αν $x < 0$, $y < 0$, (ii) ο $-(|x||y|)$ αν $x < 0$, $y > 0$ ή $x > 0$, $y < 0$ και (iii) ο 0 αν $x = 0$ ή $y = 0$.
*Έτσι, η πράξη **πολλαπλασιασμός** επεκτείνεται σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.82. *Έστω $x, y \in \mathbb{R}$. Ισχύει $xy = 0$ αν και μόνο αν τουλάχιστον ένας από τους x, y είναι μηδέν.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.83. *Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει $|xy| = |x||y|$.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.84. *Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει $xy = yx$.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.85. *Για κάθε $x, y, z \in \mathbb{R}$ ισχύει $(xy)z = x(yz)$.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.86. *Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $x1 = x$.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.87. *Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει $(-x)y = x(-y) = -xy$, $(-x)(-y) = xy$.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.88. *Για κάθε $x, y, z \in \mathbb{R}$ ισχύει $x(y + z) = xy + xz$.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.89. *Έστω $x, y, z \in \mathbb{R}$. Αν $z > 0$, τότε ισχύει $x > y$ αν και μόνο αν $xz > yz$. Αν $z < 0$, τότε ισχύει $x > y$ αν και μόνο αν $xz < yz$.*

ΟΡΙΣΜΟΣ 13.39. *Έστω $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$. Αν ο x είναι θετικός, έχουμε ήδη ορίσει τον αντίστροφό του. Τώρα, αν ο x είναι αρνητικός, συμβολίζουμε*

$$x^{-1}$$

*και ονομάζουμε **αντίστροφο** του x τον $-|x|^{-1}$.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.90. *Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ ισχύει $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 13.91. *Έστω $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$. Τότε υπάρχει μοναδικός $z \in \mathbb{R}$ ώστε $xz = y$.*

ΟΡΙΣΜΟΣ 13.40. *Ο z που ικανοποιεί την $xz = y$ είναι, απλώς, ο $x^{-1}y$. Αυτός ο πραγματικός ονομάζεται **λόγος** των y, x και συμβολίζεται*

$$\frac{y}{x}.$$

*Έτσι, η πράξη **διαίρεση** επεκτείνεται σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$.*

13.4.4 Η ιδιότητα supremum.

ΟΡΙΣΜΟΣ 13.41. *Ένα μη-κενό $A \subseteq \mathbb{R}$ χαρακτηρίζεται **άνω φραγμένο** αν υπάρχει $u \in \mathbb{R}$ με την ιδιότητα: $a \leq u$ για κάθε $a \in A$. Κάθε u με αυτήν την ιδιότητα χαρακτηρίζεται **άνω φράγμα** του A.*

ΘΕΩΡΗΜΑ 13.6. *Έστω μη-κενό και άνω φραγμένο $A \subseteq \mathbb{R}_+$. Το A έχει μοναδικό ελάχιστο άνω φράγμα.*

Απόδειξη. Το A είναι άνω φραγμένο, οπότε υπάρχει $u_1 \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $a \leq u_1$ για κάθε $a \in A$.
Πρώτη περίπτωση: Έστω ότι το A περιέχει τουλάχιστον έναν $a_0 \in \mathbb{R}_+$.
Τότε το $A_1 = A \cap \mathbb{R}_+$ είναι μη-κενό και ισχύει $a \leq u_1$ για κάθε $a \in A_1$. Άρα το A_1 είναι μη-κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}_+$ και, σύμφωνα με το θεώρημα 13.5, το A_1 έχει ελάχιστο άνω φράγμα, έστω u_0, στο $\mathbb{R}_+$. Έστω $a \in A$ και $a \in \mathbb{R}_+$. Τότε $a \in A_1$, οπότε $a \leq u_0$. Έστω $a \in A$ και $a \notin \mathbb{R}_+$. Τότε $a \leq a_0$ και, επειδή $a_0 \leq u_0$, ισχύει $a \leq u_0$. Άρα, σε κάθε περίπτωση, αν $a \in A$, τότε $a \leq u_0$, οπότε ο u_0 είναι άνω φράγμα του A. Τώρα, έστω u άνω φράγμα του A. Τότε ο u είναι άνω φράγμα και του A_1, οπότε $u_0 \leq u$. Άρα ο u_0 είναι ελάχιστο άνω φράγμα του A.
Δεύτερη περίπτωση: Έστω ότι το A δεν περιέχει κανένα στοιχείο του $\mathbb{R}_+$.
Έστω $a_0 \in A$, οπότε $a_0 \leq 0$. Θεωρούμε $a_1 \in \mathbb{R}$ ώστε $a_0 + a_1 \in \mathbb{R}_+$ και ορίζουμε το σύνολο $A_1 = \{a + a_1 \mid a \in A\}$. Το A_1 είναι μη-κενό και άνω φραγμένο διότι ο $u_1 + a_1$ έχει την ιδιότητα: $a + a_1 \leq u_1 + a_1$ για κάθε $a \in A$. Επίσης, το A_1 περιέχει τουλάχιστον ένα στοιχείο του $\mathbb{R}_+$ (το $a_0 + a_1$). Από την πρώτη περίπτωση, το A_1 έχει ελάχιστο άνω φράγμα, έστω u_2. Τώρα, για κάθε $a \in A$ ισχύει $a + a_1 \in A_1$, οπότε $a + a_1 \leq u_2$ και, επομένως, $a \leq u_2 - a_1$. Άρα ο $u_0 = u_2 - a_1$ είναι άνω φράγμα του A. Επίσης, αν ο u είναι άνω φράγμα του A, τότε για κάθε $a \in A$ ισχύει $a + a_1 \leq u + a_1$, οπότε ο $u + a_1$ είναι άνω φράγμα του A_1 και, επομένως, $u + a_1 \leq u_2$ και άρα $u \leq u_2 - a_1 = u_0$. Άρα ο u_0 είναι ελάχιστο άνω φράγμα του A.
Άρα, σε κάθε περίπτωση το A έχει ελάχιστο άνω φράγμα u_0.
Έστω, επίσης, $u_0{}'$ ελάχιστο άνω φράγμα του A. Επειδή το u_0 είναι ελάχιστο άνω φράγμα του A και το $u_0{}'$ είναι άνω φράγμα του A, ισχύει $u_0 \leq u_0{}'$. Ομοίως, επειδή το $u_0{}'$ είναι ελάχιστο άνω φράγμα του A και το u_0 είναι άνω φράγμα του A, ισχύει $u_0{}' \leq u_0$. Άρα $u_0 = u_0{}'$. $\square$

13.4.5 Οι βασικές ιδιότητες του $\mathbb{R}$.

Όλες οι ιδιότητες του $\mathbb{R}$ που παρουσιάζονται στο θεώρημα 13.7 έχουν αποδειχθεί. Οι ιδιότητες αυτές χαρακτηρίζονται "βασικές" διότι με βάση αυτές μπορούν να αποδειχτούν όλες οι άλλες ιδιότητες του $\mathbb{R}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 13.7. 1. **Ιδιότητες πρόσθεσης**. *Σε κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ αντιστοιχίζεται ακριβώς ένα στοιχείο του $\mathbb{R}$ το οποίο συμβολίζουμε $x + y$ και:*
α. $x + y = y + x$ *για κάθε* $x, y \in \mathbb{R}$.
β. $(x + y) + z = x + (y + z)$ *για κάθε* $x, y, z \in \mathbb{R}$.
γ. *υπάρχει ένα στοιχείο του $\mathbb{R}$ το οποίο συμβολίζουμε 0 ώστε $x + 0 = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.*
δ. *για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει κάποιο στοιχείο του $\mathbb{R}$ το οποίο συμβολίζουμε $-x$ ώστε $x + (-x) = 0$.*
2. **Ιδιότητες πολλαπλασιασμού**. *Σε κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ αντιστοιχίζεται ακριβώς ένα στοιχείο του $\mathbb{R}$ το οποίο συμβολίζουμε xy και:*
α. $xy = yx$ *για κάθε* $x, y \in \mathbb{R}$.
β. $(xy)z = x(yz)$ *για κάθε* $x, y, z \in \mathbb{R}$.
γ. *υπάρχει ένα στοιχείο του $\mathbb{R}$ το οποίο συμβολίζουμε 1, διαφορετικό από τον 0, ώστε $x1 = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.*
δ. *για κάθε $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$ υπάρχει κάποιο στοιχείο του $\mathbb{R}$ το οποίο συμβολίζουμε x^{-1} ώστε $xx^{-1} = 1$.*
3. **Επιμεριστική ιδιότητα**. $x(y + z) = xy + xz$ *για κάθε* $x, y, z \in \mathbb{R}$.
4. **Ιδιότητες διάταξης**. *Υπάρχει ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$ το οποίο συμβολίζουμε $\mathbb{R}_+$ ώστε:*
α. $x + y \in \mathbb{R}_+$ *για κάθε* $x, y \in \mathbb{R}_+$,
β. $xy \in \mathbb{R}_+$ *για κάθε* $x, y \in \mathbb{R}_+$,
γ. *για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ακριβώς ένα από τα $x = 0$, $x \in \mathbb{R}_+$, $-x \in \mathbb{R}_+$ είναι σωστό.*
5. **Ιδιότητα supremum**. *Κάθε μη-κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ έχει ελάχιστο άνω φράγμα.*

Επειδή το $\mathbb{R}$ έχει τις ιδιότητες πρόσθεσης, πολλαπλασιασμού καθώς και την επιμεριστική ιδιότητα, χαρακτηρίζεται **σώμα**. Επειδή το $\mathbb{R}$ έχει και τις ιδιότητες διάταξης, χαρακτηρίζεται **δια-**

τεταγμένο σώμα. Τέλος, επειδή το $\mathbb{R}$ έχει και την ιδιότητα supremum, χαρακτηρίζεται **πλήρες διατεταγμένο σώμα**.

13.5 Εναλλακτικές μέθοδοι.

Στην ενότητα 13.3 περιγράψαμε έναν τρόπο ορισμού των θετικών πραγματικών θεωρώντας γνωστούς τούς θετικούς ρητούς (τούς οποίους είχαμε ορίσει στην ενότητα 13.2 θεωρώντας γνωστούς τούς φυσικούς από την ενότητα 13.1). Η μέθοδος που εφαρμόσαμε είναι η μέθοδος των **τομών Dedekind**.

Κάθε μέθοδος ορισμού των θετικών πραγματικών έχει τα εξής βασικά "συστατικά". Αρχικά ορίζονται τα "αντικείμενα" τα οποία χαρακτηρίζονται *θετικοί πραγματικοί*. Κατόπιν καθορίζεται μια **σχέση διάταξης** στο σύνολο των θετικών πραγματικών: καθορίζεται, δηλαδή, τι σημαίνει να είναι ένας θετικός πραγματικός *μεγαλύτερος* (ή *μικρότερος*) από έναν άλλον. Μετά ορίζεται η πράξη **πρόσθεση**: περιγράφεται διαδικασία σχηματισμού του *αθροίσματος* δύο θετικών πραγματικών. Τέλος, ορίζεται η πράξη **πολλαπλασιασμός**: περιγράφεται διαδικασία σχηματισμού του *γινομένου* δύο θετικών πραγματικών.

Αφού οριστεί η διάταξη και οι δύο πράξεις στο σύνολο των θετικών πραγματικών, απομένει να αποδειχτούν όλες οι γνωστές ιδιότητες: οι ιδιότητες πρόσθεσης, πολλαπλασιασμού, επιμερισμού, διάταξης και, κυρίως, η ιδιότητα supremum.

Τέλος, από το σύνολο των θετικών πραγματικών ορίζεται το σύνολο των πραγματικών με τη διαδικασία της ενότητας 13.4.

Θα περιγράψουμε, τώρα, πολύ συνοπτικά, δύο εναλλακτικές μεθόδους ορισμού των θετικών πραγματικών θεωρώντας, πάντοτε, γνωστούς τους θετικούς ρητούς. Θα αποφύγουμε τις αποδείξεις, περιοριζόμενοι στην περιγραφή των εννοιών.

13.5.1 Η μέθοδος με τις ακολουθίες Cauchy.

Μια ακολουθία (r_n) στο $\mathbb{Q}_+$ χαρακτηρίζεται **ακολουθία Cauchy** αν για κάθε $\epsilon \in \mathbb{Q}_+$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $|r_n - r_m| < \epsilon$ για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m \geq n_0$.

Λέμε ότι δύο ακολουθίες Cauchy (r_n) και (s_n) στο $\mathbb{Q}_+$ είναι **ισοδύναμες** και γράφουμε $(r_n) \sim (s_n)$ αν $\lim_{n\to+\infty}(r_n - s_n) = 0$. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $\epsilon \in \mathbb{Q}_+$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $|r_n - s_n| < \epsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$.

Αποδεικνύεται εύκολα ότι η σχέση αυτή είναι *σχέση ισοδυναμίας* ανάμεσα στις ακολουθίες Cauchy στο $\mathbb{Q}_+$. Έτσι το σύνολο των ακολουθιών Cauchy στο $\mathbb{Q}_+$ διαμερίζεται σε *κλάσεις ισοδυναμίας*: δύο ακολουθίες Cauchy στο $\mathbb{Q}_+$ οι οποίες είναι ισοδύναμες ανήκουν στην ίδια κλάση ισοδυναμίας και δύο ακολουθίες Cauchy στο $\mathbb{Q}_+$ οι οποίες δεν είναι ισοδύναμες ανήκουν σε διαφορετικές κλάσεις ισοδυναμίας. Κάθε κλάση ισοδυναμίας ονομάζεται **θετικός πραγματικός** και το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας, δηλαδή των θετικών πραγματικών, συμβολίζεται $\mathbb{R}_+$.

Έστω δύο ακολουθίες Cauchy (r_n) και (s_n) στο $\mathbb{Q}_+$. Λέμε ότι η (r_n) είναι **μεγαλύτερη από** την (s_n) ή, ισοδύναμα, ότι η (s_n) είναι **μικρότερη από** την (r_n) και συμβολίζουμε $(r_n) \succ (s_n)$ ή, ισοδύναμα, $(s_n) \prec (r_n)$ αν υπάρχουν $\delta \in \mathbb{Q}_+$ και $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $r_n - s_n > \delta$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Αποδεικνύεται ότι, αν οι (r_n), (s_n), (t_n), (u_n) είναι ακολουθίες Cauchy στο $\mathbb{Q}_+$ και $(r_n) \succ (s_n)$, $(r_n) \sim (t_n)$, $(s_n) \sim (u_n)$, τότε $(t_n) \succ (u_n)$. Αυτό συνεπάγεται ότι μπορούμε να δώσουμε τον εξής ορισμό. Έστω $x, y \in \mathbb{R}_+$ και έστω οποιαδήποτε αντιπρόσωπος (r_n) του x και οποιαδήποτε αντιπρόσωπος (s_n) του y. Τότε λέμε ότι ο x είναι **μεγαλύτερος από** τον y ή, ισοδύναμα, ότι ο y είναι **μικρότερος από** τον x και συμβολίζουμε $x > y$ ή, ισοδύναμα, $y < x$ αν ισχύει $(r_n) \succ (s_n)$ ή, ισοδύναμα, $(s_n) \prec (r_n)$.

Έστω δύο ακολουθίες Cauchy (r_n) και (s_n) στο $\mathbb{Q}_+$. Αποδεικνύεται ότι η $(r_n + s_n)$ στο $\mathbb{Q}_+$ είναι ακολουθία Cauchy. Αποδεικνύεται, επίσης, ότι, αν οι (r_n), (s_n), (t_n), (u_n) είναι ακολουθίες Cauchy στο $\mathbb{Q}_+$ και $(r_n) \sim (t_n)$, $(s_n) \sim (u_n)$, τότε $(r_n + s_n) \sim (t_n + u_n)$. Αυτό μας επιτρέπει να δώσουμε τον εξής ορισμό. Έστω $x, y \in \mathbb{R}_+$ και έστω οποιαδήποτε αντιπρόσωπος (r_n) του x

και οποιαδήποτε αντιπρόσωπος (s_n) του y. Ορίζουμε $x + y \in \mathbb{R}_+$ να είναι η κλάση ισοδυναμίας με αντιπρόσωπο την $(r_n + s_n)$.

Τέλος, έστω δύο ακολουθίες Cauchy (r_n) και (s_n) στο $\mathbb{Q}_+$. Αποδεικνύεται ότι η $(r_n s_n)$ στο $\mathbb{Q}_+$ είναι ακολουθία Cauchy και, επίσης, ότι, αν οι (r_n), (s_n), (t_n), (u_n) είναι ακολουθίες Cauchy στο $\mathbb{Q}_+$ και $(r_n) \sim (t_n)$, $(s_n) \sim (u_n)$, τότε $(r_n s_n) \sim (t_n u_n)$. Άρα μπορούμε να δώσουμε τον εξής ορισμό. Έστω $x, y \in \mathbb{R}_+$ και έστω οποιαδήποτε αντιπρόσωπος (r_n) του x και οποιαδήποτε αντιπρόσωπος (s_n) του y. Ορίζουμε $xy \in \mathbb{R}_+$ να είναι η κλάση ισοδυναμίας με αντιπρόσωπο την $(r_n s_n)$.

Αφού ορίσαμε τη σχέση διάταξης, την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό στο σύνολο $\mathbb{R}_+$, αποδεικνύεται ότι το σύνολο $\mathbb{R}_+$ έχει όλες τις ιδιότητες οι οποίες περιγράφονται στην ενότητα 13.3, συμπεριλαμβανομένης της ιδιότητας supremum.

Υπάρχει μια παραλλαγή αυτής της μεθόδου, δηλαδή της μεθόδου του **Cantor**, όπου αντί για ακολουθίες Cauchy στο $\mathbb{Q}_+$ χρησιμοποιούνται αύξουσες, άνω φραγμένες ακολουθίες στο $\mathbb{Q}_+$.

13.5.2 Η μέθοδος με τα εγκιβωτισμένα διαστήματα.

Μια ακολουθία διαστημάτων $([r_n, r_n'])$ θα λέμε ότι είναι **σημειακή ακολουθία εγκιβωτισμένων διαστημάτων** στο $\mathbb{Q}_+$ αν η (r_n) είναι αύξουσα στο $\mathbb{Q}_+$ και η (r_n') είναι φθίνουσα στο $\mathbb{Q}_+$ και $\lim_{n\to+\infty}(r_n' - r_n) = 0$.

Λέμε ότι δύο σημειακές ακολουθίες εγκιβωτισμένων διαστημάτων $([r_n, r_n'])$ και $([s_n, s_n'])$ στο $\mathbb{Q}_+$ είναι **ισοδύναμες** και γράφουμε $([r_n, r_n']) \sim ([s_n, s_n'])$ αν $\lim_{n\to+\infty}(r_n - s_n) = 0$ ή, ισοδύναμα, $\lim_{n\to+\infty}(r_n' - s_n') = 0$.

Αποδεικνύεται εύκολα ότι η σχέση αυτή είναι *σχέση ισοδυναμίας* ανάμεσα στις σημειακές ακολουθίες εγκιβωτισμένων διαστημάτων στο $\mathbb{Q}_+$. Έτσι το σύνολο των σημειακών ακολουθιών εγκιβωτισμένων διαστημάτων στο $\mathbb{Q}_+$ διαμερίζεται σε *κλάσεις ισοδυναμίας*. Κάθε τέτοια κλάση ισοδυναμίας θα την ονομάζουμε **θετικό πραγματικό** και το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας, δηλαδή των θετικών πραγματικών, θα το συμβολίζουμε $\mathbb{R}_+$.

Έστω δύο σημειακές ακολουθίες εγκιβωτισμένων διαστημάτων $([r_n, r_n'])$ και $([s_n, s_n'])$ στο $\mathbb{Q}_+$. Λέμε ότι η $([r_n, r_n'])$ είναι **μεγαλύτερη από** την $([s_n, s_n'])$ ή, ισοδύναμα, ότι η $([s_n, s_n'])$ είναι **μικρότερη από** την $([r_n, r_n'])$ και συμβολίζουμε $([r_n, r_n']) \succ ([s_n, s_n'])$ ή, ισοδύναμα, $([s_n, s_n']) \prec ([r_n, r_n'])$ αν υπάρχουν $\delta \in \mathbb{Q}_+$ και $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $r_n - s_n > \delta$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Αποδεικνύεται ότι, αν οι $([r_n, r_n'])$, $([s_n, s_n'])$, $([t_n, t_n'])$, $([u_n, u_n'])$ είναι σημειακές ακολουθίες εγκιβωτισμένων διαστημάτων στο $\mathbb{Q}_+$ και $([r_n, r_n']) \succ ([s_n, s_n'])$, $([r_n, r_n']) \sim ([t_n, t_n'])$, $([s_n, s_n']) \sim ([u_n, u_n'])$, τότε $([t_n, t_n']) \succ ([u_n, u_n'])$. Αυτό συνεπάγεται ότι μπορούμε να δώσουμε τον εξής ορισμό. Έστω $x, y \in \mathbb{R}_+$ και έστω οποιαδήποτε αντιπρόσωπος $([r_n, r_n'])$ του x και οποιαδήποτε αντιπρόσωπος $([s_n, s_n'])$ του y. Τότε λέμε ότι ο x είναι **μεγαλύτερος από** τον y ή, ισοδύναμα, ότι ο y είναι **μικρότερος από** τον x και συμβολίζουμε $x > y$ ή, ισοδύναμα, $y < x$ αν ισχύει $([r_n, r_n']) \succ ([s_n, s_n'])$ ή, ισοδύναμα, $([s_n, s_n']) \prec ([r_n, r_n'])$.

Έστω δύο σημειακές ακολουθίες εγκιβωτισμένων διαστημάτων $([r_n, r_n'])$ και $([s_n, s_n'])$ στο $\mathbb{Q}_+$. Αποδεικνύεται ότι η $([r_n + s_n, r_n' + s_n'])$ είναι σημειακή ακολουθία εγκιβωτισμένων διαστημάτων στο $\mathbb{Q}_+$. Αποδεικνύεται, επίσης, ότι, αν οι $([r_n, r_n'])$, $([s_n, s_n'])$, $([t_n, t_n'])$, $([u_n, u_n'])$ είναι σημειακές ακολουθίες εγκιβωτισμένων διαστημάτων στο $\mathbb{Q}_+$ και $([r_n, r_n']) \sim ([t_n, t_n'])$, $([s_n, s_n']) \sim ([u_n, u_n'])$, τότε $([r_n + s_n, r_n' + s_n']) \sim ([t_n + u_n, t_n' + u_n'])$. Μπορούμε, επομένως, να ορίσουμε τα εξής. Έστω $x, y \in \mathbb{R}_+$ και έστω οποιαδήποτε αντιπρόσωπος $([r_n, r_n'])$ του x και οποιαδήποτε αντιπρόσωπος $([s_n, s_n'])$ του y. Ορίζουμε $x + y \in \mathbb{R}_+$ να είναι η κλάση ισοδυναμίας με αντιπρόσωπο την $([r_n + s_n, r_n' + s_n'])$.

Τέλος, έστω σημειακές ακολουθίες εγκιβωτισμένων διαστημάτων $([r_n, r_n'])$ και $([s_n, s_n'])$ στο $\mathbb{Q}_+$. Αποδεικνύεται ότι η $([r_n s_n, r_n' s_n'])$ είναι σημειακή ακολουθία εγκιβωτισμένων διαστημάτων στο $\mathbb{Q}_+$. Αποδεικνύεται, επίσης, ότι, αν οι $([r_n, r_n'])$, $([s_n, s_n'])$, $([t_n, t_n'])$, $([u_n, u_n'])$ είναι σημειακές ακολουθίες εγκιβωτισμένων διαστημάτων στο $\mathbb{Q}_+$ και $([r_n, r_n']) \sim ([t_n, t_n'])$, $([s_n, s_n']) \sim ([u_n, u_n'])$, τότε $([r_n s_n, r_n' s_n']) \sim ([t_n u_n, t_n' u_n'])$. Αυτό μας επιτρέπει να δώσουμε τον εξής ορισμό. Έστω $x, y \in \mathbb{R}_+$ και έστω οποιαδήποτε αντιπρόσωπος $([r_n, r_n'])$ του x και οποιαδήποτε αντιπρόσωπος $([s_n, s_n{}'])$ του y. Ορίζουμε $xy \in \mathbb{R}_+$ να είναι η κλάση ισοδυναμίας με αντιπρόσωπο την $([r_n s_n, r_n{}' s_n{}'])$.

Κατόπιν, μπορεί να αποδειχτεί ότι το σύνολο $\mathbb{R}_+$ έχει όλες τις ιδιότητες οι οποίες περιγράφονται στην ενότητα 13.3, συμπεριλαμβανομένης της ιδιότητας supremum.

Βασική βιβλιογραφία.

Brand, L. (2006) *Advanced Calculus, Ch 1.* Dover.
Cohen, L. & Ehrlich, G. (1977) *The Structure of the Real Number System.* Krieger.
Gleason, A. (1991) *Fundamentals of Abstract Analysis, Ch 8-9.* Taylor and Francis.
Goffman, C. (1953) *Real Functions, Ch 3.* Rinehart.
Graves, L. (2009) *The Theory of Functions of Real Variables, Ch II.* Dover.
Krantz, S. (2013) *Real Analysis and Foundations, Ch 2.* Chapman and Hall.
Landau, E. (2001) *Foundations of Analysis.* American Math. Society & Chelsea.
Pugh, C. (2015) *Real Mathematical Analysis, Ch 1.* Springer.
Rudin, W. (1976) *Principles of Mathematical Analysis, Ch 1.* McGraw-Hill.
Spivak, M. (1994) *Calculus, Ch 29-30.* Cambridge Univ. Press.

Συμπληρωματική βιβλιογραφία.

Courant, R. & John, F. (1989) *Introduction to Calculus and Analysis, Vol I, Ch 1.* Springer.
Goffman, C. (1966) *Introduction to Real Analysis, Ch 1.* Harper and Row.
Hardy, G. (2008) *A Course of Pure Mathematics, Ch I.* Cambridge Univ. Press.
Smirnov, V. (1964) *A Course of Higher Mathematics, Vol 1, Ch 1.* Pergammon Press.

Κεφάλαιο 14

Υποδείξεις και λύσεις ασκήσεων.

Το πιο σημαντικό μέρος της διαδικασίας μάθησης στα Μαθηματικά είναι η λύση ασκήσεων. Γι αυτόν τον λόγο έχω συγκεντρώσει εδώ λύσεις ή υποδείξεις λύσεων των περισσοτέρων από τις ασκήσεις του βιβλίου. Για πολλές ασκήσεις προτείνω περισσότερες από μία λύσεις.

Για να ωφεληθείτε όσο το δυνατόν περισσότερο, προτείνω την ακόλουθη τακτική. Προσπαθήστε να λύσετε μόνοι σας μια άσκηση, αφού διαβάσετε προσεκτικά τη σχετική θεωρία και τα ανάλογα παραδείγματα. Αν, μετά από αρκετή σκέψη, δεν βλέπετε πώς να αρχίσετε, κοιτάξτε την υπόδειξη ή την αρχή της προτεινόμενης λύσης. Αφού πάρετε μια ιδέα, συνεχίστε μόνοι σας μέχρι να ξανακολλήσετε. Και ούτω καθ' εξής. Όταν τελειώσετε, αφού χρησιμοποιήσατε την υπόδειξη ή την λύση, προσπαθήστε να ξαναλύσετε μόνοι σας την άσκηση.

Υπάρχουν αρκετές ασκήσεις, ειδικά οι αρχικές κάθε ενότητας, που έχουν λιγότερες απαιτήσεις υπόβαθρου ή ωριμότητας από τον φοιτητή. Υπάρχουν και πολλές δύσκολες ή και εξαιρετικά δύσκολες ασκήσεις. Αυτές απευθύνονται σε φοιτητές που έχουν ιδιαίτερες απαιτήσεις από τον εαυτό τους και είναι κατάλληλα προετοιμασμένοι.

Πάντως, πάρα πολλές ασκήσεις, και ειδικά οι δύσκολες, είναι επιλεγμένες ώστε να οδηγούν, πιστεύω, στην καλλιέργεια ερευνητικών πρακτικών.

Όταν κάποια άσκηση έχει διάφορα ερωτήματα, τότε πολλές φορές παρουσιάζω λύσεις μόνο για κάποια από αυτά τα ερωτήματα. Αφήνω τα υπόλοιπα ερωτήματα να τα λύσει ο αναγνώστης είτε όταν οι λύσεις τους είναι παρόμοιες με τις λύσεις των λυμένων ερωτημάτων είτε όταν τα ερωτήματα αυτά είναι κάπως εξεζητημένα (ό,τι κι αν σημαίνει αυτό).

14.1 Κεφάλαιο 1.

Άσκηση 1.1.1. *Αν $a \leq x \leq b$ και $a \leq y \leq b$, αποδείξτε ότι $|x - y| \leq b - a$ και διατυπώστε το γεωμετρικό νόημα αυτής της ανισότητας.*

Λύση: Αν $a \leq x \leq b$ και $a \leq y \leq b$, τότε $a \leq x \leq b$ και $-b \leq -y \leq -a$. Προσθέτουμε τις δύο τελευταίες ανισότητες και βρίσκουμε $-(b-a) \leq x - y \leq b - a$. Άρα $|x - y| \leq b - a$.
Το γεωμετρικό νόημα της ανισότητας είναι το εξής: "αν δύο αριθμοί είναι μέσα σε κάποιο διάστημα, τότε η απόσταση ανάμεσα στους δύο αυτούς αριθμούς δεν υπερβαίνει το μήκος του διαστήματος".

Άσκηση 1.1.5. *Αποδείξτε τον διωνυμικό τύπο του Newton με επαγωγή.*

Λύση: Ο διωνυμικός τύπος με $n = 1$ γράφεται $(x+y)^1 = \binom{1}{0}x^0y^1 + \binom{1}{1}x^1y^0$ και είναι σωστός διότι $\binom{1}{0} = \binom{1}{1} = 1$.
Τώρα, έστω ότι για κάποιον $n \geq 1$ ισχύει ο διωνυμικός τύπος, δηλαδή ότι

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Τότε

$$\begin{aligned}(x+y)^{n+1} &= x(x+y)^n + y(x+y)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k+1}y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n+1-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}x^{k+1}y^{n-k} + \binom{n}{n}x^{n+1}y^0 + \binom{n}{0}x^0y^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n+1-k} \\ &= \binom{n}{0}x^0y^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}x^{k+1}y^{n-k} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n+1-k} + \binom{n}{n}x^{n+1}y^0 \\ &= \binom{n+1}{0}x^0y^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}x^k y^{n+1-k} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n+1-k} + \binom{n+1}{n+1}x^{n+1}y^0 \\ &= \binom{n+1}{0}x^0y^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)x^k y^{n+1-k} + \binom{n+1}{n+1}x^{n+1}y^0 \\ &= \binom{n+1}{0}x^0y^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}x^k y^{n+1-k} + \binom{n+1}{n+1}x^{n+1}y^0 \\ &= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^k y^{n+1-k}.\end{aligned}$$

Άσκηση 1.2.2. *Αποδείξτε ότι το διάστημα $(a,+\infty)$ δεν είναι άνω φραγμένο και ότι το $[a,b)$ δεν έχει μέγιστο στοιχείο.*

Λύση: Το πρώτο ερώτημα. Υποθέτουμε, για να καταλήξουμε σε άτοπο, ότι υπάρχει κάποιο άνω φράγμα u του $(a,+\infty)$. Παίρνουμε έναν οποιονδήποτε $b\in(a+\infty)$ (για παράδειγμα τον $a+1$), δηλαδή $b>a$, και τότε έχουμε ότι $b\leq u$. Άρα $u>a$ και άρα $u+1>a$ και, επομένως, $u+1\in(a,+\infty)$. Επειδή ο u είναι άνω φράγμα του $(a,+\infty)$, συνεπάγεται $u+1\leq u$ και καταλήγουμε σε άτοπο.
Άρα το $(a,+\infty)$ δεν έχει κανένα άνω φράγμα και, επομένως, δεν είναι άνω φραγμένο.
Αν δεν θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε την εις άτοπο απαγωγή, μπορούμε να σκεφτούμε ως εξής. Έστω τυχών u. Θεωρούμε τον αριθμό $u'=\max\{a,u\}$, οπότε είναι $u'\geq a$ και $u'\geq u$. Παίρνουμε οποιονδήποτε $b>u'$ (για παράδειγμα τον $b=u'+1$) και τότε έχουμε ότι $b>a$, οπότε $b\in(a+\infty)$, και $b>u$. Άρα ο u δεν είναι άνω φράγμα του $(a,+\infty)$.
Και πάλι βρίσκουμε ότι το $(a,+\infty)$ δεν έχει κανένα άνω φράγμα και, επομένως, δεν είναι άνω φραγμένο.

Το δεύτερο ερώτημα. Έστω οποιοσδήποτε $c\in[a,b)$. Θεωρούμε οποιονδήποτε d για τον οποίο ισχύει $c<d<b$ (για παράδειγμα τον $d=\frac{c+b}{2}$). Τότε $d\in[a,b)$ και, επειδή $c<d$, ο c δεν είναι μέγιστο στοιχείο του $[a,b)$.
Άρα κανένα στοιχείο του $[a,b)$ δεν είναι μέγιστο στοιχείο του.
Προσαρμόστε τον παραπάνω συλλογισμό χρησιμοποιώντας την εις άτοπο απαγωγή.

Άσκηση 1.2.3. [α] *Αν ισχύει $l\leq a+\epsilon$ για κάθε $\epsilon>0$, αποδείξτε ότι $l\leq a$.*
[β] *Αν ισχύει $|a-b|\leq\epsilon$ για κάθε $\epsilon>0$, αποδείξτε ότι $a=b$.*

Λύση: [α] Η υπόθεση λέει ότι ισχύει $l-a\leq\epsilon$ για κάθε $\epsilon>0$. Από την πρόταση 1.3 συνεπάγεται $l-a\leq 0$ και άρα $l\leq a$.
Αν δεν θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε την πρόταση 1.3 (το συνιστώ), μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τρόπο σκέψης που μας οδήγησε στην απόδειξη της πρότασης 1.3.
Υποθέτουμε, για να καταλήξουμε σε άτοπο, ότι $a<l$. Θεωρούμε τον αριθμό $x=\frac{a+l}{2}$ για τον οποίο ισχύει $a<x<l$. Αυτός ο αριθμός (επειδή είναι $>a$) γράφεται στη μορφή $x=a+\epsilon$ για κατάλληλο $\epsilon>0$. Ποιός είναι ο ϵ; Επειδή ο x είναι ακριβώς στη μέση ανάμεσα στους a,l, ο ϵ είναι ίσος με το μισό της απόστασης του a από τον l, δηλαδή $\epsilon=\frac{l-a}{2}$.
Φυσικά, αυτό μπορούμε να το δούμε και τελείως αλγεβρικά: $\epsilon=x-a=\frac{a+l}{2}-a=\frac{l-a}{2}$.
Υπάρχει, επομένως, $\epsilon>0$ για τον οποίο δεν ισχύει $l\leq a+\epsilon$. Αυτό είναι, σύμφωνα με την υπόθεσή μας, άτοπο και άρα $l\leq a$.
[β] Από την πρόταση 1.3 (ή από το [α]) συνεπάγεται $|a-b|\leq 0$ και, επειδή $|a-b|\geq 0$, έχουμε ότι $|a-b|=0$ και άρα $a=b$.

Άσκηση 1.2.4. *Αν ισχύει $a\leq\frac{\epsilon}{1-\epsilon}$ για κάθε ϵ με $0<\epsilon<1$, αποδείξτε ότι $a\leq 0$.*

Λύση: Πρώτος τρόπος. Ας υποθέσουμε, για να καταλήξουμε σε άτοπο, ότι $a>0$.
Η $a\leq\frac{\epsilon}{1-\epsilon}$ ισοδυναμεί (επειδή $1-\epsilon>0$) με την $a-a\epsilon\leq\epsilon$ κι αυτή με την $a\leq(1+a)\epsilon$ κι αυτή

(επειδή $1+a>0$) με την $\frac{a}{1+a} \leq \epsilon$.
Άρα ισχύει $\frac{a}{1+a} \leq \epsilon$ για κάθε ϵ με $0<\epsilon<1$. Αυτό συνεπάγεται, προφανώς, ότι ισχύει $\frac{a}{1+a} \leq \epsilon$ για κάθε $\epsilon>0$ (δηλαδή και για κάθε $\epsilon \geq 1$). Από την πρόταση 1.3 συνεπάγεται $\frac{a}{1+a} \leq 0$. Αυτό αντιφάσκει με το $a>0$.
Άρα $a \leq 0$.
Δεύτερος τρόπος. Κάνουμε μια παραλλαγή του προηγούμενου συλλογισμού χωρίς εις άτοπο απαγωγή.
Η $a \leq \frac{\epsilon}{1-\epsilon}$ ισοδυναμεί (επειδή $1-\epsilon>0$) με την $a-a\epsilon \leq \epsilon$ κι αυτή με την $a \leq (1+a)\epsilon$.
Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.
Αν $a+1 \leq 0$, τότε είναι $a \leq -1$ και άρα $a \leq 0$.
Αν $a+1>0$, τότε συνεπάγεται ότι ισχύει $\frac{a}{1+a} \leq \epsilon$ για κάθε ϵ με $0<\epsilon<1$ και από αυτό συμπεραίνουμε όπως με τον πρώτο τρόπο ότι $a \leq 0$.
Τρίτος τρόπος. Θα δούμε ότι κάθε θετικός αριθμός η μπορεί να γραφτεί στη μορφή $\frac{\epsilon}{1-\epsilon}$ για κάποιον ϵ με $0<\epsilon<1$.
Πράγματι, έστω $\eta>0$. Λύνουμε την εξίσωση $\eta=\frac{\epsilon}{1-\epsilon}$, βρίσκουμε $\epsilon=\frac{\eta}{1+\eta}$ και ελέγχουμε εύκολα ότι $0<\epsilon<1$.
Συμπεραίνουμε ότι για κάθε $\eta>0$ ισχύει $a \leq \eta$, οπότε από την πρόταση 1.3 έχουμε ότι $a \leq 0$.

Άσκηση 1.2.5. *Έστω* $\inf A=\inf B$ *και* $\sup A=\sup B$. *Συνεπάγεται* $A=B$*;*

Λύση: Όχι.
Για παράδειγμα, τα διαφορετικά σύνολα $A=[a,b]$ και $B=\{a,b\}$ έχουν το ίδιο infimum, τον a, και το ίδιο supremum, τον b.

Άσκηση 1.2.6. *Έστω μη-κενό σύνολο* A. *Αποδείξτε ότι το κλειστό διάστημα* $[\inf A, \sup A]$ *είναι το ελάχιστο κλειστό διάστημα στο* $\overline{\mathbb{R}}$ *το οποίο περιέχει το* A.

Λύση: Ισχύει $\inf A \leq x \leq \sup A$ για κάθε $x \in A$ και, επομένως, το A περιέχεται στο κλειστό διάστημα $[\inf A, \sup A]$.
Ας πάρουμε τώρα ένα οποιοδήποτε κλειστό διάστημα $[l,u]$ στο $\overline{\mathbb{R}}$ το οποίο περιέχει το A.
Τότε πρέπει να ισχύει $l \leq x \leq u$ για κάθε $x \in A$. Άρα ο l είναι κάτω φράγμα και ο u άνω φράγμα του A. Επειδή το $\inf A$ είναι το μεγαλύτερο κάτω φράγμα και το $\sup A$ είναι το μικρότερο άνω φράγμα του A, συνεπάγεται $l \leq \inf A$ και $\sup A \leq u$ και, επομένως, $[\inf A, \sup A] \subseteq [l,u]$.
Άρα το $[\inf A, \sup A]$ είναι το *ελάχιστο* κλειστό διάστημα το οποίο περιέχει το A.
Μπορούμε να σκεφτούμε και με έναν άλλο τρόπο. Ας υποθέσουμε, για να φτάσουμε σε άτοπο, ότι υπάρχει κλειστό διάστημα $[l,u]$ το οποίο περιέχει το A και είναι γνησίως μικρότερο από το $[\inf A, \sup A]$. Αυτό σημαίνει ότι $\inf A \leq l$ και $u \leq \sup A$ και ότι μία τουλάχιστον από τις δύο αυτές ανισότητες είναι γνήσια.
Έστω, λοιπόν, ότι $u<\sup A$. Από την δεύτερη χαρακτηριστική ιδιότητα του supremum συνεπάγεται ότι υπάρχει $x \in A$ ώστε $u<x$. Αυτό, όμως, είναι άτοπο διότι το A περιέχεται στο διάστημα $[l,u]$ και άρα κάθε στοιχείο του A ανήκει στο $[l,u]$.
Με τον ίδιο τρόπο καταλήγουμε σε άτοπο και στην περίπτωση $\inf A<l$.

Άσκηση 1.2.7. *Υπάρχει ελάχιστο ανοικτό διάστημα το οποίο περιέχει το κλειστό διάστημα* $[a,b]$*;*

Λύση: Έστω ότι υπάρχει ελάχιστο ανοικτό διάστημα το οποίο περιέχει το $[a,b]$ και έστω ότι αυτό είναι το (c,d). Οπότε $[a,b] \subseteq (c,d)$.
Τότε $a \in (c,d)$ και $b \in (c,d)$, οπότε $c<a \leq b<d$.
Θεωρούμε τον $c'=\frac{c+a}{2}$ (ή οποιονδήποτε άλλον αριθμό ανάμεσα στους c,a) και τον $d'=\frac{b+d}{2}$ (ή οποιονδήποτε άλλον αριθμό ανάμεσα στους b,d), οπότε $c<c'<a \leq b<d'<d$. Τότε είναι $[a,b] \subseteq (c',d')$ και $(c',d') \subsetneq (c,d)$.
Δηλαδή, υπάρχει ανοικτό διάστημα μικρότερο από το (c,d) που κι αυτό περιέχει το $[a,b]$ και καταλήγουμε σε άτοπο.
Άρα δεν υπάρχει ελάχιστο ανοικτό διάστημα το οποίο περιέχει το κλειστό διάστημα $[a,b]$.
Ο προηγούμενος συλλογισμός μπορεί να διατυπωθεί έτσι ώστε να μην φαίνεται ότι χρησιμο-

ποιούμε εις άτοπο απαγωγή.
Παίρνουμε οποιοδήποτε ανοικτό διάστημα (c, d) το οποίο να περιέχει το $[a, b]$ και, ακριβώς όπως πριν, δημιουργούμε ένα ανοικτό διάστημα (c', d') το οποίο να είναι μικρότερο από το (c, d) και να περιέχει το $[a, b]$. Έτσι έχουμε αποδείξει ότι για κάθε ανοικτό διάστημα που περιέχει το $[a, b]$ υπάρχει ένα άλλο μικρότερο ανοικτό διάστημα που κι αυτό περιέχει το $[a, b]$. Επομένως, δεν υπάρχει ελάχιστο ανοικτό διάστημα το οποίο περιέχει το $[a, b]$.

Σχόλιο: Στην ερώτηση αν υπάρχει ελάχιστο κλειστό διάστημα το οποίο περιέχει το κλειστό διάστημα $[a, b]$ η απάντηση είναι προφανώς θετική. Το ελάχιστο τέτοιο διάστημα είναι το ίδιο το $[a, b]$. Προφανώς η απάντηση είναι θετική και στην ερώτηση αν υπάρχει μέγιστο ανοικτό διάστημα το οποίο να περιέχεται στο ανοικτό διάστημα (a, b). Αλλά η απάντηση στην ερώτηση αν υπάρχει μέγιστο κλειστό διάστημα το οποίο να περιέχεται στο ανοικτό διάστημα (a, b) είναι αρνητική και η απόδειξη είναι όμοια με την παραπάνω.

Άσκηση 1.2.8. *Έστω μη-κενό σύνολο A. Περιγράψτε (με τύπο) συναρτήσει του $\sup A$ το σύνολο των άνω φραγμάτων του A, διακρίνοντας τις περιπτώσεις: $\sup A = +\infty$ και $\sup A < +\infty$. Κάντε το ίδιο σε σχέση με το σύνολο των κάτω φραγμάτων του A και με το $\inf A$.*

Λύση: Αν $\sup A = +\infty$, το A δεν έχει κανένα άνω φράγμα, οπότε το σύνολο των άνω φραγμάτων του είναι το κενό σύνολο $\emptyset$.
Αν $\sup A < +\infty$, το A είναι άνω φραγμένο και τα άνω φράγματά του είναι όλοι οι αριθμοί που είναι $\geq \sup A$, αφού το $\sup A$ είναι το μικρότερο άνω φράγμα του A. Επομένως, το σύνολο των άνω φραγμάτων του A είναι το διάστημα $[\sup A, +\infty)$.
Με τον ίδιο τρόπο μπορείτε να δείτε ότι το σύνολο των κάτω φραγμάτων του A είναι το $\emptyset$, αν $\inf A = -\infty$, και το $(-\infty, \inf A]$, αν $-\infty < \inf A$.

Σχόλιο: Αν δεχτούμε το $+\infty$ ως άνω φράγμα του A και το $-\infty$ ως κάτω φράγμα του A, τότε η απάντησή μας έχει ως εξής. Το σύνολο των άνω φραγμάτων του A είναι το $\{+\infty\}$, αν $\sup A = +\infty$, και το $[\sup A, +\infty]$, αν $\sup A < +\infty$. Ομοίως, το σύνολο των κάτω φραγμάτων του A είναι το $\{-\infty\}$, αν $\inf A = -\infty$, και το $[-\infty, \inf A]$, αν $-\infty < \inf A$.

Άσκηση 1.2.9. *Έστω μη-κενό σύνολο A. Αποδείξτε ότι $\sup A \in A$ αν και μόνο αν το A έχει μέγιστο στοιχείο.*

Λύση: Έστω $\sup A \in A$. Τότε το $\sup A$ είναι στοιχείο του A και, επειδή είναι και άνω φράγμα του A, δεν υπάρχει στοιχείο του A μεγαλύτερο από το $\sup A$. Άρα το $\sup A$ είναι το μέγιστο στοιχείο του A.
Αντιστρόφως, έστω ότι το A έχει μέγιστο στοιχείο, δηλαδή $\max A$. Τότε, όπως είδαμε στη θεωρία, $\sup A = \max A$, οπότε $\sup A \in A$.

Άσκηση 1.2.10. *Έστω μη-κενό και άνω φραγμένο σύνολο A και $u = \sup A$ (οπότε το u είναι αριθμός).*
Είναι σωστό ότι για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει $(u - \epsilon, u] \cap A \neq \emptyset$;
Είναι σωστό ότι για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει $(u - \epsilon, u) \cap A \neq \emptyset$;
Ποιές είναι οι απαντήσεις στα προηγούμενα ερωτήματα αν υποθέσουμε επιπλέον ότι $u \notin A$;

Λύση: Το πρώτο ερώτημα. Από την δεύτερη χαρακτηριστική ιδιότητα του $u = \sup A$ γνωρίζουμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $x \in A$ ώστε $u - \epsilon < x \leq u$ ή, ισοδύναμα, $x \in (u - \epsilon, u]$. Άρα για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $x \in (u - \epsilon, u] \cap A$ και, επομένως, $(u - \epsilon, u] \cap A \neq \emptyset$.
Άρα η απάντηση είναι: ναι.
Το δεύτερο ερώτημα. Το προηγούμενο επιχείρημα εγγυάται ότι υπάρχει $x \in A$ στο διάστημα $(u - \epsilon, u]$. Αυτό το στοιχείο x του A μπορεί να είναι ο ίδιος ο u και μπορεί να μην υπάρχει άλλο στοιχείο του A στο $(u - \epsilon, u]$ δηλαδή να μην υπάρχει κανένα στοιχείο του A στο $(u - \epsilon, u)$. Γι αυτό υποψιαζόμαστε ότι η απάντηση μπορεί να είναι αρνητική και ψάχνουμε να βρούμε αντιπαράδειγμα.
Θεωρούμε το μονοσύνολο $A = \{a\}$. Τότε $a = \sup A$ και μπορούμε να βρούμε κάποιον $\epsilon > 0$

(μάλιστα, κάθε $\epsilon > 0$ είναι κατάλληλος) ώστε το διάστημα $(a - \epsilon, a)$ να μην περιέχει κανένα στοιχείο του A, οπότε $(a - \epsilon, a) \cap A = \emptyset$.
Άρα η απάντηση στο ερώτημα είναι: όχι.
Άλλο αντιπαράδειγμα. Θεωρούμε το σύνολο $A = [a, b] \cup \{c\}$, όπου $a \leq b < c$. Τότε $c = \sup A$ και μπορούμε να βρούμε κάποιον $\epsilon > 0$, για παράδειγμα οποιονδήποτε ϵ με $0 < \epsilon \leq c - b$, ώστε το διάστημα $(c - \epsilon, c)$ να μην περιέχει κανένα στοιχείο του A, οπότε $(c - \epsilon, c) \cap A = \emptyset$.

Το τρίτο ερώτημα. Τώρα υποθέτουμε ότι $u \notin A$. Από την δεύτερη ιδιότητα του $u = \sup A$ έχουμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $x \in A$ ώστε $u - \epsilon < x \leq u$. Επειδή $x \in A$ και $u \notin A$, στην τελευταία σχέση δεν μπορεί να είναι $x = u$, οπότε $u - \epsilon < x < u$ ή, ισοδύναμα, $x \in (u - \epsilon, u)$. Άρα για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $x \in (u - \epsilon, u) \cap A$, οπότε $(u - \epsilon, u) \cap A \neq \emptyset$.
Άρα η απάντηση στο δεύτερο ερώτημα είναι: ναι.
Η απάντηση στο πρώτο ερώτημα είναι, όπως είδαμε, καταφατική ακόμη και χωρίς την επιπλέον υπόθεση.

Άσκηση 1.2.11. *Έστω μη-κενό σύνολο A και $u \in \mathbb{R}$.*
Αποδείξτε ότι $\sup A \leq u$ αν και μόνο αν ισχύει $x \leq u$ για κάθε $x \in A$.
Αποδείξτε ότι $u \leq \sup A$ αν και μόνο αν για κάθε $\gamma < u$ υπάρχει $x \in A$ ώστε $\gamma < x$.

Λύση: Το πρώτο ερώτημα. Έστω $\sup A \leq u$. Έστω τυχόν $x \in A$. Τότε $x \leq \sup A$, οπότε $x \leq u$. Άρα ισχύει $x \leq u$ για κάθε $x \in A$.
Μια ελάχιστα διαφορετική διατύπωση. Έστω $\sup A \leq u$. Επειδή το $\sup A$ είναι άνω φράγμα του A, ο u είναι κι αυτός άνω φράγμα του A. Άρα ισχύει $x \leq u$ για κάθε $x \in A$.
Αντιστρόφως, έστω ότι ισχύει $x \leq u$ για κάθε $x \in A$. Αυτό σημαίνει ότι ο u είναι άνω φράγμα του A. Επειδή το $\sup A$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A, συνεπάγεται $\sup A \leq u$.
Το αντίστροφο με άλλο τρόπο. Έστω (για άτοπο) ότι $u < \sup A$. Από την δεύτερη ιδιότητα του $\sup A$ συνεπάγεται ότι υπάρχει $x \in A$ ώστε $u < x \leq \sup A$. Αυτό είναι άτοπο διότι πρέπει να ισχύει $x \leq u$ για κάθε $x \in A$. Άρα $\sup A \leq u$.

Το δεύτερο ερώτημα. Έστω $u \leq \sup A$. Έστω τυχών $\gamma < u$. Τότε $\gamma < \sup A$, οπότε από τη δεύτερη ιδιότητα του $\sup A$ έχουμε ότι υπάρχει $x \in A$ ώστε $\gamma < x$. Άρα για κάθε $\gamma < u$ υπάρχει $x \in A$ ώστε $\gamma < x$.
Αντιστρόφως, έστω ότι για κάθε $\gamma < u$ υπάρχει $x \in A$ ώστε $\gamma < x$. Έστω (για άτοπο) ότι $\sup A < u$. Θεωρούμε $\gamma = \sup A$ (ή οποιονδήποτε γ με $\sup A \leq \gamma < u$). Τότε αυτός ο γ είναι $< u$, οπότε βάσει της υπόθεσης πρέπει να υπάρχει $x \in A$ ώστε $\gamma < x$, δηλαδή $\sup A < x$. Αυτό είναι άτοπο. Άρα $u \leq \sup A$.
Το αντίστροφο με λίγο διαφορετική διατύπωση. Τό ότι για κάθε $\gamma < u$ υπάρχει $x \in A$ ώστε $\gamma < x$ σημαίνει ότι κάθε $\gamma < u$ *δεν* είναι άνω φράγμα του A. Όμως, το $\sup A$ είναι άνω φράγμα του A, οπότε δεν μπορεί να ισχύει $\sup A < u$ και, επομένως, ισχύει $u \leq \sup A$.

Άσκηση 1.2.12. *Έστω μη-κενά σύνολα A, B.*
[α] *Αποδείξτε ότι $\sup A \leq \inf B$ αν και μόνο αν ισχύει $x \leq y$ για κάθε $x \in A, y \in B$.*
[β] *Έστω ότι ισχύει $x \leq y$ για κάθε $x \in A$, $y \in B$. Περιγράψτε (με τύπο) συναρτήσει των $\sup A$, $\inf B$ το σύνολο όλων των ξ με την ιδιότητα να ισχύει $x \leq \xi \leq y$ για κάθε $x \in A$, $y \in B$.*
[γ] *Έστω ότι ισχύει $x \leq y$ για κάθε $x \in A, y \in B$ και έστω ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχουν $x \in A, y \in B$ ώστε $y - x < \epsilon$. Αποδείξτε ότι $\sup A = \inf B$.*

Λύση: [α] Έστω $\sup A \leq \inf B$. Επειδή για κάθε $x \in A, y \in B$ ισχύει $x \leq \sup A$ και $\inf B \leq y$, συνεπάγεται ότι για κάθε $x \in A, y \in B$ ισχύει $x \leq y$.
Αντιστρόφως, έστω ότι ισχύει $x \leq y$ για κάθε $x \in A, y \in B$.
Πρώτος τρόπος: Θεωρούμε τυχόντα $y \in B$ (και τόν σταθεροποιούμε *προσωρινά*). Επειδή ισχύει $x \leq y$ για κάθε $x \in A$ συνεπάγεται ότι ο y είναι άνω φράγμα του A. Επειδή το $\sup A$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A, ισχύει $\sup A \leq y$. Τώρα (αποσταθεροποιώντας τον y) έχουμε ότι ισχύει $\sup A \leq y$ για κάθε $y \in B$, οπότε το $\sup A$ είναι κάτω φράγμα του B. Τέλος, επειδή το $\inf B$ είναι το μέγιστο κάτω φράγμα του B, συνεπάγεται $\sup A \leq \inf B$.

Δεύτερος τρόπος: Έστω (για άτοπο) $\inf B < \sup A$. Από τη δεύτερη ιδιότητα του $\sup A$ συνεπάγεται ότι υπάρχει $x \in A$ ώστε $\inf B < x$. Από τη δεύτερη ιδιότητα του $\inf B$ συνεπάγεται ότι υπάρχει $y \in B$ ώστε $y < x$. Άρα υπάρχουν $x \in A, y \in B$ ώστε $y < x$ και αυτό αντιφάσκει με την υπόθεση ότι ισχύει $x \le y$ για κάθε $x \in A, y \in B$.

[β] Όπως είδαμε στο [α], από το ότι ισχύει $x \le y$ για κάθε $x \in A$, $y \in B$ προκύπτει $\sup A \le \inf B$. Οι ξ με την ιδιότητα να ισχύει $x \le \xi \le y$ για κάθε $x \in A$, $y \in B$ είναι, προφανώς, εκείνοι οι ξ που είναι ταυτόχρονα άνω φράγματα του A και κάτω φράγματα του B. Άρα είναι εκείνοι οι ξ που είναι ταυτόχρονα και $\ge \sup A$ και $\le \inf B$. Δηλαδή είναι εκείνοι οι ξ που είναι στοιχεία του κλειστού διαστήματος $[\sup A, \inf B]$.

[γ] Από την υπόθεση και από το [α] συνεπάγεται $\sup A \le \inf B$. Άρα μένει να αποδείξουμε ότι $\inf B \le \sup A$.
Πρώτος τρόπος: Έστω (για άτοπο) ότι $\sup A < \inf B$. Παρατηρήστε ότι τότε τα $\sup A, \inf B$ είναι αριθμοί (το $\sup A$ δεν μπορεί να είναι $+\infty$ και το $\inf B$ δεν μπορεί να είναι $-\infty$).
Παίρνοντας οποιονδήποτε ϵ με $0 < \epsilon \le \inf B - \sup A$, βλέπουμε ότι για κάθε $x \in A, y \in B$ ισχύει $x \le \sup A$ και $\inf B \le y$, οπότε $y - x \ge \inf B - \sup A \ge \epsilon$. Άρα *δεν* υπάρχουν $x \in A, y \in B$ ώστε $y - x < \epsilon$. Αυτό αντιφάσκει με την υπόθεση του [γ], οπότε $\inf B \le \sup A$.
Δεύτερος τρόπος: Θεωρούμε τυχόντα $\epsilon > 0$. Σύμφωνα με την υπόθεση, υπάρχουν $x \in A, y \in B$ ώστε $y - x < \epsilon$. Επειδή $x \le \sup A$ και $\inf B \le y$, συνεπάγεται $\inf B - \sup A \le y - x < \epsilon$.
Άρα έχουμε ότι ισχύει $\inf B - \sup A < \epsilon$ για κάθε $\epsilon > 0$. Αυτό, βάσει της πρότασης 1.3, συνεπάγεται ότι $\inf B - \sup A \le 0$ και, επομένως, $\inf B \le \sup A$.

Άσκηση 1.2.13. *Έστω μη-κενά σύνολα A, B ώστε $A \cup B = \mathbb{R}$ και ώστε να ισχύει $x < y$ για κάθε $x \in A, y \in B$. Αποδείξτε ότι υπάρχει ξ ώστε $A = (-\infty, \xi)$, $B = [\xi, +\infty)$ ή $A = (-\infty, \xi]$, $B = (\xi, +\infty)$.*

Λύση: Πρώτον, η υπόθεση $A \cup B = \mathbb{R}$ λέει ότι κάθε αριθμός ανήκει σε ένα τουλάχιστον από τα A, B. Επίσης, η *γνήσια* ανισότητα $x < y$ λέει ότι τα A, B δεν έχουν κοινό στοιχείο. Άρα κάθε αριθμός ανήκει σε ακριβώς ένα από τα A, B.
Τώρα, βάσει του αποτελέσματος της άσκησης 1.2.12[α], συμπεραίνουμε ότι $\sup A \le \inf B$.
Προφανώς, το σύνολο A βρίσκεται αριστερά (με την ευρεία έννοια) του $\sup A$ και το B βρίσκεται δεξιά (με την ευρεία έννοια) του $\inf B$.
Τώρα διακρίνουμε δύο περιπτώσεις. Η πρώτη είναι όταν $\sup A < \inf B$.
Όμως, σ' αυτήν την περίπτωση κάθε αριθμός στο ανοικτό διάστημα ανάμεσα στους $\sup A, \inf B$, για παράδειγμα ο $\frac{\sup A + \inf B}{2}$, δεν ανήκει σε κανένα από τα σύνολα A, B.
Άρα μένει η περίπτωση $\sup A = \inf B$.
Θέτουμε $\xi = \sup A = \inf B$.
Τώρα, κάθε $x < \xi$ δεν μπορεί να ανήκει στο B, οπότε ανήκει στο A. Επίσης, κάθε $x > \xi$ δεν μπορεί να ανήκει στο A, οπότε ανήκει στο B. Τέλος, ο ίδιος ο ξ πρέπει να ανήκει σε ένα ακριβώς από τα A, B. Αν $\xi \in A$, τότε προφανώς $A = (-\infty, \xi]$ και $B = (\xi, +\infty)$. Αν $\xi \in B$, τότε $A = (-\infty, \xi)$, $B = [\xi, +\infty)$.

Άσκηση 1.2.14. *Έστω μη-κενά σύνολα A, B. Αποδείξτε ότι $\sup A \le \sup B$ αν και μόνο αν για κάθε $x \in A$ και κάθε $\gamma < x$ υπάρχει $y \in B$ ώστε $y > \gamma$.*

Λύση: Έστω $\sup A \le \sup B$.
Παίρνουμε τυχόντα $x \in A$ και τυχόντα $\gamma < x$. Τότε $x \le \sup A$ και, επομένως, $x \le \sup B$, οπότε $\gamma < \sup B$. Άρα υπάρχει $y \in B$ ώστε $y > \gamma$.
Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι για κάθε $x \in A$ και κάθε $\gamma < x$ υπάρχει $y \in B$ ώστε $y > \gamma$.
Αντιστρόφως, έστω ότι για κάθε $x \in A$ και κάθε $\gamma < x$ υπάρχει $y \in B$ ώστε $y > \gamma$.
Ας υποθέσουμε, για να καταλήξουμε σε άτοπο, ότι $\sup B < \sup A$. Τότε υπάρχει κάποιος $x \in A$ ώστε $\sup B < x$. Θεωρούμε τότε $\gamma = \sup B$, οπότε από την υπόθεση συνεπάγεται ότι υπάρχει $y \in B$ ώστε $y > \gamma = \sup B$. Αυτό είναι, φυσικά, άτοπο.
Άρα $\sup A \le \sup B$.

Το αντίστροφο με διαφορετικό τρόπο. Παίρνουμε τυχόντα $x \in A$. Το ότι για κάθε $\gamma < x$ υπάρχει $y \in B$ ώστε $y > \gamma$ μας λέει ότι κάθε $\gamma < x$ δεν είναι άνω φράγμα του B. Άρα για το $\sup B$, το οποίο είναι άνω φράγμα του B, δεν μπορεί να ισχύει $\sup B < x$, οπότε είναι $x \leq \sup B$.
Έχουμε, λοιπόν, ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει $x \leq \sup B$. Επομένως, το $\sup B$ είναι άνω φράγμα του A και άρα $\sup A \leq \sup B$.

Άσκηση 1.2.15. *Έστω μη-κενά σύνολα A, B με $A \subseteq B$. Αποδείξτε ότι $\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$.*

Λύση: Η ανισότητα $\inf A \leq \sup A$ είναι γνωστή. Άρα αρκεί να αποδείξουμε ότι $\inf B \leq \inf A$ και $\sup A \leq \sup B$.
Θα αποδείξουμε την δεύτερη ανισότητα με τα supremum και θα αποδείξετε εσείς την πρώτη ανισότητα με παρόμοιο τρόπο.
Για κάθε $x \in A$ ισχύει $x \in B$, οπότε ισχύει $x \leq \sup B$. Άρα το $\sup B$ είναι άνω φράγμα του A και, επομένως, $\sup A \leq \sup B$.
Με διαφορετικό τρόπο. Υποθέτουμε (για άτοπο) ότι $\sup B < \sup A$. Από την δεύτερη χαρακτηριστική ιδιότητα του $\sup A$ συνεπάγεται ότι υπάρχει κάποιος $x \in A$ ώστε $\sup B < x$. Όμως, επειδή $x \in A$ πρέπει να είναι $x \in B$. Αυτό αντιφάσκει με το ότι $\sup B < x$ και καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα $\sup A \leq \sup B$.

Άσκηση 1.2.16. [α] *Έστω μη-κενά σύνολα A, B. Αποδείξτε ότι $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$. Αν επιπλέον το $A \cap B$ δεν είναι κενό, αποδείξτε ότι $\sup(A \cap B) \leq \min\{\sup A, \sup B\}$. Ισχύει πάντοτε ότι $\sup(A \cap B) = \min\{\sup A, \sup B\}$;*
[γ] *Για τα μη-κενά σύνολα A, B ορίζουμε $A + B = \{x + y \,|\, x \in A, y \in B\}$.*
Αποδείξτε ότι $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

Λύση: [α] *Το πρώτο ερώτημα.* Είναι $A \subseteq A \cup B$. Άρα για κάθε $x \in A$ ισχύει $x \in A \cup B$ και, επομένως, $x \leq \sup(A \cup B)$. Άρα το $\sup(A \cup B)$ είναι άνω φράγμα του A και άρα είναι $\sup A \leq \sup(A \cup B)$.
Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι $\sup B \leq \sup(A \cup B)$.
Επειδή και οι δύο ποσότητες $\sup A$ και $\sup B$ δεν υπερβαίνουν την ποσότητα $\sup(A \cup B)$, συνεπάγεται ότι και η μεγαλύτερη από τις δύο δεν υπερβαίνει την $\sup(A \cup B)$. Δηλαδή,

$$\max\{\sup A, \sup B\} \leq \sup(A \cup B). \tag{14.1}$$

Τώρα, για κάθε $x \in A$ ισχύει $x \leq \sup A \leq \max\{\sup A, \sup B\}$. Ομοίως, για κάθε $x \in B$ ισχύει $x \leq \sup B \leq \max\{\sup A, \sup B\}$. Άρα για κάθε $x \in A \cup B$ ισχύει $x \leq \max\{\sup A, \sup B\}$. Αυτό σημαίνει ότι η ποσότητα $\max\{\sup A, \sup B\}$ είναι άνω φράγμα του $A \cup B$ και, επομένως,

$$\sup(A \cup B) \leq \max\{\sup A, \sup B\}. \tag{14.2}$$

Από τις ανισότητες (14.1) και (14.2) συνεπάγεται η ισότητα $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$.
Το δεύτερο ερώτημα. Βλέπουμε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει $x \leq \sup A$ και ότι για κάθε $x \in B$ ισχύει $x \leq \sup B$. Άρα για κάθε $x \in A \cap B$ ισχύουν ταυτόχρονα και οι δύο ανισότητες. Αφού, λοιπόν, κάθε $x \in A \cap B$ δεν υπερβαίνει καμία από τις ποσότητες $\sup A$ και $\sup B$, συνεπάγεται ότι δεν υπερβαίνει ούτε την μικρότερη από τις δύο. Άρα για κάθε $x \in A \cap B$ ισχύει $x \leq \min\{\sup A, \sup B\}$ και, επομένως, η ποσότητα $\min\{\sup A, \sup B\}$ είναι άνω φράγμα του $A \cap B$. Συνεπώς,

$$\sup(A \cap B) \leq \min\{\sup A, \sup B\}.$$

Τέλος, αν θεωρήσουμε το παράδειγμα των συνόλων $A = [0,1] \cup \{2\}$ και $B = [0,1] \cup \{3\}$, τότε έχουμε $A \cap B = [0,1]$. Σ' αυτήν την περίπτωση είναι $\sup A = 2$ και $\sup B = 3$, οπότε $\min\{\sup A, \sup B\} = 2$. Όμως, $\sup(A \cap B) = 1$ και άρα $\sup(A \cap B) < \min\{\sup A, \sup B\}$.
[γ] Πρώτα θα αποδείξουμε ότι $\sup(A + B) \leq \sup A + \sup B$.
Για κάθε $x \in A$ ισχύει $x \leq \sup A$ και για κάθε $y \in B$ ισχύει $y \leq \sup B$. Προσθέτουμε και έχουμε

ότι για κάθε $x \in A$, $y \in B$ ισχύει $x + y \leq \sup A + \sup B$. (Σ' αυτήν την πράξη δεν υπάρχει πρόβλημα ακόμη κι αν ένα ή και τα δύο από τα $\sup A$, $\sup B$ είναι $+\infty$.)
Άρα η ποσότητα $\sup A + \sup B$ είναι άνω φράγμα του $A + B$, οπότε

$$\sup(A + B) \leq \sup A + \sup B.$$

Κατόπιν, θα αποδείξουμε ότι $\sup A + \sup B \leq \sup(A + B)$ και η απόδειξη θα τελειώσει.
Πρώτος τρόπος. Για κάθε $x \in A$, $y \in B$ το $x + y$ είναι στοιχείο του $A + B$, οπότε ισχύει

$$x + y \leq \sup(A + B).$$

Τώρα *σταθεροποιούμε προσωρινά* ένα τυχόντα $y \in B$ και έχουμε ότι ισχύει

$$x \leq \sup(A + B) - y$$

για κάθε $x \in A$. Αυτό σημαίνει ότι η ποσότητα $\sup(A + B) - y$ είναι άνω φράγμα του συνόλου A, οπότε ισχύει

$$\sup A \leq \sup(A + B) - y$$

για κάθε $y \in B$. (Απο-σταθεροποιούμε τον τυχόντα $y \in B$ που είχαμε προσωρινά σταθεροποιήσει.) Τώρα, στην τελευταία ανισότητα οι $\sup A$ και y θα αλλάξουν πλευρές. Με τον y δεν υπάρχει πρόβλημα διότι είναι αριθμός. Όμως δεν μπορεί να γίνει το ίδιο με το $\sup A$ αν είναι $+\infty$. Γι αυτό διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.
Αν το $\sup A$ είναι αριθμός, συνεπάγεται ότι ισχύει

$$y \leq \sup(A + B) - \sup A$$

για κάθε $y \in B$. Άρα η ποσότητα $\sup(A + B) - \sup A$ είναι άνω φράγμα του B, οπότε

$$\sup B \leq \sup(A + B) - \sup A$$

και (πάλι επειδή το $\sup A$ είναι αριθμός) συνεπάγεται

$$\sup A + \sup B \leq \sup(A + B).$$

Αν $\sup A = +\infty$, τότε από την ανισότητα $\sup A \leq \sup(A+B)-y$, στην οποία είχαμε φτάσει πριν διακρίνουμε περιπτώσεις, συνεπάγεται ότι επίσης $\sup(A+B) = +\infty$ και, επομένως, η ανισότητα

$$\sup A + \sup B \leq \sup(A + B)$$

στην οποία θέλουμε να καταλήξουμε ισχύει ως ισότητα.
Δεύτερος τρόπος: Υποθέτουμε ότι

$$\sup(A + B) < \sup A + \sup B \tag{14.3}$$

και θα καταλήξουμε σε άτοπο.
Τότε βλέπουμε αμέσως ότι το $\sup(A + B)$ είναι αναγκαστικά αριθμός. Δηλαδή το σύνολο $A + B$ είναι άνω φραγμένο, οπότε υπάρχει κάποιος αριθμός u ώστε να ισχύει $x + y \leq u$ για κάθε $x \in A, y \in B$. Παίρνοντας οποιονδήποτε $y_0 \in B$, βλέπουμε ότι ισχύει $x \leq u - y_0$ για κάθε $x \in A$. Άρα το A είναι άνω φραγμένο, οπότε το $\sup A$ είναι αριθμός. Με το ίδιο επιχείρημα βλέπουμε ότι και το B είναι άνω φραγμένο, οπότε και το $\sup B$ είναι αριθμός. Δηλαδή στην ανισότητα (14.3) όλες οι ποσότητες είναι αριθμοί.
Τώρα η ιδέα είναι να βρούμε έναν $x \in A$ πολύ κοντά στο $\sup A$ και έναν $y \in B$ πολύ κοντά στο $\sup B$ έτσι ώστε ο $x + y$ να είναι πολύ κοντά στο $\sup A + \sup B$. Πόσο κοντά; Κοντύτερα από όσο είναι το $\sup(A + B)$ στο $\sup A + \sup B$. Αυτό θα δώσει ότι ο $x + y$ είναι μεγαλύτερος από το $\sup(A + B)$ και θα φτάσουμε στο άτοπο που θέλουμε.

Θέτουμε $\epsilon = (\sup A + \sup B) - \sup(A + B) > 0$.
Γνωρίζουμε ότι υπάρχει $x \in A$ ώστε $\sup A - \frac{\epsilon}{2} < x \leq \sup A$ και ότι υπάρχει $y \in B$ ώστε $\sup B - \frac{\epsilon}{2} < y \leq \sup B$. Προσθέτουμε και έχουμε ότι γι αυτό το $x \in A$ και γι αυτό το $y \in B$ ισχύει $(\sup A + \sup B) - \epsilon < x + y$, οπότε, λόγω της συγκεκριμένης επιλογής του ϵ, έχουμε ότι $\sup(A + B) < x + y$. Όμως, ο $x + y$ είναι στοιχείο του $A + B$ και καταλήγουμε σε άτοπο.

Άσκηση 1.2.18. [α] *Έστω συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ αύξουσα στο $[a, b]$. Αν $f(a) > a$ και $f(b) < b$, αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε $f(\xi) = \xi$.*
[β] *Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ και έστω ότι για κάθε $x \in I$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $f(x') \leq f(x) \leq f(x'')$ για κάθε $x', x'' \in (x - \delta, x + \delta) \cap I$ με $x' \leq x \leq x''$. Αποδείξτε ότι η f είναι αύξουσα στο I.*

Λύση: [α] Θεωρούμε το σύνολο $A = \{x \in [a, b] \,|\, x \leq f(x)\}$.
Το A είναι μη-κενό επειδή $a \in A$. Επίσης, το A είναι άνω φραγμένο αφού περιέχεται στο διάστημα $[a, b]$. Άρα το $\xi = \sup A$ είναι αριθμός και μάλιστα είναι $a \leq \xi \leq b$. Η αριστερή ανισότητα ισχύει διότι $a \in A$ και η δεξιά διότι ο b είναι άνω φράγμα του A.
Τώρα, έστω $f(\xi) > \xi$. Τότε είναι $\xi < b$. Θεωρούμε τον $\delta = f(\xi) - \xi > 0$ και παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in [\xi, \xi + \delta] \cap [\xi, b]$ ισχύει

$$f(x) \geq f(\xi) = \xi + \delta \geq x$$

και, επομένως, $x \in A$. Άρα το A περιέχει ένα διάστημα δεξιά του ξ και καταλήγουμε σε άτοπο, αφού ο ξ είναι άνω φράγμα του A.
Κατόπιν, έστω $f(\xi) < \xi$. Τότε είναι $a < \xi$. Θεωρούμε τον $\delta = \xi - f(\xi) > 0$ και έχουμε ότι για κάθε $x \in (\xi - \delta, \xi] \cap [a, \xi]$ ισχύει

$$f(x) \leq f(\xi) = \xi - \delta < x$$

και, επομένως, $x \notin A$. Άρα το A δεν τέμνει ένα διάστημα αριστερά του ξ και καταλήγουμε σε άτοπο, αφού ο ξ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A.
Άρα $f(\xi) = \xi$.
[β] Έστω $a, b \in I$ με $a < b$. Θεωρούμε το σύνολο $A = \{x \in [a, b] \,|\, f(a) \leq f(x)\}$.
Το A είναι μη-κενό επειδή $a \in A$. Επίσης, το A είναι άνω φραγμένο αφού περιέχεται στο διάστημα $[a, b]$. Άρα το $\xi = \sup A$ είναι αριθμός και μάλιστα (όπως και στο [α]) είναι $a \leq \xi \leq b$.
Έστω $\xi \notin A$. Τότε είναι $a < \xi$ και $f(\xi) < f(a)$. Σύμφωνα με την υπόθεση, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $f(x') \leq f(\xi)$ και άρα $f(x') < f(a)$ για κάθε $x' \in (\xi - \delta, \xi] \cap I$. Άρα το A δεν τέμνει ένα διάστημα αριστερά του ξ και καταλήγουμε σε άτοπο, αφού ο ξ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A. Άρα $\xi \in A$ και, επομένως, $f(a) \leq f(\xi)$.
Τώρα, έστω $\xi < b$. Σύμφωνα με την υπόθεση υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $f(\xi) \leq f(x'')$ και άρα $f(a) \leq f(x'')$ για κάθε $x'' \in [\xi, \xi + \delta) \cap I$. Άρα το A περιέχει ένα διάστημα δεξιά του ξ και καταλήγουμε σε άτοπο, αφού ο ξ είναι άνω φράγμα του A. Άρα $\xi = b$.
Από τις $f(a) \leq f(\xi)$ και $\xi = b$ συνεπάγεται ότι $f(a) \leq f(b)$.
Αποδείξαμε ότι ισχύει $f(a) \leq f(b)$ για κάθε $a, b \in I$ με $a < b$, οπότε η f είναι αύξουσα στο I.

Άσκηση 1.3.1. *Αν ισχύει $l \leq a + \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, αποδείξτε ότι $l \leq a$.*
Αν ισχύει $|a - b| \leq \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, αποδείξτε ότι $a = b$.

Λύση: Το πρώτο ερώτημα. Έστω ότι ισχύει $l \leq a + \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και ας υποθέσουμε (για άτοπο) ότι $l > a$.
Τότε είναι $l - a > 0$, οπότε, βάσει της Αρχιμήδειας ιδιότητας, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n} < l - a$ ή, ισοδύναμα, $a + \frac{1}{n} < l$ και καταλήγουμε σε άτοπο.
Το δεύτερο ερώτημα. Υποθέτουμε ότι ισχύει $|a - b| \leq \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε από το [α] ή κατευθείαν από την Αρχιμήδεια ιδιότητα συνεπάγεται $|a - b| \leq 0$ και άρα $a = b$.

Άσκηση 1.3.2. *Βρείτε το supremum και το infimum καθενός από τα σύνολα:* $\{(-1)^n n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$,

$\mathbb{N} \cup \{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$, $\{(-1)^n - \frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$, $\{\frac{1}{2n} \,|\, n \in \mathbb{N}\} \cup \{1 - \frac{1}{2n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$.

Λύση: Το σύνολο $A = \{(-1)^n n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ περιέχει όλους τους θετικούς άρτιους και όλους τους αρνητικούς περιττούς. Είναι σαφές ότι το σύνολο δεν είναι άνω φραγμένο ούτε κάτω φραγμένο.
Πράγματι, αν το σύνολο είναι άνω φραγμένο, υπάρχει αριθμός u ώστε να ισχύει $2k \leq u$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Συνεπάγεται $k \leq \frac{u}{2}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, αλλά αυτό είναι άτοπο διότι το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο. Άρα το σύνολο δεν είναι άνω φραγμένο, οπότε $\sup A = +\infty$.
Επίσης, αν το σύνολο είναι κάτω φραγμένο, υπάρχει αριθμός l ώστε να ισχύει $l \leq -(2k-1)$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Συνεπάγεται $k \leq \frac{-l+1}{2}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και αυτό είναι άτοπο διότι το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο. Άρα το σύνολο δεν είναι κάτω φραγμένο, οπότε $\inf A = -\infty$.

Το σύνολο $B = \mathbb{N} \cup \{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ δεν είναι άνω φραγμένο, διότι περιέχει το $\mathbb{N}$ και το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο. Άρα $\sup B = +\infty$.
Από την άλλη μεριά, είναι προφανές ότι όλα τα στοιχεία του B είναι θετικοί αριθμοί. Άρα ο 0 είναι κάτω φράγμα του B και θα δούμε ότι ο 0 είναι το μέγιστο κάτω φράγμα του B.
Έστω τυχών $l > 0$. Από την Αρχιμήδεια ιδιότητα συνεπάγεται ότι υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n} < l$. Άρα υπάρχει στοιχείο του B το οποίο είναι μικρότερο από τον l. Άρα κανένας $l > 0$ δεν είναι κάτω φράγμα του B, οπότε ο 0 είναι το μέγιστο κάτω φράγμα του B. Άρα, λοιπόν, $\inf B = 0$.

Βλέπουμε ότι από τους περιττούς φυσικούς n προκύπτουν τα στοιχεία $-1 - \frac{1}{2k-1}$ του συνόλου $C = \{(-1)^n - \frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$, δηλαδή τα

$$-1-1=-2, \quad -1-\tfrac{1}{3}=-\tfrac{4}{3}, \quad -1-\tfrac{1}{5}=-\tfrac{6}{5} \qquad \text{κ.τ.λ.}$$

ενώ από τους άρτιους φυσικούς n προκύπτουν τα στοιχεία $1 - \frac{1}{2k}$ του C, δηλαδή τα

$$1-\tfrac{1}{2}=\tfrac{1}{2}, \quad 1-\tfrac{1}{4}=\tfrac{3}{4}, \quad 1-\tfrac{1}{6}=\tfrac{5}{6} \qquad \text{κ.τ.λ.}$$

Τα πρώτα στοιχεία βρίσκονται μέσα στο διάστημα $[-2,-1]$ ενώ τα δεύτερα στοιχεία βρίσκονται μέσα στο διάστημα $[\frac{1}{2}, 1]$.
Είναι προφανές ότι το μικρότερο στοιχείο του C είναι ο -2, οπότε $\inf C = \min C = -2$.
Το supremum του C θα προκύψει από τα δεύτερα στοιχεία τα οποία "πλησιάζουν" τον αριθμό 1, ο οποίος είναι, προφανώς, άνω φράγμα του C.
Αν υπήρχε άνω φράγμα $u < 1$ του C, τότε θα ίσχυε $1 - \frac{1}{2k} \leq u < 1$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Άρα θα ίσχυε $0 < 2(1-u) \leq \frac{1}{k}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, αλλά αυτό είναι άτοπο βάσει της Αρχιμήδειας ιδιότητας. Άρα δεν υπάρχει άνω φράγμα του C το οποίο να είναι < 1, οπότε $\sup C = 1$.

Όλα τα στοιχεία του $D = \{\frac{1}{2n} \,|\, n \in \mathbb{N}\} \cup \{1 - \frac{1}{2n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ βρίσκονται στο διάστημα $[-1, 1]$. Κάποια από αυτά "πλησιάζουν" τον 0 και κάποια άλλα "πλησιάζουν" τον 1.
Ο 1 είναι προφανώς άνω φράγμα του D. Αν υπήρχε άνω φράγμα $u < 1$ του D, θα ίσχυε $1 - \frac{1}{2n} \leq u < 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα θα ίσχυε $0 < 2(1-u) \leq \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, αλλά αυτό είναι άτοπο εξ αιτίας της Αρχιμήδειας ιδιότητας.
Άρα δεν υπάρχει άνω φράγμα του D που να είναι < 1, οπότε $\sup D = 1$.
Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι $\inf D = 0$.

Άσκηση 1.3.3. *Βρείτε το supremum του* $A = (a, b) \cap \mathbb{Q} = \{r \in \mathbb{Q} \,|\, a < r < b\}$.

Σχόλιο: Είναι αδύνατο να σχεδιάσουμε το σύνολο A με απόλυτη πιστότητα. Το σύνολο A έχει άπειρα στοιχεία και μάλιστα, λόγω της πυκνότητας των ρητών, σε κάθε υποδιάστημα του (a, b), οσοδήποτε μικρό, υπάρχουν άπειρα στοιχεία του A. Από την άλλη μεριά, δεν μπορούμε να σχεδιάσουμε το A με μια *πλήρη, συνεχή γραμμή* ανάμεσα στα a, b, διότι και οι άρρητοι είναι πυκνοί. Αυτό σημαίνει ότι σε κάθε υποδιάστημα του (a, b) υπάρχουν άπειροι άρρητοι, δηλαδή άπειρα στοιχεία εκτός του A. Φτιάχνουμε μια "σχετικά επαρκή" εικόνα του A αν ζωγραφίσουμε όσο το δυνατόν περισσότερα σημεία (στοιχεία του A) ανάμεσα στους a, b φροντίζοντας συγχρόνως να υπάρχουν όσο το δυνατό περισσότερα κενά (στοιχεία εκτός του A) ανάμεσα στα προηγούμενα σημεία. Μιλώντας απλοϊκά: τα στοιχεία του A είναι "παντού" στο διάστημα (a, b) αλλά και τα στοιχεία εκτός του A είναι "παντού" στο (a, b).

Λύση: Προφανώς, ο b είναι άνω φράγμα του A, διότι το A περιέχεται στο (a, b).
Κατόπιν, υποθέτουμε ότι κάποιος $u < b$ είναι άνω φράγμα του A. Επειδή όλα τα στοιχεία του A είναι $> a$, συνεπάγεται $a < u$. Λόγω της πυκνότητας των ρητών, υπάρχει ρητός r ώστε $u < r < b$. Συνεπάγεται $a < r < b$ (διότι $a < u$), οπότε ο r είναι στοιχείο του A. Άρα υπάρχει στοιχείο του A το οποίο είναι $> u$ και καταλήγουμε σε άτοπο, αφού ο u είναι άνω φράγμα του A.
Άρα δεν υπάρχει άνω φράγμα του A που να είναι $< b$ και, επομένως, το ελάχιστο άνω φράγμα του A είναι ο b. Δηλαδή $\sup A = b$.
Με λίγο διαφορετικό τρόπο. Έστω τυχών $u < b$. Θεωρούμε τον $u' = \max\{a, u\}$ και έχουμε ότι $a \leq u'$ και $u \leq u'$ και $u' < b$. Τότε υπάρχει ρητός r ώστε $u' < r < b$. Συνεπάγεται $a < r < b$ (διότι $a \leq u'$) και άρα ο r είναι στοιχείο του A. Επίσης, είναι $u < r$ (διότι $u \leq u'$) και, επομένως, ο u δεν είναι άνω φράγμα του A.
Άρα κανένας $u < b$ δεν είναι άνω φράγμα του A, οπότε το ελάχιστο άνω φράγμα του A είναι ο b.

Άσκηση 1.3.4. *Τα σύνολα $A = \{-\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ ικανοποιούν την υπόθεση ότι ισχύει $x \leq y$ για κάθε $x \in A$, $y \in B$. Βρείτε το σύνολο όλων των ξ με την ιδιότητα να ισχύει $x \leq \xi \leq y$ για κάθε $x \in A$, $y \in B$.*
Κάντε το ίδιο για τα $A = \{r \in \mathbb{Q} \,|\, r < 0\}$, $B = \{r \in \mathbb{Q} \,|\, r > 0\}$.

Λύση: Το πρώτο ερώτημα. Ο $\xi = 0$ έχει, προφανώς, την ιδιότητα ότι ισχύει $x \leq \xi \leq y$ για κάθε $x \in A$, $y \in B$.
Από την άλλη μεριά, έστω ότι για κάποιον ξ ισχύει $x \leq \xi \leq y$ για κάθε $x \in A$, $y \in B$. Αυτό σημαίνει ότι ισχύει $-\frac{1}{n} \leq \xi \leq \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
Από το ότι ισχύει $\xi \leq \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και από την Αρχιμήδεια ιδιότητα συνεπάγεται $\xi \leq 0$.
Από το ότι ισχύει $-\frac{1}{n} \leq \xi$ ή, ισοδύναμα, $-\xi \leq \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και από την Αρχιμήδεια ιδιότητα συνεπάγεται $-\xi \leq 0$, δηλαδή $\xi \geq 0$.
Από τις $\xi \leq 0$ και $\xi \geq 0$ συνεπάγεται $\xi = 0$.
Άρα ο $\xi = 0$ είναι ο μοναδικός ξ για τον οποίο ισχύει $x \leq \xi \leq y$ για κάθε $x \in A$, $y \in B$.
Το δεύτερο ερώτημα. Όπως στο πρώτο ερώτημα, ο αριθμός $\xi = 0$ έχει την ιδιότητα ότι ισχύει $x \leq \xi \leq y$ για κάθε $x \in A$, $y \in B$.
Τώρα, έστω ότι για κάποιον ξ ισχύει $x \leq \xi \leq y$ για κάθε $x \in A$, $y \in B$.
Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ο $-\frac{1}{n}$ ανήκει στο A και ο $\frac{1}{n}$ ανήκει στο B. Άρα ισχύει $-\frac{1}{n} \leq \xi \leq \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και, επομένως, από το αποτέλεσμα του πρώτου ερωτήματος συνεπάγεται $\xi = 0$.
Άρα ο $\xi = 0$ είναι ο μοναδικός ξ για τον οποίο ισχύει $x \leq \xi \leq y$ για κάθε $x \in A$, $y \in B$.
Με λίγο διαφορετικό τρόπο. Έστω ότι για κάποιον ξ ισχύει $x \leq \xi \leq y$ για κάθε $x \in A$, $y \in B$.
Αν $\xi > 0$, τότε υπάρχει ρητός r ώστε $0 < r < \xi$. Δηλαδή, υπάρχει $r \in B$ ώστε $r < \xi$ και καταλήγουμε σε άτοπο.
Ομοίως, αν $\xi < 0$, τότε υπάρχει ρητός r ώστε $\xi < r < 0$. Δηλαδή, υπάρχει $r \in A$ ώστε $\xi < r$ και πάλι καταλήγουμε σε άτοπο.
Άρα ο $\xi = 0$ είναι ο μοναδικός ξ για τον οποίο ισχύει $x \leq \xi \leq y$ για κάθε $x \in A$, $y \in B$.

Άσκηση 1.3.5. *Αν ισχύει $r \geq a$ για κάθε $r \in \mathbb{Q}$ με $r > b$, αποδείξτε ότι $b \geq a$.*
Αν $\{r \in \mathbb{Q} \,|\, r < a\} = \{r \in \mathbb{Q} \,|\, r < b\}$, αποδείξτε ότι $a = b$.

Λύση: Το πρώτο ερώτημα. Έστω (για άτοπο) $b < a$. Από την πυκνότητα των ρητών συνεπάγεται ότι υπάρχει $r \in \mathbb{Q}$ ώστε $b < r < a$. Αυτό είναι άτοπο, διότι η υπόθεση λέει ότι κάθε ρητός που είναι $> b$ πρέπει να είναι και $\geq a$.
Το δεύτερο ερώτημα. Η υπόθεση λέει ότι οι ρητοί που είναι $< a$ είναι οι ίδιοι με τους ρητούς που είναι $< b$.
Έστω (για άτοπο) $a < b$. Από την πυκνότητα των ρητών συνεπάγεται ότι υπάρχει $r \in \mathbb{Q}$ ώστε $a < r < b$. Άρα υπάρχει ρητός που είναι $< b$ αλλά δεν είναι $< a$ και αυτό είναι άτοπο.
Με τον ίδιο τρόπο προκύπτει άτοπο αν $b < a$. Άρα $a = b$.

Άσκηση 1.4.1. *Βρείτε το supremum του $(a, b) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \,|\, a < x < b\}$.*

Υπόδειξη: Όπως στην άσκηση 1.3.3.

Άσκηση 1.4.2. *Έστω οποιοσδήποτε άρρητος a και το σύνολο $A = \{r \in \mathbb{Q} \,|\, r < a\}$. Παρατηρήστε ότι $A \subseteq \mathbb{Q}$ και ότι το A είναι μη-κενό και άνω φραγμένο στο $\mathbb{Q}$. Δηλαδή, υπάρχει $u \in \mathbb{Q}$ (για παράδειγμα, ο $u = [a] + 1$) ώστε να ισχύει $r \leq u$ για κάθε $r \in A$.*

Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει αριθμός στο $\mathbb{Q}$, ο οποίος να είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A. Συμπεράνατε ότι το $\mathbb{Q}$ δεν έχει την ιδιότητα supremum.

Υπόδειξη: Έστω $s = \sup A$ και $s \in \mathbb{Q}$. Καταλήξτε σε άτοπο, διακρίνοντας τις περιπτώσεις: $s < a$ και $s > a$.

Άσκηση 1.4.6. *Έστω $y > 1$. Αποδείξτε ότι $y^x = \inf\{y^r \,|\, r \in \mathbb{Q}, x < r\}$.*

Λύση: Γνωρίζουμε ότι ισχύει $y^x < y^r$ για κάθε $r \in \mathbb{Q}$ με $x < r$. Άρα ο y^x είναι κάτω φράγμα του συνόλου $\{y^r \,|\, r \in \mathbb{Q}, x < r\}$.
Τώρα, έστω $\gamma > y^x$, οπότε $\frac{1}{\gamma} < y^{-x}$.
Βάσει του ορισμού της δύναμης y^{-x}, είναι $y^{-x} = \sup\{y^s \,|\, s \in \mathbb{Q}, s < -x\}$. Άρα υπάρχει $s \in \mathbb{Q}$ με $s < -x$ ώστε να είναι $\frac{1}{\gamma} < y^s$. Τότε, όμως, ο $r = -s$ είναι ρητός $> x$ και ισχύει $y^r < \gamma$. Δηλαδή υπάρχει στοιχείο του $\{y^r \,|\, r \in \mathbb{Q}, x < r\}$ το οποίο είναι $< \gamma$ και άρα ο γ δεν είναι κάτω φράγμα του $\{y^r \,|\, r \in \mathbb{Q}, x < r\}$.
Άρα ο y^x είναι το μέγιστο κάτω φράγμα του $\{y^r \,|\, r \in \mathbb{Q}, x < r\}$.

14.2 Κεφάλαιο 2.

Άσκηση 2.1.1. *Αν μια ακολουθία είναι αύξουσα και φθίνουσα, αποδείξτε ότι είναι σταθερή.*

Λύση: Έστω ότι η ακολουθία (x_n) είναι αύξουσα και φθίνουσα. Δηλαδή, ισχύει $x_n \leq x_{n+1}$ και, ταυτόχρονα, $x_n \geq x_{n+1}$ για κάθε n. Άρα ισχύει $x_n = x_{n+1}$ για κάθε n, οπότε εύκολα βλέπουμε με την αρχή της επαγωγής ότι ισχύει $x_n = x_1$ για κάθε n. Άρα η (x_n) είναι σταθερή.

Άσκηση 2.1.2. *Βρείτε τα σύνολα όρων των ακολουθιών $\big(\frac{a+b}{2} + (-1)^{n-1}\frac{a-b}{2}\big)$, $\big(n - 2[\frac{n}{2}]\big)$ και $\big(n - 3[\frac{n}{3}]\big)$.*

Λύση: Οι όροι της πρώτης ακολουθίας είναι, διαδοχικά, οι $a, b, a, b, a, b, a, b, a, b, a, \ldots$. Αν ο n είναι περιττός, τότε ο αντίστοιχος όρος είναι ίσος με a, ενώ, αν ο n είναι άρτιος, τότε ο αντίστοιχος όρος είναι ίσος με b. Το σύνολο των όρων της ακολουθίας είναι το $\{a, b\}$.
Οι όροι της δεύτερης ακολουθίας είναι οι $1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots$. Το σύνολο των όρων της ακολουθίας είναι το $\{0, 1\}$. Η ακολουθία μπορεί να περιγραφεί με τον τύπο

$$x_n = \left\{\begin{array}{ll} 0, & \text{αν } n = 2k \\ 1, & \text{αν } n = 2k+1 \end{array}\right\} = \text{το υπόλοιπο της διαίρεσης } n : 2.$$

Οι όροι της τρίτης ακολουθίας είναι οι $1, 2, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 0, 1, 2, \ldots$. Το σύνολο όρων της ακολουθίας είναι το $\{0, 1, 2\}$ και η ακολουθία θα μπορούσε να περιγραφεί με τον τύπο

$$x_n = \left\{\begin{array}{ll} 0, & \text{αν } n = 3k \\ 1, & \text{αν } n = 3k+1 \\ 2, & \text{αν } n = 3k+2 \end{array}\right\} = \text{το υπόλοιπο της διαίρεσης } n : 3.$$

Άσκηση 2.1.3. *Οι έξι πρώτοι όροι μιας άγνωστης ακολουθίας είναι:* $1, 4, 9, 16, 25, 36$. *Ο έβδομος πρέπει να είναι ο* 49*; ο* 24*; ή μπορεί να είναι οποιοσδήποτε αριθμός;*

Λύση: Οποιοσδήποτε αριθμός. Αν η ακολουθία είναι άγνωστη, δεν μπορούμε να γνωρίζουμε αν υπάρχει κανόνας σχηματισμού των όρων της.
Σχόλιο: Η άσκηση αυτή δεν έχει καμία σχέση με τα διάφορα IQ tests. Σε ένα τέτοιο IQ test η σωστή απάντηση θα ήταν 49 σύμφωνα με τον “κανόνα”: $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2$ και άρα 7^2.

Άσκηση 2.1.4. *Αποδείξτε ότι κάθε αύξουσα ακολουθία είναι κάτω φραγμένη και ότι κάθε φθίνουσα* *ακολουθία είναι άνω φραγμένη.*

Λύση: Αν η (x_n) είναι αύξουσα, ισχύει $x_n \leq x_{n+1}$ για κάθε n και εύκολα βλέπουμε με την αρχή της επαγωγής ότι από αυτό συνεπάγεται ότι ισχύει $x_1 \leq x_n$ για κάθε n. Άρα η (x_n) είναι κάτω φραγμένη και ένα κάτω φράγμα της είναι, για παράδειγμα, ο πρώτος όρος της.
Αποδείξτε εσείς τον ανάλογο ισχυρισμό για φθίνουσες ακολουθίες.

Άσκηση 2.1.5. *Το άθροισμα δύο ακολουθιών (x_n) και (y_n) είναι η ακολουθία (x_n+y_n). Αποδείξτε ότι το άθροισμα δύο αυξουσών ακολουθιών είναι αύξουσα ακολουθία και ότι το άθροισμα δύο άνω φραγμένων ακολουθιών είναι άνω φραγμένη ακολουθία.*

Λύση: Έστω ότι οι (x_n) και (y_n) είναι αύξουσες. Δηλαδή ότι ισχύει $x_n \leq x_{n+1}$ και $y_n \leq y_{n+1}$ για κάθε n. Προσθέτουμε τις δύο ανισότητες και έχουμε ότι ισχύει $x_n + y_n \leq x_{n+1} + y_{n+1}$ για κάθε n. Άρα η $(x_n + y_n)$ είναι αύξουσα.
Τώρα έστω ότι οι (x_n) και (y_n) είναι άνω φραγμένες. Δηλαδή υπάρχουν αριθμοί u και v ώστε να ισχύει $x_n \leq u$ και $y_n \leq v$ για κάθε n. Προσθέτουμε τις δύο ανισότητες και έχουμε ότι ισχύει $x_n + y_n \leq u + v$ για κάθε n. Άρα η $(x_n + y_n)$ είναι άνω φραγμένη.

Άσκηση 2.1.6. *Είναι οι ακολουθίες $(\frac{13^n}{n!})$ και $(\frac{n^{30}}{2^n})$ μονότονες; φραγμένες;*

Λύση: Για να δούμε αν μια ακολουθία με κάπως περίπλοκο τύπο είναι μονότονη συνήθως κοιτάμε τους πρώτους όρους της. Όμως, πολλές φορές αυτό είναι παραπλανητικό.
Οι πρώτοι όροι της πρώτης ακολουθίας με τύπο $x_n = \frac{13^n}{n!}$ είναι οι

$$\tfrac{13^1}{1!} = 13, \quad \tfrac{13^2}{2!} = 84.5, \quad \tfrac{13^3}{3!} = 366.16\dots, \quad \tfrac{13^4}{4!} = 1190.04\dots \qquad \text{κ.τ.λ.}$$

Κρίνοντας από τους πρώτους όρους της ακολουθίας υποψιαζόμαστε ότι αυτή είναι γνησίως αύξουσα. Πρέπει, όμως, να το αποδείξουμε. Ελέγχουμε, λοιπόν, αν ισχύει $\frac{13^n}{n!} < \frac{13^{n+1}}{(n+1)!}$ για κάθε n ή τουλάχιστον για ποιούς φυσικούς n ισχύει κάτι τέτοιο. Εύκολα βλέπουμε ότι η ανισότητα αυτή ισοδυναμεί με την $n < 12$ ενώ η αντίθετη ανισότητα $\frac{13^n}{n!} > \frac{13^{n+1}}{(n+1)!}$ ισοδυναμεί με $n > 12$. Άρα ισχύει

$$x_1 < x_2 < \dots < x_{11} < x_{12} = x_{13} > x_{14} > x_{15} > \dots$$

και η ακολουθία είναι τελικά γνησίως φθίνουσα (μετά από τον δέκατο τρίτο όρο της).
Προφανώς, η ακολουθία είναι και φραγμένη. Ένα κάτω φράγμα της είναι ο 0 και ένα άνω φράγμα της είναι ο $x_{12} = x_{13} = \frac{13^{12}}{12!}$.
Οι πρώτοι όροι της δεύτερης ακολουθίας με τύπο $x_n = \frac{n^{30}}{2^n}$ είναι οι

$$\tfrac{1^{30}}{2^1} = 0.5, \quad \tfrac{2^{30}}{2^2} = 2^{28}, \quad \tfrac{3^{30}}{2^3}, \quad \tfrac{4^{30}}{2^4} = 2^{56}, \dots \qquad \text{κ.τ.λ.}$$

Ο πρώτος όρος είναι μικρός. Ο δεύτερος όρος είναι τόσο μεγάλος που δεν επιχειρούμε καν να γράψουμε τα δεκαδικά του ψηφία. Είναι τόσο μεγάλος που πλησιάζει την εκτίμηση για το πλήθος των μορίων του σύμπαντος! Ο τρίτος και ο τέταρτος όρος είναι ακόμη πιο μεγάλοι! Κρίνοντας από τους πρώτους όρους της ακολουθίας υποψιαζόμαστε ότι αυτή είναι γνησίως αύξουσα. Ελέγχουμε, πάλι, για ποιούς φυσικούς n ισχύει $\frac{n^{30}}{2^n} < \frac{(n+1)^{30}}{2^{n+1}}$. Η ανισότητα αυτή ισοδυναμεί με την $2 < (1+\frac{1}{n})^{30}$ κι αυτή με την $\sqrt[30]{2} < 1+\frac{1}{n}$ κι αυτή με την $n < \frac{1}{\sqrt[30]{2}-1}$. Ο αριθμός $\frac{1}{\sqrt[30]{2}-1}$ είναι ένας πολύ μεγάλος άρρητος (γιατί;) αριθμός και, αν θέσουμε $n_0 = \big[\frac{1}{\sqrt[30]{2}-1}\big]$, (οπότε $n_0 < \frac{1}{\sqrt[30]{2}-1} < n_0 + 1$) τότε η ανισότητα $\frac{n^{30}}{2^n} < \frac{(n+1)^{30}}{2^{n+1}}$ ισοδυναμεί με $n \leq n_0$ ενώ η αντίθετη ανισότητα $\frac{n^{30}}{2^n} > \frac{(n+1)^{30}}{2^{n+1}}$ ισοδυναμεί με $n \geq n_0 + 1$. Άρα ισχύει

$$x_1 < x_2 < \dots < x_{n_0} < x_{n_0+1} > x_{n_0+2} > x_{n_0+3} > \dots$$

και η ακολουθία είναι τελικά γνησίως φθίνουσα (μετά από τον $(n_0 + 1)$-οστό όρο της).
Προφανώς, η ακολουθία είναι και φραγμένη. Ένα κάτω φράγμα της είναι ο 0 και ένα άνω φράγμα της είναι ο x_{n_0+1}.

Άσκηση 2.1.9. *Έστω ότι το σύνολο όρων της ακολουθίας (x_n) είναι πεπερασμένο. Αποδείξτε ότι υπάρχει αριθμός c ώστε να ισχύει $x_n = c$ για άπειρους n.*

Λύση: Άς υποθέσουμε ότι το σύνολο όρων της (x_n) είναι το $\{a_1, a_2, \dots a_k\}$.
Αν πράγματι υπάρχει αριθμός c ώστε να ισχύει $x_n = c$ για άπειρους n, τότε, προφανώς, ένας τέτοιος c πρέπει να είναι ένας από τους $a_1, \dots, a_k$. Άρα θα προσπαθήσουμε να φτάσουμε σε άτοπο υποθέτοντας ότι κανένας από τους $a_1, \dots, a_k$ δεν έχει αυτήν την ιδιότητα. Υποθέτουμε, δηλαδή, ότι αν ο c είναι οποιοσδήποτε από τους $a_1, \dots, a_k$, τότε ισχύει $x_n = c$ για το πολύ πεπερασμένους n. Αυτό σημαίνει ότι

$$\text{ισχύει } x_n = a_1 \text{ για το πολύ πεπερασμένους } n,$$

$$\text{ισχύει } x_n = a_2 \text{ για το πολύ πεπερασμένους } n,$$

$$\dots$$

$$\dots$$

$$\dots$$

$$\text{ισχύει } x_n = a_k \text{ για το πολύ πεπερασμένους } n.$$

Όμως, τότε

$$\text{ισχύει } x_n = a_1 \text{ ή } a_2 \text{ ή } \dots \text{ ή } a_k \text{ για το πολύ πεπερασμένους } n.$$

(Πράγματι, αν το πλήθος των n για τους οποίους ισχύει $x_n = a_1$ είναι ίσο με A_1, το πλήθος των n για τους οποίους ισχύει $x_n = a_2$ είναι ίσο με A_2, κ.τ.λ., και το πλήθος των n για τους οποίους ισχύει $x_n = a_k$ είναι ίσο με A_k, τότε το πλήθος των n για τους οποίους ισχύει μια οποιαδήποτε από τις ισότητες αυτές είναι ίσο με $A_1 + A_2 + \cdots + A_k$ και είναι πεπερασμένο.)
Αυτό όμως είναι προφανώς άτοπο, αφού για κάθε n (και, επομένως, για άπειρους n) ισχύει $x_n = a_1$ ή a_2 ή $\dots$ ή a_k.
Άρα υπάρχει κάποιος από τους αριθμούς $a_1, \dots, a_k$ ώστε, αν c είναι αυτός ο αριθμός, τότε ισχύει $x_n = c$ για άπειρους n.

Σχόλιο: Μπορεί να υπάρχουν περισσότεροι από ένας c με την παραπάνω ιδιότητα. Για παράδειγμα, η ακολουθία $1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$ έχει πεπερασμένο σύνολο όρων, το $\{-1, 1\}$, και υπάρχουν δύο c με την παραπάνω ιδιότητα: ο $c = -1$ και ο $c = 1$. Όμως, η ακολουθία $1, -1, 1, 1, 1, 1, \dots$ έχει πεπερασμένο σύνολο όρων, το $\{-1, 1\}$, και υπάρχει μόνο ένας c με την παραπάνω ιδιότητα: ο $c = 1$.

Σχόλιο: Σκεφτείτε το εξής παράδειγμα. Αν αρχίσουμε να ρίχνουμε ένα ζάρι επ' άπειρον και ονομάσουμε $x_1, x_2, \dots$ τα διαδοχικά αποτελέσματα, τότε σχηματίζεται μια ακολουθία με πεπερασμένο σύνολο όρων: ένα υποσύνολο του $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Είναι προφανές ότι ένας τουλάχιστον από τους αριθμούς $1, 2, 3, 4, 5, 6$ θα επαναληφθεί άπειρες φορές. (Αυτό δεν έχει να κάνει με το αν το ζάρι είναι "πειραγμένο" ή όχι. Τί έχει να κάνει με το αν το ζάρι είναι "πειραγμένο" ή όχι;)

Άσκηση 2.1.11. *Ποιοί αρχικοί όροι (και με τι περιορισμούς) χρειάζονται για να ορισθεί η ακολουθία (x_n) με τον αναδρομικό τύπο $x_{n+1} = x_1 + \cdots + x_n$; Απαντήστε στην ίδια ερώτηση για τον αναδρομικό τύπο $x_{n+3} = \frac{x_n x_{n+2}}{x_{n+1}}$.*

Λύση: Ο αναδρομικός τύπος $x_{n+1} = x_1 + \cdots + x_n$ για $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ γράφεται, αντιστοίχως:

$$x_2 = x_1, \quad x_3 = x_1 + x_2, \quad x_4 = x_1 + x_2 + x_3, \quad x_5 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4, \quad \dots .$$

Αυτό σημαίνει ότι, γνωρίζοντας μόνο τον πρώτο όρο x_1, μπορούμε να βρούμε από την πρώτη ισότητα τον x_2, κατόπιν από την δεύτερη τον x_3, κατόπιν από την τρίτη τον x_4, κατόπιν από την τέταρτη τον x_5 και ούτω καθ' εξής. Έτσι, λοιπόν, ορίζεται με επαγωγικό τρόπο η ακολουθία μόνο από τον πρώτο όρο της. Δεν χρειάζεται, μάλιστα, να τεθεί κανένας περιορισμός στον x_1, αφού δεν

υπάρχει περίπτωση να προκύψει πρόβλημα με τις διαδοχικές προσθέσεις.
Ο αναδρομικός τύπος $x_{n+3} = \frac{x_n x_{n+2}}{x_{n+1}}$ για $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ γράφεται, αντιστοίχως:

$$x_4 = \frac{x_1 x_3}{x_2}, \quad x_5 = \frac{x_2 x_4}{x_3}, \quad x_6 = \frac{x_3 x_5}{x_4}, \quad x_7 = \frac{x_4 x_6}{x_5}, \quad \dots .$$

Τώρα, γνωρίζοντας τους x_1, x_2, x_3, μπορούμε να βρούμε διαδοχικά τους $x_4, x_5, x_6, x_7, \dots$. Άρα η ακολουθία ορίζεται μόνο από τους τρεις πρώτους όρους της. Πρέπει, όμως, να προσέξουμε διότι στις διάφορες διαδοχικές ισότητες παρουσιάζονται παρονομαστές. Για παράδειγμα, για να έχει νόημα η πρώτη ισότητα, πρέπει να είναι $x_2 \neq 0$. Ομοίως, για την δεύτερη ισότητα χρειάζεται να είναι $x_3 \neq 0$. Για την τρίτη ισότητα πρέπει να είναι $x_4 \neq 0$. Όμως, ο x_4 ορίζεται από την πρώτη ισότητα και για να είναι αυτός $\neq 0$ πρέπει να είναι $x_1 \neq 0$ (εκτός από τους ήδη τεθέντες περιορισμούς $x_2 \neq 0$ και $x_3 \neq 0$). Παρατηρούμε τώρα ότι από τους μέχρι στιγμής τεθέντες περιορισμούς συνεπάγεται από την δεύτερη ισότητα ότι $x_5 \neq 0$. Κατόπιν, από την τρίτη ισότητα συνεπάγεται $x_6 \neq 0$ και, γενικότερα, βλέπουμε ότι, επαγωγικά, όλοι οι όροι της ακολουθίας είναι $\neq 0$ και ότι δεν παρουσιάζεται κανένα πρόβλημα με τους παρονομαστές στις σχέσεις υπολογισμού των διαδοχικών όρων.
Άρα για να ορίζεται η ακολουθία χρειάζονται μόνο οι τρεις πρώτοι όροι της και πρέπει να είναι και οι τρεις $\neq 0$.

Άσκηση 2.2.1. *Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς, αποδείξτε ότι:* $\frac{1}{n+8} \to 0$, $\frac{3n+1}{2n+5} \to \frac{3}{2}$, $\frac{1}{\sqrt{n+5}} \to 0$, $2n^2 - n \to +\infty$, $n^2 - 7n \to +\infty$, $\frac{1}{5^n - 4^n} \to 0$.

Λύση: Το πρώτο όριο. Έστω τυχών $\epsilon > 0$. Τότε η ανισότητα $|\frac{1}{n+8} - 0| < \epsilon$ ισοδυναμεί με την $\frac{1}{n+8} < \epsilon$ κι αυτή συνεπάγεται από την $\frac{1}{n} < \epsilon$ (μειώσαμε τον παρονομαστή, οπότε αυξήσαμε τον λόγο) κι αυτή συνεπάγεται από την $n > \frac{1}{\epsilon}$. Με σύμβολα:

$$\left|\frac{1}{n+8} - 0\right| < \epsilon \;\Leftarrow\; \frac{1}{n+8} < \epsilon \;\Leftarrow\; \frac{1}{n} < \epsilon \;\Leftarrow\; n > \frac{1}{\epsilon}.$$

Τώρα, γνωρίζουμε ότι υπάρχει $n_0 > \frac{1}{\epsilon}$, οπότε με έναν τέτοιο n_0 έχουμε ότι για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $n > \frac{1}{\epsilon}$ και, επομένως, ισχύει $|\frac{1}{n+8} - 0| < \epsilon$. Με σύμβολα:

$$n \geq n_0 \;\Rightarrow\; n > \frac{1}{\epsilon} \;\Rightarrow\; \left|\frac{1}{n+8} - 0\right| < \epsilon.$$

Το δεύτερο όριο. Έστω τυχών $\epsilon > 0$. Η ανισότητα $|\frac{3n+1}{2n+5} - \frac{3}{2}| < \epsilon$ ισοδυναμεί με την $\frac{13}{4n+10} < \epsilon$ κι αυτή συνεπάγεται από την $\frac{13}{4n} < \epsilon$ (μειώσαμε τον παρονομαστή, οπότε αυξήσαμε τον λόγο) κι αυτή συνεπάγεται από την $n > \frac{13}{4\epsilon}$. Με σύμβολα:

$$\left|\frac{3n+1}{2n+5} - \frac{3}{2}\right| < \epsilon \;\Leftarrow\; \frac{13}{4n+10} < \epsilon \;\Leftarrow\; \frac{13}{4n} < \epsilon \;\Leftarrow\; n > \frac{13}{4\epsilon}.$$

Τώρα, γνωρίζουμε ότι υπάρχει $n_0 > \frac{13}{4\epsilon}$, οπότε με έναν τέτοιο n_0 έχουμε ότι για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $n > \frac{13}{4\epsilon}$ και, επομένως, ισχύει $|\frac{3n+1}{2n+5} - \frac{3}{2}| < \epsilon$. Με σύμβολα:

$$n \geq n_0 \;\Rightarrow\; n > \frac{13}{4\epsilon} \;\Rightarrow\; \left|\frac{3n+1}{2n+5} - \frac{3}{2}\right| < \epsilon.$$

Το τρίτο όριο. Έστω τυχών $\epsilon > 0$. Τότε η ανισότητα $|\frac{1}{\sqrt{n+5}} - 0| < \epsilon$ ισοδυναμεί με την $\frac{1}{\sqrt{n+5}} < \epsilon$ κι αυτή συνεπάγεται από την $\frac{1}{\sqrt{n}} < \epsilon$ (μειώσαμε τον παρονομαστή, οπότε αυξήσαμε τον λόγο) κι αυτή συνεπάγεται από την $n > \frac{1}{\epsilon^2}$. Με σύμβολα:

$$\left|\frac{1}{\sqrt{n+5}} - 0\right| < \epsilon \;\Leftarrow\; \frac{1}{\sqrt{n+5}} < \epsilon \;\Leftarrow\; \frac{1}{\sqrt{n}} < \epsilon \;\Leftarrow\; n > \frac{1}{\epsilon^2}.$$

Τώρα, γνωρίζουμε ότι υπάρχει $n_0 > \frac{1}{\epsilon^2}$, οπότε με έναν τέτοιο n_0 έχουμε ότι για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $n > \frac{1}{\epsilon^2}$ και, επομένως, ισχύει $|\frac{1}{\sqrt{n+5}} - 0| < \epsilon$. Με σύμβολα:

$$n \geq n_0 \;\Rightarrow\; n > \frac{1}{\epsilon^2} \;\Rightarrow\; \left|\frac{1}{\sqrt{n+5}} - 0\right| < \epsilon.$$

Το τέταρτο όριο. Έστω τυχών $M > 0$. Τότε η ανισότητα $2n^2 - n > M$ συνεπάγεται από την $n^2 > M$ (μειώσαμε την αριστερή πλευρά διότι, όπως βλέπουμε εύκολα, ισχύει $2n^2 - n \geq n^2$) κι αυτή συνεπάγεται από την $n > \sqrt{M}$. Με σύμβολα:

$$2n^2 - n > M \;\Leftarrow\; n^2 > M \;\Leftarrow\; n > \sqrt{M}.$$

Τώρα, γνωρίζουμε ότι υπάρχει $n_0 > \sqrt{M}$, οπότε με έναν τέτοιο n_0 έχουμε ότι για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $n > \sqrt{M}$ και άρα ισχύει $2n^2 - n > M$. Με σύμβολα:

$$n \geq n_0 \;\Rightarrow\; n > \sqrt{M} \;\Rightarrow\; 2n^2 - n > M.$$

Σχόλιο: Μερικές φορές για να φτάσουμε σε μια απλή ανισότητα χρειάζεται να βάλουμε κάποιους περιορισμούς στον n. Δηλαδή, για να ισχύουν οι διάφορες συνεπαγωγές μπορεί να χρειαστεί, εκτός από τον περιορισμό $n \geq n_0$, να ισχύουν και άλλοι περιορισμοί, όπως για παράδειγμα να είναι $n \geq 13$ και $n \geq 7$. Σ' αυτήν την περίπτωση θα χρειαστεί να είναι $n \geq \max\{n_0, 13, 7\} = \max\{n_0, 13\}$. Οπότε, τότε ορίζουμε $n_0' = \max\{n_0, 13\}$ και έχουμε ότι από $n \geq n_0'$ συνεπάγονται τα διάφορα που θέλουμε. Μάλιστα, συνηθίζεται να γράφουμε n_0' αντί του n_0 στον αρχικό περιορισμό και n_0 αντί του n_0' στον τελικό περιορισμό. Δείτε τα δύο επόμενα παραδείγματα.

Το πέμπτο όριο. Έστω τυχών $M > 0$. Για να χειριστούμε την ανισότητα $n^2 - 7n > M$ προσπαθούμε να μικρύνουμε και ταυτόχρονα να απλοποιήσουμε το αριστερό μέρος της, αλλά δεν είναι απολύτως προφανές πώς θα πετύχουμε κάτι τέτοιο. Σκεφτόμαστε ότι, τουλάχιστον όταν ο n είναι πολύ μεγάλος, πρέπει ο n^2 να είναι πολύ μεγαλύτερος από τον $7n$ οπότε, ακόμη και αν αφαιρεθεί ο $7n$ από τον n^2, θα παραμένει ένα μέρος του n^2. Εικάζουμε, λοιπόν, ότι, τουλάχιστον όταν ο n είναι πολύ μεγάλος, πρέπει να ισχύει κάτι σαν $n^2 - 7n \geq \frac{1}{2}n^2$. Πράγματι, εύκολα βλέπουμε ότι η τελευταία ανισότητα ισχύει όταν $n \geq 14$. Επομένως, κάνουμε το εξής. Λέμε ότι, αν $n \geq 14$, τότε η ανισότητα $n^2 - 7n > M$ συνεπάγεται από την $\frac{1}{2}n^2 > M$. Με σύμβολα:

$$\left\{\begin{matrix} n \geq 14 \\ (1/2)n^2 > M \end{matrix}\right\} \Rightarrow n^2 - 7n > M. \tag{14.4}$$

Τώρα, η ανισότητα $\frac{1}{2}n^2 > M$ συνεπάγεται από την $n > \sqrt{2M}$. Όμως, γνωρίζουμε ότι υπάρχει $n_0' > \sqrt{2M}$ και με έναν τέτοιο n_0' έχουμε ότι για κάθε $n \geq n_0'$ ισχύει $n > \sqrt{2M}$ και, επομένως, $\frac{1}{2}n^2 > M$. Με σύμβολα:

$$n \geq n_0' \;\Rightarrow\; \tfrac{1}{2}n^2 > M. \tag{14.5}$$

Τώρα ορίζουμε $n_0 = \max\{n_0', 14\}$ και με έναν τέτοιο n_0 έχουμε ότι για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $n \geq 14$ και $n \geq n_0'$, οπότε, συνδυάζοντας τις (14.4) και (14.5), συνεπάγεται ότι ισχύει $n^2 - 7n > M$. Με σύμβολα:

$$n \geq n_0 \;\Rightarrow\; \left\{\begin{matrix} n \geq 14 \\ n \geq n_0' \end{matrix}\right\} \;\Rightarrow\; \left\{\begin{matrix} n \geq 14 \\ (1/2)n^2 > M \end{matrix}\right\} \Rightarrow n^2 - 7n > M.$$

Το έκτο όριο. Έστω τυχών $\epsilon > 0$. Η ανισότητα $|\frac{1}{5^n - 4^n} - 0| < \epsilon$ ισοδυναμεί με την $\frac{1}{5^n - 4^n} < \epsilon$. Θέλοντας να ελλατώσουμε τον $5^n - 4^n$, σκεφτόμαστε ότι ο 4^n είναι πολύ μικρός σε σχέση με τον 5^n οπότε, ακόμη κι αν τόν αφαιρέσουμε από τον 5^n, θα παραμείνει ένα μέρος του 5^n. Περιμένουμε, λοιπόν, να ισχύει κάτι σαν $5^n - 4^n \geq \frac{1}{2}5^n$, τουλάχιστον όταν ο n είναι αρκετά μεγάλος. Πράγματι, η ανισότητα $5^n - 4^n \geq \frac{1}{2}5^n$ ισοδυναμεί με την $\frac{1}{2}5^n \geq 4^n$ κι αυτή με την $(\frac{5}{4})^n \geq 2$. Τώρα από την ανισότητα του Bernoulli συνεπάγεται $(\frac{5}{4})^n = (1 + \frac{1}{4})^n \geq 1 + \frac{n}{4}$, οπότε η $(\frac{5}{4})^n \geq 2$ ισχύει τουλάχιστον όταν $n \geq 4$. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι η $5^n - 4^n \geq \frac{1}{2}5^n$ ισχύει όταν $n \geq 4$. Και τώρα κάνουμε το εξής. Λέμε ότι, αν $n \geq 4$, τότε η ανισότητα $\frac{1}{5^n - 4^n} < \epsilon$ συνεπάγεται από την $\frac{1}{(1/2)5^n} < \epsilon$. Με σύμβολα:

$$\left\{\begin{matrix} n \geq 4 \\ \frac{1}{(1/2)5^n} < \epsilon \end{matrix}\right\} \;\Rightarrow\; \frac{1}{5^n - 4^n} < \epsilon \;\Rightarrow\; \left|\frac{1}{5^n - 4^n} - 0\right| < \epsilon. \tag{14.6}$$

Τώρα, η $\frac{1}{(1/2)5^n} < \epsilon$ συνεπάγεται από την $5^n > \frac{2}{\epsilon}$ κι αυτή συνεπάγεται από την $n > \log_5 \frac{2}{\epsilon}$. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει $n_0{}' > \log_5 \frac{2}{\epsilon}$ και με έναν τέτοιο $n_0{}'$ έχουμε ότι για κάθε $n \geq n_0{}'$ ισχύει $n > \log_5 \frac{2}{\epsilon}$ και, επομένως, $\frac{1}{(1/2)5^n} < \epsilon$. Με σύμβολα:

$$n \geq n_0{}' \;\Rightarrow\; \frac{1}{(1/2)5^n} < \epsilon. \tag{14.7}$$

Τέλος, ορίζουμε $n_0 = \max\{n_0{}', 4\}$. Τότε με έναν τέτοιο n_0 έχουμε ότι για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $n \geq 4$ και $n \geq n_0{}'$, οπότε, συνδυάζοντας τις (14.6) και (14.7), έχουμε ότι ισχύει $\left|\frac{1}{5^n-4^n} - 0\right| < \epsilon$. Με σύμβολα:

$$n \geq n_0 \;\Rightarrow\; \begin{Bmatrix} n \geq 4 \\ n \geq n_0{}' \end{Bmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{Bmatrix} n \geq 4 \\ \frac{1}{(1/2)5^n} < \epsilon \end{Bmatrix} \;\Rightarrow\; \left|\frac{1}{5^n-4^n} - 0\right| < \epsilon.$$

Άσκηση 2.2.2. [α] *Αποδείξτε ότι όταν ο $\epsilon > 0$ μικραίνει και το $x \in \overline{\mathbb{R}}$ μένει αμετάβλητο, τότε η περιοχή $N_x(\epsilon)$ μικραίνει.*
[β] *Αν $l < x$, δηλαδή το x (αριθμός ή $+\infty$) είναι δεξιά του l, τότε υπάρχει ένας αρκετά μικρός $\epsilon > 0$ ώστε ολόκληρη η περιοχή $N_x(\epsilon)$ να είναι δεξιά του l.*
Αν $x < u$, δηλαδή το x (αριθμός ή $-\infty$) είναι αριστερά του u, τότε υπάρχει ένας αρκετά μικρός $\epsilon > 0$ ώστε ολόκληρη η περιοχή $N_x(\epsilon)$ να είναι αριστερά του u.
Αν $l < x < u$, δηλαδή ο x (αριθμός) είναι ανάμεσα στους l, u, τότε υπάρχει ένας αρκετά μικρός $\epsilon > 0$ ώστε ολόκληρη η περιοχή $N_x(\epsilon)$ να είναι ανάμεσα στους l, u.

Λύση: [α] Έστω $x \in \mathbb{R}$ και $0 < \epsilon_1 < \epsilon_2$. Τότε $x - \epsilon_2 < x - \epsilon_1 < x + \epsilon_1 < x + \epsilon_2$, δηλαδή $(x - \epsilon_1, x + \epsilon_1) \subseteq (x - \epsilon_2, x + \epsilon_2)$.
Έστω $x = +\infty$ και $0 < \epsilon_1 < \epsilon_2$. Τότε $0 < \frac{1}{\epsilon_2} < \frac{1}{\epsilon_1}$, οπότε $(\frac{1}{\epsilon_1}, +\infty] \subseteq (\frac{1}{\epsilon_2}, +\infty]$.
Η περίπτωση με το $x = -\infty$ είναι παρόμοια.
[β] Έστω $l < x$ και $x \in \mathbb{R}$. Για να είναι ολόκληρη η περιοχή $(x - \epsilon, x + \epsilon)$ δεξιά του l, αρκεί να είναι $l \leq x - \epsilon$ ή, ισοδύναμα, $\epsilon \leq x - l$. Άρα με $0 < \epsilon \leq x - l$ η περιοχή $(x - \epsilon, x + \epsilon)$ είναι δεξιά του l.
Αυτό είναι γεωμετρικά προφανές: αν ο ϵ δεν υπερβαίνει την απόσταση του x από τον l, τότε η περιοχή $(x - \epsilon, x + \epsilon)$ είναι δεξιά του l.
Τώρα, έστω $x = +\infty$ (οπότε $l < x$). Και πάλι, για να είναι ολόκληρη η περιοχή $(\frac{1}{\epsilon}, +\infty]$ δεξιά του l, αρκεί να είναι $l \leq \frac{1}{\epsilon}$.
Τώρα διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.
Αν $l \leq 0$, τότε, όποιον ϵ κι αν πάρουμε (για παράδειγμα $\epsilon = 1$), η τελευταία ανισότητα ισχύει και, επομένως, η περιοχή $(\frac{1}{\epsilon}, +\infty]$ είναι δεξιά του l. (Αυτό είναι εξ αρχής προφανές.)
Αν $l > 0$, τότε η τελευταία ανισότητα είναι ισοδύναμη με την $\epsilon \leq \frac{1}{l}$, οπότε, με $0 < \epsilon \leq \frac{1}{l}$ η περιοχή $(\frac{1}{\epsilon}, +\infty]$ είναι δεξιά του l.
Η περίπτωση $x < u$ είναι παρόμοια με την περίπτωση $l < x$.
Τέλος, έστω $l < x < u$. Για να είναι ολόκληρη η περιοχή $(x - \epsilon, x + \epsilon)$ ανάμεσα στους l, u, αρκεί να είναι $l \leq x - \epsilon$ και $x + \epsilon \leq u$ ή, ισοδύναμα, $\epsilon \leq x - l$ και $\epsilon \leq u - x$. Άρα με $0 < \epsilon \leq \min\{x - l, u - x\}$ η περιοχή $(x - \epsilon, x + \epsilon)$ είναι ανάμεσα στους l, u.
Κι αυτό το τελευταίο είναι γεωμετρικά προφανές: αν ο $\epsilon > 0$ δεν υπερβαίνει την απόσταση του x από τον κοντινότερο προς αυτόν από τους l, u, τότε η περιοχή $(x - \epsilon, x + \epsilon)$ είναι ολόκληρη ανάμεσα στους l, u. Ο αριθμός $\min\{x - l, u - x\}$ είναι ακριβώς η απόσταση του x από τον κοντινότερο προς αυτόν από τους l, u.

Άσκηση 2.2.3. *Έστω $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$ με $x \neq y$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε $N_x(\epsilon) \cap N_y(\epsilon) = \emptyset$.*

Λύση: Θα δούμε μόνο την περίπτωση που οι x, y είναι και οι δύο αριθμοί. Ασχοληθείτε εσείς με τις άλλες περιπτώσεις.
Έστω, λοιπόν, $x, y \in \mathbb{R}$ και $x < y$ (η περίπτωση $y < x$ είναι προφανώς όμοια).
Για να είναι τα διαστήματα $(x - \epsilon, x + \epsilon)$ και $(y - \epsilon, y + \epsilon)$ ξένα, αρκεί να είναι $x + \epsilon \leq y - \epsilon$ ή,

ισοδύναμα, $\epsilon \leq \frac{y-x}{2}$.
Άρα, αν πάρουμε $\epsilon = \frac{y-x}{2}$ (ή και οποιονδήποτε μικρότερο $\epsilon > 0$), τότε οι περιοχές $(x-\epsilon, x+\epsilon)$ και $(y-\epsilon, y+\epsilon)$ είναι ξένες.

Σχόλιο: Αν $\epsilon = \frac{y-x}{2}$, τότε τα άκρα $x+\epsilon$ και $y-\epsilon$ ταυτίζονται με το μέσο $\frac{x+y}{2}$ του διαστήματος ανάμεσα στους x, y. Αν ο $\epsilon > 0$ είναι μικρότερος (με την ευρεία έννοια) από τον $\frac{y-x}{2}$, τότε η περιοχή $(x-\epsilon, x+\epsilon)$ είναι αριστερά του $\frac{x+y}{2}$ και η $(y-\epsilon, y+\epsilon)$ είναι δεξιά του $\frac{x+y}{2}$, οπότε οι δύο περιοχές είναι ξένες. Αν ο ϵ είναι μεγαλύτερος από τον $\frac{y-x}{2}$, τότε οι περιοχές $(x-\epsilon, x+\epsilon)$ και $(y-\epsilon, y+\epsilon)$ περιέχουν και οι δύο τον $\frac{x+y}{2}$ και δεν είναι ξένες.

Άσκηση 2.2.4. *Έστω $x \in \overline{\mathbb{R}}$.*
Αποδείξτε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει φυσικός n ώστε $N_x(\frac{1}{n}) \subseteq N_x(\epsilon)$.
Αποδείξτε ότι $\bigcap_{\epsilon>0} N_x(\epsilon) = \{x\}$ ή, με άλλα λόγια, το μοναδικό στοιχείο που ανήκει σε όλες τις περιοχές του x είναι το ίδιο το x.
Αποδείξτε ότι $\bigcap_{n=1}^{+\infty} N_x(\frac{1}{n}) = \{x\}$.

Λύση: Το πρώτο ερώτημα. Παίρνουμε οποιονδήποτε φυσικό n ώστε να είναι $\frac{1}{n} < \epsilon$ (γνωρίζουμε από την Αρχιμήδεια ιδιότητα ότι υπάρχει ένας τέτοιος n) και τότε είναι $N_x(\frac{1}{n}) \subseteq N_x(\epsilon)$.

Το δεύτερο ερώτημα. Έχουμε ήδη πει ότι το x ανήκει σε όλες τις περιοχές του. Πάμε για το αντίστροφο.
Έστω $x \in \mathbb{R}$. Αν ο y ανήκει σε όλες τις περιοχές του x, τότε ισχύει $|y-x| < \epsilon$ για κάθε $\epsilon > 0$. Συνεπάγεται $|y-x| \leq 0$ και, επειδή $|y-x| \geq 0$, συμπεραίνουμε ότι $|y-x| = 0$, δηλαδή $y = x$. Άρα ο μοναδικός y που ανήκει σε όλες τις περιοχές του x είναι ο $y = x$.
Τώρα έστω $x = +\infty$. Αν ο *αριθμός* y ανήκει σε όλες τις περιοχές του $+\infty$, τότε ισχύει $y > \frac{1}{\epsilon}$ για κάθε $\epsilon > 0$ η, ισοδύναμα, $0 < \frac{1}{y} < \epsilon$ για κάθε $\epsilon > 0$. Αυτό, όμως, είναι αδύνατο! Άρα το μοναδικό $y \in \overline{\mathbb{R}}$ που ανήκει σε όλες τις περιοχές του $+\infty$ είναι το $y = +\infty$.
Η περίπτωση $x = -\infty$ είναι παρόμοια.

Το τρίτο ερώτημα. Έστω $x \in \mathbb{R}$. Αν ο y ανήκει σε όλες τις περιοχές $N_x(\frac{1}{n})$ του x, τότε ισχύει $|y-x| < \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από την Αρχιμήδεια ιδιότητα συνεπάγεται $|y-x| \leq 0$ και άρα $y = x$. Άρα ο μοναδικός y που ανήκει σε όλες τις περιοχές $N_x(\frac{1}{n})$ του x είναι ο $y = x$.
Έστω $x = +\infty$. Αν ο *αριθμός* y ανήκει σε όλες τις περιοχές $N_{+\infty}(\frac{1}{n})$ του $+\infty$, τότε ισχύει $y > n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αυτό, όμως, είναι αδύνατο διότι θα συνεπαγόταν ότι ο y είναι άνω φράγμα του $\mathbb{N}$. Άρα το μοναδικό $y \in \overline{\mathbb{R}}$ που ανήκει σε όλες τις περιοχές του $+\infty$ είναι το $y = +\infty$.
Η περίπτωση $x = -\infty$ είναι παρόμοια.

Άσκηση 2.2.5. *Έστω $x_n \to x$. Για κάθε $\epsilon > 0$ έστω $n_0(\epsilon)$ ο ελάχιστος n_0 ώστε να ισχύει $x_n \in N_x(\epsilon)$ για κάθε $n \geq n_0$. Αποδείξτε ότι, αν $0 < \epsilon' < \epsilon$, τότε $n_0(\epsilon') \geq n_0(\epsilon)$.*

Λύση: Από το πώς ορίσθηκε ο $n_0(\epsilon')$ συνεπάγεται ότι ισχύει $x_n \in N_x(\epsilon')$ για κάθε $n \geq n_0(\epsilon')$.
Επειδή $0 < \epsilon' < \epsilon$, έχουμε ότι $N_x(\epsilon') \subseteq N_x(\epsilon)$.
Άρα ισχύει $x_n \in N_x(\epsilon)$ για κάθε $n \geq n_0(\epsilon')$.
Άρα ο $n_0(\epsilon')$ είναι ένας n_0 για τον οποίο ισχύει $x_n \in N_x(\epsilon)$ για κάθε $n \geq n_0$. Όμως, ο $n_0(\epsilon)$ ορίσθηκε να είναι ο *ελάχιστος* n_0 για τον οποίο ισχύει $x_n \in N_x(\epsilon)$ για κάθε $n \geq n_0$.
Άρα $n_0(\epsilon) \leq n_0(\epsilon')$.

Άσκηση 2.2.6. *Αποδείξτε ότι η ακολουθία (x_n) δεν συγκλίνει στο x αν και μόνο αν υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε να ισχύει $x_n \notin N_x(\epsilon)$ για άπειρους n.*

Λύση: Η διατύπωση του ορισμού της σύγκλισης $x_n \to x$ είναι:

$$x_n \to x \quad \Leftrightarrow \quad \text{για κάθε } \epsilon > 0 \text{ υπάρχει } n_0 \text{ ώστε για κάθε } n \geq n_0 \text{ ισχύει } x_n \in N_x(\epsilon).$$

Διατυπώνουμε την άρνηση του ορισμού του ορίου:

$$\neg\,(x_n \to x) \;\; \Leftrightarrow \;\; \text{υπάρχει } \epsilon > 0 \text{ ώστε για κάθε } n_0 \text{ υπάρχει } n \geq n_0 \text{ ώστε να ισχύει } x_n \notin N_x(\epsilon).$$

Τώρα, το “για κάθε n_0 υπάρχει $n \geq n_0$ ώστε να ισχύει $x_n \notin N_x(\epsilon)$” ισοδυναμεί με το “ισχύει $x_n \notin N_x(\epsilon)$ για άπειρους n” και, επομένως,

$$\neg\,(x_n \to x) \quad \Leftrightarrow \quad \text{υπάρχει } \epsilon > 0 \text{ ώστε για άπειρους } n \text{ ισχύει } x_n \notin N_x(\epsilon).$$

Πράγματι, έστω ότι για κάθε n_0 υπάρχει $n \geq n_0$ ώστε να ισχύει $x_n \notin N_x(\epsilon)$. Τότε για $n_0 = 1$ υπάρχει κάποιος $n_1 \geq 1$ ώστε να ισχύει $x_{n_1} \notin N_x(\epsilon)$. Κατόπιν, για $n_0 = n_1 + 1$ υπάρχει κάποιος $n_2 \geq n_1 + 1$ ώστε να ισχύει $x_{n_2} \notin N_x(\epsilon)$. Κατόπιν, για $n_0 = n_2 + 1$ υπάρχει κάποιος $n_3 \geq n_2 + 1$ ώστε να ισχύει $x_{n_3} \notin N_x(\epsilon)$. Κατόπιν, για $n_0 = n_3 + 1$ υπάρχει κάποιος $n_4 \geq n_3 + 1$ ώστε να ισχύει $x_{n_4} \notin N_x(\epsilon)$. Αυτό μπορεί να συνεχισθεί επαγωγικά επ’ άπειρον. Έτσι αποδεικνύεται ότι υπάρχουν φυσικοί $n_1, n_2, n_3, n_4, \ldots$ έτσι ώστε να ισχύει $x_{n_k} \notin N_x(\epsilon)$ για κάθε k. Όμως, αυτοί οι φυσικοί n_k είναι άπειροι αφού, προφανώς, ισχύει $n_1 < n_2 < n_3 < n_4 < \ldots$. Άρα ισχύει $x_n \notin N_x(\epsilon)$ για άπειρους n.
Αντιστρόφως, έστω ότι ισχύει $x_n \notin N_x(\epsilon)$ για άπειρους n. Τότε, όποιον n_0 κι αν πάρουμε, επειδή οι φυσικοί που είναι $< n_0$ είναι πεπερασμένοι, υπάρχει κάποιος $n \geq n_0$ ώστε να ισχύει $x_n \notin N_x(\epsilon)$.

Άσκηση 2.2.7. *Έστω $\epsilon_0 > 0$. Αποδείξτε ότι $x_n \to x$ αν και μόνο αν για κάθε ϵ με $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ ισχύει τελικά $x_n \in N_x(\epsilon)$.*

Λύση: Έχουμε να αποδείξουμε την ισοδυναμία ανάμεσα στις εξής δύο προτάσεις:

$$A: \qquad x_n \to x$$

και

$$B: \qquad \text{για κάθε } \epsilon \text{ με } 0 < \epsilon \leq \epsilon_0 \text{ ισχύει τελικά } x_n \in N_x(\epsilon).$$

Σκεφτόμαστε ότι η διατύπωση του ορισμού του $x_n \to x$ μοιάζει πολύ με την διατύπωση της πρότασης B, οπότε αντικαθιστούμε την πρόταση A με τον αντίστοιχο ορισμό ώστε να συγκρίνουμε πιο εύκολα τις δύο προτάσεις. Έτσι έχουμε:

$$A: \qquad \text{για κάθε } \epsilon > 0 \text{ ισχύει τελικά } x_n \in N_x(\epsilon).$$

και

$$B: \qquad \text{για κάθε } \epsilon \text{ με } 0 < \epsilon \leq \epsilon_0 \text{ ισχύει τελικά } x_n \in N_x(\epsilon).$$

Τώρα είναι προφανές ότι η πρόταση A συνεπάγεται την πρόταση B. Πράγματι, η πρόταση A λέει ότι *όλοι* οι $\epsilon > 0$ έχουν μια ιδιότητα (το να ισχύει τελικά $x_n \in N_x(\epsilon)$) ενώ η πρόταση B λέει ότι *κάποιοι* $\epsilon > 0$, εκείνοι που είναι $\leq \epsilon_0$, έχουν την ίδια ιδιότητα.
Άρα μένει να δούμε αν η πρόταση B συνεπάγεται την πρόταση A.
Υποθέτουμε, λοιπόν, ότι ισχύει η πρόταση B. Δηλαδή ότι οι $\epsilon > 0$ που είναι και $\leq \epsilon_0$ έχουν την ιδιότητα να ισχύει τελικά $x_n \in N_x(\epsilon)$.
Για να αποδείξουμε ότι ισχύει η πρόταση A πρέπει να αποδείξουμε ότι και οι υπόλοιποι $\epsilon > 0$, δηλαδή εκείνοι που είναι $> \epsilon_0$, έχουν την ίδια ιδιότητα.
Έστω, λοιπόν, $\epsilon > \epsilon_0$. Επειδή υποθέσαμε ότι ισχύει η πρόταση B, συνεπάγεται ότι ο ϵ_0 έχει την ιδιότητα που συζητάμε, δηλαδή ότι ισχύει τελικά $x_n \in N_x(\epsilon_0)$. Όμως, επειδή $\epsilon > \epsilon_0$, είναι $N_x(\epsilon_0) \subseteq N_x(\epsilon)$ (όταν μικραίνει η ακτίνα, μικραίνει και η αντίστοιχη περιοχή). Και, επειδή ισχύει τελικά $x_n \in N_x(\epsilon_0)$, συνεπάγεται ότι ισχύει τελικά $x_n \in N_x(\epsilon)$.
Άρα και οι $\epsilon > 0$ που είναι $> \epsilon_0$ έχουν την ιδιότητα να ισχύει τελικά $x_n \in N_x(\epsilon)$ και, επομένως, ισχύει η πρόταση A.

Άσκηση 2.2.8. *Έστω ότι για την ακολουθία (x_n) και τον x ισχύει ότι: υπάρχει n_0 ώστε για κάθε $\epsilon > 0$ να ισχύει $|x_n - x| < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Να αντιπαραβάλετε με τον ορισμό του $x_n \to x$. Αποδείξτε ότι η (x_n) είναι τελικά σταθερή.*

Λύση: Ο ορισμός της σύγκλισης $x_n \to x$ διατυπώνεται ως εξής:

$$x_n \to x \quad \Leftrightarrow \quad \text{για κάθε } \epsilon > 0 \text{ υπάρχει } n_0 \text{ ώστε να ισχύει } |x_n - x| < \epsilon \text{ για κάθε } n \geq n_0.$$

Εδώ, όμως, η διατύπωση που δεχόμαστε ότι ισχύει για την (x_n) είναι:

$$\text{υπάρχει } n_0 \text{ ώστε για κάθε } \epsilon > 0 \text{ να ισχύει } |x_n - x| < \epsilon \text{ για κάθε } n \geq n_0.$$

Η διατύπωση στον ορισμό του $x_n \to x$ έχει μόνο μία διαφορά από την διατύπωση που έχουμε εδώ. Αντιστρέφεται η θέση των "υπάρχει n_0" και "για κάθε $\epsilon > 0$".
Αν δεχτούμε την διατύπωση της παρούσας άσκησης, τότε υπάρχει κάποιος n_0 τέτοιος ώστε για κάθε $\epsilon > 0$ να ισχύει $|x_n - x| < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Δηλαδή όποιον $n \geq n_0$ κι αν πάρουμε ισχύει $|x_n - x| < \epsilon$ για κάθε $\epsilon > 0$. Από την πρόταση 1.3 συνεπάγεται ότι όποιον $n \geq n_0$ κι αν πάρουμε ισχύει $|x_n - x| \leq 0$ και, επομένως, $x_n = x$. Δηλαδή, ισχύει $x_n = x$ για κάθε $n \geq n_0$, οπότε η (x_n) είναι τελικά σταθερή.

Άσκηση 2.2.9. [α] *Έστω ότι το σύνολο των όρων της ακολουθίας (x_n) είναι πεπερασμένο. Αποδείξτε ότι, αν $x_n \to x$, τότε η (x_n) είναι τελικά σταθερή και ότι ο x είναι ένας από τους όρους της.*

Υπόδειξη: Έστω A το σύνολο των όρων της (x_n) και έστω $d > 0$ η ελάχιστη απόσταση ανάμεσα σε δύο οποιαδήποτε στοιχεία του A. Υπάρχει n_0 ώστε $|x_n - x| < \frac{d}{2}$ ή, ισοδύναμα, $x_n \in (x - \frac{d}{2}, x + \frac{d}{2})$ για κάθε $n \geq n_0$. Αλλά στο διάστημα $(x - \frac{d}{2}, x + \frac{d}{2})$ υπάρχει το πολύ ένα στοιχείο του A.

Άσκηση 2.2.10. *Έστω x και ακολουθία (x_n).*
[α] *Αποδείξτε τον εξής ισοδύναμο ορισμό ορίου: $x_n \to x$ αν και μόνο αν για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει τελικά $|x_n - x| \leq \epsilon$.*

Λύση: Έστω $x_n \to x$. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει τελικά $|x_n - x| < \epsilon$. Επειδή από το $|x_n - x| < \epsilon$ συνεπάγεται το $|x_n - x| \leq \epsilon$, συμπεραίνουμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει τελικά $|x_n - x| \leq \epsilon$.
Αντιστρόφως, έστω ότι για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει τελικά $|x_n - x| \leq \epsilon$. Μα, αν $\epsilon > 0$ τότε είναι και $\frac{\epsilon}{2} > 0$. Επομένως, για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει τελικά $|x_n - x| \leq \frac{\epsilon}{2}$.
(Προσέξτε πώς χρησιμοποιήσαμε την λέξη κλειδί: κάθε. Αφού κάτι ισχύει για *κάθε* θετικό αριθμό, ισχύει και για τον θετικό αριθμό $\frac{\epsilon}{2}$.)
Τώρα, επειδή από το $|x_n - x| \leq \frac{\epsilon}{2}$ συνεπάγεται το $|x_n - x| < \epsilon$, συμπεραίνουμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει τελικά $|x_n - x| < \epsilon$. Άρα $x_n \to x$.

Άσκηση 2.3.1. *Βρείτε τα όρια των ακολουθιών* $\left(\frac{(n+1)^{27}(n+3)^{79}}{(2n+1)^{106}}\right)$, $\left(\frac{n(n+1)}{n+4} - \frac{4n^3}{4n^2+1}\right)$, $\left(\frac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}\right)$ *και* $\left(\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2+1}\right)$.

Λύση: Η πρώτη ακολουθία. Από κάθε παράγοντα των γινομένων εξάγουμε τις μέγιστες δυνάμεις του n και έχουμε

$$\frac{(n+1)^{27}(n+3)^{79}}{(2n+1)^{106}} = \frac{n^{106}}{n^{106}} \frac{(1+(1/n))^{27}(1+(3/n))^{79}}{(2+(1/n))^{106}} = \frac{(1+(1/n))^{27}(1+(3/n))^{79}}{(2+(1/n))^{106}} \to \frac{1^{27} \cdot 1^{79}}{2^{106}} = \frac{1}{2^{106}}.$$

Η δεύτερη ακολουθία. Επειδή $\frac{n(n+1)}{n+4} \to +\infty$ και $\frac{4n^3}{4n^2+1} \to +\infty$, δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα της διαφοράς. Όμως, μετά από λίγες πράξεις έχουμε:

$$\frac{n(n+1)}{n+4} - \frac{4n^3}{4n^2+1} = \frac{-12n^3+n^2+n}{4n^3+16n^2+n+4} \to \frac{-12}{4} = -3.$$

Η τρίτη ακολουθία. Δεν πρόκειται για ρητή παράσταση του n αλλά η ιδέα για τον υπολογισμό του ορίου είναι η ίδια: διακρίνουμε τους κυρίαρχους όρους στον αριθμητή και στον παρονομαστή και τούς εξάγουμε ως κοινούς παράγοντες. Ο κυρίαρχος όρος στον αριθμητή είναι ο 3^n διότι $\frac{3^n}{2^n} = (\frac{3}{2})^n \to +\infty$. Ομοίως, ο κυρίαρχος όρος στον παρονομαστή είναι ο 3^{n+1}. Επομένως:

$$\frac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}} = \frac{3^n}{3^{n+1}} \frac{(2/3)^n+1}{(2/3)^{n+1}+1} = \frac{1}{3} \frac{(2/3)^n+1}{(2/3)^{n+1}+1} \to \frac{1}{3} \frac{0+1}{0+1} = \frac{1}{3}.$$

Η τέταρτη ακολουθία. Όπως και στην δεύτερη ακολουθία, έχουμε

$$\sqrt{n^2+n+1} = n\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} \to +\infty$$

και, ομοίως, $\sqrt{n^2+1} \to +\infty$. Όμως, χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $a - b = \frac{a^2-b^2}{a+b}$, έχουμε

$$\begin{aligned}\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2+1} &= \tfrac{(n^2+n+1)-(n^2+1)}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2+1}} = \tfrac{n}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2+1}} \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{1+(1/n)+(1/n^2)}+\sqrt{1+(1/n^2)}} \to \tfrac{1}{1+1} = \tfrac{1}{2}.\end{aligned}$$

Άσκηση 2.3.2. *Βρείτε, αν υπάρχει, το όριο της ακολουθίας* $\left(\frac{2^n}{3^n} + \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}} + \cdots + \frac{2^{2n}}{3^{2n}}\right)$.

Λύση: Έχουμε

$$\tfrac{2^n}{3^n} + \tfrac{2^{n+1}}{3^{n+1}} + \cdots + \tfrac{2^{2n}}{3^{2n}} = \left(\tfrac{2}{3}\right)^n\left(1 + \tfrac{2}{3} + \cdots + \left(\tfrac{2}{3}\right)^n\right) \to 0\,\tfrac{1}{1-(2/3)} = 0.$$

Άσκηση 2.3.3. *Βρείτε το όριο της ακολουθίας* $\left(\frac{2-1}{2+1}\,\frac{3-1}{3+1}\cdots\frac{n-1}{n+1}\right)$.

Λύση: Για $n \geq 2$ έχουμε

$$\tfrac{2-1}{2+1}\,\tfrac{3-1}{3+1}\cdots\tfrac{n-1}{n+1} = \tfrac{1\cdot 2\cdots(n-1)}{3\cdot 4\cdots(n+1)} = \tfrac{(n-1)!}{(n+1)!/(1\cdot 2)} = \tfrac{2}{n(n+1)} \to 0.$$

Άσκηση 2.3.4. *Αποδείξτε ότι για κάθε $x \neq -1$ η ακολουθία $\left(\frac{x^n-1}{x^n+1}\right)$ έχει όριο και υπολογίστε το.*

Λύση: Αν $|x| < 1$, τότε

$$\tfrac{x^n-1}{x^n+1} \to \tfrac{0-1}{0+1} = -1.$$

Αν $|x| > 1$, τότε διαιρούμε αριθμητή και παρονομαστή με τον x^n και, επειδή $|\frac{1}{x}| < 1$, έχουμε

$$\tfrac{x^n-1}{x^n+1} = \tfrac{1-(1/x)^n}{1+(1/x)^n} \to \tfrac{1-0}{1+0} = 1.$$

Τέλος, αν $x = 1$, τότε $\frac{x^n-1}{x^n+1} = 0 \to 0$.

Άσκηση 2.3.5. *Για ποιές τιμές του x υπάρχει το $\lim_{n\to+\infty} \frac{(x+1)^{2n}}{(2x+1)^n}$;*

Λύση: Γράφουμε

$$\tfrac{(x+1)^{2n}}{(2x+1)^n} = \left(\tfrac{x^2+2x+1}{2x+1}\right)^n$$

και διακρίνουμε τις περιπτώσεις ορίου μιας γεωμετρικής προόδου:
Το όριο είναι ίσο με 0 αν $|\frac{x^2+2x+1}{2x+1}| < 1$ ή, ισοδύναμα, $-2-\sqrt{2} < x < -2+\sqrt{2}$.
Το όριο είναι ίσο με $+\infty$ αν $\frac{x^2+2x+1}{2x+1} > 1$ ή, ισοδύναμα, $x > -\frac{1}{2}$ και $x \neq 0$.
Το όριο είναι ίσο με 1 αν $\frac{x^2+2x+1}{2x+1} = 1$ ή, ισοδύναμα, $x = 0$.
Τέλος, η ακολουθία δεν έχει όριο αν $\frac{x^2+2x+1}{2x+1} \leq -1$ ή, ισοδύναμα, είτε $x \leq -2-\sqrt{2}$ είτε $-2+\sqrt{2} \leq x < -\frac{1}{2}$.

Άσκηση 2.3.6. *Έστω $x \neq 1$ και έστω ότι ισχύει $x_n \neq 1$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι $x_n \to x$ αν και μόνο αν $\frac{x_n}{1-x_n} \to \frac{x}{1-x}$.*

Λύση: Από τις ιδιότητες των ορίων προκύπτει αμέσως ότι, αν $x_n \to x$, τότε $\frac{x_n}{1-x_n} \to \frac{x}{1-x}$.
Για το αντίστροφο ορίζουμε

$$y = \tfrac{x}{1-x}, \qquad y_n = \tfrac{x_n}{1-x_n}.$$

Είναι εύκολο να δούμε με λίγες πράξεις ότι $y \neq -1$ και $y_n \neq -1$ για κάθε n και ότι

$$x = \tfrac{y}{1+y}, \qquad x_n = \tfrac{y_n}{1+y_n}.$$

Τώρα, πάλι από τις ιδιότητες ορίων έχουμε ότι, αν $y_n \to y$, τότε $x_n \to x$.

Άσκηση 2.3.9. *Έστω $x_n \to x \in \overline{\mathbb{R}}$ και $y_n \to y \in \overline{\mathbb{R}}$. Αν $x < y$, αποδείξτε ότι ισχύει τελικά $x_n < y_n$.*

Λύση: Παίρνουμε έναν αριθμό a έτσι ώστε να είναι $x < a < y$.

Επειδή $x < a$, ισχύει τελικά $x_n < a$. Επειδή $a < y$, ισχύει τελικά $a < y_n$. Άρα ισχύει τελικά $x_n < a$ και $a < y_n$. Άρα ισχύει τελικά $x_n < y_n$.

Άσκηση 2.3.12. *Χρησιμοποιώντας την πρόταση 2.5[γ], αποδείξτε ότι δεν υπάρχει το όριο της ακολουθίας* $\big((-1)^{n-1} + \frac{10}{n^3}\big)$.

Λύση: Θέτουμε $x_n = (-1)^{n-1} + \frac{10}{n^3}$ και έχουμε $x_n = 1 + \frac{10}{n^3}$, αν ο n είναι περιττός, και $x_n = -1 + \frac{10}{n^3}$, αν ο n είναι άρτιος.
Βλέπουμε αμέσως ότι ισχύει $x_n \geq 1$ για κάθε περιττό n και, επομένως, για άπειρους n.
Κατόπιν, σκεφτόμαστε ότι οι όροι με άρτιο δείκτη πλησιάζουν το -1, οπότε θα πρέπει από κάποιον άρτιο δείκτη και πέρα να είναι όλοι ≤ 0. Πράγματι, η ανισότητα $-1 + \frac{10}{n^3} \leq 0$ ισοδυναμεί με $n \geq 3$, οπότε ισχύει $x_n \leq 0$ για κάθε άρτιο $n \geq 4$ και, επομένως, για άπειρους n.
Άρα η ακολουθία δεν έχει όριο.

Άσκηση 2.3.13. *Αποδείξτε ότι* $2^{-2n+(-1)^{n-1}n} \to 0$.

Λύση: Θέτουμε $x_n = 2^{-2n+(-1)^{n-1}n}$ και έχουμε $x_n = 2^{-3n}$ για άρτιο n και $x_n = 2^{-n}$ για περιττό n. Άρα ισχύει

$$2^{-3n} \leq x_n \leq 2^{-n} \qquad \text{για κάθε } n,$$

οπότε βάσει της ιδιότητας παρεμβολής έχουμε $x_n \to 0$.

Άσκηση 2.3.14. *Βρείτε το όριο της ακολουθίας με τύπο* $x_n = \frac{[\sqrt{n}]}{\sqrt{n}}$.

Λύση: Χρησιμοποιούμε την γνωστή ανισότητα $[x] \leq x < [x] + 1$ αφού την γράψουμε στη μορφή

$$x - 1 < [x] \leq x.$$

Επομένως, έχουμε

$$\sqrt{n} - 1 < [\sqrt{n}] \leq \sqrt{n}$$

και άρα

$$1 - \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{[\sqrt{n}]}{\sqrt{n}} \leq 1$$

για κάθε n. Από ιδιότητα παρεμβολής βρίσκουμε ότι $\frac{[\sqrt{n}]}{\sqrt{n}} \to 1$.

Άσκηση 2.3.15. *Αποδείξτε ότι* $(1 - \frac{1}{n^2})^n \to 1$.

Λύση: Από την ανισότητα του Bernoulli έχουμε ότι ισχύει

$$\big(1 - \tfrac{1}{n^2}\big)^n \geq 1 - \tfrac{n}{n^2} = 1 - \tfrac{1}{n} = \tfrac{n-1}{n} \qquad \text{για κάθε } n. \tag{14.8}$$

Κατόπιν, για $n \neq 1$ γράφουμε

$$\big(1 - \tfrac{1}{n^2}\big)^n = \big(\tfrac{n^2-1}{n^2}\big)^n = \tfrac{1}{(n^2/(n^2-1))^n}.$$

Πάλι από την ανισότητα του Bernoulli έχουμε ότι ισχύει

$$\big(\tfrac{n^2}{n^2-1}\big)^n = \big(1 + \tfrac{1}{n^2-1}\big)^n \geq 1 + \tfrac{n}{n^2-1} \geq 1 + \tfrac{1}{n} \qquad \text{για κάθε } n \neq 1.$$

Άρα ισχύει

$$\big(1 - \tfrac{1}{n^2}\big)^n \leq \tfrac{1}{1+(1/n)} = \tfrac{n}{n+1} \qquad \text{για κάθε } n \neq 1. \tag{14.9}$$

Από τις (14.8) και (14.9) έχουμε

$$\tfrac{n-1}{n} \leq \big(1 - \tfrac{1}{n^2}\big)^n \leq \tfrac{n}{n+1} \qquad \text{για κάθε } n \geq 2,$$

οπότε από την ιδιότητα παρεμβολής συνεπάγεται ότι $(1 - \frac{1}{n^2})^n \to 1$.

Άσκηση 2.3.17. *Βρείτε το όριο της ακολουθίας με τύπο* $x_n = \frac{(3n)!}{(n!)^3}$.

Λύση: Ο κανόνας λόγου καταλήγει σε απροσδιόριστη μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$.
Πρώτος τρόπος. Χρησιμοποιούμε το κριτήριο λόγου:

$$\begin{aligned}\frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{(3(n+1))!/((n+1)!)^3}{(3n)!/(n!)^3} = \frac{(3n+3)!}{(3n)!}\left(\frac{n!}{(n+1)!}\right)^3 = \frac{(3n)!(3n+1)(3n+2)(3n+3)}{(3n)!}\,\frac{1}{(n+1)^3} \\ &= \frac{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}{(n+1)^3} = \frac{27n^3+\cdots}{n^3+\cdots} \to 27.\end{aligned}$$

Επειδή $27 > 1$, συνεπάγεται $x_n \to +\infty$.
Δεύτερος τρόπος. Απλοποιούμε και έχουμε

$$x_n = \frac{(3n)!}{(n!)^3} = \frac{n!(n+1)\cdots(2n)(2n+1)\cdots(3n)}{n!n!n!} = \frac{(n+1)\cdots(n+n)}{1\cdots n}\,\frac{(2n+1)\cdots(2n+n)}{1\cdots n}.$$

Τώρα παρατηρούμε ότι ισχύει

$$\frac{n+k}{k} \geq 2 \quad \text{και} \quad \frac{2n+k}{k} \geq 3 \qquad \text{για } 1 \leq k \leq n.$$

Άρα

$$x_n \geq 2\cdots 2\cdot 3\cdots 3 = 2^n 3^n = 6^n$$

και, επομένως, $x_n \to +\infty$.

Άσκηση 2.3.18. *Έστω $0 \leq a \leq b$. Αποδείξτε ότι $\sqrt[n]{a^n + b^n} \to b$.*

Υπόδειξη: $b^n \leq a^n + b^n \leq 2b^n$.

Άσκηση 2.3.19. *Αποδείξτε ότι $\sqrt[n]{n^4 + 3n^2 + n + 1} \to 1$.*

Υπόδειξη: $n^4 \leq n^4 + 3n^2 + n + 1 \leq n^4 + 3n^4 + n^4 + n^4 = 6n^4$.

Άσκηση 2.3.20. *Για κάθε a, αποδείξτε ότι $\frac{[a]+[2a]+\cdots+[na]}{n^2} \to \frac{a}{2}$.*

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την ανισότητα $x - 1 < [x] \leq x$ και την ταυτότητα $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, η οποία αποδεικνύεται εύκολα με την αρχή της επαγωγής.

Άσκηση 2.3.21. *Αποδείξτε ότι $\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n} \to 1$.*

Υπόδειξη: Ισχύει $\frac{1}{n^2+n} \leq \frac{1}{n^2+k} \leq \frac{1}{n^2+1}$ για $1 \leq k \leq n$.

Άσκηση 2.3.22. *Αποδείξτε ότι* $\lim_{m\to+\infty}\left(\lim_{n\to+\infty}(\cos m!\pi x)^{2n}\right) = \begin{cases}1, & \text{αν } x \in \mathbb{Q}\\ 0, & \text{αν } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$

Υπόδειξη: Αν $x \in \mathbb{Q}$ και ο $m \in \mathbb{N}$ είναι κατάλληλα (πόσο;) μεγάλος, ο $m!x$ είναι ακέραιος.

Άσκηση 2.3.24. *Αν $x_n \to x$ και $y_n \to y$, αποδείξτε ότι* $\max\{x_n, y_n\} \to \max\{x, y\}$.

Λύση: Πρώτος τρόπος. Χρησιμοποιούμε το αποτέλεσμα της άσκησης 1.2.1 και γράφουμε

$$\max\{x_n, y_n\} = \frac{x_n+y_n+|x_n-y_n|}{2} \to \frac{x+y+|x-y|}{2} = \max\{x, y\}.$$

Δεύτερος τρόπος. Χρησιμοποιούμε μια απλή ανισότητα:

$$\text{Αν } a < a' \text{ και } b < b', \text{ τότε } \max\{a, b\} < \max\{a', b'\}. \tag{14.10}$$

Πράγματι, από τις $a < a'$ και $b < b'$ συνεπάγεται $a < a' \leq \max\{a', b'\}$ και $b < b' \leq \max\{a', b'\}$ και άρα συνεπάγεται $\max\{a, b\} < \max\{a', b'\}$.
Τώρα θεωρούμε τυχόντα $\epsilon > 0$.
Από τα $x_n \to x$ και $y_n \to y$ έχουμε ότι ισχύει τελικά $x - \epsilon < x_n < x + \epsilon$ και ότι ισχύει τελικά $y - \epsilon < y_n < y + \epsilon$. Άρα ισχύει τελικά $x - \epsilon < x_n < x + \epsilon$ και $y - \epsilon < y_n < y + \epsilon$, οπότε βάσει της (14.10) ισχύει τελικά

$$\max\{x - \epsilon, y - \epsilon\} < \max\{x_n, y_n\} < \max\{x + \epsilon, y + \epsilon\}$$

ή, ισοδύναμα,

$$\max\{x,y\}-\epsilon<\max\{x_n,y_n\}<\max\{x,y\}+\epsilon.$$

Άρα $\max\{x_n,y_n\}\to\max\{x,y\}$.

Άσκηση 2.3.25. *Βρείτε το λάθος στον συλλογισμό:*

$$1=n\cdot\tfrac{1}{n}=\tfrac{1}{n}+\cdots+\tfrac{1}{n}\ (n\text{ φορές})\ \to 0+\cdots+0\ (n\text{ φορές})\ =0.$$

Λύση: Το συμπέρασμα είναι λάθος: $1\to 0$. Άρα υπάρχει οπωσδήποτε λάθος στην "απόδειξη". Το λάθος είναι στην εφαρμογή του κανόνα αθροίσματος. Ο κανόνας αθροίσματος εφαρμόζεται σε δύο ακολουθίες ή σε τρεις ακολουθίες ή, γενικότερα, σε k ακολουθίες. Όμως, το πλήθος k των ακολουθιών πρέπει να είναι σταθερό (ένα, δύο, ..., εκατό), δηλαδή να μην εξαρτάται από τον δείκτη n των ακολουθιών. Στον παραπάνω συλλογισμό το πλήθος των όρων του αθροίσματος $\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}$ είναι ίσο με n, δηλαδή το ίδιο με τον δείκτη n.

Άσκηση 2.3.27. *Βρείτε ακολουθίες (x_n), (y_n) που δεν έχουν όριο ώστε η (x_n+y_n) να έχει όριο.*

Λύση: Θεωρούμε μια οποιαδήποτε ακολουθία (x_n) η οποία δεν έχει όριο και ως (y_n) θεωρούμε την αντίθετη της (x_n). Έτσι όταν προσθέσουμε τις δύο ακολουθίες αυτές θα αλληλοαναιρεθούν και το αποτέλεσμα θα συγκλίνει!
Άρα παίρνουμε $x_n=(-1)^{n-1}$ και $y_n=-x_n=-(-1)^{n-1}$ οπότε $x_n+y_n=0$ για κάθε n.
Τώρα, η (x_n) και η (y_n) δεν έχουν όριο, αλλά $x_n+y_n\to 0$.

Άσκηση 2.3.29. [α] *Βρείτε ακολουθίες (x_n), $y_n)$ ώστε $x_n\to+\infty$, $y_n\to-\infty$ και η (x_n+y_n) (i) να έχει όριο οποιοδήποτε $c\in\overline{\mathbb{R}}$ (ii) να μην έχει όριο.*

[β] *Βρείτε ακολουθίες (x_n), (y_n) ώστε $x_n\to 0$, $y_n\to+\infty$ και η (x_ny_n) (i) να έχει όριο έναν οποιονδήποτε $c\in\overline{\mathbb{R}}$ (ii) να μην έχει όριο.*

Λύση: [α] (i) Έστω $c\in\mathbb{R}$. Θεωρούμε τις ακολουθίες $x_n=n+c$ και $y_n=-n$. Τότε $x_n\to+\infty$, $y_n\to-\infty$ και $x_n+y_n=c\to c$.
Έστω $c=+\infty$. Θεωρούμε τις ακολουθίες $x_n=2n$ και $y_n=-n$. Τότε $x_n\to+\infty$, $y_n\to-\infty$ και $x_n+y_n=2n-n=n\to+\infty$.
Έστω $c=-\infty$. Θεωρούμε τις ακολουθίες $x_n=n$ και $y_n=-2n$. Τότε $x_n\to+\infty$, $y_n\to-\infty$ και $x_n+y_n=n-2n=-n\to-\infty$.
(ii) Θεωρούμε τις ακολουθίες $x_n=n+(-1)^n$ και $y_n=-n$. Τότε $x_n\to+\infty$, $y_n\to-\infty$ και $x_n+y_n=n+(-1)^n-n=(-1)^n$, οπότε η (x_n+y_n) δεν έχει όριο. (Το ότι $x_n\to+\infty$ ισχύει διότι ισχύει $x_n\geq n-1$ για κάθε n και διότι $n-1\to+\infty$.)
[β] (i) Έστω $c\in\mathbb{R}$. Θεωρούμε τις ακολουθίες $x_n=\frac{c}{n}$ και $y_n=n$. Τότε $x_n\to 0$, $y_n\to+\infty$ και $x_ny_n=c\to c$.
Έστω $c=+\infty$. Θεωρούμε τις ακολουθίες $x_n=\frac{1}{n}$ και $y_n=n^2$. Τότε $x_n\to 0$, $y_n\to+\infty$ και $x_ny_n=n\to+\infty$.
Έστω $c=-\infty$. Θεωρούμε τις ακολουθίες $x_n=-\frac{1}{n}$ και $y_n=n^2$. Τότε $x_n\to 0$, $y_n\to+\infty$ και $x_ny_n=-n\to-\infty$.
(ii) Θεωρούμε τις ακολουθίες $x_n=\frac{(-1)^n}{n}$ και $y_n=n$. Τότε $x_n\to 0$, $y_n\to+\infty$ αλλά η $x_ny_n=(-1)^n$ δεν έχει όριο.

Άσκηση 2.3.30. [α] *Βρείτε ακολουθίες (x_n), (y_n) ώστε $x_n\to+\infty$, $y_n\to 0$ και η $\left({x_n}^{y_n}\right)$ (i) να έχει όριο έναν οποιονδήποτε $c\in[0,+\infty]$ (ii) να μην έχει όριο. Είναι δυνατόν η $\left({x_n}^{y_n}\right)$ να έχει όριο $c\in[-\infty,0)$;*

[β] *Βρείτε ακολουθίες (x_n), (y_n) ώστε $x_n\to 0$, $y_n\to-\infty$ και η $\left({x_n}^{y_n}\right)$ (i) να έχει όριο έναν οποιονδήποτε $c\in\{+\infty,-\infty\}$ (ii) να μην έχει όριο. Είναι δυνατόν η $\left({x_n}^{y_n}\right)$ να έχει όριο $c\in\mathbb{R}$;*

Λύση: [α] (i) Έστω $c=1$. Θεωρούμε τις ακολουθίες $x_n=n$ και $y_n=\frac{1}{n}$. Τότε $x_n\to+\infty$, $y_n\to 0$ και ${x_n}^{y_n}=\sqrt[n]{n}\to 1$.
Έστω $c\in\mathbb{R}$, $c>1$. Θεωρούμε τις ακολουθίες $x_n=c^n$ και $y_n=\frac{1}{n}$. Τότε $x_n\to+\infty$, $y_n\to 0$ και ${x_n}^{y_n}=c\to c$.

Έστω $0 < c < 1$. Θεωρούμε τις ακολουθίες $x_n = \frac{1}{c^n}$ και $y_n = -\frac{1}{n}$. Τότε $x_n \to +\infty$, $y_n \to 0$ και ${x_n}^{y_n} = c \to c$.
Έστω $c = +\infty$. Θεωρούμε τις ακολουθίες $x_n = n^n$ και $y_n = \frac{1}{n}$. Τότε $x_n \to +\infty$, $y_n \to 0$ και ${x_n}^{y_n} = n \to +\infty$.
Έστω $c = 0$. Θεωρούμε τις ακολουθίες $x_n = n^n$ και $y_n = -\frac{1}{n}$. Τότε $x_n \to +\infty$, $y_n \to 0$ και ${x_n}^{y_n} = \frac{1}{n} \to 0$.
(ii) Θεωρούμε τις ακολουθίες $x_n = n$ και $y_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$. Τότε $x_n \to +\infty$, $y_n \to 0$ αλλά η ${x_n}^{y_n} = n^{(-1)^{n-1}}$ δεν έχει όριο. Πράγματι, ισχύει $n^{(-1)^{n-1}} = n \geq 1$ για κάθε περιττό n και $n^{(-1)^{n-1}} = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2}$ για κάθε άρτιο n.
Επειδή $x_n \to +\infty$, ισχύει τελικά $x_n > 0$ και, επομένως, ${x_n}^{y_n} > 0$. Άρα η $\left({x_n}^{y_n}\right)$ δεν μπορεί να έχει όριο $c \in [-\infty, 0)$;
[β] (i) Έστω $c = +\infty$. Θεωρούμε τις ακολουθίες $x_n = \frac{1}{n}$ και $y_n = -n$. Τότε $x_n \to 0$, $y_n \to -\infty$ και ${x_n}^{y_n} = n^n \to +\infty$.
Έστω $c = -\infty$. Θεωρούμε τις ακολουθίες $x_n = -\frac{1}{n}$ και $y_n = -2n-1$. Τότε $x_n \to 0$, $y_n \to -\infty$ και ${x_n}^{y_n} = -n^{2n+1} \to -\infty$.
(ii) Θεωρούμε τις ακολουθίες $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ και $y_n = -n$. Τότε $x_n \to 0$, $y_n \to -\infty$ αλλά η ${x_n}^{y_n} = (-1)^{n^2} n^n$ δεν έχει όριο, αφού ισχύει $(-1)^{n^2} n^n = n^n \geq 4$ για κάθε άρτιο n και $(-1)^{n^2} n^n = -n^n \leq -1$ για κάθε περιττό n.
Επειδή $y_n \to -\infty$, ισχύει τελικά $y_n < 0$. Επομένως, ισχύει τελικά $x_n \neq 0$ (για να ορίζεται ο ${x_n}^{y_n}$). Τώρα, έχουμε ότι

$$|{x_n}^{y_n}| = |x_n|^{y_n} = \left(\tfrac{1}{|x_n|}\right)^{-y_n} \to +\infty,$$

επειδή $\frac{1}{|x_n|} \to +\infty$ και $-y_n \to +\infty$. Άρα δεν μπορεί η $\left({x_n}^{y_n}\right)$ να έχει όριο $c \in \mathbb{R}$, διότι τότε θα είχαμε $|{x_n}^{y_n}| \to |c| \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 2.3.31. *Βρείτε ακολουθίες (x_n), (y_n) ώστε να ισχύει $x_n, y_n > 0$ για κάθε n, $x_n \to 0$, $y_n \to +\infty$ και η $(x_n y_n)$ να μην έχει όριο.*

Λύση: Θεωρούμε την ακολουθία $x_n = \frac{1}{n}$ και την ακολουθία $y_n = \begin{cases} n, & \text{αν ο } n \text{ είναι περιττός} \\ n^2, & \text{αν ο } n \text{ είναι άρτιος} \end{cases}$
Προφανώς, ισχύει $x_n, y_n > 0$ για κάθε n και $x_n \to 0$. Επίσης, επειδή ισχύει $y_n \geq n$ για κάθε n, έχουμε ότι $y_n \to +\infty$.
Τώρα, είναι $x_n y_n = \begin{cases} 1, & \text{αν ο } n \text{ είναι περιττός} \\ n, & \text{αν ο } n \text{ είναι άρτιος} \end{cases}$
Άρα ισχύει $x_n \leq 1$ για κάθε περιττό n και, επομένως, για άπειρους n και ισχύει $x_n \geq 2$ για κάθε άρτιο n και, επομένως, για άπειρους n. Άρα η $(x_n y_n)$ δεν έχει όριο.

Άσκηση 2.3.32. *Αποδείξτε ότι για κάθε x υπάρχει ακολουθία ρητών (r_n) ώστε $r_n \to x$. Αποδείξτε το ίδιο με γνησίως αύξουσα ακολουθία ρητών.*

Λύση: Το πρώτο ερώτημα. Πριν από τη λύση θα κάνουμε ένα μικρό σχόλιο. Αν μας έλεγαν ότι ο x είναι ρητός, το πρόβλημα θα ήταν πολύ εύκολο: θα θεωρούσαμε την σταθερή ακολουθία (x) όλοι οι όροι της οποίας είναι ρητοί και η οποία συγκλίνει στον x. Άρα το πρόβλημα έχει ουσιαστικό ενδιαφέρον μόνο όταν ο x είναι άρρητος.
Προκαταρκτικές σκέψεις:
Τώρα, για να βρούμε ρητούς οι οποίοι πλησιάζουν τον x θα ξεκινήσουμε με διαστήματα τα οποία συρρικνώνονται στον x και μέσα σε καθένα από αυτά τα διαστήματα θα επιλέξουμε έναν αντίστοιχο ρητό. Επειδή τα διαστήματα τα έχουμε πάρει να συρρικνώνονται στον x, συνεπάγεται ότι οι αντίστοιχοι ρητοί πλησιάζουν τον x.
Γιατί πρέπει να ξεκινήσουμε με διαστήματα και όχι κατ' ευθείαν με ρητούς; Διότι δεν υπάρχει τύπος που να δίνει ρητό αριθμό κοντά στον τυχαίο αριθμό x. Ενώ, αντιθέτως, υπάρχει τύπος που να δίνει ένα μικρό διάστημα κοντά στον x. Για παράδειγμα: $(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n})$ με $n \in \mathbb{N}$. Και μετά πώς

θα βρούμε ρητό μέσα σε ένα τέτοιο διάστημα; Μα γι αυτόν τον σκοπό δεν χρειάζεται τύπος για τον ρητό: μας αρκεί ότι η πυκνότητα των ρητών εξασφαλίζει την ύπαρξη ρητού σε οποιοδήποτε ανοικτό διάστημα.
Πάμε στην λύση.
Θεωρούμε τα ανοικτά διαστήματα $(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n})$ για κάθε n.
Από την πυκνότητα των ρητών συνεπάγεται ότι σε κάθε τέτοιο διάστημα υπάρχει τουλάχιστον ένας ρητός. Δηλαδή υπάρχει τουλάχιστον ένας ρητός, τόν συμβολίζουμε r_n, ώστε

$$x - \tfrac{1}{n} < r_n < x + \tfrac{1}{n} \qquad \text{για κάθε } n.$$

Έτσι δημιουργείται ακολουθία ρητών (r_n) η οποία, λόγω της ιδιότητας παρεμβολής, συγκλίνει στον x.

Το δεύτερο ερώτημα. Για να βρούμε *γνησίως αύξουσα* ακολουθία ρητών (r_n) ώστε $r_n \to x$ κάνουμε μια μικρή αλλαγή στην επιλογή των διαστημάτων. Θα χρησιμοποιήσουμε διαστήματα τα οποία πλησιάζουν τον x από τα αριστερά του και, συγχρόνως, το καθένα από αυτά τα διαστήματα θα βρίσκεται δεξιά του προηγουμένου διαστήματος.
Θεωρούμε, λοιπόν, τα ανοικτά διαστήματα $(x - \frac{1}{n}, x - \frac{1}{n+1})$ για κάθε n.
Λόγω της πυκνότητας των ρητών, σε κάθε τέτοιο διάστημα υπάρχει τουλάχιστον ένας ρητός. Δηλαδή υπάρχει ρητός, τόν συμβολίζουμε r_n, ώστε

$$x - \tfrac{1}{n} < r_n < x - \tfrac{1}{n+1} \qquad \text{για κάθε } n.$$

Έτσι έχουμε ακολουθία ρητών (r_n) η οποία, λόγω της ιδιότητας παρεμβολής, συγκλίνει στον x.
Επίσης, η (r_n) είναι γνησίως αύξουσα διότι το διάστημα $(x - \frac{1}{n}, x - \frac{1}{n+1})$ στο οποίο ανήκει ο r_n είναι αριστερά του διαστήματος $(x - \frac{1}{n+1}, x - \frac{1}{n+2})$ στο οποίο ανήκει ο r_{n+1}.

Άσκηση 2.3.33. *Έστω μη-κενό σύνολο A. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει ακολουθία στο A με όριο $> \sup A$ αλλά και ότι υπάρχει ακολουθία στο A με όριο $\sup A$.*

Λύση: Έστω οποιαδήποτε ακολουθία (x_n) στο A με όριο x. Επειδή ισχύει $x_n \in A$ για κάθε n, ισχύει και $x_n \leq \sup A$ για κάθε n. Και, επειδή $x_n \to x$, συνεπάγεται $x \leq \sup A$. Άρα για κάθε ακολουθία στο A η οποία έχει όριο πρέπει αυτό το όριο να είναι $\leq \sup A$. Άρα δεν υπάρχει ακολουθία (x_n) στο A με όριο $> \sup A$.
Τώρα στο δεύτερο μέρος. Θα χρειαστεί να διακρίνουμε περιπτώσεις: το $\sup A$ είναι $+\infty$ ή αριθμός.
Έστω $\sup A = +\infty$, οπότε το A δεν είναι άνω φραγμένο.
Χρειάζεται να αποδείξουμε ότι υπάρχει ακολουθία στο A με όριο $+\infty$.
Προκαταρκτικές σκέψεις:
Το πρόβλημα είναι ότι δεν "γνωρίζουμε" το σύνολο A, οπότε δεν μπορούμε να διακρίνουμε (σχεδιάζοντας, ίσως, το A) κάποια συγκεκριμένη ακολουθία στο A η οποία τείνει στο $+\infty$. Ούτε μπορούμε να πάρουμε κάποια συγκεκριμένη γνωστή ακολουθία η οποία τείνει στο $+\infty$, για παράδειγμα την (n), διότι δεν γνωρίζουμε αν οι όροι της είναι στοιχεία του άγνωστου συνόλου A. Αναγκαστικά, η λύση θα έχει "υπαρξιακό χαρακτήρα". Θα αποδείξουμε ότι αυτό που ζητάμε "υπάρχει" χωρίς να μπορούμε να το καταδείξουμε (με τύπο για παράδειγμα). Το ίδιο είχε γίνει και στην άσκηση 2.3.32.
Θα χρησιμοποιήσουμε κάποια γνωστή ακολουθία η οποία τείνει στο $+\infty$, ακόμη κι αν αυτή δεν είναι στο A, και μετά, βασισμένοι στο ότι το A δεν είναι άνω φραγμένο, θα "βρούμε" μια άλλη ακολουθία *στο* A η οποία θα είναι μεγαλύτερη από την προηγούμενη και, επομένως, θα είναι αναγκασμένη να τείνει κι αυτή στο $+\infty$.
Ακριβώς την ίδια ιδέα χρησιμοποιήσαμε και στην άσκηση 2.3.32. Πήραμε τις δύο ακολουθίες $(x - \frac{1}{n})$ και $(x + \frac{1}{n})$, οι οποίες τείνουν στον x, (χωρίς να μας ενδιαφέρει αν οι όροι τους είναι ρητοί) και ανάμεσά τους "εγκλωβίσαμε" μια ακολουθία ρητών (r_n), βασισμένοι στην πυκνότητα των ρητών. Επειδή και οι δύο αυτές ακολουθίες τείνουν στον x, η (r_n) αναγκάζεται να τείνει κι

αυτή στον x.

Συνεχίζουμε με την λύση.
Θεωρούμε την ακολουθία (n) η οποία έχει όριο $+\infty$. Επειδή το A δεν είναι άνω φραγμένο, για κάθε n υπάρχει τουλάχιστον ένα στοιχείο του A το οποίο είναι $> n$. Έστω, λοιπόν, $x_n \in A$ με

$$x_n > n.$$

Έτσι δημιουργείται ακολουθία (x_n) στο A με την ιδιότητα να ισχύει $x_n > n$ για κάθε n. Επειδή $n \to +\infty$, συνεπάγεται $x_n \to +\infty$.
Άρα υπάρχει ακολουθία στο A με όριο $+\infty$.
Τώρα, έστω ότι το $\sup A$ είναι αριθμός, οπότε το A είναι άνω φραγμένο.
(Οδηγούμενοι από τις παραπάνω σκέψεις, θα θεωρήσουμε μια οποιαδήποτε γνωστή ακολουθία οι όροι της οποίας αυξάνονται και τείνουν στο $\sup A$, χωρίς να μας νοιάζει αν ανήκουν στο A, και ανάμεσα σ' αυτήν την ακολουθία και στο $\sup A$ θα "εγκλωβίσουμε" μια ακολουθία στο A.)
Θεωρούμε την ακολουθία $(\sup A - \frac{1}{n})$ η οποία τείνει στο $\sup A$ και όλοι οι όροι της είναι $< \sup A$. Από την δεύτερη χαρακτηριστική ιδιότητα του $\sup A$ συνεπάγεται ότι για κάθε n υπάρχει στοιχείο του A ανάμεσα στον $\sup A - \frac{1}{n}$ και στον $\sup A$. Έστω, λοιπόν, $x_n \in A$ με

$$\sup A - \tfrac{1}{n} < x_n \leq \sup A.$$

Έτσι δημιουργείται ακολουθία (x_n) στο A με την ιδιότητα να ισχύει $\sup A - \frac{1}{n} < x_n \leq \sup A$ για κάθε n. Από την ιδιότητα παρεμβολής συνεπάγεται $x_n \to \sup A$.
Άρα υπάρχει ακολουθία στο A με όριο $\sup A$.

Άσκηση 2.3.34. *Έστω μη-κενό σύνολο A και u άνω φράγμα του A. Αποδείξτε ότι $u = \sup A$ αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία στο A με όριο τον u.*

Λύση: Έστω ότι ο u είναι άνω φράγμα του συνόλου A.
Έστω ότι υπάρχει ακολουθία (x_n) στο A ώστε $x_n \to u$. Θα αποδείξουμε ότι $u = \sup A$, αν αποδείξουμε ότι κάθε άνω φράγμα του A είναι $\geq u$.
Παίρνουμε οποιοδήποτε άνω φράγμα u' του A. Τότε ισχύει $x_n \leq u'$ για κάθε n. Επειδή $x_n \to u$, συνεπάγεται $u \leq u'$. Άρα ο u είναι το μικρότερο από τα άνω φράγματα του A.
Αντιστρόφως, έστω ότι $u = \sup A$. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει κάποια ακολουθία στοιχείων του A η οποία συγκλίνει στον u. Αυτό, όμως, το αποδείξαμε στην λύση της άσκησης 2.3.33.

Άσκηση 2.3.35. *Έστω μη-κενό σύνολο A.*

Αν $\sup A \in A$, βρείτε μια όσο το δυνατό πιο απλή ακολουθία στο A με όριο το $\sup A$.

Αν $\sup A \notin A$, αποδείξτε ότι υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία στο A με όριο το $\sup A$.

Λύση: Έστω $\sup A \in A$. Θέτουμε $u = \sup A$ και θεωρούμε την σταθερή ακολουθία με τύπο $x_n = u$ για κάθε n. Τότε η (x_n) είναι στο A και έχει όριο $u = \sup A$.
Τώρα έστω $\sup A \notin A$.
Για να μην χρειαστεί να διακρίνουμε τις περιπτώσεις $\sup A \in \mathbb{R}$ και $\sup A = +\infty$ (όπως κάναμε στην λύση της άσκησης 2.3.33), θεωρούμε εξαρχής μια συγκεκριμένη ακολουθία (y_n) *όχι αναγκαστικά στο A* τέτοια ώστε

$$y_n \to \sup A \qquad \text{και} \qquad y_n < \sup A \quad \text{για κάθε } n.$$

Στην περίπτωση $\sup A \in \mathbb{R}$ μπορούμε να πάρουμε, για παράδειγμα, την $y_n = \sup A - \frac{1}{n}$ και στην περίπτωση $\sup A = +\infty$ μπορούμε να πάρουμε, για παράδειγμα, την $y_n = n$. (Ακριβώς όπως στην λύση της άσκησης 2.3.33.)
Αφού θεωρήσουμε μια τέτοια ακολουθία (y_n), ορίζουμε μια ακολουθία (x_n) στο A με επαγωγικό τρόπο ως εξής.
Θεωρούμε $x_1 \in A$ ώστε

$$y_1 < x_1 < \sup A.$$

(Αυτό είναι εφικτό λόγω της δεύτερης χαρακτηριστικής ιδιότητας του $\sup A$, αφού $y_1 < \sup A$.) Κατόπιν, θεωρούμε $x_2 \in A$ ώστε

$$\max\{y_2, x_1\} < x_2 < \sup A.$$

(Και πάλι αυτό είναι εφικτό, αφού $\max\{y_2, x_1\} < \sup A$.) Κατόπιν, θεωρούμε $x_3 \in A$ ώστε

$$\max\{y_3, x_2\} < x_3 < \sup A.$$

Κατόπιν, θεωρούμε $x_4 \in A$ ώστε

$$\max\{y_4, x_3\} < x_4 < \sup A.$$

Και συνεχίζουμε επαγωγικά επ' άπειρον.
Με αυτόν τον τρόπο δημιουργείται μια ακολουθία (x_n) στο A η οποία έχει δύο ιδιότητες:

$$y_n < x_n < \sup A \quad \text{και} \quad x_n < x_{n+1} \qquad \text{για κάθε } n.$$

Επειδή $y_n \to \sup A$, από την πρώτη ιδιότητα συνεπάγεται ότι $x_n \to \sup A$ και η δεύτερη ιδιότητα μας λέει ότι η (x_n) είναι γνησίως αύξουσα.

Άσκηση 2.3.36. *Έστω $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ και έστω ότι ισχύει $x_n \geq 0$ για κάθε n.*
Αν $x_n \to x$, αποδείξτε ότι $\sqrt[k]{x_n} \to \sqrt[k]{x}$.
Αν $x_n \to +\infty$, αποδείξτε ότι $\sqrt[k]{x_n} \to +\infty$.
Μην χρησιμοποιήσετε την πρόταση 2.12.

Λύση: Αρχικά θεωρούμε την ειδική περίπτωση $x = 1$. Έστω, λοιπόν, $x_n \to 1$.
Παίρνουμε τυχόντα ϵ με $0 < \epsilon \leq 1$. Επειδή $x_n \to 1$, υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $|x_n - 1| < \epsilon$ ή, ισοδύναμα,

$$0 \leq 1 - \epsilon < x_n < 1 + \epsilon \qquad \text{για κάθε } n \geq n_0.$$

Άρα ισχύει

$$0 \leq \sqrt[k]{1-\epsilon} < \sqrt[k]{x_n} < \sqrt[k]{1+\epsilon} \qquad \text{για κάθε } n \geq n_0.$$

Γνωρίζουμε, όμως, ότι ισχύει $a \leq \sqrt[k]{a}$ αν $0 \leq a \leq 1$ και ότι ισχύει $\sqrt[k]{a} \leq a$ αν $1 \leq a$. Επομένως, ισχύει

$$0 \leq 1 - \epsilon < \sqrt[k]{x_n} < 1 + \epsilon \qquad \text{για κάθε } n \geq n_0$$

ή, ισοδύναμα, $|\sqrt[k]{x_n} - 1| < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$.
Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι για κάθε ϵ με $0 < \epsilon \leq 1$ υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $|\sqrt[k]{x_n} - 1| < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$.
Αφού αυτό ισχύει για $\epsilon = 1$, θα ισχύει αυτομάτως και για $\epsilon > 1$.
Άρα έχουμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $|\sqrt[k]{x_n} - 1| < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Δηλαδή, συμπεραίνουμε ότι, αν $x_n \to 1$, τότε $\sqrt[k]{x_n} \to 1$.
Τώρα πάμε στην πιο γενική περίπτωση $x > 0$.
Τότε θεωρούμε την ακολουθία με τύπο $y_n = \frac{x_n}{x}$ και, επειδή $x_n \to x$, έχουμε ότι $y_n \to 1$. Από την ειδική περίπτωση συνεπάγεται $\sqrt[k]{y_n} \to 1$ και άρα

$$\sqrt[k]{x_n} = \sqrt[k]{y_n x} = \sqrt[k]{y_n}\,\sqrt[k]{x} \to \sqrt[k]{x}.$$

Έστω τώρα $x = 0$, οπότε πρέπει να δείξουμε ότι, αν $x \to 0$, τότε $\sqrt[k]{x_n} \to 0$.
Παίρνουμε τυχόντα $\epsilon > 0$. Επειδή $x_n \to 0$ (και $x_n \geq 0$ για κάθε n), υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $0 \leq x_n < \epsilon^k$ για κάθε $n \geq n_0$. Συνεπάγεται ότι ισχύει

$$0 \leq \sqrt[k]{x_n} < \epsilon \qquad \text{για κάθε } n \geq n_0.$$

Άρα $\sqrt[k]{x_n} \to 0$.

Τέλος, έστω $x_n \to +\infty$.
Παίρνουμε τυχόντα $M > 0$. Τότε υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $x_n > M^k$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα ισχύει

$$\sqrt[k]{x_n} > M \qquad \text{για κάθε } n \geq n_0$$

και, επομένως, $\sqrt[k]{x_n} \to +\infty$.

Άσκηση 2.3.38. *Αν $x_n \to x$ και ισχύει $x_n \leq x$ για κάθε n, αποδείξτε ότι* $\sup\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\} = x$.

Λύση: Επειδή ισχύει $x_n \leq x$ για κάθε n, ο x είναι άνω φράγμα του συνόλου $\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$.
Μένει να αποδείξουμε ότι ο x είναι το ελάχιστο άνω φράγμα αυτού του συνόλου.
Πρώτος τρόπος: Έστω u άνω φράγμα του $\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$. Τότε ισχύει $x_n \leq u$ για κάθε n και, επειδή $x_n \to x$, συνεπάγεται $x \leq u$. Άρα το x είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του $\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$.
Δεύτερος τρόπος: Έστω τυχών $u < x$. Επειδή $x_n \to x$, συνεπάγεται ότι ισχύει τελικά $u < x_n$. Άρα υπάρχουν στοιχεία του $\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ (τουλάχιστον ένα) τα οποία είναι $> u$. Άρα ο τυχών $u < x$ δεν είναι άνω φράγμα του $\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$, οπότε ο x είναι το ελάχιστο άνω φράγμα αυτού του συνόλου.

Άσκηση 2.3.39. *Αν $x_n \to x$, αποδείξτε ότι* $\inf\{x_n \,|\, n \geq k\} \leq x \leq \sup\{x_n \,|\, n \geq k\}$ *για κάθε k.*

Λύση: Θέτουμε $l = \inf\{x_n \,|\, n \geq k\}$ και $u = \sup\{x_n \,|\, n \geq k\}$.
Τότε ισχύει $l \leq x_n \leq u$ για κάθε $n \geq k$. Δηλαδή ισχύει τελικά $l \leq x_n \leq u$. Επειδή $x_n \to x$, συνεπάγεται $l \leq x \leq u$.

Άσκηση 2.3.40. *Έστω $x_n \to x$. Αποδείξτε ότι η ακολουθία (x_n) έχει μέγιστο όρο αν και μόνο αν υπάρχει k ώστε $x_k \geq x$.*

Λύση: Έστω ότι η (x_n) έχει μέγιστο όρο. Δηλαδή υπάρχει k ώστε να ισχύει $x_n \leq x_k$ για κάθε n. Τώρα, όμως, επειδή $x_n \to x$, συνεπάγεται ότι $x \leq x_k$.
Αντιστρόφως, έστω ότι υπάρχει k ώστε $x_k \geq x$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.
Έστω ότι δεν υπάρχει κανένας n ώστε $x_n > x$. Έστω, δηλαδή, ότι ισχύει $x_n \leq x$ για κάθε n. Τότε, όμως, ισχύει $x_n \leq x_k$ για κάθε n και άρα ο x_k είναι μέγιστος όρος της (x_n).
Η δεύτερη περίπτωση είναι να υπάρχει κάποιος n ώστε $x_n > x$. Έστω n_1 ένας τέτοιος n, οπότε

$$x < x_{n_1}.$$

Επειδή $x_n \to x$, συνεπάγεται ότι ισχύει τελικά $x_n < x_{n_1}$, οπότε υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει

$$x_n < x_{n_1} \qquad \text{για κάθε } n \geq n_0. \tag{14.11}$$

Αυτομάτως, αποκλείεται να είναι $n_1 \geq n_0$, οπότε $1 \leq n_1 \leq n_0 - 1$.
Τώρα θεωρούμε τους πεπερασμένους όρους $x_1, \ldots x_{n_0-1}$. Κάποιος απο αυτούς είναι ο μεγαλύτερος και έστω ότι αυτός είναι ο x_{n^*} με $1 \leq n^* \leq n_0 - 1$. Τότε, όμως, έχουμε

$$x_{n^*} \geq x_n \qquad \text{για κάθε } n \text{ με } 1 \leq n \leq n_0 - 1. \tag{14.12}$$

Θυμόμαστε ότι $1 \leq n_1 \leq n_0 - 1$, οπότε, ειδικώτερα,

$$x_{n^*} \geq x_{n_1}. \tag{14.13}$$

Από τις (14.11) και (14.13) συνεπάγεται ότι ισχύει

$$x_{n^*} \geq x_n \qquad \text{για κάθε } n \geq n_0. \tag{14.14}$$

Τέλος, από τις (14.12) και (14.14) συνεπάγεται ότι ισχύει $x_{n^*} \geq x_n$ για κάθε n και άρα η (x_n) έχει μέγιστο όρο τον x_{n^*}.

Άσκηση 2.3.41. [α] *Αποδείξτε το θεώρημα του Cesáro: Αν $x_n \to x \in \overline{\mathbb{R}}$, τότε $\frac{x_1+\cdots+x_n}{n} \to x$.*
Αν ισχύει $x_n = (-1)^{n-1}$ για κάθε n, αποδείξτε ότι $\frac{x_1+\cdots+x_n}{n} \to 0$.

Αν ισχύει $x_n = \frac{1+(-1)^n}{2} n$ για κάθε n, αποδείξτε ότι $\frac{x_1+\cdots+x_n}{n} \to +\infty$.
Και οι δύο προηγούμενες ακολουθίες (x_n) δεν έχουν όριο. Συμπεράνατε ότι δεν ισχύει το αντίστροφο του θεωρήματος του Cesáro.
[β] *Αν $a_{n+1} - a_n \to a \in \overline{\mathbb{R}}$, αποδείξτε ότι $\frac{a_n}{n} \to a$.*
Βρείτε τα όρια των ακολουθιών $\big(\frac{a^n}{n}\big)$ και $\big(\frac{\log_a n}{n}\big)$ με $a > 1$.
[δ] *Αν ισχύει $x_n > 0$ για κάθε n και $x_n \to x \in [0, +\infty]$, αποδείξτε ότι $\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \to x$.*
[ε] *Αν ισχύει $a_n > 0$ για κάθε n και $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to a \in [0, +\infty]$, αποδείξτε ότι $\sqrt[n]{a_n} \to a$.*
Βρείτε τα όρια των ακολουθιών $(\sqrt[n]{n})$, $(\sqrt[n]{n!})$.

Λύση: [α] Αρχικά θα δούμε την ειδική περίπτωση όπου $x_n \to 0$, στην οποία περιέχονται όλες οι ιδέες της απόδειξης. Έστω, λοιπόν, $x_n \to 0$.
Έστω τυχών $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $n_0{}'$ ώστε να ισχύει

$$|x_n| < \tfrac{\epsilon}{2} \qquad \text{για κάθε } n \geq n_0{}'.$$

Θεωρούμε $n_0 = \max\big\{n_0{}', \big[\frac{2(|x_1|+\cdots+|x_{n_0{}'-1}|)}{\epsilon}\big] + 1\big\}$.
Τότε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $n \geq n_0{}'$ και $n > \frac{2(|x_1|+\cdots+|x_{n_0{}'-1}|)}{\epsilon}$, οπότε

$$\begin{aligned}\big|\tfrac{x_1+\cdots+x_n}{n}\big| &\leq \tfrac{|x_1|+\cdots+|x_n|}{n} = \tfrac{|x_1|+\cdots+|x_{n_0{}'-1}|}{n} + \tfrac{|x_{n_0{}'}|+\cdots+|x_n|}{n} < \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{(n-n_0{}'+1)(\epsilon/2)}{n} \\ &< \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon.\end{aligned}$$

Άρα $\frac{x_1+\cdots+x_n}{n} \to 0$.
Σχόλιο. Προσέξτε πώς προκύπτει ότι ο λόγος $\frac{|x_1|+\cdots+|x_n|}{n}$ είναι μικρός. Τόν χωρίζουμε σε δύο μέρη, το $\frac{|x_1|+\cdots+|x_{n_0{}'-1}|}{n}$ και το $\frac{|x_{n_0{}'}|+\cdots+|x_n|}{n}$. Το πρώτο μέρος περιέχει όρους της ακολουθίας οι οποίοι δεν είναι αναγκαστικά μικροί αλλά ο παρονομαστής του, ο n, είναι μεγάλος. Το δεύτερο μέρος είναι εκείνο το οποίο περιέχει τους μικρούς όρους.
Τώρα, έστω, γενικότερα, ότι $x_n \to x \in \mathbb{R}$.
Εφαρμόζουμε το προηγούμενο αποτέλεσμα στην ακολουθία με τύπο $y_n = x_n - x$ για την οποία ισχύει $y_n \to 0$ και έχουμε

$$\tfrac{x_1+\cdots+x_n}{n} = \tfrac{(y_1+x)+\cdots+(y_n+x)}{n} = \tfrac{y_1+\cdots+y_n}{n} + \tfrac{x+\cdots+x}{n} = \tfrac{y_1+\cdots+y_n}{n} + x \to 0 + x = x.$$

Έστω $x = +\infty$. Έστω $M > 0$. Τότε υπάρχει $n_0{}'$ ώστε να ισχύει

$$x_n > 2(M+1) \qquad \text{για κάθε } n \geq n_0{}'.$$

Θεωρούμε $n_0 = \max\big\{2n_0{}' - 1, \big[|x_1 + \cdots + x_{n_0{}'-1}|\big] + 1\big\}$.
Τότε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $n \geq 2n_0{}' - 1 \geq n_0{}'$ και $n > |x_1 + \cdots + x_{n_0{}'-1}|$, οπότε

$$\tfrac{x_1+\cdots+x_n}{n} = \tfrac{x_1+\cdots+x_{n_0{}'-1}}{n} + \tfrac{x_{n_0{}'}+\cdots+x_n}{n} > -1 + \tfrac{(n-n_0{}'+1)2(M+1)}{n} \geq -1 + (M+1) = M.$$

Άρα $\frac{x_1+\cdots+x_n}{n} \to +\infty$.
Αν $x = -\infty$, εφαρμόζουμε το προηγούμενο αποτέλεσμα στην ακολουθία με τύπο $y_n = -x_n$ για την οποία ισχύει $y_n \to +\infty$. Τότε

$$\tfrac{x_1+\cdots+x_n}{n} = \tfrac{(-y_1)+\cdots+(-y_n)}{n} = -\tfrac{y_1+\cdots+y_n}{n} \to -(+\infty) = -\infty.$$

Αν ισχύει $x_n = (-1)^{n-1}$ για κάθε n, τότε ο $x_1 + \cdots + x_n$ έχει μόνο δύο τιμές: τον 0 αν ο n είναι άρτιος και τον 1 αν ο n είναι περιττός. Άρα ισχύει $0 \leq \frac{x_1+\cdots+x_n}{n} \leq \frac{1}{n}$ για κάθε n και, επομένως, $\frac{x_1+\cdots+x_n}{n} \to 0$.
Αν ισχύει $x_n = \frac{1+(-1)^n}{2} n$ για κάθε n, τότε είναι

$$\tfrac{x_1+x_2+\cdots+x_{2k-3}+x_{2k-2}+x_{2k-1}+x_{2k}}{2k} = \tfrac{0+2+\cdots+0+(2k-2)+0+2k}{2k} = \tfrac{1+\cdots+(k-1)+k}{k} = \tfrac{k(k+1)}{2k} = \tfrac{k+1}{2}$$

και
$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{2k-3}+x_{2k-2}+x_{2k-1}}{2k-1}=\frac{0+2+\cdots+0+(2k-2)+0}{2k-1}=2\,\frac{1+\cdots+(k-1)}{2k-1}=\frac{k(k-1)}{2k-1}.$$
Άρα ισχύει $\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\geq\frac{n-1}{4}$ για κάθε n και, επομένως, $\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\to+\infty$.
[β] Εφαρμόζουμε το αποτέλεσμα του [α] στην ακολουθία με τύπο $b_1=a_1$ και $b_n=a_n-a_{n-1}$ για κάθε $n\geq 2$. Έχουμε $b_n\to a$ και άρα
$$\frac{a_n}{n}=\frac{a_1+(a_2-a_1)+\cdots+(a_n-a_{n-1})}{n}=\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}\to a.$$
Τώρα, επειδή $a^{n+1}-a^n=(a-1)a^n\to+\infty$ όταν $a>1$, συνεπάγεται ότι $\frac{a^n}{n}\to+\infty$.
Επίσης, μπορούμε να αποδείξουμε ότι $\log_a(n+1)-\log_a n=\log_a\frac{n+1}{n}\to 0$, οπότε συνεπάγεται ότι $\frac{\log_a n}{n}\to 0$.
Το όριο $\log_a\frac{n+1}{n}\to 0$ προκύπτει από το ότι $\frac{n+1}{n}\to 1$ και από τις ιδιότητες "συνέχειας" της λογαριθμικής συνάρτησης που θα δούμε στα επόμενα κεφάλαια. Αλλά και τώρα μπορούμε να αποδείξουμε το παραπάνω όριο σχετικά εύκολα. Πράγματι, έστω τυχών $\epsilon>0$. Τότε η $|\log_a\frac{n+1}{n}|<\epsilon$ ισοδυναμεί με την $\log_a\frac{n+1}{n}<\epsilon$ κι αυτή με την $\frac{n+1}{n}<a^\epsilon$ κι αυτή με την $n>\frac{1}{a^\epsilon-1}$. Τώρα παίρνουμε έναν $n_0>\frac{1}{a^\epsilon-1}$ και έχουμε ότι για κάθε $n\geq n_0$ ισχύει $n>\frac{1}{a^\epsilon-1}$ και, επομένως, $|\log_a\frac{n+1}{n}|<\epsilon$.
[δ] Το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να αποδειχθεί με τρόπο παρόμοιο με του [α]. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να το προσπαθήσει. Θεωρώ, όμως, προτιμότερο να παραπέμψω στην άσκηση 4.3.3, όπου η απόδειξη του [δ] ανάγεται στο αποτέλεσμα του [α] μέσω ιδιοτήτων της λογαριθμικής και της εκθετικής συνάρτησης, και να επικεντρωθούμε στο [ε] που ακολουθεί θεωρώντας δεδομένο το αποτέλεσμα του [δ].
[ε] Εφαρμόζουμε το αποτέλεσμα του [δ] στην ακολουθία με τύπο $b_1=a_1$ και $b_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}$ για κάθε $n\geq 2$. Έχουμε $b_n\to a$ και άρα
$$\sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{a_1\,\frac{a_2}{a_1}\cdots\frac{a_n}{a_{n-1}}}=\sqrt[n]{b_1b_2\cdots b_n}\to a.$$
Τώρα, $\frac{n+1}{n}\to 1$ και άρα $\sqrt[n]{n}\to 1$.
Επίσης, $\frac{(n+1)!}{n!}=n+1\to+\infty$ και άρα $\sqrt[n]{n!}\to+\infty$.

Άσκηση 2.4.1. *Βρείτε το όριο της ακολουθίας με τύπο $x_n=\frac{2^n n!}{n^n}$.*

Λύση: Ο κανόνας λόγου καταλήγει σε απροσδιόριστη μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$ και δεν υπάρχει προφανής τρόπος απλοποίησης του λόγου $\frac{2^n n!}{n^n}$.
Χρησιμοποιούμε το κριτήριο λόγου:
$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{2^{n+1}(n+1)!/(n+1)^{n+1}}{2^n n!/n^n}=\frac{2^{n+1}(n+1)!n^n}{2^n n!(n+1)^{n+1}}=\frac{2(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}}=\frac{2n^n}{(n+1)^n}=\frac{2}{(\frac{n+1}{n})^n}=\frac{2}{(1+\frac{1}{n})^n}\to\frac{2}{e}.$$
Επειδή $\frac{2}{e}<1$, συνεπάγεται $x_n\to 0$.

Άσκηση 2.4.3. *Με επαγωγή ως προς τον k, αποδείξτε ότι $(1+\frac{k}{n})^n\to e^k$ (όταν $n\to+\infty$, φυσικά) για κάθε $k\in\mathbb{N}$.*
Να αποδείξετε το όριο $(1+\frac{k}{n})^n\to e^k$ γενικότερα για $k\in\mathbb{Z}$.

Λύση: Αν $k=1$, το όριο $(1+\frac{1}{n})^n\to e$ είναι απλώς ο ορισμός του e.
Τώρα, έστω ότι ισχύει $(1+\frac{k}{n})^n\to e^k$ για κάποιον $k\in\mathbb{N}$.
Γράφουμε
$$\left(1+\frac{k+1}{n}\right)=\frac{n+k+1}{n}=\frac{n+k}{n}\,\frac{n+k+1}{n+k}=\left(1+\frac{k}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n+k}\right).$$
Επομένως,
$$\left(1+\frac{k+1}{n}\right)^n=\left(1+\frac{k}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n+k}\right)^n=\left(1+\frac{k}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n+k}\right)^{n+k}\left(1+\frac{1}{n+k}\right)^{-k}. \tag{14.15}$$

Παρατηρούμε ότι $(1+\frac{1}{n+k})^{-k} \to 1$ (όταν $n \to +\infty$).
Κατόπιν, επειδή $(1+\frac{1}{n})^n \to e$, συνεπάγεται $(1+\frac{1}{n+k})^{n+k} \to e$ (όταν $n \to +\infty$), οπότε από την (14.15) συνεπάγεται $(1+\frac{k+1}{n})^n \to e^k e1 = e^{k+1}$.
Επομένως, από την αρχή της επαγωγής έχουμε ότι $(1+\frac{k}{n})^n \to e^k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.
Αν $k=0$, το όριο $(1+\frac{k}{n})^n \to e^k$ είναι προφανώς σωστό, αφού γράφεται $1 \to 1$.
Τώρα, έστω $k \in \mathbb{Z}$, $k<0$, οπότε $|k| = -k \in \mathbb{N}$.
Θεωρούμε $n \geq |k|+1$ και γράφουμε

$$1+\frac{k}{n} = \frac{n-|k|}{n} = \frac{1}{n/(n-|k|)} = \frac{1}{1+(|k|/(n-|k|))},$$

οπότε

$$\left(1+\frac{k}{n}\right)^n = \frac{1}{(1+(|k|/(n-|k|)))^n}. \tag{14.16}$$

Έχουμε ήδη αποδείξει προηγουμένως ότι $(1+\frac{|k|}{n})^n \to e^{|k|}$ και άρα

$$\left(1+\frac{|k|}{n-|k|}\right)^n = \left(1+\frac{|k|}{n-|k|}\right)^{n-|k|}\left(1+\frac{|k|}{n-|k|}\right)^{|k|} \to e^{|k|}1 = e^{|k|}.$$

Επομένως, από την (14.16) συνεπάγεται $(1+\frac{k}{n})^n \to \frac{1}{e^{|k|}} = e^k$.

Άσκηση 2.4.6. *Δείτε την άσκηση 2.4.4 και θεωρήστε τις ακολουθίες (a_n) και (b_n) με $a_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\log n$ και $b_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι η (a_n) είναι γνησίως αύξουσα, ότι η (b_n) είναι γνησίως φθίνουσα και ότι οι δύο ακολουθίες συγκλίνουν στον ίδιο αριθμό.*

Λύση: Η σχέση $a_n < a_{n+1}$ γράφεται ισοδύναμα

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\log n < 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}-\log(n+1)$$

ή, ισοδύναμα, $\log\frac{n+1}{n} < \frac{1}{n}$ ή, ισοδύναμα, $(1+\frac{1}{n})^n < e$ και αυτή η ανισότητα είναι σωστή διότι η ακολουθία $\big((1+\frac{1}{n})^n\big)$ είναι γνησίως αύξουσα και έχει όριο τον e.
Ομοίως, η ανισότητα $b_{n+1} < b_n$ γράφεται ισοδύναμα

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\log(n+1) < 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n$$

ή, ισοδύναμα, $\frac{1}{n+1} < \log\frac{n+1}{n}$ ή, ισοδύναμα, $e < (1+\frac{1}{n})^{n+1}$ και αυτή η ανισότητα είναι σωστή διότι η ακολουθία $\big((1+\frac{1}{n})^{n+1}\big)$ είναι γνησίως φθίνουσα και έχει το ίδιο όριο με την $\big((1+\frac{1}{n})^n\big)$, δηλαδή τον e.
Κατόπιν, βλέπουμε ότι ισχύει $a_n < b_n$ για κάθε n και ότι $b_n - a_n = \frac{1}{n} \to 0$. Σύμφωνα με την πρόταση με τα εγκιβωτισμένα διαστήματα οι δύο ακολουθίες έχουν το ίδιο όριο.

Άσκηση 2.4.8. [β] *Δίνεται ακολουθία (x_n) με $x_1 > 0$ και τέτοια ώστε να ισχύει $x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι, ανάλογα με την τιμή του x_1, η ακολουθία είναι αύξουσα ή φθίνουσα και βρείτε το όριό της.*

Λύση: Πρώτος τρόπος. Οι αρχικοί όροι της (x_n) είναι:

$$x_1,\ x_2=\sqrt{2x_1},\ x_3=\sqrt{2x_2}=\sqrt{2\sqrt{2x_1}},\ x_4=\sqrt{2x_3}=\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2x_1}}},\ \ldots \qquad \text{κ.τ.λ.}$$

Επειδή πρέπει να αποδείξουμε ότι η ακολουθία είναι μονότονη, αρχίζουμε μελετώντας την ανισότητα $x_n \leq x_{n+1}$ ή την ισοδύναμη $x_n \leq \sqrt{2x_n}$.
Παρατηρούμε ότι όλοι οι όροι της (x_n) είναι >0, οπότε θα μπορούμε να χειριζόμαστε κάπως ελεύθερα διάφορες ανισότητες που θα παρουσιάζονται κατά τη διάρκεια της λύσης.
Άρα η τελευταία ανισότητα ισοδυναμεί με την ${x_n}^2 \leq 2x_n$ κι αυτή με την $x_n \leq 2$.
Έχουμε, δηλαδή, τις ισοδυναμίες

$$x_n \leq x_{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad x_n \leq 2$$

$$x_{n+1} \le x_n \quad \Leftrightarrow \quad 2 \le x_n.$$

Βλέπουμε ότι η σχέση διάταξης ανάμεσα στον n-οστό όρο και στον επόμενό του εξαρτάται άμεσα από τη σχέση διάταξης ανάμεσα στον n-οστό όρο και στον αριθμό 2. Και είναι απολύτως σαφές ότι, αν θέλουμε να είναι η ακολουθία αύξουσα, τότε θα πρέπει να είναι όλοι οι όροι της ≤ 2 ενώ, αν θέλουμε να είναι η ακολουθία φθίνουσα, τότε θα πρέπει να είναι όλοι οι όροι της ≥ 2.

Θα διακρίνουμε, επομένως, δύο περιπτώσεις: να είναι $x_1 \le 2$ ή να είναι $x_1 \ge 2$. Στην πρώτη περίπτωση θα αποδείξουμε ότι όλοι οι όροι είναι ≤ 2, οπότε η (x_n) θα είναι αύξουσα, και στη δεύτερη περίπτωση θα αποδείξουμε ότι όλοι οι όροι είναι ≥ 2, οπότε η (x_n) θα είναι φθίνουσα.

Έστω, λοιπόν, $0 < x_1 \le 2$.

Πάμε με επαγωγή. Αν υποθέσουμε $x_n \le 2$ για κάποιον n, τότε $x_{n+1} = \sqrt{2x_n} \le \sqrt{2 \cdot 2} = 2$. Άρα ισχύει $x_n \le 2$ για κάθε n και η (x_n) είναι αύξουσα.

Όμως, είμαστε ευτυχείς διότι έχουμε ταυτόχρονα αποδείξει ότι η (x_n) είναι *και άνω φραγμένη* από τον 2. Άρα η (x_n) συγκλίνει και μένει να βρούμε το όριό της.

Αν $x_n \to x$ τότε ο αναδρομικός τύπος ${x_{n+1}}^2 = 2x_n$ συνεπάγεται $x^2 = 2x$, οπότε $x = 0$ ή $x = 2$. Η περίπτωση $x = 0$ απορρίπτεται, διότι η (x_n) είναι αύξουσα και ο πρώτος όρος της είναι $x_1 > 0$. Άρα $x = 2$, οπότε $x_n \to 2$.

Αν υποθέσουμε $x_1 \ge 2$, τότε πάλι με επαγωγή αποδεικνύουμε ότι ισχύει $x_n \ge 2$ για κάθε n και η (x_n) είναι φθίνουσα (και κάτω φραγμένη από τον 2). Και με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι πάλι $x_n \to 2$.

Σχόλιο: Η άσκηση ζητά να αποδείξουμε πρώτα ότι η ακολουθία είναι μονότονη και κατόπιν να βρούμε το όριό της. Όμως, η άσκηση θα μπορούσε να είναι διατυπωμένη ως εξής.

Δίνεται ακολουθία (x_n) με $x_1 > 0$ και τέτοια ώστε να ισχύει $x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι η ακολουθία έχει όριο και βρείτε το.

Τότε θα πρέπει να *υποψιαστούμε* ότι η (x_n) μπορεί να είναι μονότονη και να ακολουθήσουμε με δική μας πρωτοβουλία την παραπάνω λύση.

Δεύτερος τρόπος. Παρατηρούμε πάλι τους αρχικούς όρους της ακολουθίας και βλέπουμε το εξής "μοτίβο":

$$x_1,\ x_2 = 2^{\frac{1}{2}} {x_1}^{\frac{1}{2}},\ x_3 = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}} {x_1}^{\frac{1}{2^2}},\ x_4 = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}} {x_1}^{\frac{1}{2^3}},\ \ldots \qquad \text{κ.τ.λ.}$$

Τώρα, είναι πολύ εύκολο να αποδείξουμε με την αρχή της επαγωγής ότι ισχύει

$$x_n = 2^{\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}} {x_1}^{\frac{1}{2^{n-1}}} = 2^{1-\frac{1}{2^{n-1}}} {x_1}^{\frac{1}{2^{n-1}}} = 2\big(\tfrac{x_1}{2}\big)^{\frac{1}{2^{n-1}}} \qquad \text{για κάθε } n.$$

Επομένως, αν $0 < \frac{x_1}{2} \le 1$, τότε η (x_n) είναι αύξουσα με όριο ίσο με 2 και, αν $1 \le \frac{x_1}{2}$, τότε η (x_n) είναι φθίνουσα με όριο ίσο πάλι με 2.

Σχόλιο. Ο δεύτερος τρόπος είναι πολύ πιο απλός από τον πρώτο τρόπο. Όμως, ο πρώτος τρόπος είναι *πολύ πιο σημαντικός* διότι είναι πιο *μεθοδικός*. Ο δεύτερος τρόπος εξαρτάται από το πόσο απλός είναι ο αναδρομικός τύπος της ακολουθίας. Στη συγκεκριμένη περίπτωση ο αναδρομικός τύπος $x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$ είναι σχετικά απλός και μας επέτρεψε να αποκωδικοποιήσουμε τον τύπο $x_n = 2(\frac{x_1}{2})^{\frac{1}{2^{n-1}}}$ της ακολουθίας. Υπάρχουν, όμως, περιπτώσεις όπου αυτό δεν είναι καθόλου εύκολο αν όχι πρακτικά αδύνατο. Σε τέτοιες περιπτώσεις εργαζόμαστε αναγκαστικά με τον πρώτο τρόπο. Δείτε τα [γ-ζ] της ίδιας άσκησης.

Άσκηση 2.4.9. [β] *Αν $a > 1$ και $k \in \mathbb{N}$, αποδείξτε ότι η ακολουθία $(\frac{a^n}{n^k})$ είναι τελικά αύξουσα και, χρησιμοποιώντας τη σχέση $\frac{a^{n+1}}{(n+1)^k} = a\frac{n^k}{(n+1)^k}\frac{a^n}{n^k}$, ότι $\frac{a^n}{n^k} \to +\infty$.*

Λύση: Για να αποδείξουμε ότι η $(\frac{a^n}{n^k})$ είναι αύξουσα από κάποιο δείκτη και πέρα, θα θεωρήσουμε την ανισότητα

$$\tfrac{a^n}{n^k} \le \tfrac{a^{n+1}}{(n+1)^k}$$

και θα ερευνήσουμε για ποιούς φυσικούς n αληθεύει: δηλαδή θα τη λύσουμε ως προς n. Η ανισότητα αυτή ισοδυναμεί με την $\frac{n+1}{n} \le a^{1/k}$ κι αυτή με την $n \ge \frac{1}{a^{1/k}-1}$. Άρα η ανισότητα

$\frac{a^n}{n^k} \le \frac{a^{n+1}}{(n+1)^k}$ αληθεύει για κάθε φυσικό $n \ge \frac{1}{a^{1/k}-1}$ και, επομένως, αληθεύει από κάποιο δείκτη και πέρα.
Απομένει να βρούμε το όριο της ακολουθίας $(\frac{a^n}{n^k})$. Το ότι η ακολουθία *έχει όριο* συνεπάγεται από το ότι είναι αύξουσα από κάποιο δείκτη και πέρα. Βέβαια, το θεώρημα 2.1 αναφέρεται σε αύξουσες (από τον πρώτο όρο και πέρα) ακολουθίες. Μπορούμε, όμως, να αγνοήσουμε τους αρχικούς όρους της ακολουθίας μας και να πάρουμε έτσι μια *νέα* ακολουθία που είναι αύξουσα (από τον πρώτο όρο και πέρα). Σ' αυτήν εφαρμόζεται το θεώρημα 2.1, οπότε έχει όριο, το οποίο είναι αριθμός ή $+\infty$. Συνεπάγεται ότι και η πρώτη ακολουθία έχει όριο (το ίδιο), το οποίο είναι αριθμός ή $+\infty$, αφού οι δύο ακολουθίες διαφέρουν μόνο στους αρχικούς τους όρους.
Για τον υπολογισμό του ορίου της $(\frac{a^n}{n^k})$ διακρίνουμε περιπτώσεις. Έστω αρχικά ότι το όριο είναι αριθμός, δηλαδή $\frac{a^n}{n^k} \to x$. Θα εκμεταλλευτούμε μια σχέση που υπάρχει ανάμεσα σε διαδοχικούς όρους της ακολουθίας:

$$\frac{a^{n+1}}{(n+1)^k} = a\frac{n^k}{(n+1)^k}\frac{a^n}{n^k} \qquad \text{για κάθε } n.$$

Θεωρούμε τα όρια των δύο μελών της ισότητας και έχουμε $x = ax$. Επειδή $a \neq 1$, συνεπάγεται $x = 0$. Αυτό, όμως, είναι αδύνατο! Η ακολουθία είναι αύξουσα από κάποιον δείκτη, έστω n_0, και πέρα, οπότε ισχύει $\frac{a^n}{n^k} \ge \frac{a^{n_0}}{{n_0}^k}$ για κάθε $n \ge n_0$. Θεωρούμε πάλι τα όρια των δύο μελών και βρίσκουμε $x \ge \frac{a^{n_0}}{{n_0}^k} > 0$.
Αφού, λοιπόν, το όριο δεν είναι αριθμός, πρέπει να είναι ίσο με $+\infty$.

Άσκηση 2.4.10. *Βρείτε ακολουθίες* (x_n), (y_n) *ώστε* $x_n \to 1$, $y_n \to +\infty$ *και η* $\big({x_n}^{y_n}\big)$ (i) *να έχει όριο έναν οποιονδήποτε* $c \in [0,+\infty]$ (ii) *να μην έχει όριο. Είναι δυνατόν η* $\big({x_n}^{y_n}\big)$ *να έχει όριο* $c \in [-\infty, 0)$*;*

Λύση: (i) Έστω $c = 1$. Θεωρούμε τις ακολουθίες $x_n = 1$ και $y_n = n$. Τότε $x_n \to 1$, $y_n \to +\infty$ και ${x_n}^{y_n} = 1 \to 1$.
Έστω $c \in \mathbb{R}$, $c > 1$ και $b = \log c > 0$. Θεωρούμε τις ακολουθίες $x_n = 1 + \frac{1}{n}$ και $y_n = bn$. Τότε $x_n \to 1$, $y_n \to +\infty$ και ${x_n}^{y_n} = ((1+\frac{1}{n})^n)^b \to e^b = c$.
Έστω $0 < c < 1$ και $b = \log c < 0$. Θεωρούμε τις ακολουθίες $x_n = (1+\frac{1}{n})^{-1}$ και $y_n = -bn$. Τότε $x_n \to 1$, $y_n \to +\infty$ και ${x_n}^{y_n} = ((1+\frac{1}{n})^n)^b \to e^b = c$.
Έστω $c = +\infty$. Θεωρούμε τις ακολουθίες $x_n = \sqrt[n]{n}$ και $y_n = n$. Τότε $x_n \to 1$, $y_n \to +\infty$ και ${x_n}^{y_n} = n \to +\infty$.
Έστω $c = 0$. Θεωρούμε τις ακολουθίες $x_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ και $y_n = n$. Τότε $x_n \to 1$, $y_n \to +\infty$ και ${x_n}^{y_n} = \frac{1}{n} \to 0$.
(ii) Θεωρούμε τις ακολουθίες $x_n = n^{\frac{(-1)^{n-1}}{n}}$ και $y_n = n$. Ισχύει $\frac{1}{\sqrt[n]{n}} \le x_n \le \sqrt[n]{n}$ για κάθε n, οπότε $x_n \to 1$. Επίσης, $y_n \to +\infty$ αλλά η ${x_n}^{y_n} = n^{(-1)^{n-1}}$ δεν έχει όριο, διότι ισχύει $n^{(-1)^{n-1}} = \frac{1}{n} \le \frac{1}{2}$ για κάθε άρτιο n και $n^{(-1)^{n-1}} = n \ge 1$ για κάθε περιττό n.
Επειδή $x_n \to 1$, ισχύει τελικά $x_n > 0$ και, επομένως, ${x_n}^{y_n} > 0$. Άρα η $\big({x_n}^{y_n}\big)$ δεν μπορεί να έχει όριο $c \in [-\infty, 0)$;

Άσκηση 2.4.11. [α] *Αν ο* b *δεν είναι αρνητικός ακέραιος, αποδείξτε ότι* $\frac{1}{b+1} + \frac{1}{b+2} + \frac{1}{b+3} + \cdots + \frac{1}{b+n} \to +\infty$.
[β] *Αποδείξτε με την αρχή της επαγωγής ότι* $(1+a_1)\cdots(1+a_n) \ge 1 + a_1 + \cdots + a_n$*, αν* $a_1, \ldots, a_n \ge 0$*, και* $(1-a_1)\cdots(1-a_n) \ge 1 - a_1 - \cdots - a_n$*, αν* $0 \le a_1, \ldots, a_n \le 1$.
Αν ο b *δεν είναι αρνητικός ακέραιος, βρείτε το* $\lim_{n\to+\infty} \frac{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}{(b+1)(b+2)\cdots(b+n)}$*, διακρίνοντας περιπτώσεις* $a = b$*,* $a > b$*,* $a < b$.
[γ] *Έστω ότι ισχύει* $x_n > 0$ *για κάθε* n.
Αν $c < 0$ *και αν ισχύει τελικά* $n\big(\frac{x_{n+1}}{x_n} - 1\big) \le c$*, αποδείξτε ότι* $x_n \to 0$.
Αν $c > 0$ *και αν ισχύει τελικά* $n\big(\frac{x_{n+1}}{x_n} - 1\big) \ge c$*, αποδείξτε ότι* $x_n \to +\infty$.
Αν $d < 0$ *και αν* $n\big(\frac{x_{n+1}}{x_n} - 1\big) \to d$*, αποδείξτε ότι* $x_n \to 0$.
Αν $d > 0$ *και αν* $n\big(\frac{x_{n+1}}{x_n} - 1\big) \to d$*, αποδείξτε ότι* $x_n \to +\infty$.

Δείτε ότι αυτά τα τέσσερα αποτελέσματα είναι επεκτάσεις των αντίστοιχων αποτελεσμάτων της πρότασης 2.10.

Εφαρμόστε τα προηγούμενα για να αποδείξετε ότι $\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2} \to 0$. *Μπορείτε να το αποδείξετε χρησιμοποιώντας την πρόταση 2.10;*

Λύση: [α] Θέτουμε

$$x_n = \tfrac{1}{b+1} + \tfrac{1}{b+2} + \cdots + \tfrac{1}{b+n}, \qquad y_n = 1 + \tfrac{1}{2} + \cdots + \tfrac{1}{n}.$$

Γνωρίζουμε ότι $y_n \to +\infty$ και θα συσχετίσουμε τις δύο ακολουθίες (x_n) και (y_n).
Αν $b \geq 0$, θεωρούμε τον ακέραιο $k = [b]$ για τον οποίο ισχύει $k \geq 0$ και $k \leq b < k+1$. Τότε

$$x_n \geq \tfrac{1}{k+2} + \tfrac{1}{k+3} + \cdots + \tfrac{1}{k+n+1} = y_{n+k+1} - y_{k+1} \qquad \text{για κάθε } n.$$

Επειδή $y_{n+k+1} - y_{k+1} \to (+\infty) - y_{k+1} = +\infty$, συνεπάγεται $x_n \to +\infty$.
Αν $b < 0$, θεωρούμε πάλι τον ακέραιο $k = [b]$ για τον οποίο ισχύει $-k = |k| \geq 1$ και $k \leq b < k+1$. Ορίζουμε ακόμη τον $b' = b - k$, οπότε $0 \leq b' < 1$. Τότε, αν $n \geq |k| + 1$, έχουμε

$$\begin{aligned} x_n &= \tfrac{1}{b+1} + \cdots + \tfrac{1}{b-k} + \tfrac{1}{b-k+1} + \cdots + \tfrac{1}{b-k+n+k} \\ &= \tfrac{1}{b+1} + \cdots + \tfrac{1}{b-k} + \tfrac{1}{b'+1} + \cdots + \tfrac{1}{b'+n-|k|} \\ &= \tfrac{1}{b+1} + \cdots + \tfrac{1}{b-k} + x'_{n-|k|}, \end{aligned} \tag{14.17}$$

όπου

$$x'_n = \tfrac{1}{b'+1} + \tfrac{1}{b'+2} + \cdots + \tfrac{1}{b'+n}.$$

Δηλαδή, η ακολουθία (x'_n) είναι η (x_n) με τον b' στη θέση του b.
Επειδή $b' \geq 0$, έχουμε $x'_n \to +\infty$ από την πρώτη περίπτωση. Άρα $x'_{n-|k|} \to +\infty$, οπότε από την (14.17) συνεπάγεται $x_n \to +\infty$.

[β] Για $n = 1$ η ανισότητα $(1 + a_1) \cdots (1 + a_n) \geq 1 + a_1 + \cdots + a_n$ ισχύει (και, μάλιστα, ως ισότητα). Έστω ότι η ανισότητα ισχύει για κάποιον n. Τότε

$$\begin{aligned} (1 + a_1) \cdots (1 + a_n)(1 + a_{n+1}) &\geq (1 + a_1 + \cdots + a_n)(1 + a_{n+1}) \\ &= 1 + a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1} + (a_1 + \cdots + a_n)a_{n+1} \\ &\geq 1 + a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1}. \end{aligned}$$

Άρα η ανισότητα ισχύει και για τον $n+1$.
Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται και η δεύτερη ανισότητα.
Θέτουμε

$$x_n = \tfrac{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}{(b+1)(b+2)\cdots(b+n)}.$$

Τώρα, αν $a = b$, είναι προφανές ότι $x_n = 1 \to 1$.
Αν ο a είναι αρνητικός ακέραιος, τότε ισχύει τελικά $x_n = 0$, οπότε $x_n \to 0$.
Στα επόμενα υποθέτουμε ότι ο a δεν είναι αρνητικός ακέραιος.
Έστω $a > b \geq 0$. Τότε, χρησιμοποιώντας την πρώτη ανισότητα που αποδείξαμε, γράφουμε

$$\begin{aligned} x_n &= \tfrac{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}{(b+1)(b+2)\cdots(b+n)} = \big(1 + \tfrac{a-b}{b+1}\big)\big(1 + \tfrac{a-b}{b+2}\big) \cdots \big(1 + \tfrac{a-b}{b+n}\big) \\ &\geq 1 + \tfrac{a-b}{b+1} + \tfrac{a-b}{b+2} + \cdots + \tfrac{a-b}{b+n} = 1 + (a-b)\big(\tfrac{1}{b+1} + \tfrac{1}{b+2} + \cdots + \tfrac{1}{b+n}\big). \end{aligned}$$

Επειδή $a-b > 0$, από το αποτέλεσμα του [α] συνεπάγεται $1+(a-b)(\frac{1}{b+1}+\frac{1}{b+2}+\cdots+\frac{1}{b+n}) \to +\infty$ και άρα $x_n \to +\infty$.
Αν $a > b$ και $b < 0$, κάνουμε κάτι παρόμοιο με την αντίστοιχη περίπτωση στο [α]. Θεωρούμε τον

ακέραιο $k=[b]$ για τον οποίο ισχύει $-k=|k|\geq 1$ και $k\leq b<k+1$. Ορίζουμε τον $b'=b-k$, οπότε $0\leq b'<1$. Ορίζουμε, επίσης, τον $a'=a-k$. Τότε, αν $n\geq |k|+1$, έχουμε

$$\begin{aligned} x_n &= \tfrac{(a+1)\cdots(a-k)(a-k+1)\cdots(a-k+n+k)}{(b+1)\cdots(b-k)(b-k+1)\cdots(b-k+n+k)} = \tfrac{(a+1)\cdots(a-k)}{(b+1)\cdots(b-k)}\,\tfrac{(a'+1)\cdots(a'+n-|k|)}{(b'+1)\cdots(b'+n-|k|)} \\ &= \tfrac{(a+1)\cdots(a-k)}{(b+1)\cdots(b-k)}\,x'_{n-|k|}, \end{aligned} \tag{14.18}$$

όπου

$$x'_n=\tfrac{(a'+1)\cdots(a'+n)}{(b'+1)\cdots(b'+n)}.$$

Δηλαδή, η ακολουθία (x'_n) είναι η (x_n) με τον a' στη θέση του a και τον b' στη θέση του b.
Επειδή $a'>b'\geq 0$, έχουμε $x'_n\to+\infty$ από την πρώτη περίπτωση. Άρα $x'_{n-|k|}\to+\infty$, οπότε από την (14.18) συνεπάγεται $x_n\to\frac{(a+1)\cdots(a-k)}{(b+1)\cdots(b-k)}(+\infty)=+\infty$ ή $-\infty$.
Αν $a<b$, τότε γράφουμε

$$x_n=\tfrac{1}{y_n},$$

όπου

$$y_n=\tfrac{(b+1)(b+2)\cdots(b+n)}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}.$$

Δηλαδή, η (y_n) είναι η (x_n) με τον a στη θέση του b και τον b στη θέση του a. Από την προηγούμενη περίπτωση έχουμε ότι $y_n\to+\infty$ ή $y_n\to-\infty$ και, επομένως, $x_n\to 0$.
[γ] Έστω $c<0$ και έστω ότι ισχύει $n(\frac{x_{n+1}}{x_n}-1)\leq c$ για $n\geq n_0$. Συνεπάγεται $x_{n+1}\leq x_n\,\frac{c+n}{n}$ για $n\geq n_0$ και, πολλαπλασιάζοντας αυτές τις ανισότητες για $n=n_0,\dots,k-1$, παίρνουμε

$$x_k\leq x_{n_0}\,\tfrac{(c+n_0)(c+n_0+1)\cdots(c+k-1)}{n_0(n_0+1)\cdots(k-1)}\qquad \text{για } k\geq n_0+1.$$

Αυτήν την ανισότητα τήν ξαναγράφουμε στη μορφή

$$0<x_k\leq x_{n_0}\,\tfrac{(a+1)(a+2)\cdots(a+k-n_0)}{(b+1)(b+2)\cdots(b+k-n_0)}\qquad \text{για } k\geq n_0+1,$$

όπου $a=c+n_0-1$ και $b=n_0-1$. Επειδή $a<b$, από το [β] έχουμε $\frac{(a+1)(a+2)\cdots(a+k-n_0)}{(b+1)(b+2)\cdots(b+k-n_0)}\to 0$ και, επομένως, $x_k\to 0$.
Τώρα, έστω $c>0$ και έστω ότι ισχύει $n(\frac{x_{n+1}}{x_n}-1)\geq c$ για $n\geq n_0$. Όπως και στην περίπτωση $c<0$, αποδεικνύουμε ότι

$$x_k\geq x_{n_0}\,\tfrac{(a+1)(a+2)\cdots(a+k-n_0)}{(b+1)(b+2)\cdots(b+k-n_0)}\qquad \text{για } k\geq n_0+1,$$

όπου $a=c+n_0-1$ και $b=n_0-1$. Επειδή $a>b$, από το [β] έχουμε $\frac{(a+1)(a+2)\cdots(a+k-n_0)}{(b+1)(b+2)\cdots(b+k-n_0)}\to+\infty$ (προσέξτε ότι όλοι οι όροι της τελευταίας ακολουθίας είναι >0 και άρα δεν μπορεί το όριο να είναι $-\infty$) και, επομένως, $x_k\to+\infty$.
Αν $d<0$ και αν $n\big(\frac{x_{n+1}}{x_n}-1\big)\to d$, θεωρούμε έναν c ώστε να είναι $d<c<0$ και έχουμε ότι ισχύει τελικά $n\big(\frac{x_{n+1}}{x_n}-1\big)\leq c$. Άρα $x_n\to 0$.
Αν $d>0$ και αν $n\big(\frac{x_{n+1}}{x_n}-1\big)\to d$, θεωρούμε έναν c ώστε να είναι $0<c<d$ και έχουμε ότι ισχύει τελικά $n\big(\frac{x_{n+1}}{x_n}-1\big)\geq c$. Άρα $x_n\to+\infty$.
Και τα τέσσερα αποτελέσματα είναι επεκτάσεις των αντίστοιχων αποτελεσμάτων της πρότασης 2.10. Ας δούμε, για παράδειγμα, το πρώτο.
Έστω $0<a<1$ και έστω ότι ισχύει τελικά $\frac{x_{n+1}}{x_n}\leq a$. Τότε ισχύει τελικά $n(\frac{x_{n+1}}{x_n}-1)\leq n(a-1)<-1$, οπότε $x_n\to 0$. Με τον ίδιο τρόπο εξετάζουμε και τα άλλα τρία αποτελέσματα.
Θεωρούμε, τώρα, την ακολουθία με τύπο $x_n=\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}$. Τότε

$$\tfrac{x_{n+1}}{x_n}=\tfrac{(2n+2)!4^n(n!)^2}{(2n)!4^{n+1}((n+1)!)^2}=\tfrac{(2n+1)(2n+2)}{4(n+1)^2}=\tfrac{2n+1}{2n+2}.$$

Άρα $n(\frac{x_{n+1}}{x_n}-1)=-\frac{n}{2n+2}\to-\frac{1}{2}$. Επειδή $-\frac{1}{2}<0$, συνεπάγεται $x_n\to 0$.
Η πρόταση 2.10 δεν ωφελεί, διότι $\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{2n+1}{2n+2}\to 1$.

Άσκηση 2.4.12. *Έστω $y\geq 0$ και $k\in\mathbb{N}$, $k\geq 2$. Ορίζουμε ακολουθία (x_n) με οποιονδήποτε $x_1>0$ και με τον αναδρομικό τύπο $x_{n+1}=\frac{k-1}{k}x_n+\frac{1}{k}\frac{y}{{x_n}^{k-1}}$ για κάθε n.*
Αποδείξτε ότι ισχύει $x_n>0$ για κάθε n.
Αποδείξτε, χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Bernoulli, ότι ισχύει ${x_n}^k\geq y$ για κάθε $n\geq 2$ και, κατόπιν, ότι ισχύει $x_{n+1}\leq x_n$ για κάθε $n\geq 2$.
Συμπεράνατε ότι η (x_n) συγκλίνει και ότι, αν $x=\lim_{n\to+\infty}x_n$, τότε $x^k=y$ και $x\geq 0$.

Λύση: Το ότι ισχύει $x_n>0$ για κάθε n αποδεικνύεται εύκολα με την αρχή της επαγωγής.
Τώρα, για $n\geq 2$ έχουμε (εξετάζοντας προσεκτικά ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις της ανισότητας του Bernoulli) ότι

$$ {x_n}^k=\big(\tfrac{k-1}{k}x_{n-1}+\tfrac{1}{k}\tfrac{y}{{x_{n-1}}^{k-1}}\big)^k={x_{n-1}}^k\big(1+\tfrac{1}{k}\tfrac{y-{x_{n-1}}^k}{{x_{n-1}}^k}\big)^k\geq {x_{n-1}}^k\big(1+\tfrac{y-{x_{n-1}}^k}{{x_{n-1}}^k}\big)=y. $$

Κατόπιν, από τον αναδρομικό τύπο βρίσκουμε ότι

$$ x_{n+1}=\tfrac{k-1}{k}x_n+\tfrac{1}{k}\tfrac{y}{{x_n}^{k-1}}\leq\tfrac{k-1}{k}x_n+\tfrac{1}{k}\tfrac{{x_n}^k}{{x_n}^{k-1}}=x_n $$

για $n\geq 2$.
Άρα η (x_n) είναι φθίνουσα από τον δεύτερο όρο της και πέρα και, επειδή είναι κάτω φραγμένη από τον 0, συνεπάγεται ότι έχει όριο ≥ 0.
Επομένως, αν $x=\lim_{n\to+\infty}x_n$, τότε $x\geq 0$.
Ξαναγράφουμε τον αναδρομικό τύπο στη μορφή

$$ x_{n+1}{x_n}^{k-1}=\tfrac{k-1}{k}{x_n}^k+\tfrac{1}{k}y $$

και, παίρνοντας όριο, βρίσκουμε $x^k=\frac{k-1}{k}x^k+\frac{1}{k}y$ και άρα $x^k=y$.

Άσκηση 2.4.15. *Θεωρούμε την ακολουθία με τύπο $x_n=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}$.*
Αποδείξτε ότι η ακολουθία $(n{x_n}^2)$ είναι αύξουσα και ότι η $\big((n+\frac{1}{2}){x_n}^2\big)$ είναι φθίνουσα. Αποδείξτε ότι αυτές οι δύο ακολουθίες συγκλίνουν στο ίδιο όριο. Τί συμπεραίνετε για την ακολουθία (x_n);

Λύση: Για να αποδείξουμε ότι η $(n{x_n}^2)$ είναι αύξουσα γράφουμε διαδοχικά τις ισοδύναμες ανισότητες

$$ n{x_n}^2\leq(n+1){x_{n+1}}^2 $$
$$ n\tfrac{1^2\cdot3^2\cdot5^2\cdots(2n-1)^2}{2^2\cdot4^2\cdot6^2\cdots(2n)^2}\leq(n+1)\tfrac{1^2\cdot3^2\cdot5^2\cdots(2n-1)^2(2n+1)^2}{2^2\cdot4^2\cdot6^2\cdots(2n)^2(2n+2)^2} $$
$$ n\leq(n+1)\tfrac{(2n+1)^2}{(2n+2)^2}=\tfrac{(2n+1)^2}{4(n+1)} $$
$$ 4n^2+4n\leq 4n^2+4n+1. $$

Η τελευταία ανισότητα είναι, προφανώς, σωστή, οπότε η $(n{x_n}^2)$ είναι αύξουσα.
Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι η $\big((n+\frac{1}{2}){x_n}^2\big)$ είναι φθίνουσα. Κάντε το εσείς.
Τώρα, παρατηρούμε ότι ισχύει $n{x_n}^2\leq(n+\frac{1}{2}){x_n}^2$ για κάθε n.
Άρα, βάσει της πρότασης με τα εγκιβωτισμένα διαστήματα, οι δύο ακολουθίες συγκλίνουν και απομένει να αποδείξουμε ότι έχουν το ίδιο όριο.
Σκέψεις.
Αν ακολουθήσουμε το πλαίσιο της πρότασης με τα εγκιβωτισμένα διαστήματα, τότε στοχεύουμε στο να αποδείξουμε ότι τα μήκη των συγκεκριμένων εγκιβωτισμένων διαστημάτων τείνουν στον 0, δηλαδή ότι $(n+\frac{1}{2}){x_n}^2-n{x_n}^2\to 0$ ή, ισοδύναμα, $\frac{1}{2}{x_n}^2\to 0$. Αυτό, όμως, φαίνεται να ζορίζει λιγάκι, οπότε κοιτάμε μπας και σκεφτούμε κάτι πιο δημιουργικό.
Γενικά, αν έχουμε δύο συγκλίνουσες ακολουθίες (y_n) και (z_n) με αντίστοιχα όρια y και z (αριθμούς) και θέλουμε να αποδείξουμε ότι $y=z$, μπορούμε να αποδείξουμε ότι $y_n-z_n\to 0$, διότι

τότε θα συμπεράνουμε (από την μοναδικότητα του ορίου) ότι $y - z = 0$ και, επομένως, $y = z$. Αυτήν ακριβώς την ιδέα χρησιμοποιεί η πρόταση με τα εγκιβωτισμένα διαστήματα. Όμως, υπάρχει και μια δεύτερη ιδέα. Μπορούμε να αποδείξουμε ότι $\frac{y_n}{z_n} \to 1$. Τότε θα συμπεράνουμε (πάλι από την μοναδικότητα του ορίου) ότι $\frac{y}{z} = 1$ και, επομένως, $y = z$. (Φυσικά θα πρέπει να ισχύει $z_n \neq 0$ για κάθε n και $z \neq 0$.)
Τέλος σκέψεων.

Συνεχίζουμε με τη λύση.
Έστω

$$n{x_n}^2 \to x' \qquad \text{και} \qquad (n + \tfrac{1}{2}){x_n}^2 \to x''.$$

Τότε, επειδή $x' \neq 0$ (διότι η $(n{x_n}^2)$ είναι αύξουσα και ο πρώτος όρος της είναι > 0), έχουμε

$$\tfrac{(n+(1/2)){x_n}^2}{n{x_n}^2} \to \tfrac{x''}{x'}.$$

Αλλά

$$\tfrac{(n+(1/2)){x_n}^2}{n{x_n}^2} = \tfrac{n+(1/2)}{n} \to 1,$$

οπότε $\frac{x''}{x'} = 1$ και άρα $x' = x''$.
Άρα οι δύο ακολουθίες συγκλίνουν στο ίδιο όριο $x = x' = x''$.
Τέλος, από την $n{x_n}^2 \to x$ συνεπάγεται ${x_n}^2 = \frac{1}{n} n{x_n}^2 \to 0x = 0$ και, επομένως, $x_n \to 0$.

Σχόλιο. Αν θέλουμε να αποδείξουμε *κατ' ευθείαν* ότι η αρχική ακολουθία (x_n) έχει όριο (και μάλιστα τον 0) θα δυσκολευτούμε αρκετά. Ο τύπος του x_n αποτελεί απροσδιόριστη μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$ και ούτε απλοποιείται εύκολα. Μπορούμε να δοκιμάσουμε, όπως σε ανάλογα παραδείγματα και ασκήσεις, το κριτήριο λόγου. Κάνοντας απλοποιήσεις βρίσκουμε $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2n+1}{2n+2} \to 1$. Όμως, το κριτήριο λόγου δεν έχει κανένα συμπέρασμα για την περίπτωση $\frac{x_{n+1}}{x_n} \to 1$.
Ένας άλλος τρόπος είναι να γράψουμε

$$x_n = \tfrac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)} = \tfrac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdots(2n-1)\cdot(2n)}{(2\cdot4\cdot6\cdots(2n))^2} = \tfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2} = \tfrac{(2n)!}{4^n (n!)^2}.$$

Έτσι βλέπουμε ότι η (x_n) είναι η ίδια με την ακολουθία στο τέλος της άσκησης 2.4.11, όπου αποδείξαμε ότι $x_n \to 0$.

Άσκηση 2.4.16. [α] *Έστω συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ αύξουσα στο $[a, b]$. Αν $f(a) > a$ και $f(b) < b$, αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε $f(\xi) = \xi$.*
[β] *Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ και έστω ότι για κάθε $x \in I$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $f(x') \leq f(x) \leq f(x'')$ για κάθε $x', x'' \in (x - \delta, x + \delta) \cap I$ με $x' \leq x \leq x''$. Αποδείξτε ότι η f είναι αύξουσα στο I.*

Λύση: [α] Έστω (για άτοπο) ότι ισχύει $f(x) \neq x$ για κάθε $x \in [a, b]$.
Τότε είναι $f(\frac{a+b}{2}) \neq \frac{a+b}{2}$. Αν $f(\frac{a+b}{2}) < \frac{a+b}{2}$, ορίζουμε $a_1 = a$ και $b_1 = \frac{a+b}{2}$. Αν $f(\frac{a+b}{2}) > \frac{a+b}{2}$, ορίζουμε $a_1 = \frac{a+b}{2}$ και $b_1 = b$. Προφανώς, σε κάθε περίπτωση είναι $f(a_1) > a_1$ και $f(b_1) < b_1$.
Επαναλαμβάνοντας αυτήν τη διαδικασία στο διάστημα $[a_1, b_1]$, βρίσκουμε ένα διάστημα $[a_2, b_2]$ μέσα στο $[a_1, b_1]$ έτσι ώστε $f(a_2) > a_2$ και $f(b_2) < b_2$.
Συνεχίζοντας επ' άπειρον, δημιουργούμε ακολουθία διαστημάτων $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, $\ldots$ ώστε να ισχύει

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n], \quad f(a_n) > a_n, \quad f(b_n) < b_n \quad \text{και} \quad b_n - a_n = \tfrac{b-a}{2^n} \qquad \text{για κάθε } n.$$

Συνεπάγεται $b_n - a_n \to 0$, οπότε υπάρχει ξ ώστε να ισχύει $a_n \leq \xi \leq b_n$ για κάθε n και $a_n \to \xi$, $b_n \to \xi$.
Τότε ισχύει $a_n < f(a_n) \leq f(\xi)$ για κάθε n και άρα $\xi \leq f(\xi)$. Επίσης, ισχύει $f(\xi) \leq f(b_n) < b_n$ για κάθε n και άρα $f(\xi) \leq \xi$.
Από τις $\xi \leq f(\xi)$ και $f(\xi) \leq \xi$ συνεπάγεται $f(\xi) = \xi$ και καταλήγουμε σε άτοπο.
[β] Έστω (για άτοπο) ότι η f δεν είναι αύξουσα στο I, οπότε υπάρχουν $a, b \in I$ ώστε $a < b$ και

$f(a) > f(b)$.
Συνεπάγεται ότι είτε $f(a) > f(\frac{a+b}{2})$ είτε $f(\frac{a+b}{2}) > f(b)$. Αν $f(a) > f(\frac{a+b}{2})$, ορίζουμε $a_1 = a$ και $b_1 = \frac{a+b}{2}$. Αν $f(\frac{a+b}{2}) > f(b)$, ορίζουμε $a_1 = \frac{a+b}{2}$ και $b_1 = b$. Σε κάθε περίπτωση είναι $f(a_1) > f(b_1)$.
Επαναλαμβάνοντας (όπως στο [α]) αυτήν τη διαδικασία επ' άπειρον, δημιουργούμε ακολουθία διαστημάτων $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots$ ώστε να ισχύει

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n], \quad f(a_n) > f(b_n) \quad \text{και} \quad b_n - a_n = \tfrac{b-a}{2^n} \qquad \text{για κάθε } n.$$

Συνεπάγεται ότι υπάρχει ξ ώστε να ισχύει $a_n \leq \xi \leq b_n$ για κάθε n και $a_n \to \xi$, $b_n \to \xi$.
Τώρα, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $f(x') \leq f(\xi) \leq f(x'')$ για κάθε $x', x'' \in (\xi - \delta, \xi + \delta) \cap I$ με $x' \leq \xi \leq x''$.
Επειδή $a_n \to \xi$ και $b_n \to \xi$, τελικά ισχύει $a_n, b_n \in (\xi - \delta, \xi + \delta) \cap I$ με $a_n \leq \xi \leq b_n$ και άρα τελικά ισχύει $f(a_n) \leq f(\xi) \leq f(b_n)$. Καταλήγουμε σε άτοπο αφού ισχύει $f(a_n) > f(b_n)$ για κάθε n.

Άσκηση 2.4.20. *Γνωρίζουμε ότι για κάθε x υπάρχει αύξουσα ακολουθία ρητών (r_n) ώστε $r_n \to x$. Για παράδειγμα, μια τέτοια ακολουθία είναι η ακολουθία των p-αδικών προσεγγίσεων του x ή η ακολουθία που αναφέρεται στην άσκηση 2.3.32.*

Θεωρήστε ότι δεν έχουν οριστεί οι δυνάμεις με άρρητο εκθέτη.

Έστω $y > 1$ και ο x είναι άρρητος. Θεωρήστε οποιαδήποτε αύξουσα ακολουθία ρητών (r_n) με $r_n \to x$ και αποδείξτε ότι η ακολουθία (y^{r_n}) συγκλίνει. Αποδείξτε ότι για κάθε (όχι αναγκαστικά αύξουσα) ακολουθία ρητών (r_n) με $r_n \to x$ το όριο της (y^{r_n}) υπάρχει και ότι το όριο αυτό είναι ανεξάρτητο της ακολουθίας ρητών (r_n) με $r_n \to x$. Ορίσατε $y^x = \lim_{n\to+\infty} y^{r_n}$ με οποιαδήποτε ακολουθία ρητών (r_n) με $r_n \to x$.

Έστω $y > 1$ και ο x είναι ρητός. Αποδείξτε ότι $y^x = \lim_{n\to+\infty} y^{r_n}$ για κάθε ακολουθία ρητών (r_n) με $r_n \to x$.

Έστω $0 \leq y \leq 1$ και ο x είναι άρρητος. Ορίσατε την δύναμη y^x βάσει της προηγούμενης περίπτωσης (όπως στον ορισμό 1.9).

Αποδείξτε την πρόταση 1.8 βάσει των προηγουμένων.

Λύση: Στα παρακάτω θα θεωρήσουμε γνωστές όλες τις ιδιότητες των δυνάμεων με ρητούς εκθέτες.

Το πρώτο ερώτημα. Έστω $y > 1$, άρρητος x και αύξουσα ακολουθία ρητών (r_n) με $r_n \to x$. Τότε η ακολουθία (y^{r_n}) είναι αύξουσα. Επίσης, είναι και άνω φραγμένη, διότι, αν θεωρήσουμε τον ακέραιο $[x] + 1$, τότε ισχύει $r_n < x < [x] + 1$ και άρα $y^{r_n} < y^{[x]+1}$ για κάθε n. Άρα η (y^{r_n}) συγκλίνει.
Παίρνουμε, τώρα, μια οποιαδήποτε αύξουσα ακολουθία ρητών (r'_n) με $r'_n \to x$. Είδαμε ότι η $(y^{r'_n})$ συγκλίνει και θέτουμε $z = \lim_{n\to+\infty} y^{r'_n}$.
Τώρα, έστω και δεύτερη (όχι αναγκαστικά αύξουσα) ακολουθία ρητών (r_n) με $r_n \to x$.
Έστω τυχών $\epsilon > 0$. Επειδή $y^{1/m} \to 1$ και $y^{-1/m} \to 1$, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε

$$1 - \epsilon < y^{-1/m} < 1 < y^{1/m} < 1 + \epsilon.$$

Επειδή $r_n \to x$ και $r'_n \to x$, συνεπάγεται $r_n - r'_n \to 0$ και άρα ισχύει τελικά $-\frac{1}{m} < r_n - r'_n < \frac{1}{m}$.
Επομένως, ισχύει τελικά

$$1 - \epsilon < \tfrac{y^{r_n}}{y^{r'_n}} < 1 + \epsilon$$

και συνεπώς έχουμε $\frac{y^{r_n}}{y^{r'_n}} \to 1$.
Επειδή $y^{r'_n} \to z$, συνεπάγεται $y^{r_n} \to z$.
Επομένως, υπάρχει *ένας* αριθμός (ο z) προς τον οποίο συγκλίνει η (y^{r_n}) για κάθε ακολουθία ρητών (r_n) με $r_n \to x$. Αυτόν τον αριθμό τον συμβολίζουμε y^x.
Έτσι, εξ ορισμού ισχύει $y^{r_n} \to y^x$ για οποιαδήποτε ακολουθία ρητών (r_n) με $r_n \to x$.

Το δεύτερο ερώτημα. Έστω $y > 1$, ρητός x και ακολουθία ρητών (r_n) με $r_n \to x$.

Θεωρούμε την σταθερή ακολουθία ρητών $r'_n = x$ και έχουμε ότι $r_n - r'_n \to 0$. Όμως, μόλις πριν αποδείξαμε ότι $\frac{y^{r_n}}{y^{r'_n}} \to 1$. Τώρα, επειδή $y^{r'_n} = y^x \to y^x$, συνεπάγεται $y^{r_n} \to y^x$.

Μέχρι στιγμής έχουμε ορίσει την δύναμη y^x για κάθε $y > 1$ και κάθε άρρητο x και έχουμε αποδείξει ότι ισχύει $y^{r_n} \to y^x$ για κάθε $y > 1$ και κάθε x (είτε ρητό είτε άρρητο) και κάθε ακολουθία ρητών (y_n) με $y_n \to x$.

Το τρίτο ερώτημα. Αν $y = 1$, ορίζουμε $y^x = 1$ για κάθε άρρητο x. Επίσης, αν $y = 0$, ορίζουμε $y^x = 0$ για κάθε άρρητο $x > 0$.
Αν $0 < y < 1$, τότε ορίζουμε $y^x = \frac{1}{(1/y)^x}$ για κάθε άρρητο x.

Τώρα έχουμε πια ορίσει την δύναμη y^x για κάθε $y \geq 0$ και κάθε άρρητο x (με τον περιορισμό $x > 0$ αν $y = 0$) και μπορούμε να αποδείξουμε ότι ισχύει $y^{r_n} \to y^x$ για κάθε $y \geq 0$ και κάθε x (είτε ρητό είτε άρρητο) και κάθε ακολουθία ρητών (y_n) με $y_n \to x$.
Το τελευταίο είναι προφανές αν $y = 0$ ή $y = 1$, διότι τότε η ακολουθία (y^{r_n}) είναι σταθερή 0 ή 1, αντιστοίχως. Αν $0 < y < 1$, τότε

$$y^{r_n} = \frac{1}{(1/y)^{r_n}} \to \frac{1}{(1/y)^x} = y^x,$$

αφού είναι $\frac{1}{y} > 1$ και άρα $(\frac{1}{y})^{r_n} \to (\frac{1}{y})^x$.
Το τέταρτο ερώτημα. Έστω $y, y_1, y_2 > 0$ και x, x_1, x_2 (είτε ρητοί είτε άρρητοι).
Θεωρούμε ακολουθία ρητών (r_n) με $r_n \to x$. Τότε ισχύει ${y_1}^{r_n}{y_2}^{r_n} = (y_1y_2)^{r_n}$ για κάθε n. Επειδή ${y_1}^{r_n} \to {y_1}^x$, ${y_2}^{r_n} \to {y_2}^x$ και $(y_1y_2)^{r_n} \to (y_1y_2)^x$, συνεπάγεται ${y_1}^x{y_2}^x = (y_1y_2)^x$.
Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύονται οι $y^{x_1}y^{x_2} = y^{x_1+x_2}$, $(y^{x_1})^{x_2} = y^{x_1x_2}$. Ο αναγνώστης μπορεί να τις αποδείξει (η τελευταία είναι λίγο πιο δύσκολη).
Τώρα, έστω $x > 0$ και $y > 1$. Θεωρούμε οποιαδήποτε αύξουσα ακολουθία ρητών (r_n) με $r_n \to x$, οπότε $y^{r_n} \to y^x$. Επειδή $x > 0$, ισχύει τελικά $r_n > 0$ και, επειδή $y > 1$, ισχύει τελικά $y^{r_n} > 1$. Τέλος, επειδή η (y^{r_n}) είναι αύξουσα, συνεπάγεται ότι $y^x > 1$.
Από το ότι ισχύει $y^x > 1$ για κάθε $x > 0$ και κάθε $y > 1$ συνεπάγονται εύκολα με αλγεβρικό τρόπο όλες οι άλλες ιδιότητες της πρότασης 1.8.

Σχόλιο. Στην απόδειξη χρησιμοποιήσαμε ότι $y^{1/m} \to 1$ όταν $y > 1$. Πρέπει να βεβαιωθούμε ότι για να αποδειχθεί αυτό δεν χρησιμοποιούνται δυνάμεις με άρρητο εκθέτη. Ας αναλάβει ο αναγνώστης να το ελέγξει (και για παράδειγμα να δει πώς χρησιμοποιείται η ανισότητα του Bernoulli στη σχετική απόδειξη).

Άσκηση 2.4.21. [α] *Έστω $y > 0$.*
Αν οι r_1, r_2 είναι ρητοί με $r_1 < r_2$ και $r_1, r_2 \neq 0$, αποδείξτε ότι $\frac{y^{r_1}-1}{r_1} \leq \frac{y^{r_2}-1}{r_2}$.
Αν $x_1 < x_2$ και $x_1, x_2 \neq 0$, αποδείξτε ότι $\frac{y^{x_1}-1}{x_1} \leq \frac{y^{x_2}-1}{x_2}$.
[β] *Έστω $y > 0$.*
Αποδείξτε ότι η ακολουθία $\big(n(\sqrt[n]{y} - 1)\big)$ είναι φθίνουσα και ότι συγκλίνει.
Θεωρήστε ότι δεν έχουν οριστεί οι λογάριθμοι θετικών αριθμών.
Ορίσατε $\log y = \lim_{n\to+\infty} n(\sqrt[n]{y} - 1)$.
Αποδείξτε ότι ισχύει $\log y = \lim_{n\to+\infty} \frac{y^{x_n}-1}{x_n}$ *για κάθε ακολουθία (x_n) με $x_n \to 0$ και $x_n \neq 0$ για κάθε n.*
Αποδείξτε την πρόταση 2.13 (εκτός του [γ]) βάσει των προηγουμένων.

Λύση: [α] Πρώτα υποθέτουμε ότι $0 < r_1 < r_2$.
Τότε η ανισότητα $\frac{y^{r_1}-1}{r_1} \leq \frac{y^{r_2}-1}{r_2}$ είναι ισοδύναμη με την $\frac{r_2}{r_1}(y^{r_1} - 1) \leq y^{r_2} - 1$ και, αν θέσουμε $z = y^{r_1} > 0$, τότε έχουμε την ισοδύναμη ανισότητα $\frac{r_2}{r_1}(z - 1) \leq z^{r_2/r_1} - 1$ και, αν θέσουμε $r = \frac{r_2}{r_1} > 1$, παίρνουμε την ισοδύναμη ανισότητα $r(z-1) \leq z^r - 1$. Τέλος, αν γράψουμε $r = \frac{m}{n}$ με $m, n \in \mathbb{N}$ και $m > n$ και θέσουμε $x = z^{1/n} > 0$, τότε καταλήγουμε στην ισοδύναμη ανισότητα

$$m(x^n - 1) \leq n(x^m - 1).$$

Έχουμε, τώρα, τις εξής διαδοχικές ισοδύναμες ανισότητες:

$$n(x-1)(x^{m-1}+\cdots+x+1)-m(x-1)(x^{n-1}+\cdots+x+1)\geq 0$$

$$(x-1)\big(nx^{m-1}+\cdots+nx^n-(m-n)x^{n-1}-\cdots-(m-n)x-(m-n)\big)\geq 0$$

$$(x-1)\big(\tfrac{x^{m-1}+\cdots+x^n}{m-n}-\tfrac{x^{n-1}+\cdots+x+1}{n}\big)\geq 0. \tag{14.19}$$

Τώρα διακρίνουμε περιπτώσεις.
Αν $x\geq 1$, τότε

$$\tfrac{x^{m-1}+\cdots+x^n}{m-n}\geq\tfrac{(m-n)x^n}{m-n}=x^n\geq x^{n-1}=\tfrac{nx^{n-1}}{n}\geq\tfrac{x^{n-1}+\cdots+x+1}{n}$$

ενώ, αν $0<x\leq 1$, τότε

$$\tfrac{x^{m-1}+\cdots+x^n}{m-n}\leq\tfrac{(m-n)x^n}{m-n}=x^n\leq x^{n-1}=\tfrac{nx^{n-1}}{n}\leq\tfrac{x^{n-1}+\cdots+x+1}{n}.$$

Σε κάθε περίπτωση η (14.19) είναι σωστή, οπότε και η αρχική ανισότητα $\frac{y^{r_1}-1}{r_1}\leq\frac{y^{r_2}-1}{r_2}$ είναι σωστή.
Τώρα, έστω ότι $r_1<r_2<0$.
Ορίζουμε $s_1=-r_1$ και $s_2=-r_2$, οπότε είναι $0<s_2<s_1$ και εφαρμόζουμε την ανισότητα που μόλις αποδείξαμε με τους s_1,s_2 και τον $\frac{1}{y}>0$ και βρίσκουμε ότι $\frac{y^{-s_2}-1}{s_2}\leq\frac{y^{-s_1}-1}{s_1}$ ή, ισοδύναμα, $\frac{y^{r_2}-1}{-r_2}\leq\frac{y^{r_1}-1}{-r_1}$ ή, ισοδύναμα, $\frac{y^{r_1}-1}{r_1}\leq\frac{y^{r_2}-1}{r_2}$.
Τέλος, έστω $r_1<0<r_2$.
Ορίζουμε $s_1=-r_1>0$ και τότε η $\frac{y^{r_1}-1}{r_1}\leq\frac{y^{r_2}-1}{r_2}$ γράφεται ισοδύναμα $\frac{y^{-s_1}-1}{-s_1}\leq\frac{y^{r_2}-1}{r_2}$ ή, ισοδύναμα, $\frac{y^{s_1}-1}{s_1y^{s_1}}\leq\frac{y^{r_2}-1}{r_2}$ ή, ισοδύναμα, $\frac{y^{s_1}-1}{s_1}\leq\frac{y^{r_2+s_1}-y^{s_1}}{r_2}$ ή (μετά από λίγες πράξεις), ισοδύναμα, $\frac{y^{s_1}-1}{s_1}\leq\frac{y^{r_2+s_1}-1}{r_2+s_1}$. Η τελευταία ανισότητα είναι σωστή αφού είναι $0<s_1<r_2+s_1$.
Τώρα, έστω $y>0$ και $x_1<x_2$ και $x_1,x_2\neq 0$. Θεωρούμε δύο ακολουθίες ρητών $(r_{n,1})$ και $(r_{n,2})$ ώστε $r_{n,1}\to x_1$ και $r_{n,2}\to x_2$ και ώστε να ισχύει $r_{n,1}<r_{n,2}$ και $r_{n,1},r_{n,2}\neq 0$ για κάθε n.
Τότε ισχύει $\frac{y^{r_{n,1}}-1}{r_{n,1}}\leq\frac{y^{r_{n,2}}-1}{r_{n,2}}$ για κάθε n, οπότε παίρνοντας όριο όταν $n\to+\infty$ βρίσκουμε την ανισότητα $\frac{y^{x_1}-1}{x_1}\leq\frac{y^{x_2}-1}{x_2}$.
Σχόλιο. Το ότι ισχύει $\frac{y^{x_1}-1}{x_1}\leq\frac{y^{x_2}-1}{x_2}$ όταν $x_1<x_2$ και $x_1,x_2\neq 0$ σημαίνει ότι η συνάρτηση $\frac{y^x-1}{x}$ είναι αύξουσα στο πεδίο ορισμού της $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. Συνήθως, κάτι τέτοιο αποδεικνύεται σχετικά εύκολα με χρήση παραγώγων, όπως θα δούμε στα επόμενα κεφάλαια. Εδώ δεν επιτρέπεται να χρησιμοποιήσουμε παραγώγους για δύο λόγους. Αφενός δεν έχουμε μιλήσει ακόμη για παραγώγους. Αφετέρου ο σκοπός της άσκησης αυτής είναι να εισαγάγει την έννοια του λογαρίθμου και, αν θελήσουμε να χρησιμοποιήσουμε την παράγωγο της συνάρτησης $\frac{y^x-1}{x}$, θα χρειαστούμε τον $\log y$.
Τέλος, δεν βλάπτει να μπορούμε να αποδεικνύουμε στοιχειώδεις αλγεβρικές ανισότητες όπως η $\frac{y^{x_1}-1}{x_1}\leq\frac{y^{x_2}-1}{x_2}$ με στοιχειώδεις αλγεβρικούς τρόπους. Έτσι μαθαίνουμε να αναπτύσσουμε τεχνικές όπως, για παράδειγμα, την αναγωγή σε όλο και απλούστερες ανισότητες.
[β] *Το πρώτο ερώτημα.* Το ότι η ακολουθία $\big(n(\sqrt[n]{y}-1)\big)$ είναι φθίνουσα σημαίνει ότι ισχύει

$$\tfrac{y^{1/(n+1)}-1}{1/(n+1)}\leq\tfrac{y^{1/n}-1}{1/n}\qquad\text{για κάθε } n.$$

Αυτό, όμως, είναι άμεση συνέπεια των αποτελεσμάτων του [α].
Αν $y=1$, τότε η $\big(n(\sqrt[n]{y}-1)\big)$ είναι σταθερή 0 και άρα συγκλίνει στον 0.
Αν $y>1$, τότε η $\big(n(\sqrt[n]{y}-1)\big)$ είναι κάτω φραγμένη από τον 0 και, επειδή είναι φθίνουσα, συγκλίνει.
Τέλος, έστω $0<y<1$. Τότε είναι

$$\tfrac{y^{1/n}-1}{1/n}=-\tfrac{(\frac{1}{y})^{1/n}-1}{1/n}\,y^{1/n}$$

και, επομένως, η $\big(n(\sqrt[n]{y}-1)\big)$ συγκλίνει, διότι η $\big(n(\sqrt[n]{1/y}-1)\big)$ συγκλίνει (αφού $\frac{1}{y}>1$) και διότι $y^{1/n}\to 1$.

Το δεύτερο ερώτημα. Αφού ορίσουμε $\log y=\lim_{n\to+\infty} n(\sqrt[n]{y}-1)$ για κάθε $y>0$, θεωρούμε οποιαδήποτε ακολουθία (x_n) με $x_n\to 0$ και $x_n\neq 0$ για κάθε n.

Εξ ορισμού ισχύει $\frac{y^{1/m}-1}{1/m}\to\log y$. Επίσης, ισχύει $\frac{y^{-1/m}-1}{-1/m}\to\log y$. Πράγματι,

$$\frac{y^{-1/m}-1}{-1/m}=\frac{y^{1/m}-1}{1/m}\,\frac{1}{y^{1/m}}\to(\log y)1=\log y.$$

Τώρα, έστω τυχών $\epsilon>0$. Τότε υπάρχει $m\in\mathbb{N}$ ώστε

$$\log y-\epsilon<\frac{y^{-1/m}-1}{-1/m}\leq\frac{y^{1/m}-1}{1/m}<\log y+\epsilon.$$

Επειδή $x_n\to 0$, συνεπάγεται ότι ισχύει τελικά $-\frac{1}{m}<x_n<\frac{1}{m}$ και άρα ισχύει τελικά

$$\log y-\epsilon<\frac{y^{-1/m}-1}{-1/m}\leq\frac{y^{x_n}-1}{x_n}\leq\frac{y^{1/m}-1}{1/m}<\log y+\epsilon.$$

Άρα $\frac{y^{x_n}-1}{x_n}\to\log y$.

Το τρίτο ερώτημα. Τώρα, έστω $y_1,y_2>0$. Τότε

$$\begin{aligned}n(\sqrt[n]{y_1y_2}-1)&=n(\sqrt[n]{y_1y_2}-\sqrt[n]{y_2})+n(\sqrt[n]{y_2}-1)\\&=n(\sqrt[n]{y_1}-1)\sqrt[n]{y_2}+n(\sqrt[n]{y_2}-1)\to(\log y_1)1+\log y_2=\log y_1+\log y_2.\end{aligned}$$

Επειδή $n(\sqrt[n]{y_1y_2}-1)\to\log(y_1y_2)$, συνεπάγεται ότι $\log(y_1y_2)=\log y_1+\log y_2$ και έτσι αποδείχθηκε το [α] της πρότασης 2.13.

Έστω $y>0$ και $z\neq 0$. Θεωρούμε την ακολουθία με τύπο $x_n=\frac{z}{n}$ και εφαρμόζουμε το αποτέλεσμα του δεύτερου ερωτήματος:

$$n(\sqrt[n]{y^z}-1)=z\frac{y^{z/n}-1}{z/n}=z\frac{y^{x_n}-1}{x_n}\to z\log y.$$

Επειδή $n(\sqrt[n]{y^z}-1)\to\log(y^z)$, συνεπάγεται ότι $\log(y^z)=z\log y$.

Αν $y>0$ και $z=0$, τότε η $\log(y^z)=z\log y$ γράφεται $\log 1=0$ και αυτό είναι άμεση συνέπεια του ορισμού, αφού, όπως ήδη είπαμε, η ακολουθία $\big(n(\sqrt[n]{1}-1)\big)$ είναι σταθερή 0. Άρα αποδείχθηκε το [β] και το πρώτο μέρος του [δ] της πρότασης 2.13.

Τώρα θα αποδείξουμε ότι $\log e=1$. Αυτό είναι δύσκολο.

Γνωρίζουμε ότι $(1+\frac{1}{n})^n\to e$ και ότι ισχύει $(1+\frac{1}{n})^n<e$ για κάθε n.

Έστω τυχών $\epsilon>0$. Τότε θέτουμε για απλούστευση $\delta=\frac{\epsilon}{4}$ και έχουμε ότι ισχύει τελικά $(1-\delta)e<(1+\frac{1}{n})^n<e$ ή, ισοδύναμα, $\sqrt[n]{1-\delta}\,\sqrt[n]{e}<1+\frac{1}{n}<\sqrt[n]{e}$ ή (μετά από λίγες πράξεις), ισοδύναμα,

$$1<n(\sqrt[n]{e}-1)<\sqrt[n]{\tfrac{1}{1-\delta}}+n\Big(\sqrt[n]{\tfrac{1}{1-\delta}}-1\Big).\tag{14.20}$$

Τώρα, αν $\delta<\frac{1}{2}$, ισχύει $\frac{1}{1-\delta}<1+2\delta$, οπότε από την ανισότητα του Bernoulli συνεπάγεται

$$\sqrt[n]{\tfrac{1}{1-\delta}}<\sqrt[n]{1+2\delta}\leq 1+\tfrac{2\delta}{n}.$$

Επομένως, από την (14.20) συνεπάγεται ότι, αν $\delta<\frac{1}{2}$, τότε ισχύει τελικά

$$1<n(\sqrt[n]{e}-1)<1+\tfrac{2\delta}{n}+2\delta\leq 1+4\delta=1+\epsilon.$$

Η τελευταία σχέση ισχύει τελικά αν $0<\epsilon<2$ και, επομένως, ισχύει τελικά για κάθε $\epsilon>0$. Επομένως, $n(\sqrt[n]{e}-1)\to 1$ και άρα $\log e=1$.

Απομένει να αποδείξουμε το [ε] της πρότασης 2.13 και αρκεί (γιατί;) να αποδείξουμε ότι ισχύει $\log y>0$ αν $y>1$.

Έστω, λοιπόν, $y > 1$. Ορίζουμε $\delta = 1 - \frac{1}{y}$, οπότε $0 < \delta < 1$, και έχουμε ότι $y = \frac{1}{1-\delta}$. Τώρα θα δούμε ότι ισχύει η ανισότητα

$$n(\sqrt[n]{y} - 1) \geq \delta. \tag{14.21}$$

Η ανισότητα αυτή είναι ισοδύναμη με την $\sqrt[n]{y} \geq 1 + \frac{\delta}{n}$ κι αυτή με την $\frac{1}{1+\frac{\delta}{n}} \geq \sqrt[n]{1-\delta}$ κι αυτή με την $\left(\frac{1}{1+\frac{\delta}{n}}\right)^n \geq 1 - \delta$. Όμως, η τελευταία ανισότητα είναι άμεση συνέπεια της ανισότητας του Bernoulli:

$$\left(\frac{1}{1+\frac{\delta}{n}}\right)^n \geq \left(1 - \frac{\delta}{n}\right)^n \geq 1 - \delta.$$

Τώρα, παίρνοντας όριο στην (14.21), βρίσκουμε ότι $\log y \geq \delta > 0$.

Άσκηση 2.5.1. *Βρείτε πολύ απλή ακολουθία με τρεις υποακολουθίες, οι οποίες να έχουν όρια a, b, c, αντιστοίχως, όπου a, b, c είναι τρεις διαφορετικοί αριθμοί.*

Λύση: Η ακολουθία

$$a, b, c, a, b, c, a, b, c, a, b, c, \ \ldots \qquad \text{κ.τ.λ.}$$

Ερώτηση: Τί θα κάνετε αν τα a, b, c είναι στοιχεία του $\overline{\mathbb{R}}$ και όχι αναγκαστικά και τα τρία αριθμοί;

Άσκηση 2.5.2. *Έστω ότι η ακολουθία (x_n) έχει μια οποιαδήποτε από τις ιδιότητες: αύξουσα, άνω φραγμένη. Αποδείξτε ότι κάθε υποακολουθία (x_{n_k}) της (x_n) έχει την ίδια ιδιότητα.*

Λύση: Έστω ότι η (x_n) είναι αύξουσα. Δηλαδή, έστω ότι ισχύει $x_n \leq x_{n+1}$ για κάθε n. Φυσικά, αυτό συνεπάγεται ότι ισχύει $x_n \leq x_m$ για κάθε n, m με $n < m$.
Έστω, τώρα, μια υποακολουθία (x_{n_k}) της (x_n). Τότε για κάθε k έχουμε $n_k < n_{k+1}$ και, επομένως (με n_k και n_{k+1} στη θέση των n και m), $x_{n_k} \leq x_{n_{k+1}}$. Άρα η (x_{n_k}) είναι αύξουσα.
Έστω ότι η (x_n) είναι άνω φραγμένη. Τότε υπάρχει u ώστε να ισχύει $x_n \leq u$ για κάθε n.
Έστω οποιαδήποτε υποακολουθία (x_{n_k}) της (x_n). Τότε για κάθε k ισχύει (με n_k στη θέση του n) $x_{n_k} \leq u$. Άρα η (x_{n_k}) είναι άνω φραγμένη.

Άσκηση 2.5.3. *Εφαρμόστε τα αποτελέσματα των ασκήσεων 2.3.36 και 2.4.3 για να αποδείξετε το όριο $(1 + \frac{p}{qn})^n \to \sqrt[q]{e^p}$ για κάθε $p \in \mathbb{Z}$ και $q \in \mathbb{N}$ με $q \geq 2$. Δηλαδή, $(1 + \frac{r}{n})^n \to e^r$ για κάθε $r \in \mathbb{Q}$.*
Έστω άρρητος x. Έστω $\epsilon > 0$. Σύμφωνα με τον ορισμό της δύναμης e^x, αποδείξτε ότι υπάρχουν $r, s \in \mathbb{Q}$ ώστε $r < x < s$ και $e^x - \epsilon < e^r < e^s < e^x + \epsilon$. Τέλος, αποδείξτε ότι ισχύει τελικά $e^x - \epsilon < (1 + \frac{r}{n})^n < (1 + \frac{x}{n})^n < (1 + \frac{s}{n})^n < e^x + \epsilon$ και συμπεράνατε ότι $(1 + \frac{x}{n})^n \to e^x$.

Λύση: Έστω $p \in \mathbb{Z}$ και $q \in \mathbb{N}$ με $q \geq 2$.
Από το αποτέλεσμα της άσκησης 2.4.3 συνεπάγεται ότι $(1 + \frac{p}{n})^n \to e^p$.
Επειδή η $\left((1 + \frac{p}{qn})^{qn}\right)$ είναι υποακολουθία της $\left((1 + \frac{p}{n})^n\right)$, έχουμε ότι $(1 + \frac{p}{qn})^{qn} \to e^p$.
Τέλος, από το αποτέλεσμα της άσκησης 2.3.36 συνεπάγεται

$$(1 + \tfrac{p}{qn})^n = \sqrt[q]{(1 + \tfrac{p}{qn})^{qn}} \to \sqrt[q]{e^p} = e^{p/q}.$$

Άρα ισχύει $(1 + \frac{r}{n})^n \to e^r$ για κάθε $r \in \mathbb{Q}$.
Τώρα, έστω άρρητος x.
Από τον ορισμό της δύναμης e^x έχουμε $e^x = \sup\{e^r \,|\, r \in \mathbb{Q}, r < x\}$. Άρα για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $r \in \mathbb{Q}$ ώστε $r < x$ και $e^x - \epsilon < e^r$.
Από το αποτέλεσμα της άσκησης 1.4.6 έχουμε ότι $e^x = \inf\{e^s \,|\, s \in \mathbb{Q}, x < s\}$. Άρα για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $s \in \mathbb{Q}$ ώστε $x < s$ και $e^s < e^x + \epsilon$.
Άρα για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχουν $r, s \in \mathbb{Q}$ ώστε

$$r < x < s \quad \text{και} \quad e^x - \epsilon < e^r < e^s < e^x + \epsilon.$$

Επειδή, όπως αποδείξαμε προηγουμένως, είναι $(1 + \frac{r}{n})^n \to e^r$ και $(1 + \frac{s}{n})^n \to e^s$, συνεπάγεται ότι ισχύει τελικά $e^x - \epsilon < (1 + \frac{r}{n})^n$ και $(1 + \frac{s}{n})^n < e^x + \epsilon$. Επειδή $(1 + \frac{r}{n})^n < (1 + \frac{x}{n})^n < (1 + \frac{s}{n})^n$

(αφού $r < x < s$), έχουμε ότι ισχύει τελικά

$$e^x - \epsilon < \left(1 + \tfrac{r}{n}\right)^n < \left(1 + \tfrac{x}{n}\right)^n < \left(1 + \tfrac{s}{n}\right)^n < e^x + \epsilon.$$

Δηλαδή, για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει τελικά $e^x - \epsilon < (1 + \frac{x}{n})^n < e^x + \epsilon$, οπότε $(1 + \frac{x}{n})^n \to e^x$.

Άσκηση 2.5.4. *Αν η ακολουθία (x_n) έχει όριο και αν υπάρχει υποακολουθία (x_{n_k}) ώστε $x_{n_k} \to x \in \overline{\mathbb{R}}$, αποδείξτε ότι $x_n \to x$.*

Αν η ακολουθία (x_n) είναι μονότονη και αν υπάρχει υποακολουθία (x_{n_k}) ώστε $x_{n_k} \to x \in \overline{\mathbb{R}}$, αποδείξτε ότι $x_n \to x$.

Έστω $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ για κάθε n. Από το παράδειγμα 2.4.4 γνωρίζουμε ότι ισχύει $x_{2n} - x_n \geq \frac{1}{2}$ για κάθε n. Αποδείξτε με επαγωγή ότι ισχύει $x_{2^k} \geq \frac{k}{2} + 1$ για κάθε k και, βάσει των προηγουμένων, συμπεράνατε ότι $x_n \to +\infty$.

Λύση: Το πρώτο ερώτημα. Αν η (x_n) έχει όριο, τότε η (x_{n_k}) έχει το ίδιο όριο. Άρα, αν $x_{n_k} \to x \in \overline{\mathbb{R}}$, τότε το όριο της (x_n) είναι αναγκαστικά το x.

Το δεύτερο ερώτημα. Αν η (x_n) είναι μονότονη, τότε έχει όριο. Επομένως, η απάντηση ανάγεται στην απάντηση του πρώτου ερωτήματος.

Το τρίτο ερώτημα. Έχουμε $x_{2^1} = x_2 = 1 + \frac{1}{2}$, οπότε η $x_{2^k} \geq \frac{k}{2} + 1$ ισχύει για $k = 1$.
Έστω ότι ισχύει $x_{2^k} \geq \frac{k}{2} + 1$ για κάποιον k. Τότε

$$x_{2^{k+1}} = x_{2\cdot 2^k} \geq x_{2^k} + \tfrac{1}{2} \geq \tfrac{k}{2} + 1 + \tfrac{1}{2} = \tfrac{k+1}{2} + 1.$$

Άρα η $x_{2^k} \geq \frac{k}{2} + 1$ ισχύει για κάθε k.
Επομένως, η υποακολουθία (x_{2^k}) έχει όριο $+\infty$. Τώρα, η (x_n) είναι αύξουσα, οπότε, σύμφωνα με την απάντηση του δεύτερου ερωτήματος, $x_n \to +\infty$.

Άσκηση 2.5.6. [α] *Έστω $x_1 > 0$ και ότι ισχύει $x_{n+1} = 1 + \frac{2}{x_n}$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι οι υποακολουθίες (x_{2k}), (x_{2k-1}) είναι μονότονες και φραγμένες. Αποδείξτε ότι η ακολουθία (x_n) συγκλίνει και βρείτε το όριό της.*

Λύση: Είναι πολύ εύκολο να δούμε με την αρχή της επαγωγής ότι ισχύει $x_n > 0$ για κάθε n. Αυτό θα μας βοηθήσει στον χειρισμό των διαφόρων ανισοτήτων.
Επειδή δύο διαδοχικοί άρτιοι και δύο διαδοχικοί περιττοί διαφέρουν κατά 2, θα μελετήσουμε τη σχέση ανάμεσα στους όρους x_n και x_{n+2} της ακολουθίας.
Εφαρμόζοντας δύο φορές τον αναδρομικό τύπο, έχουμε

$$x_{n+2} = 1 + \frac{2}{x_{n+1}} = 1 + \frac{2}{1+(2/x_n)} = \frac{3x_n+2}{x_n+2} \qquad \text{για κάθε } n.$$

Θέλοντας να μελετήσουμε την σχέση διάταξης ανάμεσα στους x_n και x_{n+2}, γράφουμε τις διαδοχικές ισοδύναμες σχέσεις:

$$x_n \leq x_{n+2} \qquad x_n \leq \frac{3x_n+2}{x_n+2} \qquad {x_n}^2 - x_n - 2 \leq 0 \qquad (0 <)\, x_n \leq 2.$$

Επομένως, η $x_{n+2} \leq x_n$ ισοδυναμεί με $2 \leq x_n$.
Βλέπουμε, λοιπόν, ότι η σχέση διάταξης ανάμεσα στους x_n και x_{n+2} έχει να κάνει με την σχέση διάταξης του x_n με τον 2. Και τώρα έχουμε τις ακόλουθες ισοδύναμες σχέσεις:

$$x_{n+2} \leq 2 \qquad \frac{3x_n+2}{x_n+2} \leq 2 \qquad x_n \leq 2.$$

Επομένως, η $x_{n+2} \geq 2$ ισοδυναμεί με $x_n \geq 2$.
Βλέπουμε, λοιπόν, ότι, αν ο x_n είναι αριστερά του 2, τότε ο x_{n+2} είναι κι αυτός αριστερά του 2 αλλά και δεξιά του x_n. Επίσης, αν ο x_n είναι δεξιά του 2, τότε ο x_{n+2} είναι κι αυτός δεξιά του 2 αλλά και αριστερά του x_n.
Απο την άλλη μεριά, έχουμε και τις ισοδύναμες σχέσεις

$$x_{n+1} \leq 2 \qquad 1 + \frac{2}{x_n} \leq 2 \qquad x_n \geq 2.$$

Επομένως, η $x_{n+1} \geq 2$ ισοδυναμεί με $x_n \leq 2$.
Άρα, δύο διαδοχικοί όροι της ακολουθίας βρίσκονται σε διαφορετικές μεριές του 2.
Συνδυάζοντας τα προηγούμενα συμπεράσματα, έχουμε ότι, αν $(0 <) \, x_1 \leq 2$, τότε

$$0 < x_1 \leq x_3 \leq x_5 \leq \ldots \leq 2 \leq \ldots \leq x_6 \leq x_4 \leq x_2,$$

ενώ, αν $2 \leq x_1$, τότε

$$0 < x_2 \leq x_4 \leq x_6 \leq \ldots \leq 2 \leq \ldots \leq x_5 \leq x_3 \leq x_1.$$

Άρα σε κάθε περίπτωση οι υποακολουθίες (x_{2k}), (x_{2k-1}) είναι μονότονες και φραγμένες και, επομένως, συγκλίνουν.
Αν $x_{2k} \to x$, τότε από την σχέση $x_{2k+2} = \frac{3x_{2k}+2}{x_{2k}+2}$ βρίσκουμε $x = \frac{3x+2}{x+2}$, οπότε $x = 2$ ή $x = -1$. Η περίπτωση $x = -1$ αποκλείεται διότι όλοι οι όροι x_{2k} είναι > 0, οπότε $x = 2$. Άρα $x_{2k} \to 2$ και με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι $x_{2k-1} \to 2$. Άρα $x_n \to 2$.

Άσκηση 2.5.7. *Έστω $x_{2k} \to a$ και $x_{2k-1} \to b$, όπου τα $a, b \in \mathbb{R}$ είναι διαφορετικά (και άρα η (x_n) δεν έχει όριο). Υποθέτουμε ότι υπάρχει υποακολουθία (x_{n_k}) έτσι ώστε $x_{n_k} \to x$. Αποδείξτε ότι η (x_{n_k}) έχει άπειρους όρους κοινούς είτε με την (x_{2k}) είτε με την (x_{2k-1}). Μπορεί η (x_{n_k}) να έχει άπειρους όρους κοινούς με την (x_{2k}) και με την (x_{2k-1}); Αποδείξτε ότι $x = a$ ή $x = b$.*

Λύση: Ας υποθέσουμε ότι η (x_{n_k}) έχει άπειρους όρους κοινούς με την (x_{2k}). Τότε αυτοί οι κοινοί όροι των δύο ακολουθιών αποτελούν υποακολουθία της (x_{n_k}) αλλά και της (x_{2k}). Αυτή η συγκεκριμένη κοινή υποακολουθία έχει, επομένως, όριο x (ως υποακολουθία της πρώτης) και όριο a (ως υποακολουθία της δεύτερης). Λόγω μοναδικότητας του ορίου, συνεπάγεται $x = a$.
Με τα ίδια επιχειρήματα βλέπουμε ότι, αν η (x_{n_k}) έχει άπειρους όρους κοινούς με την (x_{2k-1}), τότε $x = b$.
Αλλά δεν μπορεί να ισχύει $x = a$ *και* $x = b$, διότι $a \neq b$.
Άρα δεν είναι δυνατό η (x_{n_k}) να έχει άπειρους όρους κοινούς με την (x_{2k}) και με την (x_{2k-1}).
Από την άλλη μεριά, η (x_{n_k}) *πρέπει* να έχει άπειρους όρους κοινούς είτε με την (x_{2k}) είτε με την (x_{2k-1}). Αυτό είναι προφανές, αφού οι (x_{2k}) και (x_{2k-1}) σχηματίζουν ολόκληρη την ακολουθία (x_n). Άρα, σύμφωνα με όσα είπαμε στην αρχή, πρέπει να ισχύει $x = a$ ή $x = b$.

Άσκηση 2.5.9. *Έστω οποιαδήποτε ακολουθία (x_n). Ένας όρος x_n χαρακτηρίζεται φωτισμένος αν για κάθε $m > n$ ισχύει $x_m < x_n$.*

Αν η (x_n) έχει άπειρους φωτισμένους όρους, αποδείξτε ότι οι όροι αυτοί σχηματίζουν γνησίως φθίνουσα υποακολουθία της (x_n). Αν η (x_n) δεν έχει άπειρους φωτισμένους όρους, αποδείξτε ότι η (x_n) έχει κάποια αύξουσα υποακολουθία.

Συμπεράνατε ότι κάθε ακολουθία έχει τουλάχιστον μία μονότονη υποακολουθία.

Δώστε δεύτερη απόδειξη του θεωρήματος των Bolzano - Weierstrass.

Λύση: Έστω ότι η (x_n) έχει άπειρους φωτισμένους όρους. Έστω x_{n_1} ο πρώτος φωτισμένος όρος (δηλαδή, με τον μικρότερο δείκτη n_1). Έστω x_{n_2} ο αμέσως επόμενος φωτισμένος όρος. Έστω x_{n_3} ο αμέσως επόμενος φωτισμένος όρος. Και ούτω καθ' εξής. Έτσι δημιουργείται μια υποακολουθία (x_{n_k}) η οποία αποτελείται από τους φωτισμένους όρους της (x_n).
Επειδή ο x_{n_k} είναι φωτισμένος όρος και επειδή $n_{k+1} > n_k$, συνεπάγεται $x_{n_k} > x_{n_{k+1}}$. Άρα η (x_{n_k}) είναι γνησίως φθίνουσα.
Τώρα, έστω ότι η (x_n) δεν έχει άπειρους φωτισμένους όρους. Τότε από έναν δείκτη, έστω n_1, και πέρα *όλοι* οι όροι της (x_n) είναι μη-φωτισμένοι.
Επειδή ο x_{n_1} είναι μη-φωτισμένος, υπάρχει $n_2 > n_1$ ώστε $x_{n_2} \geq x_{n_1}$. Ομοίως, επειδή ο x_{n_2} είναι μη-φωτισμένος, υπάρχει $n_3 > n_2$ ώστε $x_{n_3} \geq x_{n_2}$. Ομοίως, επειδή ο x_{n_3} είναι μη-φωτισμένος, υπάρχει $n_4 > n_3$ ώστε $x_{n_4} \geq x_{n_3}$. Και ούτω καθ' εξής. Έτσι δημιουργείται μια υποακολουθία (x_{n_k}) η οποία είναι αύξουσα.
Άρα σε κάθε περίπτωση η (x_n) έχει τουλάχιστον μία μονότονη υποακολουθία.
Αν υποθέσουμε ότι η (x_n) είναι φραγμένη, τότε κάθε υποακολουθία της είναι φραγμένη. (Δείτε

την άσκηση 2.5.2.) Άρα η (x_n) έχει τουλάχιστον μία μονότονη και φραγμένη υποακολουθία, η οποία αναγκαστικά συγκλίνει λόγω του θεωρήματος 2.1. Αυτό είναι το περιεχόμενο του θεωρήματος των Bolzano - Weierstrass.

Άσκηση 2.5.10. *Αποδείξτε ότι μια ακολουθία (x_n) έχει μια ιδιότητα για άπειρους n αν και μόνο αν υπάρχει υποακολουθία (x_{n_k}) η οποία έχει την ίδια ιδιότητα για κάθε k.*

Λύση: Έστω ότι άπειροι όροι της (x_n) έχουν την ιδιότητα Α.
Έστω x_{n_1} ο πρώτος όρος που έχει την ιδιότητα Α. Έστω x_{n_2} ο αμέσως επόμενος όρος που έχει την ιδιότητα Α. Έστω x_{n_3} ο αμέσως επόμενος όρος που έχει την ιδιότητα Α. Και ούτω καθ' εξής. Έτσι δημιουργείται μια υποακολουθία (x_{n_k}) η οποία αποτελείται από τους όρους της (x_n) που έχουν την ιδιότητα Α.

Άσκηση 2.5.11. *Αν το σύνολο των όρων μιας ακολουθίας είναι πεπερασμένο, αποδείξτε ότι υπάρχει σταθερή υποακολουθία της.*

Λύση: Έστω ότι το σύνολο των όρων της (x_n) είναι πεπερασμένο.
Το αποτέλεσμα της άσκησης 2.1.9 λέει ότι υπάρχει κάποιος αριθμός c ώστε να ισχύει $x_n = c$ για άπειρους n. Μα τότε το αποτέλεσμα της άσκησης 2.5.10 λέει ότι υπάρχει υποακολουθία (x_{n_k}) έτσι ώστε να ισχύει $x_{n_k} = c$ για κάθε k.

Άσκηση 2.5.12. *Αποδείξτε ότι η ακολουθία (x_n) έχει όριο $x \in \overline{\mathbb{R}}$ αν και μόνο αν κάθε υποακολουθία της (x_n) έχει υποακολουθία με όριο x.*
Δείτε αν είναι σωστό το: η ακολουθία (x_n) έχει όριο αν και μόνο αν κάθε υποακολουθία της (x_n) έχει υποακολουθία με όριο.

Λύση: Το πρώτο ερώτημα. Έστω $x \in \overline{\mathbb{R}}$ και $x_n \to x$. Τότε για κάθε (x_{n_k}) ισχύει $x_{n_k} \to x$ και, επομένως, η (x_{n_k}) έχει υποακολουθία (για παράδειγμα τον ίδιο της τον εαυτό) με όριο x.
Αντιστρόφως, έστω ότι κάθε υποακολουθία της (x_n) έχει υποακολουθία με όριο x. Για να καταλήξουμε σε άτοπο, ας υποθέσουμε ότι η (x_n) δεν έχει όριο x.
Τότε υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε να μην ισχύει τελικά ότι $x_n \in N_x(\epsilon)$. Αυτό σημαίνει ότι δεν είναι σωστό ότι ισχύει $x_n \in N_x(\epsilon)$ από κάποιον δείκτη και πέρα και, επομένως, ισχύει $x_n \notin N_x(\epsilon)$ για άπειρους n.
Από το αποτέλεσμα της άσκησης 2.5.10 έχουμε ότι υπάρχει υποακολουθία (x_{n_k}) ώστε να ισχύει $x_{n_k} \notin N_x(\epsilon)$ για κάθε k. Βάσει της υπόθεσής μας, η (x_{n_k}) πρέπει να έχει κάποια υποακολουθία με όριο x. Αυτό, όμως, είναι αδύνατο διότι όλοι οι όροι της (x_{n_k}) και άρα και όλοι οι όροι της οποιασδήποτε υποακολουθίας της είναι έξω από την περιοχή $N_x(\epsilon)$ του x.
Καταλήξαμε σε άτοπο, οπότε η (x_n) έχει όριο x.
Το δεύτερο ερώτημα. Θεωρούμε την ακολουθία (x_n) με $x_n = (-1)^{n-1}$ για κάθε n. Τότε $x_{2k} \to -1$ και $x_{2k-1} \to 1$.
Έστω οποιαδήποτε υποακολουθία (x_{n_k}) της (x_n). Είναι προφανές ότι είτε άπειροι n_k είναι άρτιοι είτε άπειροι n_k είναι περιττοί. (Μπορεί να συμβαίνουν και τα δύο ταυτόχρονα.) Αν άπειροι n_k είναι περιττοί, τότε αυτοί οι περιττοί n_k σχηματίζουν μια υποακολουθία της (x_{n_k}) η οποία συγχρόνως είναι και υποακολουθία της (x_{2k-1}) και, επομένως, συγκλίνει στον 1. Αν άπειροι n_k είναι άρτιοι, τότε αυτοί οι άρτιοι n_k σχηματίζουν μια υποακολουθία της (x_{n_k}) η οποία συγχρόνως είναι και υποακολουθία της (x_{2k}) και, επομένως, συγκλίνει στον -1. Άρα σε κάθε περίπτωση η (x_{n_k}) έχει κάποια υποακολουθία η οποία έχει όριο (τον 1 ή τον -1). Όμως, η (x_n) δεν έχει όριο!

Άσκηση 2.5.13. *Έστω ότι ισχύει $x_n < x$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι $\sup\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\} = x$ αν και μόνο αν υπάρχει γνησίως αύξουσα υποακολουθία της (x_n) που συγκλίνει στον x.*
Θεωρήστε την ακολουθία $(\frac{1}{n})$. Είναι $\sup\{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\} = 1$. Όμως, κάθε υποακολουθία της $(\frac{1}{n})$ συγκλίνει στον 0, το όριο της $(\frac{1}{n})$, οπότε δεν υπάρχει υποακολουθία που συγκλίνει στον 1. Αντιφάσκει αυτό με το προηγούμενο γενικό αποτέλεσμα;

Λύση: Το πρώτο ερώτημα. Επειδή ισχύει $x_n < x$ για κάθε n, συνεπάγεται ότι ο x είναι άνω φράγμα του $\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$.

Τώρα, έστω ότι υπάρχει γνησίως αύξουσα υποακολουθία (x_{n_k}) της (x_n) που συγκλίνει στον x. Αν ο u είναι οποιοδήποτε άνω φράγμα του $\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$, τότε ισχύει $x_n \leq u$ για κάθε n και άρα ισχύει $x_{n_k} \leq u$ για κάθε k. Επειδή $x_{n_k} \to x$, συνεπάγεται $x \leq u$. Άρα ο x είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του $\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$, οπότε $x = \sup\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$.
Αντιστρόφως, έστω $x = \sup\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$.
Τότε υπάρχει στοιχείο του $\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$, δηλαδή όρος της (x_n), το οποίο είναι $> x-1$. Θεωρούμε τον όρο της ακολουθίας με τον *μικρότερο* δείκτη, έστω n_1, ώστε να ισχύει

$$x - 1 < x_{n_1}.$$

Επειδή $x_{n_1} < x$, είναι $\max\{x - \frac{1}{2}, x_{n_1}\} < x$ και άρα υπάρχει στοιχείο του $\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$, δηλαδή όρος της (x_n), το οποίο είναι $> \max\{x - \frac{1}{2}, x_{n_1}\}$. Θεωρούμε τον όρο της ακολουθίας με τον *μικρότερο* δείκτη, έστω n_2, ώστε να ισχύει $\max\{x - \frac{1}{2}, x_{n_1}\} < x_{n_2}$. Δηλαδή, είναι

$$x - \tfrac{1}{2} < x_{n_2} \quad \text{και} \quad x_{n_1} < x_{n_2}.$$

Επειδή ο n_1 είναι ο *μικρότερος* δείκτης για τον οποίο ισχύει $x - 1 < x_{n_1}$ και επειδή $x - 1 < x_{n_2}$ και $n_2 \neq n_1$, συνεπάγεται $n_1 < n_2$.
Επειδή $x_{n_2} < x$, είναι $\max\{x - \frac{1}{3}, x_{n_2}\} < x$ και άρα υπάρχει στοιχείο του $\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$, δηλαδή όρος της (x_n), το οποίο είναι $> \max\{x - \frac{1}{3}, x_{n_2}\}$. Θεωρούμε τον όρο της ακολουθίας με τον *μικρότερο* δείκτη, έστω n_3, ώστε να ισχύει $\max\{x - \frac{1}{3}, x_{n_2}\} < x_{n_3}$. Δηλαδή, είναι

$$x - \tfrac{1}{3} < x_{n_3} \quad \text{και} \quad x_{n_2} < x_{n_3}.$$

Επειδή ο n_2 είναι ο *μικρότερος* δείκτης για τον οποίο ισχύει $x - \frac{1}{2} < x_{n_2}$ και επειδή $x - \frac{1}{2} < x_{n_3}$ και $n_3 \neq n_2$, συνεπάγεται $n_2 < n_3$.
Συνεχίζουμε αυτήν την επαγωγική διαδικασία επ' άπειρον. Έτσι δημιουργείται μια υποακολουθία (x_{n_k}) της (x_n) (αφού ισχύει $n_k < n_{k+1}$ για κάθε k), η οποία είναι γνησίως αύξουσα (αφού ισχύει $x_{n_k} < x_{n_{k+1}}$ για κάθε k) και συγκλίνει στον x (αφού ισχύει $x - \frac{1}{k} < x_{n_k} < x$ για κάθε k).
Το δεύτερο ερώτημα. Το αποτέλεσμα για την $(\frac{1}{n})$ δεν αντιφάσκει με το γενικό αποτέλεσμα που μόλις αποδείξαμε, διότι η $(\frac{1}{n})$ δεν ικανοποιεί την πρώτη υπόθεση του γενικού αποτελέσματος: πρέπει να ισχύει $x_n < x$ για κάθε n. Για την συγκεκριμένη ακολουθία $(\frac{1}{n})$ είναι $x = 1$ και ο πρώτος όρος της είναι ίσος με 1.

Άσκηση 2.5.14. *Έστω ακολουθία (x_n) και υποακολουθία (x_{n_k}). Αποδείξτε ότι κάθε υποακολουθία της (x_{n_k}) είναι υποακολουθία και της (x_n).*

Λύση: Το γράμμα με το οποίο συμβολίζουμε τον δείκτη μιας ακολουθίας δεν έχει ιδιαίτερη σημασία. Μπορεί να συνηθίζουμε να χρησιμοποιούμε το n για τον δείκτη μιας ακολουθίας, αλλά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το m ή το k ή ό,τι άλλο. Για παράδειγμα, ο δείκτης της υποακολουθίας (x_{n_k}) είναι ο k.
Ας συμβολίσουμε, λοιπόν, (x_m) την αρχική ακολουθία (x_n).
Έστω $(x_{n_{k_l}})$ μια υποακολουθία της (x_{n_k}). Ο δείκτης της $(x_{n_{k_l}})$ είναι ο l και ισχύει $n_{k_l} < n_{k_{l+1}}$ για κάθε l. Ορίζουμε

$$m_l = n_{k_l} \qquad \text{για κάθε } l.$$

Τότε ισχύει $m_l < m_{l+1}$ για κάθε l και, επομένως, η (x_{m_l}) είναι υποακολουθία της αρχικής ακολουθίας (x_m) (η οποία είναι ίδια με την (x_n)). Όμως, η (x_{m_l}) είναι ίδια με την $(x_{n_{k_l}})$.

Άσκηση 2.5.15. *Αν η ακολουθία (x_n) δεν έχει όριο, αποδείξτε ότι υπάρχουν δύο υποακολουθίες της με διαφορετικά όρια. Να αντιπαραβάλετε με την πρόταση 2.14.*

Αν η (x_n) δεν έχει όριο, αποδείξτε ότι υπάρχουν l, u ώστε $u < l$ και ώστε να ισχύει $x_n \leq u$ για άπειρους n και $x_n \geq l$ για άπειρους n. Να αντιπαραβάλετε με την πρόταση 2.5[γ].

Λύση: Το πρώτο ερώτημα. Έστω ότι η (x_n) δεν έχει όριο.
Γνωρίζουμε, βάσει του θεωρήματος των Bolzano - Weierstrass και της πρότασης 2.16, ότι η (x_n)

έχει τουλάχιστον μία υποακολουθία με κάποιο όριο $x \in \overline{\mathbb{R}}$. Επειδή η (x_n) δεν έχει όριο x, υπάρχει κάποιος $\epsilon > 0$ ώστε να μην ισχύει τελικά $x_n \in N_x(\epsilon)$. Αυτό σημαίνει ότι δεν είναι σωστό ότι ισχύει $x_n \in N_x(\epsilon)$ από κάποιον δείκτη και πέρα και άρα ισχύει $x_n \notin N_x(\epsilon)$ για άπειρους n.
Από το αποτέλεσμα της άσκησης 2.5.10 έχουμε ότι υπάρχει υποακολουθία (x_{n_k}) ώστε να ισχύει $x_{n_k} \notin N_x(\epsilon)$ για κάθε k. Τώρα, πάλι βάσει του θεωρήματος των Bolzano - Weierstrass και της πρότασης 2.16, η (x_{n_k}) πρέπει να έχει υποακολουθία με κάποιο όριο $y \in \overline{\mathbb{R}}$ (πιθανόν το ίδιο με το x). Σύμφωνα με το αποτέλεσμα της άσκησης 2.5.14, η υποακολουθία της (x_{n_k}) είναι και υποακολουθία της (x_n). Άρα υπάρχει υποακολουθία της (x_n) με όριο y. Όμως, όλοι οι όροι αυτής της τελευταίας υποακολουθίας είναι όροι της (x_{n_k}) και άρα βρίσκονται έξω από την περιοχή $N_x(\epsilon)$. Άρα το y πρέπει να είναι διαφορετικό από το x. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι υπάρχουν δύο υποακολουθίες της (x_n) με διαφορετικά όρια x και y.
Η πρόταση 2.14 λέει ότι ισχύει το αντίστροφο: "αν η (x_n) έχει δύο υποακολουθίες με διαφορετικά όρια, τότε η (x_n) δεν έχει όριο".

Το δεύτερο ερώτημα. Έστω ότι η (x_n) δεν έχει όριο.
Από το αποτέλεσμα του πρώτου μέρους συνεπάγεται ότι υπάρχει υποακολουθία της (x_n) με κάποιο όριο $x \in \overline{\mathbb{R}}$ και υποακολουθία της (x_n) με κάποιο όριο $y \in \overline{\mathbb{R}}$ με $x \neq y$ και ας υποθέσουμε ότι $x < y$. Θεωρούμε δύο αριθμούς u, l ώστε $x < u < l < y$.
Επειδή μια υποακολουθία της (x_n) έχει όριο x, θα ισχύει τελικά $x_n \leq u$ για τους όρους της υποακολουθίας αυτής και άρα για άπειρους n. Ομοίως, επειδή μια υποακολουθία της (x_n) έχει όριο y, θα ισχύει τελικά $x_n \geq l$ για τους όρους της υποακολουθίας αυτής και άρα για άπειρους n.
Η πρόταση 2.5[γ] λέει ότι ισχύει το αντίστροφο: "αν υπάρχουν l, u ώστε $u < l$ και ώστε να ισχύει $x_n \leq u$ για άπειρους n και $x_n \geq l$ για άπειρους n, τότε η (x_n) δεν έχει όριο".

Άσκηση 2.6.2. *Αν ισχύει $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ για κάθε n, από το παράδειγμα 2.4.4 γνωρίζουμε ότι ισχύει $x_{2n} - x_n \geq \frac{1}{2}$ για κάθε n. Είναι η (x_n) ακολουθία Cauchy; Συμπεράνατε ότι $x_n \to +\infty$.*

Λύση: Έστω ότι η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy.
Τότε πρέπει να υπάρχει κάποιος n_0 ώστε να ισχύει $|x_n - x_m| < \frac{1}{2}$ για κάθε $n, m \geq n_0$. Τότε για κάθε $n \geq n_0$, επειδή αυτομάτως ισχύει και $2n \geq n_0$, συνεπάγεται ότι ισχύει $|x_n - x_{2n}| < \frac{1}{2}$. Αυτό, όμως αντιφάσκει με το ότι ισχύει $x_{2n} - x_n \geq \frac{1}{2}$ για κάθε n.
Άρα η (x_n) δεν είναι ακολουθία Cauchy και, επομένως, δεν συγκλίνει.
Τώρα, η (x_n) είναι αύξουσα, οπότε έχει όριο το οποίο είναι αριθμός ή $+\infty$. Αφού η (x_n) δεν συγκλίνει, συνεπάγεται ότι $x_n \to +\infty$.

Άσκηση 2.6.3. *Έστω ότι ισχύει $x_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ για κάθε n.*
Αποδείξτε ότι ισχύει $|x_n - x_m| = \big|\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{(-1)^{m-n-1}}{m}\big| \leq \frac{1}{n+1}$ για κάθε n, m με $n < m$. Συμπεράνατε ότι η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy και ότι συγκλίνει.

Λύση: Έστω $n < m$. Τότε

$$\begin{aligned} x_m - x_n &= \big(1 - \tfrac{1}{2} + \cdots + \tfrac{(-1)^{n-1}}{n} + \tfrac{(-1)^n}{n+1} + \cdots + \tfrac{(-1)^{m-1}}{m}\big) - \big(1 - \tfrac{1}{2} + \cdots + \tfrac{(-1)^{n-1}}{n}\big) \\ &= \tfrac{(-1)^n}{n+1} + \cdots + \tfrac{(-1)^{m-1}}{m} = (-1)^n\big(\tfrac{1}{n+1} - \tfrac{1}{n+2} + \cdots + \tfrac{(-1)^{m-n-1}}{m}\big), \end{aligned}$$

οπότε

$$|x_n - x_m| = \big|\tfrac{1}{n+1} - \tfrac{1}{n+2} + \cdots + \tfrac{(-1)^{m-n-1}}{m}\big|.$$

Τώρα, αν ο $m - n - 1$ είναι περιττός, έχουμε

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &= \big|\tfrac{1}{n+1} - \tfrac{1}{n+2} + \cdots + \tfrac{1}{m-1} - \tfrac{1}{m}\big| \\ &= \big|\big(\tfrac{1}{n+1} - \tfrac{1}{n+2}\big) + \cdots + \big(\tfrac{1}{m-1} - \tfrac{1}{m}\big)\big| \\ &= \big(\tfrac{1}{n+1} - \tfrac{1}{n+2}\big) + \cdots + \big(\tfrac{1}{m-1} - \tfrac{1}{m}\big) \\ &= \tfrac{1}{n+1} - \big(\tfrac{1}{n+2} - \tfrac{1}{n+3}\big) - \cdots - \big(\tfrac{1}{m-2} - \tfrac{1}{m-1}\big) - \tfrac{1}{m} < \tfrac{1}{n+1} \end{aligned}$$

διότι κάθε παρένθεση είναι > 0.
Ομοίως, αν ο $m-n-1$ είναι άρτιος, έχουμε

$$\begin{aligned}|x_n - x_m| &= \left|\tfrac{1}{n+1} - \tfrac{1}{n+2} + \cdots - \tfrac{1}{m-1} + \tfrac{1}{m}\right| \\ &= \left|\left(\tfrac{1}{n+1} - \tfrac{1}{n+2}\right) + \cdots + \left(\tfrac{1}{m-2} - \tfrac{1}{m-1}\right) + \tfrac{1}{m}\right| \\ &= \left(\tfrac{1}{n+1} - \tfrac{1}{n+2}\right) + \cdots + \left(\tfrac{1}{m-2} - \tfrac{1}{m-1}\right) + \tfrac{1}{m} \\ &= \tfrac{1}{n+1} - \left(\tfrac{1}{n+2} - \tfrac{1}{n+3}\right) - \cdots - \left(\tfrac{1}{m-1} - \tfrac{1}{m}\right) < \tfrac{1}{n+1}\end{aligned}$$

διότι κάθε παρένθεση είναι > 0.
Σε κάθε περίπτωση ισχύει $|x_n - x_m| < \frac{1}{n+1}$ για κάθε n, m με $n < m$.
Τώρα, έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει n_0 ώστε $\frac{1}{n_0+1} < \epsilon$ και τότε για κάθε n, m με $m > n \geq n_0$ ισχύει $|x_n - x_m| < \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n_0+1} < \epsilon$. Άρα η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy.

Άσκηση 2.6.4. [α] *Έστω $0 < M < 1$ και έστω ότι ισχύει τελικά $|x_n - x_{n+1}| \leq cM^n$. Αποδείξτε ότι υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $|x_n - x_m| \leq c\frac{M^n}{1-M}$ για κάθε n, m με $n_0 \leq n < m$. Αποδείξτε ότι η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy. Αν x είναι το όριο της (x_n), αποδείξτε ότι ισχύει τελικά $|x_n - x| \leq c\frac{M^n}{1-M}$.*
[β] *Έστω $0 < M < 1$ και έστω ότι ισχύει τελικά $|x_{n+1} - x_{n+2}| \leq M|x_n - x_{n+1}|$. Αποδείξτε ότι η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy. Αν x είναι το όριο της (x_n), αποδείξτε ότι υπάρχει $c \geq 0$ ώστε να ισχύει τελικά $|x_n - x| \leq c\frac{M^n}{1-M}$.*
[γ] *Έστω $x_1 > 0$ και ότι ισχύει $x_{n+1} = 1 + \frac{3}{1+x_n}$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι η ακολουθία (x_n) συγκλίνει και βρείτε το όριό της. Βρείτε και μια εκτίμηση για την απόσταση του n-οστού όρου x_n από το όριο της ακολουθίας.*
[δ] *Έστω $0 < |\kappa| < 1$ και ότι ισχύει $x_{n+1} = a + \kappa \sin x_n$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι η (x_n) συγκλίνει.*

Λύση: [α] Από την υπόθεση έχουμε ότι υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $|x_n - x_{n+1}| \leq cM^n$ για κάθε $n \geq n_0$.
Έστω $m > n \geq n_0$. Τότε

$$\begin{aligned}|x_n - x_m| &= |(x_n - x_{n+1}) + (x_{n+1} - x_{n+2}) + \cdots + (x_{m-1} - x_m)| \\ &\leq |x_n - x_{n+1}| + |x_{n+1} - x_{n+2}| + \cdots + |x_{m-1} - x_m| \\ &\leq cM^n + cM^{n+1} + \cdots + cM^{m-1} \\ &= cM^n(1 + M + \cdots + M^{m-n-1}) \\ &= cM^n \tfrac{1-M^{m-n}}{1-M} \leq c\tfrac{M^n}{1-M}.\end{aligned} \tag{14.22}$$

Τώρα, έστω $\epsilon > 0$. Επειδή $0 < M < 1$, συνεπάγεται $c\frac{M^n}{1-M} \to 0$, οπότε υπάρχει $n_0{}'$ ώστε να ισχύει $c\frac{M^n}{1-M} < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0{}'$.
Θεωρούμε τον $n_0{}'' = \max\{n_0, n_0{}'\}$. Τότε για κάθε n, m με $m > n \geq n_0{}''$ ισχύει $m > n \geq n_0$ και $n \geq n_0{}'$, οπότε από την (14.22) έχουμε

$$|x_m - x_n| \leq c\tfrac{M^n}{1-M} < \epsilon.$$

Άρα η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy και, επομένως, συγκλίνει. Αν x είναι το όριο της (x_n), τότε, επειδή η (14.22) ισχύει για κάθε m, n με $m > n \geq n_0$, παίρνοντας όριο όταν $m \to +\infty$, βρίσκουμε ότι ισχύει

$$|x_n - x| \leq c\tfrac{M^n}{1-M} \qquad \text{για κάθε } n \geq n_0.$$

[β] Από την υπόθεση έχουμε ότι υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $|x_{n+1} - x_{n+2}| \leq M|x_n - x_{n+1}|$ για κάθε $n \geq n_0$.
Τώρα, εύκολα μπορούμε να αποδείξουμε με την αρχή της επαγωγής ότι ισχύει $|x_{n+1} - x_n| \leq cM^n$ για κάθε $n \geq n_0$, όπου $c = \frac{|x_{n_0+1} - x_{n_0}|}{M^{n_0}}$. Τα υπόλοιπα είναι άμεση εφαρμογή του αποτελέσματος του [α].

[γ] Πρώτον, από τον αναδρομικό τύπο και με την αρχή της επαγωγής αποδεικνύεται αμέσως ότι ισχύει $x_n > 0$ για κάθε n. Κατόπιν, πάλι από τον αναδρομικό τύπο φαίνεται αμέσως ότι ισχύει $x_n > 1$ για κάθε $n \geq 2$. Άρα για κάθε $n \geq 2$ ισχύει

$$|x_{n+1} - x_{n+2}| = \left|\tfrac{3}{1+x_n} - \tfrac{3}{1+x_{n+1}}\right| = 3\,\tfrac{|x_n - x_{n+1}|}{(1+x_n)(1+x_{n+1})} \leq \tfrac{3}{4}\,|x_n - x_{n+1}|.$$

Άρα η (x_n) ικανοποιεί την υπόθεση του [β] με $M = \frac{3}{4}$ και, επομένως, συγκλίνει. Αν x είναι το όριο της (x_n), συνεπάγεται $x \geq 1$ (αφού ισχύει $x_n > 1$ για κάθε $n \geq 2$) και από τον αναδρομικό τύπο έχουμε $x = 1 + \frac{3}{1+x}$. Άρα $x = 2$ ή $x = -2$ και κρατάμε το $x = 2$. Τέλος, συνδυάζοντας τα αποτελέσματα των [β] και [γ] με $n_0 = 2$, έχουμε ότι ισχύει $|x_n - 2| \leq 4c(\frac{3}{4})^n$ για κάθε $n \geq 2$, όπου $c = |x_3 - x_2|(\frac{4}{3})^2$.
[δ] Χρησιμοποιούμε την γνωστή ανισότητα $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$.
Από τον αναδρομικό τύπο συνεπάγεται ότι για κάθε n ισχύει

$$|x_{n+1} - x_{n+2}| = |\kappa||\sin x_n - \sin x_{n+1}| \leq |\kappa||x_n - x_{n+1}|.$$

Άρα η (x_n) ικανοποιεί την υπόθεση του [β] με $M = |\kappa|$ και, επομένως, συγκλίνει.

Άσκηση 2.7.1. *Έστω $a < b$ και η ακολουθία $(a, b, a, b, a, b, a, b, \ldots)$. Βρείτε τα $\overline{\lim}$ και $\underline{\lim}$ της ακολουθίας καθώς και όλα τα υποακολουθιακά όριά της.*

Λύση: Είναι σαφές ότι υπάρχει υποακολουθία με όριο a (για παράδειγμα η υποακολουθία με τους περιττούς δείκτες) και υποακολουθία με όριο b (για παράδειγμα η υποακολουθία με τους άρτιους δείκτες). Άρα οι αριθμοί a και b είναι υποακολουθιακά όρια της ακολουθίας.
Ας θεωρήσουμε τώρα ένα οποιοδήποτε υποακολουθιακό όριο x της ακολουθίας. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει κάποια υποακολουθία της ακολουθίας με όριο x.
Επειδή, όμως, όλοι οι όροι της ακολουθίας είναι $\leq b$, συνεπάγεται ότι και οι όροι της υποακολουθίας είναι $\leq b$. Άρα και το όριο x αυτής της υποακολουθίας είναι $\leq b$.
Ομοίως, επειδή όλοι οι όροι της ακολουθίας είναι $\geq a$, συνεπάγεται ότι και οι όροι της υποακολουθίας είναι $\geq a$, οπότε και το όριο x αυτής της υποακολουθίας είναι $\geq a$.
Άρα το τυχόν υποακολουθιακό όριο x της ακολουθίας είναι ανάμεσα στους a, b. Άρα το μέγιστο υποακολουθιακό όριο της ακολουθίας είναι το b και το ελάχιστο είναι το a. Δηλαδή

$$\underline{\lim}\, x_n = a \qquad \text{και} \qquad \overline{\lim}\, x_n = b.$$

Μέχρι στιγμής έχουμε υπολογίσει το μέγιστο και το ελάχιστο υποακολουθιακό όριο της ακολουθίας. Για να βρούμε όλα τα υποακολουθιακά όρια πρέπει να κάνουμε κάτι παραπάνω. Θεωρούμε ένα οποιοδήποτε υποακολουθιακό όριο x της ακολουθίας. Επειδή η υποακολουθία με τους περιττούς δείκτες συγκλίνει στον a και η υποακολουθία με τους άρτιους δείκτες συγκλίνει στον b, από το αποτέλεσμα της άσκησης 2.5.7 συνεπάγεται ότι $x = a$ ή $x = b$. Άρα τα μόνα υποακολουθιακά όρια της ακολουθίας είναι οι a, b.

Άσκηση 2.7.2. *Υπολογίστε, μέσω των ορισμών τους, τα $\overline{\lim}$, $\underline{\lim}$ των* $\big(\frac{n+1}{n}\big)$, $\big((-1)^{n-1}(1-\frac{1}{n})\big)$, $\big((-1)^{n-1}(1+\frac{1}{n})\big)$, $\big(\sin\frac{2n\pi}{3}\big)$.

Λύση: Η πρώτη ακολουθία. Επειδή $\frac{n+1}{n} \to 1$, συνεπάγεται

$$\underline{\lim}\, \tfrac{n+1}{n} = \overline{\lim}\, \tfrac{n+1}{n} = 1.$$

Η δεύτερη ακολουθία. Ο τύπος της ακολουθίας είναι ο $x_n = (-1)^{n-1}(1 - \frac{1}{n})$ και άρα

$$x_{2k} = -1 + \tfrac{1}{2k} \to -1 \qquad \text{και} \qquad x_{2k-1} = 1 - \tfrac{1}{2k-1} \to 1.$$

Άρα οι αριθμοί -1 και 1 είναι υποακολουθιακά όρια της (x_n).
Τώρα έχουμε δύο τρόπους να συνεχίσουμε.

Πρώτος τρόπος: Το συμπέρασμα της άσκησης 2.5.7 είναι ότι οι -1 και 1 είναι τα μοναδικά υποακολουθιακά όρια της (x_n). Άρα

$$\underline{\lim}(-1)^{n-1}\big(1-\tfrac{1}{n}\big)=-1 \qquad \text{και} \qquad \overline{\lim}(-1)^{n-1}\big(1-\tfrac{1}{n}\big)=1.$$

Δεύτερος τρόπος: Παρατηρούμε πού βρίσκονται οι όροι της (x_n) σε σχέση με τους αριθμούς -1 και 1. Οι x_{2k} φθίνουν προς τον -1 και ο πρώτος από αυτούς είναι ο $x_2=-\frac{1}{2}$. Οι x_{2k-1} αυξάνονται προς τον 1 και ο πρώτος από αυτούς είναι ο $x_1=0$. Άρα όλοι οι όροι της (x_n) είναι ανάμεσα στους -1 και 1.

Και τώρα συνεχίζουμε όπως στην άσκηση 2.7.1 με τους a και b. Θεωρούμε ένα οποιοδήποτε υποακολουθιακό όριο x της (x_n). Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει υποακολουθία της (x_n) με όριο x. Επειδή όλοι οι όροι της (x_n) είναι στο διάστημα $[-1,1]$, συνεπάγεται ότι και οι όροι της υποακολουθίας είναι στο $[-1,1]$, οπότε και το όριο x αυτής της υποακολουθίας είναι στο $[-1,1]$.

Άρα το τυχόν υποακολουθιακό όριο x της (x_n) είναι ανάμεσα στους $-1,1$, οπότε $\underline{\lim}\,x_n=-1$ και $\overline{\lim}\,x_n=1$.

Η τρίτη ακολουθία. Ο τύπος της ακολουθίας είναι ο $x_n=(-1)^{n-1}(1+\frac{1}{n})$ και έχουμε ότι

$$x_{2k}=-1-\tfrac{1}{2k}\to-1 \qquad \text{και} \qquad x_{2k-1}=1+\tfrac{1}{2k-1}\to 1.$$

Άρα οι αριθμοί -1 και 1 είναι υποακολουθιακά όρια της (x_n).

Και πάλι έχουμε δύο τρόπους να συνεχίσουμε.

Πρώτος τρόπος: Πάλι το συμπέρασμα της άσκησης 2.5.7 μας λέει ότι οι -1 και 1 είναι τα μοναδικά υποακολουθιακά όρια της (x_n). Άρα

$$\underline{\lim}(-1)^{n-1}\big(1+\tfrac{1}{n}\big)=-1 \qquad \text{και} \qquad \overline{\lim}(-1)^{n-1}\big(1+\tfrac{1}{n}\big)=1.$$

Δεύτερος τρόπος: Παρατηρούμε πού βρίσκονται οι όροι της (x_n) σε σχέση με τους αριθμούς -1 και 1. Οι x_{2k} αυξάνονται προς τον -1 και οι x_{2k-1} φθίνουν προς τον 1. Άρα οι όροι της (x_n) βρίσκονται όλοι έξω από το διάστημα $[-1,1]$ και αυτό δεν επιτρέπει να προχωρήσουμε όπως με την δεύτερη ακολουθία. Οπότε θα σκεφτούμε κάτι διαφορετικό.

Θεωρούμε ένα οποιοδήποτε υποακολουθιακό όριο x της ακολουθίας. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει υποακολουθία (x_{n_k}) της ακολουθίας με όριο x.

Παίρνουμε και έναν τυχόντα αριθμό $x'>1$.

Επειδή $x_{2k-1}\to 1$, όλοι οι όροι x_{2k-1} από κάποιον δείκτη και πέρα είναι $\leq x'$. Από την άλλη μεριά, όλοι οι όροι x_{2k} είναι προφανώς $\leq x'$, οπότε όλοι οι όροι x_n από κάποιον δείκτη και πέρα είναι $\leq x'$. Άρα και όλοι οι όροι της υποακολουθίας (x_{n_k}) από κάποιον δείκτη και πέρα είναι $\leq x'$.

Άρα και το όριο x της (x_{n_k}) είναι $\leq x'$.

Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι το οποιοδήποτε υποακολουθιακό όριο x της ακολουθίας έχει την εξής ιδιότητα: ισχύει $x\leq x'$ για κάθε $x'>1$. Συμπεραίνουμε ότι $x\leq 1$.

Άρα το τυχόν υποακολουθιακό όριο x της ακολουθίας είναι ≤ 1. Άρα ο 1 είναι το μέγιστο υποακολουθιακό όριο της (x_n), οπότε $\overline{\lim}\,x_n=1$.

Με "συμμετρικό" τρόπο αποδεικνύεται ότι $\underline{\lim}\,x_n=-1$.

Η τέταρτη ακολουθία. Για $n=1$, $n=2$, $n=3$ παίρνουμε τους τρεις πρώτους όρους της ακολουθίας:

$$\sin\tfrac{2\pi}{3}=\tfrac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin\tfrac{4\pi}{3}=-\tfrac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin\tfrac{6\pi}{3}=0.$$

Από εκεί και πέρα αυτές οι τρεις τιμές επαναλαμβάνονται περιοδικά, διότι τα σημεία του τριγωνομετρικού κύκλου που αντιστοιχούν στις γωνίες $\frac{2n\pi}{3}$ είναι ακριβώς αυτά που αντιστοιχούν στις τρεις πρώτες γωνίες $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{6\pi}{3}$. Άρα η ακολουθία είναι η

$$\tfrac{\sqrt{3}}{2},-\tfrac{\sqrt{3}}{2},0,\tfrac{\sqrt{3}}{2},-\tfrac{\sqrt{3}}{2},0,\tfrac{\sqrt{3}}{2},-\tfrac{\sqrt{3}}{2},0,\tfrac{\sqrt{3}}{2},-\tfrac{\sqrt{3}}{2},0,\ldots\,.$$

Άρα

$$\underline{\lim}\sin\tfrac{2n\pi}{3}=-\tfrac{\sqrt{3}}{2}, \quad \overline{\lim}\sin\tfrac{2n\pi}{3}=\tfrac{\sqrt{3}}{2}.$$

[Όποιος θέλει μπορεί να γράψει τον ακριβή τύπο του n-οστού όρου:

$$\sin\frac{2n\pi}{3} = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}, & \text{αν } n = 3k+1 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}, & \text{αν } n = 3k+2 \\ 0, & \text{αν } n = 3k \end{cases}$$

Πράγματι,

$$\sin\frac{2(3k+1)\pi}{3} = \sin(2k\pi + \tfrac{2\pi}{3}) = \sin\tfrac{2\pi}{3} = \tfrac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\sin\frac{2(3k+2)\pi}{3} = \sin(2k\pi + \tfrac{4\pi}{3}) = \sin\tfrac{4\pi}{3} = -\tfrac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\sin\frac{2(3k)\pi}{3} = \sin(2k\pi) = 0$$

Αλλά αυτό δεν είναι απαραίτητο.]

Άσκηση 2.7.3. *Αποδείξτε ότι $\overline{\lim}\, x_n = +\infty$ αν και μόνο αν η (x_n) δεν είναι άνω φραγμένη. Αποδείξτε ότι $\overline{\lim}\, x_n = -\infty$ αν και μόνο αν $x_n \to -\infty$.*

Λύση: Το πρώτο ερώτημα. Έστω $\overline{\lim}\, x_n = +\infty$. Τότε υπάρχει υποακολουθία της (x_n) με όριο $+\infty$ και, επομένως, όχι άνω φραγμένη. Από το αποτέλεσμα της άσκησης 2.5.2 συνεπάγεται ότι η (x_n) δεν είναι άνω φραγμένη.
Αντιστρόφως, έστω ότι η (x_n) δεν είναι άνω φραγμένη. Τότε από την πρόταση 2.16 συνεπάγεται ότι υπάρχει υποακολουθία της (x_n) με όριο $+\infty$. Άρα το $+\infty$ είναι υποακολουθιακό όριο της (x_n) και, προφανώς, είναι το μέγιστο. Άρα $\overline{\lim}\, x_n = +\infty$.
Το δεύτερο ερώτημα. Έστω $\overline{\lim}\, x_n = -\infty$. Επειδή $\underline{\lim}\, x_n \leq \overline{\lim}\, x_n$, συνεπάγεται $\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n = -\infty$ και άρα $x_n \to -\infty$.
Αντιστρόφως, έστω $x_n \to -\infty$. Τότε $\overline{\lim}\, x_n = -\infty$.

Άσκηση 2.7.4. *Αποδείξτε ότι $\underline{\lim}\, x_n = -\overline{\lim}(-x_n)$.*

Λύση: Υπάρχει υποακολουθία (x_{n_k}) με όριο $\underline{\lim}\, x_n$. Τότε η $(-x_{n_k})$ έχει όριο $-\underline{\lim}\, x_n$. Όμως, η $(-x_{n_k})$ είναι υποακολουθία της $(-x_n)$. Άρα το $-\underline{\lim}\, x_n$ είναι υποακολουθιακό όριο της $(-x_n)$ και, επομένως,

$$-\underline{\lim}\, x_n \leq \overline{\lim}(-x_n). \tag{14.23}$$

Τώρα, υπάρχει υποακολουθία $(-x_{n_k})$ (καμία σχέση με την προηγούμενη) της $(-x_n)$ με όριο $\overline{\lim}(-x_n)$. Τότε η (x_{n_k}) έχει όριο $-\overline{\lim}(-x_n)$. Όμως, η (x_{n_k}) είναι υποακολουθία της (x_n). Άρα το $-\overline{\lim}(-x_n)$ είναι υποακολουθιακό όριο της (x_n) και, επομένως,

$$\underline{\lim}\, x_n \leq -\overline{\lim}(-x_n). \tag{14.24}$$

Από τις (14.23) και (14.24) συνεπάγεται ότι $\underline{\lim}\, x_n = -\overline{\lim}(-x_n)$.

Άσκηση 2.7.5. *Αν ισχύει τελικά $x_n \leq y_n$, αποδείξτε ότι $\overline{\lim}\, x_n \leq \overline{\lim}\, y_n$.*

Λύση: Πρώτος τρόπος. Έστω (για άτοπο) ότι $\overline{\lim}\, y_n < \overline{\lim}\, x_n$.
Παίρνουμε οποιονδήποτε a ώστε $\overline{\lim}\, y_n < a < \overline{\lim}\, x_n$.
Τότε ισχύει τελικά $y_n < a$ και ισχύει $a < x_n$ για άπειρους n. Άρα ισχύει $y_n < a$ *και συγχρόνως* $a < x_n$ για άπειρους n. Άρα ισχύει $y_n < x_n$ για άπειρους n. Αυτό, όμως, αντιφάσκει με την υπόθεση ότι ισχύει τελικά $x_n \leq y_n$.
Δεύτερος τρόπος. Υπάρχει κάποια υποακολουθία (x_{n_k}) της (x_n) με όριο $\overline{\lim}\, x_n$.
Η αντίστοιχη (δηλαδή με τους ίδιους δείκτες) υποακολουθία (y_{n_k}) της (y_n) έχει τουλάχιστον μία υποακολουθία $(y_{n_{k_l}})$ η οποία έχει κάποιο όριο $y \in \overline{\mathbb{R}}$. Η $(x_{n_{k_l}})$ είναι υποακολουθία της (x_{n_k}) και άρα έχει κι αυτή όριο $\overline{\lim}\, x_n$.
Τώρα, επειδή ισχύει $x_{n_{k_l}} \leq y_{n_{k_l}}$ για κάθε l, συνεπάγεται $\overline{\lim}\, x_n \leq y$.
Από το συμπέρασμα της άσκησης 2.5.14 συνεπάγεται ότι η $(y_{n_{k_l}})$ είναι υποακολουθία της (y_n), οπότε το y είναι υποακολουθιακό όριο της (y_n) και, επομένως, $y \leq \overline{\lim}\, y_n$.

Από τις $\overline{\lim}\, x_n \leq y$ και $y \leq \overline{\lim}\, y_n$ συνεπάγεται $\overline{\lim}\, x_n \leq \overline{\lim}\, y_n$.

Άσκηση 2.7.7. *Αποδείξτε ότι* $\overline{\lim}(x_n + y_n) \leq \overline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, y_n$ *αν δεν προκύπτει απροσδιόριστη μορφή.*
Αν $t > 0$*, αποδείξτε ότι* $\overline{\lim}(tx_n) = t\ \overline{\lim}\, x_n$.

Λύση: Το πρώτο ερώτημα. Πρώτος τρόπος. Αν $\overline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, y_n = +\infty$, τότε η ανισότητα που θέλουμε να αποδείξουμε είναι, προφανώς, σωστή.
Άρα ας υποθέσουμε ότι $\overline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, y_n < +\infty$ και, επομένως, $\overline{\lim}\, x_n < +\infty$ και $\overline{\lim}\, y_n < +\infty$.
Θεωρούμε οποιονδήποτε $\gamma > \overline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, y_n$.
Τότε μπορούμε να βρούμε $\alpha > \overline{\lim}\, x_n$ και $\beta > \overline{\lim}\, y_n$ ώστε $\gamma = \alpha + \beta$. Αυτό γίνεται ως εξής. Παρατηρούμε ότι ισχύει $\gamma - \overline{\lim}\, y_n > \overline{\lim}\, x_n$ και παίρνουμε οποιονδήποτε α ώστε $\gamma - \overline{\lim}\, y_n > \alpha > \overline{\lim}\, x_n$ και τον $\beta = \gamma - \alpha$.
Επειδή $\alpha > \overline{\lim}\, x_n$, ισχύει τελικά $x_n < \alpha$ και, επειδή $\beta > \overline{\lim}\, y_n$, ισχύει τελικά $y_n < \beta$. Άρα ισχύει τελικά $x_n < \alpha$ και $y_n < \beta$ και, επομένως, $x_n + y_n < \alpha + \beta = \gamma$.
Τώρα, αν υποθέσουμε ότι $\gamma < \overline{\lim}(x_n + y_n)$, συνεπάγεται ότι ισχύει $\gamma < x_n + y_n$ για άπειρους n. Αυτό, όμως, αντιφάσκει με το ότι ισχύει τελικά $x_n + y_n < \gamma$. Άρα $\overline{\lim}(x_n + y_n) \leq \gamma$.
Έχουμε αποδείξει ότι για κάθε $\gamma > \overline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, y_n$ ισχύει $\overline{\lim}(x_n + y_n) \leq \gamma$. Συμπεραίνουμε ότι $\overline{\lim}(x_n + y_n) \leq \overline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, y_n$.
Δεύτερος τρόπος. Όπως με τον πρώτο τρόπο, υποθέτουμε ότι $\overline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, y_n < +\infty$ και, επομένως, $\overline{\lim}\, x_n < +\infty$ και $\overline{\lim}\, y_n < +\infty$.
Υπάρχει κάποια υποακολουθία $(x_{n_k} + y_{n_k})$ της $(x_n + y_n)$ με όριο $\overline{\lim}(x_n + y_n)$.
Τώρα, η (x_{n_k}) έχει τουλάχιστον μία υποακολουθία $(x_{n_{k_l}})$ η οποία έχει κάποιο όριο $x \in \overline{\mathbb{R}}$. Από το συμπέρασμα της άσκησης 2.5.14 συνεπάγεται ότι η $(x_{n_{k_l}})$ είναι υποακολουθία της (x_n) και άρα $x \leq \overline{\lim}\, x_n < +\infty$.
Ομοίως, η $(y_{n_{k_l}})$ έχει κάποια υποακολουθία $(y_{n_{k_{l_m}}})$ η οποία έχει κάποιο όριο $y \in \overline{\mathbb{R}}$. Πάλι, από το συμπέρασμα της άσκησης 2.5.14 συνεπάγεται ότι η $(y_{n_{k_{l_m}}})$ είναι υποακολουθία της (y_n) και άρα $y \leq \overline{\lim}\, y_n < +\infty$.
Τέλος, έχουμε

$$x_{n_{k_{l_m}}} + y_{n_{k_{l_m}}} \to \overline{\lim}(x_n + y_n) \quad \text{και} \quad x_{n_{k_{l_m}}} \to x \quad \text{και} \quad y_{n_{k_{l_m}}} \to y.$$

Συνεπάγεται

$$\overline{\lim}(x_n + y_n) = x + y \leq \overline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, y_n.$$

Το δεύτερο ερώτημα. Υπάρχει (x_{n_k}) με όριο το $\overline{\lim}\, x_n$. Τότε η (tx_{n_k}) έχει όριο το $t\ \overline{\lim}\, x_n$. Όμως, η (tx_{n_k}) είναι υποακολουθία της (tx_n) και άρα

$$t\ \overline{\lim}\, x_n \leq \overline{\lim}(tx_n).$$

Τώρα εφαρμόζουμε αυτό που μόλις αποδείξαμε στην ακολουθία (tx_n) και στον θετικό αριθμό $\frac{1}{t}$ και βρίσκουμε

$$\tfrac{1}{t}\ \overline{\lim}(tx_n) \leq \overline{\lim}(x_n).$$

Από τις δύο τελευταίες ανισότητες συνεπάγεται $\overline{\lim}(tx_n) = t\ \overline{\lim}\, x_n$.

Άσκηση 2.7.8. *Αν η ακολουθία* (y_n) *έχει όριο και δεν προκύπτουν απροσδιόριστες μορφές, αποδείξτε ότι* $\overline{\lim}(x_n + y_n) = \overline{\lim}\, x_n + \lim y_n$.

Λύση: Υπάρχει (x_{n_k}) με όριο το $\overline{\lim}\, x_n$. Τότε η (y_{n_k}) έχει όριο το $\lim y_n$ και άρα η $(x_{n_k} + y_{n_k})$ έχει όριο το $\overline{\lim}\, x_n + \lim y_n$. Επειδή η $(x_{n_k} + y_{n_k})$ είναι υποακολουθία της $(x_n + y_n)$, συνεπάγεται

$$\overline{\lim}\, x_n + \lim y_n \leq \overline{\lim}(x_n + y_n).$$

Τώρα, υπάρχει υποακολουθία $(x_{n_k} + y_{n_k})$ (καμία σχέση με την προηγούμενη) της $(x_n + y_n)$ με όριο το $\overline{\lim}(x_n + y_n)$. Ακόμη, υπάρχει υποακολουθία $(x_{n_{k_l}})$ της (x_{n_k}) με κάποιο όριο $x \in \overline{\mathbb{R}}$.

Από το συμπέρασμα της άσκησης 2.5.14 συνεπάγεται ότι η $(x_{n_{k_l}})$ είναι υποακολουθία της (x_n) και άρα $x \leq \overline{\lim}\, x_n$. Πάλι από το συμπέρασμα της άσκησης 2.5.14 συνεπάγεται ότι η $(y_{n_{k_l}})$ είναι υποακολουθία της (y_n) και άρα έχει όριο το $\lim y_n$. Άρα

$$x_{n_{k_l}} + y_{n_{k_l}} \to \overline{\lim}(x_n + y_n) \quad \text{και} \quad x_{n_{k_l}} \to x \quad \text{και} \quad y_{n_{k_l}} \to \lim y_n.$$

Συνεπάγεται

$$\overline{\lim}(x_n + y_n) = x + \lim y_n \leq \overline{\lim}\, x_n + \lim y_n.$$

Από τις δύο ανισότητες που αποδείξαμε συνεπάγεται ότι $\overline{\lim}(x_n + y_n) = \overline{\lim}\, x_n + \lim y_n$.

Άσκηση 2.7.10. *Έστω (x_{n_k}) υποακολουθία της (x_n).*
Δείτε την άσκηση 2.5.14 και αποδείξτε ότι κάθε υποακολουθιακό όριο της (x_{n_k}) είναι υποακολουθιακό όριο και της (x_n).
Αποδείξτε ότι $\overline{\lim}\, x_{n_k} \leq \overline{\lim}\, x_n$.

Λύση: Έστω x οποιοδήποτε υποακολουθιακό όριο της (x_{n_k}). Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει υποακολουθία της (x_{n_k}) με όριο x. Όμως, η υποακολουθία αυτή της (x_{n_k}) είναι, σύμφωνα με το αποτέλεσμα της άσκησης 2.5.14, υποακολουθία και της (x_n). Άρα το x είναι υποακολουθιακό όριο και της (x_n).
Τώρα, το $\overline{\lim}\, x_{n_k}$ είναι υποακολουθιακό όριο της (x_{n_k}), οπότε είναι υποακολουθιακό όριο και της (x_n). Άρα $\overline{\lim}\, x_{n_k} \leq \overline{\lim}\, x_n$.

Άσκηση 2.7.11. [α] *Αποδείξτε ότι ο $x \in \overline{\mathbb{R}}$ είναι υποακολουθιακό όριο της ακολουθίας (x_n) αν και μόνο αν για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει $x_n \in N_x(\epsilon)$ για άπειρους n.*
[β] *Έστω $X \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ το σύνολο των υποακολουθιακών ορίων της ακολουθίας (x_n). Αν (y_n) είναι οποιαδήποτε ακολουθία στο X και $y_n \to y \in \overline{\mathbb{R}}$, αποδείξτε ότι $y \in X$.*
Έστω $a < b < c \leq d$. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει ακολουθία (x_n) με σύνολο υποακολουθιακών ορίων το $[a, b) \cup [c, d]$.

Λύση: Έστω ότι ο $x \in \overline{\mathbb{R}}$ είναι υποακολουθιακό όριο της ακολουθίας (x_n). Δηλαδή, υπάρχει υποακολουθία (x_{n_k}) της (x_n) ώστε $x_{n_k} \to x$. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει $x_{n_k} \in N_x(\epsilon)$ από κάποιον k και πέρα και, επομένως, ισχύει $x_n \in N_x(\epsilon)$ για άπειρους n (τους $n = n_k$ από κάποιον k και πέρα).
Αντιστρόφως, έστω ότι για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει $x_n \in N_x(\epsilon)$ για άπειρους n.
Τότε υπάρχει n_1 ώστε $x_{n_1} \in N_x(1)$. Κατόπιν, υπάρχει $n_2 > n_1$ ώστε $x_{n_2} \in N_x(\frac{1}{2})$. Κατόπιν, υπάρχει $n_3 > n_2$ ώστε $x_{n_3} \in N_x(\frac{1}{3})$. Συνεχίζουμε επ' άπειρον και έτσι δημιουργείται μια υποακολουθία (x_{n_k}) της (x_n) με την ιδιότητα να ισχύει $x_{n_k} \in N_x(\frac{1}{k})$ για κάθε k.
Παίρνουμε τυχόντα $\epsilon > 0$. Τότε ισχύει $\frac{1}{k} < \epsilon$ και άρα $N_x(\frac{1}{k}) \subseteq N_x(\epsilon)$ από κάποιον k και πέρα. Επομένως, ισχύει $x_{n_k} \in N_x(\epsilon)$ από κάποιον k και πέρα. Άρα $x_{n_k} \to x$, οπότε το x είναι υποακολουθιακό όριο της (x_n).
[β] Παίρνουμε τυχόντα $\epsilon > 0$. Επειδή $y_n \to y$, υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $y_n \in N_y(\epsilon)$ για κάθε $n \geq n_0$.
Παίρνουμε, τώρα, οποιονδήποτε $n \geq n_0$, οπότε έχουμε ότι $y_n \in N_y(\epsilon)$. Από την φύση της περιοχής $N_y(\epsilon)$ βλέπουμε ότι υπάρχει κάποιος $\delta > 0$ ώστε $N_{y_n}(\delta) \subseteq N_y(\epsilon)$. Σύμφωνα με το συμπέρασμα του [α], επειδή ο y_n είναι υποακολουθιακό όριο της (x_m) (αλλάζουμε το γράμμα του δείκτη για να μην μπερδευτούμε με τον n που έχουμε σταθεροποιήσει), ισχύει $x_m \in N_{y_n}(\delta)$ για άπειρους m. Άρα ισχύει $x_m \in N_y(\epsilon)$ για άπειρους m.
Συμπεραίνουμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει $x_m \in N_y(\epsilon)$ για άπειρους m, οπότε, σύμφωνα με το συμπέρασμα του [α], ο y είναι υποακολουθιακό όριο της (x_n) και άρα $y \in X$.
Έστω (για άτοπο) ότι υπάρχει ακολουθία (x_n) με σύνολο υποακολουθιακών ορίων το $X = [a, b) \cup [c, d]$. Τότε μπορούμε να βρούμε ακολουθία (y_n) στο X ώστε $y_n \to b$. (Πράγματι, μπορούμε να θεωρήσουμε την ακολουθία με τύπο $y_n = b - \frac{b-a}{n}$.) Όμως, $b \notin X$ και καταλήγουμε σε αντίφαση με το προηγούμενο αποτέλεσμα.

Άσκηση 2.7.13. [α] *Αποδείξτε ότι* $\underline{\lim}\, x_n \le \underline{\lim}\, \frac{x_1+\cdots+x_n}{n} \le \overline{\lim}\, \frac{x_1+\cdots+x_n}{n} \le \overline{\lim}\, x_n$.
Πώς από αυτό προκύπτει ως άμεση συνέπεια το θεώρημα του Cesáro στην άσκηση 2.3.41[α];

Λύση: Το πρώτο ερώτημα. Έστω $\overline{\lim}\, x_n < x$. Τότε ισχύει τελικά $x_n < x$, οπότε υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $x_n < x$ για κάθε $n \ge n_0$. Επομένως, για κάθε $n \ge n_0$ έχουμε

$$\tfrac{x_1+\cdots+x_n}{n} = \tfrac{x_1+\cdots+x_{n_0-1}}{n} + \tfrac{x_{n_0}+\cdots+x_n}{n} < \tfrac{x_1+\cdots+x_{n_0-1}}{n} + \tfrac{(n-n_0+1)x}{n}.$$

Σύμφωνα με το αποτέλεσμα της άσκησης 2.7.5, συνεπάγεται

$$\overline{\lim}\, \tfrac{x_1+\cdots+x_n}{n} \le \overline{\lim}\, \big(\tfrac{x_1+\cdots+x_{n_0-1}}{n} + \tfrac{(n-n_0+1)x}{n}\big) = \lim \big(\tfrac{x_1+\cdots+x_{n_0-1}}{n} + \tfrac{(n-n_0+1)x}{n}\big) = x.$$

Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι για κάθε $x > \overline{\lim}\, x_n$ ισχύει $\overline{\lim}\, \frac{x_1+\cdots+x_n}{n} \le x$. Επομένως, συνεπάγεται ότι $\overline{\lim}\, \frac{x_1+\cdots+x_n}{n} \le \overline{\lim}\, x_n$.
Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται και η ανισότητα $\underline{\lim}\, x_n \le \underline{\lim}\, \frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$.
Εναλλακτικά, μπορούμε να εφαρμόσουμε το αποτέλεσμα με τα $\overline{\lim}$ στην ακολουθία $(-x_n)$ και να χρησιμοποιήσουμε το αποτέλεσμα της άσκησης 2.7.4 ως εξής:

$$\underline{\lim}\, x_n = -\,\overline{\lim}(-x_n) \le -\,\overline{\lim}\, \tfrac{(-x_1)+\cdots+(-x_n)}{n} = -\,\overline{\lim}\,\big(-\tfrac{x_1+\cdots+x_n}{n}\big) = \underline{\lim}\, \tfrac{x_1+\cdots+x_n}{n}.$$

Το δεύτερο ερώτημα. Έστω $x_n \to x$. Τότε είναι $\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n = x$. Από τις ανισότητες που μόλις αποδείξαμε συνεπάγεται αμέσως ότι $\underline{\lim}\, \frac{x_1+\cdots+x_n}{n} = \overline{\lim}\, \frac{x_1+\cdots+x_n}{n} = x$ και άρα $\frac{x_1+\cdots+x_n}{n} \to x$.
Αυτό ακριβώς είναι το περιεχόμενο του θεωρήματος του Cesáro.

Άσκηση 2.7.15. *Έστω ακολουθία (x_n). Θέτουμε $u_n = \sup\{x_k \,|\, k \ge n\}$ για κάθε n.*
Αν η (x_n) δεν είναι άνω φραγμένη, αποδείξτε ότι ισχύει $u_n = +\infty$ για κάθε n.
Αν η (x_n) είναι άνω φραγμένη, αποδείξτε ότι ισχύει $u_n \in \mathbb{R}$ και $u_{n+1} \le u_n$ για κάθε n, οπότε η (u_n) έχει όριο στο $[-\infty, +\infty)$. Αποδείξτε ότι $u_n \to \overline{\lim}\, x_n$.

Λύση: Το πρώτο ερώτημα. Έστω ότι η (x_n) δεν είναι άνω φραγμένη. Θεωρούμε οποιονδήποτε n και οποιονδήποτε u. Όπως είδαμε στην απόδειξη της πρότασης 2.16, υπάρχουν άπειροι όροι της ακολουθίας που είναι $> u$. Άρα ο u δεν είναι άνω φράγμα του $\{x_k \,|\, k \ge n\}$. Άρα το $\{x_k \,|\, k \ge n\}$ δεν έχει κανένα άνω φράγμα, οπότε $u_n = +\infty$.
Το δεύτερο ερώτημα. Έστω ότι η (x_n) είναι άνω φραγμένη. Τότε το $\{x_k \,|\, k \ge n\}$ είναι άνω φραγμένο, οπότε το u_n είναι αριθμός. Επίσης, ισχύει $x_k \le u_n$ για κάθε $k \ge n$ και άρα ισχύει $x_k \le u_n$ για κάθε $k \ge n+1$. Άρα ο u_n είναι άνω φράγμα του $\{x_k \,|\, k \ge n+1\}$, οπότε $u_{n+1} \le u_n$.
Άρα η (u_n) έχει όριο το οποίο είναι αριθμός ή $-\infty$. Έστω $u_n \to u$.
Θα αποδείξουμε ότι $u = \overline{\lim}\, x_n$.
Παίρνουμε οποιονδήποτε $x > u$. Επειδή $u_n \to u$, ισχύει τελικά $u_n < x$. Άρα υπάρχει κάποιος m ώστε $u_m < x$. Επομένως, ισχύει $x_n < x$ για κάθε $n \ge m$. Δηλαδή ισχύει τελικά $x_n < x$. Από αυτό συνεπάγεται ότι $\overline{\lim}\, x_n \le x$. (Αν $x < \overline{\lim}\, x_n$, τότε ισχύει $x < x_n$ για άπειρους n και αυτό αντιφάσκει με το ότι ισχύει τελικά $x_n < x$.)
Αποδείξαμε ότι ισχύει $\overline{\lim}\, x_n \le x$ για κάθε $x > u$. Άρα $\overline{\lim}\, x_n \le u$.
Τώρα, παίρνουμε οποιονδήποτε $x > \overline{\lim}\, x_n$. Τότε ισχύει τελικά $x_n < x$. Δηλαδή υπάρχει m ώστε να ισχύει $x_k < x$ για κάθε $k \ge m$, οπότε ο x είναι άνω φράγμα του $\{x_k \,|\, k \ge m\}$. Άρα $u_m \le x$. Επειδή η (u_n) είναι φθίνουσα και $u_n \to u$, συνεπάγεται $u \le x$.
Αποδείξαμε ότι ισχύει $u \le x$ για κάθε $x > \overline{\lim}\, x_n$. Άρα $u \le \overline{\lim}\, x_n$.
Από τις $\overline{\lim}\, x_n \le u$ και $u \le \overline{\lim}\, x_n$ συνεπάγεται $u = \overline{\lim}\, x_n$.

Άσκηση 2.7.16. *Δείτε την πρόταση 2.18.*
[α] *Αποδείξτε ότι το $\overline{\lim}\, x_n$ είναι ο μοναδικός αριθμός $\overline{x}$ που έχει τις εξής δύο ιδιότητες: (i) αν $\overline{x} < x$, τότε ισχύει τελικά $x_n < x$ και (ii) αν $x < \overline{x}$, τότε ισχύει $x < x_n$ για άπειρους n.*
[β] *Αν ισχύει τελικά $x_n < x$, αποδείξτε ότι $\overline{\lim}\, x_n \le x$. Αν ισχύει $x < x_n$ για άπειρους n, αποδείξτε ότι $x \le \overline{\lim}\, x_n$.*

Λύση: [α] Έστω ότι ο $\overline{x}$ έχει τις ιδιότητες (i) και (ii).

Έστω $\overline{x} < \overline{\lim}\, x_n$. Παίρνουμε οποιονδήποτε x ώστε $\overline{x} < x < \overline{\lim}\, x_n$, οπότε, λόγω της (i), ισχύει τελικά $x_n < x$. Όμως, λόγω της $x < \overline{\lim}\, x_n$, συνεπάγεται ότι ισχύει $x < x_n$ για άπειρους n και καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα $\overline{\lim}\, x_n \leq \overline{x}$.
Έστω $\overline{\lim}\, x_n < \overline{x}$. Παίρνουμε οποιονδήποτε x ώστε $\overline{\lim}\, x_n < x < \overline{x}$, οπότε, λόγω της (ii), ισχύει $x < x_n$ για άπειρους n. Τώρα, λόγω της $\overline{\lim}\, x_n < x$, ισχύει τελικά $x_n < x$ και καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα $\overline{x} \leq \overline{\lim}\, x_n$.
Από τις $\overline{\lim}\, x_n \leq \overline{x}$ και $\overline{x} \leq \overline{\lim}\, x_n$ συνεπάγεται $\overline{x} = \overline{\lim}\, x_n$.
[β] Έστω ότι ισχύει τελικά $x_n < x$. Τότε δεν μπορεί να είναι $x < \overline{\lim}\, x_n$, διότι τότε θα ίσχυε $x < x_n$ για άπειρους n. Άρα $\overline{\lim}\, x_n \leq x$.
Έστω ότι ισχύει $x < x_n$ για άπειρους n. Τότε δεν μπορεί να είναι $\overline{\lim}\, x_n < x$, διότι τότε θα ίσχυε τελικά $x_n < x$. Άρα $x \leq \overline{\lim}\, x_n$.

Άσκηση 2.7.17. *Έστω ακολουθία (x_n) με την ιδιότητα: $x_{n+1} - x_n \to 0$. Φυσικά, κάθε συγκλίνουσα ακολουθία έχει αυτήν την ιδιότητα και ένα παράδειγμα ακολουθίας με αυτήν την ιδιότητα και με όριο $+\infty$ είναι η $(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n})$.*
Αν $\underline{x} = \underline{\lim}\, x_n$ και $\overline{x} = \overline{\lim}\, x_n$, αποδείξτε ότι το σύνολο των υποακολουθιακών ορίων της (x_n) είναι ολόκληρο το διάστημα $[\underline{x}, \overline{x}] \subseteq \overline{\mathbb{R}}$.
Θεωρήστε την ακολουθία $(0, 1, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{3}{4}, \frac{2}{4}, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1, \frac{5}{6}, \frac{4}{6}, \frac{3}{6}, \frac{2}{6}, \frac{1}{6}, 0, \dots)$. Ποιό είναι το σύνολο των υποακολουθιακών ορίων της;

Λύση: Φυσικά, αν $x = \underline{x}$ ή $x = \overline{x}$, το x είναι υποακολουθιακό όριο της (x_n). Επίσης, αν το x δεν ανήκει στο διάστημα $[\underline{x}, \overline{x}]$, τότε το x δεν είναι υποακολουθιακό όριο της (x_n). Άρα αρκεί να αποδείξουμε ότι κάθε x με $\underline{x} < x < \overline{x}$ είναι υποακολουθιακό όριο της (x_n).
Έστω, λοιπόν, $\underline{x} < x < \overline{x}$.
Παίρνουμε έναν αρκετά μικρό $\epsilon > 0$ ώστε

$$\underline{x} < x - \epsilon < x < x + \epsilon < \overline{x}.$$

Υποθέτουμε (για άτοπο) ότι ισχύει τελικά $x_n \notin (x - \epsilon, x + \epsilon)$. Δηλαδή, υπάρχει κάποιος m ώστε να ισχύει

$$x_n \notin (x - \epsilon, x + \epsilon) \qquad \text{για κάθε } n \geq m.$$

Επειδή $x_{n+1} - x_n \to 0$, συνεπάγεται ότι ισχύει τελικά $|x_{n+1} - x_n| < 2\epsilon$. Επίσης, επειδή $\underline{x} < x - \epsilon$, συνεπάγεται ότι ισχύει $x_n \leq x - \epsilon$ για άπειρους n και, επειδή $x + \epsilon < \overline{x}$, συνεπάγεται ότι ισχύει $x + \epsilon \leq x_n$ για άπειρους n. Άρα υπάρχουν n_1, n_2 ώστε

$$m \leq n_1 < n_2, \qquad x_{n_1} \leq x - \epsilon, \quad x + \epsilon \leq x_{n_2}$$

και ώστε να ισχύει

$$|x_{n+1} - x_n| < 2\epsilon \qquad \text{για κάθε } n \text{ με } n_1 \leq n \leq n_2 - 1.$$

Από τους n που είναι ανάμεσα στους n_1 και n_2 θεωρούμε τον μεγαλύτερο, έστω n_0, για τον οποίο ισχύει $x_n \leq x - \epsilon$. Προφανώς, $n_1 \leq n_0 < n_2$ (αφού $x + \epsilon \leq x_{n_2}$). Επίσης,

$$x_{n_0} \leq x - \epsilon \quad \text{και} \quad x - \epsilon < x_{n_0+1}.$$

Επειδή, όμως, $m \leq n_1$, συνεπάγεται ότι για καθένα από τους n που είναι ανάμεσα στους n_1 και n_2 ισχύει $x_n \notin (x - \epsilon, x + \epsilon)$. Άρα

$$x + \epsilon \leq x_{n_0+1}.$$

Τώρα, από τις $x_{n_0} \leq x - \epsilon$ και $x + \epsilon \leq x_{n_0+1}$ συνεπάγεται $|x_{n_0+1} - x_{n_0}| \geq 2\epsilon$ και καταλήγουμε σε άτοπο, αφού ισχύει $|x_{n+1} - x_n| < 2\epsilon$ για κάθε n με $n_1 \leq n \leq n_2 - 1$.
Άρα ισχύει $x_n \in (x - \epsilon, x + \epsilon)$ για άπειρους n.
Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι για κάθε αρκετά μικρό $\epsilon > 0$ (και άρα για κάθε $\epsilon > 0$) ισχύει $x_n \in N_x(\epsilon)$

για άπειρους n. Από το αποτέλεσμα της άσκησης 2.7.11[α] συνεπάγεται ότι ο x είναι υποακολουθιακό όριο της (x_n).
Στην $(0, 1, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{3}{4}, \frac{2}{4}, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1, \frac{5}{6}, \frac{4}{6}, \frac{3}{6}, \frac{2}{6}, \frac{1}{6}, 0, \dots)$ διακρίνουμε δύο συγκεκριμένες υποακολουθίες. Η μία είναι η $(\frac{1}{n})$ με όριο 0 και η άλλη είναι η $(\frac{n-1}{n})$ με όριο 1. Άρα οι $0, 1$ είναι υποακολουθιακά όρια της ακολουθίας. Επειδή όλοι οι όροι της ακολουθίας βρίσκονται στο διάστημα $[0, 1]$ δεν μπορεί να υπάρχει υποακολουθιακό όριό της εκτός του $[0, 1]$. Άρα ο 0 είναι το $\underline{\lim}$ και ο 1 είναι το $\overline{\lim}$ της ακολουθίας. Είναι, επίσης, σαφές ότι για την ακολουθία μας ισχύει η ιδιότητα $x_{n+1} - x_n \to 0$. Άρα το σύνολο των υποακολουθιακών ορίων της είναι ολόκληρο το διάστημα $[0, 1]$.

Άσκηση 2.7.18. [α] *Έστω άρρητος $a > 0$. Θεωρήστε την ακολουθία (x_n) με $x_n = na - [na]$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι το σύνολο των υποακολουθιακών ορίων της (x_n) είναι το $[0, 1]$.*

Λύση: Ισχύει $x_n \in [0, 1)$ για κάθε n και παρατηρούμε ότι ο x_n είναι άρρητος για κάθε n.
Τώρα βλέπουμε ότι ισχύει

$$x_{n+m} = \begin{cases} x_n + x_m, & \text{αν } 0 < x_n + x_m < 1 \\ x_n + x_m - 1, & \text{αν } 1 < x_n + x_m < 2 \end{cases} \tag{14.25}$$

για κάθε n, m, αφού παρατηρήσουμε ότι ισχύει $0 < x_n + x_m < 2$ και $x_n + x_m \neq 1$ για κάθε n, m.
Επίσης, βλέπουμε ότι ισχύει

$$x_{n-m} = \begin{cases} x_n - x_m, & \text{αν } 0 < x_n - x_m < 1 \\ x_n - x_m + 1, & \text{αν } -1 < x_n - x_m < 0 \end{cases} \tag{14.26}$$

για κάθε n, m με $n > m$, αφού παρατηρήσουμε ότι ισχύει $-1 < x_n - x_m < 1$ και $x_n - x_m \neq 0$ για κάθε n, m.
Τώρα έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{k} < \epsilon$.
Θεωρούμε τα διαδοχικά διαστήματα

$$[0, \tfrac{1}{k}), [\tfrac{1}{k}, \tfrac{2}{k}), \dots, [\tfrac{k-1}{k}, 1)$$

μήκους $\frac{1}{k}$ το καθένα. Το πλήθος αυτών των διαστημάτων είναι k, οπότε από τους $k+1$ αριθμούς $x_1, x_2, \dots, x_{k+1}$ *δύο τουλάχιστον* ανήκουν σε *ένα* από αυτά τα διαστήματα. Άρα υπάρχουν m, n με $1 \leq n, m \leq k+1$, $n > m$ ώστε $0 < |x_n - x_m| < \frac{1}{k}$. Οπότε, λόγω της (14.26), έχουμε είτε $x_{n-m} = x_n - x_m$, αν $0 < x_n - x_m < \frac{1}{k}$, είτε $x_{n-m} = x_n - x_m + 1$, αν $-\frac{1}{k} < x_n - x_m < 0$. Στην πρώτη περίπτωση είναι $0 < x_{n-m} < \frac{1}{k}$ και στη δεύτερη περίπτωση είναι $1 - \frac{1}{k} < x_{n-m} < 1$.
Θέτουμε $p = n - m > 0$ και συμπεραίνουμε ότι υπάρχει p ώστε

$$0 < x_p < \epsilon \quad \text{ή} \quad 1 - \epsilon < x_p < 1.$$

Αν $0 < x_p < \epsilon$ και ορίσουμε $n = [\frac{1}{x_p}]$, τότε από την (14.25) συνεπάγεται ότι

$$0 < x_p < x_{2p} < \cdots < x_{np} < 1$$

και οι αριθμοί $x_p, x_{2p}, \dots, x_{np}$ χωρίζουν το $[0, 1]$ σε υποδιαστήματα μήκους $< \epsilon$.
Αν $1 - \epsilon < x_p < 1$ και ορίσουμε $n = [\frac{1}{1 - x_p}]$, τότε πάλι από την (14.25) συνεπάγεται ότι

$$0 < x_{np} < \cdots < x_{2p} < x_p < 1$$

και οι αριθμοί $x_{np}, \dots, x_{2p}, x_p$ χωρίζουν το $[0, 1]$ σε υποδιαστήματα μήκους $< \epsilon$.
Τώρα, εύκολα συμπεραίνουμε ότι κάθε υποδιάστημα του $[0, 1]$, οσοδήποτε μικρού μήκους, περιέχει άπειρους όρους της (x_n). Επομένως, το σύνολο των υποακολουθιακών ορίων της (x_n) είναι το $[0, 1]$.

14.3 Κεφάλαιο 3.

Άσκηση 3.1.1. *Έστω $a < b < c$. Βρείτε τα σημεία συσσώρευσης των $(a, b) \cup (b, c)$, $(a, b) \cup \{c + \frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$.*

Λύση: Κάθε σημείο του $[a, c]$, συμπεριλαμβανομένων των a, b, c, είναι σημείο συσσώρευσης του $A = (a, b) \cup (b, c)$. Δεν υπάρχει άλλο σημείο συσσώρευσης του A: αν $x < a$ ή αν $c < x$, υπάρχει περιοχή του x αρκετά μικρή ώστε να μην τέμνει το A.
Κάθε σημείο του $[a, b]$ είναι σημείο συσσώρευσης του $B = (a, b) \cup \{c + \frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$. Επίσης, το c είναι σημείο συσσώρευσης του B. Πράγματι, επειδή $c + \frac{1}{n} \to c$ και $c + \frac{1}{n} \neq c$ για κάθε n, κάθε περιοχή του c περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο του B το οποίο είναι $\neq c$. Τώρα, εκτός από τα σημεία του $[a, b] \cup \{c\}$ δεν υπάρχει άλλο σημείο συσσώρευσης του B. Αν $x < a$ ή αν $b < x < c$ ή αν $c + 1 < x$, τότε, προφανώς, υπάρχει περιοχή του x η οποία δεν τέμνει το B. Επίσης, τα σημεία $c + \frac{1}{n}$ του B είναι μεμονωμένα σημεία του, διότι τα δύο κοντινότερα σημεία του B προς το $c + \frac{1}{n}$ είναι το $c + \frac{1}{n+1}$ και το $c + \frac{1}{n-1}$ (το δεύτερο δεν υπάρχει αν $n = 1$), οπότε υπάρχει περιοχή του $c + \frac{1}{n}$ αρκετά μικρή ώστε να μην περιέχει κανένα σημείο του B εκτός από το ίδιο το $c + \frac{1}{n}$. Τέλος, για κάθε x ανάμεσα σε δύο διαδοχικά σημεία $c + \frac{1}{n+1}$ και $c + \frac{1}{n}$ του B υπάρχει, προφανώς, περιοχή του x η οποία δεν τέμνει το B. Άρα, λοιπόν, το σύνολο των σημείων συσσώρευσης του B είναι το $[a, b] \cup \{c\}$.

Άσκηση 3.1.2. *Αποδείξτε ότι το $+\infty$ είναι σημείο συσσώρευσης του A αν και μόνο αν το A δεν είναι άνω φραγμένο.*

Λύση: Το $+\infty$ είναι σημείο συσσώρευσης του A αν και μόνο αν για κάθε $N > 0$ υπάρχει $x \in A$, $x > N$ αν και μόνο αν κανένας $N > 0$ δεν είναι άνω φράγμα του A αν και μόνο αν το A δεν είναι άνω φραγμένο.

Άσκηση 3.1.3. *Αποδείξτε ότι το $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ είναι σημείο συσσώρευσης του συνόλου A αν και μόνο αν για κάθε $\delta > 0$ η περιοχή $N_\xi(\delta)$ του ξ περιέχει άπειρα στοιχεία του A.*

Λύση: Η μία από τις δύο συνεπαγωγές είναι απλή. Αν για κάθε $\delta > 0$ η περιοχή $N_\xi(\delta)$ του ξ περιέχει άπειρα στοιχεία του A, τότε η $N_\xi(\delta)$ περιέχει τουλάχιστον ένα στοιχείο του A διαφορετικό από το ίδιο το ξ. Άρα το ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A.
Τώρα, έστω ότι το ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A.
Ας υποθέσουμε (για άτοπο) ότι υπάρχει κάποιος $\delta > 0$ ώστε η $N_\xi(\delta)$ να περιέχει πεπερασμένα στοιχεία του A (από τα οποία ένα μπορεί να είναι το ίδιο το ξ). Αν το μοναδικό στοιχείο του A στην $N_\xi(\delta)$ είναι το ξ, τότε αυτομάτως το ξ είναι μεμονωμένο σημείο του A. Αν τα στοιχεία του A στην $N_\xi(\delta)$ είναι, εκτός του ξ (το οποίο μπορεί και να μην περιέχεται στο A), τα $x_1, \ldots, x_n$, τότε μπορούμε να βρούμε $\delta' > 0$ ώστε η $N_\xi(\delta')$ να μην περιέχει κανένα στοιχείο του A (εκτός ίσως από το ίδιο το ξ). Πράγματι, κάποιος από τους $x_1, \ldots, x_n$ είναι κοντινότερος προς το ξ και τότε θεωρούμε $\delta' > 0$ ώστε να είναι $\delta' \leq \delta$ και ώστε η $N_\xi(\delta')$ να μην περιέχει αυτόν τον κοντινότερο προς το ξ από τους $x_1, \ldots, x_n$. Άρα και πάλι το ξ δεν είναι σημείο συσσώρευσης του A.
Έτσι σε κάθε περίπτωση καταλήγουμε σε άτοπο, οπότε για κάθε $\delta > 0$ η περιοχή $N_\xi(\delta)$ του ξ περιέχει άπειρα στοιχεία του A.

Άσκηση 3.1.4. *Έστω $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ και $A \subseteq B$. Αν το ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A, αποδείξτε ότι είναι σημείο συσσώρευσης και του B.*

Λύση: Έστω ότι το ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A. Τότε κάθε περιοχή $N_\xi(\delta)$ περιέχει τουλάχιστον έναν $x \in A$ με $x \neq \xi$. Επειδή $A \subseteq B$, συνεπάγεται ότι κάθε περιοχή $N_\xi(\delta)$ περιέχει τουλάχιστον έναν $x \in B$ με $x \neq \xi$. Άρα το ξ είναι σημείο συσσώρευσης του B.

Άσκηση 3.1.5. *Αποδείξτε ότι κάθε $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ είναι σημείο συσσώρευσης των συνόλων $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Βρείτε τα σημεία συσσώρευσης των συνόλων $(a, b) \cap \mathbb{Q}$ και $(a, b) \setminus \mathbb{Q}$.*

Λύση: Έστω $\xi \in \mathbb{R}$. Τότε, λόγω της πυκνότητα των ρητών, για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $r \in \mathbb{Q}$ ώστε $\xi < r < \xi + \delta$ (αλλά και $r \in \mathbb{Q}$ ώστε $\xi - \delta < r < \xi$). Άρα για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $r \in \mathbb{Q} \cap N_\xi(\delta)$

με $r \neq \xi$. Άρα ο ξ είναι σημείο συσσώρευσης του $\mathbb{Q}$.
Έστω $\xi = +\infty$. Πάλι λόγω της πυκνότητας των ρητών, για κάθε $N > 0$ υπάρχει $r \in \mathbb{Q}$ ώστε $r > N$. Άρα το $\xi = +\infty$ είναι σημείο συσσώρευσης του $\mathbb{Q}$. Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι και το $\xi = -\infty$ είναι σημείο συσσώρευσης του $\mathbb{Q}$.
Η απόδειξη στην περίπτωση του $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ είναι ίδια: χρησιμοποιούμε την πυκνότητα των αρρήτων.

Τα σημεία συσσώρευσης των συνόλων $(a, b) \cap \mathbb{Q}$ και $(a, b) \setminus \mathbb{Q}$ είναι τα σημεία του $[a, b]$. Δείτε το εσείς, χρησιμοποιώντας και πάλι την πυκνότητα των ρητών και των αρρήτων.

Άσκηση 3.1.6. *Έστω μη-κενό σύνολο A. Αποδείξτε ότι, αν το $\sup A$ δεν ανήκει στο A, τότε είναι σημείο συσσώρευσης του A.*

Βρείτε μη-κενό σύνολο A ώστε το $\sup A$ να μην είναι σημείο συσσώρευσής του.

Λύση: Η δεύτερη χαρακτηριστική ιδιότητα του $\sup A$ είναι ότι υπάρχει στοιχείο του A όσο κοντά θέλουμε στο $\sup A$ και, μάλιστα, επειδή το $\sup A$ δεν ανήκει στο A, το στοιχείο αυτό του A είναι $\neq \sup A$. Δηλαδή, για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $x \in A \cap N_{\sup A}(\delta)$ ώστε $x \neq \sup A$. Άρα το $\sup A$ είναι σημείο συσσώρευσης του A.

Το $A = \{a\}$ έχει $\sup A = a$ και ο a είναι μεμονωμένο σημείο του A. Ομοίως, αν $a < b < c$, το $A = [a, b] \cup \{c\}$ έχει $\sup A = c$ και ο c είναι μεμονωμένο σημείο του A. Και στα δύο παραδείγματα το $\sup A$ ανήκει στο A.

Άσκηση 3.1.7. *Ποιό είναι το σύνολο στο οποίο έχει νόημα και ποιό το σύνολο στο οποίο ισχύει η ανισότητα $\frac{1}{x^2} > 100$; Αποδείξτε ότι αυτή η ανισότητα ισχύει κοντά στον 0.*

Ποιό είναι το σύνολο στο οποίο έχει νόημα και ποιό το σύνολο στο οποίο ισχύει η $(-1)^{[1/x]} < 0$; Αποδείξτε ότι η ανισότητα αυτή ισχύει σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στον 0 και ότι είναι λάθος ότι ισχύει κοντά στον 0.

Λύση: Το σύνολο στο οποίο έχει νόημα η $\frac{1}{x^2} > 100$ είναι το σύνολο των x για τους οποίους ορίζεται η $\frac{1}{x^2}$, δηλαδή το $\mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.
Το σύνολο στο οποίο ισχύει η $\frac{1}{x^2} > 100$ το βρίσκουμε λύνοντας την ανισότητα. Η $\frac{1}{x^2} > 100$ ισοδυναμεί με την $0 < x^2 < \frac{1}{100}$ και αυτή με την $0 < |x| < \frac{1}{10}$. Άρα το σύνολο στο οποίο ισχύει η $\frac{1}{x^2} > 100$ είναι το $(-\frac{1}{10}, 0) \cup (0, \frac{1}{10})$ και, επομένως, η $\frac{1}{x^2} > 100$ ισχύει κοντά στον 0.

Το σύνολο στο οποίο έχει νόημα η $(-1)^{[1/x]} < 0$ είναι το σύνολο των x για τους οποίους ορίζεται η $(-1)^{[1/x]} < 0$, δηλαδή το $\mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.
Το σύνολο στο οποίο ισχύει η $(-1)^{[1/x]} < 0$ το βρίσκουμε λύνοντας την ανισότητα.
Παρατηρούμε ότι ο $[\frac{1}{x}]$ είναι ακέραιος, οπότε η $(-1)^{[1/x]} < 0$ ισοδυναμεί με το να είναι ο $[\frac{1}{x}]$ *περιττός* ακέραιος, δηλαδή με το να υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$ ώστε να είναι $[\frac{1}{x}] = 2k - 1$. Επομένως, η $(-1)^{[1/x]} < 0$ ισοδυναμεί με το να υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$ ώστε να είναι $2k - 1 \leq \frac{1}{x} < 2k$. Τώρα βλέπουμε ότι, αν $k \geq 1$, τότε η $2k - 1 \leq \frac{1}{x} < 2k$ είναι ισοδύναμη με την $\frac{1}{2k} < x \leq \frac{1}{2k-1}$. Επίσης, αν $k = 0$, τότε η $-1 \leq \frac{1}{x} < 0$ είναι ισοδύναμη με την $-\infty < x \leq -1$. Και, τέλος, αν $k \leq -1$, τότε η $2k - 1 \leq \frac{1}{x} < 2k$ είναι ισοδύναμη με την $\frac{1}{2k} < x \leq \frac{1}{2k-1}$. Στην τελευταία περίπτωση μπορούμε να γράψουμε $-k$ στη θέση του k και να πούμε ότι, αν $k \geq 1$, τότε η $-2k - 1 \leq \frac{1}{x} < -2k$ είναι ισοδύναμη με την $-\frac{1}{2k} < x \leq -\frac{1}{2k+1}$. Άρα το σύνολο στο οποίο ισχύει η $(-1)^{[1/x]} < 0$ είναι το

$$(-\infty, -1] \cup \bigcup_{k=1}^{+\infty} \big(-\tfrac{1}{2k}, -\tfrac{1}{2k+1} \big] \cup \bigcup_{k=1}^{+\infty} \big(\tfrac{1}{2k}, \tfrac{1}{2k-1} \big].$$

Αρχικά παρατηρούμε ότι ο 0 είναι (και από τις δύο μεριές του) σημείο συσσώρευσης του συνόλου στο οποίο έχει νόημα η $(-1)^{[1/x]} < 0$, δηλαδή του $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.
Κατόπιν, παρατηρούμε ότι το σύνολο στο οποίο ισχύει η $(-1)^{[1/x]} < 0$ βρίσκεται και στις δύο μεριές του 0 και αποτελείται από άπειρα διαστήματα τα οποία προσεγγίζουν απεριόριστα τον 0. Δηλαδή, μπορούμε να βρούμε στοιχεία όσο θέλουμε κοντά στον 0 (και από τις δύο μεριές του) για τα οποία ισχύει η $(-1)^{[1/x]} < 0$. Πράγματι, για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $-\delta < -\frac{1}{2k+1} < 0$ και $0 < \frac{1}{2k-1} < \delta$ και οι $-\frac{1}{2k+1}$ και $\frac{1}{2k-1}$ είναι στοιχεία για τα οποία ισχύει η $(-1)^{[1/x]} < 0$. Άρα η $(-1)^{[1/x]} < 0$ ισχύει σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στον 0 από αριστερά του και σε σημεία όσο

θέλουμε κοντά στον 0 από δεξιά του.
Όμως, είναι λάθος ότι η $(-1)^{[1/x]} < 0$ ισχύει κοντά στον 0 είτε από τα αριστερά του είτε από τα δεξιά του. Πράγματι, δεν υπάρχει $\delta > 0$ ώστε η $(-1)^{[1/x]} < 0$ να ισχύει είτε για κάθε $x \in (-\delta, 0)$ είτε για κάθε $x \in (0, \delta)$. Διότι για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $-\delta < -\frac{1}{2k} < 0$ και $0 < \frac{1}{2k} < \delta$ και οι $-\frac{1}{2k}$ και $\frac{1}{2k}$ είναι στοιχεία για τα οποία *δεν* ισχύει η $(-1)^{[1/x]} < 0$.

Άσκηση 3.1.8. *Αποδείξτε ότι το $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ είναι σημείο συσσώρευσης του συνόλου A αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία (x_n) στο A ώστε $x_n \to \xi$ και ώστε να ισχύει $x_n \neq \xi$ για κάθε n.*
Αποδείξτε ότι ο $\xi \in \mathbb{R}$ είναι από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του συνόλου A αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία (x_n) στο A ώστε $x_n \to \xi$ και ώστε να ισχύει $x_n > \xi$ για κάθε n.

Λύση: Έστω ότι το ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $x_n \in A \cap N_\xi(\frac{1}{n})$ με $x_n \neq \xi$. Άρα υπάρχει ακολουθία (x_n) στο A για την οποία ισχύει $x_n \neq \xi$ για κάθε n. Επίσης, έστω $\delta > 0$. Τότε ισχύει τελικά $\frac{1}{n} \leq \delta$, οπότε ισχύει τελικά $N_\xi(\frac{1}{n}) \subseteq N_\xi(\delta)$. Άρα ισχύει τελικά $x_n \in N_\xi(\delta)$ και, επομένως, $x_n \to \xi$.
Αντιστρόφως, έστω ότι υπάρχει ακολουθία (x_n) στο A ώστε $x_n \to \xi$ και ώστε να ισχύει $x_n \neq \xi$ για κάθε n. Επειδή $x_n \to \xi$, για κάθε $\delta > 0$ ισχύει τελικά $x_n \in N_\xi(\delta)$ και, επειδή ισχύει $x_n \neq \xi$ για κάθε n, για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $x \in A \cap N_\xi(\delta)$ με $x \neq \xi$ (ένας τέτοιος x είναι ένας οποιοσδήποτε x_n με κατάλληλα μεγάλο n). Άρα το ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A.
Έστω ότι ο ξ είναι από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $x_n \in A$ ώστε $\xi < x_n < \xi + \frac{1}{n}$. Άρα υπάρχει ακολουθία (x_n) στο A ώστε $x_n \to \xi$ και ώστε να ισχύει $x_n > \xi$ για κάθε n.
Αντιστρόφως, έστω ότι υπάρχει ακολουθία (x_n) στο A ώστε $x_n \to \xi$ και ώστε να ισχύει $x_n > \xi$ για κάθε n. Επειδή $x_n \to \xi$, για κάθε $\delta > 0$ ισχύει τελικά $\xi - \delta < x_n < \xi + \delta$ και, επειδή ισχύει $x_n > \xi$ για κάθε n, ισχύει τελικά $\xi < x_n < \xi + \delta$. Άρα για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $x \in A$ ώστε $\xi < x < \xi + \delta$ (ένας τέτοιος x είναι ένας οποιοσδήποτε x_n με κατάλληλα μεγάλο n). Επομένως, ο ξ είναι από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A.

Άσκηση 3.1.9. *Έστω ιδιότητα η οποία έχει νόημα στο σύνολο A και $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A.*
Αποδείξτε ότι η ιδιότητα ισχύει σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο ξ αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία (x_n) στο A ώστε $x_n \to \xi$, ώστε να ισχύει $x_n \neq \xi$ για κάθε n και ώστε ο x_n να έχει την ιδιότητα για κάθε n.

Λύση: Έστω ότι η ιδιότητα ισχύει σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο ξ. Τότε για κάθε $\delta > 0$ η ιδιότητα ισχύει για τουλάχιστον έναν $x \in A \cap N_\xi(\delta)$ με $x \neq \xi$. Επομένως, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $x_n \in A \cap N_\xi(\frac{1}{n})$ ώστε $x_n \neq \xi$ και ώστε η ιδιότητα να ισχύει για τον x_n. Άρα υπάρχει ακολουθία (x_n) στο A για την οποία ισχύει $x_n \neq \xi$ για κάθε n και ώστε ο x_n να έχει την ιδιότητα για κάθε n. Επίσης, έστω $\delta > 0$. Τότε ισχύει τελικά $\frac{1}{n} \leq \delta$, οπότε ισχύει τελικά $N_\xi(\frac{1}{n}) \subseteq N_\xi(\delta)$. Άρα ισχύει τελικά $x_n \in N_\xi(\delta)$ και, επομένως, $x_n \to \xi$.
Αντιστρόφως, έστω ότι υπάρχει ακολουθία (x_n) στο A ώστε $x_n \to \xi$, ώστε να ισχύει $x_n \neq \xi$ για κάθε n και ώστε ο x_n να έχει την ιδιότητα για κάθε n. Επειδή $x_n \to \xi$, για κάθε $\delta > 0$ ισχύει τελικά $x_n \in N_\xi(\delta)$ και, επειδή ισχύει $x_n \neq \xi$ για κάθε n, για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $x \in N_\xi(\delta)$ με $x \neq \xi$ ο οποίος να έχει την ιδιότητα (ένας τέτοιος x είναι ένας οποιοσδήποτε x_n με κατάλληλα μεγάλο n). Επομένως, η ιδιότητα ισχύει σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο ξ.

Άσκηση 3.1.10. [α] *Αποδείξτε ότι κάθε άπειρο και φραγμένο σύνολο έχει τουλάχιστον ένα σημείο συσσώρευσης στο $\mathbb{R}$.*

Λύση: Έστω ένα άπειρο και φραγμένο σύνολο A.
Αφού το A είναι άπειρο σύνολο, υπάρχει ακολουθία (x_n) στο A με ανά δύο διαφορετικούς όρους, δηλαδή ώστε να ισχύει $x_n \neq x_m$ για κάθε n, m με $n \neq m$.
Το A είναι φραγμένο, οπότε και η (x_n) είναι φραγμένη. Σύμφωνα με το θεώρημα των Bolzano - Weierstrass, υπάρχει υποακολουθία της (x_n) η οποία συγκλίνει: έστω $x_{n_k} \to x$.

Τώρα, έστω τυχών $\delta > 0$. Τότε στην περιοχή $N_x(\delta)$ ανήκουν οι όροι x_{n_k} από κάποιον k και πέρα και, επειδή οι όροι αυτοί είναι ανά δύο διαφορετικοί, στην $N_x(\delta)$ ανήκουν άπειροι όροι της (x_n) και άρα άπειρα στοιχεία του A.
Άρα ο x είναι σημείο συσσώρευσης του A.

Άσκηση 3.2.1. *Έχουν νόημα τα* $\lim_{x\to 0-}\frac{1}{x+|x|}$, $\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{3x^2+2x-6}}$, $\lim_{x\to 0}\sqrt{-x^2}$, $\lim_{x\to-\infty}(x+2)^{6/4}$*;*
Προσέξτε: η ερώτηση είναι αν έχουν νόημα τα όρια και όχι αν υπάρχουν ή ποιά είναι η τιμή τους. Αποδείξτε ότι τα $\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin(1/x)}$, $\lim_{x\to+\infty}\log\sin x$ *έχουν νόημα.*

Λύση: Κανένα από τα τέσσερα πρώτα όρια δεν έχει νόημα. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\frac{1}{x+|x|}$ είναι το $(0,+\infty)$ και ο 0 δεν είναι σημείο συσσώρευσής του από τα αριστερά του. Το πεδίο ορισμού της $\frac{1}{\sqrt{3x^2+2x-6}}$ είναι το $(-\infty,\frac{-1-\sqrt{19}}{3})\cup(\frac{-1+\sqrt{19}}{3},+\infty)$ και ο 1 δεν είναι σημείο συσσώρευσής του διότι $\frac{-1-\sqrt{19}}{3}<1<\frac{-1+\sqrt{19}}{3}$. Το πεδίο ορισμού της $\sqrt{-x^2}$ είναι το $\{0\}$ και ο 0 είναι μεμονωμένο σημείο του. Το πεδίο ορισμού της $(x+2)^{6/4}$ είναι το $[-2,+\infty)$ και το $-\infty$ δεν είναι σημείο συσσώρευσής του.
Τα δύο τελεταία όρια έχουν νόημα. Το πεδίο ορισμού της $\frac{1}{\sin(1/x)}$ είναι το

$$\mathbb{R}\setminus\big(\{0\}\cup\big\{\pm\tfrac{1}{n\pi}\,|\,n\in\mathbb{N}\big\}\big)$$

και ο 0 είναι σημείο συσσώρευσής του. Τέλος, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\log\sin x$ είναι το $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}(2n\pi,(2n+1)\pi)$ και το $+\infty$ είναι σημείο συσσώρευσής του.

Άσκηση 3.2.2. *Αποδείξτε βάσει των ορισμών ότι* $\lim_{x\to 2}3x=6$, $\lim_{x\to 1}(\frac{1}{x}+1)=2$, $\lim_{x\to 1}x^2=1$, $\lim_{x\to 1}\frac{3x}{(x-1)^2}=+\infty$.

Λύση: Για το πρώτο όριο, παίρνουμε τυχόντα $\epsilon>0$ και πρέπει να αποδείξουμε ότι υπάρχει $\delta>0$ ώστε από την $0<|x-2|<\delta$ να συνεπάγεται η $|3x-6|<\epsilon$.
Η $|3x-6|<\epsilon$ συνεπάγεται από την $|x-2|<\frac{\epsilon}{3}$, οπότε αν θεωρήσουμε οποιονδήποτε δ με $0<\delta\leq\frac{\epsilon}{3}$, τότε από την $0<|x-2|<\delta$ συνεπάγεται η $|x-2|<\frac{\epsilon}{3}$ και από αυτήν συνεπάγεται η $|3x-6|<\epsilon$.
Για το δεύτερο όριο, παίρνουμε τυχόντα $\epsilon>0$ και πρέπει να αποδείξουμε ότι υπάρχει $\delta>0$ ώστε από την $0<|x-1|<\delta$ να συνεπάγεται η $|(\frac{1}{x}+1)-2|<\epsilon$.
Η $|(\frac{1}{x}+1)-2|<\epsilon$ συνεπάγεται από την $\frac{|x-1|}{|x|}<\epsilon$. Τώρα προσπαθούμε να απλοποιήσουμε τον $\frac{|x-1|}{|x|}$ μικραίνοντας τον παρονομαστή. Φυσικά, πρέπει να αποφύγουμε τον 0 και αυτό το πετυχαίνουμε παραμένοντας κοντά στον 1: παρατηρούμε ότι, αν $0<|x-1|<\frac{1}{2}$, τότε είναι $|x|>\frac{1}{2}$ και, επομένως, $\frac{|x-1|}{|x|}<2|x-1|$. Δηλαδή:

$$0<\delta\leq\tfrac{1}{2}\ :\qquad 0<|x-1|<\delta\ \Rightarrow\ \tfrac{|x-1|}{|x|}<2|x-1|. \tag{14.27}$$

Τώρα, η $2|x-1|<\epsilon$ συνεπάγεται από την $|x-1|<\frac{\epsilon}{2}$, οπότε, αν πάρουμε οποιονδήποτε δ ώστε $0<\delta\leq\frac{\epsilon}{2}$, τότε από την $0<|x-1|<\delta$ συνεπάγεται η $|x-1|<\frac{\epsilon}{2}$ και από αυτήν συνεπάγεται η $2|x-1|<\epsilon$. Δηλαδή:

$$0<\delta\leq\tfrac{\epsilon}{2}\ :\qquad 0<|x-1|<\delta\ \Rightarrow\ 2|x-1|<\epsilon. \tag{14.28}$$

Συνδυάζοντας τις (14.27) και (14.28), έχουμε ότι:

$$0<\delta\leq\min\{\tfrac{1}{2},\tfrac{\epsilon}{2}\}\ :\ 0<|x-1|<\delta\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}\frac{|x-1|}{|x|}<2|x-1|\\ 2|x-1|<\epsilon\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{|x-1|}{|x|}<\epsilon\Rightarrow\big|\big(\tfrac{1}{x}+1\big)-2\big|<\epsilon.$$

Για το τρίτο όριο, παίρνουμε τυχόντα $\epsilon>0$ και πρέπει να αποδείξουμε ότι υπάρχει $\delta>0$ ώστε από την $0<|x-1|<\delta$ να συνεπάγεται η $|x^2-1|<\epsilon$.

Η $|x^2-1|<\epsilon$ γράφεται $|x+1||x-1|<\epsilon$. Θέλοντας να απλοποιήσουμε το $|x+1||x-1|$ μεγαλώνοντας το $|x+1|$, παρατηρούμε ότι όταν ο x είναι κοντά στον 1 ο $|x+1|$ δεν μπορεί να είναι πολύ μεγάλος. Πράγματι, αν είναι $|x-1|<1$, τότε συνεπάγεται $|x+1|\leq|x-1|+2<3$ και, επομένως, $|x^2-1|=|x+1||x-1|<3|x-1|$. Δηλαδή:

$$0<\delta\leq 1\ :\qquad 0<|x-1|<\delta\ \Rightarrow\ |x^2-1|<3|x-1|. \tag{14.29}$$

Τώρα, η $3|x-1|<\epsilon$ συνεπάγεται από την $|x-1|<\frac{\epsilon}{3}$, οπότε, αν θεωρήσουμε οποιονδήποτε δ ώστε $0<\delta\leq\frac{\epsilon}{3}$, τότε από την $0<|x-1|<\delta$ συνεπάγεται η $|x-1|<\frac{\epsilon}{3}$ και από αυτήν συνεπάγεται η $3|x-1|<\epsilon$. Δηλαδή:

$$0<\delta\leq\tfrac{\epsilon}{3}\ :\qquad 0<|x-1|<\delta\ \Rightarrow\ 3|x-1|<\epsilon. \tag{14.30}$$

Συνδυάζοντας τις (14.29) και (14.30), έχουμε ότι:

$$0<\delta\leq\min\{1,\tfrac{\epsilon}{3}\}\ :\quad 0<|x-1|<\delta\ \Rightarrow\ \begin{Bmatrix}|x^2-1|<3|x-1|\\ 3|x-1|<\epsilon\end{Bmatrix}\ \Rightarrow\ |x^2-1|<\epsilon.$$

Για το τέταρτο όριο, παίρνουμε τυχόντα $M>0$ και πρέπει να αποδείξουμε ότι υπάρχει $\delta>0$ ώστε από την $0<|x-1|<\delta$ να συνεπάγεται η $\frac{3x}{(x-1)^2}>M$.
Θέλουμε να απλοποιήσουμε τον $\frac{3x}{(x-1)^2}$ μικραίνοντας τον x, αλλά προσέχοντας να μην είναι ο x πολύ κοντά στον 0 (διότι, αν ο x είναι πολύ κοντά στον 0, τότε ο $\frac{3x}{(x-1)^2}$ θα είναι πολύ κοντά στον 0 και δεν θα μπορεί να είναι $>M$). Παρατηρούμε ότι, αν είναι $|x-1|<\frac{1}{2}$, τότε συνεπάγεται $x>\frac{1}{2}$ και, επομένως, $\frac{3x}{(x-1)^2}>\frac{3}{2(x-1)^2}$. Δηλαδή:

$$0<\delta\leq\tfrac{1}{2}\ :\qquad 0<|x-1|<\delta\ \Rightarrow\ \tfrac{3x}{(x-1)^2}>\tfrac{3}{2(x-1)^2}. \tag{14.31}$$

Τώρα, η $\frac{3}{2(x-1)^2}>M$ συνεπάγεται από την $0<|x-1|<\sqrt{\frac{3}{2M}}$. Επομένως, αν πάρουμε δ με $0<\delta\leq\sqrt{\frac{3}{2M}}$, τότε από την $0<|x-1|<\delta$ συνεπάγεται η $0<|x-1|<\sqrt{\frac{3}{2M}}$ και από αυτήν συνεπάγεται η $\frac{3}{2(x-1)^2}>M$. Δηλαδή:

$$0<\delta\leq\sqrt{\tfrac{3}{2M}}\ :\qquad 0<|x-1|<\delta\ \Rightarrow\ \tfrac{3}{2(x-1)^2}>M. \tag{14.32}$$

Συνδυάζοντας τις (14.31) και (14.32), βρίσκουμε:

$$0<\delta\leq\min\left\{\tfrac{1}{2},\sqrt{\tfrac{3}{2M}}\right\}\ :\quad 0<|x-1|<\delta\ \Rightarrow\ \begin{Bmatrix}\frac{3x}{(x-1)^2}>\frac{3}{2(x-1)^2}\\ \frac{3}{2(x-1)^2}>M\end{Bmatrix}\ \Rightarrow\ \tfrac{3x}{(x-1)^2}>M.$$

Άσκηση 3.2.3. *Έστω $A\subseteq B$ και $\xi\in\overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A, οπότε, σύμφωνα με την άσκηση 3.1.4, το ξ είναι σημείο συσσώρευσης και του B. Έστω $g:B\to\mathbb{R}$ και $\lim_{x\to\xi}g(x)=\eta\in\overline{\mathbb{R}}$. Έστω $f:A\to\mathbb{R}$ ο περιορισμός της g στο A, δηλαδή $f(x)=g(x)$ για κάθε $x\in A$. Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to\xi}f(x)=\eta$.*

Λύση: Έστω τυχόν $\epsilon>0$.
Επειδή $\lim_{x\to\xi}g(x)=\eta$, υπάρχει $\delta>0$ ώστε για κάθε $x\in B\cap N_\xi(\delta)$ με $x\neq\xi$ να ισχύει $g(x)\in N_\eta(\epsilon)$.
Επειδή, όμως, $A\subseteq B$, για κάθε $x\in A\cap N_\xi(\delta)$ ισχύει $x\in B\cap N_\xi(\delta)$.
Άρα υπάρχει $\delta>0$ ώστε για κάθε $x\in A\cap N_\xi(\delta)$ με $x\neq\xi$ να ισχύει $g(x)\in N_\eta(\epsilon)$.
Τέλος, επειδή, επιπλέον, $f(x)=g(x)$ για κάθε $x\in A$, μπορούμε να πούμε ότι υπάρχει $\delta>0$ ώστε για κάθε $x\in A\cap N_\xi(\delta)$ με $x\neq\xi$ να ισχύει $f(x)\in N_\eta(\epsilon)$.
Άρα $\lim_{x\to\xi}f(x)=\eta$.

Άσκηση 3.2.4. *Έστω $A\cap B=\emptyset$ και $\xi\in\overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A και του B. Αν $f:A\to\mathbb{R}$*

και $g : B \to \mathbb{R}$, ορίζουμε $h : A \cup B \to \mathbb{R}$ με τύπο $h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{αν } x \in A \\ g(x), & \text{αν } x \in B \end{cases}$ Αποδείξτε ότι το $\lim_{x\to\xi} h(x)$ υπάρχει αν και μόνο αν τα $\lim_{x\to\xi} f(x)$, $\lim_{x\to\xi} g(x)$ υπάρχουν και είναι ίσα και ότι, σ' αυτήν την περίπτωση, $\lim_{x\to\xi} h(x) = \lim_{x\to\xi} f(x) = \lim_{x\to\xi} g(x)$.

Λύση: Έστω ότι υπάρχει το $\lim_{x\to\xi} h(x)$. Επειδή η f είναι ο περιορισμός της h στο A, από το αποτέλεσμα της άσκησης 3.2.3 συνεπάγεται ότι $\lim_{x\to\xi} f(x) = \lim_{x\to\xi} h(x)$. Ομοίως, επειδή η g είναι ο περιορισμός της h στο B, συνεπάγεται ότι $\lim_{x\to\xi} g(x) = \lim_{x\to\xi} h(x)$.
Αντιστρόφως, έστω ότι τα $\lim_{x\to\xi} f(x)$, $\lim_{x\to\xi} g(x)$ υπάρχουν και είναι ίσα: $\lim_{x\to\xi} f(x) = \lim_{x\to\xi} g(x) = \eta$.
Έστω τυχών $\epsilon > 0$.
Επειδή $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$, υπάρχει $\delta' > 0$ ώστε για κάθε $x \in A \cap N_\xi(\delta')$ με $x \neq \xi$ να ισχύει $f(x) \in N_\eta(\epsilon)$. Επίσης, επειδή $\lim_{x\to\xi} g(x) = \eta$, υπάρχει $\delta'' > 0$ ώστε για κάθε $x \in B \cap N_\xi(\delta'')$ με $x \neq \xi$ να ισχύει $g(x) \in N_\eta(\epsilon)$.
Θεωρούμε τον $\delta = \min\{\delta', \delta''\} > 0$. Προφανώς, είναι $A \cap N_\xi(\delta) \subseteq A \cap N_\xi(\delta')$ και $B \cap N_\xi(\delta) \subseteq B \cap N_\xi(\delta'')$. Επομένως, για κάθε $x \in A \cap N_\xi(\delta)$ με $x \neq \xi$ ισχύει $f(x) \in N_\eta(\epsilon)$ και για κάθε $x \in B \cap N_\xi(\delta)$ με $x \neq \xi$ ισχύει $g(x) \in N_\eta(\epsilon)$.
Τώρα, έστω $x \in (A \cup B) \cap N_\xi(\delta)$ και $x \neq \xi$. Τότε είτε $x \in A \cap N_\xi(\delta)$ και $x \neq \xi$ είτε $x \in B \cap N_\xi(\delta)$ και $x \neq \xi$. Στην πρώτη περίπτωση συνεπάγεται $f(x) \in N_\eta(\epsilon)$ και, επομένως, $h(x) \in N_\eta(\epsilon)$ (αφού ισχύει $h(x) = f(x)$ για κάθε $x \in A$). Στην δεύτερη περίπτωση συνεπάγεται $g(x) \in N_\eta(\epsilon)$ και, επομένως, $h(x) \in N_\eta(\epsilon)$ (αφού ισχύει $h(x) = g(x)$ για κάθε $x \in B$). Άρα σε κάθε περίπτωση ισχύει $h(x) \in N_\eta(\epsilon)$.
Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι για κάθε $x \in (A \cup B) \cap N_\xi(\delta)$ με $x \neq \xi$ ισχύει $h(x) \in N_\eta(\epsilon)$. Άρα $\lim_{x\to\xi} h(x) = \eta$.

Άσκηση 3.2.5. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A.*
Αποδείξτε ότι το $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$ είναι λάθος αν και μόνο αν υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε να ισχύει $f(x) \notin N_\eta(\epsilon)$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο ξ.
Αποδείξτε ότι το $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$ είναι λάθος αν και μόνο αν υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε για κάθε $\delta > 0$ να υπάρχει $x \in A \cap N_\xi(\delta)$ με $x \neq \xi$ ώστε $f(x) \notin N_\eta(\epsilon)$.

Λύση: Η διατύπωση του ορισμού του ορίου $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$ είναι:

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta \quad \Leftrightarrow \quad \text{για κάθε } \epsilon > 0 \text{ υπάρχει } \delta > 0 \text{ ώστε για κάθε } x \in A \cap N_\xi(\delta) \text{ με } x \neq \xi \\ \text{να ισχύει } f(x) \in N_\eta(\epsilon).$$

Οπότε η άρνηση του ορισμού του ορίου διατυπώνεται:

$$\neg\,(\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta) \;\Leftrightarrow\; \text{υπάρχει } \epsilon > 0 \text{ ώστε για κάθε } \delta > 0 \text{ υπάρχει } x \in A \cap N_\xi(\delta) \text{ με } x \neq \xi \\ \text{ώστε να ισχύει } f(x) \notin N_\eta(\epsilon).$$

Αυτό το τελευταίο διατυπώνεται και:

$$\neg\,(\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta) \quad \Leftrightarrow \quad \text{υπάρχει } \epsilon > 0 \text{ ώστε σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο } \xi \\ \text{να ισχύει } f(x) \notin N_\eta(\epsilon).$$

Άσκηση 3.2.6. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A και έστω $\epsilon_0 > 0$. Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$ αν και μόνο αν για κάθε ϵ με $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ ισχύει $f(x) \in N_\eta(\epsilon)$ κοντά στο ξ.*

Λύση: Η λύση είναι παρόμοια με την λύση της άσκησης 2.2.7.
Πρώτα θα αποδείξουμε την εύκολη συνεπαγωγή.
Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ (χωρίς άλλον περιορισμό) ισχύει $f(x) \in N_\eta(\epsilon)$ κοντά στο ξ. Επομένως, για κάθε ϵ με $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ ισχύει $f(x) \in N_\eta(\epsilon)$ κοντά στο ξ.

Τώρα, αντιστρόφως, έστω ότι για κάθε ϵ με $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ ισχύει $f(x) \in N_\eta(\epsilon)$ κοντά στο ξ.
Θέλουμε να αποδείξουμε ότι $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$, δηλαδή ότι για κάθε $\epsilon > 0$ (χωρίς τον περιορισμό $\epsilon \leq \epsilon_0$) ισχύει $f(x) \in N_\eta(\epsilon)$ κοντά στο ξ. Επομένως, αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $\epsilon > \epsilon_0$ ισχύει $f(x) \in N_\eta(\epsilon)$ κοντά στο ξ.
Παίρνουμε τυχόντα $\epsilon > \epsilon_0$ και εφαρμόζουμε αυτό που έχουμε υποθέσει ότι ισχύει για τον $\epsilon = \epsilon_0$, δηλαδή ότι ισχύει $f(x) \in N_\eta(\epsilon_0)$ κοντά στο ξ. Τώρα, επειδή $\epsilon > \epsilon_0$, είναι $N_\eta(\epsilon_0) \subseteq N_\eta(\epsilon)$. Επομένως, ισχύει $f(x) \in N_\eta(\epsilon)$ κοντά στο ξ.
Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι για κάθε $\epsilon > \epsilon_0$ και άρα *για κάθε* $\epsilon > 0$ ισχύει $f(x) \in N_\eta(\epsilon)$ κοντά στο ξ. Άρα $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$.

Άσκηση 3.2.7. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A. Έστω ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $\epsilon > 0$ να ισχύει $f(x) \in N_\eta(\epsilon)$ για κάθε $x \in A \cap N_\xi(\delta)$ με $x \neq \xi$. Τί συμπεραίνετε;*

Υπόδειξη: Δείτε την λύση της άσκησης 2.2.8. Το συμπέρασμα είναι ότι η συνάρτηση f είναι σταθερή στο $(A \setminus \{\xi\}) \cap N_\xi(\delta)$.

Άσκηση 3.3.1. *Βρείτε το* $\lim_{x\to1\pm} \frac{x^3-x^2-x+1}{x^5-3x^4+6x^3-10x^2+9x-3}$.

Λύση: Ο 1 είναι ρίζα του αριθμητή και του παρονομαστή. Παραγοντοποιούμε το $x-1$ και βρίσκουμε:

$$\frac{x^3-x^2-x+1}{x^5-3x^4+6x^3-10x^2+9x-3} = \frac{(x+1)(x-1)^2}{(x^2+3)(x-1)^3} = \frac{x+1}{(x^2+3)(x-1)}.$$

Άρα,

$$\lim_{x\to1-} \frac{x^3-x^2-x+1}{x^5-3x^4+6x^3-10x^2+9x-3} = -\infty, \quad \lim_{x\to1+} \frac{x^3-x^2-x+1}{x^5-3x^4+6x^3-10x^2+9x-3} = +\infty.$$

Άσκηση 3.3.2. *Βρείτε τα* $\lim_{x\to0\pm}(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{|x|})$, $\lim_{x\to0} \frac{1}{x^2-|x|}$.

Λύση: Έχουμε:

$$\lim_{x\to0+} \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{|x|}\right) = \lim_{x\to0+} \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to0+} \frac{1+x^2}{x^3} = +\infty$$

και

$$\lim_{x\to0-} \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{|x|}\right) = \lim_{x\to0-} \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to0-} \frac{1-x^2}{x^3} = -\infty.$$

Επίσης:

$$\lim_{x\to0} \frac{1}{x^2-|x|} = \lim_{x\to0} \frac{1}{|x|(|x|-1)} = -\infty.$$

Άσκηση 3.3.3. *Βρείτε τα* $\lim_{x\to0}(\frac{2}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}})$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{-3x^{-2}+2x^{6/5}-4}{x^{6/5}-2x^{9/8}+2}$.

Λύση: Το πρώτο όριο είναι ουσιαστικά όριο για $x \to 0+$, αφού το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\frac{2}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ είναι το $(0, +\infty)$. Υπολογίζουμε:

$$\lim_{x\to0} \left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right) = \lim_{x\to0} \frac{2\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}} = -\infty.$$

Επίσης, παραγοντοποιώντας από αριθμητή και παρονομαστή την (κοινή) μέγιστη δύναμη $x^{6/5}$, έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-3x^{-2}+2x^{6/5}-4}{x^{6/5}-2x^{9/8}+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-3x^{-16/5}+2-4x^{-6/5}}{1-2x^{-3/40}+2x^{-6/5}} = 2.$$

Άσκηση 3.3.4. *Έστω $a \neq 0$. Βρείτε τα* $\lim_{x\to1\pm} \frac{1}{x^a-1}$, $\lim_{x\to1} \frac{x^{3a}-1}{x^a-1}$.

Λύση: Αν $a > 0$, τότε ισχύει $x^a < 1$ για $0 \leq x < 1$ και ισχύει $x^a > 1$ για $x > 1$. Άρα

$$\lim_{x\to1-} \frac{1}{x^a-1} = -\infty, \qquad \lim_{x\to1+} \frac{1}{x^a-1} = +\infty.$$

Αν $a < 0$, τότε ισχύει $x^a > 1$ για $0 < x < 1$ και ισχύει $x^a < 1$ για $x > 1$. Άρα

$$\lim_{x\to1-} \frac{1}{x^a-1} = +\infty, \qquad \lim_{x\to1+} \frac{1}{x^a-1} = -\infty.$$

Τέλος:
$$\lim_{x\to1}\frac{x^{3a}-1}{x^a-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x^a-1)(x^{2a}+x^a+1)}{x^a-1}=\lim_{x\to1}(x^{2a}+x^a+1)=3.$$

Άσκηση 3.3.5. *Βρείτε το* $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$.

Λύση: Το $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$ εμφανίζεται ως απροσδιόριστη μορφή $(+\infty)-(+\infty)$. Όμως, χρησιμοποιούμε την ταυτότητα $a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b}$ και βρίσκουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}((x+1)-x)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+(1/x)}+1}=\frac{1}{2}.$$

Άσκηση 3.3.6. *Αν* $a>0$ *και* $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{ax^2+bx+c}-Ax-B)=0$, *βρείτε τους* A,B *συναρτήσει των* a,b,c *και, με τους ίδιους* A,B, *αποδείξτε ότι* $\lim_{x\to+\infty}x(\sqrt{ax^2+bx+c}-Ax-B)=\frac{4ac-b^2}{8a\sqrt{a}}$.

Λύση: Παρατηρούμε ότι, αν $A<0$, τότε συνεπάγεται $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{ax^2+bx+c}=+\infty$ και $\lim_{x\to+\infty}(-Ax-B)=+\infty$ και, επομένως, $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{ax^2+bx+c}-Ax-B)=+\infty$ το οποίο είναι άτοπο.
Αν $A=0$, τότε συνεπάγεται $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{ax^2+bx+c}=+\infty$ και $\lim_{x\to+\infty}(-Ax-B)=-B$ και, επομένως, $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{ax^2+bx+c}-Ax-B)=+\infty$ το οποίο είναι και πάλι άτοπο.
Συμπεραίνουμε ότι $A>0$ και, εφαρμόζοντας την ταυτότητα $a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b}$, έχουμε:

$$\begin{aligned}\sqrt{ax^2+bx+c}-Ax-B&=\frac{(a-A^2)x^2+(b-2AB)x+c-B^2}{\sqrt{ax^2+bx+c}+Ax+B}\\&=x\,\frac{(a-A^2)+(b-2AB)/x+(c-B^2)/x^2}{\sqrt{a+(b/x)+(c/x^2)}+A+(B/x)}.\end{aligned}\tag{14.33}$$

Άρα, αν $a-A^2\neq0$, συνεπάγεται ότι

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{ax^2+bx+c}-Ax-B)=\frac{a-A^2}{\sqrt{a}+A}(+\infty)\neq0$$

και έχουμε άτοπο.
Επομένως, $a-A^2=0$, οπότε $A=\sqrt{a}$ (αφού $A>0$).
Τότε από την (14.33) συνεπάγεται

$$\sqrt{ax^2+bx+c}-Ax-B=\frac{(b-2AB)x+c-B^2}{\sqrt{ax^2+bx+c}+Ax+B}=\frac{(b-2AB)+(c-B^2)/x}{\sqrt{a+(b/x)+(c/x^2)}+A+(B/x)}.\tag{14.34}$$

Άρα
$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{ax^2+bx+c}-Ax-B)=\frac{b-2AB}{\sqrt{a}+A}$$

και, επειδή $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{ax^2+bx+c}-Ax-B)=0$, συνεπάγεται $b-2AB=0$ και, επομένως, $B=\frac{b}{2A}=\frac{b}{2\sqrt{a}}$.
Τέλος, από την (14.34) έχουμε:

$$x(\sqrt{ax^2+bx+c}-Ax-B)=\frac{(c-B^2)x}{\sqrt{ax^2+bx+c}+Ax+B}=\frac{c-B^2}{\sqrt{a+(b/x)+(c/x^2)}+A+(B/x)},$$

οπότε
$$\lim_{x\to+\infty}x(\sqrt{ax^2+bx+c}-Ax-B)=\frac{c-B^2}{\sqrt{a}+A}=\frac{4ac-b^2}{8a\sqrt{a}}.$$

Άσκηση 3.3.7. *Βρείτε με τον κανόνα σύνθεσης τα* $\lim_{x\to\pm\infty}(\frac{3x^2-7x}{x^2+1})^{1/2}$, $\lim_{x\to0}(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3})^{1/5}$.

Λύση: Επειδή $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2-7x}{x^2+1}=3$, η συνάρτηση $\frac{3x^2-7x}{x^2+1}$ έχει θετικές τιμές κοντά στα $\pm\infty$. Άρα ορίζεται η συνάρτηση $(\frac{3x^2-7x}{x^2+1})^{1/2}$ κοντά στα $\pm\infty$. Επίσης, εύκολα βλέπουμε ότι ισχύει $\frac{3x^2-7x}{x^2+1}\neq3$ κοντά στα $\pm\infty$. Πράγματι, η $\frac{3x^2-7x}{x^2+1}=3$ ισχύει μόνο για $x=-\frac{3}{7}$. Άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα σύνθεσης και να αλλάξουμε μεταβλητή από x σε $y = \frac{3x^2-7x}{x^2+1}$ και βρίσκουμε

$$\lim_{x\to\pm\infty}(\tfrac{3x^2-7x}{x^2+1})^{1/2} = \lim_{y\to 3} y^{1/2} = \sqrt{3}.$$

Για το δεύτερο όριο έχουμε

$$\lim_{x\to 0-}\left(1-\tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{x^3}\right) = \lim_{x\to 0-}\tfrac{x^3-x^2+1}{x^3} = -\infty$$

και

$$\lim_{x\to 0+}\left(1-\tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{x^3}\right) = \lim_{x\to 0+}\tfrac{x^3-x^2+1}{x^3} = +\infty.$$

Άρα η συνάρτηση $1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}$ έχει αρνητικές τιμές κοντά στον 0 και από τα αριστερά του και θετικές τιμές κοντά στον 0 και από τα δεξιά του. Επομένως, υπάρχει κάποιος $\delta > 0$ ώστε η συνάρτηση $(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3})^{1/5}$ να μην ορίζεται στο διάστημα $(-\delta, 0)$ αλλά να ορίζεται στο διάστημα $(0, \delta)$. Άρα το αρχικό όριο όταν $x \to 0$ είναι στην πραγματικότητα όριο όταν $x \to 0+$. Τώρα μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα σύνθεσης και να αλλάξουμε μεταβλητή από x (στο διάστημα $(0, \delta)$) σε $y = 1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}$ και έχουμε

$$\lim_{x\to 0}(1-\tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{x^3})^{1/5} = \lim_{y\to+\infty} y^{1/5} = +\infty.$$

Άσκηση 3.3.8. *Βρείτε τα* $\lim_{x\to\pm\infty}(e^x - e^{2x}+1)$, $\lim_{x\to 0\pm}\frac{1}{e^x-1}$.

Λύση: Έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty}(e^x - e^{2x}+1) = 0-0+1 = 1$$

και

$$\lim_{x\to+\infty}(e^x - e^{2x}+1) = \lim_{x\to+\infty} e^{2x}(e^{-x}-1+e^{-2x}) = -\infty.$$

Επειδή ισχύει $e^x < 1$ για $x < 0$ και ισχύει $e^x > 1$ για $x > 0$, συνεπάγεται

$$\lim_{x\to 0-}\tfrac{1}{e^x-1} = -\infty, \qquad \lim_{x\to 0+}\tfrac{1}{e^x-1} = +\infty.$$

Άσκηση 3.3.9. *Βρείτε τα* $\lim_{x\to 0}\frac{\log(2x)}{\log(3x)}$, $\lim_{x\to 1\pm}\frac{1}{\log x}$, $\lim_{x\to 0}\log\frac{1-\log x}{1+(\log x)^2}$.

Λύση: Για το πρώτο όριο κάνουμε αλλαγή μεταβλητής από x σε $y = \log x$ και έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\tfrac{\log(2x)}{\log(3x)} = \lim_{x\to 0}\tfrac{\log x+\log 2}{\log x+\log 3} = \lim_{y\to-\infty}\tfrac{y+\log 2}{y+\log 3} = 1.$$

Για το δεύτερο όριο βλέπουμε ότι ισχύει $\log x < 0$ για $0 < x < 1$ και ότι ισχύει $\log x > 0$ για $x > 1$, οπότε

$$\lim_{x\to 1-}\tfrac{1}{\log x} = -\infty, \qquad \lim_{x\to 1+}\tfrac{1}{\log x} = +\infty.$$

Τέλος, με αλλαγή μεταβλητής από x σε $y = \log x$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\tfrac{1-\log x}{1+(\log x)^2} = \lim_{y\to-\infty}\tfrac{1-y}{1+y^2} = 0.$$

Επίσης, είναι εύκολο να δούμε ότι ισχύει $\frac{1-\log x}{1+(\log x)^2} > 0$ κοντά στον 0 (και από τα δεξιά του). Πράγματι, αυτή η ανισότητα ισχύει για $0 < x < 1$. Άρα μπορούμε να κάνουμε αλλαγή μεταβλητής από x σε $z = \frac{1-\log x}{1+(\log x)^2}$ και βρίσκουμε:

$$\lim_{x\to 0}\log\tfrac{1-\log x}{1+(\log x)^2} = \lim_{z\to 0+}\log z = -\infty.$$

Άσκηση 3.3.10. *Για κάθε $\xi \in \mathbb{R}$ βρείτε τα $\lim_{x\to\xi\pm}[x]$. Για ποιούς ξ υπάρχει το $\lim_{x\to\xi}[x]$; Βρείτε το $\lim_{x\to\pm\infty}[1/x]$.*

Λύση: Αν ο ξ δεν είναι ακέραιος, τότε υπάρχει ακέραιος k ώστε $k < \xi < k+1$. Προφανώς, $k = [\xi]$.

Τότε η συνάρτηση $[x]$ είναι σταθερή και ίση με $k = [\xi]$ στα διαστήματα (k, ξ) και $(\xi, k+1)$ και άρα

$$\lim_{x \to \xi} [x] = [\xi] \qquad \text{για } \xi \notin \mathbb{Z}.$$

Αν ο ξ είναι ακέραιος, τότε η συνάρτηση $[x]$ είναι σταθερή και ίση με $\xi - 1$ στο διάστημα $(\xi - 1, \xi)$ και σταθερή και ίση με ξ στο διάστημα $(\xi, \xi + 1)$ και άρα

$$\lim_{x \to \xi-} [x] = \xi - 1 = [\xi] - 1 \quad \text{και} \quad \lim_{x \to \xi+} [x] = \xi = [\xi] \qquad \text{για } \xi \in \mathbb{Z}.$$

Επομένως, το $\lim_{x \to \xi} [x]$ υπάρχει μόνο όταν ο ξ δεν είναι ακέραιος.
Στο διάστημα $(1, +\infty)$ ισχύει $0 < \frac{1}{x} < 1$ και, επομένως, $[\frac{1}{x}] = 0$. Ομοίως, στο $(-\infty, -1)$ ισχύει $-1 < \frac{1}{x} < 0$ και, επομένως, $[\frac{1}{x}] = -1$. Άρα

$$\lim_{x \to -\infty} \left[\tfrac{1}{x}\right] = -1, \qquad \lim_{x \to +\infty} \left[\tfrac{1}{x}\right] = 0.$$

Άσκηση 3.3.11. *Βρείτε τα* $\lim_{x \to 0} x \cot x$, $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x}$, $\lim_{x \to \pi} \frac{\sin(3x)}{\sin x}$, $\lim_{x \to \pm\infty} x \sin \frac{1}{x}$.

Λύση: Έχουμε

$$\lim_{x \to 0} x \cot x = \lim_{x \to 0} \tfrac{x}{\sin x} \cos x = 1 \cdot 1 = 1.$$

$$\lim_{x \to 0} \tfrac{1 - \cos x}{x \sin x} = \lim_{x \to 0} \tfrac{1 - \cos x}{x^2} \tfrac{x}{\sin x} = \tfrac{1}{2} \cdot 1 = \tfrac{1}{2}.$$

$$\lim_{x \to \pi} \tfrac{\sin(3x)}{\sin x} = \lim_{x \to \pi} \tfrac{\sin(3\pi - 3x)}{\sin(\pi - x)} = \lim_{y \to 0} \tfrac{\sin(3y)}{\sin y} = 3.$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} x \sin \tfrac{1}{x} = \lim_{y \to 0\pm} \tfrac{\sin y}{y} = 1.$$

Άσκηση 3.3.12. *Βρείτε τα* $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{[x]}{x}$.
Αν $a, b > 0$, *βρείτε το* $\lim_{x \to 0+} (x/a)[b/x]$.

Λύση: Αν $x > 0$, από την $x - 1 < [x] \leq x$ παίρνουμε $1 - \frac{1}{x} < \frac{[x]}{x} \leq 1$ και άρα $\lim_{x \to +\infty} \frac{[x]}{x} = 1$.
Ομοίως, για $x < 0$ παίρνουμε $1 - \frac{1}{x} > \frac{[x]}{x} \geq 1$ και άρα $\lim_{x \to -\infty} \frac{[x]}{x} = 1$.
Τέλος, αν $x > 0$, πολλαπλασιάζουμε την $\frac{b}{x} - 1 < \left[\frac{b}{x}\right] \leq \frac{b}{x}$ με τον $\frac{x}{a} > 0$ και έχουμε $\frac{b}{a} - \frac{x}{a} < \frac{x}{a}\left[\frac{b}{x}\right] \leq \frac{b}{a}$. Επομένως, $\lim_{x \to 0+} \frac{x}{a}\left[\frac{b}{x}\right] = \frac{b}{a}$.

Άσκηση 3.3.15. *Βρείτε τα* $\lim_{x \to 1\pm} f(x)$, *αν ισχύει* $(x-1)f(x) \geq 1$ *για κάθε* x *με* $0 < |x - 1| < \frac{1}{4}$.

Λύση: Αν $1 - \frac{1}{4} < x < 1$, τότε από την $(x-1)f(x) \geq 1$ συνεπάγεται $f(x) \leq \frac{1}{x-1}$, οπότε $\lim_{x \to 1-} f(x) = -\infty$.
Αν $1 < x < 1 + \frac{1}{4}$, με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε $f(x) \geq \frac{1}{x-1}$, οπότε $\lim_{x \to 1+} f(x) = +\infty$.

Άσκηση 3.3.16. *Υπολογίστε τις πιθανές τιμές του* $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ *αν γνωρίζουμε ότι το όριο αυτό υπάρχει και ότι ισχύει* $f(\sqrt{x}) = -3(f(x))^2 + 1$ *για κάθε* $x > 1$.

Λύση: Έστω $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \eta \in \overline{\mathbb{R}}$.
Τότε, με αλλαγή μεταβλητής από x σε $y = \sqrt{x}$, έχουμε $\lim_{x \to +\infty} f(\sqrt{x}) = \lim_{y \to +\infty} f(y) = \eta$.
Άρα από την $f(\sqrt{x}) = -3(f(x))^2 + 1$ συνεπάγεται $\eta = -3\eta^2 + 1$.
Άρα $\eta = -\infty$ ή $\eta = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{6}$.
Για να είναι πλήρης η απάντηση πρέπει να βρούμε δύο συναρτήσεις f στο $(1, +\infty)$ οι οποίες ικανοποιούν την δοσμένη ισότητα για κάθε $x > 1$ και ώστε η μία να έχει όριο $-\infty$ και η άλλη όριο $\frac{-1 \pm \sqrt{13}}{6}$ όταν $x \to +\infty$.
Το δεύτερο είναι εύκολο. Θεωρούμε τη σταθερή συνάρτηση με τύπο $f(x) = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{6}$ για $x > 1$.
Το πρώτο είναι κάπως δύσκολο. Θα δούμε μια γενική μέθοδο κατασκευής συναρτήσεων που ικανοποιούν την

$$f(\sqrt{x}) = -3(f(x))^2 + 1 \qquad \text{για } x > 1. \tag{14.35}$$

Θεωρούμε έναν $a > 1$ (για παράδειγμα, τον $a = 2$) και γράφουμε τη διπλή ακολουθία σημείων

$$1 < \ldots < a^{1/(2^n)} < \ldots < a^{1/4} < a^{1/2} < a < a^2 < a^4 < \ldots < a^{2^n} < \ldots$$

Έχουμε ότι $a^{1/(2^n)} \to 1$ και $a^{2^n} \to +\infty$, οπότε τα αντίστοιχα διαστήματα

$$\dots\ \big[a^{1/(2^n)}, a^{1/(2^{n-1})}\big),\ \dots, [a^{1/4}, a^{1/2}), [a^{1/2}, a), [a, a^2), [a^2, a^4),\ \dots, [a^{2^n}, a^{2^{n+1}}),\ \dots$$

είναι ανά δύο ξένα και η ένωσή τους ισούται με το $(1, +\infty)$.
Τώρα, παρατηρούμε ότι, όταν ο x διατρέχει ένα οποιοδήποτε από αυτά τα διαστήματα, τότε ο $\sqrt{x}$ διατρέχει το αμέσως προηγούμενο (προς τα αριστερά) διάστημα. Και, αντιστρόφως, αν ο x διατρέχει ένα οποιοδήποτε από αυτά τα διαστήματα, τότε ο x^2 διατρέχει το αμέσως επόμενο (προς τα δεξιά) διάστημα.
Τώρα θεωρούμε μια τυχαία συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα $[a, a^2)$.
Αν ο x διατρέχει το $[a^{1/2}, a)$, τότε ο x^2 διατρέχει το $[a, a^2)$, οπότε μπορούμε να ορίσουμε τη συνάρτηση f και στο $[a^{1/2}, a)$ με τύπο $f(x) = -3(f(x^2))^2 + 1$. Δηλαδή, ορίζουμε τις τιμές της f στο $[a^{1/2}, a)$ μέσω των τιμών της στο $[a, a^2)$.
Αφού ορίσαμε την f στο $[a^{1/2}, a)$, παρατηρούμε ότι, αν ο x διατρέχει το $[a^{1/4}, a^{1/2})$, τότε ο x^2 διατρέχει το $[a^{1/2}, a)$, οπότε μπορούμε να ορίσουμε τη συνάρτηση f και στο $[a^{1/4}, a^{1/2})$ με τύπο $f(x) = -3(f(x^2))^2 + 1$. Δηλαδή, ορίζουμε τις τιμές της f στο $[a^{1/4}, a^{1/2})$ μέσω των τιμών της στο $[a^{1/2}, a)$.
Συνεχίζουμε επ' άπειρον και, επαγωγικά, από την αρχική συνάρτηση f στο $[a, a^2)$ κατασκευάζουμε τη συνάρτηση f και σε ολόκληρο το διάστημα $(1, a)$. Η συνάρτηση αυτή ικανοποιεί την (14.35) για $1 < x < a^2$. Πράγματι, αν $1 < x < a^2$, τότε ο $t = \sqrt{x}$ ανήκει σε ακριβώς ένα από τα διαστήματα $\dots, [a^{1/4}, a^{1/2}), [a^{1/2}, a)$, οπότε ο $t^2 = x$ ανήκει στο αμέσως επόμενο (προς τα δεξιά) διάστημα και από τον επαγωγικό τρόπο που κατασκευάστηκε η f συνεπάγεται ότι

$$f(\sqrt{x}) = f(t) = -3(f(t^2))^2 + 1 = -3(f(x))^2 + 1.$$

Τώρα απομένει να κατασκευάσουμε την f στο διάστημα $[a^2, +\infty)$ και θα το κάνουμε όπως πριν με επαγωγικό τρόπο κατασκευάζοντας την f διαδοχικά στα διαστήματα $[a^2, a^4), [a^4, a^8), \dots$.
Αν ο x διατρέχει το $[a^2, a^4)$, τότε ο $\sqrt{x}$ διατρέχει το $[a, a^2)$, οπότε μπορούμε να ορίσουμε τη συνάρτηση f και στο $[a^2, a^4)$ με τύπο

$$f(x) = -\sqrt{\tfrac{1-f(\sqrt{x})}{3}}.$$

Ο λόγος που επιλέγουμε το πρόσημο $-$ μπροστά από την τετραγωνική ρίζα θα φανεί σε λίγο.
Τώρα, για να ορίζεται η τετραγωνική ρίζα πρέπει να θέσουμε τον εξής περιορισμό στην αρχική συνάρτηση f στο διάστημα $[a, a^2)$: πρέπει να ισχύει $f(x) \leq 1$ για κάθε $x \in [a, a^2)$.
Με αυτόν τον τρόπο έχουμε ορίσει την f και στο $[a^2, a^4)$. Τώρα, αν ο x διατρέχει το $[a^4, a^8)$, τότε ο $\sqrt{x}$ διατρέχει το $[a^2, a^4)$, οπότε μπορούμε να ορίσουμε τη συνάρτηση f και στο $[a^4, a^8)$ με τύπο $f(x) = -\sqrt{\frac{1-f(\sqrt{x})}{3}}$. Η τετραγωνική ρίζα *ορίζεται*, διότι ισχύει $f(x) \leq 0 \leq 1$ για κάθε $x \in [a^2, a^4)$, ακριβώς επειδή επιλέξαμε το πρόσημο $-$ μπροστά από την τετραγωνική ρίζα στο προηγούμενο βήμα.
Συνεχίζουμε επ' άπειρον και, επαγωγικά, από την αρχική συνάρτηση f στο $[a, a^2)$ κατασκευάζουμε τη συνάρτηση f και σε ολόκληρο το διάστημα $[a^2, +\infty)$. Η συνάρτηση αυτή ικανοποιεί την (14.35) για $a^2 \leq x < +\infty$. Πράγματι, αν $a^2 \leq x$, τότε ο x ανήκει σε ακριβώς ένα από τα διαστήματα $[a^2, a^4), [a^4, a^8), \dots$, οπότε ο $\sqrt{x}$ ανήκει στο αμέσως προηγούμενο (προς τα αριστερά) διάστημα και από τον επαγωγικό τρόπο που κατασκευάστηκε η f συνεπάγεται ότι $f(x) = -3(f(x^2))^2 + 1$.
Ανακεφαλαιώνοντας, ξεκινώντας με μια f στο $[a, a^2)$ με τον περιορισμό να ισχύει $f(x) \leq 1$ για κάθε $x \in [a, a^2)$ μπορούμε να επεκτείνουμε την f στο $(1, +\infty)$ έτσι ώστε να ισχύει η (14.35).
Μένει να δούμε αν μπορούμε να φτιάξουμε την f έτσι ώστε να έχουμε $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.
Πριν προχωρήσουμε πρέπει να παρατηρήσουμε ότι η επιλογή του προσήμου $-$ μπροστά από την τετραγωνική ρίζα στον τύπο $f(x) = -\sqrt{\frac{1-f(\sqrt{x})}{3}}$ δεν είναι απολύτως αναγκαστική! Μας εξασφαλίζει ότι θα ισχύει $f(x) \leq 0 \leq 1$ αλλά εμείς αυτό που θέλουμε είναι να ισχύει $f(x) \leq 1$ ώστε

στο επόμενο βήμα της επαγωγικής κατασκευής της f να ορίζεται η τετραγωνική ρίζα $\sqrt{\frac{1-f(\sqrt{x})}{3}}$. Άρα θα μπορούσαμε να επιλέγουμε και το πρόσημο $+$ αλλά υπό την προϋπόθεση ότι στα επόμενα βήματα θα ορίζονται οι διάφορες τετραγωνικές ρίζες. Άρα το πρόβλημα κατασκευής της γενικότερης δυνατής f είναι περίπλοκο.
Και τώρα ήρθε η ώρα να απογοητεύσουμε τον αναγνώστη, λέγοντας ότι *δεν υπάρχει* f στο $(1,+\infty)$ η οποία να ικανοποιεί την (14.35) και ώστε να είναι $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$. Αυτό, όμως, θα το δούμε στην άσκηση 3.4.6.
Στην ένσταση ότι όλη η δουλειά που κάναμε προσπαθώντας να κατασκευάσουμε μια f που δεν υπάρχει ήταν περιττή αντιτείνω το ότι η τεχνική επαγωγικής κατασκευής μιας υποψήφιας f είναι σημαντική από μόνη της. Εξ άλλου το μόνο που δεν επιτυγχάνεται είναι το $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$. Η κατασκευή μιας f ώστε να ισχύει η (14.35) ήταν επιτυχής!

Άσκηση 3.3.19. *Έστω* $f : (-1,0)\cup(0,1) \to \mathbb{R}$.
Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to0} f(|x|) = l$ *αν και μόνο αν* $\lim_{x\to0+} f(x) = l$.
Βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(1/x)$. *Αποδείξτε ότι* $\lim_{x\to+\infty} f(1/x) = l$ *αν και μόνο αν* $\lim_{x\to0+} f(x) = l$ *και ότι* $\lim_{x\to-\infty} f(1/x) = l$ *αν και μόνο αν* $\lim_{x\to0-} f(x) = l$.
Βρείτε συνάρτηση $f : (-1,0)\cup(0,1) \to \mathbb{R}$ *ώστε να υπάρχει το* $\lim_{x\to0} f(|x|)$ *και να μην υπάρχει το* $\lim_{x\to0} f(x)$.

Λύση: Το πρώτο ερώτημα. Έστω $\lim_{x\to0} f(|x|) = l$. Επειδή ισχύει $x = |x|$ αν $x > 0$, έχουμε $\lim_{x\to0+} f(x) = \lim_{x\to0+} f(|x|) = l$.
Αντιστρόφως, έστω $\lim_{x\to0+} f(x) = l$. Κάνοντας αλλαγή μεταβλητής από x σε $y = |x|$, έχουμε $\lim_{x\to0} f(|x|) = \lim_{y\to0+} f(y) = l$.
Το δεύτερο ερώτημα. Ο $\frac{1}{x}$ ανήκει στο $(-1,0)\cup(0,1)$ αν και μόνο αν ο x ανήκει στο $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$. Μάλιστα, ο $\frac{1}{x}$ ανήκει στο $(-1,0)$ αν και μόνο αν ο x ανήκει στο $(-\infty,-1)$ και ο $\frac{1}{x}$ ανήκει στο $(0,1)$ αν και μόνο αν ο x ανήκει στο $(1,+\infty)$.
Τώρα, έστω $\lim_{x\to+\infty} f(1/x) = l$. Κάνοντας αλλαγή μεταβλητής από x σε $y = \frac{1}{x}$, παίρνουμε $\lim_{x\to0+} f(x) = \lim_{y\to+\infty} f(1/y) = l$.
Αντιστρόφως, έστω $\lim_{x\to0+} f(x) = l$. Κάνοντας πάλι αλλαγή μεταβλητής από x σε $y = \frac{1}{x}$, παίρνουμε $\lim_{x\to+\infty} f(1/x) = \lim_{y\to0+} f(y) = l$.
Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται και η άλλη ισοδυναμία.
Το τρίτο ερώτημα. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : (-1,0)\cup(0,1) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{|x|}{x}$.
Τότε $\lim_{x\to0} f(|x|) = \lim_{x\to0} 1 = 1$. Αλλά το $\lim_{x\to0} f(x)$ δεν υπάρχει, αφού $\lim_{x\to0-} f(x) = \lim_{x\to0-}(-1) = -1$ και $\lim_{x\to0+} f(x) = \lim_{x\to0+} 1 = 1$.

Άσκηση 3.3.20. *Έστω* $f : (-1,0)\cup(0,1) \to \mathbb{R}$. *Αν* $\lim_{x\to0}\big(f(x) + \frac{1}{f(x)}\big) = 2$, *βρείτε το* $\lim_{x\to0} f(x)$.
Έστω $f : (-1,0)\cup(0,1) \to \mathbb{R}$. *Αν* $\lim_{x\to0}\big(f(x) + \frac{1}{|f(x)|}\big) = 0$, *βρείτε το* $\lim_{x\to0} f(x)$.

Λύση: Το πρώτο ερώτημα. Από το $\lim_{x\to0}\big(f(x) + \frac{1}{f(x)}\big) = 2$ έχουμε ότι ισχύει $f(x) + \frac{1}{f(x)} > 0$ κοντά στον 0. Επομένως, ισχύει $f(x) > 0$ κοντά στον 0.
Ορίζουμε την $g : (-1,0)\cup(0,1) \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = f(x) + \frac{1}{f(x)}$, οπότε $\lim_{x\to0} g(x) = 2$.
Λύνουμε την $g(x) = f(x) + \frac{1}{f(x)}$ ως προς τον $f(x)$ συναρτήσει του $g(x)$. Πρώτα, όμως, παρατηρούμε ότι ισχύει $g(x) \geq 2$ κοντά στον 0. Πράγματι, ισχύει

$$g(x) - 2 = \Big(\sqrt{f(x)} - \tfrac{1}{\sqrt{f(x)}}\Big)^2 \geq 0$$

κοντά στον 0.
Τώρα, από την $g(x) = f(x) + \frac{1}{f(x)}$ συνεπάγεται $f(x)^2 - g(x)f(x) + 1 = 0$ και, επομένως,

$$f(x) = \tfrac{g(x)\pm\sqrt{g(x)^2-4}}{2}$$

κοντά στον 0. (Από την $g(x) \geq 2$ συνεπάγεται $g(x)^2 - 4 \geq 0$.)
Άρα
$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \tfrac{g(x)\pm\sqrt{g(x)^2-4}}{2} = \tfrac{2\pm\sqrt{2^2-4}}{2} = 1.$$
Το δεύτερο ερώτημα. Έστω $f(x) > 0$ για κάποιον x. Τότε $f(x) + \frac{1}{|f(x)|} = f(x) + \frac{1}{f(x)} \geq 2$. Όμως, από το $\lim_{x\to 0} \big(f(x) + \frac{1}{|f(x)|}\big) = 0$ συνεπάγεται ότι ισχύει $f(x) + \frac{1}{|f(x)|} < 2$ κοντά στον 0 και, επομένως, πρέπει να ισχύει $f(x) < 0$ κοντά στον 0.
Άρα $\lim_{x\to 0} \big(f(x) - \frac{1}{f(x)}\big) = \lim_{x\to 0} \big(f(x) + \frac{1}{|f(x)|}\big) = 0$ και ισχύει $f(x) < 0$ κοντά στον 0.
Ορίζουμε την $g : (-1, 0) \cup (0, 1) \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = f(x) - \frac{1}{f(x)}$, οπότε $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$.
Λύνουμε την $g(x) = f(x) - \frac{1}{f(x)}$ ως προς τον $f(x)$ συναρτήσει του $g(x)$ και βρίσκουμε
$$f(x) = \tfrac{g(x)\pm\sqrt{g(x)^2+4}}{2}.$$
Εύκολα βλέπουμε ότι, επειδή ισχύει $f(x) < 0$ κοντά στον 0, συνεπάγεται ότι ισχύει
$$f(x) = \tfrac{g(x)-\sqrt{g(x)^2+4}}{2}$$
κοντά στον 0. Άρα
$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \tfrac{g(x)-\sqrt{g(x)^2+4}}{2} = \tfrac{0-\sqrt{0^2+4}}{2} = -1.$$

Άσκηση 3.3.21. *Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$, $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A και $\lim_{x\to\xi} f(x) < \lim_{x\to\xi} g(x)$. Αποδείξτε ότι ισχύει $f(x) < g(x)$ κοντά στον ξ.*

Λύση: Θεωρούμε οποιονδήποτε αριθμό a ώστε $\lim_{x\to\xi} f(x) < a < \lim_{x\to\xi} g(x)$.
Από το ότι $\lim_{x\to\xi} f(x) < a$ συνεπάγεται ότι ισχύει $f(x) < a$ κοντά στον ξ και από το ότι $a < \lim_{x\to\xi} g(x)$ συνεπάγεται ότι ισχύει $a < g(x)$ κοντά στον ξ. Άρα ισχύει $f(x) < a$ και $a < g(x)$ και, επομένως, ισχύει $f(x) < g(x)$ κοντά στον ξ.

Άσκηση 3.3.22. *Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$, $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A. Αν $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta \in \overline{\mathbb{R}}$ και $\lim_{x\to\xi} g(x) = \zeta \in \overline{\mathbb{R}}$, τότε αποδείξτε ότι $\lim_{x\to\xi} \max\{f(x), g(x)\} = \max\{\eta, \zeta\}$.*

Λύση: Διακρίνουμε περιπτώσεις.
Αν $\eta < \zeta$, τότε από το αποτέλεσμα της άσκησης 3.3.21 συνεπάγεται ότι ισχύει $f(x) < g(x)$ κοντά στο ξ. Άρα ισχύει $\max\{f(x), g(x)\} = g(x)$ κοντά στο ξ, οπότε $\lim_{x\to\xi} \max\{f(x), g(x)\} = \lim_{x\to\xi} g(x) = \zeta = \max\{\eta, \zeta\}$.
Η περίπτωση όπου $\zeta < \eta$ είναι όμοια με την προηγούμενη.
Έστω $\eta = \zeta \in \mathbb{R}$. Παίρνουμε τυχόντα $\epsilon > 0$ και τότε ισχύει $\eta - \epsilon < f(x) < \eta + \epsilon$ και $\eta - \epsilon < g(x) < \eta + \epsilon$ κοντά στο ξ. Επομένως, ισχύει $\eta - \epsilon < \max\{f(x), g(x)\} < \eta + \epsilon$ κοντά στο ξ, οπότε $\lim_{x\to\xi} \max\{f(x), g(x)\} = \eta = \max\{\eta, \zeta\}$.
Αν $\eta = \zeta = +\infty$, τότε από την $f(x) \leq \max\{f(x), g(x)\}$ συνεπάγεται $\lim_{x\to\xi} \max\{f(x), g(x)\} = +\infty = \max\{\eta, \zeta\}$.
Τέλος, έστω $\eta = \zeta = -\infty$. Παίρνουμε τυχόντα $M > 0$ και τότε ισχύει $f(x) < -M$ και $g(x) < -M$ κοντά στο ξ. Άρα ισχύει $\max\{f(x), g(x)\} < -M$ κοντά στο ξ και, επομένως, $\lim_{x\to\xi} \max\{f(x), g(x)\} = -\infty = \max\{\eta, \zeta\}$.

Άσκηση 3.3.23. *Δώστε παράδειγμα όπου υπάρχει το όριο $\lim_{x\to\xi}(f(x) + g(x))$ αλλά δεν υπάρχουν τα $\lim_{x\to\xi} f(x)$, $\lim_{x\to\xi} g(x)$.*

Λύση: Τα όρια $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ και $\lim_{x\to 0}(-\frac{1}{x})$ δεν υπάρχουν, αλλά υπάρχει το $\lim_{x\to 0} \big(\frac{1}{x} + (-\frac{1}{x})\big) = \lim_{x\to 0} 0 = 0$.
Άλλο παράδειγμα. Τα όρια $\lim_{x\to+\infty} \sin x$ και $\lim_{x\to+\infty}(-\sin x)$ δεν υπάρχουν, αλλά υπάρχει το $\lim_{x\to+\infty} \big(\sin x + (-\sin x)\big) = \lim_{x\to+\infty} 0 = 0$.

Άσκηση 3.3.24. *Βρείτε συναρτήσεις f, g ώστε σε κάποιο ξ να είναι $f(x) \to +\infty$, $g(x) \to -\infty$ και*

η $f(x)+g(x)$ (i) να έχει όριο έναν οποιονδήποτε $c\in\overline{\mathbb{R}}$ (ii) να μην έχει όριο.
Βρείτε συναρτήσεις f, g ώστε σε κάποιο ξ να είναι $f(x)\to 0$, $g(x)\to+\infty$ και η $f(x)g(x)$ (i) να έχει όριο έναν οποιονδήποτε $c\in\overline{\mathbb{R}}$ (ii) να μην έχει όριο.

Υπόδειξη: Προσαρμόστε τη λύση της άσκησης 2.3.29.

Άσκηση 3.3.25. *Βρείτε συναρτήσεις f, g ώστε σε κάποιο ξ να είναι $f(x)\to+\infty$, $g(x)\to 0$ και η $f(x)^{g(x)}$ (i) να έχει όριο έναν οποιονδήποτε $c\in[0,+\infty]$ (ii) να μην έχει όριο. Είναι δυνατόν η $f(x)^{g(x)}$ να έχει όριο $c\in[-\infty,0)$;*
Βρείτε συναρτήσεις f, g ώστε σε κάποιο ξ να είναι $f(x)\to 0$, $g(x)\to-\infty$ και η $f(x)^{g(x)}$ (i) να έχει όριο έναν οποιονδήποτε $c\in\{+\infty,-\infty\}$ (ii) να μην έχει όριο. Είναι δυνατόν η $f(x)^{g(x)}$ να έχει όριο $c\in\mathbb{R}$;
Βρείτε συναρτήσεις f, g ώστε σε κάποιο ξ να είναι $f(x)\to 1$, $g(x)\to+\infty$ και η $f(x)^{g(x)}$ (i) να έχει όριο έναν οποιονδήποτε $c\in[0,+\infty]$ (ii) να μην έχει όριο. Είναι δυνατόν η $f(x)^{g(x)}$ να έχει όριο $c\in[-\infty,0)$;

Λύση: Προσαρμόστε τις λύσεις των ασκήσεων 2.3.30 και 2.4.10.

Άσκηση 3.3.26. *Έστω $f:A\to\mathbb{R}$, $\xi\in\overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A, $\lim_{x\to\xi}f(x)=\eta$ και έστω ότι ισχύει $f(x)\leq\eta$ για κάθε $x\in A$ με $x\neq\xi$. Αποδείξτε ότι $\sup\{f(x)\,|\,x\in A, x\neq\xi\}=\eta$.*

Λύση: Για συντομία θέτουμε

$$u=\sup\{f(x)\,|\,x\in A, x\neq\xi\},$$

οπότε πρέπει να αποδείξουμε ότι $u=\eta$.
Από το ότι ισχύει $f(x)\leq\eta$ για κάθε $x\in A$ με $x\neq\xi$ συνεπάγεται ότι το η είναι άνω φράγμα του συνόλου $\{f(x)\,|\,x\in A, x\neq\xi\}$. Άρα $u\leq\eta$.
Προφανώς, ισχύει $f(x)\leq u$ για κάθε $x\in A$ με $x\neq\xi$. Άρα $\lim_{x\to\xi}f(x)\leq u$, δηλαδή $\eta\leq u$.
Από τις $u\leq\eta$ και $\eta\leq u$ συνεπάγεται $u=\eta$.

Άσκηση 3.3.28. *Έστω ότι ισχύει $|a_1\sin x+a_2\sin 2x+\cdots+a_n\sin nx|\leq|\sin x|$ για κάθε x. Αποδείξτε ότι $|a_1+2a_2+\cdots+na_n|\leq 1$.*

Υπόδειξη: Διαιρέστε την $|a_1\sin x+a_2\sin 2x+\cdots+a_n\sin nx|\leq|\sin x|$ με τον $|x|$ και πάρτε όριο όταν $x\to 0$.

Άσκηση 3.3.29. [α] *Έστω $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ μονότονη στο $(0,+\infty)$. Αν $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(2x)}{f(x)}=1$, αποδείξτε ότι για κάθε $a>0$ είναι $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(ax)}{f(x)}=1$.*

Υπόδειξη: Αποδείξτε ότι, για κάθε $n\in\mathbb{N}$, είναι $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(2^nx)}{f(x)}=1$.

Άσκηση 3.3.30. *Έστω $f:A\to\mathbb{R}$ και $\xi\in\overline{\mathbb{R}}$ σημείο συσσώρευσης του A. Αν $\lim_{x\to\xi}f(x)=\eta\in\overline{\mathbb{R}}$ και αν ισχύει $f(x)\neq\eta$ κοντά στο ξ, αποδείξτε ότι το η είναι σημείο συσσώρευσης του συνόλου τιμών $\{f(x)\,|\,x\in A\}$.*

Λύση: Έστω $\epsilon>0$.
Επειδή $\lim_{x\to\xi}f(x)=\eta$, συνεπάγεται ότι ισχύει $f(x)\in N_\eta(\epsilon)$ κοντά στο ξ. Επίσης, επειδή ισχύει $f(x)\neq\eta$ κοντά στο ξ, συνεπάγεται ότι ισχύει $f(x)\in N_\eta(\epsilon)$ και $f(x)\neq\eta$ κοντά στο ξ.
Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι, για κάθε $\epsilon>0$, στην περιοχή $N_\eta(\epsilon)$ υπάρχει στοιχείο του συνόλου $\{f(x)\,|\,x\in A\}$ το οποίο είναι $\neq\eta$. Άρα το η είναι σημείο συσσώρευσης του $\{f(x)\,|\,x\in A\}$.

Άσκηση 3.3.31. [α] *Βρείτε τις ασύμπτωτες ευθείες - κατακόρυφες και πλάγιες - των γραφημάτων της συνάρτησης $y=\frac{2x+1}{x-1}$ και της αντίστροφής της $x=\frac{y+1}{y-2}$.*
[β] *Θεωρήστε τη συνάρτηση $y=2x-\frac{1}{x}$ με πεδίο ορισμού το $(0,+\infty)$. Αποδείξτε ότι το σύνολο τιμών της είναι το $(-\infty,+\infty)$ και ότι η αντίστροφη συνάρτηση είναι η $x=\frac{1}{4}(y+\sqrt{y^2+8})$. Βρείτε τις ασύμπτωτες ευθείες - κατακόρυφες και πλάγιες - των γραφημάτων των δύο αυτών συναρτήσεων.*
[γ] *Γενικότερα, πώς σχετίζονται οι πλάγιες και οι κατακόρυφες ασύμπτωτες μιας συνάρτησης f και*

της αντίστροφής της f^{-1} ;

Λύση: [α] Βρίσκουμε διαδοχικά τα όρια

$$\lim_{x\to\pm\infty}\tfrac{2x+1}{x(x-1)}=0,\qquad \lim_{x\to\pm\infty}\left(\tfrac{2x+1}{x-1}-0x\right)=2.$$

Επομένως, η οριζόντια ευθεία με εξίσωση $y=0x+2=2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη ευθεία στο $+\infty$ και στο $-\infty$ της $y=\frac{2x+1}{x-1}$. Επίσης, η ευθεία με εξίσωση $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της $y=\frac{2x+1}{x-1}$.
Ομοίως, βρίσκουμε διαδοχικά τα όρια

$$\lim_{y\to\pm\infty}\tfrac{y+1}{y(y-2)}=0,\qquad \lim_{y\to\pm\infty}\left(\tfrac{y+1}{y-2}-0y\right)=1.$$

Άρα η οριζόντια ευθεία με εξίσωση $x=0y+1=1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη ευθεία στο $+\infty$ και στο $-\infty$ της $x=\frac{y+1}{y-2}$. Επίσης, η ευθεία με εξίσωση $y=2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της $x=\frac{y+1}{y-2}$.
[β] Για κάθε y στο $(-\infty,+\infty)$ η εξίσωση $y=2x-\frac{1}{x}$ είναι ισοδύναμη με την $2x^2-yx-1=0$ και έχει τις δύο λύσεις $x=\frac{y\pm\sqrt{y^2+8}}{4}$. Από αυτές ακριβώς μία είναι θετική, η $x=\frac{y+\sqrt{y^2+8}}{4}$. Άρα για κάθε $y\in(-\infty,+\infty)$ η εξίσωση $y=2x-\frac{1}{x}$ έχει ακριβώς μία λύση $x\in(0,+\infty)$ και, επομένως, το σύνολο τιμών της συνάρτησης $y=2x-\frac{1}{x}$ στο $(0,+\infty)$ είναι το $(-\infty,+\infty)$ και η αντίστροφη συνάρτηση είναι η $x=\frac{1}{4}(y+\sqrt{y^2+8})$.
Τώρα, βρίσκουμε διαδοχικά τα όρια

$$\lim_{x\to+\infty}\tfrac{1}{x}\left(2x-\tfrac{1}{x}\right)=2,\qquad \lim_{x\to+\infty}\left(2x-\tfrac{1}{x}-2x\right)=0,$$

οπότε η ευθεία με εξίσωση $y=2x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ της $y=2x-\frac{1}{x}$. Επίσης, η ευθεία με εξίσωση $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της $y=2x-\frac{1}{x}$.
Ομοίως, βρίσκουμε διαδοχικά τα όρια

$$\lim_{y\to-\infty}\tfrac{y+\sqrt{y^2+8}}{4y}=0,\qquad \lim_{y\to-\infty}\left(\tfrac{1}{4}(y+\sqrt{y^2+8})-0y\right)=0$$

και τα

$$\lim_{y\to+\infty}\tfrac{y+\sqrt{y^2+8}}{4y}=\tfrac{1}{2},\qquad \lim_{y\to+\infty}\left(\tfrac{1}{4}(y+\sqrt{y^2+8})-\tfrac{1}{2}\,y\right)=0.$$

Άρα η οριζόντια ευθεία με εξίσωση $x=0y+0=0$ είναι πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$ και η ευθεία με εξίσωση $x=\frac{1}{2}\,y$ είναι πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ της $x=\frac{1}{4}(y+\sqrt{y^2+8})$.
[γ] Γενικότερα, έστω ότι η ευθεία $y=\mu x+\nu$ είναι πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ της $y=f(x)$. Δηλαδή

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-\mu x-\nu)=0.$$

Αν $\mu>0$, συνεπάγεται $\lim_{x\to+\infty}(\mu x+\nu)=+\infty$ και άρα $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. Επομένως, κάνοντας αλλαγή μεταβλητής από y σε $x=f^{-1}(y)$, βρίσκουμε ότι

$$\lim_{y\to+\infty}\left(f^{-1}(y)-\tfrac{1}{\mu}\,y+\tfrac{\nu}{\mu}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\tfrac{1}{\mu}\,f(x)+\tfrac{\nu}{\mu}\right)=\lim_{x\to+\infty}\tfrac{\mu x+\nu-f(x)}{\mu}=0.$$

Άρα η ευθεία με εξίσωση $x=\frac{1}{\mu}\,y-\frac{\nu}{\mu}$ είναι πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ της $x=f^{-1}(y)$.
Αν $\mu<0$, συνεπάγεται $\lim_{x\to+\infty}(\mu x+\nu)=-\infty$ και άρα $\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$. Επομένως, κάνοντας αλλαγή μεταβλητής από y σε $x=f^{-1}(y)$, βρίσκουμε ότι

$$\lim_{y\to-\infty}\left(f^{-1}(y)-\tfrac{1}{\mu}\,y+\tfrac{\nu}{\mu}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\tfrac{1}{\mu}\,f(x)+\tfrac{\nu}{\mu}\right)=\lim_{x\to+\infty}\tfrac{\mu x+\nu-f(x)}{\mu}=0.$$

Άρα η ευθεία με εξίσωση $x=\frac{1}{\mu}\,y-\frac{\nu}{\mu}$ είναι πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$ της $x=f^{-1}(y)$.
Αν $\mu=0$ (δηλαδή, αν η ασύμπτωτη είναι οριζόντια), τότε $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\nu$. Οπότε, κάνοντας αλλαγή μεταβλητής από y σε $x=f^{-1}(y)$, βρίσκουμε ότι

$$\lim_{y\to\nu}f^{-1}(y)=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty.$$

Άρα η ευθεία με εξίσωση $y = \nu$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της $x = f^{-1}(y)$. Βλέπουμε, λοιπόν, ότι από μια μη-οριζόντια πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ της $y = f(x)$ προκύπτει μια πλάγια ασύμπτωτη (είτε στο $+\infty$ είτε στο $-\infty$) της $x = f^{-1}(y)$ και ότι από μια οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ της $y = f(x)$ προκύπτει μια κατακόρυφη ασύμπτωτη της $x = f^{-1}(y)$.
Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι ισχύουν ακριβώς τα ίδια με ασύμπτωτες στο $-\infty$ της f.
Τέλος, έστω ότι η ευθεία με εξίσωση $x = \kappa$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της $y = f(x)$.
Αν $\lim_{x\to\kappa+} f(x) = +\infty$, τότε, κάνοντας αλλαγή μεταβλητής από y σε $x = f^{-1}(y)$, βρίσκουμε ότι

$$\lim_{y\to+\infty} f^{-1}(y) = \lim_{x\to\kappa+} x = \kappa.$$

Άρα η ευθεία με εξίσωση $x = \kappa$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ της $x = f^{-1}(y)$.
Μπορούμε να δούμε ότι το ίδιο συμβαίνει σε κάθε μία από τις περιπτώσεις $\lim_{x\to\kappa\pm} f(x) = \pm\infty$ και συμπεραίνουμε ότι από μια κατακόρυφη ασύμπτωτη της $y = f(x)$ προκύπτει μια οριζόντια ασύμπτωτη της $x = f^{-1}(y)$.
Φυσικά, η κατάσταση είναι συμμετρική: από τις ασύμπτωτες της $x = f^{-1}(y)$ προκύπτουν με τον ίδιο τρόπο ασύμπτωτες της $y = f(x)$.
Το τελικό συμπέρασμα είναι το εξής. Οι ασύμπτωτες της $y = f(x)$ και οι ασύμπτωτες της $x = f^{-1}(y)$ κατατάσσονται σε ζευγάρια: μη-οριζόντιες πλάγιες ασύμπτωτες της $y = f(x)$ αντιστοιχούν σε μη-οριζόντιες πλάγιες ασύμπτωτες της $x = f^{-1}(y)$ και αντιστρόφως και οριζόντιες ασύμπτωτες της $y = f(x)$ αντιστοιχούν σε κατακόρυφες ασύμπτωτες της $x = f^{-1}(y)$ και αντιστρόφως.
Μάλιστα, κοιτώντας προσεκτικά τις εξισώσεις $y = \mu x + \nu$ και $x = \frac{1}{\mu} y - \frac{\nu}{\mu}$ καθώς και τις αντίστοιχες εξισώσεις στις άλλες περιπτώσεις, συμπεραίνουμε ότι οι ασύμπτωτες των $y = f(x)$ και $x = f^{-1}(y)$ που ανήκουν στο ίδιο ζευγάρι είναι συμμετρικές ως προς την κύρια διαγώνιο του xy επιπέδου - ακριβώς όπως τα γραφήματα των $y = f(x)$ και $x = f^{-1}(y)$.
Κάποια από τα προηγούμενα γενικά συμπεράσματα επιβεβαιώνονται στις ειδικές περιπτώσεις [α] και [β].

Άσκηση 3.4.4. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ περιοδική με περίοδο $\tau > 0$, δηλαδή έστω $f(x+\tau) = f(x)$ για κάθε x. Αποδείξτε ότι, αν υπάρχει το $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, τότε η f είναι σταθερή συνάρτηση.*

Λύση: Παρατηρούμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $f(x+n\tau) = f(x)$ για κάθε x. Αυτό αποδεικνύεται πολύ εύκολα με την αρχή της επαγωγής.
Τώρα, έστω $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \eta \in \overline{\mathbb{R}}$ και έστω τυχών t.
Θεωρούμε την ακολουθία (x_n) με τύπο $x_n = t + n\tau$ για κάθε n για την οποία έχουμε, προφανώς, ότι $x_n \to +\infty$. Από το $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \eta$ συνεπάγεται $f(x_n) \to \eta$.
Όμως, ισχύει $f(x_n) = f(t+n\tau) = f(t)$ για κάθε n, οπότε $f(x_n) \to f(t)$.
Από τις $f(x_n) \to \eta$ και $f(x_n) \to f(t)$ συμπεραίνουμε ότι $f(t) = \eta$.
Άρα ισχύει $f(t) = \eta$ για κάθε t και, επομένως, η f είναι σταθερή (και το η είναι αριθμός).

Άσκηση 3.4.6. *Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει $f : (1,+\infty) \to \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f(\sqrt{x}) = -3(f(x))^2 + 1$ για κάθε $x > 1$ και $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.*

Λύση: Παίρνουμε οποιονδήποτε $a > 1$ και ορίζουμε την ακολουθία με τύπο $x_n = a^{2^n}$. Ισχύει $x_n \in (1+\infty)$ για κάθε n και $x_n \to +\infty$.
Τώρα, έστω (για άτοπο) ότι υπάρχει $f : (1,+\infty) \to \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f(\sqrt{x}) = -3(f(x))^2 + 1$ για κάθε $x > 1$ και $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.
Συνεπάγεται $f(x_n) \to -\infty$.
Παρατηρούμε ότι ισχύει $\sqrt{x_{n+1}} = x_n$ για κάθε n και άρα

$$f(x_n) = f(\sqrt{x_{n+1}}) = -3(f(x_{n+1}))^2 + 1 \qquad \text{για κάθε } n.$$

Ορίζουμε $y_n = f(x_n)$ για κάθε n και άρα έχουμε ότι

$$y_n \to -\infty \qquad \text{και} \qquad y_n = -3{y_{n+1}}^2 + 1 \quad \text{για κάθε } n.$$

Η εξίσωση $t = -3t^2 + 1$ έχει δύο λύσεις: τις $\xi = \frac{-1-\sqrt{13}}{6}$ και $\eta = \frac{-1+\sqrt{13}}{6}$ με $\xi < \eta$.
Επειδή $y_n \to -\infty$, συνεπάγεται ότι υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει

$$y_n \leq \xi \qquad \text{για κάθε } n \geq n_0.$$

Άρα για $n \geq n_0$ έχουμε ότι $y_{n+1} \leq \xi$, οπότε ο y_{n+1} είναι εκτός των ριζών της $t = -3t^2 + 1$. Άρα ισχύει

$$y_{n+1} \geq -3{y_{n+1}}^2 + 1 = y_n \qquad \text{για κάθε } n \geq n_0.$$

Επομένως, η (y_n) είναι τελικά αύξουσα και καταλήγουμε σε άτοπο αφού $y_n \to -\infty$.

Άσκηση 3.5.1. *Έστω $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ αύξουσα στο $[1, +\infty)$ ώστε να ισχύει $f(n) \geq \sqrt{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Υπάρχει το $\lim_{x\to+\infty} f(x)$; αν ναι, υπολογίστε το.*

Τί αλλάζει ως προς το προηγούμενο συμπέρασμα αν δεν υποθέσουμε ότι η συνάρτηση f είναι αύξουσα;

Λύση: Επειδή η f είναι αύξουσα, το $\eta = \lim_{x\to+\infty} f(x)$ υπάρχει και είναι αριθμός ή $+\infty$.
Τώρα, θεωρούμε την ακολουθία με τύπο $x_n = n$ για κάθε n.
Επειδή $x_n \to +\infty$, συνεπάγεται ότι $f(x_n) \to \eta$. Όμως, ισχύει $f(x_n) = f(n) \geq \sqrt{n}$ για κάθε n και άρα $f(x_n) \to +\infty$.
Συμπεραίνουμε ότι $\eta = +\infty$.
Αν η f δεν είναι αύξουσα, τότε από το ότι ισχύει $f(n) \geq \sqrt{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ δεν συνεπάγεται αναγκαστικά ότι υπάρχει το $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
Θεωρούμε, για παράδειγμα, την συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}\cos(2\pi x)$. Προφανώς, ισχύει $f(n) = \sqrt{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, αλλά το $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ δεν υπάρχει. Πράγματι, αν πάρουμε τις δύο ακολουθίες με τύπους ${x_n}' = n$ και ${x_n}'' = n + \frac{1}{2}$, βλέπουμε ότι ισχύει ${x_n}' \to +\infty$ και ${x_n}'' \to +\infty$, αλλά $f({x_n}') = \sqrt{n} \to +\infty$ και $f({x_n}'') = -\sqrt{n + (1/2)} \to -\infty$.

Άσκηση 3.5.2. *Έστω $a > 1$.*

[α] *Χρησιμοποιήστε το ότι ισχύει $\log_a(ax) = 1 + \log_a x$ για κάθε $x > 0$ καθώς και τη μονοτονία της $\log_a x$ και βρείτε το $\lim_{x\to 0} \log_a x$.*

Λύση: Επειδή η $\log_a x$ είναι αύξουσα, το $\eta = \lim_{x\to 0} \log_a x$ υπάρχει και είναι αριθμός ή $-\infty$.
Με αλλαγή μεταβλητής έχουμε $\lim_{x\to 0} \log_a(ax) = \lim_{y\to 0} \log_a y = \eta$.
Επομένως, από την $\log_a(ax) = 1 + \log_a x$ συνεπάγεται $\eta = 1 + \eta$ και άρα $\eta = -\infty$.

Άσκηση 3.5.3. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ αύξουσα στο A και $\xi \in \mathbb{R}$ από αριστερά του και από δεξιά του σημείο συσσώρευσης του A.*

Αποδείξτε ότι υπάρχουν τα όρια $\eta = \lim_{x\to\xi-} f(x)$ και $\zeta = \lim_{x\to\xi+} f(x)$, ότι είναι αριθμοί και ότι $\eta \leq \zeta$.

Θεωρήστε τους αριθμούς y με την ιδιότητα: ισχύει $f(x') \leq y \leq f(x'')$ για κάθε $x', x'' \in A$ με $x' < \xi < x''$. Αποδείξτε ότι αυτοί οι αριθμοί y είναι ακριβώς τα στοιχεία του διαστήματος $[\eta, \zeta]$.

Λύση: Επειδή η f είναι αύξουσα, υπάρχει το $\eta = \lim_{x\to\xi-} f(x)$ και είναι αριθμός ή $+\infty$ και υπάρχει το $\zeta = \lim_{x\to\xi+} f(x)$ και είναι αριθμός ή $-\infty$.
Έστω τυχών $x' \in A$ με $x' < \xi$. Τότε για κάθε $x'' \in A$ με $\xi < x''$ ισχύει $f(x') \leq f(x'')$. Άρα $f(x') \leq \lim_{x''\to\xi+} f(x'')$, δηλαδή $f(x') \leq \zeta$.
Έχουμε, λοιπόν, ότι ισχύει $f(x') \leq \zeta$ για κάθε $x' \in A$ με $x' < \xi$. Άρα $\lim_{x'\to\xi+} f(x') \leq \zeta$, δηλαδή $\eta \leq \zeta$.
Αυτομάτως, τα η, ζ είναι αριθμοί.
Κατόπιν, έστω οποιοσδήποτε αριθμός y με την ιδιότητα να ισχύει $f(x') \leq y \leq f(x'')$ για κάθε $x', x'' \in A$ με $x' < \xi < x''$. Παίρνοντας όρια όταν $x' \to \xi-$ και όταν $x'' \to \xi+$, βρίσκουμε $\eta \leq y \leq \zeta$. Άρα κάθε τέτοιος αριθμός y ανήκει στο διάστημα $[\eta, \zeta]$.
Αντιστρόφως, έστω y στο διάστημα $[\eta, \zeta]$.
Επειδή η f είναι αύξουσα, γνωρίζουμε ότι ισχύει $f(x') \leq \eta$ για κάθε $x' \in A$ με $x' < \xi$. Για τον

ίδιο λόγο, ισχύει $\zeta \leq f(x'')$ για κάθε $x'' \in A$ με $\xi < x''$. Άρα $f(x') \leq \eta \leq y \leq \zeta \leq f(x'')$ για κάθε $x', x'' \in A$ με $x' < \xi < x''$. Δηλαδή, κάθε αριθμός y στο $[\eta, \zeta]$ έχει την ιδιότητα να ισχύει $f(x') \leq y \leq f(x'')$ για κάθε $x', x'' \in A$ με $x' < \xi < x''$.

Άσκηση 3.5.4. *Έστω $\xi \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $A \subseteq (-\infty, \xi)$, $f : A \to \mathbb{R}$ γνησίως αύξουσα στο A και έστω ότι το ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει το $\eta = \lim_{x \to \xi} f(x) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ και ότι ισχύει $f(x) < \eta$ για κάθε $x \in A$. Άρα το σύνολο τιμών $B = \{f(x) \,|\, x \in A\}$ είναι $\subseteq (-\infty, \eta)$. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο A, ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : B \to A$ και είναι γνησίως αύξουσα στο B.*

Αποδείξτε ότι το η είναι σημείο συσσώρευσης του B και ότι $\lim_{y \to \eta} f^{-1}(y) = \xi$.

Λύση: Το ότι το η είναι σημείο συσσώρευσης του B συνεπάγεται αμέσως από το αποτέλεσμα της άσκησης 3.3.30.

Επειδή η $f^{-1} : B \to A$ είναι γνησίως αύξουσα στο B και επειδή $B \subseteq (-\infty, \eta)$ και το η είναι σημείο συσσώρευσης του B, συνεπάγεται ότι υπάρχει το $\lim_{y \to \eta} f^{-1}(y)$.

Θέτουμε $\xi' = \lim_{y \to \eta} f^{-1}(y)$ και έχουμε να αποδείξουμε ότι $\xi' = \xi$.

Τώρα, όμως, τους συλλογισμούς που κάναμε για την f και την f^{-1} μπορούμε να τούς κάνουμε και για την f^{-1} και την $(f^{-1})^{-1} = f$. Δηλαδή, από το ότι η $f^{-1} : B \to A$ είναι γνησίως αύξουσα στο B, το ότι $B \subseteq (-\infty, \eta)$ και το ότι το η είναι σημείο συσσώρευσης του B, συνεπάγεται ότι το A (το σύνολο τιμών της f^{-1}) είναι $\subseteq (-\infty, \xi')$ και ότι το ξ' είναι σημείο συσσώρευσης του A.

Συμπεραίνουμε ότι το A είναι $\subseteq (-\infty, \xi)$ και $\subseteq (-\infty, \xi')$ και ότι τα ξ, ξ' είναι *και τα δύο* σημεία συσσώρευσης του A. Τώρα, αν $\xi < \xi'$, τότε το ξ' δεν μπορεί να είναι σημείο συσσώρευσης του A, αφού $A \subseteq (-\infty, \xi)$. Ομοίως, αν $\xi' < \xi$, τότε το ξ δεν μπορεί να είναι σημείο συσσώρευσης του A, αφού $A \subseteq (-\infty, \xi')$. Άρα $\xi = \xi'$.

Άσκηση 3.6.1. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}$ σημείο συσσώρευσης του A και $\delta > 0$, $M > 0$, $\rho > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x') - f(x'')| \leq M|x' - x''|^\rho$ για κάθε $x', x'' \in A$ με $0 < |x' - \xi| < \delta$ και $0 < |x'' - \xi| < \delta$. Αποδείξτε ότι το $\lim_{x \to \xi} f(x)$ υπάρχει και είναι αριθμός.*

Λύση: Έστω τυχών $\epsilon > 0$. Θεωρούμε τον $\delta_1 = (\frac{\epsilon}{M})^{1/\rho} > 0$ και τον $\delta_2 = \min\{\delta, \frac{\delta_1}{2}\} > 0$.
Τότε για κάθε $x', x'' \in A$ με $0 < |x' - \xi| < \delta_2$ και $0 < |x'' - \xi| < \delta_2$ έχουμε ότι ισχύει $0 < |x' - \xi| < \delta$ και $0 < |x'' - \xi| < \delta$ και άρα

$$|f(x') - f(x'')| \leq M|x' - x''|^\rho.$$

Επίσης, ισχύει $|x' - x''| \leq |x' - \xi| + |x'' - \xi| < \frac{\delta_1}{2} + \frac{\delta_1}{2} = \delta_1$ και, επομένως,

$$|f(x') - f(x'')| \leq M|x' - x''|^\rho < M{\delta_1}^\rho = \epsilon.$$

Άρα για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta_2 > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$ για κάθε $x', x'' \in A$ με $0 < |x' - \xi| < \delta_2$ και $0 < |x'' - \xi| < \delta_2$. Συνεπώς, το $\lim_{x \to \xi} f(x)$ υπάρχει και είναι αριθμός.

14.4 Κεφάλαιο 4.

Άσκηση 4.1.1. *Αποδείξτε βάσει του ορισμού ότι οι x^2, $\frac{1}{x}$, $\sqrt{x}$ είναι συνεχείς στον 1.*

Λύση: Η πρώτη συνάρτηση. Παίρνουμε τυχόντα $\epsilon > 0$. Πρέπει να αποδείξουμε ότι υπάρχει κάποιος $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|x^2 - 1| < \epsilon$ για κάθε x με $|x - 1| < \delta$.
Τώρα, το $|x^2 - 1| < \epsilon$ συνεπάγεται από το $|x+1||x-1| < \epsilon$ και θα δούμε ότι ισχύει $|x+1||x-1| \leq M|x-1|$ σε κάποια περιοχή του 1, όπου M είναι κάποιος αριθμός ανεξάρτητος του x στην περιοχή αυτή. Για να ισχύει κάτι τέτοιο είναι αρκετό να ισχύει $|x + 1| \leq M$. Πράγματι, αν πάρουμε οποιονδήποτε $\delta > 0$ ώστε $\delta \leq 1$, τότε για κάθε x με $|x - 1| < \delta$ ισχύει $|x - 1| < 1$ και, επομένως, ισχύει $|x + 1| = |(x - 1) + 2| \leq |x - 1| + 2 < 3$. Άρα, αν πάρουμε οποιονδήποτε $\delta > 0$ ώστε $\delta \leq 1$, τότε για κάθε x με $|x - 1| < \delta$ ισχύει $|x + 1||x - 1| < 3|x - 1|$. Δηλαδή:

$$0 < \delta \leq 1 \ : \qquad |x - 1| < \delta \ \Rightarrow \ |x + 1||x - 1| < 3|x - 1|. \tag{14.36}$$

Τώρα βλέπουμε ότι το $3|x-1| < \epsilon$ συνεπάγεται από το $|x-1| < \frac{\epsilon}{3}$. Άρα, αν πάρουμε οποιονδήποτε $\delta > 0$ ώστε $\delta \leq \frac{\epsilon}{3}$, τότε για κάθε x με $|x-1| < \delta$ ισχύει $|x-1| < \frac{\epsilon}{3}$ και, επομένως, $3|x-1| < \epsilon$. Δηλαδή:

$$0 < \delta \leq \tfrac{\epsilon}{3} \ : \qquad |x-1| < \delta \ \Rightarrow \ 3|x-1| < \epsilon. \tag{14.37}$$

Άρα, συνολικά, αν πάρουμε οποιονδήποτε $\delta > 0$ ώστε $\delta \leq 1$ *και* $\delta \leq \frac{\epsilon}{3}$, τότε συνδυάζουμε τις (14.36) και (14.37) ως εξής: για κάθε x με $|x-1| < \delta$ ισχύει $|x+1||x-1| < 3|x-1|$ (διότι $\delta \leq 1$) και $3|x-1| < \epsilon$ (διότι $\delta \leq \frac{\epsilon}{3}$) και, επομένως, ισχύει $|x+1||x-1| < \epsilon$. Δηλαδή:

$$0 < \delta \leq \min\{1, \tfrac{\epsilon}{3}\} \ : \qquad |x-1| < \delta \ \Rightarrow \ \left\{\begin{matrix} |x+1||x-1| < 3|x-1| \\ 3|x-1| < \epsilon \end{matrix}\right\} \ \Rightarrow \ |x+1||x-1| < \epsilon.$$

Η δεύτερη συνάρτηση. Παίρνουμε τυχόντα $\epsilon > 0$. Πρέπει να αποδείξουμε ότι υπάρχει κάποιος $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|\frac{1}{x} - 1| < \epsilon$ για κάθε $x \neq 0$ με $|x-1| < \delta$.

Το $|\frac{1}{x} - 1| < \epsilon$ συνεπάγεται από το $\frac{|x-1|}{|x|} < \epsilon$ και θα δούμε ότι ισχύει $\frac{|x-1|}{|x|} \leq M|x-1|$ σε κάποια περιοχή του 1, όπου M είναι κάποιος αριθμός ανεξάρτητος του x στην περιοχή αυτή. Για να ισχύει κάτι τέτοιο είναι αρκετό να ισχύει $|x| \geq \frac{1}{M}$. Και τώρα, αν πάρουμε οποιονδήποτε $\delta > 0$ ώστε $\delta \leq \frac{1}{2}$, τότε για κάθε x με $|x-1| < \delta$ ισχύει $|x-1| < \frac{1}{2}$ και, επομένως, ισχύει $|x| > \frac{1}{2}$. Άρα, αν πάρουμε οποιονδήποτε $\delta > 0$ ώστε $\delta \leq \frac{1}{2}$, τότε για κάθε x με $|x-1| < \delta$ ισχύει $\frac{|x-1|}{|x|} < 2|x-1|$. Δηλαδή:

$$0 < \delta \leq 1 \ : \qquad |x-1| < \delta \ \Rightarrow \ \tfrac{|x-1|}{|x|} < 2|x-1|. \tag{14.38}$$

Τώρα, το $2|x-1| < \epsilon$ συνεπάγεται από το $|x-1| < \frac{\epsilon}{2}$. Άρα, αν πάρουμε οποιονδήποτε $\delta > 0$ ώστε $\delta \leq \frac{\epsilon}{2}$, τότε για κάθε x με $|x-1| < \delta$ ισχύει $|x-1| < \frac{\epsilon}{2}$ και, επομένως, $2|x-1| < \epsilon$. Δηλαδή:

$$0 < \delta \leq \tfrac{\epsilon}{2} \ : \qquad |x-1| < \delta \ \Rightarrow \ 2|x-1| < \epsilon. \tag{14.39}$$

Άρα, συνολικά, αν πάρουμε οποιονδήποτε $\delta > 0$ ώστε $\delta \leq \frac{1}{2}$ *και* $\delta \leq \frac{\epsilon}{2}$, τότε συνδυάζουμε τις (14.38) και (14.39) ως εξής: για κάθε x με $|x-1| < \delta$ ισχύει $\frac{|x-1|}{|x|} < 2|x-1|$ (διότι $\delta \leq \frac{1}{2}$) και $2|x-1| < \epsilon$ (διότι $\delta \leq \frac{\epsilon}{2}$) και, επομένως, ισχύει $\frac{|x-1|}{|x|} < \epsilon$. Δηλαδή:

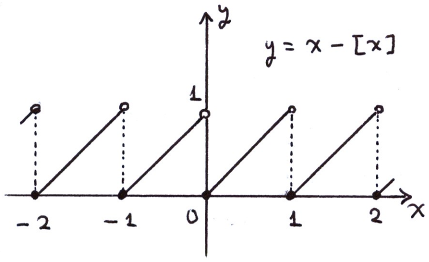
$$0 < \delta \leq \min\{\tfrac{1}{2}, \tfrac{\epsilon}{2}\} \ : \qquad |x-1| < \delta \ \Rightarrow \ \left\{\begin{matrix} |x-1|/|x| < 2|x-1| \\ 2|x-1| < \epsilon \end{matrix}\right\} \ \Rightarrow \ \tfrac{|x-1|}{|x|} < \epsilon.$$

Η τρίτη συνάρτηση. Παίρνουμε τυχόντα $\epsilon > 0$ και θα αποδείξουμε ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|\sqrt{x} - 1| < \epsilon$ για κάθε $x \geq 0$ με $|x-1| < \delta$.

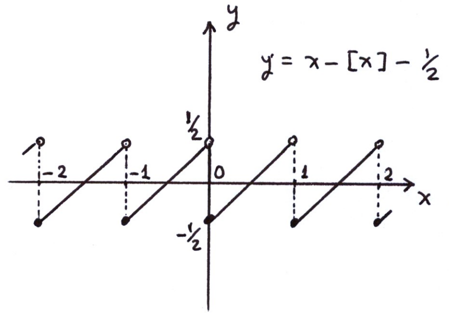
Τώρα, η $|\sqrt{x} - 1| < \epsilon$ γράφεται $\frac{|x-1|}{\sqrt{x}+1} < \epsilon$ και αυτή συνεπάγεται από την $|x-1| < \epsilon$ (μικρύναμε τον παρονομαστή). Άρα, αν επιλέξουμε οποιονδήποτε $\delta > 0$ ώστε $\delta \leq \epsilon$, τότε για κάθε $x \geq 0$ με $|x-1| < \delta$ συνεπάγεται $|x-1| < \epsilon$ και άρα συνεπάγεται $|\sqrt{x} - 1| = \frac{|x-1|}{\sqrt{x}+1} < \epsilon$.

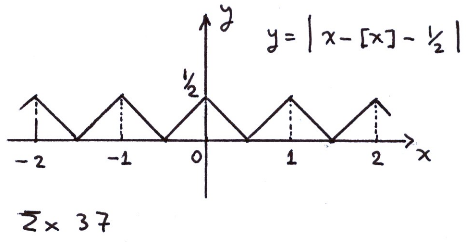
Άσκηση 4.1.3. *Θεωρήστε τις συναρτήσεις* $x - [x]$, $x - [x] - \frac{1}{2}$, $\left|x - [x] - \frac{1}{2}\right|$. *Σε ποιά σημεία είναι συνεχείς ή δεξιά συνεχείς ή αριστερά συνεχείς;*

Λύση: Δείτε τα γραφήματα των συναρτήσεων στα σχήματα 36 και 37.



Σχ 36





Η πρώτη συνάρτηση $f(x) = x - [x]$. Γνωρίζουμε από το αποτέλεσμα της άσκησης 3.3.10 ότι, αν ο ξ δεν είναι ακέραιος, τότε $\lim_{x\to\xi}[x] = [\xi]$ και ότι, αν ο ξ είναι ακέραιος, τότε $\lim_{x\to\xi+}[x] = \xi = [\xi]$ και $\lim_{x\to\xi-}[x] = \xi - 1 = [\xi] - 1$.
Επομένως, αν ο ξ δεν είναι ακέραιος, τότε

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = \lim_{x\to\xi}(x - [x]) = \xi - [\xi] = f(\xi)$$

και άρα η συνάρτηση είναι συνεχής στον ξ. Αν ο ξ είναι ακέραιος, τότε

$$\lim_{x\to\xi+} f(x) = \lim_{x\to\xi+}(x - [x]) = \xi - [\xi] = 0 = f(\xi),$$

$$\lim_{x\to\xi-} f(x) = \lim_{x\to\xi-}(x - [x]) = \xi - [\xi] + 1 = 1 = f(\xi) + 1,$$

οπότε η συνάρτηση είναι δεξιά συνεχής αλλά όχι αριστερά συνεχής στον ξ.
Η δεύτερη συνάρτηση $f(x) = x - [x] - \frac{1}{2}$. Αν ο ξ δεν είναι ακέραιος, τότε

$$\lim_{x\to\xi}\left(x - [x] - \tfrac{1}{2}\right) = \xi - [\xi] - \tfrac{1}{2} = f(\xi)$$

και άρα η συνάρτηση είναι συνεχής στον ξ. Αν ο ξ είναι ακέραιος, τότε

$$\lim_{x\to\xi+} f(x) = \lim_{x\to\xi+}\left(x - [x] - \tfrac{1}{2}\right) = \xi - [\xi] - \tfrac{1}{2} = -\tfrac{1}{2} = f(\xi),$$

$$\lim_{x\to\xi-} f(x) = \lim_{x\to\xi-}\left(x - [x] - \tfrac{1}{2}\right) = \xi - [\xi] + \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2} = f(\xi) + 1$$

οπότε η συνάρτηση είναι δεξιά συνεχής αλλά όχι αριστερά συνεχής στον ξ.
Η τρίτη συνάρτηση $f(x) = |x - [x] - \frac{1}{2}|$. Αν ο ξ δεν είναι ακέραιος, τότε

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = \lim_{x\to\xi}\left|x - [x] - \tfrac{1}{2}\right| = \left|\xi - [\xi] - \tfrac{1}{2}\right| = f(\xi)$$

και άρα η συνάρτηση είναι συνεχής στον ξ. Αν ο ξ είναι ακέραιος, τότε

$$\lim_{x\to\xi+} f(x) = \lim_{x\to\xi+}\left|x - [x] - \tfrac{1}{2}\right| = \left|\xi - [\xi] - \tfrac{1}{2}\right| = \left|-\tfrac{1}{2}\right| = \tfrac{1}{2} = f(\xi),$$

$$\lim_{x\to\xi-} f(x) = \lim_{x\to\xi-}\left|x - [x] - \tfrac{1}{2}\right| = \left|\xi - [\xi] + \tfrac{1}{2}\right| = \left|\tfrac{1}{2}\right| = \tfrac{1}{2} = f(\xi)$$

οπότε η συνάρτηση είναι δεξιά συνεχής και αριστερά συνεχής στον ξ. Άρα η συνάρτηση είναι συνεχής σε κάθε ξ.

Άσκηση 4.1.5. *Σε ποιά σημεία είναι συνεχής η συνάρτηση* $f(x) = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^x - n^{-x}}{n^x + n^{-x}}$ *;*

Λύση: Αν $x = 0$, τότε είναι $\frac{n^x - n^{-x}}{n^x + n^{-x}} = \frac{1-1}{1+1} = 0$ για κάθε n, οπότε $f(0) = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0$.
Αν $x > 0$, τότε

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^x - n^{-x}}{n^x + n^{-x}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1 - n^{-2x}}{1 + n^{-2x}} = \frac{1-0}{1+0} = 1.$$

Τέλος, αν $x < 0$, τότε

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^x - n^{-x}}{n^x + n^{-x}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^{2x} - 1}{n^{2x} + 1} = \frac{0-1}{0+1} = -1.$$

Άρα η f έχει τύπο $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x > 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \\ -1, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$ οπότε η f είναι συνεχής σε κάθε $\xi \neq 0$ και ασυνεχής στον 0.

Άσκηση 4.1.6. *Έστω $f : (\xi - \delta, \xi + \delta) \to \mathbb{R}$.*
[α] *Αποδείξτε ότι, αν η f είναι συνεχής στον ξ, τότε $\lim_{h\to 0}(f(\xi + h) - f(\xi - h)) = 0$.*
Από την $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ και τον $\xi = 0$ τί συμπεραίνετε για την ισχύ του αντιστρόφου;

Λύση: Επειδή η f είναι συνεχής στον ξ, έχουμε $\lim_{h\to 0} f(\xi + h) = f(\xi)$ και $\lim_{h\to 0} f(\xi - h) = f(\xi)$ και, επομένως,

$$\lim_{h\to 0}(f(\xi + h) - f(\xi - h)) = f(\xi) - f(\xi) = 0.$$

Για την ειδική συνάρτηση έχουμε $\lim_{h\to 0} f(0 + h) = \lim_{h\to 0} f(h) = 0$ και $\lim_{h\to 0} f(0 - h) = \lim_{h\to 0} f(-h) = 0$ και άρα

$$\lim_{h\to 0}(f(0 + h) - f(0 - h)) = 0.$$

Όμως, η f δεν είναι συνεχής στον 0, αφού $f(0) = 1$.

Άσκηση 4.1.7. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $\xi \in A$ και $\delta > 0$, $M \geq 0$ ώστε να ισχύει $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in A$ με $|x - \xi| < \delta$. Θεωρούμε την $g : A \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = (x - \xi)f(x)$. Αποδείξτε ότι η g είναι συνεχής στον ξ.*

Λύση: Είναι $g(\xi) = (\xi - \xi)f(\xi) = 0$.
Επίσης, ισχύει $|g(x)| = |x - \xi||f(x)| \leq M|x - \xi|$ κοντά στον ξ και, επειδή $\lim_{x\to\xi} M|x - \xi| = 0$, συνεπάγεται ότι $\lim_{x\to\xi} g(x) = 0$.
Άρα η g είναι συνεχής στον ξ.

Άσκηση 4.1.8. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A και έστω ότι ο ξ είναι σημείο ασυνέχειας της f. Αν υπάρχει $\eta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση με τύπο $g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{αν } x \in A,\ x \neq \xi \\ \eta, & \text{αν } x = \xi \end{cases}$ να είναι συνεχής στον ξ, αποδείξτε ότι ο ξ είναι σημείο άρσιμης ασυνέχειας της f.*

Λύση: Επειδή η g είναι συνεχής στον ξ, είναι $\lim_{x\to\xi} g(x) = g(\xi) = \eta$. Τώρα, επειδή οι f, g ταυτίζονται κοντά στον ξ, συνεπάγεται ότι $\lim_{x\to\xi} f(x) = \lim_{x\to\xi} g(x) = \eta$. Άρα ο ξ είναι σημείο άρσιμης ασυνέχειας της f.

Άσκηση 4.1.9. *Αποδείξτε ότι η $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{αν } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ είναι ασυνεχής σε κάθε x.*

Αποδείξτε ότι η $f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{αν } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ είναι συνεχής στον 0 και ασυνεχής σε κάθε $x \neq 0$.

Αποδείξτε ότι η $f(x) = \begin{cases} 1/n, & \text{αν } x = m/n \text{ για κάποιους } m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \text{ με } \gcd(m, n) = 1 \\ 0, & \text{αν } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ είναι ασυνεχής σε κάθε $x \in \mathbb{Q}$ και συνεχής σε κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Λύση: Η πρώτη συνάρτηση. Παίρνουμε έναν οποιονδήποτε ξ. Θα βρούμε έναν $\epsilon > 0$ τέτοιον ώστε για κάθε $\delta > 0$ να υπάρχει κάποιος x ώστε $|x - \xi| < \delta$ και $|f(x) - f(\xi)| \geq \epsilon$. Αυτό ακριβώς είναι η άρνηση του ορισμού της συνέχειας στον ξ και, επομένως, η f θα είναι ασυνεχής στον ξ.
Έστω $\xi \in \mathbb{Q}$, οπότε $f(\xi) = 1$.
Αν θέλουμε να πετύχουμε να ισχύει $|f(x) - f(\xi)| = |f(x) - 1| \geq \epsilon > 0$, τότε αναγκαστικά ο x πρέπει να είναι άρρητος, διότι αν ο x είναι ρητός τότε $|f(x) - f(\xi)| = |1 - 1| = 0$. Μάλιστα, αν ο x είναι πράγματι άρρητος τότε θα είναι $|f(x) - f(\xi)| = |0 - 1| = 1$ και θα ισχύει $|f(x) - f(\xi)| \geq \epsilon$

αρκεί να έχουμε φροντίσει να επιλέξουμε $\epsilon \le 1$.
Μετά από αυτά τα προκαταρκτικά, επιλέγουμε έναν ϵ τέτοιον ώστε $0 < \epsilon \le 1$ (για παράδειγμα, τον $\epsilon = 1$ ή τον $\epsilon = \frac{1}{2}$). Τότε για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει τουλάχιστον ένας $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ στο διάστημα $(\xi-\delta, \xi+\delta)$. Ένας τέτοιος x ικανοποιεί την $|x-\xi| < \delta$ αλλά δεν ικανοποιεί την $|f(x)-f(\xi)| < \epsilon$, αφού $|f(x) - f(\xi)| = |0 - 1| = 1 \ge \epsilon$.
Τώρα, έστω $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, οπότε $f(\xi) = 0$.
Σκεφτόμαστε όπως και στην πρώτη περίπτωση και καταλήγουμε πάλι στο εξής.
Επιλέγουμε έναν ϵ τέτοιον ώστε $0 < \epsilon \le 1$. Τότε για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει τουλάχιστον ένας $x \in \mathbb{Q}$ στο διάστημα $(\xi - \delta, \xi + \delta)$. Ένας τέτοιος x ικανοποιεί την $|x - \xi| < \delta$ αλλά δεν ικανοποιεί την $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$, αφού $|f(x) - f(\xi)| = |1 - 0| = 1 \ge \epsilon$.
Η δεύτερη συνάρτηση. Έστω $\xi \neq 0$.
Έστω $\xi \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, οπότε $f(\xi) = \xi \neq 0$.
Επιλέγουμε έναν ϵ τέτοιον ώστε $0 < \epsilon \le |\xi|$. Τότε για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει τουλάχιστον ένας $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ στο διάστημα $(\xi - \delta, \xi + \delta)$. Ένας τέτοιος x ικανοποιεί την $|x - \xi| < \delta$ αλλά δεν ικανοποιεί την $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$, αφού $|f(x) - f(\xi)| = |0 - \xi| = |\xi| \ge \epsilon$.
Άρα η f είναι ασυνεχής στον ξ.
Κατόπιν, έστω $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, οπότε $f(\xi) = 0$.
Επιλέγουμε έναν ϵ τέτοιον ώστε $0 < \epsilon \le \frac{|\xi|}{2}$. Τότε για κάθε $\delta > 0$ ορίζουμε $\delta' = \min\{\delta, \frac{|\xi|}{2}\} > 0$ και τότε υπάρχει τουλάχιστον ένας $x \in \mathbb{Q}$ στο διάστημα $(\xi - \delta', \xi + \delta')$. Ένας τέτοιος x ικανοποιεί την $|x - \xi| < \delta$. Ικανοποιεί, όμως, και την $|x - \xi| < \frac{|\xi|}{2}$ και άρα την $|x| \ge \frac{|\xi|}{2}$. Συνεπάγεται ότι αυτός ο x δεν ικανοποιεί την $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$, αφού $|f(x) - f(\xi)| = |x - 0| = |x| \ge \frac{|\xi|}{2} \ge \epsilon$.
Άρα η f είναι ασυνεχής στον ξ.
Τέλος, έστω $\xi = 0$.
Από τον τύπο της συνάρτησης συνεπάγεται αμέσως ότι ισχύει

$$-|x| \le f(x) \le |x|$$

για κάθε x. Άρα από την ιδιότητα παρεμβολής συνεπάγεται ότι $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$, οπότε η f είναι συνεχής στον $\xi = 0$.
Παρατήρηση: Μπορούμε να κάνουμε και μια άλλου τύπου απόδειξη στην περίπτωση όπου $\xi = 0$ ως εξής. Από τον τύπο της συνάρτησης έχουμε ότι

$$\lim_{x\in\mathbb{Q}, x\to 0} f(x) = \lim_{x\in\mathbb{Q}, x\to 0} x = 0 \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}, x\to 0} f(x) = \lim_{x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}, x\to 0} 0 = 0.$$

Τώρα, επειδή τα σύνολα $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ σχηματίζουν ολόκληρο το $\mathbb{R}$, συνεπάγεται ότι

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0.$$

Αυτό αποτελεί ειδική περίπτωση μιας γενικότερης ιδιότητας.
Έστω $f : A \cup B \to \mathbb{R}$ και $A \cap B = \emptyset$. Αν το ξ είναι σημείο συσσώρευσης και του A και του B και αν $\lim_{x\in A, x\to\xi} f(x) = l$ και $\lim_{x\in B, x\to\xi} f(x) = l$, τότε $\lim_{x\to\xi} f(x) = l$.
Η ιδιότητα αυτή αποτελεί, ουσιαστικά, το περιεχόμενο της άσκησης 3.2.4.
Η τρίτη συνάρτηση. Έστω $\xi \in \mathbb{Q}$.
Τότε ο ξ γράφεται $\xi = \frac{m}{n}$ για κάποιους $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ με $\gcd(m, n) = 1$ και, επομένως, είναι $f(\xi) = \frac{1}{n} > 0$.
Επιλέγουμε έναν ϵ τέτοιον ώστε $0 < \epsilon \le f(\xi)$. Τότε για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει τουλάχιστον ένας $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ στο διάστημα $(\xi - \delta, \xi + \delta)$. Ένας τέτοιος x ικανοποιεί την $|x - \xi| < \delta$ αλλά δεν ικανοποιεί την $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$, αφού $|f(x) - f(\xi)| = |0 - f(\xi)| = f(\xi) \ge \epsilon$.
Άρα η f είναι ασυνεχής στον ξ.
Τώρα, έστω $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, οπότε $f(\xi) = 0$.
Θεωρούμε τυχόντα $\epsilon > 0$ και παίρνουμε έναν $n_0 \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε να είναι $\frac{1}{n_0} \le \epsilon$. Τώρα εξετάζουμε

όλους τους ρητούς $\frac{m}{n}$ με $m\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{N}$ και $\gcd(m,n)=1$ και έτσι ώστε $n\leq n_0$. Παίρνουμε δύο τέτοιους, τον $\frac{m'}{n'}$ και τον $\frac{m''}{n''}$, και εκτιμούμε την απόστασή τους:

$$\left|\tfrac{m'}{n'}-\tfrac{m''}{n''}\right|=\tfrac{|m'n''-m''n'|}{n'n''}\geq\tfrac{1}{{n_0}^2},$$

διότι ο $m'n''-m''n'$ είναι ακέραιος $\neq 0$ και διότι $n',n''\leq n_0$. Δηλαδή, οποιοιδήποτε δύο από αυτούς τους ρητούς απέχουν μεταξύ τους απόσταση $\geq\frac{1}{{n_0}^2}$.
Τώρα, θεωρούμε το διάστημα $(\xi-\frac{1}{2{n_0}^2},\xi+\frac{1}{2{n_0}^2})$. Επειδή το μήκος αυτού του ανοικτού διαστήματος είναι ίσο με $\frac{1}{{n_0}^2}$, υπάρχει το πολύ ένας ρητός από αυτούς που εξετάσαμε μέσα σ' αυτό το διάστημα. Αν δεν υπάρχει κανένας τέτοιος ρητός, επιλέγουμε $\delta=\frac{1}{2{n_0}^2}$ ενώ, αν υπάρχει ένας τέτοιος ρητός, επιλέγουμε τον δ να είναι ίσος με την απόσταση αυτού του ρητού από τον άρρητο ξ. Σε κάθε περίπτωση είναι προφανές ότι το διάστημα $(\xi-\delta,\xi+\delta)$ δεν περιέχει κανέναν ρητό από αυτούς που εξετάσαμε και άρα κάθε ρητός x που περιέχεται σ' αυτό το διάστημα γράφεται $x=\frac{m}{n}$ για κάποιους $m\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{N}$ με $\gcd(m,n)=1$ και $n>n_0$ και, επομένως, ισχύει

$$|f(x)-f(\xi)|=|\tfrac{1}{n}-0|=\tfrac{1}{n}<\tfrac{1}{n_0}\leq\epsilon.$$

Επίσης, για κάθε άρρητο $x\in(\xi-\delta,\xi+\delta)$ ισχύει $|f(x)-f(\xi)|=|0-0|=0<\epsilon$.
Άρα για κάθε $\epsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$ ώστε να ισχύει $|f(x)-f(\xi)|<\epsilon$ για κάθε $x\in(\xi-\delta,\xi+\delta)$ και, επομένως, η f είναι συνεχής στον ξ.

Άσκηση 4.1.10. *Έστω $A\subseteq B$, $\xi\in A$, $g:B\to\mathbb{R}$ και έστω ότι η $f:A\to\mathbb{R}$ είναι ο περιορισμός της g στο A. Αποδείξτε ότι, αν η g είναι συνεχής στον ξ, τότε και η f είναι συνεχής στον ξ.*

Λύση: Έστω ότι η g είναι συνεχής στον ξ. Παίρνουμε τυχόντα $\epsilon>0$ και τότε υπάρχει $\delta>0$ ώστε να ισχύει $|g(x)-g(\xi)|<\epsilon$ για κάθε $x\in B$ με $|x-\xi|<\delta$. Επειδή $A\subseteq B$, συνεπάγεται ότι ισχύει $|g(x)-g(\xi)|<\epsilon$ για κάθε $x\in A$ με $|x-\xi|<\delta$. Όμως, έχουμε ότι $f(x)=g(x)$ για κάθε $x\in A$. Άρα ισχύει $|f(x)-f(\xi)|<\epsilon$ για κάθε $x\in A$ με $|x-\xi|<\delta$ και άρα η f είναι συνεχής στον ξ.

Άσκηση 4.1.11. *Έστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}x(-1)^{[1/x]}, & \text{αν } x\neq 0\\ 0, & \text{αν } x=0\end{cases}$ Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στον 0 και ασυνεχής σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στον 0.*

Λύση: Για κάθε $x\neq 0$ ισχύει

$$|f(x)|=\left|x(-1)^{[1/x]}\right|=|\pm x|=|x|.$$

Άρα $\lim_{x\to 0}f(x)=0=f(0)$, οπότε η f είναι συνεχής στον 0.
Αν $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, στο διάστημα $(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]$ ισχύει $f(x)=x(-1)^n$ και στο διάστημα $(\frac{1}{n},\frac{1}{n-1}]$ ισχύει $f(x)=x(-1)^{n-1}$, οπότε

$$\lim_{x\to(1/n)-}f(x)=\tfrac{1}{n}(-1)^n,\qquad \lim_{x\to(1/n)+}f(x)=\tfrac{1}{n}(-1)^{n-1}.$$

Άρα δεν υπάρχει το $\lim_{x\to(1/n)}f(x)$, οπότε ο $\frac{1}{n}$ είναι σημείο ασυνέχειας της f.
Άρα η f είναι ασυνεχής σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στον 0.

Άσκηση 4.1.12. *Έστω $f:A\to\mathbb{R}$, $\xi\in A$ και $\delta>0$, $M\geq 0$, $\rho>0$ ώστε να ισχύει $|f(x)-f(\xi)|\leq M|x-\xi|^\rho$ για κάθε $x\in A$ με $|x-\xi|<\delta$. Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στον ξ.*
Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις $|x|$, x^2, $\sqrt{|x|}$ έχουν την παραπάνω ιδιότητα με $\xi=0$ και βρείτε τους αντίστοιχους μέγιστους εκθέτες ρ. Αποδείξτε ότι οι ίδιες συναρτήσεις έχουν την παραπάνω ιδιότητα με οποιονδήποτε $\xi\neq 0$ και βρείτε τους αντίστοιχους μέγιστους εκθέτες ρ. Παρατηρήστε ότι για τις δύο τελευταίες συναρτήσεις είναι άλλος ο μέγιστος εκθέτης ρ για τον $\xi=0$ και άλλος για τον οποιονδήποτε $\xi\neq 0$.

Λύση: Από το $\lim_{x\to\xi}M|x-\xi|^\rho=0$ και από το ότι ισχύει $|f(x)-f(\xi)|\leq M|x-\xi|^\rho$ κοντά στον ξ συνεπάγεται $\lim_{x\to\xi}(f(x)-f(\xi))=0$ και άρα $\lim_{x\to\xi}f(x)=f(\xi)$.

Η πρώτη συνάρτηση $f(x)=|x|$. Για οποιονδήποτε ξ έχουμε ότι ισχύει

$$|f(x)-f(\xi)|=||x|-|\xi||\leq |x-\xi|$$

για κάθε x. Άρα η f έχει την εν λόγω ιδιότητα με $\rho=1$.
Ας υποθέσουμε ότι για κάποιον ξ υπάρχουν $\delta>0$, $M\geq 0$, $\rho>1$ ώστε να ισχύει $|f(x)-f(\xi)|\leq M|x-\xi|^{\rho}$ για κάθε x με $|x-\xi|<\delta$. Δηλαδή, ισχύει $||x|-|\xi||\leq M|x-\xi|^{\rho}$ κοντά στον ξ.
Αν $\xi=0$, τότε έχουμε ότι ισχύει $|x|\leq M|x|^{\rho}$ κοντά στον 0. Άρα ισχύει $|x|^{1-\rho}\leq M$ κοντά στον 0 το οποίο είναι άτοπο, διότι $\lim_{x\to 0}|x|^{1-\rho}=+\infty$.
Αν $\xi>0$, τότε ισχύει $x>0$ κοντά στον ξ, οπότε, συνδυάζοντας με την $||x|-|\xi||\leq M|x-\xi|^{\rho}$, έχουμε ότι ισχύει $|x-\xi|\leq M|x-\xi|^{\rho}$ κοντά στον ξ. Άρα ισχύει $|x-\xi|^{1-\rho}\leq M$ κοντά στον ξ το οποίο είναι άτοπο, διότι $\lim_{x\to\xi}|x-\xi|^{1-\rho}=+\infty$.
Με τον ίδιο τρόπο μπορείτε να αποδείξετε ότι προκύπτει άτοπο στην περίπτωση $\xi<0$.
Άρα ο εκθέτης $\rho=1$ είναι ο μέγιστος για να ισχύει $|f(x)-f(\xi)|\leq M|x-\xi|^{\rho}$ κοντά σε οποιονδήποτε ξ.
Η δεύτερη συνάρτηση $f(x)=x^2$. Για τον $\xi=0$ έχουμε ότι ισχύει

$$|f(x)-f(0)|=|x-0|^2$$

για κάθε x. Άρα η f έχει την εν λόγω ιδιότητα με $\rho=2$.
Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν $\delta>0$, $M\geq 0$, $\rho>2$ ώστε να ισχύει $|f(x)-f(0)|\leq M|x-0|^{\rho}$ για κάθε x με $|x-0|<\delta$. Δηλαδή, ισχύει $|x|^2\leq M|x|^{\rho}$ κοντά στον 0. Άρα ισχύει $|x|^{2-\rho}\leq M$ κοντά στον 0 αλλά αυτό είναι άτοπο αφού $\lim_{x\to 0}|x|^{2-\rho}=+\infty$.
Άρα ο εκθέτης $\rho=2$ είναι ο μέγιστος για να ισχύει $|f(x)-f(0)|\leq M|x-0|^{\rho}$ κοντά στον 0.
Για οποιονδήποτε $\xi\neq 0$ έχουμε

$$|f(x)-f(\xi)|=|x^2-\xi^2|=|x+\xi||x-\xi|.$$

Αν πάρουμε $\delta=1$, τότε για $|x-\xi|<1$ ισχύει $|x+\xi|=|x-\xi+2\xi|\leq|x-\xi|+2|\xi|\leq 1+2|\xi|$. Άρα αν θέσουμε $M=1+2|\xi|$, τότε ισχύει

$$|f(x)-f(\xi)|\leq M|x-\xi|$$

για κάθε x με $|x-\xi|<1$.
Τώρα, ας υποθέσουμε ότι για κάποιον $\xi\neq 0$ υπάρχουν $\delta>0$, $M\geq 0$, $\rho>1$ ώστε να ισχύει $|f(x)-f(\xi)|\leq M|x-\xi|^{\rho}$ για κάθε x με $|x-\xi|<\delta$. Δηλαδή, ισχύει $|x^2-\xi^2|\leq M|x-\xi|^{\rho}$ κοντά στον ξ. Τότε έχουμε ότι ισχύει $|x+\xi||x-\xi|^{1-\rho}\leq M$ κοντά στον ξ το οποίο είναι άτοπο, διότι $\lim_{x\to\xi}|x+\xi||x-\xi|^{1-\rho}=+\infty$.
Άρα ο εκθέτης $\rho=1$ είναι ο μέγιστος για να ισχύει $|f(x)-f(\xi)|\leq M|x-\xi|^{\rho}$ κοντά σε οποιονδήποτε $\xi\neq 0$.
Η τρίτη συνάρτηση $f(x)=\sqrt{|x|}$. Για τον $\xi=0$ έχουμε ότι ισχύει

$$|f(x)-f(0)|=|x-0|^{1/2}$$

για κάθε x. Άρα η f έχει την εν λόγω ιδιότητα με $\rho=\frac{1}{2}$.
Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν $\delta>0$, $M\geq 0$, $\rho>\frac{1}{2}$ ώστε να ισχύει $|f(x)-f(0)|\leq M|x-0|^{\rho}$ για κάθε x με $|x-0|<\delta$. Δηλαδή, ισχύει $|x|^{1/2}\leq M|x|^{\rho}$ κοντά στον 0. Άρα ισχύει $|x|^{(1/2)-\rho}\leq M$ κοντά στον 0 αλλά αυτό είναι άτοπο αφού $\lim_{x\to 0}|x|^{(1/2)-\rho}=+\infty$.
Άρα ο εκθέτης $\rho=\frac{1}{2}$ είναι ο μέγιστος για να ισχύει $|f(x)-f(0)|\leq M|x-0|^{\rho}$ κοντά στον 0.
Για οποιονδήποτε $\xi\neq 0$ έχουμε

$$|f(x)-f(\xi)|=||x|^{1/2}-|\xi|^{1/2}|=\tfrac{||x|-|\xi||}{|x|^{1/2}+|\xi|^{1/2}}\leq\tfrac{1}{|\xi|^{1/2}}|x-\xi|.$$

Άρα η f έχει την εν λόγω ιδιότητα με $\rho=1$.
Έστω ότι για κάποιον $\xi\neq 0$ υπάρχουν $\delta>0$, $M\geq 0$, $\rho>1$ ώστε να ισχύει $|f(x)-f(\xi)|\leq$

$M|x-\xi|^\rho$ για κάθε x με $|x-\xi|<\delta$. Δηλαδή, ισχύει $||x|^{1/2}-|\xi|^{1/2}|\le M|x-\xi|^\rho$ κοντά στον ξ. Τότε ισχύει $\frac{||x|-|\xi||^{1-\rho}}{|x|^{1/2}+|\xi|^{1/2}}\le M$ κοντά στον ξ το οποίο είναι άτοπο, διότι $\lim_{x\to\xi}\frac{||x|-|\xi||^{1-\rho}}{|x|^{1/2}+|\xi|^{1/2}}=+\infty$. Άρα ο εκθέτης $\rho=1$ είναι ο μέγιστος για να ισχύει $|f(x)-f(\xi)|\le M|x-\xi|^\rho$ κοντά σε οποιονδήποτε $\xi\neq 0$.

Άσκηση 4.1.13. *Έστω, για κάθε $n\in\mathbb{N}$, ένα πεπερασμένο σύνολο A_n ώστε $A_m\cap A_n=\emptyset$ για κάθε $m,n\in\mathbb{N}$ με $m\neq n$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}1/n, & \text{αν } x\in A_n \text{ για κάποιον } n\\ 0, & \text{αν } x\notin A_n \text{ για κάθε } n\end{cases}$ Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής σε κάθε $x\in\mathbb{R}\setminus\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n$ και ασυνεχής σε κάθε $x\in\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n$.*

Λύση: Έστω $\xi\in\mathbb{R}\setminus\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n$, οπότε $f(\xi)=0$.
Παίρνουμε τυχόντα $\epsilon>0$. Τότε υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n_0}<\epsilon$ και παρατηρούμε ότι η ένωση $\bigcup_{n=1}^{n_0-1}A_n$ είναι πεπερασμένο σύνολο και δεν περιέχει τον ξ. Επομένως, υπάρχει $\delta>0$ ώστε κανένας x με $|x-\xi|<\delta$ να μην περιέχεται στην ένωση αυτή. Δηλαδή, κάθε x με $|x-\xi|<\delta$ ανήκει είτε στο $\mathbb{R}\setminus\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n$ είτε στο $\bigcup_{n=n_0}^{+\infty}A_n$ και άρα για κάθε τέτοιον x ισχύει είτε $f(x)=0$ είτε $f(x)=\frac{1}{n}$ για κάποιον $n\in\mathbb{N}$, $n\ge n_0$. Άρα για κάθε x με $|x-\xi|<\delta$ ισχύει

$$|f(x)-f(\xi)|=|f(x)|\le\frac{1}{n_0}<\epsilon.$$

Άρα η f είναι συνεχής στον ξ.
Έστω $\xi\in\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n$, οπότε $x\in A_{n_0}$ για κάποιον $n_0\in\mathbb{N}$, οπότε $f(\xi)=\frac{1}{n_0}$.
Θεωρούμε τον $\epsilon=\frac{1}{n_0}-\frac{1}{n_0+1}>0$ και παίρνουμε τυχόντα $\delta>0$. Επειδή η ένωση $\bigcup_{n=1}^{n_0}A_n$ είναι πεπερασμένο σύνολο, υπάρχει τουλάχιστον ένας x με $|x-\xi|<\delta$ ο οποίος δεν ανήκει σ' αυτήν την ένωση και άρα ανήκει είτε στο $\mathbb{R}\setminus\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n$ είτε στο $\bigcup_{n=n_0+1}^{+\infty}A_n$. Δηλαδή, υπάρχει τουλάχιστον ένας x με $|x-\xi|<\delta$ ώστε $f(x)=0$ ή $f(x)=\frac{1}{n}$ για κάποιον $n\ge n_0+1$. Τότε για έναν τέτοιο x είναι

$$|f(x)-f(\xi)|=|f(\xi)|=\frac{1}{n_0}>\frac{1}{n_0}-\frac{1}{n_0+1}=\epsilon \quad \text{ή} \quad |f(x)-f(\xi)|=\Big|\frac{1}{n}-\frac{1}{n_0}\Big|\ge\Big|\frac{1}{n_0+1}-\frac{1}{n_0}\Big|=\epsilon.$$

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι για τον συγκεκριμένο $\epsilon>0$ έχουμε ότι για κάθε $\delta>0$ υπάρχει τουλάχιστον ένας x με $|x-\xi|<\delta$ για τον οποίο ισχύει $|f(x)-f(\xi)|\ge\epsilon$. Άρα η f δεν είναι συνεχής στον ξ.

Άσκηση 4.1.14. *Έστω μη-κενό σύνολο B. Ορίζουμε $f(x)=\inf\{|x-b|\,|\,b\in B\}$ για κάθε x. Αποδείξτε ότι, γενικά, ισχύει $|f(x')-f(x'')|\le|x'-x''|$ για κάθε x',x'' και, επομένως, ότι η f είναι συνεχής.*

Λύση: Ισχύει $f(x')\le|x'-b|$ για κάθε x' και για κάθε $b\in B$. Άρα ισχύει

$$f(x')-|x'-x''|\le|x'-b|-|x'-x''|\le|x''-b|$$

για κάθε x',x'' και κάθε $b\in B$.
Δηλαδή, για κάθε x',x'' ο αριθμός $f(x')-|x'-x''|$ είναι κάτω φράγμα του $\{|x''-b|\,|\,b\in B\}$ και άρα ισχύει $f(x')-|x'-x''|\le f(x'')$ ή, ισοδύναμα, $f(x')-f(x'')\le|x'-x''|$ για κάθε x',x''. Αλλάζοντας τον ρόλο των συμβόλων x',x'', βλέπουμε ότι ισχύει $f(x'')-f(x')\le|x''-x'|$ για κάθε x',x'' και συμπεραίνουμε ότι ισχύει $|f(x')-f(x'')|\le|x'-x''|$ για κάθε x',x''.

Άσκηση 4.1.15. *Έστω διάστημα I και $f:I\to\mathbb{R}$ μονότονη στο I.*
Αν το σύνολο τιμών $J=f(I)$ της f είναι διάστημα, αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο I.
Αν, επιπλέον, η f είναι γνησίως μονότονη στο I, αποδείξτε ότι η $f^{-1}:J\to I$ είναι συνεχής στο J.

Λύση: Το πρώτο ερώτημα. Επειδή η f είναι μονότονη σε διάστημα, γνωρίζουμε ότι, αν η f δεν είναι συνεχής σε κάποιο $\xi\in I$, τότε υπάρχει κάποιο διάστημα K (θετικού μήκους) το οποίο παρεμβάλλεται ανάμεσα στις τιμές της f. Δηλαδή, υπάρχουν τιμές της f και στις δύο μεριές του K και καμιά τιμή της f στο K. Τότε, όμως, το σύνολο τιμών της f δεν μπορεί να είναι διάστημα.
Άρα, αν το σύνολο τιμών της f είναι διάστημα, τότε η f είναι συνεχής σε κάθε $\xi\in I$.

Το δεύτερο ερώτημα. Η f είναι γνησίως μονότονη στο I, οπότε ορίζεται η f^{-1} με πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών J της f και σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού I της f. Δηλαδή $f^{-1} : J \to I$ και $f^{-1}(J) = I$.
Η f^{-1} είναι γνησίως μονότονη στο διάστημα J (διότι η f είναι γνησίως μονότονη) και το σύνολο τιμών της είναι διάστημα (το I). Άρα, εφαρμόζοντας το προηγούμενο αποτέλεσμα στην f^{-1}, βλέπουμε ότι η f^{-1} είναι συνεχής στο J.

Άσκηση 4.1.16. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in A$.*
Έστω ότι η f είναι φραγμένη κοντά στον ξ, δηλαδή υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε η f να είναι φραγμένη στο $A \cap N_\xi(\delta_0)$. Αποδείξτε ότι $0 \leq \sup\{f(x') - f(x'') \,|\, x', x'' \in A \cap N_\xi(\delta)\} < +\infty$ για κάθε $\delta \in (0, \delta_0]$.
Ορίζουμε συνάρτηση $\omega : (0, \delta_0] \to \mathbb{R}_0^+$ με τύπο $\omega(\delta) = \sup\{f(x') - f(x'') \,|\, x', x'' \in A \cap N_\xi(\delta)\}$ για κάθε $\delta \in (0, \delta_0]$. Αποδείξτε ότι η ω είναι αύξουσα στο $(0, \delta_0]$, οπότε υπάρχει το $\lim_{\delta \to 0} \omega(\delta)$ και είναι αριθμός ≥ 0. Ορίζουμε $\omega(f; \xi) = \lim_{\delta \to 0} \omega(\delta)$.
Έστω ότι δεν ισχύει ότι η f είναι φραγμένη κοντά στον ξ. Αποδείξτε ότι για κάθε $\delta > 0$ είναι $\sup\{f(x') - f(x'') \,|\, x', x'' \in A \cap N_\xi(\delta)\} = +\infty$. Τότε ορίζουμε $\omega(f; \xi) = +\infty$.
Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στον ξ αν και μόνο αν $\omega(f; \xi) = 0$.

Λύση: Έστω ότι υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε η f να είναι φραγμένη στο $A \cap N_\xi(\delta_0)$, δηλαδή υπάρχει M_0 ώστε να ισχύει $|f(x)| \leq M_0$ για κάθε $x \in A \cap N_\xi(\delta_0)$. Τότε, αν $\delta \in (0, \delta_0]$, για κάθε $x', x'' \in A \cap N_\xi(\delta)$ ισχύει

$$|f(x') - f(x'')| \leq |f(x')| + |f(x'')| \leq 2M_0,$$

οπότε το σύνολο $\{f(x') - f(x'') \,|\, x', x'' \in A \cap N_\xi(\delta)\}$ είναι άνω φραγμένο και άρα

$$\sup\{f(x') - f(x'') \,|\, x', x'' \in A \cap N_\xi(\delta)\} < +\infty.$$

Επίσης, παρατηρούμε ότι το σύνολο $\{f(x') - f(x'') \,|\, x', x'' \in A \cap N_\xi(\delta)\}$ περιέχει τουλάχιστον ένα μη-αρνητικό στοιχείο. Πράγματι, έστω οποιοιδήποτε $x_1, x_2 \in A \cap N_\xi(\delta)$. Αν $f(x_1) \leq f(x_2)$, τότε για τους $x' = x_2$, $x'' = x_1$ έχουμε ότι $x', x'' \in A \cap N_\xi(\delta)$ και $f(x') - f(x'') \geq 0$. Αν $f(x_1) \geq f(x_2)$, τότε για τους $x' = x_1$, $x'' = x_2$ έχουμε ότι $x', x'' \in A \cap N_\xi(\delta)$ και $f(x') - f(x'') \geq 0$. Επομένως, αφού το σύνολο $\{f(x') - f(x'') \,|\, x', x'' \in A \cap N_\xi(\delta)\}$ περιέχει τουλάχιστον ένα μη-αρνητικό στοιχείο, συνεπάγεται

$$\sup\{f(x') - f(x'') \,|\, x', x'' \in A \cap N_\xi(\delta)\} \geq 0.$$

Άρα η συνάρτηση ω που ορίζεται με τύπο

$$\omega(\delta) = \sup\{f(x') - f(x'') \,|\, x', x'' \in A \cap N_\xi(\delta)\} \qquad \text{για κάθε } \delta \in (0, \delta_0]$$

έχει μη-αρνητικές πραγματικές τιμές.
Τώρα, έστω $0 < \delta_1 < \delta_2 \leq \delta_0$. Τότε για κάθε $x', x'' \in A \cap N_\xi(\delta_2)$ ισχύει $f(x') - f(x'') \leq \omega(\delta_2)$, οπότε και για κάθε $x', x'' \in A \cap N_\xi(\delta_1)$ ισχύει $f(x') - f(x'') \leq \omega(\delta_2)$. Άρα ο $\omega(\delta_2)$ είναι άνω φράγμα του συνόλου $\{f(x') - f(x'') \,|\, x', x'' \in A \cap N_\xi(\delta_1)\}$ και, επομένως, $\omega(\delta_1) \leq \omega(\delta_2)$. Άρα η ω είναι αύξουσα στο $(0, \delta_0]$.
Άρα υπάρχει το $\lim_{\delta \to 0} \omega(\delta)$ και είναι αριθμός ≥ 0 (αφού ισχύει $\omega(\delta) \geq 0$ για κάθε $\delta \in (0, \delta_0]$).
Τώρα, έστω ότι δεν ισχύει ότι η f είναι φραγμένη κοντά στον ξ. Δηλαδή, για κάθε $\delta > 0$ το σύνολο $\{f(x) \,|\, x \in A \cap N_\xi(\delta)\}$ δεν είναι φραγμένο. Έστω, λοιπόν, οποιοσδήποτε $\delta > 0$. Παίρνουμε, επίσης, οποιονδήποτε $x_1 \in A \cap N_\xi(\delta)$. Τότε για κάθε $M > 0$ υπάρχει $x \in A \cap N_\xi(\delta)$ ώστε

$$f(x) < -M + f(x_1) \quad \text{ή} \quad f(x) > M + f(x_1).$$

Αν $f(x) < -M + f(x_1)$, θεωρούμε τους $x' = x_1$, $x'' = x$ και έχουμε ότι $x', x'' \in A \cap N_\xi(\delta)$ και $f(x') - f(x'') > M$. Αν $f(x) > M + f(x_1)$, θεωρούμε τους $x' = x$, $x'' = x_1$ και έχουμε ότι $x', x'' \in A \cap N_\xi(\delta)$ και $f(x') - f(x'') > M$. Σε κάθε περίπτωση υπάρχουν $x', x'' \in A \cap N_\xi(\delta)$

ώστε $f(x') - f(x'') > M$. Άρα το σύνολο $\{f(x') - f(x'') \,|\, x', x'' \in A \cap N_\xi(\delta)\}$ δεν είναι άνω φραγμένο και, επομένως,

$$\sup\{f(x') - f(x'') \,|\, x', x'' \in A \cap N_\xi(\delta)\} = +\infty.$$

Έστω ότι η f είναι συνεχής στον ξ οπότε είναι και φραγμένη κοντά στον ξ. Δηλαδή, υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε η f να είναι φραγμένη στο $A \cap N_\xi(\delta_0)$.
Παίρνουμε τυχόντα $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $\delta_1 > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x) - f(\xi)| < \frac{\epsilon}{4}$ για κάθε $x \in A \cap N_\xi(\delta_1)$. Θεωρούμε οποιονδήποτε $\delta \in (0, \delta_0]$ με $\delta < \delta_1$ οπότε ισχύει $|f(x) - f(\xi)| < \frac{\epsilon}{4}$ για κάθε $x \in A \cap N_\xi(\delta)$. Άρα ισχύει

$$f(x') - f(x'') = f(x') - f(\xi) + f(\xi) - f(x'') \le |f(x') - f(\xi)| + |f(x'') - f(\xi)| < \tfrac{\epsilon}{4} + \tfrac{\epsilon}{4} = \tfrac{\epsilon}{2}$$

για κάθε $x', x'' \in A \cap N_\xi(\delta)$. Άρα ο $\frac{\epsilon}{2}$ είναι άνω φράγμα του $\{f(x') - f(x'') \,|\, x', x'' \in A \cap N_\xi(\delta)\}$, οπότε $\omega(\delta) \le \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$.
Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta_1 > 0$ ώστε για κάθε $\delta \in (0, \delta_0]$ με $\delta < \delta_1$ να ισχύει $0 \le \omega(\delta) < \epsilon$. Άρα $\lim_{\delta \to 0} \omega(\delta) = 0$, δηλαδή $\omega(f; \xi) = 0$.
Αντιστρόφως, έστω $\omega(f; \xi) = 0$, δηλαδή $\lim_{\delta \to 0} \omega(\delta) = 0$.
Παίρνουμε τυχόντα $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $\delta_1 > 0$ ώστε για κάθε $\delta \in (0, \delta_0]$ με $\delta < \delta_1$ να ισχύει $\omega(\delta) < \epsilon$. Θεωρούμε τον $\delta = \min\{\delta_0, \frac{\delta_1}{2}\}$. Τότε $\delta \in (0, \delta_0]$ και $\delta < \delta_1$ και άρα ισχύει $\omega(\delta) < \epsilon$.
Δηλαδή,

$$\sup\{f(x') - f(x'') \,|\, x', x'' \in A \cap N_\xi(\delta)\} < \epsilon,$$

οπότε ισχύει $f(x') - f(x'') < \epsilon$ για κάθε $x', x'' \in A \cap N_\xi(\delta)$.
Τώρα, για οποιονδήποτε $x \in A \cap N_\xi(\delta)$, παίρνοντας $x' = x$ και $x'' = \xi$, έχουμε ότι ισχύει $f(x) - f(\xi) < \epsilon$ και, παίρνοντας $x' = \xi$ και $x'' = x$, έχουμε ότι ισχύει $f(\xi) - f(x) < \epsilon$. Άρα για οποιονδήποτε $x \in A \cap N_\xi(\delta)$ ισχύει $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$.
Άρα για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x \in A \cap N_\xi(\delta)$ να ισχύει $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$.
Επομένως, η f είναι συνεχής στον ξ.

Άσκηση 4.1.17. *Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ αύξουσα στο I.*
Αν $a, b \in I$ και $a < x_1 < \ldots < x_n < b$ και $j_k = \lim_{x \to x_k+} f(x) - \lim_{x \to x_k-} f(x)$ είναι το άλμα της f στον x_k για $k = 1, \ldots, n$, αποδείξτε ότι $j_1 + \cdots + j_n \le \lim_{x \to b-} f(x) - \lim_{x \to a+} f(x)$.

Λύση: Θεωρούμε έναν οποιονδήποτε $\delta > 0$ ο οποίος να είναι μικρότερος από την μικρότερη από τις αποστάσεις ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς από τους $a, x_1, \ldots, x_n, b$.
Τότε για κάθε $m \in \mathbb{N}$ με $\frac{1}{m} \le \frac{\delta}{2}$ θεωρούμε τα διαστήματα

$$\big[a + \tfrac{1}{m}, x_1 - \tfrac{1}{m}\big], \big[x_1 + \tfrac{1}{m}, x_2 - \tfrac{1}{m}\big], \ldots\ldots, \big[x_{n-1} + \tfrac{1}{m}, x_n - \tfrac{1}{m}\big], \big[x_n + \tfrac{1}{m}, b - \tfrac{1}{m}\big].$$

Επειδή η f είναι αύξουσα, συνεπάγεται

$$\begin{aligned}&\big(f\big(x_1 - \tfrac{1}{m}\big) - f\big(a + \tfrac{1}{m}\big)\big) + \big(f\big(x_2 - \tfrac{1}{m}\big) - f\big(x_1 + \tfrac{1}{m}\big)\big) + \cdots \\ &\qquad \cdots + \big(f\big(x_n - \tfrac{1}{m}\big) - f\big(x_{n-1} + \tfrac{1}{m}\big)\big) + \big(f\big(b - \tfrac{1}{m}\big) - f\big(x_n + \tfrac{1}{m}\big)\big) \ge 0,\end{aligned}$$

αφού κάθε παρένθεση είναι ≥ 0, και άρα

$$\big(f\big(x_1 + \tfrac{1}{m}\big) - f\big(x_1 - \tfrac{1}{m}\big)\big) + \cdots + \big(f\big(x_n + \tfrac{1}{m}\big) - f\big(x_n - \tfrac{1}{m}\big)\big) \le f\big(b - \tfrac{1}{m}\big) - f\big(a + \tfrac{1}{m}\big).$$

Τώρα, παίρνοντας όριο στην τελευταία ανισότητα όταν $m \to +\infty$, βρίσκουμε ότι

$$j_1 + \cdots + j_n \le \lim_{x \to b-} f(x) - \lim_{x \to a+} f(x).$$

Άσκηση 4.2.2. *Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$ συνεχείς στον $\xi \in A$ και έστω ότι ισχύει $f(x) > 0$ για κάθε $x \in A$. Αποδείξτε ότι η $f^g : A \to \mathbb{R}$ με τύπο $(f^g)(x) = f(x)^{g(x)}$ είναι συνεχής στον ξ.*
Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις x^x, $(\log x)^{\log x}$ είναι συνεχείς. Ποιά είναι τα πεδία ορισμού τους;

Λύση: Μπορούμε να γράψουμε $(f^g)(x) = f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\log f(x)}$ και έτσι βλέπουμε ότι η συνάρτηση f^g προκύπτει με εφαρμογή απλών αλγεβρικών πράξεων και συνθέσεων συνεχών στον ξ συναρτήσεων.
Το πεδίο ορισμού της x^x είναι το $(0, +\infty)$. Το πεδίο ορισμού της $(\log x)^{\log x}$ αποτελείται από τους x για τους οποίους ορίζεται η συνάρτηση $\log x$ και για τους οποίους ισχύει $\log x > 0$. Άρα το πεδίο ορισμού της $(\log x)^{\log x}$ είναι το $(1, +\infty)$.

Άσκηση 4.2.3. *Βρείτε τα $\lim_{x\to+\infty} e^{1/x}$, $\lim_{x\to 0} e^{x\sin(1/x)}$ βάσει της πρότασης 4.10. Σε ποιά από αυτά εφαρμόζεται η πρόταση 3.13;*

Λύση: Επειδή $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ και η συνάρτηση e^y είναι συνεχής στον 0, κάνοντας αλλαγή μεταβλητής από τον x στον $y = \frac{1}{x}$, συμπεραίνουμε ότι $\lim_{x\to+\infty} e^{1/x} = e^0 = 1$.
Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να εφαρμόσουμε και την πρόταση 3.13, διότι ισχύει $\frac{1}{x} \neq 0$ κοντά στο $+\infty$.
Επειδή $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$ και η συνάρτηση e^y είναι συνεχής στον 0, κάνοντας αλλαγή μεταβλητής από τον x στον $y = x\sin\frac{1}{x}$, συμπεραίνουμε ότι $\lim_{x\to 0} e^{x\sin(1/x)} = e^0 = 1$.
Τώρα δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε την πρόταση 3.13, διότι δεν είναι σωστό ότι ισχύει $x\sin\frac{1}{x} \neq 0$ κοντά στο 0. Πράγματι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ είναι $x_n \sin\frac{1}{x_n} = 0$, όπου $x_n = \frac{1}{n\pi} \to 0$.

Άσκηση 4.2.4. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A. Αν η f είναι συνεχής στον ξ και ισχύει $f(x) \geq l$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στον ξ και $f(x) \leq l$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στον ξ, βρείτε την τιμή του $f(\xi)$.*

Λύση: Επειδή η f είναι συνεχής στον ξ, έχουμε $\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$. Τώρα, επειδή ισχύει $f(x) \geq l$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στον ξ, συνεπάγεται $f(\xi) \geq l$ και, επειδή ισχύει $f(x) \leq l$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στον ξ, συνεπάγεται $f(\xi) \leq l$. Άρα $f(\xi) = l$.

Άσκηση 4.2.5. *Έστω $f : (\xi - \delta, \xi + \delta) \to \mathbb{R}$. Αν $\lim_{x\to\xi} f(x) = l$, $\lim_{h\to 0} \frac{f(\xi+h)+f(\xi-h)-2f(\xi)}{|h|} = m \in \mathbb{R}$, αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στον ξ. Τί γίνεται αν δεν υποθέσουμε ότι υπάρχει το $\lim_{x\to\xi} f(x)$ ή αν δεν υποθέσουμε ότι το όριο m είναι αριθμός;*

Λύση: Επειδή $\lim_{x\to\xi} f(x) = l$, συνεπάγεται $\lim_{h\to 0} f(\xi + h) = l$ και $\lim_{h\to 0} f(\xi - h) = l$. Επομένως,

$$\lim_{h\to 0}(f(\xi + h) + f(\xi - h) - 2f(\xi)) = 2l - 2f(\xi).$$

Άρα, επειδή $\lim_{h\to 0} \frac{f(\xi+h)+f(\xi-h)-2f(\xi)}{|h|} = m \in \mathbb{R}$, έχουμε

$$\begin{aligned} 2l - 2f(\xi) &= \lim_{h\to 0}(f(\xi + h) + f(\xi - h) - 2f(\xi)) \\ &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(\xi+h)+f(\xi-h)-2f(\xi)}{|h|} |h|\right) = m0 = 0. \end{aligned}$$

Άρα $l = f(\xi)$, οπότε η f είναι συνεχής στον ξ.
Για την συνάρτηση $f(x) = \operatorname{sign} x$ και τον $\xi = 0$ ισχύει $\lim_{h\to 0} \frac{f(h)+f(-h)-2f(0)}{|h|} = \lim_{h\to 0} 0 = 0 \in \mathbb{R}$. Το όριο $\lim_{x\to 0} f(x)$ δεν υπάρχει και, φυσικά, η συνάρτηση δεν είναι συνεχής στον 0.
Για την συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ και τον $\xi = 0$ έχουμε ότι $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ και $\lim_{h\to 0} \frac{f(h)+f(-h)-2f(0)}{|h|} = \lim_{h\to 0} \frac{2}{|h|} = +\infty$. Η συνάρτηση δεν είναι συνεχής στον 0.

Άσκηση 4.2.6. *Από τις $f, g : A \to \mathbb{R}$ ορίζουμε την $\max\{f, g\} : A \to \mathbb{R}$ με τύπο $\max\{f, g\}(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ για κάθε $x \in A$.*
Αποδείξτε ότι, αν οι f, g είναι συνεχείς στον $\xi \in A$, τότε και η $\max\{f, g\}$ είναι συνεχής στον ξ.

Λύση: Γράφουμε $\max\{f, g\} = \frac{f+g+|f-g|}{2}$ και βλέπουμε ότι η $\max\{f, g\}$ προκύπτει από τις f, g με αλγεβρικές πράξεις.

Άσκηση 4.2.7. *Έστω $f, g, h : A \to \mathbb{R}$ συνεχείς στο A. Ορίζουμε $m : A \to \mathbb{R}$ ώστε, για κάθε $x \in A$, ο $m(x)$ να είναι από τους $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ εκείνος που βρίσκεται ανάμεσα στους δύο άλλους.*

Αποδείξτε ότι η m είναι συνεχής στο A.

Λύση: Γράφοντας $\max\{f,g,h\} = \max\big\{\max\{f,g\},h\big\}$ και $\min\{f,g,h\} = \min\big\{\min\{f,g\},h\big\}$ και εφαρμόζοντας δύο φορές για κάθε μία από αυτές τις δύο παραστάσεις το αποτέλεσμα της άσκησης 4.2.6, βρίσκουμε ότι οι συναρτήσεις $\max\{f,g,h\}$ και $\min\{f,g,h\}$ είναι συνεχείς στο A. Τώρα, γράφοντας $m = f+g+h-\max\{f,g,h\}-\min\{f,g,h\}$, έχουμε ότι η m είναι συνεχής στο A.

Άσκηση 4.2.8. *Αποδείξτε ότι η* $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \\ -1, & \text{αν } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$ *είναι ασυνεχής σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}$ ενώ η $|f|$ είναι συνεχής σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}$.*

Λύση: Το ότι η f είναι ασυνεχής σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}$ αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο που αποδεικνύεται ότι η δεύτερη συνάρτηση της άσκησης 4.1.9 είναι ασυνεχής σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}$. Το ότι η $|f|$ είναι συνεχής σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}$ είναι προφανές αφού η $|f|$ είναι η σταθερή συνάρτηση 1.

Άσκηση 4.2.10. *Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b]$. Αν $f(a)=0$ και $f(b)\neq 0$, αποδείξτε ότι υπάρχει μέγιστη ρίζα της f στο $[a,b]$.*

Λύση: Θεωρούμε το σύνολο των ριζών της f στο $[a,b]$:

$$X = \{x \,|\, a \le x \le b, f(x)=0\}.$$

Το X είναι μη-κενό (διότι $a\in X$) και άνω φραγμένο (διότι $X\subseteq[a,b]$). Άρα το X έχει supremum το οποίο είναι αριθμός. Θέτουμε

$$\xi = \sup X.$$

Επειδή $a\in X$, συνεπάγεται $a\le\xi$. Και επειδή το b είναι άνω φράγμα του X, συνεπάγεται $\xi\le b$. Άρα $\xi\in[a,b]$, οπότε η f είναι συνεχής στον ξ.
Από τη δεύτερη χαρακτηριστική ιδιότητα του $\sup X$ συνεπάγεται ότι για κάθε $\delta>0$ υπάρχει $x\in X$ ώστε $\xi-\delta<x\le\xi$. Δηλαδή, για κάθε $\delta>0$ υπάρχει $x\in(\xi-\delta,\xi]$ ώστε $f(x)=0$.
Αν $f(\xi)>0$, τότε ισχύει $f(x)>0$ κοντά στον ξ αλλά αυτό αντιφάσκει με αυτό που μόλις αποδείξαμε. Με το ίδιο τρόπο προκύπτει άτοπο και αν $f(\xi)<0$. Άρα $f(\xi)=0$.
Άρα $\xi\in X$ και επειδή $\xi=\sup X$, συμπεραίνουμε ότι το ξ είναι η μέγιστη ρίζα της f στο $[a,b]$.

Άσκηση 4.2.11. *Έστω συνάρτηση f συνεχής σε διάστημα I (όχι μονοσύνολο). Αν ισχύει $f(r)\ge 0$ για κάθε ρητό $r\in I$, αποδείξτε ότι ισχύει $f(x)\ge 0$ για κάθε $x\in I$.*

Λύση: Έστω ότι υπάρχει κάποιο $\xi\in I$ ώστε $f(\xi)<0$.
Επειδή η f είναι συνεχής στον ξ, ισχύει $f(x)<0$ κοντά στον ξ. Δηλαδή, υπάρχει κάποιος $\delta>0$ ώστε να ισχύει $f(x)<0$ για κάθε $x\in(\xi-\delta,\xi+\delta)\cap I$.
Επειδή $\xi\in I$ και το I έχει θετικό μήκος, το $(\xi-\delta,\xi+\delta)\cap I$ είναι διάστημα θετικού μήκους. Άρα υπάρχει τουλάχιστον ένας ρητός r στο $(\xi-\delta,\xi+\delta)\cap I$, οπότε γι αυτόν τον ρητό ισχύει $f(r)<0$.
Αυτό είναι άτοπο, διότι για κάθε ρητό $r\in I$ πρέπει να ισχύει $f(r)\ge 0$.
Άρα ισχύει $f(x)\ge 0$ για κάθε $x\in I$.

Άσκηση 4.2.12. [α] *Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$ για κάθε x_1,x_2. Αποδείξτε ότι, αν η f έχει τουλάχιστον ένα σημείο συνέχειας, τότε ο τύπος της είναι $f(x)=cx$ για κάποια σταθερά c.*
[γ] *Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f(x_1+x_2)=f(x_1)f(x_2)$ για κάθε x_1,x_2 και $f(0)\neq 0$. Αποδείξτε ότι, αν η f έχει τουλάχιστον ένα σημείο συνέχειας, τότε ο τύπος της είναι $f(x)=e^{cx}$ για κάποια σταθερά c.*

Λύση: [α] Με $x_1=x_2=0$ παίρνουμε $f(0)=0$.
Επίσης, με $x_1=x$, $x_2=-x$ παίρνουμε $0=f(0)=f(x)+f(-x)$ και άρα $f(-x)=-f(x)$.
Κατόπιν, μπορούμε να δούμε πολύ εύκολα με την αρχή της επαγωγής ότι η αρχική ταυτότητα

ισχύει γενικότερα ως εξής:

$$f(x_1+\cdots+x_n)=f(x_1)+\cdots+f(x_n) \qquad \text{για κάθε } x_1,\ldots,x_n.$$

Με $x_1=\ldots=x_n=\frac{1}{n}$ βλέπουμε ότι ισχύει $f(1)=nf(\frac{1}{n})$ και άρα $f(\frac{1}{n})=\frac{f(1)}{n}$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$.
Τώρα, με $x_1=\ldots=x_n=\frac{1}{m}$ παίρνουμε $f(\frac{n}{m})=nf(\frac{1}{m})=f(1)\,\frac{n}{m}$ για κάθε $n,m\in\mathbb{N}$.
Δηλαδή, ισχύει $f(r)=f(1)r$ για κάθε θετικό ρητό r. Επιπλέον, αν ο r είναι αρνητικός ρητός, τότε ο $-r$ είναι θετικός ρητός και άρα $f(r)=-f(-r)=-f(1)(-r)=f(1)r$. Τέλος, η σχέση $f(r)=f(1)r$ ισχύει για $r=0$, αφού $f(0)=0$.
Έχουμε, λοιπόν, αποδείξει ότι ισχύει

$$f(r)=f(1)r \qquad \text{για κάθε } r\in\mathbb{Q}. \tag{14.40}$$

Τώρα, έστω ότι ο x_0 είναι σημείο συνέχειας της f.
Παίρνουμε οποιονδήποτε ξ και γράφουμε

$$f(x)=f(x-\xi+x_0+\xi-x_0)=f(x-\xi+x_0)+f(\xi)-f(x_0)$$

και παίρνουμε

$$\lim_{x\to\xi}f(x)=\lim_{x\to\xi}f(x-\xi+x_0)+f(\xi)-f(x_0)=\lim_{y\to x_0}f(y)+f(\xi)-f(x_0)=f(\xi).$$

Άρα η f είναι συνεχής σε κάθε ξ.
Τέλος, εφαρμόζοντας, βάσει της (14.40), το αποτέλεσμα της άσκησης 4.2.11 στην συνάρτηση $f(x)-f(1)x$, συμπεραίνουμε ότι ισχύει $f(x)=f(1)x$ για κάθε x.

[γ] Με $x_1=x_2=0$ παίρνουμε $f(0)=f(0)^2$ και άρα $f(0)=1$.
Αν υπήρχε x ώστε $f(x)=0$, τότε με $x_1=x$, $x_2=-x$ θα είχαμε $f(0)=f(x)f(-x)=0$, το οποίο είναι άτοπο. Άρα ισχύει $f(x)\neq 0$ για κάθε x.
Τώρα, με $x_1=x_2=\frac{x}{2}$ παίρνουμε $f(x)=f(\frac{x}{2})^2>0$. Άρα ισχύει $f(x)>0$ για κάθε x.
Κατόπιν, ορίζουμε τη συνάρτηση $h(x)=\log f(x)$, για την οποία ισχύει $h(x_1+x_2)=h(x_1)+h(x_2)$ για κάθε x_1,x_2.
Από το αποτέλεσμα του [α] έχουμε ότι, αν η f έχει τουλάχιστον ένα σημείο συνέχειας, τότε ισχύει $h(x)=cx$ και άρα $f(x)=e^{cx}$ για κάποια σταθερά c.

Άσκηση 4.2.13. *Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ περιοδική στο $\mathbb{R}$.*

Αποδείξτε ότι, αν η f δεν έχει ελάχιστη θετική περίοδο, τότε το σύνολο των περιόδων της είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$.

Αποδείξτε ότι, αν η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και δεν έχει ελάχιστη θετική περίοδο, τότε είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

Υπόδειξη: Έστω $a<b$. Υπάρχει περίοδος τ της f ώστε $0<\tau<b-a$. Θεωρήστε $k=[\frac{a}{\tau}]+1\in\mathbb{Z}$ και αποδείξτε ότι ο $k\tau$ είναι περίοδος της f και $a<k\tau<b$.

Αν A είναι το σύνολο των περιόδων της f, τότε ισχύει $f(\tau)=f(0)$ για κάθε $\tau\in A$. Επομένως, για κάθε x ισχύει $f(\tau)=f(0)$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στον x.

Άσκηση 4.2.14. *Έστω συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ άνω φραγμένη στο A. Ορίζουμε συνάρτηση $g:A\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x)=\sup\{f(t)\,|\,t\in A, t\leq x\}$ για κάθε $x\in A$.*

Αποδείξτε ότι η g είναι αύξουσα στο A και ότι ισχύει $f(x)\leq g(x)$ για κάθε $x\in A$. Αποδείξτε ότι αν μια συνάρτηση $h:A\to\mathbb{R}$ είναι αύξουσα στο A και ισχύει $f(x)\leq h(x)$ για κάθε $x\in A$, τότε ισχύει $g(x)\leq h(x)$ για κάθε $x\in A$. Με άλλα λόγια, η g είναι η μικρότερη από τις συναρτήσεις που είναι αύξουσες στο A και είναι μεγαλύτερες ή ίσες της f στο A.

Αποδείξτε ότι, αν η f είναι συνεχής στον $\xi\in A$, τότε και η g είναι συνεχής στον ξ.

Λύση: Έστω $x\in A$. Επειδή η f είναι άνω φραγμένη, το σύνολο $\{f(t)\,|\,t\in A, t\leq x\}$ είναι άνω φραγμένο. Προφανώς, το σύνολο αυτό είναι μη-κενό, αφού ένα από τα στοιχεία του είναι η τιμή

$f(x)$. Άρα ο $g(x)=\sup\{f(t)\,|\,t\in A, t\leq x\}$ είναι αριθμός.
Επειδή ο $f(x)$ είναι στοιχείο του $\{f(t)\,|\,t\in A, t\leq x\}$, ισχύει $f(x)\leq g(x)$.
Αν $x_1,x_2\in A$ και $x_1<x_2$, το $\{f(t)\,|\,t\in A, t\leq x_1\}$ είναι υποσύνολο του $\{f(t)\,|\,t\in A, t\leq x_2\}$, οπότε $g(x_1)\leq g(x_2)$.
(Πράγματι, για κάθε $t\in A$ με $t\leq x_1$ ο $f(t)$ είναι στοιχείο του $\{f(t)\,|\,t\in A, t\leq x_2\}$, οπότε $f(t)\leq g(x_2)$. Άρα ο $g(x_2)$ είναι άνω φράγμα του $\{f(t)\,|\,t\in A, t\leq x_1\}$, οπότε $g(x_1)\leq g(x_2)$.)
Δηλαδή η g είναι αύξουσα στο A.
Τώρα, έστω ότι η $h:A\to\mathbb{R}$ είναι αύξουσα στο A και ισχύει $f(x)\leq h(x)$ για κάθε $x\in A$.
Έστω $x\in A$. Τότε για κάθε $t\in A$ με $t\leq x$ ισχύει $f(t)\leq h(t)\leq h(x)$, οπότε ο $h(x)$ είναι άνω φράγμα του $\{f(t)\,|\,t\in A, t\leq x\}$ και, επομένως, είναι $g(x)\leq h(x)$.
Για το τελευταίο ερώτημα θα αποδείξουμε πρώτα ότι, αν $x_1,x_2\in A$ και $x_1<x_2$, τότε

$$0\leq g(x_2)-g(x_1)\leq \sup\{f(t)-f(x_1)\,|\,t\in A, x_1\leq t\leq x_2\}. \tag{14.41}$$

Παρατηρούμε ότι ο 0 είναι στοιχείο του συνόλου $\{f(t)-f(x_1)\,|\,t\in A, x_1\leq t\leq x_2\}$, αφού $0=f(x_1)-f(x_1)$. Άρα

$$\sup\{f(t)-f(x_1)\,|\,t\in A, x_1\leq t\leq x_2\}\geq 0. \tag{14.42}$$

Τώρα, έστω $t\in A$ και $t\leq x_2$. Τότε είτε $t\leq x_1$ είτε $x_1<t\leq x_2$.
Αν $t\leq x_1$, τότε $f(t)\leq g(x_1)$, οπότε από την (14.42) έχουμε

$$f(t)\leq g(x_1)+\sup\{f(t)-f(x_1)\,|\,t\in A, x_1\leq t\leq x_2\} \qquad \text{για } t\in A, t\leq x_1. \tag{14.43}$$

Αν $x_1<t\leq x_2$, τότε

$$\begin{aligned} f(t)&=f(x_1)+f(t)-f(x_1)\\ &\leq g(x_1)+\sup\{f(t)-f(x_1)\,|\,t\in A, x_1\leq t\leq x_2\} \qquad \text{για } t\in A, x_1<t\leq x_2. \end{aligned} \tag{14.44}$$

Από τις (14.43) και (14.44) συνεπάγεται ότι ο $g(x_1)+\sup\{f(t)-f(x_1)\,|\,t\in A, x_1\leq t\leq x_2\}$ είναι άνω φράγμα του $\{f(t)\,|\,t\in A, t\leq x_2\}$, οπότε

$$g(x_2)\leq g(x_1)+\sup\{f(t)-f(x_1)\,|\,t\in A, x_1\leq t\leq x_2\}$$

και παίρνουμε την (14.41).
Τώρα έστω ότι η f είναι συνεχής στον $\xi\in A$.
Παίρνουμε τυχόντα $\epsilon>0$. Τότε υπάρχει $\delta>0$ ώστε να ισχύει $|f(x)-f(\xi)|<\frac{\epsilon}{4}$ για κάθε $x\in A$ με $|x-\xi|<\delta$.
Αν $x\in A$ και $\xi<x<\xi+\delta$, τότε ισχύει $f(t)-f(\xi)<\frac{\epsilon}{4}$ για κάθε $t\in A$ με $\xi\leq t\leq x$. Άρα ο $\frac{\epsilon}{4}$ είναι άνω φράγμα του $\{f(t)-f(\xi)\,|\,t\in A, \xi\leq t\leq x\}$, οπότε από την (14.41) συνεπάγεται

$$0\leq g(x)-g(\xi)\leq \tfrac{\epsilon}{4}<\epsilon \qquad \text{αν } x\in A, \xi<x<\xi+\delta. \tag{14.45}$$

Αν $x\in A$ και $\xi-\delta<x<\xi$, τότε ισχύει $f(t)-f(x)=f(t)-f(\xi)+f(\xi)-f(x)<\frac{\epsilon}{4}+\frac{\epsilon}{4}=\frac{\epsilon}{2}$ για κάθε $t\in A$ με $x\leq t\leq\xi$. Άρα ο $\frac{\epsilon}{2}$ είναι άνω φράγμα του $\{f(t)-f(x)\,|\,t\in A, x\leq t\leq\xi\}$, οπότε από την (14.41) συνεπάγεται

$$0\leq g(\xi)-g(x)\leq \tfrac{\epsilon}{2}<\epsilon \qquad \text{αν } x\in A, \xi-\delta<x<\xi. \tag{14.46}$$

Από τις (14.45) και (14.46) έχουμε ότι ισχύει $|g(x)-g(\xi)|<\epsilon$ για κάθε $x\in A$ με $|x-\xi|<\delta$.
Άρα η g είναι συνεχής στον ξ.

Άσκηση 4.2.15. *Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. Ορίζουμε συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(y)=\sup\{x\,|\,f(x)<y\}$ για κάθε y.*

Για καθεμιά από τις συναρτήσεις $f(x) = x$, $f(x) = x^3$, $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{αν } x \le -1 \\ 0, & \text{αν } -1 \le x \le 1 \\ x-1, & \text{αν } 1 \le x \end{cases}$ βρείτε την αντίστοιχη συνάρτηση g.

Αποδείξτε ότι ισχύει $f(g(y)) = y$ για κάθε y.

Αν, επιπλέον, η f είναι γνησίως αύξουσα, αποδείξτε ότι η g είναι η αντίστροφη της f.

Αποδείξτε ότι η g είναι αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και αριστερά συνεχής σε κάθε y. Είναι η g δεξιά συνεχής σε κάθε y;

Λύση: Το πρώτο ερώτημα. Για την πρώτη συνάρτηση έχουμε

$$g(y) = \sup\{x \,|\, x < y\} = y$$

για κάθε y.
Για τη δεύτερη συνάρτηση βρίσκουμε ότι, αν $y \ge 0$, τότε

$$g(y) = \sup\{x \,|\, x^3 < y\} = \sup\{x \,|\, x < \sqrt[3]{y}\} = \sqrt[3]{y}$$

και ότι, αν $y < 0$, τότε

$$g(y) = \sup\{x \,|\, x^3 < y\} = \sup\{x \,|\, x < -\sqrt[3]{-y}\} = -\sqrt[3]{-y}.$$

Για την τρίτη συνάρτηση έχουμε ότι, αν $y \le 0$, τότε

$$g(y) = \sup\{x \,|\, f(x) < y\} = \sup\{x \,|\, x+1 < y\} = \sup\{x \,|\, x < y-1\} = y-1$$

και ότι, αν $y > 0$, τότε

$$g(y) = \sup\{x \,|\, f(x) < y\} = \sup\{x \,|\, x-1 < y\} = \sup\{x \,|\, x < y+1\} = y+1.$$

Το δεύτερο ερώτημα. Πρώτον, παρατηρούμε ότι για κάθε y υπάρχει x ώστε $f(x) < y$, αφού $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Άρα το $\{x \,|\, f(x) < y\}$ είναι μη-κενό. Επίσης, για κάθε y υπάρχει $N > 0$ ώστε να ισχύει $f(x) > y$ για κάθε $x > N$, αφού $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Αυτό σημαίνει ότι όλα τα στοιχεία του $\{x \,|\, f(x) < y\}$ είναι $\le N$ και άρα το $\{x \,|\, f(x) < y\}$ είναι άνω φραγμένο. Άρα ισχύει $g(y) = \sup\{x \,|\, f(x) < y\} < +\infty$ για κάθε y και, πράγματι, ορίζεται συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(y) = \sup\{x \,|\, f(x) < y\}$ για κάθε y.
Τώρα, έστω τυχών y και τυχών $\epsilon > 0$. Επειδή η f είναι συνεχής στον $g(y)$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει

$$|f(x) - f(g(y))| < \epsilon \qquad \text{για κάθε } x \text{ με } |x - g(y)| < \delta. \tag{14.47}$$

Επειδή $g(y) = \sup\{x \,|\, f(x) < y\}$, υπάρχει στοιχείο του $\{x \,|\, f(x) < y\}$ το οποίο είναι $> g(y) - \delta$. Δηλαδή, υπάρχει $x > g(y) - \delta$ ώστε $f(x) < y$. Επειδή $f(x) < y$, έχουμε $x \le g(y)$ και άρα $g(y) - \delta < x \le g(y)$. Επομένως, από την (14.47) συνεπάγεται ότι αυτός ο x ικανοποιεί την $|f(x) - f(g(y))| < \epsilon$ και άρα

$$f(g(y)) < f(x) + \epsilon < y + \epsilon. \tag{14.48}$$

Κατόπιν, επειδή $g(y) = \sup\{x \,|\, f(x) < y\}$, συνεπάγεται ότι για κάθε $x > g(y)$ ισχύει $f(x) \ge y$. Ειδικώτερα, για κάθε x με $g(y) < x < g(y) + \delta$ ισχύει $f(x) \ge y$. Όμως, από την (14.47) έχουμε ότι για κάθε x με $g(y) < x < g(y) + \delta$ ισχύει και η $|f(x) - f(g(y))| < \epsilon$, οπότε

$$f(g(y)) > f(x) - \epsilon \ge y - \epsilon. \tag{14.49}$$

Από τις (14.48), (14.49) συνεπάγεται ότι ισχύει $|f(g(y)) - y| < \epsilon$ για κάθε ϵ και άρα $f(g(y)) = y$.

Το τρίτο ερώτημα. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα, τότε για κάθε x έχουμε

$$g(f(x)) = \sup\{t \,|\, f(t) < f(x)\} = \sup\{t \,|\, t < x\} = x.$$

Από τις $f(g(y)) = y$ και $g(f(x)) = x$ συνεπάγεται ότι η g είναι η αντίστροφη της f.
Το τέταρτο ερώτημα. Αν $y_1 < y_2$, τότε το $\{x \,|\, f(x) < y_1\}$ είναι, προφανώς, υποσύνολο του $\{x \,|\, f(x) < y_2\}$ και άρα

$$g(y_1) = \sup\{x \,|\, f(x) < y_1\} \le \sup\{x \,|\, f(x) < y_2\} = g(y_2).$$

Τέλος, έστω τυχών y και τυχών $\epsilon > 0$. Επειδή $g(y) = \sup\{x \,|\, f(x) < y\}$, υπάρχει στοιχείο του $\{x \,|\, f(x) < y\}$ το οποίο είναι $> g(y) - \epsilon$. Δηλαδή, υπάρχει $x > g(y) - \epsilon$ ώστε $f(x) < y$. Ορίζουμε $\delta = y - f(x) > 0$ και τότε έχουμε ότι για κάθε y' με $y - \delta < y' \le y$ ισχύει $y' > f(x)$ και, επομένως, $x \le g(y')$, οπότε $g(y) - \epsilon < g(y')$. Επίσης, για κάθε y' με $y - \delta < y' \le y$ ισχύει και $g(y') \le g(y)$, αφού η g είναι αύξουσα. Άρα για κάθε y' με $y - \delta < y' \le y$ ισχύει $g(y) - \epsilon < g(y') \le g(y)$ και, συνεπώς, η g είναι αριστερά συνεχής στον y.
Η g δεν είναι αναγκαστικά δεξιά συνεχής σε κάθε y. Αυτό φαίνεται στο παράδειγμα της τρίτης συνάρτησης που είδαμε στην αρχή: η g δεν είναι δεξιά συνεχής στον 0.

Άσκηση 4.3.3. *Λύστε την άσκηση 2.3.41[δ] χρησιμοποιώντας τη συνέχεια της εκθετικής και της λογαριθμικής συνάρτησης και το αποτέλεσμα της άσκησης 2.3.41[α].*

Λύση: Αν $x_n \to x \in \mathbb{R}$, τότε $\log x_n \to \log x$, οπότε $\log \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} = \frac{\log x_1 + \cdots + \log x_n}{n} \to \log x$. Άρα $\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \to x$.
Τι γίνεται αν $x_n \to 0$ και αν $x_n \to +\infty$;

Άσκηση 4.3.4. *Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[a, b]$ και έστω ότι για κάθε $x \in [a, b]$ υπάρχει κάποιο $x' \in [a, b]$ τέτοιο ώστε $|f(x')| \le \frac{1}{2}|f(x)|$. Αποδείξτε ότι η f έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $[a, b]$.*

Λύση: Θεωρούμε έναν οποιονδήποτε $x_1 \in [a, b]$ (για παράδειγμα $x_1 = a$ ή $x_1 = b$ ή $x_1 = \frac{a+b}{2}$). Βάσει της υπόθεσης, υπάρχει κάποιος $x_2 \in [a, b]$ ώστε $|f(x_2)| \le \frac{1}{2}|f(x_1)|$. Πάλι βάσει της υπόθεσης, υπάρχει κάποιος $x_3 \in [a, b]$ ώστε $|f(x_3)| \le \frac{1}{2}|f(x_2)|$. Συνεχίζοντας έτσι επ' άπειρον, σχηματίζεται μια ακολουθία (x_n) στο $[a, b]$ (όπου κάθε όρος της (x_n) προκύπτει από τον προηγούμενο) τέτοια ώστε να ισχύει $|f(x_{n+1})| \le \frac{1}{2}|f(x_n)|$ για κάθε n. Τότε, όμως, έχουμε

$$|f(x_n)| \le \tfrac{1}{2}|f(x_{n-1})| \le \tfrac{1}{2^2}|f(x_{n-2})| \le \ldots \le \tfrac{1}{2^{n-1}}|f(x_1)|,$$

δηλαδή $|f(x_n)| \le \frac{1}{2^{n-1}}|f(x_1)|$ για κάθε n. Άρα

$$f(x_n) \to 0. \tag{14.50}$$

Από το θεώρημα των Bolzano - Weierstrass συνεπάγεται ότι υπάρχει κάποια υποακολουθία (x_{n_k}) της (x_n) η οποία συγκλίνει. Έστω

$$x_{n_k} \to \xi$$

για κάποιο ξ.
Επειδή ισχύει $a \le x_{n_k} \le b$ για κάθε n, συνεπάγεται $a \le \xi \le b$, οπότε $\xi \in [a, b]$. Άρα η f είναι συνεχής στον ξ και, επομένως,

$$f(x_{n_k}) \to f(\xi).$$

Από την (14.50) συνεπάγεται

$$f(x_{n_k}) \to 0$$

και λόγω μοναδικότητας ορίου έχουμε $f(\xi) = 0$.

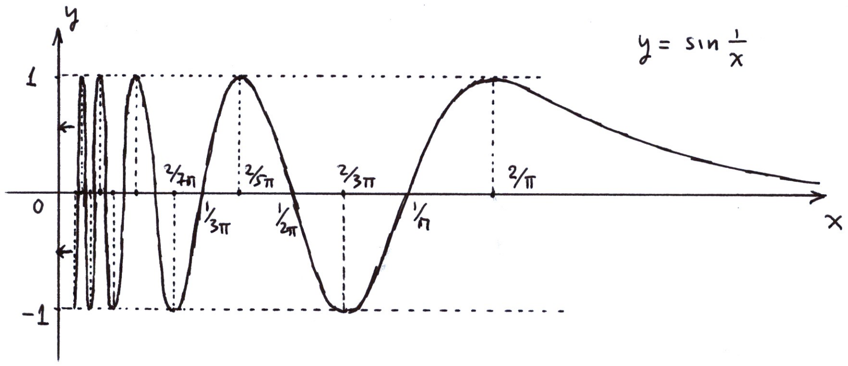
Άσκηση 4.3.5. *Έστω $f : [a, +\infty) \to [a, +\infty)$ και έστω ότι υπάρχει M ώστε $0 \le M < 1$ και ώστε να ισχύει $|f(x') - f(x'')| \le M|x' - x''|$ για κάθε $x', x'' \in [a, +\infty)$. Βάσει της άσκησης 4.1.12, η*

f είναι συνεχής στο $[a, +\infty)$. Αποδείξτε ότι υπάρχει μοναδικός $\xi \in [a, +\infty)$ ώστε $f(\xi) = \xi$.
Αποδείξτε ότι το προηγούμενο ισχύει με οποιοδήποτε από τα $[a, b]$, $(-\infty, b]$, $(-\infty, +\infty)$ στη θέση του $[a, +\infty)$.

Υπόδειξη: Θεωρήστε οποιονδήποτε $x_1 \in [a, +\infty)$ και την ακολουθία (x_n) στο $[a, +\infty)$ που ορίζεται με τον αναδρομικό τύπο $x_{n+1} = f(x_n)$ για κάθε n. Εφαρμόστε το αποτέλεσμα της άσκησης 2.6.4[β] για να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [a, +\infty)$ ώστε $f(\xi) = \xi$. Τέλος, αποδείξτε ότι ο ξ είναι μοναδικός.

Άσκηση 4.4.2. *Αποδείξτε ότι η $\sin\frac{1}{x}$ έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο $(0, +\infty)$ και ότι παίρνει και τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της σε άπειρα σημεία του $(0, +\infty)$. Ποιά είναι αυτά τα σημεία;*
Αποδείξτε ότι η $\frac{1}{1+x}\sin\frac{1}{x}$ είναι φραγμένη αλλά δεν έχει μέγιστη ούτε ελάχιστη τιμή στο $(0, +\infty)$.

Λύση: Δείτε το γράφημα της $\sin\frac{1}{x}$ στο σχήμα 38. (Λάβετε υπ' όψη ότι οι κλίμακες δεν είναι σωστές.)



Σχ 38

Πρώτον, ισχύει $-1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1$ για κάθε $x > 0$. Βλέπουμε, επίσης, ότι ο 1 είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης και πιάνεται στα άπειρα σημεία $\frac{1}{(\pi/2)+2n\pi}$ για $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$. Ακόμη, ο -1 είναι η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης και πιάνεται στα άπειρα σημεία $\frac{1}{-(\pi/2)+2n\pi}$ για $n \in \mathbb{N}$.

Για την συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{1+x}\sin\frac{1}{x}$ ισχύει $-1 < f(x) < 1$ για κάθε $x > 0$.
Τώρα, θεωρούμε στο $(0, +\infty)$ την ακολουθία με τύπο $x_n = \frac{1}{(\pi/2)+2n\pi}$ για κάθε n. Βλέπουμε ότι ισχύει $f(x_n) = \frac{1}{1+x_n} \to 1$, διότι $x_n \to 0$.
Τότε για κάθε $x > 0$ ισχύει $f(x) < 1$ και άρα ισχύει τελικά $f(x) < f(x_n)$. Δηλαδή, ο $f(x)$ δεν είναι μέγιστη τιμή της f. Επομένως, η f δεν έχει μέγιστη τιμή.
Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι η f δεν έχει ελάχιστη τιμή.

Άσκηση 4.4.3. *Αποδείξτε ότι η εξίσωση $x^7 - 3x^6 + 5x^5 + 13x^4 - x^3 - 12x^2 - 5x + 1 = 0$ έχει τουλάχιστον μία λύση στο $[0, 1]$.*
Αποδείξτε ότι η εξίσωση $\frac{3}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{5}{x-3} = 0$ έχει τουλάχιστον μία λύση σε καθένα από τα τρία διαστήματα $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$.
Αποδείξτε ότι η εξίσωση $e^x = x + 2$ έχει τουλάχιστον δύο λύσεις.

Λύση: Αν ορίσουμε $f(x) = x^7 - 3x^6 + 5x^5 + 13x^4 - x^3 - 12x^2 - 5x + 1$ για $x \in [0, 1]$, η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και $f(0) = 1$, $f(1) = -1$. Άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία λύση στο $[0, 1]$.
Στα διαστήματα $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$ η εξίσωση $\frac{3}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{5}{x-3} = 0$ είναι ισοδύναμη με την

$$3(x-1)(x-2)(x-3) + 2x(x-2)(x-3) + x(x-1)(x-3) + 5x(x-1)(x-2) = 0.$$

Αν ορίσουμε

$$f(x) = 3(x-1)(x-2)(x-3) + 2x(x-2)(x-3) + x(x-1)(x-3) + 5x(x-1)(x-2)$$

για κάθε x,τότε η f είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $[0,1]$, $[1,2]$, $[2,3]$ και έχει αντίθετες τιμές στα άκρα τους: $f(0)=-18$, $f(1)=6$, $f(2)=-2$, $f(3)=30$. Άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία λύση σε καθένα από τα τρία διαστήματα $(0,1)$, $(1,2)$, $(2,3)$.
Αν ορίσουμε $f(x)=e^x-x-2$ για κάθε x, τότε η f είναι συνεχής και $f(-2)=e^{-2}>0$, $f(0)=-1<0$, $f(2)=e^2-4>0$. Άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία λύση σε καθένα από τα διαστήματα $(-2,0),(0,2)$.

Άσκηση 4.4.4. *Έστω $a_1<b_1<a_2<b_2<\cdots<a_n<b_n$. Αποδείξτε ότι η πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)=2(x-a_1)\cdots(x-a_n)+3(x-b_1)\cdots(x-b_n)$ έχει ακριβώς n πραγματικές ρίζες.*

Λύση: Για κάθε $k=1,\ldots,n$ έχουμε

$$P(a_k)=3(a_k-b_1)\cdots(a_k-b_n),\qquad P(b_k)=2(b_k-a_1)\cdots(b_k-a_n).$$

Παρατηρούμε ότι στο γινόμενο $(a_k-b_1)\cdots(a_k-b_n)$ υπάρχουν ακριβώς $n-k+1$ αρνητικοί όροι: οι $a_k-b_k,\ldots,a_k-b_n$. Επίσης, στο γινόμενο $(b_k-a_1)\cdots(b_k-a_n)$ υπάρχουν ακριβώς $n-k$ αρνητικοί όροι: οι $b_k-a_{k+1},\ldots,b_k-a_n$. Άρα στο γινόμενο

$$P(a_k)P(b_k)=6(a_k-b_1)\cdots(a_k-b_n)(b_k-a_1)\cdots(b_k-a_n)$$

υπάρχουν ακριβώς $(n-k+1)+(n-k)=2(n-k)+1$ αρνητικοί όροι. Επειδή ο $2(n-k)+1$ είναι περιττός ακέραιος, ο αριθμός $P(a_k)P(b_k)$ είναι αρνητικός. Άρα η εξίσωση $P(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία λύση σε καθένα από τα διαστήματα $(a_1,b_1),\ldots,(a_n,b_n)$. Όμως, επειδή το $P(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού n, είναι γνωστό ότι η εξίσωση $P(x)=0$ έχει το πολύ n διαφορετικές λύσεις. Συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση $P(x)=0$ έχει ακριβώς n λύσεις, μία σε καθένα από τα διαστήματα $(a_1,b_1),\ldots,(a_n,b_n)$.

Άσκηση 4.4.5. *Έστω $f:I\to\mathbb{R}$ συνεχής στο διάστημα I και $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$. Αποδείξτε ότι για κάθε $x_1,\ldots,x_n\in I$ υπάρχει $\xi\in I$ ώστε $f(\xi)=\frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{n}$.*

Λύση: Άς συμβολίσουμε a τον μικρότερο και b τον μεγαλύτερο από τους $x_1,\ldots,x_n$. Τότε το διάστημα $[a,b]$ περιέχεται στο διάστημα I, οπότε η f είναι συνεχής στο $[a,b]$.
Έστω l η ελάχιστη και u η μέγιστη τιμή της f στο $[a,b]$. Επειδή οι $x_1,\ldots,x_n$ ανήκουν στο $[a,b]$, συνεπάγεται ότι ισχύει $l\leq f(x_1)\leq u,\ldots,l\leq f(x_n)\leq u$ και άρα $l\leq\frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{n}\leq u$.
Επειδή, λοιπόν, ο αριθμός $\frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{n}$ είναι ανάμεσα σε δύο τιμές της f, υπάρχει ξ στο $[a,b]$ (και άρα ξ στο I) ώστε $f(\xi)=\frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{n}$.

Άσκηση 4.4.6. *Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $[0,1]$ και $f(0)=f(1)$. Για κάθε $k\in\mathbb{N}$ με $k\geq 2$ αποδείξτε ότι υπάρχει $x\in[0,\frac{k-1}{k})$ ώστε $f(x)=f(x+\frac{1}{k})$.*

Λύση: Έστω (για άτοπο) ότι η εξίσωση $f(x+\frac{1}{k})-f(x)=0$ δεν έχει λύση στο διάστημα $[0,\frac{k-1}{k})$. Τότε είτε ισχύει $f(x+\frac{1}{k})-f(x)>0$ για κάθε $x\in[0,\frac{k-1}{k})$ είτε ισχύει $f(x+\frac{1}{k})-f(x)<0$ για κάθε $x\in[0,\frac{k-1}{k})$.
Στην πρώτη περίπτωση συνεπάγεται

$$f(0)<f\big(\tfrac{1}{k}\big)<f\big(\tfrac{2}{k}\big)<\ldots<f\big(\tfrac{k-2}{k}\big)<f\big(\tfrac{k-1}{k}\big)$$

και άρα

$$f(1)=f(0)<f\big(\tfrac{k-1}{k}\big).\tag{14.51}$$

Όμως, επειδή ισχύει $f(x+\frac{1}{k})>f(x)$ για κάθε $x\in[0,\frac{k-1}{k})$ και η f είναι συνεχής στο $[0,1]$, παίρνοντας όριο όταν $x\to\frac{k-1}{k}-$, βρίσκουμε

$$f(1)\geq f\big(\tfrac{k-1}{k}\big).\tag{14.52}$$

Από τις (14.51) και (14.52) καταλήγουμε σε άτοπο.
Με τον ίδιο τρόπο καταλήγουμε σε άτοπο στην δεύτερη περίπτωση.

Άρα η εξίσωση $f(x+\frac{1}{k})-f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία λύση στο διάστημα $[0,\frac{k-1}{k})$.

Άσκηση 4.4.7. *Έστω συναρτήσεις f,g συνεχείς στο $[a,b]$ και έστω ότι ισχύει $f(x)>g(x)$ για κάθε $x\in[a,b]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει αριθμός $\rho>0$ τέτοιος ώστε να ισχύει $f(x)\geq g(x)+\rho$ για κάθε $x\in[a,b]$.*

Λύση: Θεωρούμε την συνάρτηση $h=f-g$.
Η h είναι συνεχής στο $[a,b]$ και ισχύει $h(x)>0$ για κάθε $x\in[a,b]$.
Από το θεώρημα μέγιστης - ελάχιστης τιμής συνεπάγεται ότι υπάρχει $\xi\in[a,b]$ τέτοιο ώστε να ισχύει $h(\xi)\leq h(x)$ για κάθε $x\in[a,b]$. Ο αριθμός $\rho=h(\xi)$ είναι θετικός και άρα έχουμε ότι ισχύει $0<\rho\leq h(x)=f(x)-g(x)$ για κάθε $x\in[a,b]$.

Άσκηση 4.4.8. *Θεωρώντας τη συνεχή συνάρτηση $|f|:[a,b]\to\mathbb{R}$, δώστε δεύτερη λύση της άσκησης 4.3.4.*

Λύση: Έστω $|f(\xi)|$ η ελάχιστη τιμή της $|f|$ στο $[a,b]$.
Τότε υπάρχει $\xi'\in[a,b]$ ώστε να είναι $|f(\xi')|\leq\frac{|f(\xi)|}{2}$. Όμως, επειδή ο $|f(\xi)|$ η ελάχιστη τιμή της $|f|$, συνεπάγεται $|f(\xi)|\leq|f(\xi')|$ και άρα $|f(\xi)|\leq\frac{|f(\xi)|}{2}$.
Επομένως, $|f(\xi)|=0$.

Άσκηση 4.4.9. *Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα I. Αν ισχύει $f(x)\in\mathbb{Q}$ για κάθε $x\in I$, αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή στο I.*

Λύση: Έστω ότι η f δεν είναι σταθερή στο I, οπότε υπάρχουν $a,b\in I$ ώστε $f(a)<f(b)$.
Τότε, όμως, υπάρχει κάποιος άρρητος λ έτσι ώστε $f(a)<\lambda<f(b)$. Άρα ο λ είναι ανάμεσα σε δύο τιμές της f στο I, οπότε είναι κι αυτός τιμή της f στο I. Αυτό είναι άτοπο διότι όλες οι τιμές της f είναι ρητοί.
Άρα η f είναι σταθερή στο I.

Άσκηση 4.4.10. [α] *Έστω $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχείς στο $[a,b]$. Αν $f(a)\leq g(a)$ και $f(b)\geq g(b)$, αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi\in[a,b]$ ώστε $f(\xi)=g(\xi)$.*

[γ] *Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής. Αν δεν ισχύει $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ ούτε $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, αποδείξτε ότι υπάρχει ξ ώστε $f(\xi)=\xi$.*

Λύση: [α] Ορίζουμε τη συνάρτηση $h=f-g$, η οποία είναι συνεχής στο $[a,b]$. Τότε είναι $h(a)\leq 0\leq h(b)$, οπότε υπάρχει $\xi\in[a,b]$ ώστε $h(\xi)=0$ και, επομένως, $f(\xi)=g(\xi)$.

[γ] Έστω (για άτοπο) ότι η εξίσωση $f(x)-x=0$ δεν έχει λύση. Τότε είτε ισχύει $f(x)-x>0$ για κάθε x είτε ισχύει $f(x)-x<0$ για κάθε x.
Στην πρώτη περίπτωση έχουμε ότι ισχύει $f(x)>x$ για κάθε x και άρα $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.
Στην δεύτερη περίπτωση έχουμε ότι ισχύει $f(x)<x$ για κάθε x και άρα $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.
Και στις δύο περιπτώσεις καταλήγουμε σε άτοπο.
Άρα υπάρχει ξ ώστε $f(\xi)=\xi$.

Άσκηση 4.4.11. *Έστω συναρτήσεις f,g συνεχείς στο διάστημα I και έστω ότι ισχύει $f(x)\neq g(x)$ για κάθε $x\in I$. Αποδείξτε ότι είτε ισχύει $f(x)<g(x)$ για κάθε $x\in I$ είτε ισχύει $f(x)>g(x)$ για κάθε $x\in I$.*
Έστω επιπλέον ότι η συνάρτηση h είναι συνεχής στο I και ότι $h(x)=f(x)$ ή $h(x)=g(x)$ για κάθε $x\in I$. Αποδείξτε ότι είτε ισχύει $h(x)=f(x)$ για κάθε $x\in I$ είτε ισχύει $h(x)=g(x)$ για κάθε $x\in I$.

Λύση: Το πρώτο ερώτημα. Θεωρούμε την $\phi=f-g$. Η ϕ είναι συνεχής στο I και ισχύει $\phi(x)\neq 0$ για κάθε $x\in I$. Άρα είτε ισχύει $\phi(x)<0$ για κάθε $x\in I$ είτε ισχύει $\phi(x)>0$ για κάθε $x\in I$.
Το δεύτερο ερώτημα. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\psi=\frac{1}{2}(f+g).$$

Η ψ είναι συνεχής στο I και ας δούμε πώς συγκρίνεται με τις f και g.
Θεωρούμε την περίπτωση που ισχύει

$$f(x) < g(x) \qquad \text{για κάθε } x \in I.$$

(Η άλλη περίπτωση είναι παρόμοια.) Τότε, προφανώς, συνεπάγεται ότι ισχύει

$$f(x) < \psi(x) < g(x) \qquad \text{για κάθε } x \in I.$$

Τώρα η h ταυτίζεται σε κάθε σημείο του I είτε με την f είτε με την g και, επομένως, ισχύει

$$h(x) \neq \psi(x) \qquad \text{για κάθε } x \in I.$$

Εφαρμόζοντας το προηγούμενο αποτέλεσμα στις h και ψ, έχουμε ότι είτε ισχύει $h(x) < \psi(x)$ για κάθε $x \in I$ είτε ισχύει $h(x) > \psi(x)$ για κάθε $x \in I$.
Τέλος, πάλι επειδή η h ταυτίζεται σε κάθε σημείο του I είτε με την f είτε με την g, συνεπάγεται ότι, αντιστοίχως, είτε ισχύει $h(x) = f(x)$ για κάθε $x \in I$ είτε ισχύει $h(x) = g(x)$ για κάθε $x \in I$.

Άσκηση 4.4.12. [α] *Έστω συναρτήσεις f, g συνεχείς στο διάστημα I και έστω ότι ισχύει $f(x)^2 = g(x)^2 > 0$ για κάθε $x \in I$. Αποδείξτε ότι είτε ισχύει $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in I$ είτε ισχύει $f(x) = -g(x)$ για κάθε $x \in I$.*
[β] *Έστω ότι η f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ και ότι ισχύει $f(x)^2 = x^2$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$. Αποδείξτε ότι είτε ισχύει $f(x) = x$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$ είτε ισχύει $f(x) = -x$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$.*
Τί συμπεραίνεται αν η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f(x)^2 = x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$;

Λύση: [α] Από την υπόθεση συνεπάγεται ότι ισχύει $f(x) = g(x)$ ή $f(x) = -g(x)$ για κάθε $x \in I$. Επίσης συνεπάγεται ότι καθεμιά από τις f, g δεν μηδενίζεται σε κανένα σημείο του I. Άρα οι f, g διατηρούν πρόσημο στο I, οπότε είτε ισχύει $f(x) > 0$ για κάθε $x \in I$ είτε ισχύει $f(x) < 0$ για κάθε $x \in I$ και ομοίως για την g.
Τώρα είναι προφανές ότι, στην περίπτωση που οι f, g είναι ομόσημες για κάθε $x \in I$, ισχύει $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in I$ και, στην περίπτωση που οι f, g είναι ετερόσημες για κάθε $x \in I$, ισχύει $f(x) = -g(x)$ για κάθε $x \in I$.

[β] Εφαρμόζουμε το αποτέλεσμα του [α] στις συναρτήσεις f και $g(x) = x$ αλλά στο διάστημα $(0, +\infty)$ αντί του $[0, +\infty)$.
Συμπεραίνουμε ότι είτε ισχύει $f(x) = x$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είτε ισχύει $f(x) = -x$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.
Επειδή $f(0)^2 = 0^2 = 0$, έχουμε ότι $f(0) = 0$ και άρα και οι δύο ισότητες $f(x) = x$ και $f(x) = -x$ ισχύουν και για $x = 0$.
Άρα είτε ισχύει $f(x) = x$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$ είτε ισχύει $f(x) = -x$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$.
Το ίδιο συμπέρασμα ισχύει (με την ίδια αιτιολόγηση) και για το $(-\infty, 0]$ αντί του $[0, +\infty)$.
Άρα έχουμε ότι είτε ισχύει $f(x) = x$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$ είτε ισχύει $f(x) = -x$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$ και ομοίως για το $(-\infty, 0]$.
Έτσι έχουμε τέσσερις δυνατότητες για την f στο $\mathbb{R} = (-\infty, 0] \cup [0, +\infty)$ οι οποίες διατυπώνονται ως εξής: είτε ισχύει $f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είτε ισχύει $f(x) = -x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είτε ισχύει $f(x) = |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είτε ισχύει $f(x) = -|x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Και οι τέσσερις δυνατότητες είναι αποδεκτές διότι και οι τέσσερις συναρτήσεις f είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$.

Άσκηση 4.4.13. [α] *Έστω διάστημα I και $f_1, \dots, f_n : I \to \mathbb{R}$ συνεχείς στο I. Έστω ότι οι $f_1, \dots, f_n$ σε κάθε $x \in I$ έχουν n διαφορετικές τιμές. Τί συμπεραίνετε σχετικά με τη διάταξη μεγέθους αυτών των συναρτήσεων;*
Έστω, επιπλέον, ότι η $h : I \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο I και ότι σε κάθε $x \in I$ η τιμή της είναι ίση με την τιμή (στον ίδιο x) μιας από τις n αρχικές συναρτήσεις ή, ισοδύναμα, ότι ισχύει $(h(x) - f_1(x)) \cdots (h(x) - f_n(x)) = 0$ για κάθε $x \in I$. Τί συμπεραίνετε για τη σχέση της h με τις $f_1, \dots, f_n$;

[β] *Έστω διάστημα $I \subseteq [1,+\infty)$ ή $I \subseteq [0,1]$ και $h : I \to \mathbb{R}$ συνεχής στο I. Έστω ότι ισχύει $(h(x)-x)(h(x)-x^2)(h(x)-x^3)=0$ για κάθε $x \in I$. Αποδείξτε ότι είτε ισχύει $h(x)=x$ για κάθε $x \in I$ είτε ισχύει $h(x)=x^2$ για κάθε $x \in I$ είτε ισχύει $h(x)=x^3$ για κάθε $x \in I$.*

Αν $I=[0,+\infty)$, τότε - με τις ίδιες κατά τα άλλα υποθέσεις - ποιές είναι οι δυνατότητες για την h;

Λύση: [α] Παίρνουμε οποιονδήποτε $x_0 \in I$ και διατάσσουμε κατά μέγεθος τις ανά δύο διαφορετικές τιμές των $f_1, \ldots, f_n$ στον x_0. Τότε έχουμε

$$f_1(x_0) < f_2(x_0) < \ldots < f_{n-1}(x_0) < f_n(x_0).$$

Αν δεν είναι αυτή η σωστή σειρά των αριθμών αυτών, τότε απλώς αλλάζουμε τους δείκτες ώστε να προκύψει η συγκεκριμένη διάταξη.
Τότε το αποτέλεσμα της άσκησης 4.4.11 συνεπάγεται ότι θα ισχύει

$$f_1(x) < f_2(x) < \ldots < f_{n-1}(x) < f_n(x) \qquad \text{για κάθε } x \in I.$$

Και πάλι από το αποτέλεσμα της άσκησης 4.4.11 συνεπάγεται ότι, αν $h(x_0)=f_k(x_0)$ για κάποιον $k=1,\ldots,n$, τότε ισχύει $h(x)=f_k(x)$ για κάθε $x \in I$. Δηλαδή, η h ταυτίζεται με μία από τις $f_1,\ldots,f_n$ στο I.
[β] Έστω $I \subseteq [1,+\infty)$. Τότε στο διάστημα $I \setminus \{1\}$ ισχύει $x < x^2 < x^3$. Τότε από το αποτέλεσμα του [α] συνεπάγεται ότι είτε ισχύει $h(x)=x$ για κάθε $x \in I\setminus\{1\}$ είτε ισχύει $h(x)=x^2$ για κάθε $x \in I\setminus\{1\}$ είτε ισχύει $h(x)=x^3$ για κάθε $x \in I\setminus\{1\}$. Οι ισότητες αυτές επεκτείνονται αυτομάτως και για $x=1$ (αν ο 1 ανήκει στο I), διότι και οι τέσσερις συναρτήσεις έχουν την ίδια τιμή 1 στον 1.
Έστω $I \subseteq [0,1]$. Τότε στο διάστημα $I\setminus\{0,1\}$ ισχύει $x^3 < x^2 < x$. Πάλι από το αποτέλεσμα του [α] συνεπάγεται ότι είτε ισχύει $h(x)=x$ για κάθε $x \in I\setminus\{0,1\}$ είτε ισχύει $h(x)=x^2$ για κάθε $x \in I\setminus\{0,1\}$ είτε ισχύει $h(x)=x^3$ για κάθε $x \in I\setminus\{0,1\}$. Οι ισότητες αυτές επεκτείνονται αυτομάτως και για $x=0$ και $x=1$ (αν οι $0,1$ ανήκουν στο I), διότι και οι τέσσερις συναρτήσεις έχουν την ίδια τιμή 0 στον 0 και την ίδια τιμή 1 στον 1.
Αν $I=[0,+\infty)$, τότε, όπως είδαμε, η h ταυτίζεται με μία από τις x,x^2,x^3 στο $[0,1]$ και με μία από τις x,x^2,x^3 στο $[1,+\infty)$.
Τώρα παρατηρούμε ότι για κάθε $k=1,2,3$ και για κάθε $m=1,2,3$ (όχι αναγκαστικά $k=m$) η συνάρτηση $h(x)=\begin{cases} x^k, & \text{αν } 0 \le x \le 1 \\ x^m, & \text{αν } 1 \le x < +\infty \end{cases}$ είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$.
Άρα υπάρχουν εννέα συναρτήσεις h που ικανοποιούν τις υποθέσεις.

Άσκηση 4.4.14. *Έστω $a,b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a<b$ και $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ συνεχής στο (a,b). Αποδείξτε ότι, αν υπάρχουν τα $\lim_{x\to a} f(x)$, $\lim_{x\to b} f(x)$ και υπάρχει $x_0 \in (a,b)$ ώστε $f(x_0) > \lim_{x\to a} f(x)$ και $f(x_0) > \lim_{x\to b} f(x)$, τότε η f έχει μέγιστη τιμή στο (a,b).*

Λύση: Πρώτος τρόπος: Επειδή $\lim_{x\to a} f(x) < f(x_0)$ και $\lim_{x\to b} f(x) < f(x_0)$, υπάρχουν a' και b' ώστε $a<a'<b'<b$ και ώστε να ισχύει

$$f(x) < f(x_0) \qquad \text{για κάθε } x \in (a,a') \text{ και για κάθε } x \in (b',b). \tag{14.53}$$

Άρα, προφανώς, $x_0 \in [a',b']$.
Τώρα, η f έχει μέγιστη τιμή στο $[a',b']$, δηλαδή υπάρχει $\zeta \in [a',b']$ ώστε να ισχύει

$$f(x) \le f(\zeta) \qquad \text{για κάθε } x \in [a',b']. \tag{14.54}$$

Ειδικότερα, είναι $f(x_0) \le f(\zeta)$, οπότε από την (14.53) συνεπάγεται ότι ισχύει

$$f(x) < f(\zeta) \qquad \text{για κάθε } x \in (a,a') \text{ και για κάθε } x \in (b',b). \tag{14.55}$$

Τώρα, από τις (14.54) και (14.55) συνεπάγεται ότι ο $f(\zeta)$ είναι η μέγιστη τιμή της f στο (a,b).

Δεύτερος τρόπος: Έστω
$$u = \sup\{f(x) \,|\, x \in (a,b)\},$$
όπου $u \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Προφανώς, είναι $f(x_0) \le u$.
Από το αποτέλεσμα της άσκησης 2.3.33 έχουμε ότι υπάρχει ακολουθία στο $\{f(x) \,|\, x \in (a,b)\}$ με όριο u. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει (x_n) στο (a,b) ώστε
$$f(x_n) \to u. \tag{14.56}$$
Βάσει του θεωρήματος των Bolzano - Weierstrass και της πρότασης 2.16, υπάρχει υποακολουθία (x_{n_k}) της (x_n) και $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ ώστε
$$x_{n_k} \to \xi. \tag{14.57}$$
Από την (14.56) έχουμε
$$f(x_{n_k}) \to u. \tag{14.58}$$
Επειδή ισχύει $a < x_{n_k} < b$ για κάθε k, συνεπάγεται $\xi \in [a,b]$.
Αν $\xi = a$, τότε από το ότι υπάρχει το $\lim_{x\to a} f(x)$ και από το ότι $x_{n_k} \to a$, συμπεραίνουμε ότι το όριο u της $\big(f(x_{n_k})\big)$ είναι ίσο με το $\lim_{x\to a} f(x)$ και άρα $u < f(x_0)$. Αυτό είναι άτοπο, οπότε $\xi \ne a$. Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι $\xi \ne b$.
Άρα $\xi \in (a,b)$ και, επομένως, η f είναι συνεχής στον ξ.
Τώρα, από την (14.57) συνεπάγεται $f(x_{n_k}) \to f(\xi)$ και από την (14.58) έχουμε $f(\xi) = u$.
Άρα ο $f(\xi) = u$ είναι η μέγιστη τιμή της f στο (a,b).

Άσκηση 4.4.15. *Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής στο I. Έστω ότι για κάθε $x \in I$, όχι δεξιό άκρο του I, και $\delta > 0$ υπάρχει $x' \in (x, x+\delta) \cap I$ ώστε $f(x) \le f(x')$. Αποδείξτε ότι η f είναι αύξουσα στο I.*

Υπόδειξη: Έστω $a, b \in I$, $a < b$, $f(a) > f(b)$ και $g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$. Τότε $g(a) = g(b) = 0$. Η g έχει μέγιστη τιμή στο $[a,b]$.

Άσκηση 4.4.16. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $\mathbb{R}$. Ο x χαρακτηρίζεται σημείο σκιάς της f αν υπάρχει $x' > x$ ώστε $f(x') > f(x)$. Έστω ότι κάθε $x \in (a,b)$ είναι σημείο σκιάς της f ενώ οι a, b δεν είναι σημεία σκιάς της f. Αποδείξτε ότι ισχύει $f(x) < f(b)$ για κάθε $x \in (a,b)$ και ότι $f(a) = f(b)$.*

Λύση: Αφού ο b δεν είναι σημείο σκιάς της f, ισχύει $f(x') \le f(b)$ για κάθε $x' > b$.
Επίσης, επειδή ο a δεν είναι σημείο σκιάς της f, ισχύει $f(x') \le f(a)$ για κάθε $x' > a$. Ειδικώτερα, ισχύει $f(b) \le f(a)$.
Τώρα, ας πάρουμε οποιονδήποτε $x \in (a,b)$. Ας υποθέσουμε (για άτοπο) ότι $f(x) \ge f(b)$. Επειδή ο x είναι σημείο σκιάς της f, υπάρχει $x' > x$ ώστε $f(x') > f(x)$. Από το ότι ισχύει $f(x') \le f(b) \le f(x)$ για κάθε $x' > b$, συνεπάγεται ότι υπάρχει $x' \in (x,b)$ ώστε $f(x') > f(x)$. Αυτό σημαίνει ότι η μέγιστη τιμή της f στο $[x,b]$ είναι $> f(x) \ge f(b)$.
Έχουμε, λοιπόν, ότι υπάρχει x_0 στο (x,b) ώστε να ισχύει $f(x_0) \ge f(x')$ για κάθε $x' \in [x,b]$. Άρα ισχύει, επιπλέον, $f(x_0) \ge f(b) \ge f(x')$ για κάθε $x' > b$. Δηλαδή, ισχύει $f(x_0) \ge f(x')$ για κάθε $x' > x_0$, οπότε ο x_0 δεν είναι σημείο σκιάς της f και καταλήγουμε σε άτοπο αφού $x_0 \in (a,b)$ και κάθε σημείο του (a,b) είναι σημείο σκιάς της f.
Άρα ισχύει $f(x) < f(b)$ για κάθε $x \in (a,b)$.
Λόγω συνέχειας συνεπάγεται $f(a) = \lim_{x\to a+} f(x) \le f(b)$. Από τις $f(a) \ge f(b)$ και $f(a) \le f(b)$ συνεπάγεται $f(a) = f(b)$.

Άσκηση 4.4.17. *Έστω $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής και φραγμένη στο $(a+\infty)$. Αποδείξτε ότι για κάθε $b > 0$ υπάρχει ακολουθία (x_n) στο $(a,+\infty)$ ώστε $x_n \to +\infty$ και $f(x_n + b) - f(x_n) \to 0$.*

Λύση: Έστω ότι υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x+b) - f(x)| \ge \epsilon$ κοντά στο $+\infty$. Δηλαδή, για κάποιον $a_0 \ge a$ ισχύει $|f(x+b) - f(x)| \ge \epsilon$ για κάθε $x \in (a_0, +\infty)$.
Ειδικώτερα, ισχύει $f(x+b) - f(x) \ne 0$ για κάθε $x \in (a_0, +\infty)$, οπότε η συνεχής συνάρτηση $f(x+b) - f(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(a_0, +\infty)$.

Άρα είτε ισχύει $f(x+b)-f(x) \geq \epsilon$ για κάθε $x \in (a_0, +\infty)$ είτε ισχύει $f(x+b)-f(x) \leq -\epsilon$ για κάθε $x \in (a_0, +\infty)$.
Στην πρώτη περίπτωση παίρνουμε οποιονδήποτε $x \in (a_0, +\infty)$ και δημιουργούμε την ακολουθία στο $(a_0, +\infty)$ με τύπο $x_n = x + (n-1)b$ για κάθε n. Τότε είναι εύκολο να δούμε με την αρχή της επαγωγής ότι ισχύει $f(x_n) \geq f(x) + (n-1)\epsilon$ για κάθε n και, επομένως, $f(x_n) \to +\infty$. Αυτό είναι άτοπο διότι η f είναι φραγμένη.
Στη δεύτερη περίπτωση με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι $f(x_n) \to -\infty$ με την ίδια ακολουθία (x_n) και καταλήγουμε πάλι σε άτοπο.
Συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x+b)-f(x)| \geq \epsilon$ κοντά στο $+\infty$. Δηλαδή, για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει $|f(x+b)-f(x)| < \epsilon$ σε σημεία όσο θέλουμε κοντά στο $+\infty$.
Άρα υπάρχει $x_1 \in (a, +\infty)$ με $x_1 > 1$ ώστε να είναι $|f(x_1+b)-f(x_1)| < 1$. Ομοίως, υπάρχει $x_2 \in (a, +\infty)$ με $x_2 > 2$ ώστε να είναι $|f(x_2+b)-f(x_2)| < \frac{1}{2}$. Ομοίως, υπάρχει $x_3 \in (a, +\infty)$ με $x_3 > 3$ ώστε να είναι $|f(x_3+b)-f(x_3)| < \frac{1}{3}$. Συνεχίζοντας επαγωγικά, δημιουργούμε ακολουθία (x_n) στο $(a, +\infty)$ ώστε να ισχύει $x_n > n$ και $|f(x_n+b)-f(x_n)| < \frac{1}{n}$ για κάθε n. Άρα $x_n \to +\infty$ και $f(x_n+b)-f(x_n) \to 0$.

Άσκηση 4.4.18. *Έστω $f, g : [a,b] \to [a,b]$ συνεχείς στο $[a,b]$. Έστω ότι η g είναι αύξουσα και $f \circ g = g \circ f$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [a,b]$ ώστε $f(\xi) = g(\xi) = \xi$.*

Υπόδειξη: Σύμφωνα με την άσκηση 4.4.10[β], υπάρχει $x_1 \in [a,b]$ ώστε $f(x_1) = x_1$. Θεωρήστε την ακολουθία (x_n) στο $[a,b]$ που ορίζεται με τον αναδρομικό τύπο $x_{n+1} = g(x_n)$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι η (x_n) είναι μονότονη και ότι, αν ξ είναι το όριο της (x_n), τότε ισχύει $f(\xi) = g(\xi) = \xi$.

Άσκηση 4.4.19. *Έστω συνάρτηση f συνεχής και ένα-προς-ένα στο διάστημα I. Αποδείξτε ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο I.*

Λύση: Έστω ότι η f δεν είναι γνησίως μονότονη στο I. Τότε υπάρχουν τρία σημεία a, b, c στο I με $a < b < c$ τέτοια ώστε $f(a) < f(b) > f(c)$ ή $f(a) > f(b) < f(c)$.
Θεωρούμε την πρώτη περίπτωση. (Η άλλη περίπτωση είναι παρόμοια.)
Επειδή $f(a) < f(b)$ και $f(c) < f(b)$, συνεπάγεται ότι $\max\{f(a), f(c)\} < f(b)$. Παίρνουμε έναν οποιονδήποτε αριθμό λ ώστε $\max\{f(a), f(c)\} < \lambda < f(b)$. Τότε ο λ είναι ανάμεσα στις τιμές $f(a)$ και $f(b)$ καθώς και ανάμεσα στις τιμές $f(b)$ και $f(c)$.
Επειδή η f είναι συνεχής στα διαστήματα $[a,b]$ και $[b,c]$, συνεπάγεται ότι υπάρχουν $x_1 \in (a,b)$ και $x_2 \in (b,c)$ τέτοια ώστε $f(x_1) = \lambda$ και $f(x_2) = \lambda$. Τότε όμως $x_1 < x_2$ και $f(x_1) = f(x_2)$ και καταλήγουμε σε άτοπο.
Άρα η f είναι γνησίως μονότονη στο I.
Παρατήρηση: Ας θυμηθούμε ότι κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση είναι ένα-προς-ένα. Το αντίστροφο δεν ισχύει: υπάρχουν συναρτήσεις οι οποίες είναι ένα-προς-ένα αλλά όχι γνησίως μονότονες. Η άσκηση αυτή λέει ότι το αντίστροφο ισχύει αν υποθέσουμε επιπλέον ότι η συνάρτηση είναι συνεχής σε διάστημα.

Άσκηση 4.4.20. *Έστω διάστημα I (όχι μονοσύνολο) και $f : I \to \mathbb{R}$ ώστε για κάθε λ η εξίσωση $f(x) = \lambda$ είτε έχει ακριβώς δύο λύσεις είτε δεν έχει καμιά λύση. Αποδείξτε ότι η f δεν είναι συνεχής στο I.*

Λύση: Έστω (για άτοπο) ότι η f είναι συνεχής στο I.
Παίρνουμε μια οποιαδήποτε τιμή λ της f και τότε υπάρχουν ακριβώς δύο λύσεις της εξίσωσης $f(x) = \lambda$. Δηλαδή, υπάρχουν $a, b \in I$ με $a < b$ ώστε $f(a) = f(b) = \lambda$.
Έστω u η μέγιστη τιμή και l η ελάχιστη τιμή της f στο $[a,b]$.
Δεν είναι δυνατόν να είναι $u = l = f(a) = f(b)$, διότι τότε η f θα ήταν σταθερή στο $[a,b]$ και θα φτάναμε σε άτοπο. Άρα είτε $u > f(a) = f(b)$ είτε $l < f(a) = f(b)$.
Έστω $u > f(a) = f(b)$. Τότε υπάρχει c ώστε $a < c < b$ και $f(c) = u$. Λόγω της υπόθεσης, πρέπει να υπάρχει και $d \in I$, $d \neq c$ ώστε $f(d) = u$. Τώρα έχουμε τις εξής τέσσερις περιπτώσεις:
Πρώτη περίπτωση: $d < a < c < b$. Παίρνουμε οποιονδήποτε μ με $\lambda < \mu < u$. Τότε υπάρχουν $x_1 \in (d,a)$, $x_2 \in (a,c)$, $x_3 \in (c,b)$ ώστε $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = \mu$ και καταλήγουμε σε

άτοπο.
Δεύτερη περίπτωση: $a < c < b < d$. Παίρνουμε οποιονδήποτε μ με $\lambda < \mu < u$. Τότε υπάρχουν $x_1 \in (a, c)$, $x_2 \in (c, b)$, $x_3 \in (b, d)$ ώστε $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = \mu$ και πάλι καταλήγουμε σε άτοπο.
Τρίτη περίπτωση: $a < d < c < b$. Έστω l' η ελάχιστη τιμή της f στο $[d, c]$. Επειδή η $u = f(d) = f(c)$ είναι η μέγιστη τιμή της f στο $[a, b]$ και, επομένως, και στο $[d, c]$, δεν μπορεί να είναι $l' = u$, διότι τότε η f θα ήταν σταθερή στο $[d, c]$. Άρα $l' < u$, οπότε υπάρχει m ώστε $d < m < c$ και $f(m) = l'$. Παίρνουμε οποιονδήποτε μ με $\max\{\lambda, l'\} < \mu < u$. Τότε υπάρχουν $x_1 \in (a, d)$, $x_2 \in (d, m)$, $x_3 \in (m, c)$, $x_4 \in (c, b)$ ώστε $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = f(x_4) = \mu$ και πάλι καταλήγουμε σε άτοπο.
Τέταρτη περίπτωση: $a < c < d < b$. Τότε, ακριβώς όπως στην τρίτη περίπτωση, καταλήγουμε πάλι σε άτοπο.
Άρα, υποθέτοντας $u > f(a) = f(b)$, σε κάθε περίπτωση καταλήγουμε σε άτοπο. Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι, υποθέτοντας $l < f(a) = f(b)$, καταλήγουμε σε άτοπο.
Άρα η f δεν είναι συνεχής στο I.

Άσκηση 4.4.21. *Αποδείξτε ότι η ιδιότητα σταθερού προσήμου είναι ισοδύναμη με το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής.*

Λύση: Έστω ότι ισχύει η ιδιότητα σταθερού προσήμου και έστω f συνεχής στο διάστημα I.
Παίρνουμε τυχόντες $a, b \in I$ με $a < b$ και λ ώστε $f(a) < \lambda < f(b)$ ή $f(a) > \lambda > f(b)$.
Τότε η συνάρτηση $g(x) = f(x) - \lambda$ είναι συνεχής στο $[a, b]$ και δεν έχει σταθερό πρόσημο στο $[a, b]$, διότι έχει τιμές $g(a)$, $g(b)$ με αντίθετο πρόσημο. Άρα υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε $g(\xi) = 0$ ή, ισοδύναμα, $f(\xi) = \lambda$.
Άρα ισχύει το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής.

Άσκηση 4.4.22. *Έστω μη-κενό σύνολο A το οποίο δεν είναι διάστημα. Χρησιμοποιώντας την πρόταση 1.4, αποδείξτε ότι υπάρχουν $a, b \in A$ με $a < b$ και συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ συνεχής στο A και λ με $f(a) < \lambda < f(b)$ ώστε να μην υπάρχει $\xi \in A$ με $f(\xi) = \lambda$.*

Λύση: Αφού το μη-κενό A δεν είναι διάστημα, υπαρχουν a, b, c ώστε $a < c < b$ και ώστε $a, b \in A$ και $c \notin A$.
Ορίζουμε τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{αν } x \in A,\, x < c \\ 1, & \text{αν } x \in A,\, c < x \end{cases}$
Επειδή $c \notin A$, η f είναι συνεχής στο A. Επίσης, είναι $f(a) = -1$ και $f(b) = 1$. Όμως, είναι $f(a) < 0 < f(b)$ και δεν υπάρχει $x \in A$ ώστε $f(x) = 0$.

Άσκηση 4.4.23. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ μονότονη στο $[a, b]$ για την οποία ισχύει το συμπέρασμα του θεωρήματος ενδιάμεσης τιμής, δηλαδή ότι για κάθε λ με την ιδιότητα $f(a) \le \lambda \le f(b)$ ή $f(b) \le \lambda \le f(a)$ υπάρχει $\xi \in [a, b]$ ώστε $f(\xi) = \lambda$. Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο $[a, b]$.*

Υπόδειξη: Δείτε την πρόταση 4.1 και τη συζήτηση μετά από αυτήν, αλλά και την άσκηση 4.1.15.

Άσκηση 4.5.1. *Ποιά είναι τα σύνολα τιμών των $-2x^3 + x^2 - 5x + 6$, $x^4 - 2x^2 + 7$;*

Λύση: Η πρώτη συνάρτηση είναι πολυωνυμική περιττού βαθμού, οπότε το σύνολο τιμών της είναι το $(-\infty, +\infty)$.
Η δεύτερη συνάρτηση είναι πολυωνυμική άρτου βαθμού με θετικό μεγιστοβάθμιο συντελεστή, οπότε έχει ελάχιστη τιμή l και το σύνολο τιμών της είναι το $[l, +\infty)$. Άρκεί, λοιπόν, να υπολογίσουμε την ελάχιστη τιμή l.
Γράφουμε $x^4 - 2x^2 + 7 = (x^2 - 1)^2 + 6$ και βλέπουμε ότι όλες οι τιμές της συνάρτησης είναι ≥ 6 και ότι ο 6 είναι τιμή της (για $x = \pm 1$). Άρα $l = 6$ και το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι το $[6, +\infty)$.

Άσκηση 4.5.2. *Βρείτε τα σύνολα τιμών της $x + \frac{1}{x}$ στα διαστήματα $(-\infty, -1]$, $[-1, 0)$, $(0, 1]$, $[1, +\infty)$.*

Λύση: Μπορούμε να δούμε εύκολα (με αλγεβρικό τρόπο) ότι η $x + \frac{1}{x}$ είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, -1]$, $[1, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στα $[-1, 0)$, $(0, 1]$. Υπολογίζουμε, επίσης, τα όρια
$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(x + \tfrac{1}{x}\right) = \pm\infty, \quad \lim_{x\to 0\pm} \left(x + \tfrac{1}{x}\right) = \pm\infty.$$
Τέλος, η τιμή της συνάρτησης στο -1 είναι -2 και στο 1 είναι 2.
Άρα το σύνολο τιμών στο $(-\infty, -1]$ είναι το $(-\infty, -2]$, στο $[-1, 0)$ είναι το $(-\infty, -2]$, στο $(0, 1]$ είναι το $[2, +\infty)$ και στο $[1, +\infty)$ είναι το $[2, +\infty)$.

Άσκηση 4.5.3. *Βρείτε πόσες λύσεις έχει η εξίσωση $\frac{4}{x+1} + \frac{5}{x-1} + \frac{1}{x-2} = c$. Ο αριθμός των λύσεων πιθανόν να εξαρτάται από την τιμή της παραμέτρου c.*

Λύση: Ορίζουμε την συνάρτηση $f(x) = \frac{4}{x+1} + \frac{5}{x-1} + \frac{1}{x-2}$ με πεδίο ορισμού την ένωση $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$.
Είναι πολύ εύκολο να δει κανείς ότι η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα τέσσερα διαστήματα που αποτελούν το πεδίο ορισμού της. (Όμως η f δεν είναι γνησίως φθίνουσα συνολικά στο πεδίο ορισμού της.)
Άρα, υπολογίζοντας όρια, βλέπουμε ότι το σύνολο τιμών της f στο $(-\infty, -1)$ είναι το $(-\infty, 0)$, το σύνολο τιμών στο $(-1, 1)$ είναι το $(-\infty, +\infty)$, το σύνολο τιμών στο $(1, 2)$ είναι το $(-\infty, +\infty)$ και, τέλος, το σύνολο τιμών στο $(2, +\infty)$ είναι το $(0, +\infty)$.
Τώρα, αν $c > 0$, ο c ανήκει στα σύνολα τιμών της f που αντιστοιχούν στα διαστήματα $(-1, 1)$, $(1, 2)$ και $(2, +\infty)$ αλλά όχι στο σύνολο τιμών της f που αντιστοιχεί στο διάστημα $(-\infty, -1)$. Άρα η εξίσωση $f(x) = c$ έχει τουλάχιστον μία λύση σε καθένα από τα τρία διαστήματα $(-1, 1)$, $(1, 2)$ και $(2, +\infty)$ και καμία λύση στο διάστημα $(-\infty, -1)$. Επιπλέον, σε καθένα από τα τρία διαστήματα $(-1, 1)$, $(1, 2)$ και $(2, +\infty)$ η f είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε η αντίστοιχη λύση της $f(x) = c$ είναι μοναδική. Το συμπέρασμα είναι ότι, αν $c > 0$, τότε η $f(x) = c$ έχει ακριβώς τρεις λύσεις.
Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι, αν $c < 0$, η εξίσωση $f(x) = c$ έχει ακριβώς τρεις λύσεις, μία σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ και $(1, 2)$.
Τέλος, αν $c = 0$, τότε η εξίσωση $f(x) = c$ έχει ακριβώς δύο λύσεις, μία σε καθένα από τα διαστήματα $(-1, 1)$ και $(1, 2)$. Η τιμή $c = 0$ δεν περιέχεται στα σύνολα τιμών που αντιστοιχούν στα δύο άλλα διαστήματα.

Άσκηση 4.5.5. *Έστω η συνάρτηση $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$. Αν $a_0 a_n < 0$, αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi > 0$ ώστε $P(\xi) = 0$.*

Λύση: Έστω $a_0 < 0$ και $a_n > 0$. Τότε $P(0) < 0$ και $\lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$. Επομένως, υπάρχει $b > 0$ ώστε $P(b) > 0$ και άρα υπάρχει $\xi \in (0, b)$ ώστε $P(\xi) = 0$.
Η περίπτωση $a_0 > 0$ και $a_n < 0$ είναι παρόμοια.

Άσκηση 4.5.7. *Αποδείξτε ότι ισχύει $\arctan y + \operatorname{arccot} y = \frac{\pi}{2}$ για κάθε y και $\arccos y + \arcsin y = \frac{\pi}{2}$ για κάθε $y \in [-1, 1]$.*
Για ποιούς y ισχύουν οι ισότητες $y = \cos(\arccos y)$ και $y = \sin(\arcsin y)$; Για ποιούς y ισχύουν οι ισότητες $y = \tan(\arctan y)$ και $y = \cot(\operatorname{arccot} y)$;
Αποδείξτε ότι ισχύει $\arctan y + \arctan \frac{1}{y} = \frac{\pi}{2}$ για κάθε $y > 0$ και $\arctan y + \arctan \frac{1}{y} = -\frac{\pi}{2}$ για κάθε $y < 0$.
Αποδείξτε ότι ισχύει $\arccos(\cos x) = x$ για κάθε $x \in [0, \pi]$. Γενικότερα, με τί είναι ίση η παράσταση $\arccos(\cos x)$ αν $x \in [k\pi, (k+1)\pi]$ για κάποιον $k \in \mathbb{Z}$;

Λύση: Έστω $x = \arctan y$ και $z = \operatorname{arccot} y$. Τότε $\tan x = y$, $\cot z = y$ και $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $z \in (0, \pi)$. Συνεπάγεται $\cot(\frac{\pi}{2} - x) = \tan x = y$ και $\frac{\pi}{2} - x \in (0, \pi)$. Λόγω της μοναδικότητας του $z \in (0, \pi)$ που ικανοποιεί την $\cot z = y$, συνεπάγεται $\frac{\pi}{2} - x = z$ και άρα $x + z = \frac{\pi}{2}$.
Η απόδειξη της $\arccos y + \arcsin y = \frac{\pi}{2}$ είναι ακριβώς ίδια (μόνο που θεωρούμε κλειστά αντί ανοικτά διαστήματα).
Η ισότητα $y = \cos(\arccos y)$ δεν ισχύει για $y \notin [-1, 1]$ διότι δεν ορίζεται ο $\arccos y$ γι αυτούς τους

y αλλά και διότι η συνάρτηση $\cos$ έχει τιμές στο $[-1,1]$. Τώρα, έστω $y \in [-1,1]$ και $x = \arccos y$. Τότε $\cos x = y$ και $x \in [0,\pi]$. Άρα $\cos(\arccos y) = y$.
Ομοίως προκύπτει ότι η $y = \sin(\arcsin y)$ ισχύει για $y \in [-1,1]$, ενώ οι $y = \tan(\arctan y)$ και $y = \cot(\operatorname{arccot} y)$ ισχύουν για κάθε y.

Έστω $y > 0$ και $x = \arctan y$ και $z = \arctan\frac{1}{y}$. Τότε $\tan x = y$, $\tan z = \frac{1}{y}$ και $x, z \in (0, \frac{\pi}{2})$. Συνεπάγεται $\cot z = y$ και άρα $\tan(\frac{\pi}{2} - z) = y$ και $\frac{\pi}{2} - z \in (0, \frac{\pi}{2})$. Λόγω της μοναδικότητας του $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ που ικανοποιεί την $\tan x = y$, συνεπάγεται $\frac{\pi}{2} - z = x$ και άρα $x + z = \frac{\pi}{2}$.
Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται η $\arctan y + \arctan\frac{1}{y} = -\frac{\pi}{2}$ για $y < 0$.

Έστω $\arccos(\cos x) = x'$ και $x \in [0,\pi]$. Τότε είναι $x' \in [0,\pi]$ και $\cos x' = \cos x$. Άρα $x' = x$.
Τέλος, έστω $\arccos(\cos x) = x'$ και $x \in [k\pi, (k+1)\pi]$ για κάποιον $k \in \mathbb{Z}$. Τότε είναι $x' \in [0,\pi]$ και $\cos x' = \cos x$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.
Αν ο k είναι άρτιος, τότε, επειδή $\cos(x - k\pi) = \cos x = \cos x'$ και $x - k\pi \in [0,\pi]$, συνεπάγεται $x - k\pi = x'$. Άρα $\arccos(\cos x) = x - k\pi$.
Αν ο k είναι περιττός, τότε, επειδή $\cos(-x+(k+1)\pi) = \cos x = \cos x'$ και $-x+(k+1)\pi \in [0,\pi]$, συνεπάγεται $-x + (k+1)\pi = x'$. Άρα $\arccos(\cos x) = -x + (k+1)\pi$.

Άσκηση 4.5.9. *Έστω οι $f_1 : (-\infty, 0) \to (-\infty,+\infty)$, $f_2 : (0,+\infty) \to (-\infty,+\infty)$ με τον ίδιο τύπο $f_1(x) = f_2(x) = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{x})$.*

Αποδείξτε ότι οι f_1, f_2 είναι γνησίως αύξουσες με κοινό σύνολο τιμών το $(-\infty,+\infty)$. Χωρίς να βρείτε τους τύπους των αντίστροφων συναρτήσεων ${f_1}^{-1}$, ${f_2}^{-1}$, τί συμπεραίνετε για τα πεδία ορισμού, τα σύνολα τιμών, τη μονοτονία και τη συνέχειά τους;

Αποδείξτε ότι, αν η g είναι οποιαδήποτε από τις ${f_1}^{-1}$, ${f_2}^{-1}$, τότε ισχύει $g(y)^2 - 2yg(y) - 1 = 0$ για κάθε $y \in (-\infty,+\infty)$.

Έστω $g : (-\infty,+\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $(-\infty,+\infty)$ ώστε να ισχύει $g(y)^2 - 2yg(y) - 1 = 0$ για κάθε $y \in (-\infty,+\infty)$. Αποδείξτε ότι είτε $g = {f_1}^{-1}$ είτε $g = {f_2}^{-1}$.

Βρείτε τους τύπους όλων των συναρτήσεων της άσκησης.

Λύση: Το ότι οι f_1, f_2 είναι γνησίως αύξουσες στα πεδία ορισμού τους αποδεικνύεται εύκολα με αλγεβρικό τρόπο. Από τα όρια των δύο συναρτήσεων στα άκρα των πεδίων ορισμού τους προκύπτει ότι έχουν και οι δύο το $(-\infty,+\infty)$ ως σύνολο τιμών. Άρα η ${f_1}^{-1} : (-\infty,+\infty) \to (-\infty, 0)$ έχει σύνολο τιμών το $(-\infty, 0)$ και η ${f_2}^{-1} : (-\infty,+\infty) \to (0,+\infty)$ έχει σύνολο τιμών το $(0,+\infty)$. Και οι δύο συναρτήσεις είναι γνησίως αύξουσες και συνεχείς στο $(-\infty,+\infty)$.

Έστω g οποιαδήποτε από τις ${f_1}^{-1}$, ${f_2}^{-1}$. Τότε για κάθε $y \in (-\infty,+\infty)$ θέτουμε $x = g(y)$ και έχουμε ότι $y = f_1(x)$ ή $y = f_2(x)$, οπότε, σε κάθε περίπτωση, είναι $y = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{x})$. Συνεπάγεται $x^2 - 2yx - 1 = 0$ και άρα $g(y)^2 - 2yg(y) - 1 = 0$.

Τώρα, έστω $g : (-\infty,+\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $(-\infty,+\infty)$ ώστε να ισχύει $g(y)^2 - 2yg(y) - 1 = 0$ για κάθε $y \in (-\infty,+\infty)$.
Είδαμε ότι για $y \in (-\infty,+\infty)$ οι αριθμοί $x_1 = {f_1}^{-1}(y)$, $x_2 = {f_2}^{-1}(y)$ είναι λύσεις της $x^2 - 2yx - 1 = 0$. Επίσης, είδαμε πιο πριν ότι $x_1 \in (-\infty, 0)$ και $x_2 \in (0,+\infty)$. Άρα $x_1 \neq x_2$ και, επομένως, οι x_1, x_2 είναι οι μόνες λύσεις της $x^2 - 2yx - 1 = 0$. Άρα $g(y) = x_1 = {f_1}^{-1}(y)$ ή $g(y) = x_2 = {f_2}^{-1}(y)$. Τώρα, επειδή ισχύει ${f_1}^{-1}(y) < {f_2}^{-1}(y)$ για κάθε $y \in (-\infty,+\infty)$, από το αποτέλεσμα της άσκησης 4.4.11 συνεπάγεται ότι είτε $g = {f_1}^{-1}$ είτε $g = {f_2}^{-1}$.
Οι λύσεις της $x^2 - 2yx - 1 = 0$ είναι οι $x_1 = y - \sqrt{y^2+1} < 0$ και $x_2 = y + \sqrt{y^2+1} > 0$ και άρα ${f_1}^{-1}(y) = y - \sqrt{y^2+1}$ και ${f_2}^{-1}(y) = y + \sqrt{y^2+1}$.

Άσκηση 4.5.12. *Έστω $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$ και $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ συνεχής στο (a,b).*

Έστω $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to b} f(x) = -\infty$. Σύμφωνα με την άσκηση 4.4.14, η f έχει μέγιστη τιμή στο (a,b). Αν u είναι η μέγιστη τιμή της f, αποδείξτε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $(-\infty, u]$.

Λύση: Επειδή ο u είναι η μέγιστη τιμή της f, το σύνολο τιμών της είναι $\subseteq (-\infty, u]$.
Αντιστρόφως, έστω $y \in (-\infty, u]$. Επειδή $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to b} f(x) = -\infty$, συνεπάγεται ότι υπάρχει $x_0 \in (a,b)$ ώστε $f(x_0) < y$. Επομένως, ο y βρίσκεται ανάμεσα σε δύο τιμές της f στο

(a,b) και άρα είναι τιμή της f. Άρα το $(-\infty,u]$ είναι υποσύνολο του συνόλου τιμών της f. Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $(-\infty,u]$.

Άσκηση 4.5.13. *Έστω $a,b\in\overline{\mathbb{R}}$, $a<b$ και $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ συνεχής στο (a,b). Έστω ότι υπάρχουν τα $A=\lim_{x\to a}f(x)\in\overline{\mathbb{R}}$, $B=\lim_{x\to b}f(x)\in\overline{\mathbb{R}}$ και $A<B$.*

Αποδείξτε ότι το διάστημα (A,B) περιέχεται στο σύνολο τιμών της f.

Αν ισχύει $A<f(x)<B$ για κάθε $x\in(a,b)$, αποδείξτε ότι η f έχει σύνολο τιμών το (A,B).

Αν ισχύει $f(x)<B$ για κάθε $x\in(a,b)$ και υπάρχει $x_0\in(a,b)$ ώστε $f(x_0)\leq A$, αποδείξτε ότι η f έχει ελάχιστη τιμή στο (a,b). Αν l είναι η ελάχιστη τιμή, αποδείξτε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $[l,B)$.

Λύση: Το πρώτο ερώτημα. Έστω $A<y<B$. Επειδή $\lim_{x\to a}f(x)=A$ και $\lim_{x\to b}f(x)=B$, συνεπάγεται ότι υπάρχουν $x_1,x_2\in(a.b)$ ώστε $f(x_1)<y<f(x_2)$. Άρα ο y βρίσκεται ανάμεσα σε δύο τιμές της f στο (a,b), οπότε ο y είναι τιμή της f στο (a,b). Επομένως, το διάστημα (A,B) περιέχεται στο σύνολο τιμών της f.

Το δεύτερο ερώτημα. Έστω ότι ισχύει $A<f(x)<B$ για κάθε $x\in(a,b)$. Τότε, φυσικά, το σύνολο τιμών της f περιέχεται στο (A,B), οπότε, συνδυάζοντας με το προηγούμενο αποτέλεσμα, συμπεραίνουμε ότι η f έχει σύνολο τιμών το διάστημα (A,B).

Το τρίτο ερώτημα. Έστω ότι ισχύει $f(x)<B$ για κάθε $x\in(a,b)$ και υπάρχει $x_0\in(a,b)$ ώστε $f(x_0)\leq A$.

Πρώτη περίπτωση. Έστω ότι ισχύει $f(x)\geq f(x_0)$ για κάθε $x\in(a,b)$. Τότε ο $f(x_0)$ είναι η ελάχιστη τιμή της f, δηλαδή $l=f(x_0)$. Τώρα, επειδή ισχύει $l\leq f(x)<B$ για κάθε $x\in(a,b)$, συνεπάγεται ότι το σύνολο τιμών της f περιέχεται στο διάστημα $[l,B)$.

Αντιστρόφως, έστω $y\in[l,B)$. Επειδή, $\lim_{x\to b}f(x)=B$, υπάρχει $x_1\in(a,b)$ ώστε $y<f(x_1)$. Άρα ο y βρίσκεται ανάμεσα σε δύο τιμές της f στο (a,b), οπότε ο y είναι τιμή της f στο (a,b). Επομένως, το διάστημα $[l,B)$ περιέχεται στο σύνολο τιμών της f.

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι ίσο με το $[l,B)$.

Δεύτερη περίπτωση. Έστω ότι υπάρχει $x_1\in(a,b)$ ώστε $f(x_1)<f(x_0)$, οπότε $f(x_1)<A<B$. Τώρα, από το αποτέλεσμα της άσκησης 4.4.14 συνεπάγεται ότι η f έχει ελάχιστη τιμή, έστω l, στο (a,b) και, όπως στην πρώτη περίπτωση, συμπεραίνουμε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα $[l,B)$.

Άσκηση 4.6.1. *Αποδείξτε ότι η $f(x)=\begin{cases}0, & \text{αν } 0\leq x<1\\ 1, & \text{αν } 1<x\leq 2\end{cases}$ είναι συνεχής στο $[0,1)\cup(1,2]$ αλλά όχι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0,1)\cup(1,2]$.*

Λύση: Η f είναι, προφανώς, συνεχής σε κάθε σημείο του $[0,1)\cup(1,2]$. Πράγματι, για κάθε x στο $[0,1)\cup(1,2]$ η f είναι σταθερή σε κάποιο κατάλληλα μικρό ανοικτό διάστημα το οποίο περιέχει το x, οπότε είναι συνεχής στο x.

Τώρα, έστω (για άτοπο) ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0,1)\cup(1,2]$.

Θεωρούμε οποιοδήποτε ϵ με $0<\epsilon\leq 1$. Τότε υπάρχει κάποιος $\delta>0$ ώστε

$$x',x''\in[0,1)\cup(1,2], |x'-x''|<\delta \quad\Rightarrow\quad |f(x')-f(x'')|<1.$$

Παίρνουμε $x'=1-\frac{\delta}{4}$, $x''=1+\frac{\delta}{4}$, οπότε $|x'-x''|=\frac{\delta}{2}<\delta$, αλλά $|f(x')-f(x'')|=1\geq\epsilon$. Καταλήγουμε σε άτοπο, οπότε η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0,1)\cup(1,2]$.

Άσκηση 4.6.2. *Αποδείξτε ότι η $|x|$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$, ότι η $\sqrt{x}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0,+\infty)$ και ότι η $\frac{1}{x}$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0,+\infty)$.*

Λύση: Η πρώτη συνάρτηση. Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε ότι $||x'|-|x''||\leq|x'-x''|$. Έστω $\epsilon>0$. Θεωρούμε οποιονδήποτε δ με $0<\delta\leq\epsilon$ και τότε

$$|x'-x''|<\delta \;\Rightarrow\; |x'-x''|<\epsilon \;\Rightarrow\; ||x'|-|x''||<\epsilon.$$

Άρα η $|x|$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Η δεύτερη συνάρτηση. Για $x', x'' \geq 0$ χρησιμοποιούμε την ανισότητα $|\sqrt{x'} - \sqrt{x''}| \leq \sqrt{|x' - x''|}$, η οποία αποδεικνύεται εύκολα υψώνοντας και τις δύο μεριές της στο τετράγωνο.
Έστω $\epsilon > 0$. Τότε για $x', x'' \geq 0$ έχουμε

$$\left|\sqrt{x'} - \sqrt{x''}\right| < \epsilon \;\Leftarrow\; \sqrt{|x' - x''|} < \epsilon \;\Leftarrow\; |x' - x''| < \epsilon^2.$$

Τώρα παίρνουμε οποιονδήποτε δ με $0 < \delta \leq \epsilon^2$ και τότε για $x', x'' \geq 0$ έχουμε

$$|x' - x''| < \delta \;\Rightarrow\; |x' - x''| < \epsilon^2 \;\Rightarrow\; \left|\sqrt{x'} - \sqrt{x''}\right| < \epsilon.$$

Άρα η $\sqrt{x}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, +\infty)$.
Η τρίτη συνάρτηση. Έστω ότι η $\frac{1}{x}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0, +\infty)$.
Τότε για $\epsilon = 1$ θα υπάρχει κάποιος $\delta > 0$ ώστε

$$x', x'' > 0, |x' - x''| < \delta \;\Rightarrow\; \left|\tfrac{1}{x'} - \tfrac{1}{x''}\right| < 1.$$

Παίρνουμε $x' = x > 0$ και $x'' = x + \frac{\delta}{2} > 0$ και έχουμε $|x' - x''| = \frac{\delta}{2} < \delta$. Άρα πρέπει να ισχύει $|\frac{1}{x'} - \frac{1}{x''}| < 1$ ή, ισοδύναμα, $\frac{\delta}{x(2x+\delta)} < 1$. Αυτό ισχύει για κάθε $x > 0$, αλλά αυτό είναι αδύνατο, διότι $\lim_{x \to 0+} \frac{\delta}{x(2x+\delta)} = +\infty$, οπότε υπάρχει $x > 0$ αρκετά κοντά στο 0 ώστε $\frac{\delta}{x(2x+\delta)} \geq 1$.
Άρα η $\frac{1}{x}$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0, +\infty)$.

Άσκηση 4.6.3. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\rho > 0$, $M > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x') - f(x'')| \leq M|x' - x''|^\rho$ για κάθε $x', x'' \in A$. Αποδείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A.*

Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $|x|$ ικανοποιεί την παραπάνω ανισότητα στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η x^2 ικανοποιεί την ίδια ανισότητα σε κάθε φραγμένο διάστημα $[a, b]$ αλλά όχι στο $\mathbb{R}$.

Λύση: Το πρώτο ερώτημα. Έστω ότι ισχύει $|f(x') - f(x'')| \leq M|x' - x''|^\rho$ για κάθε $x', x'' \in A$.
Παίρνουμε τυχόντα $\epsilon > 0$. Τότε η $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$ συνεπάγεται από την $M|x' - x''|^\rho < \epsilon$ και αυτή συνεπάγεται από την $|x' - x''| < (\frac{\epsilon}{M})^{1/\rho}$. Άρα, αν επιλέξουμε οποιονδήποτε δ ώστε $0 < \delta \leq (\frac{\epsilon}{M})^{1/\rho}$, τότε για κάθε $x', x'' \in A$ με $|x' - x''| < \delta$ ισχύει $|x' - x''| < (\frac{\epsilon}{M})^{1/\rho}$ και, επομένως, ισχύει $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$. Άρα η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A.
Η συνάρτηση $f(x) = |x|$ ικανοποιεί την $|f(x') - f(x'')| = ||x'| - |x''|| \leq |x' - x''|$ για κάθε x', x''.
Η συνάρτηση $f(x) = x^2$ στο διάστημα $[a, b]$ ικανοποιεί την $|f(x') - f(x'')| = |x' + x''||x' - x''| \leq M|x' - x''|$ για κάθε $x', x'' \in [a, b]$, όπου $M = \max\{-2a, 2b\}$. Πράγματι, για $x', x'' \in [a, b]$ ισχύει $x' + x'' \leq 2b \leq M$ και $x' + x'' \geq 2a \geq -M$.
Τώρα, έστω (για άτοπο) ότι υπάρχουν $\rho > 0$, $M > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x') - f(x'')| \leq M|x' - x''|^\rho$ για κάθε $x', x'' \in \mathbb{R}$. Συνεπάγεται ότι ισχύει $|x' + x''||x' - x''|^{1-\rho} \leq M$ για κάθε $x', x'' \in \mathbb{R}$. Παίρνοντας $x' = 1 + \frac{1}{n}$ και $x'' = 1$ για $n \in \mathbb{N}$, έχουμε ότι ισχύει $(2 + \frac{1}{n})(\frac{1}{n})^{1-\rho} \leq M$ για κάθε n. Συνεπάγεται $\rho \leq 1$ (διότι, αν $\rho > 1$, τότε το όριο του $(2 + \frac{1}{n})(\frac{1}{n})^{1-\rho}$ είναι $+\infty$). Παίρνοντας $x' = n$ και $x'' = 0$ για $n \in \mathbb{N}$, έχουμε ότι ισχύει $n^{2-\rho} \leq M$ για κάθε n. Συνεπάγεται $\rho \geq 2$ (διότι, αν $\rho < 2$, τότε το όριο του $n^{2-\rho}$ είναι $+\infty$). Από τις $\rho \leq 1$ και $\rho \geq 2$ προκύπτει αντίφαση.

Άσκηση 4.6.4. *Έστω $A \subseteq B$, $f : B \to \mathbb{R}$. Αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο B, αποδείξτε ότι είναι ομοιόμορφα συνεχής και στο A.*

Λύση: Έστω ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο B.
Παίρνουμε τυχόντα $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$ για κάθε $x', x'' \in B$ με $|x' - x''| < \delta$. Επειδή $A \subseteq B$, συνεπάγεται ότι ισχύει $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$ για κάθε $x', x'' \in A$ με $|x' - x''| < \delta$.
Άρα η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A.

Άσκηση 4.6.5. *Έστω $f : A \to B$, $g : B \to \mathbb{R}$. Αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A και η g ομοιόμορφα συνεχής στο B, αποδείξτε ότι η $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A.*

Λύση: Έστω τυχών $\epsilon > 0$.
Επειδή η g είναι ομοιόμορφα συνεχής στο B, υπάρχει $\delta' > 0$ ώστε να ισχύει

$$|g(y') - g(y'')| < \epsilon \qquad \text{για κάθε } y', y'' \in B \text{ με } |y' - y''| < \delta'. \tag{14.59}$$

Επίσης, επειδή η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A, για τον ίδιο δ' υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει

$$|f(x') - f(x'')| < \delta' \qquad \text{για κάθε } x', x'' \in A \text{ με } |x' - x''| < \delta. \tag{14.60}$$

Από την (14.60) και την (14.59) με $y' = f(x')$ και $y'' = f(x'')$ (και επειδή $f(x'), f(x'') \in B$) συνεπάγεται ότι για κάθε $x', x'' \in A$ με $|x' - x''| < \delta$ ισχύει $|g(f(x')) - g(f(x''))| < \epsilon$ και, επομένως, $|(g \circ f)(x') - (g \circ f)(x'')| < \epsilon$.
Άρα η $g \circ f$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A.

Άσκηση 4.6.7. *Έστω δύο γειτονικά διαστήματα I_1, I_2 με κοινό άκρο το οποίο ανήκει και στα δύο διαστήματα και $f : I_1 \cup I_2 \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής στο I_1 και στο I_2. Αποδείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο διάστημα $I_1 \cup I_2$.*

Λύση: Έστω $\epsilon > 0$.
Επειδή η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο I_1, υπάρχει $\delta_1 > 0$ ώστε

$$x', x'' \in I_1, |x' - x''| < \delta_1 \quad \Rightarrow \quad |f(x') - f(x'')| < \tfrac{\epsilon}{2}. \tag{14.61}$$

Ομοίως, επειδή η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο I_2, υπάρχει $\delta_2 > 0$ ώστε

$$x', x'' \in I_2, |x' - x''| < \delta_2 \quad \Rightarrow \quad |f(x') - f(x'')| < \tfrac{\epsilon}{2}. \tag{14.62}$$

Τώρα, θεωρούμε τον $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$, οπότε $\delta \le \delta_1$ και $\delta \le \delta_2$.
Και τώρα έστω δύο οποιοιδήποτε x', x'' στο $I_1 \cup I_2$ με $|x' - x''| < \delta$.
Έχουμε τρεις περιπτώσεις για τις θέσεις των x', x''.
Αν $x', x'' \in I_1$, τότε από την (14.61) και από την $\delta \le \delta_1$ συνεπάγεται $|f(x') - f(x'')| < \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$.
Αν $x', x'' \in I_2$, τότε από την (14.62) και από την $\delta \le \delta_2$ συνεπάγεται $|f(x') - f(x'')| < \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$.
Τέλος, έστω $x' \in I_1$, $x'' \in I_2$. (Η περίπτωση $x'' \in I_1$, $x' \in I_2$ είναι ίδια.) Έστω x_0 το κοινό άκρο των I_1, I_2. Τότε ο x_0 είναι ανάμεσα στους x', x'' και, επειδή $|x' - x''| < \delta$, έχουμε $|x' - x_0| < \delta$ και $|x'' - x_0| < \delta$, οπότε από τις δύο προηγούμενες περιπτώσεις έχουμε $|f(x') - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{2}$ και $|f(x'') - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{2}$. Από την τριγωνική ανισότητα συνεπάγεται $|f(x') - f(x'')| \le \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$.
Άρα, σε κάθε περίπτωση,

$$x', x'' \in I_1 \cup I_2, |x' - x''| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x') - f(x'')| < \epsilon$$

και η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο διάστημα $I_1 \cup I_2$.

Άσκηση 4.6.9. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A αν και μόνο αν για κάθε δύο ακολουθίες $({x_n}')$, $({x_n}'')$ στο A με ${x_n}' - {x_n}'' \to 0$ ισχύει $f({x_n}') - f({x_n}'') \to 0$.*

Λύση: Έστω ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο .
Θεωρούμε τυχούσες ακολουθίες $({x_n}')$ και $({x_n}'')$ στο A με ${x_n}' - {x_n}'' \to 0$.
Παίρνουμε τυχόντα $\epsilon > 0$, οπότε, λόγω της ομοιόμορφης συνέχειας της f στο A, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει

$$|f(x') - f(x'')| < \epsilon \qquad \text{για κάθε } x', x'' \in A \text{ με } |x' - x''| < \delta. \tag{14.63}$$

Επίσης, επειδή ${x_n}' - {x_n}'' \to 0$, για τον ίδιο δ υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει

$$|{x_n}' - {x_n}''| < \delta \qquad \text{για κάθε } n \ge n_0. \tag{14.64}$$

Από την (14.64) και την (14.63) με $x' = {x_n}'$ και $x'' = {x_n}''$ συνεπάγεται ότι για κάθε $n \ge n_0$ ισχύει $|f({x_n}') - f({x_n}'')| < \epsilon$.

Άρα $f({x_n}') - f({x_n}'') \to 0$.
Αντιστρόφως, έστω ότι για κάθε δύο ακολουθίες $({x_n}')$ και $({x_n}'')$ στο A με ${x_n}' - {x_n}'' \to 0$ ισχύει $f({x_n}') - f({x_n}'') \to 0$.
Έστω ότι η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει κάποιος $\epsilon > 0$ ώστε για κάθε $\delta > 0$ να υπάρχουν $x', x'' \in A$ με $|x' - x''| < \delta$ και $|f(x') - f(x'')| \geq \epsilon$.
Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχουν ${x_n}', {x_n}'' \in A$ ώστε $|{x_n}' - {x_n}''| < \frac{1}{n}$ και $|f({x_n}') - f({x_n}'')| \geq \epsilon$.
Επομένως, υπάρχουν δύο ακολουθίες στο A, οι $({x_n}')$ και $({x_n}'')$, για τις οποίες ισχύει ${x_n}' - {x_n}'' \to 0$ και $|f({x_n}') - f({x_n}'')| \geq \epsilon$ για κάθε n. Αυτό αντιφάσκει με την υπόθεσή μας, διότι θα πρέπει να ισχύει $f({x_n}') - f({x_n}'') \to 0$, και καταλήγουμε σε άτοπο.
Άρα η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A.

Άσκηση 4.6.10. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής στο A. Αν η (x_n) στο A είναι ακολουθία Cauchy, αποδείξτε ότι η $(f(x_n))$ είναι κι αυτή ακολουθία Cauchy.*
Τί μπορούμε να συμπεράνουμε από τη συνάρτηση x^2 σχετικά με το αντίστροφο;

Λύση: Έστω τυχών $\epsilon > 0$.
Επειδή η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει

$$|f(x') - f(x'')| < \epsilon \qquad \text{για κάθε } x', x'' \in A \text{ με } |x' - x''| < \delta. \tag{14.65}$$

Επίσης, επειδή η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy, για τον ίδιο δ υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει

$$|x_n - x_m| < \delta \qquad \text{για κάθε } n, m \geq n_0. \tag{14.66}$$

Από την (14.66) και την (14.65) με $x' = x_n$ και $x'' = x_m$ συνεπάγεται ότι για κάθε $n, m \geq n_0$ ισχύει $|f(x_n) - f(x_m)| < \epsilon$.
Άρα η $(f(x_n))$ είναι ακολουθία Cauchy.
Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^2$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$. Όμως, έχει την ιδιότητα: αν η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy, τότε η $(f(x_n))$ είναι κι αυτή ακολουθία Cauchy. Δηλαδή, δεν ισχύει το αντίστροφο του πρώτου αποτελέσματος.
Πράγματι, αν η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy, τότε συγκλίνει, οπότε και η $\big(f(x_n)\big) = ({x_n}^2)$ συγκλίνει και άρα είναι ακολουθία Cauchy.

Άσκηση 4.6.11. *Έστω $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ και $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b)$.*
Αποδείξτε ότι, αν υπάρχει το $\lim_{x\to b} f(x)$ και είναι αριθμός, τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a, b)$.
Αποδείξτε ότι, αν, επιπλέον, $b \in \mathbb{R}$ και αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a, b)$, τότε υπάρχει το $\lim_{x\to b} f(x)$ και είναι αριθμός.
Αποδείξτε ότι, αν, επιπλέον, $b \in \mathbb{R}$, τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a, b)$ αν και μόνο αν υπάρχει $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b]$ ώστε να ισχύει $g(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [a, b)$.

Λύση: Το πρώτο ερώτημα. Έστω $\lim_{x\to b} f(x) = \eta \in \mathbb{R}$.
Έστω τυχών $\epsilon > 0$.
Τότε υπάρχει $c \in (a, b)$ ώστε να ισχύει

$$|f(x) - \eta| < \tfrac{\epsilon}{4} \qquad \text{για κάθε } x \in [c, b). \tag{14.67}$$

Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a, c]$ οπότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει

$$|f(x') - f(x'')| < \tfrac{\epsilon}{4} \qquad \text{για κάθε } x', x'' \in [a, c] \text{ με } |x' - x''| < \delta. \tag{14.68}$$

Τώρα έστω $x', x'' \in [a, b)$ με $|x' - x''| < \delta$.
Αν $x', x'' \in [a, c]$, από την (14.68) συνεπάγεται $|f(x') - f(x'')| < \frac{\epsilon}{4} < \epsilon$.
Αν $x', x'' \in [c, b)$, από την (14.67) συνεπάγεται $|f(x') - f(x'')| \leq |f(x') - \eta| + |f(x'') - \eta| < \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$.

Τέλος, έστω $x' \in [a,c]$, $x'' \in [c,b)$. (Η περίπτωση $x'' \in [a,c]$, $x' \in [c,b)$ είναι ίδια.) Τότε ο c είναι ανάμεσα στους x', x'' και, επειδή $|x'-x''| < \delta$, έχουμε $|x'-c| < \delta$, οπότε από τις δύο προηγούμενες περιπτώσεις έχουμε $|f(x')-f(c)| < \frac{\epsilon}{4}$ και $|f(x'')-f(c)| < \frac{\epsilon}{2}$. Από την τριγωνική ανισότητα συνεπάγεται $|f(x')-f(x'')| \leq \frac{\epsilon}{4}+\frac{\epsilon}{2} < \epsilon$.
Άρα, σε κάθε περίπτωση, ισχύει

$$|f(x')-f(x'')| < \epsilon \qquad \text{για κάθε } x', x'' \in [a,b) \text{ με } |x'-x''| < \delta$$

και η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a,b)$.

Το δεύτερο ερώτημα. Έστω ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a,b)$.
Θεωρούμε τυχούσα ακολουθία (x_n) στο $[a,b)$ με $x_n \to b$. Επειδή $b \in \mathbb{R}$, η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy. Από το αποτέλεσμα της άσκησης 4.6.10 συνεπάγεται ότι η ακολουθία $\big((f(x_n)\big)$ είναι ακολουθία Cauchy και, επομένως, συγκλίνει. Δηλαδή, υπάρχει $\eta \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x_n) \to \eta$.
Τώρα, από το θεώρημα 3.1 συνεπάγεται ότι υπάρχει το $\lim_{x\to b} f(x)$ και είναι αριθμός.

Το τρίτο ερώτημα. Έστω ότι υπάρχει $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b]$ ώστε να ισχύει $g(x) = f(x)$ στο $[a,b)$. Τότε η g είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a,b]$, οπότε, σύμφωνα με το αποτέλεσμα της άσκησης 4.6.4, η g και, επομένως, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a,b)$.
Αντιστρόφως, έστω ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a,b)$. Βάσει του αποτελέσματος του δεύτερου ερωτήματος, υπάρχει το $\eta = \lim_{x\to b} f(x)$ και είναι αριθμός.
Αν ορίσουμε $g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{αν } x \in [a,b) \\ \eta, & \text{αν } x = b \end{cases}$ τότε η g είναι συνεχής στο $[a,b]$. Πράγματι, είναι $\lim_{x\to b} g(x) = \lim_{x\to b} f(x) = \eta = g(b)$.

Άσκηση 4.6.12. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $\mathbb{R}$ και περιοδική. Δηλαδή υπάρχει $\tau > 0$ ώστε να ισχύει $f(x+\tau) = f(x)$ για κάθε x. Αποδείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.*

Λύση: Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, 2\tau]$.
Έστω τυχών $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x')-f(x'')| < \epsilon$ για κάθε $x', x'' \in [0,2\tau]$ με $|x'-x''| < \delta$.
Ορίζουμε τον $\delta_1 = \min\{\delta, \tau\} > 0$ και παίρνουμε οποιουσδήποτε x', x'' με $|x'-x''| < \delta_1$.
Έστω $x' \leq x''$. Τότε υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$ ώστε

$$k\tau \leq x' < (k+1)\tau$$

και, επομένως,

$$k\tau \leq x'' < x' + \delta_1 \leq (k+1)\tau + \tau = (k+2)\tau.$$

Επομένως, αν ορίσουμε $t' = x' - k\tau$, $t'' = x'' - k\tau$, τότε είναι $x', x'' \in [0, 2\tau]$ και $|t'-t''| < \delta$.
Συνεπάγεται $|f(t')-f(t'')| < \epsilon$ και άρα $|f(x')-f(x'')| < \epsilon$.

Άσκηση 4.6.14. *Έστω $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής στο $[0,+\infty)$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν $a, b \geq 0$ ώστε να ισχύει $|f(x)| \leq ax+b$ για κάθε $x \geq 0$.*

Λύση: Θεωρούμε έναν $\delta > 0$ που να αντιστοιχεί στον $\epsilon = 1$ βάσει του ορισμού της ομοιόμορφης συνέχειας.
Τότε είναι $|f(\delta)| \leq |f(\delta)-f(0)| + |f(0)| \leq 1 + |f(0)|$. Κατόπιν είναι $|f(2\delta)| \leq |f(2\delta)-f(\delta)| + |f(\delta)| \leq 2 + |f(0)|$ και, γενικότερα, βλέπουμε εύκολα με την αρχή της επαγωγής ότι ισχύει

$$|f(n\delta)| \leq n + |f(0)| \qquad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Τώρα, για κάθε $x \in [0,+\infty)$ θέτουμε $n = [\frac{x}{\delta}]$, και τότε έχουμε $n\delta \leq x < (n+1)\delta$, οπότε $|x-n\delta| < \delta$ και άρα

$$|f(x)| \leq |f(n\delta)| + |f(x)-f(n\delta)| \leq n + |f(0)| + 1 \leq \tfrac{1}{\delta}x + |f(0)| + 1.$$

Άρα ισχύει $|f(x)| \leq ax+b$ για κάθε $x \geq 0$ με $a = \frac{1}{\delta}$ και $b = |f(0)|+1$.

Άσκηση 4.6.15. *Έστω $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, +\infty)$.*
[α] *Αν ισχύει $f(x + n) \to 0$ για κάθε $x \geq 0$, αποδείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.*
Μπορείτε να βρείτε $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχή στο $[0, +\infty)$ έτσι ώστε να ισχύει $f(x + n) \to 0$ για κάθε $x \geq 0$, αλλά να μην ισχύει $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$;
[β] *Αν υπάρχει ακολουθία (x_n) ώστε $x_n \to +\infty$ και $x_{n+1} - x_n \to 0$ και $f(x_n) \to 0$, αποδείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Μπορείτε να υποδείξετε μια ακολουθία (x_n) τέτοια ώστε $x_n \to +\infty$ και $x_{n+1} - x_n \to 0$;*
Μπορείτε να βρείτε $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχή στο $[0, +\infty)$ και ακολουθία (x_n) έτσι ώστε $x_n \to +\infty$ και $x_{n+1} - x_n \to 0$ και $f(x_n) \to 0$, αλλά να μην ισχύει $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$;

Λύση: [α] *Το πρώτο ερώτημα.* Έστω τυχών $\epsilon > 0$. Επειδή η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, +\infty)$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει

$$|f(x') - f(x'')| < \tfrac{\epsilon}{2} \qquad \text{για κάθε } x', x'' \geq 0 \text{ με } |x' - x''| < \delta. \tag{14.69}$$

Θεωρούμε αριθμούς $x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}, x_m$ έτσι ώστε $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{m-1} < x_m = 1$ και η απόσταση οποιωνδήποτε δύο διαδοχικών από αυτούς να είναι $< \delta$.
Τότε για κάθε $k = 0, 1, \ldots m - 1, m$ έχουμε ότι $f(x_k + n) \to 0$, οπότε υπάρχει κάποιος αντίστοιχος n_k έτσι ώστε να ισχύει $|f(x_k + n)| < \frac{\epsilon}{2}$ για κάθε $n \geq n_k$.
Ορίζουμε $n' = \max\{n_0, n_1, \ldots, n_{m-1}, n_m\}$ και τότε ισχύει

$$|f(x_k + n)| < \tfrac{\epsilon}{2} \qquad \text{για κάθε } n \geq n' \text{ και κάθε } k = 0, 1, \ldots, m - 1, m. \tag{14.70}$$

Τώρα, έστω $x \geq n'$.
Θέτουμε $n = [x]$ και τότε είναι $n \geq n'$ και $n \leq x < n + 1$. Συνεπάγεται ότι $x - n \in [0, 1)$, οπότε ο $x - n$ βρίσκεται ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς από τους $x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}, x_m$. Δηλαδή, ισχύει $|(x - n) - x_k| < \delta$ ή, ισοδύναμα, $|x - (x_k + n)| < \delta$ για κάποιον $k = 0, 1, \ldots m - 1, m$. Σε συνδυασμό με το ότι $n \geq n'$, από την (14.69) και την (14.70) συνεπάγεται

$$|f(x)| \leq |f(x) - f(x_k + n)| + |f(x_k + n)| < \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Άρα ισχύει $|f(x)| < \epsilon$ για κάθε $x \geq n'$ και, επομένως, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
Το δεύτερο ερώτημα. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ η οποία για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ με $n \geq 0$ στο διάστημα $[n, n + 1]$ έχει τύπο $f(x) = (x - n)^{n+1}\big(1 - (x - n)^{n+1}\big)$. Με άλλα λόγια, η f έχει τύπο

$$f(x) = (x - [x])^{[x]+1}\big(1 - (x - [x])^{[x]+1}\big) \qquad \text{για } x \geq 0.$$

Η f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ διότι είναι συνεχής σε κάθε διάστημα $[n, n+1]$ και είναι $f(n) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ με $n \geq 0$.
Για κάθε $x \geq 0$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι $[x + n] = [x] + n$, οπότε $(x + n) - [x + n] = x - [x]$ και άρα

$$\begin{aligned} f(x + n) &= ((x + n) - [x + n])^{[x+n]+1}\big(1 - ((x + n) - [x + n])^{[x+n]+1}\big) \\ &= (x - [x])^{[x]+n+1}\big(1 - (x - [x])^{[x]+n+1}\big) \to 0, \end{aligned}$$

διότι $0 \leq x - [x] < 1$ και $[x] + n + 1 \to +\infty$.
Όμως, δεν ισχύει $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Πράγματι, για την ακολουθία με τύπο $x_n = n + \sqrt[n+1]{\frac{1}{2}}$ έχουμε ότι $x_n \to +\infty$ αλλά $f(x_n) = \frac{1}{4} \to \frac{1}{4}$.
[β] *Το πρώτο ερώτημα.* Έστω τυχών ϵ. Τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει η (14.69).
Επίσης, υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει

$$|x_{n+1} - x_n| < \delta \quad \text{και} \quad |f(x_n)| < \tfrac{\epsilon}{2} \qquad \text{για κάθε } n \geq n_0. \tag{14.71}$$

Τώρα, έστω $x \geq x_{n_0}$.
Επειδή $x_n \to +\infty$, υπάρχει κάποιος $n_1 > n_0$ έτσι ώστε να είναι $x < x_{n_1}$. Τώρα είναι εύκολο να δούμε ότι υπάρχει $n \geq n_0$ έτσι ώστε $x_n \leq x < x_{n+1}$. Πράγματι, έχουμε $x_{n_0} \leq x < x_{n_1}$ οπότε υπάρχει κάποιος μέγιστος n ανάμεσα στους n_0 και $n_1 - 1$ έτσι ώστε να είναι $x_n \leq x$. Τότε, αυτομάτως είναι $x < x_{n+1}$.
Υπάρχει, λοιπόν, $n \geq n_0$ ώστε $x_n \leq x < x_{n+1}$, οπότε από την (14.71) συνεπάγεται $|x - x_n| < |x_{n+1} - x_n| < \delta$. Τώρα από τις (14.69) και (14.71) συνεπάγεται

$$|f(x)| \leq |f(x) - f(x_n)| + |f(x_n)| < \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Άρα ισχύει $|f(x)| < \epsilon$ για κάθε $x \geq x_{n_0}$ και, επομένως, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
Παράδειγμα ακολουθίας (x_n) στο $[0, +\infty)$ με $x_n \to +\infty$ και $x_{n+1} - x_n \to 0$ είναι η ακολουθία με τύπο $x_n = \log n$ αλλά και η ακολουθία με τύπο $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.
Το δεύτερο ερώτημα. Θεωρούμε τη συνάρτηση με τύπο $f(x) = \sin(\pi e^x)$ και την ακολουθία με τύπο $x_n = \log n$.
Η f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ και ισχύει $x_n \to +\infty$ και $x_{n+1} - x_n \to 0$ και $f(x_n) = 0 \to 0$.
Όμως, δεν ισχύει $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Πράγματι, για την ακολουθία με τύπο ${x_n}' = \log(2n + \frac{1}{2})$ έχουμε ότι ${x_n}' \to +\infty$ αλλά $f({x_n}') = 1 \to 1$.

Άσκηση 4.6.16. *Έστω φραγμένο σύνολο A και $f : A \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής στο A. Αποδείξτε ότι η f είναι φραγμένη.*

Λύση: Θεωρούμε έναν $\delta > 0$ που να αντιστοιχεί στον $\epsilon = 1$ βάσει του ορισμού της ομοιόμορφης συνέχειας.
Το A είναι φραγμένο, οπότε υπάρχει διάστημα $[a, b]$ ώστε $A \subseteq [a, b]$. Χωρίζουμε το $[a, b]$ σε πεπερασμένα διαδοχικά υποδιαστήματα μήκους $< \delta$ και σε οποιοδήποτε από αυτά τα υποδιαστήματα τέμνει το A θεωρούμε ένα αντίστοιχο σημείο του A. Έτσι βρίσκουμε $x_1, \ldots, x_n \in A$ ώστε: για κάθε $x \in A$ υπάρχει $k = 1, \ldots, n$ ώστε $|x - x_k| < \delta$.
Τέλος, θεωρούμε τον $M = \max\{|f(x_1)|, \ldots, |f(x_n)|\}$.
Τότε για κάθε $x \in A$ υπάρχει $k = 1, \ldots, n$ ώστε $|x - x_k| < \delta$ και άρα

$$|f(x)| \leq |f(x) - f(x_k)| + |f(x_k)| \leq 1 + M.$$

Άσκηση 4.6.17. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μονότονη, συνεχής και φραγμένη στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.*

Υπόδειξη: Θεωρήστε $l, u \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $l \leq f(x) \leq u$ για κάθε x και έστω τυχών $\epsilon > 0$. Χωρίστε το $[l, u]$ σε διαδοχικά διαστήματα μήκους μικρότερου από $\frac{\epsilon}{2}$ και πάρτε μία τιμή της f από κάθε διάστημα το οποίο έχει μη-κενή τομή με το σύνολο τιμών της f. Διατάξτε τις τιμές αυτές: $y_1 < \ldots < y_n$. Θεωρήστε $x_1 < \ldots < x_n$ ώστε $y_1 = f(x_1), \ldots, y_n = f(x_n)$. Αν ο $\delta > 0$ είναι μικρότερος από όλες τις διαφορές $x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_{n-1}$, αποδείξτε ότι ισχύει $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$ για κάθε x', x'' με $|x' - x''| < \delta$.

Άσκηση 4.6.18. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $\epsilon > 0$. Ένας τ χαρακτηρίζεται ϵ-σχεδόν περίοδος της f αν ισχύει $|f(\tau + x) - f(x)| < \epsilon$ για κάθε x.*

Μια συνεχής $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ χαρακτηρίζεται σχεδόν περιοδική αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $L > 0$ ώστε σε κάθε διάστημα μήκους L να υπάρχει τουλάχιστον μία ϵ-σχεδόν περίοδος της f.

Αποδείξτε ότι, αν ο τ_1 είναι ϵ_1-σχεδόν περίοδος της f και ο τ_2 είναι ϵ_2-σχεδόν περίοδος της f, τότε ο $\tau_1 + \tau_2$ είναι $(\epsilon_1 + \epsilon_2)$-σχεδόν περίοδος της f.

Αποδείξτε ότι κάθε συνεχής περιοδική συνάρτηση είναι σχεδόν περιοδική.

Αποδείξτε ότι κάθε σχεδόν περιοδική συνάρτηση είναι φραγμένη και ομοιόμορφα συνεχής.

Αποδείξτε ότι, αν οι $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι σχεδόν περιοδικές, τότε και η $f + g$ είναι σχεδόν περιοδική.

Η συνάρτηση $\sin x$ είναι περιοδική με περίοδο 2π. Αν ο a είναι άρρητος, αποδείξτε ότι η συνάρτηση $\sin x + \sin(ax)$ είναι σχεδόν περιοδική αλλά όχι περιοδική.

Λύση: Το πρώτο ερώτημα. Ισχύει $|f(\tau_1 + x) - f(x)| < \epsilon_1$ και $|f(\tau_2 + x) - f(x)| < \epsilon_2$ για κάθε x. Άρα ισχύει

$$|f((\tau_1 + \tau_2) + x) - f(x)| \leq |f(\tau_1 + \tau_2 + x) - f(\tau_2 + x)| + |f(\tau_2 + x) - f(x)| < \epsilon_1 + \epsilon_2$$

για κάθε x.

Το δεύτερο ερώτημα. Έστω ότι η f είναι συνεχής και περιοδική, οπότε υπάρχει $\tau > 0$ ώστε να ισχύει $f(x + \tau) = f(x)$ για κάθε x.
Τότε σε κάθε διάστημα $[a, b]$ μήκους τ (δηλαδή $b - a = \tau$) υπάρχει κάποιο ακέραιο πολλαπλάσιο του τ. Δηλαδή, υπάρχει $n \in \mathbb{Z}$ ώστε $a \leq n\tau \leq b$.
Τότε ο $n\tau$ είναι περίοδος της f και, επομένως, είναι ϵ-σχεδόν περίοδος της f. Πράγματι, ισχύει $|f(n\tau + x) - f(x)| = 0 < \epsilon$ για κάθε x.
Άρα σε κάθε διάστημα μήκους τ υπάρχει τουλάχιστον μία ϵ-σχεδόν περίοδος της f, οπότε (και επειδή η f είναι συνεχής) η f είναι σχεδόν περιοδική.

Το τρίτο ερώτημα. Έστω ότι η f είναι σχεδόν περιοδική.
Τότε υπάρχει $L > 0$ ώστε σε κάθε διάστημα μήκους L να υπάρχει τουλάχιστον μία 1-σχεδόν περίοδος της f.
Θεωρούμε το διάστημα $[-L, L]$. Η f είναι συνεχής, οπότε είναι φραγμένη στο $[-L, L]$, δηλαδή υπάρχει M ώστε να ισχύει

$$|f(x)| \leq M \qquad \text{για κάθε } x \in [-L, L]. \tag{14.72}$$

Τώρα έστω τυχών x. Τότε υπάρχει $n \in \mathbb{Z}$ ώστε $n \leq \frac{x}{L} < n + 1$, οπότε $x \in [nL, nL + L]$. Το διάστημα $[-nL - L, -nL]$ έχει μήκος L, οπότε υπάρχει τουλάχιστον μία 1-σχεδόν περίοδος της f στο $[-nL - L, -nL]$. Δηλαδή, υπάρχει $\tau \in [-nL - L, -nL]$ ώστε να ισχύει

$$|f(\tau + x) - f(x)| < 1. \tag{14.73}$$

Από το ότι $x \in [nL, nL + L]$ και το ότι $\tau \in [-nL - L, -nL]$ συνεπάγεται $(\tau + x) \in [-L, L]$, οπότε από την (14.72) έχουμε $|f(\tau + x)| \leq M$. Τώρα, από την (14.73) συνεπάγεται

$$|f(x)| \leq |f(\tau + x)| + |f(\tau + x) - f(x)| < M + 1.$$

Άρα ισχύει $|f(x)| \leq M + 1$ για κάθε x και, επομένως, η f είναι φραγμένη.
Τώρα, έστω τυχών $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $L > 0$ ώστε σε κάθε διάστημα μήκους L να υπάρχει τουλάχιστον μία $\frac{\epsilon}{3}$-σχεδόν περίοδος της f.
Θεωρούμε το διάστημα $[-L - 1, L + 1]$. Η f είναι συνεχής, οπότε είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[-L - 1, L + 1]$, δηλαδή υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει

$$|f(x') - f(x'')| < \tfrac{\epsilon}{3} \qquad \text{για κάθε } x', x'' \in [-L - 1, L + 1] \text{ με } |x' - x''| < \delta. \tag{14.74}$$

Θεωρούμε τον $\delta_1 = \min\{\delta, 1\}$, οπότε $\delta_1 \leq \delta$ και $\delta_1 \leq 1$.
Τώρα έστω τυχόντες x', x'' με $|x' - x''| < \delta_1 \leq 1$. Τότε υπάρχει $n \in \mathbb{Z}$ ώστε $n \leq \frac{x'}{L} < n + 1$, οπότε $x' \in [nL, nL + L]$. Το διάστημα $[-nL - L, -nL]$ έχει μήκος L, οπότε υπάρχει τουλάχιστον μία $\frac{\epsilon}{3}$-σχεδόν περίοδος της f στο $[-nL - L, -nL]$. Δηλαδή, υπάρχει $\tau \in [-nL - L, -nL]$ ώστε να ισχύει

$$|f(\tau + x') - f(x')| < \tfrac{\epsilon}{3}, \qquad |f(\tau + x'') - f(x'')| < \tfrac{\epsilon}{3}. \tag{14.75}$$

Από το ότι $x' \in [nL, nL + L]$ και το ότι $\tau \in [-nL - L, -nL]$ συνεπάγεται $(\tau + x') \in [-L, L]$, οπότε, επειδή $|(\tau + x') - (\tau + x'')| = |x' - x''| < 1$, συνεπάγεται $(\tau + x'') \in [-L - 1, L + 1]$. Άρα έχουμε $(\tau + x'), (\tau + x'') \in [-L - 1, L + 1]$ και $|(\tau + x') - (\tau + x'')| = |x' - x''| < \delta_1 \leq \delta$ και, επομένως, από την (14.74) συνεπάγεται

$$|f(\tau + x') - f(\tau + x'')| < \tfrac{\epsilon}{3}. \tag{14.76}$$

Από τις (14.75) και (14.76) συνεπάγεται

$$|f(x')-f(x'')| \leq |f(x')-f(\tau+x')|+|f(\tau+x')-f(\tau+x'')|+|f(\tau+x'')-f(x'')| < \tfrac{\epsilon}{3}+\tfrac{\epsilon}{3}+\tfrac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Άρα για κάθε x', x'' με $|x'-x''| < \delta_1$ ισχύει $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$, οπότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Το τέταρτο ερώτημα. Έστω ότι οι $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι σχεδόν περιοδικές.

Έστω τυχών $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει L_1 ώστε σε κάθε διάστημα μήκους L_1 να υπάρχει τουλάχιστον μία $\frac{\epsilon}{6}$-σχεδόν περίοδος της f και υπάρχει L_2 ώστε σε κάθε διάστημα μήκους L_2 να υπάρχει τουλάχιστον μία $\frac{\epsilon}{6}$-σχεδόν περίοδος της g. Θεωρούμε τον $L = \max\{L_1, L_2\}$ και τότε σε κάθε διάστημα μήκους L υπάρχει τουλάχιστον μία $\frac{\epsilon}{6}$-σχεδόν περίοδος της f και τουλάχιστον μία $\frac{\epsilon}{6}$-σχεδόν περίοδος της g.

Επειδή οι f, g είναι ομοιόμορφα συνεχείς, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει

$$|f(x') - f(x'')| < \tfrac{\epsilon}{6} \quad \text{και} \quad |g(x') - g(x'')| < \tfrac{\epsilon}{6} \qquad \text{για κάθε } x', x'' \text{ με } |x'-x''| < \delta. \tag{14.77}$$

Τώρα, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $2L < n\delta$, οπότε μπορούμε να χωρίσουμε το διάστημα $[-L, L]$ σε n υποδιαστήματα μήκους $< \delta$.

Καθένα από τα διαστήματα $[kL, (k+1)L]$, όπου $k \in \mathbb{Z}$, έχει μήκος L, οπότε περιέχει τουλάχιστον μία $\frac{\epsilon}{6}$-σχεδόν περίοδο της f και τουλάχιστον μία $\frac{\epsilon}{6}$-σχεδόν περίοδο της g. Έστω $\tau_{k,f}$ η αντίστοιχη $\frac{\epsilon}{6}$-σχεδόν περίοδος της f και $\tau_{k,g}$ η αντίστοιχη $\frac{\epsilon}{6}$-σχεδόν περίοδος της g. Τότε οι αριθμοί $\tau_{k,f} - \tau_{k,g}$ περιέχονται στο $[-L, L]$ και άρα σε κάποιο από τα n υποδιαστήματα μήκους $< \delta$ του $[-L, L]$, τα οποία αναφέρθηκαν προηγουμένως. Τώρα, έστω ότι m από τα n αυτά υποδιαστήματα του $[-L, L]$ περιέχουν τουλάχιστον έναν από τους αριθμούς $\tau_{k,f} - \tau_{k,g}$ και έστω $\tau_{k_1,f} - \tau_{k_1,g}\ \ldots, \tau_{k_m,f} - \tau_{k_m,g}$ οι αντίστοιχοι αριθμοί. Άρα για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ υπάρχει κάποιος k_j ώστε ο $\tau_{k,f} - \tau_{k,g}$ και ο $\tau_{k_j,f} - \tau_{k_j,g}$ να ανήκουν στο ίδιο υποδιάστημα μήκους $< \delta$ του $[-L, L]$ και, επομένως, να είναι

$$|(\tau_{k,f} - \tau_{k,g}) - (\tau_{k_j,f} - \tau_{k_j,g})| < \delta$$

ή, ισοδύναμα,

$$|(\tau_{k,f} - \tau_{k_j,f}) - (\tau_{k,g} - \tau_{k_j,g})| < \delta. \tag{14.78}$$

Αν ορίσουμε $\tau_f = \tau_{k,f} - \tau_{k_j,f}$ και $\tau_g = \tau_{k,g} - \tau_{k_j,g}$, τότε, σύμφωνα με το αποτέλεσμα του πρώτου ερωτήματος, ο τ_f είναι $\frac{\epsilon}{3}$-σχεδόν περίοδος της f και ο τ_g είναι $\frac{\epsilon}{3}$-σχεδόν περίοδος της g. Δηλαδή, ισχύει

$$|f(\tau_f + x) - f(x)| < \tfrac{\epsilon}{3} \quad \text{και} \quad |g(\tau_g + x) - g(x)| < \tfrac{\epsilon}{3} \qquad \text{για κάθε } x. \tag{14.79}$$

Επίσης, από την (14.78) έχουμε $|\tau_f - \tau_g| < \delta$ και άρα

$$|(\tau_f + x) - (\tau_g + x)| < \delta \qquad \text{για κάθε } x. \tag{14.80}$$

Τώρα, από τις (14.77), (14.79) και (14.80) συνεπάγεται

$$\begin{aligned}\big|(f(\tau_f + x) + g(\tau_f + x)) - (f(x) + g(x))\big| &\leq \big|(f(\tau_f + x) + g(\tau_g + x)) - (f(x) + g(x))\big| \\ &\quad + |g(\tau_f + x) - g(\tau_g + x)| \\ &< |f(\tau_f + x) - f(x)| + |g(\tau_g + x) - g(x)| + \tfrac{\epsilon}{6} \\ &< \tfrac{\epsilon}{3} + \tfrac{\epsilon}{3} + \tfrac{\epsilon}{3} = \epsilon.\end{aligned}$$

Άρα ο τ_f είναι ϵ-σχεδόν περίοδος της $f + g$.

Τέλος, ορίζουμε

$$T_1 = \min\{\tau_{k_1,f}, \ldots, \tau_{k_m,f}\}, \qquad T_2 = \max\{\tau_{k_1,f}, \ldots, \tau_{k_m,f}\}.$$

Έστω οποιοδήποτε διάστημα $[a, a+M]$ μήκους $M = 2L + T_2 - T_1$.
Τότε είναι $\frac{a+M+T_1}{L} - \frac{a+T_2}{L} = 2$, οπότε ανάμεσα στους αριθμούς $\frac{a+M+T_1}{L}$ και $\frac{a+T_2}{L}$ υπάρχουν τουλάχιστον δύο διαδοχικοί ακέραιοι. Δηλαδή υπάρχει ακέραιος k ώστε

$$\tfrac{a+T_2}{L} \leq k < k+1 \leq \tfrac{a+M+T_1}{L}.$$

Τότε είναι $a+T_2 \leq kL < (k+1)L \leq a+M+T_1$ και, επειδή $\tau_{k,f} \in [kL, (k+1)L]$, συνεπάγεται $a + T_2 \leq \tau_{k,f} \leq a + M + T_1$ και άρα

$$a \leq a + T_2 - \tau_{k_j,f} \leq \tau_{k,f} - \tau_{k_j,f} \leq a + M + T_1 - \tau_{k_j,f} \leq a + M$$

και άρα $a \leq \tau_f \leq a+M$. Άρα το διάστημα $[a, a+M]$ περιέχει τουλάχιστον μία ϵ-σχεδόν περίοδο της $f+g$.
Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει M ώστε κάθε διάστημα μήκους M να περιέχει τουλάχιστον μία ϵ-σχεδόν περίοδο της $f+g$. Επειδή η $f+g$ είναι και συνεχής (αφού οι f, g είναι συνεχείς), η $f+g$ είναι σχεδόν περιοδική.
Το πέμπτο ερώτημα. Η συνάρτηση $\sin x$ είναι περιοδική με περίοδο 2π και η $\sin(ax)$ είναι περιοδική με περίοδο $\frac{2\pi}{a}$. Άρα και οι δύο συναρτήσεις είναι σχεδόν περιοδικές, οπότε και η $\sin x + \sin(ax)$ είναι σχεδόν περιοδική.
Έστω (για άτοπο) ότι η $\sin x + \sin(ax)$ είναι περιοδική με περίοδο $T > 0$. Τότε για κάθε x ισχύει

$$\sin(x+T) + \sin(ax+aT) = \sin x + \sin(ax). \qquad (14.81)$$

Άρα ισχύει $\sin(x+h+T) + \sin(ax+ah+aT) = \sin(x+h) + \sin(ax+ah)$ για κάθε x, h και, αφαιρώντας τις δύο ταυτότητες, βρίσκουμε

$$2\sin\tfrac{h}{2}\cos\tfrac{2x+h+2T}{2} + 2\sin\tfrac{ah}{2}\cos\tfrac{2ax+ah+2aT}{2} = 2\sin\tfrac{h}{2}\cos\tfrac{2x+h}{2} + 2\sin\tfrac{ah}{2}\cos\tfrac{2ax+ah}{2}.$$

Διαιρούμε με $h \neq 0$ και παίρνουμε όριο όταν $h \to 0$ και βρίσκουμε

$$\cos(x+T) + a\cos(ax+aT) = \cos x + a\cos(ax). \qquad (14.82)$$

Ξαναγράφουμε $\cos(x+h+T)+a\cos(ax+ah+aT) = \cos(x+h)+\cos(ax+ah)$, ξαναααφαιρούμε τις δύο τελευταίες ισότητες, διαιρούμε με $h \neq 0$ και παίρνουμε όριο όταν $h \to 0$ και, όπως πριν, βρίσκουμε

$$\sin(x+T) + a^2\sin(ax+aT) = \sin x + a^2\sin(ax). \qquad (14.83)$$

Από τις (14.81) και (14.83) έχουμε

$$(a^2-1)\sin(x+T) = (a^2-1)\sin x$$

και, επειδή ο a είναι άρρητος, συνεπάγεται ότι ισχύει $\sin(x+T) = \sin x$ για κάθε x. Άρα $T = 2k\pi$ για κάποιον $k \in \mathbb{N}$. Τώρα η (14.81) με $x = 0$ συνεπάγεται $\sin T + \sin(aT) = 0$ και άρα $\sin(aT) = 0$. Άρα $aT = l\pi$ για κάποιον $l \in \mathbb{Z}$. Τότε, όμως, έχουμε $a = \frac{l}{2k} \in \mathbb{Q}$ και καταλήγουμε σε άτοπο.
Σχόλιο. Αν θεωρήσουμε δεδομένη την έννοια της παραγώγου, τότε βλέπουμε αμέσως ότι η (14.82) προκύπτει από την (14.81) με παραγώγιση της (14.81) ως προς τη μεταβλητή x. Με τον ίδιο τρόπο προκύπτει η (14.83) από την (14.82). Ο πολύ προσεκτικός αναγνώστης θα παρατηρήσει ότι οι μεταβάσεις από την (14.81) στην (14.82) και από την (14.82) στην (14.83) έγιναν με την εξής μέθοδο: πρώτα εισάγουμε μια νέα μεταβλητή h, μετά αφαιρούμε δύο εξισώσεις εκ των οποίων η μία περιέχει την h και η άλλη δεν περιέχει την h, κατόπιν διαιρούμε τη διαφορά με h και παίρνουμε όριο όταν $h \to 0$. Αυτή ακριβώς είναι η μέθοδος που εισάγει την έννοια της παραγώγου. Δηλαδή, ενσωματώσαμε στην απόδειξη την έννοια της παραγώγου χωρίς, όμως, να τήν κατονομάσουμε.

14.5 Κεφάλαιο 5.

Άσκηση 5.1.1. *Θεωρήστε τις συναρτήσεις* $f(x) = 3x^2 - 5x + 3$, $f(x) = \operatorname{sign} x$, $f(x) = x^2 \operatorname{sign} x$, $f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{αν } x \leq 0 \\ -3x, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$ $f(x) = \begin{cases} 2x^2, & \text{αν } x \leq 0 \\ -3x^2, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$ *Βρείτε, αν υπάρχουν, τις* $f'(0)$, $f'_+(0)$, $f'_-(0)$.

Λύση: Η πρώτη συνάρτηση.

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \tfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \tfrac{3x^2-5x}{x} = \lim_{x\to 0}(3x-5) = 0.$$

Η δεύτερη συνάρτηση.

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \tfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \tfrac{\operatorname{sign} x}{x} = \lim_{x\to 0} \tfrac{1}{|x|} = +\infty.$$

Η τρίτη συνάρτηση.

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \tfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \tfrac{x^2 \operatorname{sign} x}{x} = \lim_{x\to 0} x \operatorname{sign} x = \lim_{x\to 0} |x| = 0.$$

Η τέταρτη συνάρτηση.

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0-} \tfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0-} \tfrac{2x}{x} = \lim_{x\to 0-} 2 = 2,$$

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0+} \tfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0+} \tfrac{-3x}{x} = \lim_{x\to 0+}(-3) = -3.$$

Δεν υπάρχει η $f'(0)$.
Η πέμπτη συνάρτηση.

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0-} \tfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0-} \tfrac{2x^2}{x} = \lim_{x\to 0-} 2x = 0,$$

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0+} \tfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0+} \tfrac{-3x^2}{x} = \lim_{x\to 0+}(-3x) = 0.$$

Άρα $f'(0) = 0$.

Άσκηση 5.1.3. *Θεωρούμε την συνάρτηση με τύπο* $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x + 1, & \text{αν } x \leq 0 \\ ax + b, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$ *Βρείτε τα* a, b *ώστε να υπάρχει η* $f'(0)$.

Λύση: Θέλουμε να υπάρχει το όριο $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ ή, ισοδύναμα, να υπάρχουν τα αντίστοιχα πλευρικά όρια και να είναι ίσα.
Το αριστερό πλευρικό όριο είναι:

$$\lim_{x\to 0-} \tfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0-} \tfrac{2x^2+x+1-1}{x} = \lim_{x\to 0-}(2x+1) = 1.$$

Άρα θέλουμε το δεξιό πλευρικό όριο να είναι ίσο με 1. Δηλαδή,

$$\lim_{x\to 0+} \tfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1 \ \Leftrightarrow\ \lim_{x\to 0+} \tfrac{ax+b-1}{x} = 1 \ \Leftrightarrow\ \lim_{x\to 0+} \left(a + \tfrac{b-1}{x}\right) = 1.$$

Τώρα σκεφτόμαστε ότι το $\lim_{x\to 0+}(a + \frac{b-1}{x})$ είναι ίσο με $(b-1)(+\infty) = \pm\infty$, αν $b - 1 \neq 0$, και ίσο με a, αν $b - 1 = 0$. Άρα έχουμε, ισοδύναμα, $a = 1$ και $b = 1$.
Άρα η f έχει παράγωγο στο 0 αν και μόνο αν $a = b = 1$.

Άσκηση 5.1.4. *Έστω* $g : (a, \xi] \to \mathbb{R}$, $h : [\xi, b) \to \mathbb{R}$ *ώστε* $g(\xi) = h(\xi)$ *και* $g'(\xi) = h'(\xi)$ *και έστω η* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *με τύπο* $f(x) = \begin{cases} g(x), & \text{αν } a < x \leq \xi \\ h(x), & \text{αν } \xi \leq x < b \end{cases}$ *Αποδείξτε ότι* $f'(\xi) = g'(\xi) = h'(\xi)$.

Λύση: Επειδή ισχύει $f(x) = g(x)$ κοντά στον ξ από τα αριστερά του και επειδή $f(\xi) = g(\xi)$, έχουμε

$$f'_-(\xi) = \lim_{x\to\xi-} \tfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi-} \tfrac{g(x)-g(\xi)}{x-\xi} = g'(\xi).$$

Επίσης, επειδή ισχύει $f(x) = h(x)$ κοντά στον ξ από τα δεξιά του και επειδή $f(\xi) = h(\xi)$, έχουμε

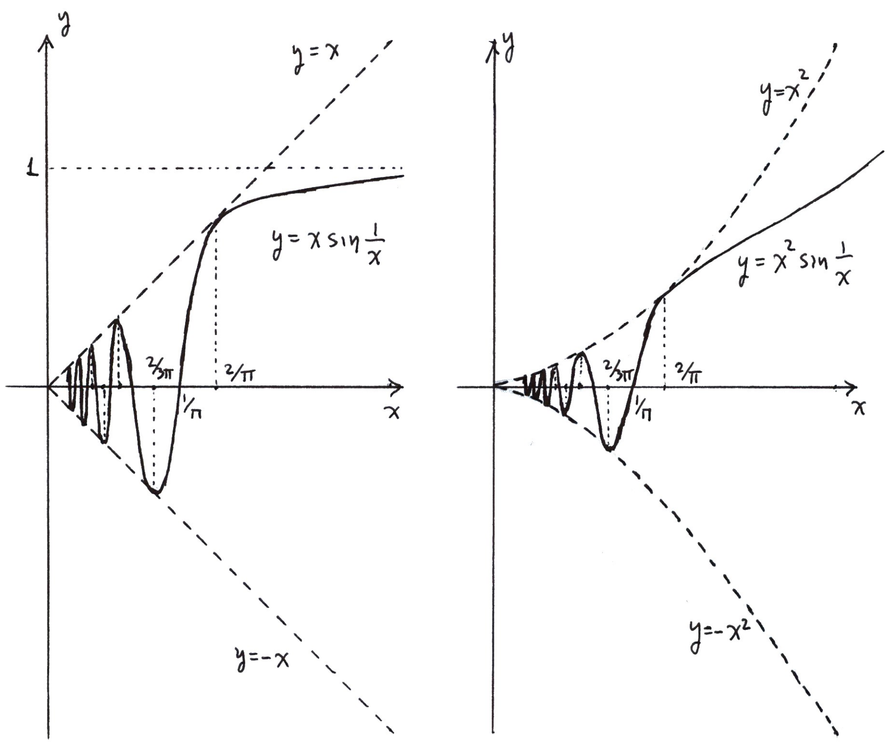
$$f'_+(\xi) = \lim_{x\to\xi+} \tfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi+} \tfrac{h(x)-h(\xi)}{x-\xi} = h'(\xi).$$

Τώρα, επειδή $g'(\xi) = h'(\xi)$, παίρνουμε ότι $f'_-(\xi) = g'(\xi) = h'(\xi) = f'_+(\xi)$ και άρα $f'(\xi) = g'(\xi) = h'(\xi)$.

Άσκηση 5.1.5. *Η συνάρτηση* $f(x) = \begin{cases} x\sin(1/x), & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ *του παραδείγματος 5.1.6 αν και συνεχής στον* 0*, δεν έχει πλευρικές παραγώγους στον* 0*. Σχεδιάστε το γράφημα της* f *και μελετήστε τη συμπεριφορά καθώς* $a \to 0+$ *της μεταβλητής ημιευθείας* $l_{a,+}$ *με κορυφή το σταθερό σημείο* $(0,0)$ *η οποία διέρχεται από το μεταβλητό σημείο* $(a, f(a))$*. Τείνει να ταυτιστεί η* $l_{a,+}$ *με κάποια ημιευθεία με κορυφή το σημείο* $(0,0)$*;*

Η $f(x) = \begin{cases} x^2\sin(1/x), & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ *του παραδείγματος 5.1.7 είναι συνεχής στον* 0 *και* $f'(0) = 0$*. Όπως πριν, μελετήστε τη συμπεριφορά καθώς* $a \to 0+$ *της ημιευθείας* $l_{a,+}$ *με κορυφή το σημείο* $(0,0)$ *η οποία διέρχεται από το μεταβλητό σημείο* $(a, f(a))$*.*

Λύση: Δείτε τα γραφήματα των δύο συναρτήσεων (για $x \geq 0$) στο σχήμα 39. Καλό θα ήταν να αντιπαραβάλετε με το γράφημα της $y = \sin\frac{1}{x}$ στο σχήμα 38 στην λύση της άσκησης 4.4.2.



Σχ 39

Η πρώτη συνάρτηση: Έστω $a > 0$. Η ημιευθεία $l_{a,+}$ με κορυφή το σημείο $(0,0)$ η οποία διέρχεται από το σημείο $(a, f(a))$ έχει κλίση ίση με $\frac{f(a)-f(0)}{a-0} = \frac{f(a)}{a} = \sin\frac{1}{a}$. Η εξίσωση της ημιευθείας αυτής είναι η

$$y = \left(\sin\tfrac{1}{a}\right) x, \quad x \geq 0.$$

Τώρα, έστω ότι όταν $a \to 0+$ η $l_{a,+}$ τείνει να ταυτιστεί με κάποια ημιευθεία l_+ με κορυφή το σημείο $(0,0)$. Έχουμε τρεις περιπτώσεις.
Αν η l_+ έχει πεπερασμένη κλίση λ, τότε η εξίσωσή της είναι η $y = \lambda x$, $x \geq 0$. Επειδή η $l_{a,+}$ τείνει να ταυτιστεί με την l_+, συνεπάγεται ότι η κλίση της $l_{a,+}$ τείνει στην κλίση της l_+ και άρα $\lim_{a\to 0+} \sin\frac{1}{a} = \lambda$. Όμως, το $\lim_{a\to 0+} \sin\frac{1}{a}$ δεν υπάρχει και φτάνουμε σε άτοπο.
Αν η l_+ είναι κατακόρυφη προς τα πάνω, τότε η εξίσωσή της είναι η $x = 0$, $y \geq 0$. Επειδή η $l_{a,+}$ τείνει να ταυτιστεί με την l_+, συνεπάγεται ότι η κλίση της $l_{a,+}$ τείνει στο $+\infty$ και άρα $\lim_{a\to 0+} \sin\frac{1}{a} = +\infty$. Όμως, το $\lim_{a\to 0+} \sin\frac{1}{a}$ δεν υπάρχει και φτάνουμε σε άτοπο.
Αν η l_+ είναι κατακόρυφη προς τα κάνω, τότε η εξίσωσή της είναι η $x = 0$, $y \leq 0$. Επειδή η $l_{a,+}$ τείνει να ταυτιστεί με την l_+, συνεπάγεται ότι η κλίση της $l_{a,+}$ τείνει στο $-\infty$ και άρα $\lim_{a\to 0+} \sin\frac{1}{a} = -\infty$. Όμως, το $\lim_{a\to 0+} \sin\frac{1}{a}$ δεν υπάρχει και φτάνουμε πάλι σε άτοπο.
Άρα όταν $a \to 0+$ η $l_{a,+}$ δεν τείνει να ταυτιστεί με κάποια ημιευθεία l_+ με κορυφή το $(0,0)$.

Η δεύτερη συνάρτηση. Έστω $a > 0$. Η ημιευθεία $l_{a,+}$ με κορυφή το σημείο $(0,0)$ η οποία διέρχεται από το σημείο $(a, f(a))$ έχει κλίση ίση με $\frac{f(a)-f(0)}{a-0} = \frac{f(a)}{a} = a\sin\frac{1}{a}$. Η εξίσωση της ημιευθείας αυτής είναι η

$$y = \left(a\sin\tfrac{1}{a}\right)x, \quad x \geq 0.$$

Όταν $a \to 0+$ η κλίση της ημιευθείας $l_{a,+}$ έχει όριο 0: $\lim_{a\to 0+} a\sin\frac{1}{a} = 0$. Άρα η $l_{a,+}$ τείνει να ταυτιστεί με την ημιευθεία l_+ με κορυφή το σημείο $(0,0)$ και προς τα δεξιά του $(0,0)$ και κλίση ίση με 0. Η l_+ έχει εξίσωση $y = 0x = 0$, $x \geq 0$ (δηλαδή, είναι ο θετικός x-ημιάξονας).

Άσκηση 5.1.6. *Θεωρήστε την συνάρτηση* $f(x) = \begin{cases} x^2(-1)^{[1/x]}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ *Αποδείξτε ότι* $f'(0) = 0$. *Παρατηρήστε ότι όσο θέλουμε κοντά στον 0 υπάρχουν σημεία ασυνέχειας της f.*

Λύση: Είναι

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} x(-1)^{[1/x]} = 0,$$

διότι ισχύει $|x(-1)^{[1/x]}| = |\pm x| = |x|$ για κάθε $x \neq 0$.
Αν $n \in \mathbb{N}$, τότε η f είναι ίση με $x^2(-1)^n$ κοντά στον $\frac{1}{n}$ και από τα αριστερά του και είναι ίση με $x^2(-1)^{n-1}$ κοντά στον $\frac{1}{n}$ και από τα δεξιά του. Άρα

$$\lim_{x\to(1/n)-} f(x) = \lim_{x\to(1/n)-} x^2(-1)^n = \frac{(-1)^n}{n^2},$$

$$\lim_{x\to(1/n)+} f(x) = \lim_{x\to(1/n)+} x^2(-1)^{n-1} = \frac{(-1)^{n-1}}{n^2},$$

οπότε η f δεν είναι συνεχής στον $\frac{1}{n}$. Επειδή αυτό συμβαίνει για κάθε $n \in \mathbb{N}$, συμπεραίνουμε ότι όσο θέλουμε κοντά στον 0 υπάρχουν σημεία ασυνέχειας της f.

Άσκηση 5.1.7. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A. Αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στον ξ αν και μόνο αν υπάρχει $g : A \to \mathbb{R}$ συνεχής στον ξ ώστε να ισχύει $f(x) - f(\xi) = g(x)(x - \xi)$ για κάθε $x \in A$.*

Υπόδειξη: Έστω ότι υπάρχει $g : A \to \mathbb{R}$ συνεχής στον ξ ώστε να ισχύει $f(x) - f(\xi) = g(x)(x-\xi)$ για κάθε $x \in A$.
Τότε, λόγω συνέχειας της g στον ξ, έχουμε

$$\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi} g(x) = g(\xi).$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στον ξ και $f'(\xi) = g(\xi)$.
Αντιστρόφως, έστω ότι η f είναι παραγωγίσιμη στον ξ.
Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}, & \text{αν } x \in A,\, x \neq \xi \\ f'(\xi), & \text{αν } x = \xi \end{cases}$$

Τότε η $g(x)$ ταυτίζεται με την $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ κοντά στον ξ και άρα

$$\lim_{x\to\xi} g(x) = \lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = f'(\xi) = g(\xi).$$

Άρα η g είναι συνεχής στον ξ.
Τέλος, για $x \in A$ με $x \neq \xi$ έχουμε $g(x)(x-\xi) = f(x) - f(\xi)$ λόγω του τύπου της g. Η ισότητα $g(x)(x-\xi) = f(x) - f(\xi)$ ισχύει, προφανώς, και για $x = \xi$ και άρα ισχύει για κάθε $x \in A$.

Άσκηση 5.2.2. *Παρατηρήστε ότι τα όρια* $\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x-1}$, $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$ *είναι γνωστές παράγωγοι συγκεκριμένων συναρτήσεων σε συγκεκριμένα σημεία και ως τέτοιες υπολογίστε τα.*
Βάσει των προηγουμένων βρείτε τα $\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x^a-1}$, $\lim_{x\to 0} \frac{a^x-b^x}{x}$, $\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$.

Λύση: Έχουμε

$$\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\log x - \log 1}{x-1} = \frac{d \log x}{dx}(1) = \frac{1}{1} = 1,$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-e^0}{x-0} = \frac{de^x}{dx}(0) = e^0 = 1.$$

Τώρα,

$$\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x^a-1} = \frac{1}{a} \lim_{x\to 1} \frac{\log(x^a)}{x^a-1} = \frac{1}{a} \lim_{y\to 1} \frac{\log y}{y-1} = \frac{1}{a}.$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{a^x-b^x}{x} &= \lim_{x\to 0} b^x \frac{(a/b)^x-1}{x} = b^0 \lim_{x\to 0} \frac{e^{x\log(a/b)}-1}{x} \\ &= b^0 \log\frac{a}{b} \lim_{x\to 0} \frac{e^{x\log(a/b)}-1}{x\log(a/b)} = \log\frac{a}{b} \lim_{y\to 0} \frac{e^y-1}{y} = \log\frac{a}{b}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{e^{ax}-e^{bx}}{x} &= \lim_{x\to 0} e^{bx} \frac{e^{(a-b)x}-1}{x} = e^0 (a-b) \lim_{x\to 0} \frac{e^{(a-b)x}-1}{(a-b)x} \\ &= (a-b) \lim_{y\to 0} \frac{e^y-1}{y} = a-b. \end{aligned}$$

Στην διαδικασία υπολογισμού του προτελευταίου ορίου υποθέσαμε σιωπηρά ότι $\log\frac{a}{b} \neq 0$ ή, ισοδύναμα, ότι $a \neq b$. Όμως, είναι προφανές ότι το αποτέλεσμα, δηλαδή το $\lim_{x\to 0} \frac{a^x-b^x}{x} = \log\frac{a}{b}$, ισχύει ακόμη και όταν $a = b$.
Ομοίως, και στην διαδικασία υπολογισμού του τελευταίου ορίου υποθέσαμε σιωπηρά ότι $a \neq b$. Και πάλι, όμως, είναι προφανές ότι το αποτέλεσμα, δηλαδή το $\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax}-e^{bx}}{x} = a-b$, ισχύει ακόμη και όταν $a = b$.

Άσκηση 5.2.4. *Βρείτε την παράγωγο συνάρτηση της* $\arccos(\cos x)$.

Λύση: Αν $k \in \mathbb{Z}$ και $x \in (k\pi, (k+1)\pi)$, τότε

$$\frac{d \arccos(\cos x)}{dx} = -\frac{-\sin x}{\sqrt{1-(\cos x)^2}} = \frac{\sin x}{|\sin x|} = \begin{cases} 1, & \text{αν ο } k \text{ είναι άρτιος} \\ -1, & \text{αν ο } k \text{ είναι περιττός} \end{cases}$$

Το αποτέλεσμα αυτό συμφωνεί με το αποτέλεσμα της άσκησης 4.5.7, όπου είδαμε ότι για κάθε $x \in [k\pi, (k+1)\pi]$ ισχύει $\arccos(\cos x) = x - k\pi$, αν ο k είναι άρτιος, και $\arccos(\cos x) = -x + (k+1)\pi$, αν ο k είναι περιττός.
Αν $x = k\pi$, όπου $k \in \mathbb{Z}$, τότε δεν υπάρχει η παράγωγος της $\arccos(\cos x)$ στον x.
Αν ο k είναι άρτιος, τότε

$$\lim_{x\to(k\pi)-} \frac{\arccos(\cos x) - \arccos(\cos(k\pi))}{x-k\pi} = \lim_{x\to(k\pi)-} \frac{(-x+k\pi)-0}{x-k\pi} = -1,$$

$$\lim_{x\to(k\pi)+} \frac{\arccos(\cos x) - \arccos(\cos(k\pi))}{x-k\pi} = \lim_{x\to(k\pi)+} \frac{(x-k\pi)-0}{x-k\pi} = 1.$$

Αν ο k είναι περιττός, τότε

$$\lim_{x\to(k\pi)-} \frac{\arccos(\cos x) - \arccos(\cos(k\pi))}{x-k\pi} = \lim_{x\to(k\pi)-} \frac{(x-(k-1)\pi)-\pi}{x-k\pi} = 1,$$

$$\lim_{x\to(k\pi)+} \frac{\arccos(\cos x) - \arccos(\cos(k\pi))}{x-k\pi} = \lim_{x\to(k\pi)+} \frac{(-x+(k+1)\pi)-\pi}{x-k\pi} = -1.$$

Άσκηση 5.2.5. *Θεωρήστε την συνάρτηση* $f(x) = \begin{cases} x^a \sin(1/x), & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ *Για ποιές τιμές του* a *είναι η* f *συνεχής στο* $\mathbb{R}$*; είναι η* f *παραγωγίσιμη στο* $\mathbb{R}$*; είναι η* f' *συνεχής στο* $\mathbb{R}$*;*

Λύση: Η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x \neq 0$ και

$$f'(x) = ax^{a-1} \sin \tfrac{1}{x} - x^{a-2} \cos \tfrac{1}{x} \qquad \text{για κάθε } x \neq 0.$$

Μάλιστα, η f' είναι συνεχής για $x \neq 0$.
Αν $a \leq 0$, κανένα από τα όρια

$$\lim_{x \to 0\pm} f(x) = \lim_{x \to 0\pm} x^a \sin \tfrac{1}{x}$$

δεν υπάρχει. Ενώ, αν $a > 0$, τότε

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x^a \sin \tfrac{1}{x} = 0 = f(0),$$

οπότε η f είναι συνεχής στον 0.
Άρα η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ αν και μόνο αν $a > 0$.
Αν $a \leq 1$, τότε τα όρια

$$\lim_{x \to 0\pm} \tfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0\pm} x^{a-1} \sin \tfrac{1}{x}$$

δεν υπάρχουν. Ενώ, αν $a > 1$, έχουμε

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \tfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0} x^{a-1} \sin \tfrac{1}{x} = 0.$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ αν και μόνο αν $a > 1$ και τότε

$$f'(x) = \begin{cases} ax^{a-1} \sin \frac{1}{x} - x^{a-2} \cos \frac{1}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

Τώρα, αν $1 < a \leq 2$, κανένα από τα όρια

$$\lim_{x \to 0\pm} f'(x) = \lim_{x \to 0\pm} \left(ax^{a-1} \sin \tfrac{1}{x} - x^{a-2} \cos \tfrac{1}{x}\right) = -\lim_{x \to 0\pm} x^{a-2} \cos \tfrac{1}{x}$$

δεν υπάρχει. Αν $a > 2$, τότε

$$\lim_{x \to 0\pm} f'(x) = \lim_{x \to 0\pm} \left(ax^{a-1} \sin \tfrac{1}{x} - x^{a-2} \cos \tfrac{1}{x}\right) = 0 = f'(0).$$

Άρα η f' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ αν και μόνο αν $a > 2$.

Άσκηση 5.2.6. *Έστω* $f : A \to \mathbb{R}$ *και* $f(x) > 0$ *για κάθε* $x \in A$ *και* $\xi \in A$ *σημείο συσσώρευσης του* A*. Αν η* f *είναι παραγωγίσιμη στον* ξ*, βρείτε τα* $\lim_{h \to 0} \left(\frac{f(\xi+h)}{f(\xi)}\right)^{1/h}$ *και* $\lim_{x \to \xi} \left(\frac{f(x)}{f(\xi)}\right)^{1/(\log x - \log \xi)}$*. Για το δεύτερο όριο υποθέτουμε επιπλέον ότι* $A \subseteq (0, +\infty)$*.*

Λύση: Έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \left(\tfrac{f(\xi+h)}{f(\xi)}\right)^{1/h} &= \lim_{h \to 0} e^{\frac{1}{h} \log \frac{f(\xi+h)}{f(\xi)}} = \lim_{h \to 0} e^{\frac{\log(f(\xi+h)) - \log(f(\xi))}{h}} \\ &= e^{(\log \circ f)'(\xi)} = e^{f'(\xi)/f(\xi)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \xi} \left(\tfrac{f(x)}{f(\xi)}\right)^{1/(\log x - \log \xi)} &= \lim_{x \to \xi} e^{\frac{1}{\log x - \log \xi} \log \frac{f(x)}{f(\xi)}} = \lim_{x \to \xi} e^{\frac{x-\xi}{\log x - \log \xi} \frac{\log(f(x)) - \log(f(\xi))}{x - \xi}} \\ &= e^{\xi\, (\log \circ f)'(\xi)} = e^{\xi f'(\xi)/f(\xi)}. \end{aligned}$$

Άσκηση 5.2.7. *Έστω* $f, g : A \to \mathbb{R}$*,* $\xi \in A$ *σημείο συσσώρευσης του* A *και* $f(x) > 0$ *για κάθε* $x \in A$*. Αν οι* f, g *είναι παραγωγίσιμες στον* ξ*, αποδείξτε ότι και η* $f^g : A \to \mathbb{R}$ *είναι παραγωγίσιμη*

στον ξ και υπολογίστε την $(f^g)'(\xi)$.
Βρείτε την παράγωγο συνάρτηση της x^x.

Λύση: Γράφουμε $f^g = e^{g\log f}$ και άρα

$$(f^g)' = e^{g\log f}\big(g'\log f + g\,\tfrac{f'}{f}\big) = f^g g'\log f + f^{g-1}gf'.$$

Η παράγωγος της x^x στο $(0,+\infty)$ είναι $(x^x)' = (e^{x\log x})' = e^{x\log x}(\log x + 1) = x^x\log x + x^x$.

Άσκηση 5.2.8. *Έστω ότι ο αριθμός ξ είναι ρίζα του πολυωνύμου P, δηλαδή $P(\xi) = 0$. Λέμε ότι ο $k \in \mathbb{N}$ είναι η πολλαπλότητα του ξ ως ρίζα του P αν υπάρχει πολυώνυμο Q ώστε να ισχύει $P(x) = (x-\xi)^k Q(x)$ για κάθε x και $Q(\xi) \neq 0$. Το ότι $Q(\xi) \neq 0$ ισοδυναμεί με το ότι το πολυώνυμο Q δεν διαιρείται από το $x-\xi$. Άρα η πολλαπλότητα της ρίζας ξ του πολυωνύμου P είναι ο μέγιστος εκθέτης k ώστε το $(x-\xi)^k$ να διαιρεί το P. Αν ο ξ δεν είναι ρίζα του πολυωνύμου P, δηλαδή $P(\xi) \neq 0$, επεκτείνουμε τον ορισμό της έννοιας της πολλαπλότητας, λέγοντας ότι η πολλαπλότητα του ξ ως ρίζα του P είναι 0. Είναι προφανές ότι η πολλαπλότητα μιας ρίζας πολυωνύμου δεν υπερβαίνει τον βαθμό του πολυωνύμου.*

Έστω ότι ο ξ είναι ρίζα του πολυωνύμου P. Αποδείξτε ότι ο ξ είναι ρίζα πολλαπλότητας $k \in \mathbb{N}$ του P αν και μόνο αν είναι ρίζα πολλαπλότητας $k-1$ του P'.

Λύση: Αν ο ξ είναι ρίζα πολλαπλότητας $k \in \mathbb{N}$ του πολυωνύμου P, τότε υπάρχει πολυώνυμο Q ώστε να ισχύει $P(x) = (x-\xi)^k Q(x)$ για κάθε x και $Q(\xi) \neq 0$. Επομένως,

$$P'(x) = k(x-\xi)^{k-1}Q(x) + (x-\xi)^k Q'(x) = (x-\xi)^{k-1}(kQ(x) + (x-\xi)Q'(x)) = (x-\xi)^{k-1}R(x)$$

για κάθε x, όπου $R(x) = kQ(x) + (x-\xi)Q'(x)$ είναι πολυώνυμο με $R(\xi) = kQ(\xi) \neq 0$.
Άρα ο ξ είναι ρίζα πολλαπλότητας $k-1$ του P'.
Αντιστρόφως, έστω ότι ο ξ είναι ρίζα πολλαπλότητας $k-1$ του P'.
Επειδή ο ξ είναι ρίζα του P, έστω $l \in \mathbb{N}$ η πολλαπλότητα του ξ ως ρίζα του P. Όπως αποδείξαμε προηγουμένως, ο ξ είναι ρίζα πολλαπλότητας $l-1$ του P' και, επομένως, $k-1 = l-1$, δηλαδή $k = l$. Άρα ο ξ είναι ρίζα πολλαπλότητας k του P.

Άσκηση 5.2.10. *Για ποιές ρητές συναρτήσεις R ισχύει $\lim_{x\to+\infty} \frac{xR'(x)}{R(x)} = 0$;*

Λύση: Για να έχει νόημα η παράσταση $\frac{xR'(x)}{R(x)}$, υποθέτουμε ότι η ρητή συνάρτηση R δεν είναι η μηδενική συνάρτηση. Τότε η ρητή συνάρτηση R γράφεται

$$R(x) = \tfrac{a_n x^n + \cdots}{b_m x^m + \cdots}$$

με $n, m \in \mathbb{Z}$, $n, m \geq 0$ και $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$.
Αν $n \neq m$, τότε έχουμε

$$R'(x) = \tfrac{(na_n x^{n-1} + \cdots)(b_m x^m + \cdots) - (a_n x^n + \cdots)(mb_m x^{m-1} + \cdots)}{(b_m x^m + \cdots)^2} = \tfrac{(n-m)a_n b_m x^{n+m-1} + \cdots}{(b_m x^m + \cdots)^2},$$

οπότε

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \tfrac{xR'(x)}{R(x)} &= \lim_{x\to+\infty} \tfrac{(n-m)a_n b_m x^{n+m} + \cdots}{(a_n x^n + \cdots)(b_m x^m + \cdots)} = \lim_{x\to+\infty} \tfrac{(n-m)a_n b_m x^{n+m} + \cdots}{a_n b_m x^{n+m} + \cdots} \\ &= n - m \neq 0.\end{aligned}$$

Αν $n = m$, τότε έχουμε

$$R(x) = \tfrac{a_n x^n + \cdots}{b_n x^n + \cdots}$$

με $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$ και $a_n \neq 0$, $b_n \neq 0$.
Αν $n = 0$, τότε η R είναι σταθερή συνάρτηση, οπότε ισχύει $\lim_{x\to+\infty} \frac{xR'(x)}{R(x)} = \lim_{x\to+\infty} 0 = 0$.
Αν $n \geq 1$, τότε

$$R'(x) = \tfrac{(na_n x^{n-1} + \cdots)(b_n x^n + \cdots) - (a_n x^n + \cdots)(nb_n x^{n-1} + \cdots)}{(b_n x^n + \cdots)^2} = \tfrac{(a_n b_{n-1} - a_{n-1}b_n)x^{2n-2} + \cdots}{(b_n x^n + \cdots)^2},$$

οπότε

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{xR'(x)}{R(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(a_nb_{n-1}-a_{n-1}b_n)x^{2n-1}+\cdots}{a_nb_nx^{2n}+\cdots}=0.$$

Άρα ισχύει $\lim_{x\to+\infty}\frac{xR'(x)}{R(x)}=0$ αν και μόνο αν οι βαθμοί των πολυωνύμων στον αριθμητή και στον παρονομαστή της R είναι ίσοι.

Άσκηση 5.2.12. *Αποδείξτε ότι η παράγωγος άρτιας συνάρτησης είναι περιττή συνάρτηση και η παράγωγος περιττής συνάρτησης είναι άρτια συνάρτηση. Αποδείξτε ότι η παράγωγος περιοδικής συνάρτησης είναι περιοδική συνάρτηση.*

Λύση: Έστω $f:A\to\mathbb{R}$. Αν η f είναι άρτια συνάρτηση, τότε το A είναι συμμετρικό σύνολο, δηλαδή ισχύει $-x\in A$ για κάθε $x\in A$. Επίσης, ισχύει $f(-x)=f(x)$ για κάθε $x\in A$.
Τότε, όμως, παραγωγίζοντας την σχέση $f(-x)=f(x)$, έχουμε ότι ισχύει $-f'(-x)=f'(x)$ ή, ισοδύναμα, $f'(-x)=-f'(x)$ για κάθε $x\in A$. Άρα η f' είναι περιττή.
Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι, αν η f είναι περιττή, τότε η f' είναι άρτια.
Τέλος, έστω ότι η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι περιοδική. Δηλαδή, υπάρχει $\tau>0$ ώστε να ισχύει $f(\tau+x)=f(x)$ για κάθε x. Παραγωγίζοντας αυτήν την σχέση, βρίσκουμε ότι ισχύει $f'(\tau+x)=f'(x)$ για κάθε x και άρα η f' είναι περιοδική.

Άσκηση 5.2.13. *Έστω $f:A\to\mathbb{R}$, $\xi\in A$ από δεξιά του και αριστερά του σημείο συσσώρευσης του A και έστω ότι η f είναι παραγωγίσιμη στον ξ. Θεωρούμε και την $|f|:A\to\mathbb{R}$.*
Αν $f(\xi)\neq 0$, αποδείξτε ότι $|f|'(\xi)=\mathrm{sign}(f(\xi))\,f'(\xi)$.
Αν $f(\xi)=0$ και $f'(\xi)=0$, αποδείξτε ότι $|f|'(\xi)=0$.
Αν $f(\xi)=0$ και $f'(\xi)\neq 0$, αποδείξτε ότι η $|f|$ δεν είναι παραγωγίσιμη στον ξ. Αποδείξτε, όμως, ότι $|f|'_+(\xi)=|f'(\xi)|$ και $|f|'_-(\xi)=-|f'(\xi)|$.

Λύση: Έστω $f(\xi)\neq 0$. Αν $f(\xi)>0$, τότε, επειδή η f είναι συνεχής στον ξ, ισχύει $f(x)>0$ κοντά στον ξ και άρα

$$|f|'(\xi)=\lim_{x\to\xi}\frac{|f(x)|-|f(\xi)|}{x-\xi}=\lim_{x\to\xi}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}=f'(\xi).$$

Αν $f(\xi)<0$, τότε ισχύει $f(x)<0$ κοντά στον ξ και άρα

$$|f|'(\xi)=\lim_{x\to\xi}\frac{|f(x)|-|f(\xi)|}{x-\xi}=\lim_{x\to\xi}\frac{-f(x)+f(\xi)}{x-\xi}=-f'(\xi).$$

Άρα σε κάθε περίπτωση ισχύει $|f|'(\xi)=\mathrm{sign}(f(\xi))\,f'(\xi)$.
Έστω $f(\xi)=0$ και $f'(\xi)=0$. Τότε ισχύει

$$\Big|\frac{|f(x)|-|f(\xi)|}{x-\xi}\Big|\leq\frac{|f(x)-f(\xi)|}{|x-\xi|}=\Big|\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\Big|. \tag{14.84}$$

Επειδή $\lim_{x\to\xi}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}=f'(\xi)=0$, συνεπάγεται $\lim_{x\to\xi}\big|\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\big|=0$, οπότε από την (14.84) έχουμε ότι $|f|'(\xi)=\lim_{x\to\xi}\frac{|f(x)|-|f(\xi)|}{x-\xi}=0$.
Έστω $f(\xi)=0$ και $f'(\xi)\neq 0$. Αν $f'(\xi)>0$, τότε από το

$$\lim_{x\to\xi}\frac{f(x)}{x-\xi}=\lim_{x\to\xi}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}=f'(\xi)>0$$

συνεπάγεται ότι ισχύει $\frac{f(x)}{x-\xi}>0$ κοντά στον ξ. Άρα ισχύει $f(x)<0$ κοντά στον ξ από τα αριστερά του και $f(x)>0$ κοντά στον ξ από τα δεξιά του. Άρα

$$|f|'_-(\xi)=\lim_{x\to\xi-}\frac{|f(x)|-|f(\xi)|}{x-\xi}=\lim_{x\to\xi-}\frac{-f(x)}{x-\xi}=-\lim_{x\to\xi-}\frac{f(x)}{x-\xi}=-f'(\xi)=-|f'(\xi)|$$

και

$$|f|'_+(\xi)=\lim_{x\to\xi+}\frac{|f(x)|-|f(\xi)|}{x-\xi}=\lim_{x\to\xi+}\frac{f(x)}{x-\xi}=f'(\xi)=|f'(\xi)|.$$

Η απόδειξη των $|f|'_+(\xi) = |f'(\xi)|$ και $|f|'_-(\xi) = -|f'(\xi)|$ είναι ίδια όταν $f'(\xi) < 0$. Τώρα, επειδή $f'(\xi) \neq 0$ συνεπάγεται $|f|'_-(\xi) \neq |f|'_+(\xi)$, οπότε η $|f|$ δεν είναι παραγωγίσιμη στον ξ.

Άσκηση 5.2.14. *Έστω πολυωνυμικές συναρτήσεις P, Q, όπου η P έχει βαθμό $n \geq 2$ και n διαφορετικές ανά δύο ρίζες $x_1, \dots, x_n$ και η Q έχει βαθμό $\leq n-1$.*
Αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{Q(x)}{P(x)} = \sum_{k=1}^n \frac{Q(x_k)}{P'(x_k)(x-x_k)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$.
Υπολογίστε το $\sum_{k=1}^n \frac{1}{P'(x_k)}$.
Αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{1}{x(x+1)\cdots(x+m)} = \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \frac{(-1)^k}{x+k}$ για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, \dots, -m\}$.

Λύση: Το πρώτο ερώτημα. Επειδή η P έχει βαθμό $n \geq 2$ και οι n διαφορετικές ανά δύο ρίζες της είναι οι $x_1, \dots, x_n$, συνεπάγεται ότι υπάρχει $c \neq 0$ ώστε

$$P(x) = c(x-x_1)\cdots(x-x_n) \qquad \text{για κάθε } x.$$

Για $k = 1, \dots, n$ γράφουμε

$$P(x) = c(x-x_k)P_k(x),$$

όπου $P_k(x)$ είναι το γινόμενο των παραγόντων $x-x_1, \dots, x-x_n$ εκτός του $x-x_k$. Δηλαδή

$$P_k(x) = (x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n).$$

Τότε παίρνουμε ότι $P'(x) = cP_k(x) + c(x-x_k){P_k}'(x)$ και άρα

$$P'(x_k) = cP_k(x_k) = (x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n) \neq 0.$$

Τώρα ορίζουμε

$$T(x) = c\sum_{k=1}^n \frac{Q(x_k)}{P'(x_k)} P_k(x).$$

Το T είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $\leq n-1$, διότι κάθε $P_k(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού $n-1$. Παρατηρούμε ότι ισχύει $P_k(x_l) = 0$ αν $k \neq l$. Επομένως,

$$T(x_l) = c\sum_{k=1}^n \frac{Q(x_k)}{P'(x_k)} P_k(x_l) = c\frac{Q(x_l)}{P'(x_l)} P_l(x_l) = Q(x_l) \qquad \text{για κάθε } l = 1, \dots, n.$$

Άρα το πολυώνυμο $T - Q$ είναι βαθμού $\leq n-1$ και έχει n διαφορετικές ανά δύο ρίζες, οπότε είναι το μηδενικό πολυώνυμο. Δηλαδή ισχύει

$$Q(x) = T(x) = c\sum_{k=1}^n \frac{Q(x_k)}{P'(x_k)} P_k(x) = \sum_{k=1}^n \frac{Q(x_k)P(x)}{P'(x_k)(x-x_k)} \qquad \text{για } x \neq x_1, \dots, x_n.$$

Άρα ισχύει

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \sum_{k=1}^n \frac{Q(x_k)}{P'(x_k)(x-x_k)} \qquad \text{για } x \neq x_1, \dots, x_n.$$

Το δεύτερο ερώτημα. Εφαρμόζουμε το προηγούμενο αποτέλεσμα στο σταθερό πολυώνυμο $Q(x) = 1$ και, αφού πολλαπλασιάσουμε με x, βρίσκουμε

$$\frac{x}{P(x)} = \sum_{k=1}^n \frac{x}{P'(x_k)(x-x_k)} \qquad \text{για } x \neq x_1, \dots, x_n.$$

Παίρνουμε όριο όταν $x \to +\infty$ και τότε έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{P(x)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{P'(x_k)}.$$

Επειδή το πολυώνυμο P έχει βαθμό $n \geq 2$, συνεπάγεται ότι $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{P(x)} = 0$, οπότε

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{P'(x_k)} = 0.$$

Το τρίτο ερώτημα. Εφαρμόζουμε το αποτέλεσμα του πρώτου ερωτήματος στο $Q(x) = 1$ και στο $P(x) = x(x+1)\cdots(x+m)$.

Οι ρίζες του P είναι οι $0, -1, \ldots, -m$ και βρίσκουμε (όπως κάναμε στην λύση του πρώτου ερωτήματος)
$$P'(0) = m!$$
και
$$P'(-k) = (-k)(-k+1)\cdots(-k+k-1)(-k+k+1)\cdots(-k+m) = (-1)^k k!(m-k)!$$
για $k = 1, \ldots, m$.
Άρα
$$\frac{1}{x(x+1)\cdots(x+m)} = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{(-1)^k k!(m-k)!(x+k)} = \frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k m!}{k!(m-k)!(x+k)} = \frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}\frac{(-1)^k}{x+k}$$
για $x \neq 0, -1, \ldots, -m$.

Άσκηση 5.2.15. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ συνεχής στο A ώστε να ισχύει $(f(x))^2 + 4f(x) = x^3 - 5x^2 - 9x + 41$ για κάθε $x \in A$. Αποδείξτε ότι ισχύει $(2f(x)+4)f'(x) = 3x^2 - 10x - 9$ για κάθε $x \in A$ στον οποίο η f είναι παραγωγίσιμη. Βρείτε το μέγιστο δυνατό σύνολο A, αποδείξτε ότι υπάρχουν τέσσερις τέτοιες f για αυτό το A και βρείτε τους τύπους τους.*

Λύση: Παρατηρούμε ότι
$$(f(x))^2+4f(x)+4 = x^3-5x^2-9x+45 = x^2(x-5)-9(x-5) = (x+3)(x-3)(x-5). \quad (14.85)$$
Επειδή $(f(x))^2 + 4f(x) + 4 = (f(x)+2)^2 \geq 0$, πρέπει να ισχύει $(x+3)(x-3)(x-5) \geq 0$ και άρα ο x πρέπει να ανήκει στην ένωση $[-3, 3] \cup [5, +\infty)$. Επομένως, το μέγιστο δυνατό σύνολο A είναι το $A = [-3, 3] \cup [5, +\infty)$.
Στο εξής δεχόμαστε ότι $A = [-3, 3] \cup [5, +\infty)$.
Παραγωγίζοντας τη σχέση $(f(x))^2 + 4f(x) = x^3 - 5x^2 - 9x + 41$, βρίσκουμε ότι ισχύει
$$(2f(x)+4)f'(x) = 3x^2 - 10x - 9$$
για κάθε $x \in A$ στον οποίο η f είναι παραγωγίσιμη.
Από την (14.85) συνεπάγεται $(f(x)+2)^2 = x^3 - 5x^2 - 9x + 45$ για κάθε $x \in A$ και άρα
$$f(x) + 2 = \pm\sqrt{x^3 - 5x^2 - 9x + 45} \qquad \text{για κάθε } x \in A.$$
Στο ανοικτό διάστημα $(-3, 3)$ η $f(x) + 2$ δεν μηδενίζεται, οπότε διατηρεί πρόσημο. Άρα είτε ισχύει $f(x) + 2 = -\sqrt{x^3 - 5x^2 - 9x + 45}$ για κάθε $x \in (-3, 3)$ είτε ισχύει $f(x) + 2 = \sqrt{x^3 - 5x^2 - 9x + 45}$ για κάθε $x \in (-3, 3)$. Ομοίως, στο ανοικτό διάστημα $(5, +\infty)$ η $f(x)+2$ δεν μηδενίζεται, οπότε είτε ισχύει $f(x)+2 = -\sqrt{x^3 - 5x^2 - 9x + 45}$ για κάθε $x \in (5, +\infty)$ είτε ισχύει $f(x)+2 = \sqrt{x^3 - 5x^2 - 9x + 45}$ για κάθε $x \in (5, +\infty)$. Οι ισότητες αυτές επεκτείνονται και στα σημεία ± 3, 5, διότι σ' αυτά τα σημεία και οι δύο μεριές των ισοτήτων μηδενίζονται.
Καταλήγουμε σε τέσσερις συναρτήσεις
$$f(x) = \begin{cases} \varepsilon_1\sqrt{x^3 - 5x^2 - 9x + 45}, & \text{αν } x \in [-3, 3] \\ \varepsilon_2\sqrt{x^3 - 5x^2 - 9x + 45}, & \text{αν } x \in [5, +\infty) \end{cases}$$
όπου τα $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ παίρνουν τιμές ± 1. Και οι τέσσερις αυτές συναρτήσεις είναι συνεχείς στο A (και παραγωγίσιμες στο A εκτός των σημείων ± 3, 5).

Άσκηση 5.2.18. *Έστω $f : A \to B$ ένα-προς-ένα στο A και επί του B και η αντίστροφη $f^{-1} : B \to A$. Έστω $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A, έστω ότι η f είναι παραγωγίσιμη στον ξ ότι $f'(\xi) \neq 0$ και ότι η f^{-1} είναι συνεχής στον $\eta = f(\xi)$.*

Αποδείξτε ότι ο η είναι σημείο συσσώρευσης του B και ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στον η και ισχύει $(f^{-1})'(\eta) = 1/f'(\xi)$.

Λύση: Από την $f'(\xi) \neq 0$ συνεπάγεται $\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \neq 0$ και άρα ισχύει $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \neq 0$ ή, ισοδύναμα, $f(x) \neq f(\xi) = \eta$ κοντά στον ξ.
Έστω τυχών $\epsilon > 0$. Επειδή η f είναι συνεχής στον ξ και $\eta = f(\xi)$, ισχύει $f(x) \in N_\eta(\epsilon)$ κοντά στον ξ. Επομένως, ισχύει $f(x) \in N_\eta(\epsilon)$ και $f(x) \neq \eta$ κοντά στον ξ. Συμπεραίνουμε ότι στην περιοχή $N_\eta(\epsilon)$ υπάρχει τουλάχιστον ένα στοιχείο του συνόλου τιμών B το οποίο είναι $\neq \eta$. Επειδή αυτό συμβαίνει για κάθε $\epsilon > 0$, ο η είναι σημείο συσσώρευσης του B.
Τώρα, επειδή η f^{-1} είναι συνεχής στον η, έχουμε $\lim_{y\to\eta} f^{-1}(y) = f^{-1}(\eta) = \xi$. Και, επειδή ισχύει $f^{-1}(y) \neq \xi$ κοντά στον η, κάνοντας αλλαγή μεταβλητής από y σε $x = f^{-1}(y)$, έχουμε

$$\lim_{y\to\eta} \frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(\eta)}{y-\eta} = \lim_{y\to\eta} \frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(\eta)}{f(f^{-1}(y))-f(f^{-1}(\eta))} = \lim_{x\to\xi} \frac{x-\xi}{f(x)-f(\xi)} = \frac{1}{f'(\xi)}.$$

Άρα $(f^{-1})'(\eta) = 1/f'(\xi)$.

Άσκηση 5.2.19. *Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$ και $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A. Αν οι f, g είναι παραγωγίσιμες στον ξ, βρείτε το $\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)g(\xi)-f(\xi)g(x)}{x-\xi}$.*

Λύση: Είναι

$$\frac{f(x)g(\xi)-f(\xi)g(x)}{x-\xi} = \frac{(f(x)-f(\xi))g(\xi)-f(\xi)(g(x)-g(\xi))}{x-\xi} = \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\, g(\xi) - f(\xi)\, \frac{g(x)-g(\xi)}{x-\xi},$$

οπότε $\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)g(\xi)-f(\xi)g(x)}{x-\xi} = f'(\xi)g(\xi) - f(\xi)g'(\xi)$.

Άσκηση 5.2.20. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A, f παραγωγίσιμη στο ξ και ακολουθίες $(x_n{}')$, $(x_n{}'')$ στο A ώστε $x_n{}' \to \xi$, $x_n{}'' \to \xi$ και $x_n{}' \neq \xi$, $x_n{}'' \neq \xi$ για κάθε n.*
Αν $x_n{}' < \xi < x_n{}''$ για κάθε n, αποδείξτε ότι $\frac{f(x_n{}')-f(x_n{}'')}{x_n{}'-x_n{}''} \to f'(\xi)$.
Αν ισχύει $|\frac{x_n{}'-\xi}{x_n{}'-x_n{}''}| \leq M$ για κάθε n, αποδείξτε ότι $\frac{f(x_n{}')-f(x_n{}'')}{x_n{}'-x_n{}''} \to f'(\xi)$.
Θεωρήστε τη συνάρτηση f στο παράδειγμα 5.1.7 (και στην άσκηση 5.1.5). Επίσης, έστω $x_n{}' = \frac{1}{(\pi/2)+2n\pi}$ και $x_n{}'' = \frac{1}{(-\pi/2)+2n\pi}$ για κάθε n. Η f είναι παραγωγίσμη στον 0 και $x_n{}' \to 0$, $x_n{}'' \to 0$, αλλά $\frac{f(x_n{}')-f(x_n{}'')}{x_n{}'-x_n{}''} \not\to f'(0)$.

Λύση: Είναι

$$\frac{f(x_n{}')-f(x_n{}'')}{x_n{}'-x_n{}''} = \frac{f(x_n{}')-f(\xi)-f(x_n{}'')+f(\xi)}{x_n{}'-x_n{}''} = \frac{x_n{}'-\xi}{x_n{}'-x_n{}''}\,\frac{f(x_n{}')-f(\xi)}{x_n{}'-\xi} - \frac{x_n{}''-\xi}{x_n{}'-x_n{}''}\,\frac{f(x_n{}'')-f(\xi)}{x_n{}''-\xi}$$

και άρα

$$\frac{f(x_n{}')-f(x_n{}'')}{x_n{}'-x_n{}''} - f'(\xi) = \frac{\xi-x_n{}'}{x_n{}''-x_n{}'}\Big(\frac{f(x_n{}')-f(\xi)}{x_n{}'-\xi} - f'(\xi)\Big) + \frac{x_n{}''-\xi}{x_n{}''-x_n{}'}\Big(\frac{f(x_n{}'')-f(\xi)}{x_n{}''-\xi} - f'(\xi)\Big). \quad (14.86)$$

Τώρα, επειδή $\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = f'(\xi)$ και $x_n{}' \to \xi$, $x_n{}'' \to \xi$ και $x_n{}' \neq \xi$, $x_n{}'' \neq \xi$ για κάθε n, συνεπάγεται ότι $\frac{f(x_n{}')-f(\xi)}{x_n{}'-\xi} \to f'(\xi)$ και $\frac{f(x_n{}'')-f(\xi)}{x_n{}''-\xi} \to f'(\xi)$. Άρα οι δύο παρενθέσεις στην (14.86) έχουν όριο ίσο με 0.
Αν ισχύει $x_n{}' < \xi < x_n{}''$ για κάθε n, τότε οι συντελεστές μπροστά από τις δύο παρενθέσεις στην (14.86) είναι φραγμένοι: και οι δύο ανήκουν στο διάστημα $(0,1)$. Άρα $\frac{f(x_n{}')-f(x_n{}'')}{x_n{}'-x_n{}''} \to f'(\xi)$.
Αν ισχύει $|\frac{x_n{}'-\xi}{x_n{}'-x_n{}''}| \leq M$ για κάθε n, τότε ο πρώτος συντελεστής είναι φραγμένος. Όμως, και ο δεύτερος είναι φραγμένος, διότι το άθροισμα των δύο συντελεστών είναι ίσο με 1. Άρα και πάλι καταλήγουμε στο ίδιο αποτέλεσμα.

Το τρίτο ερώτημα. Για την $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x), & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ έχουμε αποδείξει ότι $f'(0) = 0$.
Τώρα, είναι $f(x_n{}') = (x_n{}')^2$ και $f(x_n{}'') = -(x_n{}'')^2$, οπότε

$$\frac{f(x_n{}')-f(x_n{}'')}{x_n{}'-x_n{}''} = \frac{(x_n{}')^2+(x_n{}'')^2}{x_n{}'-x_n{}''} = \cdots = \frac{8\pi^2n^2+\cdots}{-4\pi^3n^2+\cdots} \to -\frac{2}{\pi}.$$

Άσκηση 5.2.21. *Έστω $k \in \mathbb{N}$ και συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στον ξ.*

Αποδείξτε ότι $n\big(f(\xi+\frac{1}{n})+f(\xi+\frac{2}{n})+\cdots+f(\xi+\frac{k}{n})-kf(\xi)\big)\to\frac{k(k+1)}{2}f'(\xi)$.
Αποδείξτε ότι $f(\xi+\frac{1}{n^2})+f(\xi+\frac{2}{n^2})+\cdots+f(\xi+\frac{n}{n^2})-nf(\xi)\to\frac{1}{2}f'(\xi)$.

Λύση: Γράφουμε

$$\begin{aligned}&n\big(f(\xi+\tfrac{1}{n})+\cdots+f(\xi+\tfrac{l}{n})+\cdots+f(\xi+\tfrac{k}{n})-kf(\xi)\big)\\&\qquad=\tfrac{f(\xi+(1/n))-f(\xi)}{1/n}+\cdots+l\,\tfrac{f(\xi+(l/n))-f(\xi)}{l/n}+\cdots+k\,\tfrac{f(\xi+(k/n))-f(\xi)}{k/n}.\end{aligned}$$

Κάθε λόγος στο τελευταίο άθροισμα έχει όριο $f'(\xi)$ όταν $n\to+\infty$. Άρα το άθροισμα έχει όριο $(1+\cdots+l+\cdots+k)f'(\xi)=\frac{k(k+1)}{2}f'(\xi)$.
Τώρα, γράφουμε

$$\begin{aligned}&f(\xi+\tfrac{1}{n^2})+\cdots+f(\xi+\tfrac{l}{n^2})+\cdots+f(\xi+\tfrac{n}{n^2})-nf(\xi)-\tfrac{1}{2}f'(\xi)\\&\qquad=\tfrac{1}{n^2}\big(\tfrac{f(\xi+(1/n^2))-f(\xi)}{1/n^2}-f'(\xi)\big)+\cdots+\tfrac{l}{n^2}\big(\tfrac{f(\xi+(l/n^2))-f(\xi)}{l/n^2}-f'(\xi)\big)+\cdots\\&\qquad\quad\cdots+\tfrac{n}{n^2}\big(\tfrac{f(\xi+(n/n^2))-f(\xi)}{n/n^2}-f'(\xi)\big)+\tfrac{1}{2n}f'(\xi).\end{aligned}$$

Για να αποδείξουμε ότι η αριστερή μεριά της τελευταίας ισότητας τείνει στον 0, αρκεί να δείξουμε ότι η δεξιά μεριά της τείνει στον 0. Ο τελευταίος όρος, προφανώς, τείνει στον 0, οπότε μελετάμε το άθροισμα των υπόλοιπων όρων της δεξιάς μεριάς.
Τώρα έστω $\epsilon>0$. Τότε υπάρχει $\delta>0$ ώστε να ισχύει $|\frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h}-f'(\xi)|<\epsilon$ για κάθε h με $0<|h|<\delta$.
Αν $\frac{1}{n}<\delta$, τότε για κάθε $h=\frac{1}{n^2},\ldots,\frac{l}{n^2},\ldots,\frac{n}{n^2}$ ισχύει $0<h<\delta$ και άρα για κάθε τέτοιον h ισχύει $|\frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h}-f'(\xi)|<\epsilon$.
Άρα τελικά (συγκεκριμένα, αν $\frac{1}{n}<\delta$) ισχύει

$$\begin{aligned}&\big|\tfrac{1}{n^2}\big(\tfrac{f(\xi+(1/n^2))-f(\xi)}{1/n^2}-f'(\xi)\big)+\cdots+\tfrac{l}{n^2}\big(\tfrac{f(\xi+(l/n^2))-f(\xi)}{l/n^2}-f'(\xi)\big)+\cdots\\&\quad\cdots+\tfrac{n}{n^2}\big(\tfrac{f(\xi+(n/n^2))-f(\xi)}{n/n^2}-f'(\xi)\big)\big|\\&\le\tfrac{1}{n^2}\big|\tfrac{f(\xi+(1/n^2))-f(\xi)}{1/n^2}-f'(\xi)\big|+\cdots+\tfrac{l}{n^2}\big|\tfrac{f(\xi+(l/n^2))-f(\xi)}{l/n^2}-f'(\xi)\big|+\cdots\\&\quad\cdots+\tfrac{n}{n^2}\big|\tfrac{f(\xi+(n/n^2))-f(\xi)}{n/n^2}-f'(\xi)\big|\\&<\big(\tfrac{1}{n^2}+\cdots+\tfrac{l}{n^2}+\cdots+\tfrac{n}{n^2}\big)\epsilon=\tfrac{n(n+1)}{2n^2}\epsilon\le\epsilon.\end{aligned}$$

Άσκηση 5.2.22. *Έστω* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *συνεχής στον* 0 *και* $0<\mu<1$ *και* $\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(\mu x)}{x}=b\in\mathbb{R}$. *Αποδείξτε ότι* $f'(0)=\frac{b}{1-\mu}$.

Λύση: Έστω τυχών $\epsilon>0$. Από το $\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(\mu x)}{x}=b\in\mathbb{R}$ συνεπάγεται ότι υπάρχει $\delta>0$ ώστε να ισχύει $|\frac{f(x)-f(\mu x)}{x}-b|<(1-\mu)\frac{\epsilon}{2}$ για κάθε x με $0<|x|<\delta$ ή, ισοδύναμα

$$|f(x)-f(\mu x)-bx|<(1-\mu)\tfrac{\epsilon}{2}|x|\qquad\text{για κάθε } x \text{ με } 0<|x|<\delta. \tag{14.87}$$

Τώρα, έστω $0<|x|<\delta$.
Τότε είναι $0<|\mu^kx|<\delta$ για κάθε $k=0,1,2,\ldots$, οπότε από την (14.87) συνεπάγεται

$$|f(\mu^kx)-f(\mu^{k+1}x)-b\mu^kx|<(1-\mu)\tfrac{\epsilon}{2}\mu^k|x|\qquad\text{για κάθε } k=0,1,2,\ldots. \tag{14.88}$$

Αθροίζοντας τις σχέσεις (14.88) για $k=0,1,\ldots,n-1$, χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα στην αριστερή μεριά του αθροίσματος που θα προκύψει και, τέλος, απαλείφοντας τους όρους που εμφανίζονται με αντίθετα πρόσημα στο άθροισμα που θα προκύψει μέσα στην απόλυτη τιμή, βρίσκουμε ότι

$$\big|f(x)-f(\mu^nx)-b\tfrac{1-\mu^n}{1-\mu}x\big|<(1-\mu^n)\tfrac{\epsilon}{2}|x|\qquad\text{για κάθε } n\in\mathbb{N}.$$

Τώρα, παίρνοντας όριο όταν $n \to +\infty$ στην τελευταία σχέση και χρησιμοποιώντας την συνέχεια της f στον 0 και το ότι $\mu^n \to 0$, βρίσκουμε

$$\left|f(x) - f(0) - \tfrac{b}{1-\mu} x\right| \leq \tfrac{\epsilon}{2}|x|,$$

οπότε $\left|\frac{f(x)-f(0)}{x} - \frac{b}{1-\mu}\right| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$.
Αποδείξαμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|\frac{f(x)-f(0)}{x} - \frac{b}{1-\mu}| < \epsilon$ για κάθε x με $0 < |x| < \delta$. Επομένως, $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{b}{1-\mu}$.

Άσκηση 5.2.24. *Κάποια χρονική στιγμή η ακτίνα ενός κυκλικού δίσκου έχει μήκος κ και ρυθμό μεταβολής ως προς τον χρόνο ίσο με μ. Υπολογίστε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του δίσκου ως προς τον χρόνο την ίδια χρονική στιγμή.*

Λύση: Έστω r η ακτίνα του δίσκου. Τότε το εμβαδόν του είναι ίσο με $E = \pi r^2$.
Αν $\frac{dr}{dt}$ είναι ο ρυθμός μεταβολής της ακτίνας r ως προς τον χρόνο t και $\frac{dE}{dt}$ είναι ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού E ως προς τον χρόνο t, τότε κάθε χρονική στιγμή ισχύει η σχέση

$$\tfrac{dE}{dt} = \tfrac{dE}{dr}\,\tfrac{dr}{dt} = 2\pi r\,\tfrac{dr}{dt}.$$

Άρα την χρονική στιγμή που είναι $r = \kappa$ και $\frac{dr}{dt} = \mu$ είναι και $\frac{dE}{dt} = 2\pi\kappa\mu$.

Άσκηση 5.2.26. *Μια μεταλλική ράβδος μήκους l έχει το ένα άκρο της στη μία πλευρά και το άλλο άκρο της στην άλλη πλευρά μιας ορθής γωνίας. Αν το ένα άκρο απομακρύνεται από την κορυφή της γωνίας με ταχύτητα v (παραμένοντας στην ίδια πλευρά της γωνίας), βρείτε την ταχύτητα με την οποία το άλλο άκρο πλησιάζει την κορυφή (παραμένοντας στην ίδια πλευρά της γωνίας). Βρείτε, επίσης, τον ρυθμό μεταβολής της απόστασης ενός από τα άκρα από την κορυφή ως προς την απόσταση του άλλου άκρου από την κορυφή.*

Λύση: Αν x είναι απόσταση από την κορυφή της γωνίας του άκρου που απομακρύνεται από αυτήν και y είναι η αντίστοιχη απόσταση από την κορυφή της γωνίας του άκρου που πλησιάζει σ' αυτήν, τότε έχουμε την σχέση $x^2 + y^2 = l^2$.
Οι αντίστοιχες ταχύτητες είναι οι ρυθμοί μεταβολής $\frac{dx}{dt}$ και $\frac{dy}{dt}$ των x και y ως προς τον χρόνο t.
Από την σχέση $x^2 + y^2 = l^2$ βρίσκουμε

$$2x\tfrac{dx}{dt} + 2y\tfrac{dy}{dt} = 0$$

διότι το μήκος l είναι σταθερό.
Άρα όταν $\frac{dx}{dt} = v > 0$, τότε $\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\,v = -\frac{x}{(l^2-x^2)^{1/2}}\,v < 0$.
Επίσης, $\frac{dy}{dx}$ είναι ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης από την κορυφή του άκρου που πλησιάζει σ' αυτήν ως προς την απόσταση από την κορυφή του άκρου που απομακρύνεται από αυτήν.
Πάλι από την σχέση $x^2 + y^2 = l^2$ βρίσκουμε

$$2x + 2y\,\tfrac{dy}{dx} = 0$$

και άρα $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{(l^2-x^2)^{1/2}} < 0$.

Άσκηση 5.2.27. *Ένα όχημα κινείται πάνω στην καμπύλη με εξίσωση $y^2 = 4x^3$. Σε ποιά θέση του οχήματος ο ρυθμός μεταβολής της πρώτης συντεταγμένης του (ως προς τον χρόνο) είναι διπλάσιος από τον ρυθμό μεταβολής της δεύτερης συντεταγμένης του (ως προς τον χρόνο); Καλό θα ήταν να μη λύσετε ως προς οποιαδήποτε από τις μεταβλητές x, y.*

Λύση: Ο ρυθμός μεταβολής της συντεταγμένης x ως προς τον χρόνο t είναι $\frac{dx}{dt}$ και ο ρυθμός μεταβολής της y ως προς t είναι $\frac{dy}{dt}$.
Από την σχέση $y^2 = 4x^3$ ανάμεσα στις x και y βρίσκουμε

$$2y\,\tfrac{dy}{dt} = 12x^2\,\tfrac{dx}{dt}.$$

Την χρονική στιγμή που ισχύει $\frac{dx}{dt}=2\,\frac{dy}{dt}$ θα έχουμε

$$2y\,\frac{dy}{dt}=24x^2\,\frac{dy}{dt}.$$

Αν την ίδια χρονική στιγμή είναι $\frac{dy}{dt}\neq 0$, τότε συνεπάγεται $2y=24x^2$ ή, ισοδύναμα, $y=12x^2$ και τότε από την σχέση $y^2=4x^3$ παίρνουμε $144x^4=4x^3$ και άρα $x=0$ ή $x=\frac{1}{36}$. Επομένως, το όχημα βρίσκεται είτε στην θέση $(0,0)$ είτε στην θέση $(\frac{1}{36},\frac{1}{108})$.
Αν, όμως την ίδια χρονική στιγμή είναι $\frac{dy}{dt}=0$, τότε η σχέση $2y\,\frac{dy}{dt}=24x^2\,\frac{dy}{dt}$ γράφεται $0=0$ και οι συντεταγμένες x,y δεν προσδιορίζονται. Δηλαδή, το περιστατικό μπορεί να συμβεί σε οποιοδήποτε σημείο της καμπύλης.

Άσκηση 5.2.28. *Επιστρατεύστε τη φαντασία σας και δικαιολογήστε τον όρο "κανόνας αλυσίδας" για τη σχέση $\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\,\frac{dy}{dx}$ για την παράγωγο σύνθετης συνάρτησης.*

Λύση: Η αλυσίδα ενός ποδήλατου γυρνά γύρω από δύο κυκλικούς δίσκους. Όταν περιστρέφεται ο πρώτος δίσκος, η αλυσίδα μεταφέρει την κίνησή του (χωρίς ολίσθηση) στον δεύτερο δίσκο.
Έστω $r>0$ και $R>0$ οι ακτίνες του πρώτου και του δεύτερου δίσκου. Όταν ο πρώτος δίσκος περιστραφεί κατά μια γωνία $d\theta$, τότε το τυχόν σημείο της αλυσίδας θα μετακινηθεί κατά $dl=rd\theta$. Αυτό θα προκαλέσει περιστροφή στον δεύτερο δίσκο κατά κάποια γωνία $d\Theta$ έτσι ώστε να είναι $dl=Rd\Theta$. Έχουμε, λοιπόν, την σχέση $Rd\Theta=rd\theta$ ανάμεσα στις δύο γωνίες και από αυτήν την σχέση συνεπάγεται

$$\frac{d\Theta}{d\theta}=\frac{r}{R}$$

για τον ρυθμό μεταβολής της Θ ως προς την θ.
Τώρα, έστω ότι για την περιστροφή του πρώτου δίσκου κατά γωνία $d\theta$ χρειάζεται χρόνος dt. Ο ίδιος χρόνος dt χρειάζεται, φυσικά, για την αντίστοιχη περιστροφή του δεύτερου δίσκου κατά γωνία $d\Theta$.
Από τη σχέση $Rd\Theta=rd\theta$ προκύπτει $R\,\frac{d\Theta}{dt}=r\,\frac{d\theta}{dt}$ και, διαιρώντας με R, βρίσκουμε

$$\frac{d\Theta}{dt}=\frac{r}{R}\,\frac{d\theta}{dt}=\frac{d\Theta}{d\theta}\,\frac{d\theta}{dt}.$$

Αυτός ακριβώς είναι ο κανόνας της "αλυσίδας".

Άσκηση 5.3.3. *Μπορεί, ανάλογα με την τιμή της παραμέτρου c, η $x^3-12x=c$ να έχει δύο διαφορετικές λύσεις στο $[-2,2]$; στο $(-\infty,-2]$; στο $[2,+\infty)$;*

Λύση: Αν η $f(x)=x^3-12x$ έχει την ίδια τιμή c σε δύο διαφορετικά σημεία ενός διαστήματος I, τότε η $f'(x)=3x^2-12=3(x-2)(x+2)=0$ έχει τουλάχιστον μία λύση ανάμεσα σ' αυτά τα δύο σημεία και άρα έχει τουλάχιστον μία λύση στο εσωτερικό του I. Όμως, οι λύσεις της $f'(x)=0$ είναι οι ± 2, οπότε το I πρέπει να περιέχει έναν τουλάχιστον από τους ± 2 ως εσωτερικό του σημείο και άρα το I δεν μπορεί να είναι κανένα από τα $[-2,2]$, $(-\infty,-2]$, $[2,+\infty)$.

Άσκηση 5.3.4. *Αποδείξτε ότι η $x^2=x\sin x+\cos x$ έχει ακριβώς δύο διαφορετικές λύσεις και προσδιορίστε τη θέση τους σε σχέση με τον 0.*

Λύση: Για την $f(x)=x^2-x\sin x-\cos x$ έχουμε $f(-\pi)=\pi^2+1>0$, $f(0)=-1<0$ και $f(\pi)=\pi^2+1>0$. Άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία λύση σε καθένα από τα διαστήματα $(-\pi,0)$, $(0,\pi)$. Έστω $x_1\in(-\pi,0)$ και $x_2\in(0,\pi)$ δύο τέτοιες λύσεις της $f(x)=0$. Αν υπάρχει και τρίτη λύση x_3 της $f(x)=0$, τότε οι x_1,x_2,x_3 δημιουργούν δύο διαστήματα χωρίς κοινά εσωτερικά σημεία και σε καθένα από αυτά υπάρχει τουλάχιστον μία λύση της $f'(x)=0$ και άρα η $f'(x)=0$ έχει δύο τουλάχιστον διαφορετικές λύσεις. Όμως, η $f'(x)=0$ γράφεται $2x-x\cos x=0$ ή, ισοδύναμα, $x(2-\cos x)=0$ και έτσι βλέπουμε ότι η $f'(x)=0$ έχει ακριβώς μία λύση, τον 0.
Άρα η $f(x)=0$ έχει ακριβώς δύο λύσεις x_1,x_2 με $x_1<0<x_2$.

Άσκηση 5.3.6. *Αποδείξτε ότι η εξίσωση $x^n+ax+b=0$ έχει το πολύ δύο λύσεις, αν ο n είναι άρτιος, και το πολύ τρεις λύσεις, αν ο n είναι περιττός.*

Λύση: Έστω ότι ο n είναι άρτιος και έστω ότι η εξίσωση $f(x) = x^n + ax + b = 0$ έχει τρεις λύσεις, τις x_1, x_2, x_2 με $x_1 < x_2 < x_3$. Τότε η εξίσωση $f'(x) = nx^{n-1} + a = 0$ έχει τουλάχιστον δύο λύσεις, τουλάχιστον μία σε καθένα από τα διαστήματα (x_1, x_2), (x_2, x_3). Όμως, επειδή ο $n-1$ είναι περιττός, η f' είναι γνησίως αύξουσα και καταλήγουμε σε άτοπο.

Τώρα, έστω ότι ο n είναι περιττός και έστω ότι η εξίσωση $f(x) = x^n + ax + b = 0$ έχει τέσσερις λύσεις, τις x_1, x_2, x_3, x_4 με $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$. Τότε η εξίσωση $f'(x) = nx^{n-1} + a = 0$ έχει τουλάχιστον τρεις λύσεις, τουλάχιστον μία σε καθένα από τα διαστήματα (x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_4). Όμως, τότε η εξίσωση $(f')'(x) = n(n-1)x^{n-2} = 0$ έχει τουλάχιστον δύο λύσεις, τουλάχιστον μία σε καθένα από τα δύο διαστήματα που σχηματίζουν τρεις λύσεις της $f'(x) = 0$. Αυτό είναι άτοπο, διότι η $(f')'(x) = n(n-1)x^{n-2} = 0$ έχει μόνο μία λύση, τον 0.

Άσκηση 5.3.7. *Αποδείξτε ότι η εξίσωση $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} = 0$ έχει ακριβώς μία λύση, αν ο n είναι περιττός, και καμιά λύση, αν ο n είναι άρτιος.*

Λύση: Θα χρησιμοποιήσουμε την αρχή της επαγωγής.
Ο 1 είναι περιττός και η εξίσωση $1 + \frac{x}{1!} = 0$ έχει ακριβώς μία λύση, τον -1.
Έστω ότι για κάποιον n η εξίσωση $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} = 0$ έχει ακριβώς μία λύση, αν ο n είναι περιττός, και καμιά λύση, αν ο n είναι άρτιος.
Θεωρούμε την εξίσωση $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$.
Έστω ότι ο $n+1$ είναι περιττός. Τότε η εξίσωση έχει τουλάχιστον μία λύση διότι το πολυώνυμο $P(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ είναι περιττού βαθμού. Αν η εξίσωση έχει και δεύτερη λύση, τότε ανάμεσά τους υπάρχει τουλάχιστον μία λύση της $P'(x) = 0$, δηλαδή της $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} = 0$. Όμως, αυτό είναι άτοπο, αφού ο n είναι άρτιος. Άρα η εξίσωση έχει ακριβώς μία λύση.
Έστω ότι ο $n+1$ είναι άρτιος. Τότε το πολυώνυμο $P(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ έχει ελάχιστη τιμή, έστω l, και το σύνολο τιμών του είναι το $[l, +\infty)$. Τότε υπάρχει x_0 ώστε $P(x_0) = l$ και, επειδή, ο l είναι η ελάχιστη τιμή του P, είναι $P'(x_0) = 0$, δηλαδή

$$P'(x_0) = 1 + \frac{x_0}{1!} + \frac{{x_0}^2}{2!} + \cdots + \frac{{x_0}^n}{n!} = 0.$$

Προφανώς, συνεπάγεται $x_0 < 0$ και έχουμε

$$l = P(x_0) = P'(x_0) + \frac{{x_0}^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{{x_0}^{n+1}}{(n+1)!} > 0,$$

διότι ο $n+1$ είναι άρτιος. Άρα η ελάχιστη τιμή l του P είναι θετική και, επομένως, η εξίσωση $P(x) = 0$ δεν έχει καμιά λύση.

Άσκηση 5.3.8. *Αποδείξτε ότι η εξίσωση $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$ έχει ακριβώς μία λύση.*

Λύση: Η εξίσωση $f(x) = e^x - 1 - \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \cdots - \frac{x^n}{n!} = 0$ έχει λύση, τον 0.
Για να δούμε ότι η λύση της $f(x) = 0$ είναι μοναδική θα χρησιμοποιήσουμε την αρχή της επαγωγής.
Αν $n = 0$, τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ γράφεται $e^x - 1 = 0$ και η μοναδική λύση της είναι ο 0.
Έστω ότι για κάποιον $n \geq 0$ η $e^x - 1 - \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \cdots - \frac{x^n}{n!} = 0$ έχει μοναδική λύση τον 0.
Αν η $f(x) = e^x - 1 - \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \cdots - \frac{x^n}{n!} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ έχει, εκτός του 0, και δεύτερη λύση ξ, τότε ανάμεσα στους 0 και ξ υπάρχει τουλάχιστον μία λύση της $f'(x) = 0$. Επομένως, η $f'(x) = 0$ έχει λύση $\neq 0$. Όμως, η $f'(x) = 0$ γράφεται $e^x - 1 - \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \cdots - \frac{x^n}{n!} = 0$ και καταλήγουμε σε άτοπο.
Άρα η $e^x - 1 - \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \cdots - \frac{x^n}{n!} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ έχει μοναδική λύση τον 0.

Άσκηση 5.3.9. [α] *Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής στο I ώστε να ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του I. Αποδείξτε ότι η f είναι ένα-προς-ένα στο I.*

[β] *Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής στο I και έστω ότι ισχύει $|f'(x)| \leq M$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του I. Αποδείξτε ότι υπάρχει $c \neq 0$ ώστε η $g : I \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = x + cf(x)$*

να είναι ένα-προς-ένα στο I.

Λύση: [α] Έστω $x_1, x_2 \in I$ με $x_1 < x_2$.
Αν $f(x_1) = f(x_2)$, συνεπάγεται ότι υπάρχει εσωτερικό σημείο ξ του $[x_1, x_2]$ και άρα και του I ώστε $f'(\xi) = 0$. Αυτό είναι άτοπο και, επομένως, $f(x_1) \neq f(x_2)$.
Άρα η f είναι ένα-προς-ένα στο I.

[β] Για να εφαρμόσουμε το αποτέλεσμα του [α], αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει $c \neq 0$ ώστε για την συνάρτηση $g(x) = x + cf(x)$ να ισχύει $g'(x) \neq 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του I.
Το $g'(x) \neq 0$ είναι ισοδύναμο με το $1 + cf'(x) \neq 0$ κι αυτό με το $f'(x) \neq -\frac{1}{c}$.
Τώρα, επειδή ισχύει $|f'(x)| \leq M$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του I, για να εξασφαλίσουμε ότι ισχύει $f'(x) \neq -\frac{1}{c}$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του I, αρκεί να επιλέξουμε τον c έτσι ώστε να είναι $M < |-\frac{1}{c}|$ ή, ισοδύναμα, $0 < |c| < \frac{1}{M}$.
Άρα για οποιονδήποτε c με $0 < |c| < \frac{1}{M}$ η $g(x) = x + cf(x)$ είναι ένα-προς-ένα στο I.

Άσκηση 5.3.10. *Έστω ότι η $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a, b]$ και έχει παράγωγο στο (a, b) και $f(a) = f(b) = 0$. Αποδείξτε ότι για κάθε λ υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε $f'(\xi) = \lambda f(\xi)$.*

Λύση: Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = e^{-\lambda x} f(x)$, η οποία είναι συνεχής στο $[a, b]$, έχει παράγωγο στο (a, b) και ισχύει $g(a) = g(b) = 0$. Τότε υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε $g'(\xi) = 0$ ή, ισοδύναμα, $-\lambda e^{-\lambda\xi} f(\xi) + e^{-\lambda\xi} f'(\xi) = 0$ ή, ισοδύναμα, $f'(\xi) = \lambda f(\xi)$.

Άσκηση 5.3.11. [α] *Με το θεώρημα του Rolle και την αρχή της επαγωγής, αποδείξτε ότι κάθε πολυώνυμο βαθμού n έχει το πολύ n διαφορετικές ρίζες.*

[β] *Έστω $a_1 < \ldots < a_n$ και η συνάρτηση $P(x) = (x - a_1) \cdots (x - a_n)$. Αποδείξτε ότι η P' έχει ακριβώς $n - 1$ ρίζες. Προσδιορίστε τη θέση των ριζών της P' σε σχέση με τους $a_1, \ldots, a_n$.*

[γ] *Δείτε την άσκηση 5.2.8.*

Έστω πολυώνυμο P και έστω $\xi_1, \ldots, \xi_m$ οι διαφορετικές ανά δύο ρίζες του. Έστω $k_1, \ldots, k_m$ οι αντίστοιχες πολλαπλότητες των ριζών του P, οπότε ισχύει $P(x) = (x - \xi_1)^{k_1} \cdots (x - \xi_m)^{k_m} Q(x)$ για κάθε x, όπου Q είναι κάποιο πολυώνυμο χωρίς καμία ρίζα. Τότε λέμε ότι το P έχει ακριβώς $k = k_1 + \cdots + k_m$ ρίζες ή ότι το πλήθος των ριζών του P είναι k.

Αν το πλήθος των ριζών του πολυωνύμου P είναι k, αποδείξτε ότι το πλήθος των ριζών του P' είναι $\geq k - 1$. Ειδικότερα, αν ο βαθμός του P είναι n και το πλήθος των ριζών του P είναι n, αποδείξτε ότι το πλήθος των ριζών του P' είναι $n - 1$.

Λύση: [α] Κάθε πολυώνυμο $P(x) = a_1 x + a_0$ βαθμού 1 (δηλαδή, με $a_1 \neq 0$) έχει ακριβώς μία ρίζα, τον $-\frac{a_0}{a_1}$.
Έστω ότι κάθε πολυώνυμο βαθμού n έχει το πολύ n διαφορετικές ρίζες.
Έστω πολυώνυμο $P(x) = a_{n+1} x^{n+1} + \cdots + a_1 x + a_0$ βαθμού $n + 1$, οπότε $a_{n+1} \neq 0$ και έστω (για άτοπο) ότι έχει τουλάχιστον $n + 2$ διαφορετικές ρίζες. Ονομάζουμε $x_1, \ldots, x_{n+2}$ αυτές τις ρίζες έτσι ώστε να είναι $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1} < x_{n+2}$.
Τότε σε καθένα από τα διαστήματα (x_k, x_{k+1}) υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα του πολυωνύμου $P'(x) = (n + 1)a_{n+1} x^n + \cdots + a_1$ και άρα το πολυώνυμο αυτό έχει τουλάχιστον $n + 1$ διαφορετικές ρίζες. Αυτό είναι άτοπο, διότι το P' έχει βαθμό n.

[β] Το πολυώνυμο P είναι βαθμού n, οπότε το πολυώνυμο P' είναι βαθμού $n - 1$. Βάσει του αποτελέσματος του [α], το P' έχει το πολύ $n - 1$ διαφορετικές ρίζες. Όμως, σε καθένα από τα $n - 1$ διαστήματα (a_k, a_{k+1}) το P' έχει τουλάχιστον μία ρίζα. Άρα το P' έχει ακριβώς $n - 1$ ρίζες και είναι ακριβώς μία σε καθένα από τα (a_k, a_{k+1}).

[γ] Έστω ότι το πλήθος των ριζών του πολυωνύμου P είναι $k = k_1 + \cdots + k_m$. Διατάσσουμε τις ρίζες $\xi_1, \ldots, \xi_m$ έτσι ώστε να είναι $\xi_1 < \ldots < \xi_m$.
Τότε σε καθένα από τα $m - 1$ διαστήματα (ξ_j, ξ_{j+1}) υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα του P', οπότε έχουμε τουλάχιστον $m - 1$ διαφορετικές ρίζες του P'. Επίσης, κάθε ξ_j είναι ρίζα πολλαπλότητας $k_j - 1$ του P'. Άρα το P' έχει τουλάχιστον

$$m - 1 + (k_1 - 1) + \cdots + (k_m - 1) = k - 1$$

ρίζες.
Τέλος, έστω ότι ο βαθμός του P είναι n και ότι το πλήθος των ριζών του P είναι κι αυτό n. Τότε το P' έχει τουλάχιστον $n-1$ ρίζες αλλά και το πολύ $n-1$ ρίζες, οπότε έχει ακριβώς $n-1$ ρίζες.

Άσκηση 5.3.13. *Έστω $f:[\xi-h,\xi+h]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $[\xi-h,\xi+h]$ και παραγωγίσιμη στο $(\xi-h,\xi)\cup(\xi,\xi+h)$.*
Αποδείξτε ότι υπάρχει $\zeta\in(0,h)$ ώστε $\frac{f(\xi+h)-f(\xi-h)}{h}=f'(\xi+\zeta)+f'(\xi-\zeta)$.
Αποδείξτε ότι υπάρχει $\zeta\in(0,h)$ ώστε $\frac{f(\xi+h)-2f(\xi)+f(\xi-h)}{h}=f'(\xi+\zeta)-f'(\xi-\zeta)$.

Υπόδειξη: Για το πρώτο ερώτημα θεωρούμε την συνάρτηση $g(t)=f(\xi+t)-f(\xi-t)$, η οποία είναι συνεχής στο $[0,h]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,h)$.
Για το δεύτερο ερώτημα θεωρούμε την συνάρτηση $g(t)=f(\xi+t)+f(\xi-t)$, η οποία είναι συνεχής στο $[0,h]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,h)$.

Άσκηση 5.3.14. *Έστω $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και έστω ότι ισχύει $|f'(x)|\le\frac{1}{x}$ για κάθε $x>0$. Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty}(f(x+\sqrt{x})-f(x))=0$.*

Λύση: Για κάθε $x>0$ υπάρχει ξ με $x<\xi<x+\sqrt{x}$ ώστε $\frac{f(x+\sqrt{x})-f(x)}{(x+\sqrt{x})-x}=f'(\xi)$.
Από αυτήν την σχέση συνεπάγεται ότι για κάθε $x>0$ ισχύει

$$|f(x+\sqrt{x})-f(x)|=|f'(\xi)|\sqrt{x}\le\tfrac{1}{\xi}\sqrt{x}<\tfrac{1}{x}\sqrt{x}=\tfrac{1}{\sqrt{x}}$$

και άρα $\lim_{x\to+\infty}(f(x+\sqrt{x})-f(x))=0$.

Άσκηση 5.3.15. *Έστω f παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και $\lim_{x\to+\infty}f'(x)=0$. Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty}\big(f(x+1)-f(x)\big)=0$.*

Λύση: Για κάθε $x>0$ υπάρχει ξ με $x<\xi<x+1$ ώστε

$$f(x+1)-f(x)=\tfrac{f(x+1)-f(x)}{(x+1)-x}=f'(\xi). \tag{14.89}$$

Έστω $\epsilon>0$. Επειδή $\lim_{x\to+\infty}f'(x)=0$, υπάρχει $N>0$ ώστε να ισχύει

$$|f'(x)|<\epsilon \qquad \text{για κάθε } x>N.$$

Τώρα έστω $x>N$. Θεωρούμε έναν αντίστοιχο $\xi\in(x,x+1)$ για τον οποίο ισχύει η (14.89). Τότε είναι $\xi>N$, οπότε $|f'(\xi)|<\epsilon$ και, επομένως, $|f(x+1)-f(x)|=|f'(\xi)|<\epsilon$.
Άρα για κάθε $\epsilon>0$ υπάρχει $N>0$ ώστε για κάθε $x>N$ να ισχύει $|f(x+1)-f(x)|<\epsilon$. Άρα $\lim_{x\to+\infty}\big(f(x+1)-f(x)\big)=0$.
Σχόλιο. Ξεκινώντας από την (14.89) και χωρίς να χρησιμοποιήσουμε ϵ και N, δηλαδή χωρίς να χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό του ορίου, μπορούμε να δώσουμε την εξής "απλοϊκή" λύση: όταν $x\to+\infty$, τότε $\xi\to+\infty$ (επειδή $x<\xi<x+1$), οπότε, σύμφωνα με την υπόθεση, $f'(\xi)\to0$, οπότε $f(x+1)-f(x)\to0$. Αυτή η απόδειξη δεν είναι εντελώς αυστηρή διότι ο ξ δεν είναι συνάρτηση του x με την αυστηρή έννοια (μπορεί στον ίδιο x να αντιστοιχούν παραπάνω από ένας ξ). Όμως, η ουσία της απόδειξης είναι σωστή και πολλές φορές αυτού του τύπου η απόδειξη είναι αποδεκτή. Μάλιστα, όταν κάποιος έχει αποκτήσει αρκετή εμπειρία με τις αυστηρές αποδείξεις και αισθάνεται αυτοπεποίθηση, μπορεί να κάνει τέτοιου είδους μη-αυστηρές αποδείξεις.
Αν θέλουμε να κάνουμε μια απολύτως αυστηρή απόδειξη χρησιμοποιώντας την προηγούμενη ιδέα, δηλαδή ότι $\xi\to+\infty$ όταν $x\to+\infty$, τότε σκεφτόμαστε ως εξής.
Θεωρούμε τυχούσα ακολουθία (x_n) στο $(0,+\infty)$ με $x_n\to+\infty$. Για κάθε n θεωρούμε έναν αντίστοιχο $\xi_n\in(x_n,x_n+1)$ για τον οποίο ισχύει η (14.89), δηλαδή $f(x_n+1)-f(x_n)=f'(\xi_n)$. Επειδή $x_n\to+\infty$ και ισχύει $x_n\le\xi_n$ για κάθε n, συνεπάγεται ότι $\xi_n\to+\infty$. Τώρα, επειδή $\lim_{x\to+\infty}f'(x)=0$, συνεπάγεται $f'(\xi_n)\to0$ και άρα $f(x_n+1)-f(x_n)\to0$.
Έτσι έχουμε αποδείξει ότι για κάθε (x_n) στο $(0,+\infty)$ με $x_n\to+\infty$ ισχύει $f(x_n+1)-f(x_n)\to0$. Συμπεραίνουμε ότι $\lim_{x\to+\infty}\big(f(x+1)-f(x)\big)=0$.

Άσκηση 5.3.16. *Έστω f συνεχής στο $[a,b)$ και παραγωγίσιμη στο (a,b). Αν το $\lim_{x\to a+} f'(x)$ υπάρχει, αποδείξτε ότι η υπάρχει η $f'(a)$ και $f'(a) = \lim_{x\to a+} f'(x)$.*

Λύση: Έστω $\lim_{x\to a+} f'(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$.
Θεωρούμε την περίπτωση $l \in \mathbb{R}$. Οι περιπτώσεις $l = \pm\infty$ έχουν παρόμοια αντιμετώπιση.
Αν $x \in (a,b)$, τότε υπάρχει ξ με $a < \xi < x$ ώστε

$$\tfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(\xi) \tag{14.90}$$

Έστω $\epsilon > 0$. Επειδή $\lim_{x\to a+} f'(x) = l$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει

$$|f'(x) - l| < \epsilon \qquad \text{για κάθε } x \text{ με } a < x < a+\delta.$$

Τώρα έστω $a < x < a+\delta$. Θεωρούμε τον αντίστοιχο $\xi \in (a,x)$ για το οποίο ισχύει η (14.90). Τότε είναι $a < \xi < a+\delta$, οπότε $|f'(\xi) - l| < \epsilon$ και άρα $|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - l| = |f'(\xi) - l| < \epsilon$.
Επομένως, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - l| < \epsilon$ για κάθε x με $a < x < \delta$. Άρα $\lim_{x\to a+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l$ και, επομένως, $f'(a) = l$.

Άσκηση 5.3.17. *Αν στην άσκηση 5.2.20 το A είναι διάστημα, η f είναι παραγωγίσιμη στο A και η f' είναι συνεχής στον ξ, αποδείξτε ότι $\frac{f(x_n{}')-f(x_n{}'')}{x_n{}'-x_n{}''} \to f'(\xi)$.*

Λύση: Για κάθε n υπάρχει ξ_n ανάμεσα στους $x_n{}'$ και $x_n{}''$ ώστε

$$\tfrac{f(x_n{}')-f(x_n{}'')}{x_n{}'-x_n{}''} = f'(\xi_n).$$

Επειδή $x_n{}' \to \xi$ και $x_n{}'' \to \xi$, συνεπάγεται $\xi_n \to \xi$. Και, επειδή η f' είναι συνεχής στον ξ παίρνουμε ότι $f'(\xi_n) \to f'(\xi)$.

Άσκηση 5.3.18. *Γνωρίζουμε ότι η $f(x) = \begin{cases} x\sin(1/x), & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ δεν έχει παράγωγο στον 0. Έχει η f τον 0 ως σημείο τοπικού ακροτάτου;*
Θεωρήστε την $f(x) = \begin{cases} |x|(2+\sin(1/x)), & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ Έχει η f παράγωγο στον 0; Έχει η f τον 0 ως σημείο τοπικού ακροτάτου;
Μπορείτε να βρείτε απλή άρτια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε $f'(0) = 0$ και ο 0 να μην είναι σημείο τοπικού ακροτάτου της f;

Λύση: Η πρώτη συνάρτηση. Αν $x_n{}' = \frac{1}{(\pi/2)+2n\pi}$ και $x_n{}'' = \frac{1}{(-\pi/2)+2n\pi}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε έχουμε $x_n{}' \to 0$ και $x_n{}'' \to 0$ και $f(x_n{}') = x_n{}' > 0$ και $f(x_n{}'') = -x_n{}'' < 0$ για κάθε n.
Άρα σε οσοδήποτε μικρή περιοχή του 0 υπάρχουν σημεία στα οποία η f έχει τιμές $> f(0)$ και σημεία στα οποία η f έχει τιμές $< f(0)$. Άρα ο 0 δεν είναι σημείο τοπικού ακροτάτου της f.
Η δεύτερη συνάρτηση. Η f δεν έχει παράγωγο στον 0. Πράγματι, κανένα από τα πλευρικά όρια

$$\lim_{x\to 0-} \tfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\lim_{x\to 0-} \left(2+\sin\tfrac{1}{x}\right), \quad \lim_{x\to 0+} \tfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\lim_{x\to 0-} \left(2+\sin\tfrac{1}{x}\right)$$

δεν υπάρχει.
Ο 0 είναι σημείο (ολικού) ελαχίστου της f αφού ισχύει

$$f(x) = |x|(2+\sin\tfrac{1}{x}) \geq |x|(2-1) = |x| > 0 = f(0)$$

για κάθε $x \neq 0$.

Το τρίτο ερώτημα. Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2\cos(1/x), & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ είναι άρτια. Επίσης, είναι

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \tfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} x\cos\tfrac{1}{x} = 0,$$

αλλά ο 0 δεν είναι σημείο τοπικού ακροτάτου της f. Αυτό το βλέπουμε όπως με την πρώτη συνάρτηση, χρησιμοποιώντας τους $x_n{}' = \frac{1}{2n\pi}$ και $x_n{}'' = \frac{1}{\pi+2n\pi}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Άσκηση 5.3.19. *Έστω $f, g : I \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες στο διάστημα I. Η συνάρτηση $W(f,g) : I \to \mathbb{R}$ με τύπο*

$$W(f,g)(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix} = f(x)g'(x) - f'(x)g(x)$$

ονομάζεται ορίζουσα Wronski των f και g στο διάστημα I.

Έστω ότι ισχύει $W(f,g)(x) \neq 0$ για κάθε $x \in I$. Δείτε την άσκηση 4.2.10 και αποδείξτε ότι οι ρίζες της f, δηλαδή οι λύσεις της $f(x) = 0$, είναι διαδοχικές. Αυτό σημαίνει ότι, αν ξ είναι ρίζα της f και αν υπάρχει άλλη ρίζα της f μεγαλύτερη από τον ξ, τότε υπάρχει ελάχιστη ρίζα της f μεγαλύτερη από τον ξ (δηλαδή, η αμέσως επόμενη ρίζα) και, επίσης, αν υπάρχει άλλη ρίζα της f μικρότερη από τον ξ, τότε υπάρχει μέγιστη ρίζα της f μικρότερη από τον ξ (δηλαδή, η αμέσως προηγούμενη ρίζα). Το ίδιο ισχύει και για τη συνάρτηση g. Αποδείξτε, επίσης, ότι ανάμεσα σε δύο οποιεσδήποτε διαδοχικές ρίζες της f βρίσκεται ακριβώς μία ρίζα της g και αντιστρόφως. Υπάρχει περίπτωση να συμπέσουν μια ρίζα της f και μια ρίζα της g ;

Λύση: Το πρώτο ερώτημα. Έστω ξ μια ρίζα της f και $\eta > \xi$ μια ακόμη ρίζα της f στο διάστημα I. Επειδή $f(\xi) = 0$ και $W(f,g)(\xi) \neq 0$, συνεπάγεται $f'(\xi) \neq 0$.
Επειδή $\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = f'(\xi) \neq 0$, συνεπάγεται ότι ισχύει $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \neq 0$ ή, ισοδύναμα, $f(x) \neq f(\xi) = 0$ κοντά στον ξ. Δηλαδή, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $f(x) \neq 0$ για κάθε x στο διάστημα $(\xi, \xi+\delta)$.
Επειδή $\xi < \eta$ και $f(\eta) = 0$, προφανώς, είναι $\xi < \xi + \delta \leq \eta$ και, αν επιλέξουμε οποιονδήποτε b ώστε $\xi < b < \xi + \delta \leq \eta$, τότε έχουμε $f(b) \neq 0$ και $f(\eta) = 0$.
Τώρα, από το αποτέλεσμα της άσκησης 4.2.10 συνεπάγεται ότι υπάρχει ελάχιστη ρίζα της f μεγαλύτερη από τον b και, επειδή δεν υπάρχει ρίζα της f ανάμεσα στους ξ και b, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει ελάχιστη ρίζα της f μεγαλύτερη από τον ξ.
Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι, αν υπάρχει άλλη ρίζα της f μικρότερη από τον ξ, τότε υπάρχει μέγιστη ρίζα της f μικρότερη από τον ξ.
Προφανώς, τα ίδια ισχύουν και για την g.
Το δεύτερο ερώτημα. Παρατηρούμε ότι δεν μπορούν να συμπέσουν μια ρίζα της f και μια ρίζα της g, διότι σε μιά κοινή ρίζα x των f, g θα είχαμε $W(f,g)(x) = 0$.
Τώρα, έστω $a, b \in I$ με $a < b$ δύο διαδοχικές ρίζες της f. Δηλαδή, ισχύει $f(a) = f(b) = 0$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a,b)$.
Υποθέτουμε (για άτοπο) ότι δεν υπάρχει ρίζα της g ανάμεσα στους a, b, δηλαδή ότι ισχύει $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a,b)$. Επειδή, όπως είδαμε, είναι και $g(a) \neq 0$ και $g(b) \neq 0$, συνεπάγεται ότι ισχύει $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [a,b]$.
Επομένως, η συνάρτηση $h = \frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ και έχουμε ότι $h(a) = h(b) = 0$. Άρα υπάρχει $\xi \in (a,b)$ ώστε

$$0 = h'(\xi) = \tfrac{f'(\xi)g(\xi) - f(\xi)g'(\xi)}{(g(\xi))^2}.$$

Δηλαδή, είναι $W(f,g)(\xi) = 0$ και καταλήγουμε σε άτοπο.
Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι ανάμεσα σε δύο διαδοχικές ρίζες της f υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα της g. Φυσικά, ισχύει και το συμμετρικό: ανάμεσα σε δύο διαδοχικές ρίζες της g υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα της f.
Τώρα, έστω δύο διαδοχικές ρίζες a, b της f με $a < b$. Υποθέτουμε (για άτοπο) ότι ανάμεσα στους a, b υπάρχουν τουλάχιστον δύο ρίζες της g και, επομένως, ανάμεσα στους a, b υπάρχουν τουλάχιστον δύο διαδοχικές ρίζες c, d της g με $c < d$. Δηλαδή, είναι $a < c < d < b$. Τότε, όμως, ανάμεσα στους c, d υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα της f και καταλήγουμε σε άτοπο, αφού οι ρίζες a, b της f είναι διαδοχικές.
Άρα ανάμεσα σε δύο διαδοχικές ρίζες της f υπάρχει ακριβώς μία ρίζα της g και, φυσικά, ισχύει και το συμμετρικό αποτέλεσμα με εναλλαγή των f, g.

Άσκηση 5.3.20. [α] *Έστω f συνεχής στο διάστημα I και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του I. Αποδείξτε ότι ισχύει $|f'(x)| \leq M$ για κάθε x στο εσωτερικό του I αν και μόνο αν ισχύει $|f(x') - f(x'')| \leq M|x' - x''|$ για κάθε x', x'' στο I.*

[β] *Έστω ότι η f είναι συνεχής στο διάστημα I και ότι ισχύει $|f'(x)| \leq M$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του I. Αποδείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο I.*

Εφαρμόζεται το κριτήριο αυτό στη συνάρτηση $\sqrt{x}$ στο διάστημα $[0,1]$; Είναι η συνάρτηση αυτή ομοιόμορφα συνεχής στο $[0,1]$; Τί γίνεται με την ίδια συνάρτηση στο διάστημα $[1,+\infty)$;

Λύση: [α] Έστω ότι ισχύει $|f'(x)| \leq M$ για κάθε x στο εσωτερικό του I.
Έστω τυχόντες x', x'' στο I.
Αν $x' = x''$, τότε η $|f(x') - f(x'')| \leq M|x' - x''|$ είναι, προφανώς, σωστή.
Αν $x' \neq x''$, τότε υπάρχει ξ ανάμεσα στους x', x'' και, επομένως, στο εσωτερικό του διαστήματος I ώστε

$$\tfrac{f(x')-f(x'')}{x'-x''} = f'(\xi),$$

οπότε

$$\big|\tfrac{f(x')-f(x'')}{x'-x''}\big| = |f'(\xi)| \leq M$$

και άρα ισχύει η $|f(x') - f(x'')| \leq M|x' - x''|$.
Αντιστρόφως, έστω ότι ισχύει $|f(x') - f(x'')| \leq M|x' - x''|$ για κάθε x', x'' στο I.
Έστω x στο εσωτερικό του I και οποιοσδήποτε $t \in I$ με $t \neq x$, οπότε

$$\big|\tfrac{f(t)-f(x)}{t-x}\big| \leq M.$$

Από το $\lim_{t\to x} \frac{f(t)-f(x)}{t-x} = f'(x)$ έχουμε $\lim_{t\to x} \big|\frac{f(t)-f(x)}{t-x}\big| = |f'(x)|$ και άρα $|f'(x)| \leq M$.
[β] Το πρώτο συμπέρασμα είναι άμεση συνέπεια του αποτελέσματος του [α] και του αποτελέσματος της άσκησης 4.6.3 (με $\rho = 1$).
Η παράγωγος της $\sqrt{x}$ στο $(0,1)$ είναι η $\frac{1}{2\sqrt{x}}$, η οποία δεν είναι φραγμένη στο $(0,+\infty)$, αφού $\lim_{x\to 0+} \frac{1}{2\sqrt{x}} = +\infty$. Επομένως, δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε το προηγούμενο αποτέλεσμα για να συμπεράνουμε ότι η $\sqrt{x}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0,1]$. Εν τούτοις, η $\sqrt{x}$ *είναι* ομοιόμορφα συνεχής στο $[0,1]$ αφού είναι συνεχής στο $[0,1]$.
Αντιθέτως, η παράγωγος $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ είναι φραγμένη στο διάστημα $(1,+\infty)$, αφού ισχύει

$$\tfrac{1}{2\sqrt{x}} \leq \tfrac{1}{2} \qquad \text{για κάθε } x \in (1,+\infty).$$

Επομένως, η $\sqrt{x}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[1,+\infty)$. Παρατηρούμε ότι από την συνέχεια της $\sqrt{x}$ στο $[1,+\infty)$ δεν μπορούμε να συμπεράνουμε την ομοιόμορφη συνέχειά της στο ίδιο διάστημα, αφού το διάστημα αυτό δεν είναι κλειστό και φραγμένο.
Τώρα, σύμφωνα με το αποτέλεσμα της άσκησης 4.6.7, συμπεραίνουμε ότι η $\sqrt{x}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0,1] \cup [1,+\infty) = [0,+\infty)$.

Σχόλιο. Η απόδειξη που δώσαμε μόλις τώρα για την ομοιόμορφη συνέχεια της $\sqrt{x}$ στο $[0,+\infty)$ είναι προτιμότερη από την απόδειξη που δώσαμε στην άσκηση 4.6.2. Ο λόγος είναι ότι στην προηγούμενη απόδειξη χρησιμοποιήσαμε μια ανισότητα η οποία δεν είναι αρκετά γνωστή και πιθανόν να μην τήν θυμόμαστε καθε στιγμή. Επίσης, η ανισότητα εκείνη εφαρμόζεται μόνο στην συγκεκριμένη συνάρτηση. Η τωρινή λύση, όμως, είναι πιο μεθοδική και βασίζεται σε πιο γενικά αποτελέσματα τα οποία μπορούμε να θυμόμαστε πιο εύκολα και τα οποία εφαρμόζονται σε περισσότερες περιπτώσεις.

Άσκηση 5.3.21. [α] *Έστω f συνεχής στο $[a,b]$ και παραγωγίσιμη στο (a,b). Αν το γράφημα της f δεν ταυτίζεται με το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα σημεία $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$, αποδείξτε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (a,b)$ ώστε $f'(\xi_1) < \frac{f(b)-f(a)}{b-a} < f'(\xi_2)$.*

Λύση: Επειδή το γράφημα της f δεν ταυτίζεται με το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα σημεία

$(a, f(a))$ και $(b, f(b))$, συνεπάγεται ότι είτε υπάρχει σημείο του γραφήματος πάνω από το ευθύγραμμο τμήμα είτε υπάρχει σημείο του γραφήματος κάτω από το ευθύγραμμο τμήμα.
Έστω ότι έχουμε την πρώτη περίπτωση.
Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$ είναι η

$$y = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a).$$

Από την υπόθεση συνεπάγεται ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(\xi-a) + f(a) < f(\xi),$$

οπότε

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} < \frac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}.$$

Τώρα, έχουμε ότι υπάρχει $\xi_2 \in (a, \xi)$ ώστε $f'(\xi_2) = \frac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}$ και άρα $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} < f'(\xi_2)$.
Η εξίσωση της (ίδιας) ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$ είναι και η

$$y = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-b) + f(b).$$

Με τον ίδιο ξ έχουμε

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(\xi-b) + f(b) < f(\xi),$$

οπότε

$$\frac{f(b)-f(\xi)}{b-\xi} < \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Και πάλι έχουμε ότι υπάρχει $\xi_1 \in (\xi, b)$ ώστε $f'(\xi_1) = \frac{f(b)-f(\xi)}{b-\xi}$ και άρα $f'(\xi_1) < \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
Η λύση είναι όμοια στην περίπτωση που υπάρχει σημείο του γραφήματος κάτω από το ευθύγραμμο τμήμα.

Άσκηση 5.3.23. [α] *Αν η $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a, b]$ και αν $f'(a) < 0 < f'(b)$, αποδείξτε ότι οποιοδήποτε σημείο τοπικού ελαχίστου της f στο $[a, b]$ (την ύπαρξη ενός τέτοιου εγγυάται το θεώρημα μέγιστης - ελάχιστης τιμής) ανήκει οπωσδήποτε στο (a, b).*

[β] *Έστω ότι η $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και έχει παράγωγο στο $[a, b]$ και $f'(a) < \lambda < f'(b)$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε $f'(\xi) = \lambda$.*

[γ] *Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο I. Αν η f' είναι μονότονη στο I, αποδείξτε ότι είναι συνεχής στο I.*

Λύση: [α] Επειδή η f είναι συνεχής στο $[a, b]$, έχει ελάχιστη τιμή σε κάποιο σημείο του $[a, b]$.
Αν η f έχει ελάχιστη τιμή στο a, τότε για κάθε $x \in (a, b]$ ισχύει $f(x) \geq f(a)$ και, επομένως, $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$ και άρα

$$f'(a) = \lim_{x \to a+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0.$$

Αυτό είναι άτοπο, οπότε η f δεν έχει ελάχιστη τιμή στο a.
Αν η f έχει ελάχιστη τιμή στο b, τότε για κάθε $x \in [a, b)$ ισχύει $f(x) \geq f(b)$ και, επομένως, $\frac{f(x)-f(b)}{x-b} \leq 0$ και άρα

$$f'(b) = \lim_{x \to b-} \frac{f(x)-f(b)}{x-b} \leq 0.$$

Πάλι αυτό είναι άτοπο, οπότε η f δεν έχει ελάχιστη τιμή στο b.
Άρα η f έχει ελάχιστη τιμή σε κάποιο σημείο του (a, b).

[β] Η συνάρτηση $g(x) = f(x) - \lambda x$ είναι συνεχής στο $[a, b]$ και είναι $g'(a) = f'(a) - \lambda < 0$ και $g'(b) = f'(b) - \lambda > 0$. Από το αποτέλεσμα του [α] συνεπάγεται ότι η g έχει ελάχιστη τιμή σε κάποιον $\xi \in (a, b)$ και, επομένως, είναι $g'(\xi) = 0$ ή, ισοδύναμα, $f'(\xi) = \lambda$.

[γ] Αυτό είναι άμεση συνέπεια του αποτελέσματος του [β] και του αποτελέσματος είτε της άσκησης 4.4.23 είτε της άσκησης 4.1.15.

Άσκηση 5.3.24. [α] *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b]$, $f(a) = f(b)$ και έστω ότι οι $f'_-(x)$, $f'_+(x)$ υπάρχουν για κάθε $x \in (a,b)$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a,b)$ ώστε είτε $f'_-(\xi) \leq 0 \leq f'_+(\xi)$ είτε $f'_+(\xi) \leq 0 \leq f'_-(\xi)$.*
[β] *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b]$ και έστω ότι οι $f'_-(x)$, $f'_+(x)$ υπάρχουν για κάθε $x \in (a,b)$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a,b)$ ώστε είτε $f'_-(\xi) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f'_+(\xi)$ είτε $f'_+(\xi) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f'_-(\xi)$.*

Υπόδειξη: [α] Μιμηθείτε την απόδειξη του θεωρήματος του Rolle.

[β] Μιμηθείτε την απόδειξη του θεωρήματος μέσης τιμής του Lagrange.

Άσκηση 5.3.25. *Ορίζουμε συναρτήσεις $T_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$ ως εξής:*

$$T_0(x) = 1 \qquad \text{και} \qquad T_n(x) = \tfrac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x) \quad \text{για } -1 \leq x \leq 1 \text{ και } n \in \mathbb{N}.$$

Αποδείξτε ότι ισχύει $T_1(x) = x$ και $4T_{n+2}(x) = 4xT_{n+1}(x) - T_n(x)$ για κάθε $x \in [-1,1]$ και κάθε $n \geq 1$. Συμπεράνατε ότι για κάθε $n \geq 1$ η συνάρτηση T_n ταυτίζεται στο $[-1,1]$ με μια πολυωνυμική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ η οποία έχει βαθμό n και μεγιστοβάθμιο συντελεστή 1.
Αυτήν την πολυωνυμική συνάρτηση θα τη συμβολίζουμε, επίσης, T_n.
Υπολογίστε τα πολυώνυμα T_2, T_3, T_4.
Παρατηρήστε ότι $T_n(1) = \frac{1}{2^{n-1}}$ και $T_n(-1) = \frac{(-1)^n}{2^{n-1}}$ για κάθε $n \geq 1$.
Αποδείξτε ότι για κάθε $n \geq 1$ το πολυώνυμο T_n έχει ακριβώς n ρίζες: τους αριθμούς $x_k = \cos(\frac{2k-1}{2n}\pi)$ για $k = 1, \ldots, n$. Όλες αυτές οι ρίζες είναι στο διάστημα $(-1,1)$.
Παρατηρήστε ότι ισχύει $|T_n(x)| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ για κάθε $x \in [-1,1]$ και κάθε $n \geq 1$. Αποδείξτε ότι για κάθε $n \geq 1$ το πολυώνυμο $T_n{}'$ έχει ακριβώς $n-1$ ρίζες: τους αριθμούς $t_k = \cos(\frac{k}{n}\pi)$ για $k = 1, \ldots, n-1$. Όλες αυτές οι ρίζες είναι στο διάστημα $(-1,1)$. Βρείτε τις τιμές $T_n(t_k)$ για $k = 1, \ldots, n-1$.
Παρατηρήστε για κάθε $n \geq 1$ τη σχέση διάταξης ανάμεσα στις ρίζες του T_n και τις ρίζες του $T_n{}'$.
Αποδείξτε ότι για κάθε $n \geq 1$ και για κάθε πολυώνυμο P βαθμού n με μεγιστοβάθμιο συντελεστή 1 ισχύει $\frac{1}{2^{n-1}} = \max\{|T_n(x)| \mid -1 \leq x \leq 1\} \leq \max\{|P(x)| \mid -1 \leq x \leq 1\}$.
Για ποιά πολυώνυμα P βαθμού n με μεγιστοβάθμιο συντελεστή 1 γίνεται ισότητα η τελευταία ανισότητα;

Λύση: Το πρώτο ερώτημα. Είναι $T_1(x) = \cos(\arccos x) = x$ για κάθε $x \in [-1,1]$. Η απόδειξη είναι στην άσκηση 4.5.7.
Τώρα, εφαρμόζουμε την γνωστή ταυτότητα

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a \cos b$$

στους $a = (n+1)\arccos x$ και $b = \arccos x$ και βρίσκουμε

$$\begin{aligned}\cos((n+2)\arccos x) + \cos(n \arccos x) &= 2\cos(\arccos x)\cos((n+1)\arccos x)\\ &= 2x\cos((n+1)\arccos x).\end{aligned}$$

Αυτή η σχέση γράφεται

$$2^{n+1}T_{n+2}(x) + 2^{n-1}T_n(x) = 2^{n+1}xT_{n+1}(x)$$

από την οποία συνεπάγεται η

$$4T_{n+2}(x) = 4xT_{n+1}(x) - T_n(x) \qquad \text{για κάθε } x \in [-1,1]. \tag{14.91}$$

Για $n = 2$ έχουμε

$$T_2(x) = \tfrac{1}{2}\cos(2\arccos x) = (\cos(\arccos x))^2 - \tfrac{1}{2} = x^2 - \tfrac{1}{2} \qquad \text{για κάθε } x \in [-1,1].$$

Άρα για $n = 1$ και $n = 2$ η συνάρτηση T_n ταυτίζεται στο $[-1, 1]$ με μια πολυωνυμική συνάρτηση η οποία έχει βαθμό n και μεγιστοβάθμιο συντελεστή 1.
Τώρα, έστω ότι για κάποιον $n \in \mathbb{N}$ οι συναρτήσεις T_n και T_{n+1} ταυτίζονται στο $[-1, 1]$ με πολυωνυμικές συναρτήσεις οι οποίες έχουν βαθμούς n και $n + 1$, αντιστοίχως, και μεγιστοβάθμιους συντελεστές 1.
Τότε από την (14.91) συνεπάγεται αμέσως ότι η T_{n+2} ταυτίζεται στο $[-1, 1]$ με μια πολυωνυμική συνάρτηση η οποία έχει βαθμό $n + 2$ και μεγιστοβάθμιο συντελεστή 1.
Από την αρχή της επαγωγής συνεπάγεται ότι για κάθε $n \geq 1$ η συνάρτηση T_n ταυτίζεται στο $[-1, 1]$ με μια πολυωνυμική συνάρτηση η οποία έχει βαθμό n και μεγιστοβάθμιο συντελεστή 1.
Το δεύτερο ερώτημα. Από την σχέση (14.91) έχουμε

$$T_3(x) = xT_2(x) - \tfrac{1}{4}\,T_1(x) = x^3 - \tfrac{3}{4}x \quad \text{και} \quad T_4(x) = xT_3(x) - \tfrac{1}{4}\,T_2(x) = x^4 - x^2 + \tfrac{1}{8}$$

για κάθε $x \in [-1, 1]$.
Το τρίτο ερώτημα. Είναι

$$T_n(1) = \tfrac{1}{2^{n-1}}\,\cos(n \arccos 1) = \tfrac{1}{2^{n-1}}\,\cos 0 = \tfrac{1}{2^{n-1}},$$

$$T_n(-1) = \tfrac{1}{2^{n-1}}\,\cos(n \arccos(-1)) = \tfrac{1}{2^{n-1}}\,\cos(n\pi) = \tfrac{(-1)^n}{2^{n-1}}.$$

Το τέταρτο ερώτημα. Αν $n \geq 1$, οι αριθμοί $\frac{2k-1}{2n}\pi$ για $k = 1, \dots, n$ είναι όλοι στο διάστημα $(0, \pi)$, οπότε οι αντίστοιχοι αριθμοί $x_k = \cos(\frac{2k-1}{2n}\pi)$ είναι στο διάστημα $(-1, 1)$ και, μάλιστα, έχουν την εξής διάταξη:

$$-1 < x_n < x_{n-1} < \dots < x_2 < x_1 < 1.$$

Τώρα, έχουμε

$$T_n(x_k) = \tfrac{1}{2^{n-1}}\,\cos(n \arccos x_k) = \tfrac{1}{2^{n-1}}\,\cos\left(n\tfrac{2k-1}{2n}\pi\right) = \tfrac{1}{2^{n-1}}\,\cos\left(\tfrac{2k-1}{2}\pi\right) = 0,$$

οπότε οι αριθμοί x_k είναι n διαφορετικές ρίζες του πολυωνύμου T_n και, επειδή ο βαθμός του T_n είναι n, συνεπάγεται ότι το T_n έχει ακριβώς τις ρίζες $x_1, \dots, x_n$.
Το πέμπτο ερώτημα. Είναι προφανές ότι ισχύει

$$|T_n(x)| = \tfrac{1}{2^{n-1}}\,|\cos(n \arccos x)| \leq \tfrac{1}{2^{n-1}} \qquad \text{για κάθε } x \in [-1, 1]. \tag{14.92}$$

Για κάθε $n \geq 1$ είναι

$$T_n{}'(x) = \tfrac{n}{2^{n-1}}\,\tfrac{\sin(n \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{για κάθε } x \in [-1, 1].$$

Οι αριθμοί $\frac{k}{n}\pi$ για $k = 1, \dots, n - 1$ είναι στο διάστημα $(0, \pi)$, οπότε οι αντίστοιχοι αριθμοί $t_k = \cos(\frac{k}{n}\pi)$ είναι στο διάστημα $(-1, 1)$. Αν θεωρήσουμε και τους αριθμούς t_0 και t_n, τότε είναι

$$-1 = t_n < x_n < t_{n-1} < x_{n-1} < \dots < x_2 < t_1 < x_1 < t_0 = 1.$$

Επίσης, για $k = 1, \dots, n - 1$ έχουμε

$$T_n{}'(t_k) = \tfrac{n}{2^{n-1}}\,\tfrac{\sin(n \arccos t_k)}{\sqrt{1-t_k{}^2}} = \tfrac{n}{2^{n-1}}\,\tfrac{\sin(k\pi)}{\sqrt{1-t_k{}^2}} = 0,$$

οπότε οι αριθμοί $t_1, \dots, t_{n-1}$ είναι $n - 1$ διαφορετικές ρίζες του πολυωνύμου $T_n{}'$ και, επειδή ο βαθμός του $T_n{}'$ είναι $n - 1$, συνεπάγεται ότι το $T_n{}'$ έχει ακριβώς τις ρίζες $t_1, \dots, t_{n-1}$.
Ακόμη, για $k = 0, 1, \dots, n - 1, n$ είναι

$$T_n(t_k) = \tfrac{1}{2^{n-1}}\,\cos(n \arccos t_k) = \tfrac{1}{2^{n-1}}\,\cos\left(n\tfrac{k}{n}\pi\right) = \tfrac{1}{2^{n-1}}\,\cos(k\pi) = \tfrac{(-1)^k}{2^{n-1}}. \tag{14.93}$$

Το έκτο ερώτημα. Τώρα, έστω $n \geq 1$ και οποιοδήποτε πολυώνυμο P βαθμού n με μεγιστοβάθμιο συντελεστή 1. Θα αποδείξουμε ότι ισχύει

$$\tfrac{1}{2^{n-1}} = \max\{|T_n(x)| \mid -1 \leq x \leq 1\} \leq \max\{|P(x)| \mid -1 \leq x \leq 1\}. \tag{14.94}$$

Η αριστερή ισότητα ισχύει λόγω των (14.92) και (14.93).
Ας υποθέσουμε (για άτοπο) ότι δεν ισχύει η δεξιά ανισότητα της (14.94), δηλαδή ότι

$$\max\{|P(x)| \mid -1 \leq x \leq 1\} < \tfrac{1}{2^{n-1}}. \tag{14.95}$$

Επειδή και τα δύο πολυώνυμα T_n και P έχουν βαθμό n και μεγιστοβάθμιους συντελεστές 1, το $T_n - P$ είναι πολυώνυμο βαθμού $\leq n-1$.
Επίσης, από τις (14.93) και (14.95) έχουμε

$$\begin{aligned} T_n(t_k) - P(t_k) &= \tfrac{1}{2^{n-1}} - P(t_k) > 0 \qquad \text{για κάθε άρτιο } k = 0, 1, \ldots, n-1, n \\ T_n(t_k) - P(t_k) &= -\tfrac{1}{2^{n-1}} - P(t_k) < 0 \qquad \text{για κάθε περιττό } k = 0, 1, \ldots, n-1, n. \end{aligned} \tag{14.96}$$

Συνεπάγεται ότι σε κάθε διάστημα $(t_n, t_{n-1}), \ldots, (t_1, t_0)$ υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα του πολυωνύμου $T_n - P$, οπότε το $T_n - P$ έχει τουλάχιστον n ρίζες και, επειδή το $T_n - P$ έχει βαθμό $\leq n-1$, συμπεραίνουμε ότι είναι το μηδενικό πολυώνυμο. Άρα τα πολυώνυμα T_n και P ταυτίζονται και καταλήγουμε σε άτοπο λόγω των (14.96).
Άρα ισχύει η (14.94).
Το έβδομο ερώτημα. Έστω ότι για κάποιο πολυώνυμο P βαθμού n με μεγιστοβάθμιο συντελεστή 1 ισχύει η ισότητα στην δεξιά ανισότητα της (14.94). Δηλαδή,

$$\max\{|P(x)| \mid -1 \leq x \leq 1\} = \tfrac{1}{2^{n-1}}. \tag{14.97}$$

Τώρα, οι σχέσεις (14.96) γίνονται

$$\begin{aligned} T_n(t_k) - P(t_k) &= \tfrac{1}{2^{n-1}} - P(t_k) \geq 0 \qquad \text{για κάθε άρτιο } k = 0, 1, \ldots, n-1, n \\ T_n(t_k) - P(t_k) &= -\tfrac{1}{2^{n-1}} - P(t_k) \leq 0 \qquad \text{για κάθε περιττό } k = 0, 1, \ldots, n-1, n. \end{aligned}$$

Από τις σχέσεις αυτές συνεπάγεται ότι το πολυώνυμο $T_n - P$ έχει τουλάχιστον n ρίζες και, όπως πριν, επειδή το $T_n - P$ έχει βαθμό $\leq n-1$, συμπεραίνουμε ότι είναι το μηδενικό πολυώνυμο. Άρα τα πολυώνυμα T_n και P ταυτίζονται. Δηλαδή, υπάρχει μόνο ένα πολυώνυμο P βαθμού n με μεγιστοβάθμιο συντελεστή 1 για το οποίο να ισχύει η (14.97) και αυτό είναι το T_n.

Άσκηση 5.4.4. *Έστω $a_1 < \ldots < a_n$. Βρείτε τα σημεία ολικού ελαχίστου των $(x-a_1)^2 + \cdots + (x-a_n)^2$ και $|x-a_1| + \cdots + |x-a_n|$.*

Λύση: Η συνάρτηση $f(x) = (x-a_1)^2 + \cdots + (x-a_n)^2$ έχει παράγωγο

$$f'(x) = 2nx - 2(a_1 + \cdots + a_n) = 2n(x - A),$$

όπου $A = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$.
Είναι $f'(x) < 0$ για $x < A$ και $f'(x) > 0$ για $x > A$. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, A]$ και γνησίως αύξουσα στο $[A, +\infty)$ και, επομένως, έχει ολικό ελάχιστο στο A.
Η συνάρτηση $f(x) = |x-a_1| + \cdots + |x-a_n|$ γράφεται

$$f(x) = -nx + (a_1 + \cdots + a_n) \qquad \text{στο } (-\infty, a_1]$$

$$f(x) = nx - (a_1 + \cdots + a_n) \qquad \text{στο } [a_n, +\infty).$$

Επίσης,

$$f(x) = (2k-n)x - (a_1 + \cdots + a_k - a_{k+1} - \cdots - a_n) \qquad \text{στο } [a_k, a_{k+1}].$$

Άρα, αν $k < \frac{n}{2}$, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, a_{k+1}]$ ενώ, αν $k > \frac{n}{2}$, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[a_k, +\infty)$. Επίσης, αν $k = \frac{n}{2}$, η f είναι σταθερή στο $[a_k, a_{k+1}]$.
Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.
Αν ο n είναι περιττός, θεωρούμε τον $k = \frac{n-1}{2}$ και τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, a_{k+1}]$ και γνησίως αύξουσα στο $[a_{k+1}, +\infty)$, οπότε η f έχει ολικό ελάχιστο στο a_{k+1}.
Αν ο n είναι άρτιος, θεωρούμε τον $k = \frac{n}{2}$ και τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, a_k]$, σταθερή στο $[a_k, a_{k+1}]$ και γνησίως αύξουσα στο $[a_{k+1}, +\infty)$, οπότε η f έχει ολικό ελάχιστο σε κάθε σημείο του $[a_k, a_{k+1}]$.

Άσκηση 5.4.5. *Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $(1 + \frac{1}{x})^x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.*

Λύση: Η $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$ έχει παράγωγο $f'(x) = (1 + \frac{1}{x})^x(\log(1 + \frac{1}{x}) - \frac{1}{x+1})$.
Άρα ισχύει $f'(x) > 0$ αν και μόνο αν ισχύει $\log(1 + \frac{1}{x}) - \frac{1}{x+1} > 0$.
Η $h(x) = \log(1 + \frac{1}{x}) - \frac{1}{x+1}$ έχει παράγωγο $h'(x) = -\frac{1}{x(x+1)^2} < 0$ για κάθε $x > 0$. Άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$ και, επειδή $\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0$, συνεπάγεται ότι ισχύει $h(x) > 0$ για κάθε $x > 0$.
Άρα ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x > 0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Άσκηση 5.4.6. *Βρείτε την τιμή του $a > 0$ για την οποία η μέγιστη τιμή της συνάρτησης $x^a e^{2a-x}$ στο $[0, +\infty)$ είναι η ελάχιστη δυνατή.*

Λύση: Η $f_a(x) = x^a e^{2a-x}$ έχει παράγωγο $f_a{}'(x) = x^{a-1}e^{2a-x}(a - x)$. Άρα η f_a είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, a]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[a, +\infty)$ και, επομένως, η μέγιστη τιμή της είναι ο $f_a(a) = (ea)^a$.
Τώρα, η συνάρτηση $h(a) = (ea)^a$ έχει παράγωγο $h'(a) = (ea)^a(\log a + 2)$.
Άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, e^{-2}]$ και γνησίως αύξουσα στο $[e^{-2}, +\infty)$, οπότε η h έχει ολικό ελάχιστο στο e^{-2}.
Άρα η μέγιστη τιμή της $f_a(x) = x^a e^{2a-x}$ στο $[0, +\infty)$ γίνεται ελάχιστη όταν $a = e^{-2}$ και η ελάχιστη μέγιστη τιμή είναι ίση με $f_{e^{-2}}(e^{-2}) = e^{-e^{-2}}$.

Άσκηση 5.4.7. *Ανάλογα με την τιμή του a βρείτε τον αριθμό των λύσεων της εξίσωσης $\sin x = ax$.*

Λύση: Αν $a = 0$, η εξίσωση $\sin x = ax = 0$ έχει τις άπειρες λύσεις $x = k\pi$ με $k \in \mathbb{Z}$.
Τώρα, έστω $a \neq 0$.
Η εξίσωση $\sin x = ax$ έχει ως λύση την $x = 0$, οπότε αρκεί να βρούμε τον αριθμό των λύσεων που είναι $\neq 0$. Παρατηρούμε ότι, αν ο x είναι λύση της εξίσωσης, τότε και ο $-x$ είναι λύση της εξίσωσης. Άρα, αν βρούμε τον αριθμό m των λύσεων στο $(0, +\infty)$, τότε ο συνολικός αριθμός των λύσεων είναι $2m + 1$.
Άρα αρκεί να βρούμε τον αριθμό των λύσεων της εξίσωσης

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} = a \qquad \text{στο } (0, +\infty).$$

Η συνάρτηση f έχει παράγωγο

$$f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$$

στο $(0, +\infty)$. Αν ορίσουμε $f(0) = 1$, τότε η f ορίζεται και είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$.
Τώρα, παρατηρούμε τα εξής.
Η f έχει ρίζες στο $[0, +\infty)$ στα σημεία $\pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, \ldots$ και είναι εναλλάξ θετική και αρνητική στα διαδοχικά διαστήματα $[0, \pi), (\pi, 2\pi), (2\pi, 3\pi), (3\pi, 4\pi), \ldots$.
Η συνάρτηση

$$h(x) = x\cos x - \sin x$$

έχει παράγωγο $h'(x) = -x\sin x$ και αυτή είναι εναλλάξ θετική και αρνητική στα διαδοχικά διαστήματα $[0, \pi), (\pi, 2\pi), (2\pi, 3\pi), (3\pi, 4\pi), \ldots$ και, επομένως, η h είναι εναλλάξ γνησίως αύξουσα και γνησίως φθίνουσα στα διαδοχικά διαστήματα $[0, \pi], [\pi, 2\pi], [2\pi, 3\pi], [3\pi, 4\pi], \ldots$. Επίσης, είναι $h(0) = 0$ και η h έχει εναλλάξ αρνητικές και θετικές τιμές στα σημεία $\pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, \ldots$. Άρα σε καθένα από τα διαστήματα $(\pi, 2\pi)$, $(2\pi, 3\pi)$, $(3\pi, 4\pi)$, $\ldots$ η h έχει ακριβώς μία ρίζα και, αν συμβολίσουμε $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ αυτές τις ρίζες, τότε έχουμε την διάταξη

$$0 < \pi < \xi_1 < 2\pi < \xi_2 < 3\pi < \xi_3 < 4\pi < \xi_4 < \ldots \tag{14.98}$$

και η h έχει εναλλάξ αρνητικές και θετικές τιμές στα $(0, \xi_1)$, (ξ_1, ξ_2), (ξ_2, ξ_3), (ξ_3, ξ_4), $\ldots$. Άρα η f είναι εναλλάξ γνησίως φθίνουσα και γνησίως αύξουσα στα $[0, \xi_1]$, $[\xi_1, \xi_2]$, $[\xi_2, \xi_3]$, $[\xi_3, \xi_4]$, $\ldots$ και οι $0, \xi_2, \xi_4, \ldots$ είναι σημεία τοπικού μεγίστου ενώ οι $\xi_1, \xi_3, \xi_5, \ldots$ είναι σημεία τοικού ελαχίστου της f.
Τώρα, συμβολίζουμε

$$u_{2k} = f(\xi_{2k}) = \tfrac{\sin \xi_{2k}}{\xi_{2k}}, \qquad l_{2k+1} = f(\xi_{2k+1}) = \tfrac{\sin \xi_{2k+1}}{\xi_{2k+1}}$$

τις αντίστοιχες (τοπικές) μέγιστες και ελάχιστες τιμές της f στα σημεία τοπικού ακροτάτου της. Παρατηρώντας την (14.98) και λαμβάνοντας υπ' όψη ότι η f είναι εναλλάξ θετική και αρνητική στα διαστήματα $[0, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$, $(2\pi, 3\pi)$, $(3\pi, 4\pi)$, $\ldots$, έχουμε ότι ο αριθμοί $u_2, u_4, \ldots$ είναι όλοι θετικοί και ότι οι $l_1, l_3, \ldots$ είναι όλοι αρνητικοί.
Μια άλλη παρατήρηση είναι η εξής. Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, \pi]$ και $f(0) = 1$, $f(\pi) = 0$, οπότε για κάθε a με $0 < a \leq 1$ υπάρχει ακριβώς μία λύση της $f(x) = a$ στο $[0, \pi)$. Επίσης, σε κάθε διάστημα $[2k\pi, (2k+1)\pi]$ η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[2k\pi, \xi_{2k}]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[\xi_{2k}, (2k+1)\pi]$, οπότε για $a = u_{2k}$ υπάρχει ακριβώς μία λύση της $f(x) = a$ στο $(2k\pi, (2k+1)\pi)$, η $x = \xi_{2k}$, και για κάθε a με $0 < a < u_{2k}$ υπάρχουν ακριβώς δύο λύσεις της $f(x) = a$ στο $(2k\pi, (2k+1)\pi)$ (μία αριστερά και μία δεξιά του ξ_{2k}). Τέλος, σε κάθε $[(2k+1)\pi, (2k+2)\pi]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[(2k+1)\pi, \xi_{2k+1}]$ και γνησίως αύξουσα στο $[\xi_{2k+1}, (2k+2)\pi]$ και άρα για $a = l_{2k+1}$ υπάρχει ακριβώς μία λύση της $f(x) = a$ στο $((2k+1)\pi, (2k+2)\pi)$, η $x = \xi_{2k+1}$, και για κάθε a με $l_{2k+1} < a < 0$ υπάρχουν ακριβώς δύο λύσεις της $f(x) = a$ στο $((2k+1)\pi, (2k+2)\pi)$ (μία αριστερά και μία δεξιά του ξ_{2k+1}).
Απομένει μια τελευταία παρατήρηση. Θα αποδείξουμε ότι

$$l_1 < l_3 < l_5 < \ldots < 0 < \ldots < u_6 < u_4 < u_2 < 1.$$

Το ότι ισχύει $u_2 < 1$ είναι προφανές.
Για την $u_{2k+2} < u_{2k}$ βλέπουμε ότι $\xi_{2k} \in (2k\pi, (2k+1)\pi)$ και $\xi_{2k+2} \in ((2k+2)\pi, (2k+3)\pi)$. Άρα $\xi_{2k+2} - 2\pi \in (2k\pi, (2k+1)\pi)$ και τώρα

$$u_{2k+2} = \tfrac{\sin \xi_{2k+2}}{\xi_{2k+2}} = \tfrac{\sin(\xi_{2k+2} - 2\pi)}{\xi_{2k+2}} < \tfrac{\sin(\xi_{2k+2} - 2\pi)}{\xi_{2k+2} - 2\pi} = f(\xi_{2k+2} - 2\pi) \leq u_{2k}.$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει διότι $\xi_{2k+2} - 2\pi \in (2k\pi, (2k+1)\pi)$ και ο u_{2k} είναι η μέγιστη τιμή της f στο $(2k\pi, (2k+1)\pi)$.
Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται και η $l_{2k+1} < l_{2k+3}$.
Επίσης, ισχύει

$$u_{2k} \to 0 \qquad \text{και} \qquad l_{2k+1} \to 0.$$

Αυτά είναι προφανή διότι ισχύει $u_{2k} = \frac{\sin \xi_{2k}}{\xi_{2k}}$ και $l_{2k+1} = \frac{\sin \xi_{2k+1}}{\xi_{2k+1}}$ και $\xi_n \to +\infty$.
Τέλος, έστω $a > 0$. Θα μετρήσουμε τον αριθμό των λύσεων της $f(x) = a$ στο $(0, +\infty)$ διακρίνοντας περιπτώσεις ανάλογα με τη θέση του a σε σχέση με τους γνησίως φθίνοντες αριθμούς $1, u_2, u_4, \ldots$. Φυσικά, επειδή $u_{2k} \to 0$, για κάθε $a > 0$ είτε θα είναι $a \geq 1$ είτε θα είναι $a = u_{2k}$ για κάποιον (μοναδικό) k είτε ο a θα βρίσκεται ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς από τους $1, u_2, u_4, \ldots$. Επίσης, επειδή $a > 0$, οι λύσεις που ψάχνουμε είναι στα διαστήματα $[0, \pi)$, $(2\pi, 3\pi)$, $(4\pi, 5\pi)$, $\ldots$.
Αν $a \geq 1$, η εξίσωση $f(x) = a$ δεν έχει καμία λύση στο $(0, +\infty)$. (Η μόνη λύση στο $[0, +\infty)$ είναι ο 0.)
Αν $1 > a > u_2$, η $f(x) = a$ έχει ακριβώς μία λύση στο $(0, \pi)$ και καμία λύση στα υπόλοιπα διαστήματα.

Αν $u_{2k} > a > u_{2k+2}$, η $f(x) = a$ έχει ακριβώς μία λύση στο $(0, \pi)$ και ακριβώς δύο λύσεις σε καθένα από τα $(2\pi, 3\pi), \ldots, (2k\pi, (2k+1)\pi)$ και καμία λύση στα υπόλοιπα διαστήματα και άρα έχει συνολικά $2k + 1$ λύσεις.
Αν $a = u_{2k}$, η $f(x) = a$ έχει ακριβώς μία λύση στο $(0, \pi)$, ακριβώς δύο λύσεις σε καθένα από τα $(2\pi, 3\pi), \ldots, ((2k-2)\pi, (2k-1)\pi)$ και ακριβώς μία λύση στο $(2k\pi, (2k+1)\pi)$ και καμία λύση στα υπόλοιπα διαστήματα και άρα έχει συνολικά $2k$ λύσεις.
Άρα βλέπουμε ότι καθώς ο a φθίνει προς τον 0 περνώντας διαδοχικά από τα διαστήματα/σημεία (τα γράφω επίτηδες με ανάποδη κατεύθυνση) $(+\infty, 1], (1, u_2), u_2, (u_2, u_4), u_4, (u_4, u_6), \ldots$ ο αντίστοιχος αριθμός λύσεων της $f(x) = a$ αυξάνει αντιστοίχως ως εξής: $0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$.
Για την περίπτωση $a < 0$, μπορούμε να αποδείξουμε με τον ίδιο τρόπο ότι καθώς ο a αυξάνει προς τον 0 περνώντας διαδοχικά από τα διαστήματα/σημεία $(-\infty, l_1), l_1, (l_1, l_3), l_3, (l_3, l_5), \ldots$ ο αντίστοιχος αριθμός λύσεων της $f(x) = a$ αυξάνει αντιστοίχως ως εξής: $0, 1, 2, 3, 4, \ldots$.

Άσκηση 5.4.10. *Δείτε τις ασκήσεις 4.6.3 και 5.1.2. Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ και $M \geq 0$, $\rho > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x') - f(x'')| \leq M|x' - x''|^\rho$ για κάθε $x', x'' \in I$. Αν $\rho > 1$, αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή στο I.*

Λύση: Από το αποτέλεσμα της άσκησης 4.6.3 έχουμε ότι η f είναι συνεχής στο διάστημα I. Επίσης, από το αποτέλεσμα της άσκησης 5.1.2 συνεπάγεται ότι ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του I. Άρα η f είναι σταθερή στο I.

Άσκηση 5.4.11. *Έστω ότι η $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a, b]$ και έχει παράγωγο στο (a, b). Έστω ότι ισχύει $f'(x) \geq \mu$ για κάθε $x \in (a, b)$.*
Αποδείξτε ότι ισχύει $f(a) + \mu(x - a) \leq f(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$.
Αποδείξτε ότι, αν υπάρχει $c \in (a, b]$ ώστε $f(a)+\mu(c-a) = f(c)$, τότε ισχύει $f(a)+\mu(x-a) = f(x)$ για κάθε $x \in [a, c]$.

Λύση: Η συνάρτηση $g(x) = f(x) - f(a) - \mu(x - a)$ είναι συνεχής στο $[a, b]$ και ισχύει $g'(x) = f'(x) - \mu \geq 0$ για κάθε $x \in (a, b)$. Άρα η g είναι αύξουσα στο $[a, b]$, οπότε ισχύει $g(x) \geq g(a)$ ή, ισοδύναμα, $f(x) \geq f(a) + \mu(x - a)$ για κάθε $x \in [a, b]$.
Τώρα, έστω υπάρχει $c \in (a, b]$ ώστε $f(a) + \mu(c - a) = f(c)$.
Τότε είναι $g(c) = 0$ και, επειδή η g είναι αύξουσα στο $[a, b]$ και $g(a) = 0$, συμπεραίνουμε ότι η g είναι σταθερή 0 στο $[a, c]$. Άρα ισχύει $f(a) + \mu(x - a) = f(x)$ για κάθε $x \in [a, c]$.

Άσκηση 5.4.12. *Έστω $f : [1, 4] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[1, 4]$, $f(1) = -7$ και έστω ότι ισχύει $f'(x) \geq 3$ για κάθε $x \in (1, 4)$. Αποδείξτε ότι $f(4) \geq 2$.*
Για κάθε $a \geq 2$ βρείτε συγκεκριμένη f με όλες τις παραπάνω ιδιότητες ώστε $f(4) = a$.

Λύση: Υπάρχει $\xi \in (1, 4)$ ώστε $\frac{f(4)-f(1)}{4-1} = f'(\xi) \geq 3$. Άρα $f(4) \geq f(1) + 3(4 - 1) = 2$.
Αν $a \geq 2$, θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{a}{3}(x - 1) - \frac{7}{3}(4 - x)$ η οποία έχει όλες τις απαιτούμενες ιδιότητες.

Άσκηση 5.4.13. [α] *Έστω η συνάρτηση $f(x) = \arccos x + \arcsin x$. Αποδείξτε ότι ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (-1, 1)$. Αποδείξτε ότι ισχύει $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$ για κάθε $x \in [-1, 1]$.*

Λύση: Είναι $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$ για κάθε $x \in (-1, 1)$.
Η f είναι συνεχής στο $[-1, 1]$, οπότε είναι σταθερή στο $[-1, 1]$. Άρα ισχύει $f(x) = f(0) = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$ για κάθε $x \in [-1, 1]$.

Άσκηση 5.4.14. *Αποδείξτε ότι ισχύει $x - \frac{x^3}{3} < \arctan x < x$ για $x > 0$.*

Λύση: Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \arctan x - x$.
Τότε
$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 = -\frac{x^2}{1+x^2} < 0 \qquad \text{για } x > 0.$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$ και άρα ισχύει

$$\arctan x - x = f(x) < f(0) = 0 \qquad \text{για } x > 0$$

και, επομένως, $\arctan x < x$ για $x > 0$.
Τώρα θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \arctan x - x + \frac{x^3}{3}$.
Τότε

$$f'(x) = \tfrac{1}{1+x^2} - 1 + x^2 = \tfrac{x^4}{1+x^2} > 0 \qquad \text{για } x > 0.$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ και άρα ισχύει

$$\arctan x - x + \tfrac{x^3}{3} = f(x) > f(0) = 0 \qquad \text{για } x > 0$$

και, επομένως, $\arctan x > x - \frac{x^3}{3}$ για $x > 0$.

Άσκηση 5.4.16. *Έστω $0 < x < y$. Αποδείξτε ότι $ax^{a-1} < \frac{y^a - x^a}{y-x} < ay^{a-1}$, αν $a < 0$ ή $a > 1$.*

Λύση: Υπάρχει $\xi \in (x,y)$ ώστε

$$\tfrac{y^a - x^a}{y-x} = a\xi^{a-1}.$$

Τότε η ανισότητα $ax^{a-1} < \frac{y^a-x^a}{y-x} < ay^{a-1}$ είναι ισοδύναμη με την $ax^{a-1} < a\xi^{a-1} < ay^{a-1}$.
Αν $a > 1$, η τελευταία ανισότητα είναι ισοδύναμη με την $x^{a-1} < \xi^{a-1} < y^{a-1}$, η οποία ισχύει διότι η συνάρτηση x^{a-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.
Αν $a < 0$, η τελευταία ανισότητα είναι ισοδύναμη με την $x^{a-1} > \xi^{a-1} > y^{a-1}$, η οποία ισχύει διότι η συνάρτηση x^{a-1} είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

Άσκηση 5.4.17. *Αποδείξτε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $e^x > 1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$.*
Αποδείξτε ότι για κάθε $x < 0$ ισχύει $e^x > 1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$, αν ο n είναι περιττός, και $e^x < 1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$, αν ο n είναι άρτιος.

Λύση: Το πρώτο ερώτημα. Θα χρησιμοποιήσουμε την αρχή της επαγωγής.
Γνωρίζουμε ότι ισχύει $e^x - 1 - x > 0$ για κάθε $x > 0$.
Έστω ότι για κάποιον $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $e^x - 1 - \frac{x}{1!} - \cdots - \frac{x^n}{n!} > 0$ για κάθε $x > 0$.
Τότε η συνάρτηση $f(x) = e^x - 1 - \frac{x}{1!} - \cdots - \frac{x^n}{n!} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ έχει παράγωγο $e^x - 1 - \frac{x}{1!} - \cdots - \frac{x^n}{n!} > 0$ για κάθε $x > 0$, οπότε είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Άρα ισχύει $f(x) > f(0) = 0$ ή, ισοδύναμα, $e^x - 1 - \frac{x}{1!} - \cdots - \frac{x^n}{n!} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} > 0$ για κάθε $x > 0$.
Το δεύτερο ερώτημα. Πάλι με την αρχή της επαγωγής.
Ο 1 είναι περιττός και γνωρίζουμε ότι ισχύει $e^x - 1 - x > 0$ για κάθε $x < 0$.
Έστω ότι για κάποιον $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $e^x - 1 - \frac{x}{1!} - \cdots - \frac{x^n}{n!} > 0$ στο $(-\infty,0)$, αν ο n είναι περιττός, και $e^x - 1 - \frac{x}{1!} - \cdots - \frac{x^n}{n!} < 0$ στο $(-\infty,0)$, αν ο n είναι άρτιος.
Τότε η συνάρτηση $f(x) = e^x - 1 - \frac{x}{1!} - \cdots - \frac{x^n}{n!} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ έχει παράγωγο $e^x - 1 - \frac{x}{1!} - \cdots - \frac{x^n}{n!}$ για κάθε $x < 0$, οπότε είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$, αν ο $n+1$ είναι περιττός, και γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$, αν ο n είναι άρτιος. Άρα ισχύει $f(x) > f(0) = 0$ για κάθε $x < 0$, αν ο $n+1$ είναι περιττός, και $f(x) < f(0) = 0$ για κάθε $x < 0$, αν ο $n+1$ είναι άρτιος.

Άσκηση 5.4.19. *Έστω $0 < a < b$ και $x \geq -a$, $x \neq 0$. Αποδείξτε ότι $(1+\frac{x}{a})^a < (1+\frac{x}{b})^b$.*

Λύση: Γράφουμε την $(1+\frac{x}{a})^a < (1+\frac{x}{b})^b$ ισοδύναμα $(1+\frac{x}{a})^{\frac{a}{b}} < 1+\frac{x}{b}$ και, αφού κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $t = \frac{x}{a}$, η νέα ανισότητα γράφεται ισοδύναμα $(1+t)^{\frac{a}{b}} < 1 + \frac{a}{b}\,t$. Τέλος, αν θέσουμε $k = \frac{a}{b}$, η ανισότητα παίρνει την τελική ισοδύναμη μορφή

$$(1+t)^k < 1 + kt.$$

Οι συνθήκες $0 < a < b$, $x \geq -a$ και $x \neq 0$ γράφονται σε ισοδύναμη μορφή με τις νέες παραμέτρους k και t ως εξής: $0 < k < 1$, $t \geq -1$ και $t \neq 0$.
Τώρα θεωρούμε τη συνάρτηση $f(t) = (1+t)^k - 1 - kt$. Είναι

$$f'(t) = k(1+t)^{k-1} - k = k\big((1+t)^{k-1} - 1\big),$$

οπότε ισχύει $f'(t) > 0$, αν $-1 < t < 0$, και $f'(t) < 0$ αν $0 < t$.
Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1, 0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$. Άρα ισχύει

$$f(t) < f(0) = 0 \qquad \text{για } t \geq -1, t \neq 0.$$

Άσκηση 5.4.20. [α] *Έστω $A > 0$ και $n \in \mathbb{N}$. Βρείτε την ελάχιστη τιμή και όλα τα σημεία ολικού ελαχίστου της συνάρτησης $\frac{nA+x}{(n+1)\sqrt[n+1]{A^n x}}$.*
[β] *Αποδείξτε με επαγωγή ως προς n ότι για κάθε $a_1, \ldots, a_n \geq 0$ ισχύει η ανισότητα του Cauchy ή ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου,*

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \tfrac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n),$$

και ότι η ανισότητα αυτή ισχύει ως ισότητα αν και μόνο αν $a_1 = \ldots = a_n$.

Λύση: [α] Η συνάρτηση $f(x) = \frac{nA+x}{(n+1)\sqrt[n+1]{A^n x}}$ έχει παράγωγο $f'(x) = \frac{n(x-A)}{(n+1)^2 \sqrt[n+1]{a^n x^{n+2}}}$. Δηλαδή, ισχύει $f'(x) < 0$ στο διάστημα $(0, A)$ και $f'(x) > 0$ στο $(A, +\infty)$. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, A]$ και γνησίως αύξουσα στο $[A, +\infty)$. Επομένως, ο A είναι σημείο ολικού ελαχίστου της f στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f(x) > f(A) = 1$ για κάθε $x > 0$ με $x \neq A$.

[β] Για $n = 1$ η ανισότητα του Cauchy γράφεται $a_1 \leq a_1$ και είναι, προφανώς, σωστή.
Έστω ότι για κάποιον n ισχύει $\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n)$ και ότι η ανισότητα αυτή ισχύει ως ισότητα αν και μόνο αν $a_1 = \ldots = a_n$.
Θεωρούμε $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1} \geq 0$ και διακρίνουμε τέσσερις περιπτώσεις.
Πρώτη περίπτωση. Έστω $A = \frac{a_1+\cdots+a_n}{n} > 0$ και $a_{n+1} > 0$. Τότε χρησιμοποιούμε την συνάρτηση f του [α] και έχουμε $f(a_{n+1}) \geq 1$ ή, ισοδύναμα,

$$\tfrac{nA+a_{n+1}}{n+1} \geq \sqrt[n+1]{A^n a_{n+1}}.$$

Όμως, από την επαγωγική υπόθεση έχουμε ότι $A^n \geq a_1 \cdots a_n$ και άρα

$$\tfrac{a_1+\cdots+a_n+a_{n+1}}{n+1} \geq \sqrt[n+1]{a_1 \cdots a_n a_{n+1}}. \tag{14.99}$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει ως ισότητα αν και μόνο αν ισχύουν ως ισότητες και οι δύο ανισότητες που χρησιμοποιήσαμε: η $f(a_{n+1}) \geq 1$ και η $A^n \geq a_1 \cdots a_n$. Σύμφωνα με το [α], η πρώτη ανισότητα ισχύει ως ισότητα αν και μόνο αν $a_{n+1} = A$ και, βάσει της επαγωγικής υπόθεσης, η δεύτερη ανισότητα ισχύει ως ισότητα αν και μόνο αν $a_1 = \ldots = a_n$. Άρα η (14.99) ισχύει ως ισότητα αν και μόνο αν $a_1 = \ldots = a_n = a_{n+1}$.
Δεύτερη περίπτωση. Έστω $A = \frac{a_1+\cdots+a_n}{n} = 0$ και $a_{n+1} > 0$. Τότε $a_1 = \ldots = a_n = 0$ και, προφανώς, ισχύει $\frac{a_1+\cdots+a_n+a_{n+1}}{n+1} > \sqrt[n+1]{a_1 \cdots a_n a_{n+1}} = 0$.
Τρίτη περίπτωση. Έστω $A = \frac{a_1+\cdots+a_n}{n} > 0$ και $a_{n+1} = 0$. Τότε, προφανώς, $\frac{a_1+\cdots+a_n+a_{n+1}}{n+1} > \sqrt[n+1]{a_1 \cdots a_n a_{n+1}} = 0$.
Τέταρτη περίπτωση. Έστω $A = \frac{a_1+\cdots+a_n}{n} = 0$ και $a_{n+1} = 0$. Τότε $a_1 = \ldots = a_n = 0$ και, προφανώς, $\frac{a_1+\cdots+a_n+a_{n+1}}{n+1} = \sqrt[n+1]{a_1 \cdots a_n a_{n+1}} = 0$.
Άρα, σε κάθε περίπτωση, ισχύει η (14.99) και, επιπλέον, ισχύει ως ισότητα αν και μόνο αν $a_1 = \ldots = a_n = a_{n+1}$.

Άσκηση 5.4.21. *Έστω $a, b \geq 0$ και $p, q > 1$ με $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Αποδείξτε την ανισότητα του Young,*

$$ab \leq \tfrac{1}{p}a^p + \tfrac{1}{q}b^q.$$

Αποδείξτε ότι η ανισότητα αυτή ισχύει ως ισότητα αν και μόνο αν $a^p = b^q$.

Υπόδειξη: Η συνάρτηση $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{1}{p}x^p - x + \frac{1}{q}$ έχει παράγωγο

$$f'(x) = x^{p-1} - 1.$$

Άρα ισχύει $f'(x) < 0$, αν $0 < x < 1$, και $f'(x) > 0$, αν $1 < x$. Επομένως, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$, οπότε ισχύει $f(x) > f(1) = 0$ για κάθε $x \geq 0$ με $x \neq 1$ ή, ισοδύναμα,

$$\tfrac{1}{p}x^p - x + \tfrac{1}{q} > 0 \qquad \text{για κάθε } x \geq 0 \text{ με } x \neq 1.$$

Φυσικά, η ανισότητα αυτή ισχύει ως ισότητα αν $x = 1$.
Τώρα, έστω $a, b > 0$. Εφαρμόζουμε την τελευταία ανισότητα με $x = \frac{a}{b^{q/p}}$ και βρίσκουμε

$$\tfrac{1}{p}\,\tfrac{a^p}{b^q} + \tfrac{1}{q} \geq \tfrac{a}{b^{q/p}}$$

ή, ισοδύναμα,

$$\tfrac{1}{p}a^p + \tfrac{1}{q}b^q \geq ab^{q-q/p} = ab$$

και ότι η τελευταία ανισότητα ισχύει ως ισότητα αν και μόνο αν $\frac{a}{b^{q/p}} = 1$ ή, ισοδύναμα, $a^p = b^q$.
Αν $a > 0$, $b = 0$ ή αν $a = 0$, $b > 0$, τότε ισχύει, προφανώς, $ab < \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$.
Τέλος, αν $a = b = 0$, τότε ισχύει $ab = \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$.
Επομένως, σε κάθε περίπτωση ισχύει η $ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$ και, επιπλέον, ισχύει ως ισότητα αν και μόνο αν $a^p = b^q$.

Άσκηση 5.4.22. *Έστω $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \geq 0$ και $p, q > 1$ με $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*
[α] *Αποδείξτε την ανισότητα του Hölder,*

$$a_1b_1 + \cdots + a_nb_n \leq \big({a_1}^p + \cdots + {a_n}^p\big)^{1/p}\big({b_1}^q + \cdots + {b_n}^q\big)^{1/q}.$$

Αποδείξτε ότι ισχύει η ισότητα αν και μόνο αν υπάρχουν $s, t \geq 0$ όχι και οι δύο ίσοι με 0 ώστε να ισχύει $s{a_k}^p = t{b_k}^q$ για κάθε $k = 1, \dots, n$.
Επειδή $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, η γνωστή και πολύ σημαντική ανισότητα του Cauchy,

$$a_1b_1 + \cdots + a_nb_n \leq \big({a_1}^2 + \cdots + {a_n}^2\big)^{1/2}\big({b_1}^2 + \cdots + {b_n}^2\big)^{1/2},$$

είναι ειδική περίπτωση της ανισότητας του Hölder.
[β] *Αποδείξτε την ανισότητα του Minkowski,*

$$\big((a_1+b_1)^p + \cdots + (a_n+b_n)^p\big)^{1/p} \leq \big({a_1}^p + \cdots + {a_n}^p\big)^{1/p} + \big({b_1}^p + \cdots + {b_n}^p\big)^{1/p}.$$

Αποδείξτε ότι ισχύει η ισότητα αν και μόνο αν υπάρχουν $s, t \geq 0$ όχι και οι δύο ίσοι με 0 ώστε να ισχύει $sa_k = tb_k$ για κάθε $k = 1, \dots, n$.

Λύση: [α] Έστω

$$A = ({a_1}^p + \cdots + {a_n}^p)^{1/p}, \qquad B = ({b_1}^q + \cdots + {b_n}^q)^{1/q}.$$

Αν $A = 0$ ή $B = 0$, τότε είναι $a_1 = \ldots = a_n = 0$ ή $b_1 = \ldots = b_n = 0$, αντιστοίχως, και τότε η ανισότητα του Hölder ισχύει και, μάλιστα, ως ισότητα $0 = 0$. Σ' αυτήν περίπτωση παρατηρούμε ότι υπάρχουν $s, t \geq 0$ όχι και οι δύο ίσοι με 0 ώστε να ισχύει $s{a_k}^p = t{b_k}^q$ για κάθε $k = 1, \dots, n$. Πράγματι, αν $a_1 = \ldots = a_n = 0$, τότε παίρνουμε $s = 1$, $t = 0$ και, αν $b_1 = \ldots = b_n = 0$, τότε παίρνουμε $s = 0$, $t = 1$.
Τώρα, έστω $A, B > 0$. Εφαρμόζουμε την ανισότητα του Young της άσκησης 5.4.21 σε κάθε ζεύγος $\frac{a_k}{A}$, $\frac{b_k}{B}$ και έχουμε

$$\tfrac{a_kb_k}{AB} \leq \tfrac{1}{p}\,\tfrac{{a_k}^p}{A^p} + \tfrac{1}{q}\,\tfrac{{b_k}^q}{B^q} \qquad \text{για } k = 1, \dots, n. \tag{14.100}$$

Κατόπιν, προσθέτουμε αυτές τις ανισότητες και βρίσκουμε

$$\tfrac{1}{AB}(a_1b_1 + \cdots + a_nb_n) \leq \tfrac{1}{p}\,\tfrac{{a_1}^p + \cdots + {a_n}^p}{A^p} + \tfrac{1}{q}\,\tfrac{{b_1}^q + \cdots + {b_n}^q}{B^q} = \tfrac{1}{p} + \tfrac{1}{q} = 1$$

ή, ισοδύναμα,

$$a_1b_1 + \cdots + a_nb_n \le AB = (a_1{}^p + \cdots + a_n{}^p)^{1/p}(b_1{}^q + \cdots + b_n{}^q)^{1/q}$$

και καταλήγουμε στην ανισότητα του Hölder.
Η ανισότητα αυτή ισχύει ως ισότητα αν και μόνο αν ισχύει ως ισότητα καθεμία από τις ανισότητες (14.100). Σύμφωνα με την άσκηση 5.4.21, αυτό γίνεται αν και μόνο αν ισχύει $\frac{a_k{}^p}{A^p} = \frac{b_k{}^q}{B^q}$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$. Τώρα, αν ισχύει $\frac{a_k{}^p}{A^p} = \frac{b_k{}^q}{B^q}$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$, τότε υπάρχουν $s, t > 0$ ώστε να ισχύει $sa_k{}^p = tb_k{}^q$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$. Πράγματι, μπορούμε να πάρουμε $s = \frac{1}{A^p}$, $t = \frac{1}{B^q}$. Αντιστρόφως, αν υπάρχουν $s, t > 0$ ώστε να ισχύει $sa_k{}^p = tb_k{}^q$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$, τότε εύκολα αποδεικνύεται ότι ισχύει $\frac{a_k{}^p}{A^p} = \frac{b_k{}^q}{B^q}$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$.
Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι σε κάθε περίπτωση ισχύει η ανισότητα του Hölder και, επιπλέον, ότι ισχύει ως ισότητα αν και μόνο αν υπάρχουν $s, t \ge 0$ όχι και οι δύο ίσοι με 0 ώστε να ισχύει $sa_k{}^p = tb_k{}^q$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$.

Όταν $p = q = 2$, δηλαδή για την ανισότητα του Cauchy έχουμε άλλους δύο τρόπους απόδειξης.
Πρώτος τρόπος. Αν $\sum_{k=1}^n a_k{}^2 = 0$, τότε είναι $a_1 = \ldots = a_n = 0$ και τότε η ανισότητα του Cauchy ισχύει και, μάλιστα, ως ισότητα $0 = 0$.
Τώρα, έστω $\sum_{k=1}^n a_k{}^2 > 0$. Γράφουμε για κάθε t

$$\begin{aligned}\big(\textstyle\sum_{k=1}^n a_k{}^2\big)t^2 + 2\big(\sum_{k=1}^n a_kb_k\big)t + \big(\sum_{k=1}^n b_k{}^2\big) &= \textstyle\sum_{k=1}^n (a_k{}^2t^2 + 2a_kb_kt + b_k{}^2) \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^n (ta_k + b_k)^2 \ge 0.\end{aligned} \tag{14.101}$$

Άρα το πολυώνυμο δευτέρου βαθμού $(\sum_{k=1}^n a_k{}^2)t^2 + 2(\sum_{k=1}^n a_kb_k)t + (\sum_{k=1}^n b_k{}^2)$ δεν έχει αρνητικές τιμές και άρα η διακρίνουσά του είναι ≤ 0. Άρα ισχύει

$$(\textstyle\sum_{k=1}^n a_kb_k)^2 \le \sum_{k=1}^n a_k{}^2 \sum_{k=1}^n b_k{}^2,$$

δηλαδή η ανισότητα του Cauchy.
Αν ισχύει η ανισότητα του Cauchy ως ισότητα, το $(\sum_{k=1}^n a_k{}^2)t^2 + 2(\sum_{k=1}^n a_kb_k)t + (\sum_{k=1}^n b_k{}^2)$ έχει τότε μια ρίζα t_0 και άρα οι παραστάσεις στην (14.101) μηδενίζονται για $t = t_0$, οπότε ισχύει $t_0a_k + b_k = 0$ ή, ισοδύναμα, $t_0a_k = (-1)b_k$ για $k = 1, \ldots, n$.
Δεύτερος τρόπος. Αποδεικνύουμε με απλές πράξεις την ταυτότητα

$$\textstyle\sum_{k=1}^n a_k{}^2 \sum_{k=1}^n b_k{}^2 - \big(\sum_{k=1}^n a_kb_k\big)^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \big(\sum_{j=1}^n (a_ib_j - b_ia_j)^2\big).$$

Επειδή η δεξιά μεριά της ταυτότητας είναι ≥ 0, προκύπτει αμέσως η ανισότητα του Cauchy. Αν η ανισότητα του Cauchy ισχύει ως ισότητα, τότε είναι $\sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^n (a_ib_j - b_ia_j)^2) = 0$ και, επομένως, ισχύει $a_ib_j = a_jb_i$ για κάθε i, j. Από αυτό εύκολα αποδεικνύεται ότι υπάρχουν s, t όχι και οι δύο ίσοι με 0 ώστε να ισχύει $sa_k = tb_k$ για κάθε k.
[β] Γράφουμε

$$\begin{aligned}(a_1 + b_1)^p + \cdots + (a_n + b_n)^p &= a_1(a_1 + b_1)^{p-1} + \cdots + a_n(a_n + b_n)^{p-1} \\ &\quad + b_1(a_1 + b_1)^{p-1} + \cdots + b_n(a_n + b_n)^{p-1}\end{aligned}$$

και εφαρμόζουμε την ανισότητα του Hölder στο άθροισμα $a_1(a_1 + b_1)^{p-1} + \cdots + a_n(a_n + b_n)^{p-1}$ και στο $b_1(a_1 + b_1)^{p-1} + \cdots + b_n(a_n + b_n)^{p-1}$ και βρίσκουμε

$$\begin{aligned}&(a_1 + b_1)^p + \cdots + (a_n + b_n)^p \\ &\qquad \le (a_1{}^p + \cdots + a_n{}^p)^{1/p}\big((a_1 + b_1)^{(p-1)q} + \cdots + (a_n + b_n)^{(p-1)q}\big)^{1/q} \\ &\qquad\quad + (b_1{}^p + \cdots + b_n{}^p)^{1/p}\big((a_1 + b_1)^{(p-1)q} + \cdots + (a_n + b_n)^{(p-1)q}\big)^{1/q} \\ &\qquad = (a_1{}^p + \cdots + a_n{}^p)^{1/p}\big((a_1 + b_1)^p + \cdots + (a_n + b_n)^p\big)^{1/q} \\ &\qquad\quad + (b_1{}^p + \cdots + b_n{}^p)^{1/p}\big((a_1 + b_1)^p + \cdots + (a_n + b_n)^p\big)^{1/q}\end{aligned}$$

Διαιρώντας την ανισότητα που βρήκαμε με τον $((a_1+b_1)^p+\cdots+(a_n+b_n)^p)^{1/q}$, προκύπτει η ανισότητα του Minkowski. Βέβαια, ο $((a_1+b_1)^p+\cdots+(a_n+b_n)^p)^{1/q}$ πρέπει να είναι $\neq 0$, αλλά στην περίπτωση $((a_1+b_1)^p+\cdots+(a_n+b_n)^p)^{1/q}=0$ συνεπάγεται ότι όλοι οι a_k, b_k είναι ίσοι με 0 και τότε η ανισότητα του Minkowski ισχύει προφανώς και, μάλιστα, ως ισότητα $0=0$.
Τώρα, μπορείτε εσείς να χειριστείτε την περίπτωση της ισότητας, παρατηρώντας ότι για να ισχύει η ισότητα στην ανισότητα του Minkowski πρέπει να ισχύει η ισότητα στις δύο ανισότητες Hölder που χρησιμοποιήθηκαν για την απόδειξή της.

Άσκηση 5.4.23. *Έστω $a_1,\ldots,a_n,w_1,\ldots,w_n>0$ και $w_1+\cdots+w_n=1$.*
Αποδείξτε ότι η $f(p)=(w_1{a_1}^p+\cdots+w_n{a_n}^p)^{1/p}$ είναι αύξουσα στο $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.
Αποδείξτε ότι $\lim_{p\to 0}(w_1{a_1}^p+\cdots+w_n{a_n}^p)^{1/p}={a_1}^{w_1}\cdots{a_n}^{w_n}$.

Υπόδειξη: Για το πρώτο ερώτημα εφαρμόστε την ανισότητα του Hölder της άσκησης 5.4.22.
Για το δεύτερο ερώτημα θεωρήστε τη συνάρτηση $g(x)=w_1{a_1}^x+\cdots+w_n{a_n}^x$ και παρατηρήστε ότι ισχύει $\log(g(x))^{1/x}=\frac{\log g(x)}{g(x)-1}\frac{g(x)-1}{x}$.

Άσκηση 5.4.24. *Έστω $f:A\to\mathbb{R}$, $\xi\in A$ σημείο συσσώρευσης του A και $f'(\xi)>0$. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του $f'(\xi)$, αποδείξτε ότι ισχύει $f(x)>f(\xi)$ κοντά στον ξ από δεξιά του και $f(x)<f(\xi)$ κοντά στον ξ από αριστερά του. Μπορεί να είναι ο ξ σημείο τοπικού ακροτάτου της f;*
Θεωρήστε τη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x+2x^2\sin(1/x), & \text{αν } x\neq 0\\ 0, & \text{αν } x=0\end{cases}$ Αποδείξτε ότι $f'(0)=1$. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει κανένας $a>0$ ώστε η f να είναι αύξουσα στο διάστημα $(-a,a)$. Να αντιπαραβάλετε με το παραπάνω γενικό αποτέλεσμα και με τις προτάσεις 5.6 και 5.7.

Λύση: Επειδή $\lim_{x\to\xi}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}=f'(\xi)>0$, συνεπάγεται ότι ισχύει $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}>0$ κοντά στον ξ. Άρα ισχύει $f(x)>f(\xi)$ κοντά στον ξ από δεξιά του και $f(x)<f(\xi)$ κοντά στον ξ από αριστερά του, οπότε ο ξ δεν μπορεί να είναι σημείο τοπικού ακροτάτου της f.
Για τη συγκεκριμένη συνάρτηση έχουμε

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\big(1+2x\sin\tfrac{1}{x}\big)=1.$$

Έστω, τώρα, ότι υπάρχει $a>0$ ώστε η f να είναι αύξουσα στο $(-a,a)$. Τότε ισχύει $f'(x)\geq 0$ για κάθε $x\in(-a,a)$. Δηλαδή, ισχύει $1+4x\sin\frac{1}{x}-2\cos\frac{1}{x}\geq 0$ για κάθε $x\in(-a,a)$ με $x\neq 0$.
Όμως, θεωρώντας τους $x_n=\frac{1}{2n\pi}$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$, έχουμε ότι $x_n\to 0$, οπότε ισχύει τελικά $x_n\in(0,a)$. Επίσης, ισχύει $f'(x_n)=-1<0$ για κάθε n και καταλήγουμε σε άτοπο.
Βλέπουμε, λοιπόν, γενικά, ότι, αν $f'(\xi)>0$ (δηλαδή αν η f' έχει θετική τιμή σε ένα σημείο και όχι αναγκαστικά σε ολόκληρο διάστημα), τότε υπάρχει διάστημα (b,c) ώστε $\xi\in(b,c)$ και ώστε η τιμή $f(\xi)$ να είναι μικρότερη από τις τιμές της f στο (ξ,c) και μεγαλύτερη από τις τιμές της f στο (b,ξ), αλλά μπορεί να μην υπάρχει κανένα διάστημα (b,c) ώστε $\xi\in(b,c)$ και ώστε η f να είναι αύξουσα στο (b,c).

Άσκηση 5.4.25. *Έστω $f:I\to\mathbb{R}$ συνεχής στο διάστημα I. Αν κανένα εσωτερικό σημείο του I δεν είναι σημείο τοπικού μεγίστου ή ελαχίστου της f, αποδείξτε ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο I.*

Λύση: Έστω ότι η f δεν είναι γνησίως μονότονη στο I.
Από το αποτέλεσμα της άσκησης 4.4.19 συνεπάγεται ότι η f δεν είναι ένα-προς-ένα στο I. Δηλαδή, υπάρχουν $a,b\in I$ ώστε $a<b$ και $f(a)=f(b)$.
Η f έχει μέγιστη τιμή και ελάχιστη τιμή στο $[a,b]$ και, επειδή κανένα εσωτερικό σημείο του I και, επομένως, κανένα εσωτερικό σημείο του $[a,b]$ δεν είναι σημείο τοπικού ακροτάτου της f, συνεπάγεται ότι η μέγιστη τιμή και η ελάχιστη τιμή της f στο $[a,b]$ πιάνονται στα άκρα a,b. Αφού $f(a)=f(b)$, η f είναι σταθερή στο $[a,b]$. Άρα κάθε εσωτερικό σημείο του $[a,b]$ είναι σημείο τοπικού ακροτάτου της f και καταλήγουμε σε άτοπο.
Άρα η f είναι γνησίως μονότονη στο I.

Άσκηση 5.4.26. *Έστω $f:I\to\mathbb{R}$ συνεχής στο διάστημα I και έστω ότι ισχύει $f'(x)\neq 0$ για κάθε*

x στο εσωτερικό του I. Από την άσκηση 5.3.9[α] γνωρίζουμε ότι η f είναι ένα-προς-ένα στο I.

Αποδείξτε ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο I.

Αποδείξτε ότι είτε ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του I είτε ισχύει $f'(x) < 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του I.

Λύση: Το πρώτο ερώτημα. Επειδή η f είναι ένα-προς-ένα στο διάστημα I, από το αποτέλεσμα της άσκησης 4.4.19 συνεπάγεται ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο I.
Ένας δεύτερος τρόπος είναι ο εξής. Θεωρούμε οποιουσδήποτε $a, b \in I$ με $a < b$. Τότε τα μοναδικά σημεία μεγίστου και ελαχίστου της f στο $[a, b]$ είναι οι a, b. Πράγματι, αν η f είχε σημείο ακροτάτου στο (a, b), τότε σ' αυτό το σημείο θα ήταν $f'(x) = 0$. Άρα είτε ισχύει $f(a) < f(x) < f(b)$ για κάθε $x \in (a, b)$ είτε ισχύει $f(b) < f(x) < f(a)$ για κάθε $x \in (a, b)$. Τώρα, αν υποθέσουμε ότι η f δεν είναι γνησίως μονότονη στο I, θα πρέπει να υπάρχουν $x_1, x_2, x_3 \in I$ με $x_1 < x_2 < x_3$ και είτε $f(x_1) < f(x_2) > f(x_3)$ είτε $f(x_1) > f(x_2) < f(x_3)$. Και στις δύο περιπτώσεις καταλήγουμε σε αντίφαση με το προηγούμενο συμπέρασμα για το διάστημα $[a, b] = [x_1, x_3]$.
Υπάρχει και τρίτος τρόπος. Αφού αποδείξουμε το αποτέλεσμα του δεύτερου ερωτήματος, το αποτέλεσμα του πρώτου ερωτήματος είναι άμεση συνέπειά του.

Το δεύτερο ερώτημα. Αυτό είναι άμεση συνέπεια του αποτελέσματος του πρώτου ερωτήματος. Πράγματι, αφού η f είναι γνησίως μονότονη και ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του I, συνεπάγεται ότι είτε ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του I είτε ισχύει $f'(x) < 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του I.
Έχουμε και δεύτερο τρόπο. Αν υπάρχουν $a, b \in I$ με $a < b$ και είτε $f'(a) < 0 < f'(b)$ είτε $f'(b) < 0 < f'(a)$, τότε από το αποτέλεσμα της άσκησης 5.3.23 συνεπάγεται ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε $f'(\xi) = 0$ και καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα είτε ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του I είτε ισχύει $f'(x) < 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του I.

Άσκηση 5.4.27. *Έστω $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες στο (a, b), $a < 0 < b$. Έστω, επίσης, ότι ισχύει $f'(x) = g(x)$, $g'(x) = -f(x)$ για κάθε $x \in (a, b)$ και $f(0) = 0$, $g(0) = 1$. Γνωρίζετε κάποιο τέτοιο ζευγάρι συναρτήσεων;*

Αποδείξτε ότι ισχύει $f(x)^2 + g(x)^2 = 1$ για κάθε $x \in (a, b)$.

Αν οι F, G έχουν τις ίδιες ιδιότητες (όπου η F αντιστοιχεί στην f και η G στην g), αποδείξτε ότι ισχύει $F(x) = f(x)$ και $G(x) = g(x)$ για κάθε $x \in (a, b)$.

Υπόδειξη: Παραγωγίστε τη συνάρτηση $(F(x) - f(x))^2 + (G(x) - g(x))^2$.

Άσκηση 5.4.28. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b) και έστω $k > 0$ ώστε να ισχύει $|f'(x)| \leq k|f(x) - f(a)|$ για κάθε $x \in (a, b)$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή στο $[a, b]$.*

Λύση: Πρώτος τρόπος. Έστω ότι υπάρχει $x_0 \in (a, b]$ με $f(x_0) > f(a)$.
Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - f(a)$ και έχουμε ότι $g(a) = 0$ και $g(x_0) > 0$. Τότε, από το αποτέλεσμα της άσκησης 4.2.10, συνεπάγεται ότι υπάρχει $\xi \in [a, x_0)$ ώστε $g(\xi) = 0$ και ώστε να ισχύει $g(x) > 0$ για κάθε $x \in (\xi, x_0]$. Επομένως, $f(\xi) = f(a)$ και ισχύει $f(x) > f(a)$ για κάθε $x \in (\xi, x_0]$.
Τώρα, η συνάρτηση $h(x) = (f(x) - f(a))e^{-kx}$ έχει παράγωγο

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(x)e^{-kx} - k(f(x) - f(a))e^{-kx} = (f'(x) - k(f(x) - f(a))e^{-kx} \\ &= (f'(x) - k|f(x) - f(a)|)e^{-kx} \leq 0 \qquad \text{για } x \in (\xi, x_0) \end{aligned}$$

και άρα η h είναι φθίνουσα στο $[\xi, x_0]$. Άρα $h(x_0) \leq h(\xi) = 0$ ή, ισοδύναμα, $f(x_0) \leq f(a)$ και καταλήγουμε σε άτοπο.
Έστω ότι υπάρχει $x_0 \in (a, b]$ με $f(x_0) < f(a)$.
Όπως πριν (θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - f(a)$ κ.τ.λ.), συνεπάγεται ότι υπάρχει $\xi \in [a, x_0)$ ώστε $f(\xi) = f(a)$ και να ισχύει $f(x) < f(a)$ για κάθε $x \in (\xi, x_0]$.

Τώρα, η ίδια συνάρτηση $h(x) = (f(x) - f(a))e^{-kx}$ έχει παράγωγο

$$h'(x) = (f'(x) - k(f(x) - f(a))e^{-kx} = (f'(x) + k|f(x) - f(a)|)e^{-kx} \geq 0 \qquad \text{για } x \in (\xi, x_0)$$

και άρα η h είναι αύξουσα στο $[\xi, x_0]$. Άρα $h(x_0) \geq h(\xi) = 0$ ή, ισοδύναμα, $f(x_0) \geq f(a)$ και πάλι καταλήγουμε σε άτοπο.
Άρα δεν υπάρχει $x_0 \in (a, b]$ ώστε $f(x_0) \neq f(a)$ και, επομένως, η f είναι σταθερή στο $[a, b]$.
Δεύτερος τρόπος. Έστω $c \in (a, b]$ με $a < c < a + \frac{1}{k}$.
Γνωρίζουμε ότι υπάρχει $M \geq 0$ ώστε να ισχύει $|f(x) - f(a)| \leq M$ για κάθε $x \in [a, c]$.
Θα αποδείξουμε ότι ισχύει

$$|f(x) - f(a)| \leq k^n(c - a)^n M \qquad \text{για κάθε } x \in [a, c] \text{ και κάθε } n \in \mathbb{N}. \tag{14.102}$$

Κατ'αρχάς, η (14.102) ισχύει προφανώς για $x = a$.
Τώρα για κάθε $x \in (a, c]$ υπάρχει $\xi \in (a, x)$ ώστε

$$|f(x) - f(a)| = |f'(\xi)|(x - a) \leq k|f(\xi) - f(a)|(c - a) \leq k(c - a)M$$

και άρα ισχύει η (14.102) για $n = 1$.
Έστω ότι ισχύει η (14.102) για κάποιον $n \in \mathbb{N}$.
Τότε για κάθε $x \in (a, c]$ υπάρχει $\xi \in (a, x)$ ώστε

$$|f(x) - f(a)| = |f'(\xi)|(x - a) \leq k|f(\xi) - f(a)|(c - a) \leq k^{n+1}(c - a)^{n+1}M$$

και άρα ισχύει η (14.102) και για $n + 1$.
Τώρα, επειδή $k(c-a) < 1$, παίρνοντας όριο στην (14.102) όταν $n \to +\infty$, συνεπάγεται ότι ισχύει $|f(x) - f(a)| = 0$ ή, ισοδύναμα, $f(x) = f(a)$ για κάθε $x \in [a, c]$.
Κατόπιν, χωρίζουμε το $[a, b]$ σε διαδοχικά διαστήματα $[x_0, x_1], \ldots, [x_{m-1}, x_m]$ μήκους $< \frac{1}{k}$ ώστε $x_0 = a$ και $x_m = b$.
Εφαρμόζοντας το συμπέρασμά μας με $c = x_1$, βρίσκουμε ότι η f είναι σταθερή στο $[x_0, x_1]$. Κατόπιν, εφαρμόζουμε το συμπέρασμα στο διάστημα $[x_1, x_2]$ και βρίσκουμε ότι η f είναι σταθερή και σ' αυτό το διάστημα. Συνεχίζοντας επαγωγικά, συμπεραίνουμε ότι η f είναι σταθερή σε κάθε $[x_k, x_{k+1}]$ και άρα είναι σταθερή στο $[a, b]$.

Άσκηση 5.4.29. *Έστω ευθεία l του επιπέδου και σημείο $M = (x_0, y_0)$ του ίδιου επιπέδου. Ονομάζουμε απόσταση του M από την l την ελάχιστη απόσταση από το M προς οποιοδήποτε σημείο της l και τη συμβολίζουμε* $\mathrm{dist}(M, l)$.
Αν η l είναι κατακόρυφη με εξίσωση $x = \kappa$, αποδείξτε ότι $\mathrm{dist}(M, l) = |\kappa - x_0|$.
Αν η l είναι πλάγια με εξίσωση $y = \mu x + \nu$, αποδείξτε ότι $\mathrm{dist}(M, l) = |\mu x_0 + \nu - y_0|/(1 + \mu^2)^{1/2}$.

Λύση: Αν η l είναι κατακόρυφη με εξίσωση $x = \kappa$, τότε τα σημεία της l είναι τα $K = (\kappa, y)$ και η απόσταση ενός τυχόντος τέτοιου σημείου από το M είναι ίση με $\sqrt{(\kappa - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$. Είναι προφανές ότι η ελάχιστη τιμή αυτής της απόστασης είναι ίση με $\sqrt{(\kappa - x_0)^2} = |\kappa - x_0|$ και πιάνεται όταν $y = y_0$, δηλαδή όταν το σημείο K πέσει πάνω στο σημείο (κ, y_0) της l.
Αν η l είναι πλάγια με εξίσωση $y = \mu x + \nu$, τότε τα σημεία της l είναι τα $K = (x, \mu x + \nu)$ και η απόσταση ενός τυχόντος τέτοιου σημείου από το M είναι ίση με $\sqrt{(x - x_0)^2 + (\mu x + \nu - y_0)^2}$. Για να ελαχιστοποιήσουμε αυτήν την απόσταση, αρκεί να ελαχιστοποιήσουμε την συνάρτηση $f(x) = (x - x_0)^2 + (\mu x + \nu - y_0)^2$. Η f έχει παράγωγο

$$f'(x) = 2(x - x_0) + 2\mu(\mu x + \nu - y_0) = 2(1 + \mu^2)\big(x - \tfrac{x_0 + \mu y_0 - \mu\nu}{1 + \mu^2}\big).$$

Επομένως, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, a]$ και γνησίως αύξουσα στο $[a, +\infty)$, όπου $a = \frac{x_0 + \mu y_0 - \mu\nu}{1 + \mu^2}$, και άρα η απόσταση $\sqrt{(x - x_0)^2 + (\mu x + \nu - y_0)^2}$ γίνεται ελάχιστη όταν $x = a$ και η ελάχιστη τιμή της απόστασης αυτής είναι ίση με $\sqrt{(a - x_0)^2 + (\mu a + \nu - y_0)^2} = \frac{|\mu x_0 + \nu - y_0|}{(1 + \mu^2)^{1/2}}$.

Άσκηση 5.4.30. *Λυγίζουμε μια λεπτή ευθεία ράβδο μήκους l ώστε να σχηματισθεί ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Σε ποιά σημεία της πρέπει να λυγίσουμε τη ράβδο ώστε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο να έχει μέγιστο εμβαδό;*

Λύση: Αν A, B είναι τα άκρα της ράβδου, για να σχηματιστεί ορθογώνιο παραλληλόγραμμο από την ράβδο πρέπει να την λυγίσουμε στα διαδοχικά (από το A προς το B) σημεία K, L, M έτσι ώστε τα τμήματα AK, LM να έχουν ίσα μήκη και τα τμήματα KL, MB να έχουν, επίσης, ίσα μήκη.
Αν x είναι το κοινό μήκος των AK, LM και y είναι το κοινό μήκος των KL, MB, τότε είναι $2x + 2y = l$ και το εμβαδό του ορθογώνιου παραλληλογράμμου που προκύπτει είναι ίσο με xy.
Έχουμε, λοιπόν, να βρούμε τους $x, y > 0$ ώστε να μεγιστοποιηθεί η συνάρτηση xy με τον περιορισμό $2x + 2y = l$.
Ισοδύναμα, έχουμε να βρούμε τον $x \in (0, \frac{l}{2})$ ώστε να μεγιστοποιηθεί η $f(x) = x(\frac{l}{2} - x)$.
Η παράγωγος της f είναι η $f'(x) = \frac{l}{2} - 2x$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, \frac{l}{4}]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[\frac{l}{4}, \frac{l}{2})$, οπότε ο $\frac{l}{4}$ είναι το σημείο ολικού μεγίστου της f και η μέγιστη τιμή της είναι ίση με $f(\frac{l}{4}) = \frac{l^2}{16}$.
Άρα η ράβδος πρέπει να χωριστεί σε τέσσερα ίσα μέρη και το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο που θα προκύψει είναι τετράγωνο.

Άσκηση 5.4.31. *Θεωρούμε ευθεία γραμμή η οποία χωρίζει ένα επίπεδο σε δύο ημιεπίπεδα καθώς και σημείο A_1 στο ένα ημιεπίπεδο σε απόσταση d_1 από την ευθεία και σημείο A_2 στο άλλο ημιεπίπεδο σε απόσταση d_2 από την ευθεία. Ένα (σημειακό) όχημα κινείται με ταχύτητα σταθερού μέτρου v_1 όταν βρίσκεται στο πρώτο ημιεπίπεδο και με ταχύτητα σταθερού μέτρου v_2 όταν βρίσκεται στο δεύτερο ημιεπίπεδο. Βρείτε την τροχιά που πρέπει να ακολουθήσει το όχημα ώστε από το σημείο A_1 να φτάσει στο σημείο A_2 στον ελάχιστο χρόνο.*

Λύση: Έστω M_1 η κάθετη προβολή του A_1 στην ευθεία και M_2 η κάθετη προβολή του A_2 στην ευθεία.
Είναι σαφές ότι για να ελαχιστοποιηθεί η χρονική διάρκεια της μετάβασης από το A_1 στο A_2 πρέπει το όχημα να κινηθεί ευθύγραμμα από το A_1 μέχρι κάποιο σημείο M της ευθείας και, κατόπιν, ευθύγραμμα από το M στο A_2.
Αν x_1, x_2, x είναι οι συντεταγμένες των σημείων M_1, M_2, M στην ευθεία, τότε η απόσταση του σημείου A_1 από το M είναι ίση με $\sqrt{(x - x_1)^2 + {d_1}^2}$ και η απόσταση του σημείου A_2 από το M είναι ίση με $\sqrt{(x - x_2)^2 + {d_2}^2}$. Άρα η χρονική διάρκεια της κίνησης είναι ίση με

$$f(x) = \frac{\sqrt{(x-x_1)^2+{d_1}^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(x-x_2)^2+{d_2}^2}}{v_2}.$$

Η f έχει παράγωγο

$$f'(x) = \frac{x-x_1}{v_1\sqrt{(x-x_1)^2+{d_1}^2}} + \frac{x-x_2}{v_2\sqrt{(x-x_2)^2+{d_2}^2}} = \frac{v_2(x-x_1)\sqrt{(x-x_2)^2+{d_2}^2}+v_1(x-x_2)\sqrt{(x-x_1)^2+{d_1}^2}}{v_1v_2\sqrt{(x-x_1)^2+{d_1}^2}\,\sqrt{(x-x_2)^2+{d_2}^2}}.$$

Έστω $x_1 < x_2$.
Είναι προφανές ότι ισχύει $f'(x) < 0$ στο $(-\infty, x_1]$ και $f'(x) > 0$ στο $[x_2, +\infty)$.
Στο (x_1, x_2) η $f'(x) = 0$ είναι ισοδύναμη με την

$$v_2(x - x_1)\sqrt{(x - x_2)^2 + {d_2}^2} = v_1(x_2 - x)\sqrt{(x - x_1)^2 + {d_1}^2}$$

κι αυτή με την

$$\frac{{d_2}^2{v_2}^2}{(x-x_2)^2} - \frac{{d_1}^2{v_1}^2}{(x-x_1)^2} = {v_1}^2 - {v_2}^2. \tag{14.103}$$

Τώρα, είναι εύκολο να δούμε (με παραγώγιση) ότι η συνάρτηση $h(x) = \frac{{d_2}^2{v_2}^2}{(x-x_2)^2} - \frac{{d_1}^2{v_1}^2}{(x-x_1)^2}$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα (x_1, x_2) και ότι έχει όρια $-\infty$ και $+\infty$ στα άκρα x_1 και x_2. Άρα υπάρχει ακριβώς ένας $x_0 \in (x_1, x_2)$ ώστε να ισχύει $h(x) < {v_1}^2 - {v_2}^2$ στο (x_1, x_0) και $h(x) > {v_1}^2 - {v_2}^2$ στο (x_0, x_2) και $h(x_0) = {v_1}^2 - {v_2}^2$.

Άρα ισχύει $f'(x) < 0$ στο (x_1, x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0, x_2).
Επομένως, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, x_0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[x_0, +\infty)$ και άρα η χρονική διάρκεια ελαχιστοποιείται αν το σημείο M πέσει πάνω στο σημείο M_0 της ευθείας με συντεταγμένη x_0.
Ο x_0 μπορεί να βρεθεί ακριβώς από την εξίσωση (14.103). Όμως, περισσότερο ενδιαφέρον από το να βρούμε την τιμή του x_0 παρουσιάζει η εξής παρατήρηση. Το σημείο M_0 βρίσκεται ανάμεσα στα M_1 και M_2 και αν ϕ_1 είναι η γωνία που σχηματίζουν τα ευθ. τμήματα M_0M_1 και M_0A_1 και αν ϕ_2 είναι η γωνία που σχηματίζουν τα ευθ. τμήματα M_0M_2 και M_0A_2, τότε από την (14.103) προκύπτει ότι

$$\tfrac{\cos\phi_1}{\cos\phi_2} = \tfrac{v_1}{v_2}.$$

Άσκηση 5.4.33. *Έστω ότι τα κέντρα δύο σφαιρών με ακτίνες a και b έχουν απόσταση $c > a + b$. Βρείτε σε ποιό σημείο ανάμεσα στις δύο σφαίρες και πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα κέντρα των σφαιρών πρέπει να τοποθετήσουμε μια σημειακή φωτεινή πηγή ώστε να φωτίσουμε την μεγαλύτερη δυνατή συνολική επιφάνεια των δύο σφαιρών. Έχει λύση το πρόβλημα αν η φωτεινή πηγή μπορεί να τοποθετηθεί οπουδήποτε στον χώρο;*

Λύση: Αν μια φωτεινή πηγή βρίσκεται σε απόσταση d από το κέντρο μιας σφαίρας ακτίνας $a \le d$, τότε το τμήμα της επιφάνειας της σφαίρας που φωτίζεται από την φωτεινή πηγή έχει εμβαδό ίσο με $2\pi a^2(1 - \frac{a}{d})$.
Τώρα, έστω ότι η φωτεινή πηγή τοποθετείται στο ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα κέντρα των σφαιρών σε απόσταση $x \ge a$ από το κέντρο της σφαίρας με ακτίνα a. Τότε η απόσταση της φωτεινής πηγής από το κέντρο της σφαίρας με ακτίνα b είναι ίση με $c - x \ge b$. Προφανώς, ο x περιέχεται στο διάστημα $[a, c - b]$.
Επομένως, η συνολική επιφάνεια των δύο σφαιρών που φωτίζεται από την πηγή έχει εμβαδό ίσο με

$$E(x) = 2\pi a^2\big(1 - \tfrac{a}{x}\big) + 2\pi b^2\big(1 - \tfrac{b}{c-x}\big) \qquad \text{για } a \le x \le c - b.$$

Τώρα έχουμε

$$E'(x) = 2\pi\tfrac{a^3}{x^2} - 2\pi\tfrac{b^3}{(c-x)^2} = 2\pi\tfrac{a^3(c-x)^2 - b^3x^2}{x^2(c-x)^2}$$

Βλέπουμε ότι στο διάστημα $(0, c)$ ισχύει $E'(x) > 0$ για $0 < x < \frac{ca^{3/2}}{a^{3/2}+b^{3/2}}$ και $E'(x) < 0$ για $\frac{ca^{3/2}}{a^{3/2}+b^{3/2}} < x < c$. Άρα η E έχει ολικό μέγιστο στο διάστημα $(0, c)$ στο σημείο $\frac{ca^{3/2}}{a^{3/2}+b^{3/2}}$.
Τώρα έχουμε τρεις περιπτώσεις.
Αν $a < \frac{ca^{3/2}}{a^{3/2}+b^{3/2}} < c - b$, τότε η φωτεινή πηγή πρέπει να τοποθετηθεί στο σημείο $\frac{ca^{3/2}}{a^{3/2}+b^{3/2}}$ του διαστήματος $[0, c]$ ανάμεσα στα δύο κέντρα. Σ' αυτήν την περίπτωση η μέγιστη επιφάνεια είναι ίση με

$$E\big(\tfrac{ca^{3/2}}{a^{3/2}+b^{3/2}}\big) = 2\pi\big(a^2 + b^2 - \tfrac{(a^{3/2}+b^{3/2})^2}{c}\big).$$

Αν $\frac{ca^{3/2}}{a^{3/2}+b^{3/2}} \le a$, τότε η φωτεινή πηγή πρέπει να τοποθετηθεί στο σημείο a (δηλαδή στην επιφάνεια της σφαίρας με ακτίνα a) και σ' αυτήν την περίπτωση η μέγιστη επιφάνεια έχει εμβαδό ίσο με

$$E(a) = 2\pi b^2\big(1 - \tfrac{b}{c-a}\big).$$

Αν $c - b \le \frac{ca^{3/2}}{a^{3/2}+b^{3/2}}$, τότε η φωτεινή πηγή πρέπει να τοποθετηθεί στο σημείο $c - b$ (δηλαδή στην επιφάνεια της σφαίρας με ακτίνα b) και σ' αυτήν την περίπτωση η μέγιστη επιφάνεια είναι ίση με

$$E(c - b) = 2\pi a^2\big(1 - \tfrac{a}{c-b}\big).$$

Αν η φωτεινή πηγή μπορεί να τοποθετηθεί οπουδήποτε στον χώρο, τότε μπορούμε να επιλέξουμε θέσεις της πηγής από τις οποίες η πηγή να βλέπει καθεμιά από τις δύο σφαίρες ανεμπόδιστα από την άλλη σφαίρα. Τότε όσο πιο μεγάλη είναι η απόσταση d της πηγής από την σφαίρα με ακτίνα a

και, συγχρόνως, η απόσταση f της πηγής από την σφαίρα με ακτίνα b, τόσο πιο μεγάλο είναι και το εμβαδό

$$E(d,f) = 2\pi a^2\big(1-\tfrac{a}{d}\big) + 2\pi b^2\big(1-\tfrac{b}{f}\big)$$

της συνολικής επιφάνειας που φωτίζεται από την πηγή.
Όταν $d \to +\infty$ και, συγχρόνως, $f \to +\infty$ το εμβαδό έχει όριο

$$\lim_{d,f\to+\infty} E(d,f) = 2\pi(a^2+b^2).$$

Προφανώς, ισχύει $E(d,f) < 2\pi(a^2+b^2)$ για κάθε d, f, οπότε το πρόβλημα δεν έχει λύση: το εμβαδό δεν μπορεί να μεγιστοποιηθεί σε καμία θέση της φωτεινής πηγής στον χώρο. Παρατηρήστε ότι ο $4\pi(a^2+b^2)$ είναι το άθροισμα των εμβαδών των επιφανειών των δύο σφαιρών. Οπότε αυτό που αποδείξαμε είναι σχεδόν προφανές: μια φωτεινή πηγή δεν μπορεί να φωτίσει την μισή επιφάνεια μιας σφαίρας και τείνει, απλώς, να φωτίσει την μισή επιφάνεια της σφαίρας όσο περισσότερο απομακρύνεται από αυτήν.

Άσκηση 5.5.1. *Έστω η* $f(x) = \begin{cases} x^k, & \text{αν } x \geq 0 \\ -x^k, & \text{αν } x \leq 0 \end{cases}$ *όπου* $k \in \mathbb{N}$. *Για κάθε* $n \in \mathbb{N}$, *βρείτε την* $f^{(n)}$.

Λύση: Αν $k \geq 2$, τότε έχουμε

$$\lim_{x\to0-} \tfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0-} -x^{k-1} = 0, \quad \lim_{x\to0+} \tfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0+} x^{k-1} = 0,$$

οπότε $f'(0) = 0$. Αν, όμως, $k = 1$, τότε τα δύο παραπάνω όρια είναι -1 και 1, αντιστοίχως, οπότε δεν υπάρχει ο $f'(0)$. Άρα

$$k \geq 2: \quad f'(x) = \begin{cases} kx^{k-1}, & \text{αν } x \geq 0 \\ -kx^{k-1}, & \text{αν } x \leq 0 \end{cases} \qquad k = 1: \quad f'(x) = \begin{cases} kx^{k-1}, & \text{αν } x > 0 \\ -kx^{k-1}, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$

Αν $k = 1$, συνεχίζουμε όπως παρακάτω χωρίς, όμως, να παίρνουμε υπ' όψη τον $x = 0$.
Αν $k \geq 3$, τότε έχουμε

$$\lim_{x\to0-} \tfrac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = \lim_{x\to0-} -k(k-1)x^{k-2} = 0,$$

$$\lim_{x\to0+} \frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = \lim_{x\to0+} k(k-1)x^{k-2} = 0,$$

οπότε $f''(0) = 0$. Αν, όμως, $k = 2$, τότε τα δύο παραπάνω όρια είναι -2 και 2, αντιστοίχως, οπότε δεν υπάρχει ο $f''(0)$. Άρα

$$k \geq 3: \quad f''(x) = \begin{cases} k(k-1)x^{k-2}, & \text{αν } x \geq 0 \\ -k(k-1)x^{k-2}, & \text{αν } x \leq 0 \end{cases}$$

$$k = 1,2: \quad f''(x) = \begin{cases} k(k-1)x^{k-2}, & \text{αν } x > 0 \\ -k(k-1)x^{k-2}, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$

Αν $k = 2$, συνεχίζουμε όπως παρακάτω χωρίς, όμως, να παίρνουμε υπ' όψη τον $x = 0$.
Τώρα, είναι σαφές ότι

$$f^{(k-1)}(x) = \begin{cases} k(k-1)\cdots 2x, & \text{αν } x \geq 0 \\ -k(k-1)\cdots 2x, & \text{αν } x \leq 0 \end{cases}$$

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} k(k-1)\cdots 2\cdot 1, & \text{αν } x > 0 \\ -k(k-1)\cdots 2\cdot 1, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$

και

$$n > k \ : \quad f^{(n)}(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x > 0 \\ 0, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$

Άσκηση 5.5.2. *Βρείτε τις n-οστές παραγώγους των $\frac{x+2}{x^2-1}$, $\frac{1}{x^2+1}$, $\sin(5x)\sin(7x)$ για κάθε n.*

Λύση: Είναι $\frac{x+2}{x^2-1} = -\frac{1}{2}\frac{1}{x+1} + \frac{3}{2}\frac{1}{x-1}$, οπότε

$$\frac{d^n}{dx^n}\frac{x+2}{x^2-1} = -\frac{(-1)^n n!}{2}\frac{1}{(x+1)^{n+1}} + \frac{3(-1)^n n!}{2}\frac{1}{(x-1)^{n+1}}.$$

Για τη δεύτερη συνάρτηση εφαρμόζουμε ένα κόλπο, χρησιμοποιώντας τον μιγαδικό αριθμό i. Γράφουμε $\frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{(x-i)(x+i)} = \frac{1}{2i}\frac{1}{x-i} - \frac{1}{2i}\frac{1}{x+i}$ και τότε έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{d^n}{dx^n}\frac{1}{x^2+1} &= \frac{(-1)^n n!}{2i}\frac{1}{(x-i)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{2i}\frac{1}{(x+i)^{n+1}} = \frac{(-1)^n n!}{2i(x^2+1)^{n+1}}\left((x+i)^{n+1} - (x-i)^{n+1}\right)\\ &= \frac{(-1)^n n!}{2i(x^2+1)^{n+1}}\left(\textstyle\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^{n+1-k}i^k - \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^{n+1-k}(-i)^k\right)\\ &= \frac{(-1)^n n!}{2i(x^2+1)^{n+1}}\, 2\textstyle\sum_{0\le k\le n+1,k \text{ περιττός}}\binom{n+1}{k}x^{n+1-k}i^k\\ &= \frac{(-1)^n n!}{(x^2+1)^{n+1}}\textstyle\sum_{0\le m\le n/2}\binom{n+1}{2m+1}x^{n-2m}i^{2m}\\ &= \frac{(-1)^n n!}{(x^2+1)^{n+1}}\textstyle\sum_{0\le m\le n/2}(-1)^m\binom{n+1}{2m+1}x^{n-2m}.\end{aligned}$$

Για την προτελευταία ισότητα, αντικαταστήσαμε τον περιττό k με τον $2m+1$.
Για την τρίτη συνάρτηση γράφουμε $\sin(5x)\sin(7x) = \frac{1}{2}\cos(5x-7x) - \frac{1}{2}\cos(5x+7x) = \frac{1}{2}\cos(2x) - \frac{1}{2}\cos(12x)$. Άρα

$$\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}(\sin(5x)\sin(7x)) = \frac{2^{2m}(-1)^m}{2}\cos(2x) - \frac{12^{2m}(-1)^m}{2}\cos(12x),$$

$$\frac{d^{2m+1}}{dx^{2m+1}}(\sin(5x)\sin(7x)) = \frac{2^{2m+1}(-1)^{m+1}}{2}\sin(2x) - \frac{12^{2m+1}(-1)^{m+1}}{2}\sin(12x).$$

Άσκηση 5.5.5. *Αποδείξτε ότι $\frac{d^n \tan x}{dx^n} = P_n(\tan x)$ για κάθε n, όπου P_n είναι πολυώνυμο βαθμού $n+1$.*

Λύση: Με την αρχή της επαγωγής. Για $n=1$ είναι

$$\frac{d\tan x}{dx} = \frac{1}{(\cos x)^2} = (\tan x)^2 + 1 = P_1(\tan x),$$

όπου $P_1(t) = t^2+1$.
Έστω ότι για κάποιον $n\in\mathbb{N}$ ισχύει $\frac{d^n \tan x}{dx^n} = P_n(\tan x)$, όπου P_n είναι κάποιο πολυώνυμο βαθμού $n+1$.
Τότε

$$\frac{d^{n+1}\tan x}{dx^{n+1}} = \frac{d}{dx}P_n(\tan x) = P_n{}'(\tan x)\frac{d\tan x}{dx} = P_n{}'(\tan x)((\tan x)^2+1) = P_{n+1}(\tan x),$$

όπου $P_{n+1}(t) = P_n{}'(t)(t^2+1)$ είναι πολυώνυμο βαθμού $n+2$.

Άσκηση 5.5.7. *Αποδείξτε ότι ο 0 είναι σημείο καμπής της* $f(x) = \begin{cases} x|x| + x^2\sin(1/x), & \text{αν } x\neq 0\\ 0, & \text{αν } x = 0\end{cases}$

Λύση: Είναι

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\left(|x| + x\sin\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Τώρα, ισχύει

$$f(x) = x^2 + x^2\sin\tfrac{1}{x} = x^2(1+\sin\tfrac{1}{x}) \ge 0 = f'(0)(x-0)+f(0) \qquad \text{για } 0 < x,$$

$$f(x) = -x^2 + x^2\sin\tfrac{1}{x} = -x^2(1-\sin\tfrac{1}{x}) \le 0 = f'(0)(x-0)+f(0) \qquad \text{για } x < 0.$$

Άρα ο 0 είναι σημείο καμπής της f.
Παρατήρηση. Η f δεν έχει δεύτερη παράγωγο στον 0. Πράγματι, είναι

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 2x\sin(1/x) - \cos(1/x), & \text{αν } 0 < x \\ 0, & \text{αν } x = 0 \\ -2x + 2x\sin(1/x) - \cos(1/x), & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$

και τα

$$\lim_{x\to 0\pm} \tfrac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0\pm} \big(\pm 2 + 2\sin\tfrac{1}{x} - \tfrac{1}{x}\cos\tfrac{1}{x}\big)$$

δεν υπάρχουν.

Άσκηση 5.5.8. *Έστω $n \in \mathbb{N}$, διάστημα I, $f : I \to \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι ισχύει $f^{(n)}(x) = 0$ για κάθε $x \in I$ αν και μόνο αν η f είναι πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού $\leq n-1$.*

Λύση: Με την αρχή της επαγωγής.
Γνωρίζουμε ότι ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in I$ αν και μόνο αν η f είναι σταθερή στο I.
Έστω ότι για κάποιον $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι: ισχύει $f^{(n)}(x) = 0$ για κάθε $x \in I$ αν και μόνο αν η f είναι πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού $\leq n-1$.
Επομένως: ισχύει $f^{(n+1)}(x) = 0$ ή, ισοδύναμα, $(f')^{(n)}(x) = 0$ για κάθε $x \in I$ αν και μόνο αν η f' είναι πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού $\leq n-1$ αν και μόνο αν η f είναι πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού $\leq n$.

Άσκηση 5.5.9. *Έστω $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ ώστε η $f^{(n-1)}$ να είναι συνεχής στο I και η $f^{(n)}$ να υπάρχει στο εσωτερικό του I. Αν η f έχει $n+1$ διαφορετικές ρίζες στο I, αποδείξτε ότι η $f^{(n)}$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο εσωτερικό του I.*

Λύση: Με την αρχή της επαγωγής.
Γνωρίζουμε ότι, αν η f έχει δύο διαφορετικές ρίζες στο διάστημα I, τότε η f' έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο εσωτερικό του I.
Έστω ότι για κάποιον $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι: αν η f έχει $n+1$ διαφορετικές ρίζες στο I, τότε η $f^{(n)}$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο εσωτερικό του I.
Τώρα, αν η f έχει $n+2$ διαφορετικές ρίζες $x_1, \ldots, x_{n+2}$ στο I με $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1} < x_{n+2}$, τότε η f' έχει τουλάχιστον $n+1$ διαφορετικές ρίζες στο I (τουλάχιστον μία σε κάθε διάστημα (x_k, x_{k+1})) και, επομένως, η $f^{(n+1)} = (f')^{(n)}$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο εσωτερικό του I.

Άσκηση 5.5.10. *Έστω f συνεχής στο $[a,b]$ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο (a,b). Αν $f(a) = f(b) = 0$ και αν υπάρχει $c \in (a,b)$ ώστε $f(c) > 0$, αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a,b)$ ώστε $f''(\xi) < 0$.*

Λύση: Γνωρίζουμε ότι υπάρχουν $\xi_1 \in (a,c)$ και $\xi_2 \in (c,b)$ ώστε

$$f'(\xi_1) = \tfrac{f(c)-f(a)}{c-a} = \tfrac{f(c)}{c-a} > 0, \qquad f'(\xi_2) = \tfrac{f(b)-f(c)}{b-c} = \tfrac{-f(c)}{b-c} < 0.$$

Και τώρα, υπάρχει $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ και, επομένως, $\xi \in (a,b)$ ώστε

$$f''(\xi) = \tfrac{f'(\xi_2)-f'(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1} < 0.$$

Άσκηση 5.5.11. *Έστω f δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα (a,b) και έστω $f(x)f''(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (a,b)$. Αν η εξίσωση $f(x)f'(x) = 0$ έχει δύο λύσεις στο (a,b), να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή ανάμεσα σ' αυτές τις δύο λύσεις.*

Λύση: Έστω x_1 και x_2 με $x_1 < x_2$ οι δύο λύσεις της $f(x)f'(x) = 0$. Δηλαδή

$$f(x_1)f'(x_1) = f(x_2)f'(x_2) = 0.$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $g = ff'$ στο (a,b) και έχουμε ότι ισχύει

$$g'(x) = f(x)f''(x) + (f'(x))^2 \geq 0 \qquad \text{για κάθε } x \in (a,b),$$

οπότε η g είναι αύξουσα στο (a, b). Όμως, $g(x_1) = g(x_2) = 0$, οπότε η g είναι σταθερή 0 στο $[x_1, x_2]$. Αυτό, φυσικά, σημαίνει ότι ισχύει

$$f(x)f''(x) + (f'(x))^2 = g'(x) = 0 \qquad \text{για κάθε } x \in [x_1, x_2]$$

και, επειδή ισχύει $f(x)f''(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [x_1, x_2]$, αυτό σημαίνει ότι ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in [x_1, x_2]$. Άρα η f είναι σταθερή στο $[x_1, x_2]$.

Από το σημείο στο οποίο βρήκαμε ότι η $g = ff'$ είναι σταθερή 0 στο $[x_1, x_2]$ μπορούμε να ακολουθήσουμε έναν δεύτερο δρόμο λιγότερο σύντομο αλλά διδακτικό.

Έχουμε ότι ισχύει

$$\big(f^2(x)\big)' = 2f(x)f'(x) = 0 \qquad \text{για κάθε } x \in [x_1, x_2].$$

Άρα η συνάρτηση f^2 είναι σταθερή στο διάστημα $[x_1, x_2]$. Δηλαδή ισχύει

$$f^2(x) = c \qquad \text{για κάθε } x \in [x_1, x_2]$$

για κάποια σταθερά $c \geq 0$.

Αν $c = 0$, τότε ισχύει $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [x_1, x_2]$, οπότε η f είναι σταθερή στο $[x_1, x_2]$.

Αν $c > 0$, τότε η f δεν μηδενίζεται σε κανένα σημείο του $[x_1, x_2]$ και, επειδή είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$, διατηρεί πρόσημο στο $[x_1, x_2]$. Άρα είτε ισχύει $f(x) = +\sqrt{c}$ για κάθε $x \in [x_1, x_2]$ είτε ισχύει $f(x) = -\sqrt{c}$ για κάθε $x \in [x_1, x_2]$.

Σε κάθε περίπτωση η f είναι σταθερή στο $[x_1, x_2]$.

Άσκηση 5.5.12. *Έστω f συνεχής στο $[-1, 1]$, τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $(-1, 1)$. Αν $f(-1) = f(0) = 0$, $f(1) = 1$ και $f'(0) = 0$, αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (-1, 1)$ ώστε $f'''(\xi) = 3$.*

Λύση: Θα βρούμε πρώτα ένα πολυώνυμο το πολύ τρίτου βαθμού $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ τέτοιο ώστε $p(-1) = p(0) = 0$ $p(1) = 1$, $p'(0) = 0$.

Οι τέσσερις αυτές συνθήκες μας δίνουν ένα σύστημα τεσσάρων εξισώσεων με τέσσερις αγνώστους:

$$-a + b - c + d = 0, \quad d = 0, \quad a + b + c + d = 1, \quad c = 0.$$

Λύνουμε το σύστημα και βρίσκουμε $a = b = \frac{1}{2}$, $c = d = 0$ και, επομένως, το πολυώνυμο που ζητάμε είναι το $p(x) = \frac{1}{2}\,x^3 + \frac{1}{2}\,x^2$.

Κατόπιν θεωρούμε την συνάρτηση $g = f - p$, η οποία είναι συνεχής στο $[-1, 1]$ και τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $(-1, 1)$ και ισχύει

$$g(-1) = g(0) = g(1) = 0, \quad g'(0) = 0.$$

Συνεπάγεται ότι υπάρχουν $\xi_1 \in (-1, 0)$ και $\xi_2 \in (0, 1)$ ώστε $g'(\xi_1) = g'(\xi_2) = 0$. Άρα υπάρχουν $\eta_1 \in (\xi_1, 0)$ και $\eta_2 \in (0, \xi_2)$ ώστε $g''(\eta_1) = g''(\eta_2) = 0$. Τέλος, υπάρχει $\xi \in (\eta_1, \eta_2)$ και, επομένως, $\xi \in (-1, 1)$ ώστε $g'''(\xi) = 0$ ή, ισοδύναμα, $f'''(\xi) = p'''(\xi) = 3$.

Άσκηση 5.5.13. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b]$ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο (a, b). Αν το ευθύγραμμο τμήμα το οποίο έχει άκρα τα σημεία $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$ τέμνει το γράφημα της f σε κάποιο σημείο διαφορετικό από αυτά τα δύο σημεία, αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε $f''(\xi) = 0$.*

Λύση: Έστω $a < c < b$ ώστε το ευθύγραμμο τμήμα το οποίο έχει άκρα τα σημεία $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$ να τέμνει το γράφημα της f στο σημείο $(c, f(c))$. Τότε το $(c, f(c))$ ικανοποιεί την εξίσωση του ευθυγράμμου τμήματος, δηλαδή:

$$f(c) = \tfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(c - a) + f(a).$$

Συνεπάγεται

$$\tfrac{f(c)-f(a)}{c-a} = \tfrac{f(b)-f(c)}{b-c}.$$

Άρα υπάρχουν $\xi_1 \in (a, c)$ και $\xi_2 \in (c, b)$ ώστε $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$ και, επομένως, υπάρχει $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ ώστε $f''(\xi) = 0$.

Άσκηση 5.5.14. *Έστω ανοικτό διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ τρεις φορές παραγωγίσιμη στο I. Αν ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in I$ και ισχύει $f(x) = 0$ για τουλάχιστον δύο διαφορετικές τιμές του $x \in I$, αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in I$ ώστε $f'''(\xi) = 0$.*

Λύση: Έστω $x_1, x_2 \in I$ ώστε $x_1 < x_2$ και $f(x_1) = f(x_2) = 0$.
Επειδή ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in I$, οι x_1, x_2 είναι σημεία ελαχίστου της f και, επειδή το I είναι ανοικτό διάστημα, έχουμε $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$.
Αν η f είναι σταθερή 0 στο $[x_1, x_2]$, τότε ισχύει $f'''(x) = 0$ για κάθε $x \in [x_1, x_2]$.
Τώρα, έστω ότι η f δεν είναι σταθερή στο $[x_1, x_2]$, οπότε η f έχει τουλάχιστον μία θετική τιμή στο $[x_1, x_2]$ και άρα έχει μέγιστη τιμή σε κάποιο σημείο του (x_1, x_2). Δηλαδή, υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$ ώστε $f'(x_0) = 0$.
Άρα είναι $x_1 < x_0 < x_2$ με $f'(x_1) = f'(x_0) = f'(x_2) = 0$. Άρα υπάρχουν $\xi_1 \in (x_1, x_0)$ και $\xi_2 \in (x_0, x_2)$ ώστε $f''(\xi_1) = f''(\xi_2) = 0$. Άρα υπάρχει $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ ώστε $f'''(\xi) = 0$.

Άσκηση 5.5.15. *Δείτε την άσκηση 5.3.11[γ]. Αν $a < b$ και $n \in \mathbb{N}$, θεωρήστε την πολυωνυμική συνάρτηση $P(x) = (x - a)^n (x - b)^n$. Αποδείξτε ότι η $P^{(n)}$ είναι πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού n, ότι έχει ακριβώς n διαφορετικές ρίζες και ότι όλες αυτές οι ρίζες ανήκουν στο (a, b).*

Λύση: Η P είναι πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού $2n$ και έχει $2n$ ρίζες: τον a με πολλαπλότητα n και τον b με πολλαπλότητα n. Από το αποτέλεσμα της άσκησης 5.3.11[γ] συνεπάγεται ότι η P', η οποία είναι πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού $2n - 1$, έχει $2n - 1$ ρίζες: τον a με πολλαπλότητα $n - 1$, τον b με πολλαπλότητα $n - 1$ και έναν αριθμό στο διάστημα (a, b) με πολλαπλότητα 1. Μάλιστα, μπορούμε να δούμε ότι $P'(x) = 2n(x - a)^{n-1}(x - b)^{n-1}(x - \frac{a+b}{2})$, οπότε η ενδιάμεση ρίζα είναι ο $\frac{a+b}{2}$.
Συνεχίζουμε. Με το ίδιο επιχείρημα βρίσκουμε ότι η P'', η οποία είναι πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού $2n - 2$, έχει $2n - 2$ ρίζες: τον a με πολλαπλότητα $n - 2$, τον b με πολλαπλότητα $n - 2$ και δύο αριθμούς στο διάστημα (a, b) με πολλαπλότητα 1 για τον καθένα. Ομοίως, η P''', η οποία είναι πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού $2n - 3$, έχει $2n - 3$ ρίζες: τον a με πολλαπλότητα $n - 3$, τον b με πολλαπλότητα $n - 3$ και τρεις αριθμούς στο διάστημα (a, b) με πολλαπλότητα 1 για τον καθένα.
Συνεχίζοντας επαγωγικά, βλέπουμε ότι η $P^{(n)}$, η οποία είναι πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού $2n - n = n$, έχει $2n - n = n$ ρίζες: τον a με πολλαπλότητα $n - n = 0$, τον b με πολλαπλότητα $n - n = 0$ και n αριθμούς στο διάστημα (a, b) με πολλαπλότητα 1 για τον καθένα.

Άσκηση 5.5.16. *Έστω διαστήματα I, J και $f : I \to J$ και $f^{-1} : J \to I$, $\xi \in I$ και $\eta = f(\xi) \in J$. Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στον ξ και $f'(\xi) \neq 0$, αποδείξτε ότι η f^{-1} είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στον η και $(f^{-1})''(\eta) = -f''(\xi)/(f'(\xi))^3$.*

Λύση: Επειδή η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στον ξ, είναι παραγωγίσιμη σε κάποια περιοχή του ξ. Επίσης, η f' είναι συνεχής στον ξ και, επειδή $f'(\xi) \neq 0$, συνεπάγεται ότι ισχύει $f'(x) \neq 0$ σε κάποια περιοχή του ξ. Άρα η f είναι ένα-προς-ένα σε κάποια περιοχή του ξ.
Τώρα, κάνοντας αλλαγή μεταβλητής από y σε $x = f^{-1}(y)$, έχουμε

$$\begin{aligned}\lim_{y\to\eta} \tfrac{(f^{-1})'(y)-(f^{-1})'(\eta)}{y-\eta} &= \lim_{x\to\xi} \tfrac{(1/f'(x))-(1/f'(\xi))}{f(x)-f(\xi)} \\ &= -\lim_{x\to\xi} \tfrac{1}{f'(x)f'(\xi)} \tfrac{(f'(x)-f'(\xi))/(x-\xi)}{(f(x)-f(\xi))/(x-\xi)} = -f''(\xi)/(f'(\xi))^3.\end{aligned}$$

Άσκηση 5.5.19. [α] *Έστω $x_1, \ldots, x_n$ διαφορετικοί ανά δύο και $y_1, \ldots, y_n$. Θεωρήστε για κάθε $k = 1, \ldots, n$ το βαθμού $n - 1$ πολυώνυμο $Q_k(x) = \prod_{1\leq m\leq n, m\neq k} \frac{x-x_m}{x_k-x_m}$, όπου στο γινόμενο ο m διατρέχει τους φυσικούς από τον 1 στον n παραλείποντας τον k.*
Ποιές είναι οι ρίζες του $Q_k(x)$;
Αποδείξτε ότι το $Q(x) = y_1Q_1(x) + \cdots + y_nQ_n(x)$ είναι το μοναδικό πολυώνυμο βαθμού $\leq n - 1$ με την ιδιότητα: $Q(x_1) = y_1, \ldots, Q(x_n) = y_n$.

[β] *Έστω $x_1, \dots, x_n$ στο διάστημα I διαφορετικοί ανά δύο και συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$.*
Αν $Q_1(x), \dots, Q_n(x)$ είναι τα πολυώνυμα που ορίστηκαν στο [α], σχηματίζουμε το πολυώνυμο $Q(x) = f(x_1)Q_1(x) + \cdots + f(x_n)Q_n(x)$.
Αν η $f^{(n-1)}$ είναι συνεχής στο I και η $f^{(n)}$ υπάρχει στο εσωτερικό του I, αποδείξτε ότι για κάθε $x \in I$ υπάρχει ξ στο εσωτερικό του I ώστε $f(x) - Q(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_1)\cdots(x - x_n)$.

Λύση: [α] Το $Q_k(x)$ έχει ρίζες τους $x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n$, δηλαδή όλους τους x_m εκτός από τον x_k.
Τώρα, επειδή $Q_m(x_k) = 0$, αν $m \neq k$, και $Q_k(x_k) = 1$, συνεπάγεται

$$Q(x_k) = \sum_{m=1}^{n} y_m Q_m(x_k) = y_k.$$

Δηλαδή, το Q είναι πολυώνυμο βαθμού $\leq n - 1$ με την ιδιότητα: $Q(x_1) = y_1, \dots, Q(x_n) = y_n$.
Αν υπήρχε και δεύτερο πολυώνυμο P βαθμού $\leq n - 1$ με την ίδια ιδιότητα, τότε η διαφορά τους θα ήταν πολυώνυμο βαθμού $\leq n - 1$ με n ρίζες: τους $y_1, \dots, y_n$. Επομένως, το $P - Q$ θα ήταν το μηδενικό πολυώνυμο και θα καταλήγαμε σε άτοπο.
Άρα το Q είναι το μοναδικό πολυώνυμο βαθμού $\leq n - 1$ ώστε $Q(x_1) = y_1, \dots, Q(x_n) = y_n$.

[β] Αν $x = x_k$ για κάποιον $k = 1, \dots, n$, τότε μπορούμε να πάρουμε οποιονδήποτε ξ στο εσωτερικό του I και τότε η

$$f(x) - Q(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_1)\cdots(x - x_n) \tag{14.104}$$

ισχύει αυτομάτως με $x = x_k$ ως ισότητα $0 = 0$.
Τώρα, έστω $x \neq x_k$ για κάθε $k = 1, \dots, n$.
Ορίζουμε τον αριθμό

$$A = \frac{n!(f(x) - Q(x))}{(x - x_1)\cdots(x - x_n)} \tag{14.105}$$

και τη συνάρτηση

$$h(t) = f(t) - Q(t) - \frac{A}{n!}(t - x_1)\cdots(t - x_n). \tag{14.106}$$

Παρατηρήστε ότι έχουμε επιλέξει κάποιον x και τόν έχουμε σταθεροποιήσει, οπότε ο A είναι ένας σταθερός αριθμός και όχι συνάρτηση.
Τώρα έχουμε ότι η h έχει τις προφανείς ρίζες $x_1, \dots, x_n$. Αλλά, λόγω της συγκεκριμένης επιλογής του A, η h έχει μια επιπλέον ρίζα: τον x. Οπότε η h έχει $n + 1$ διαφορετικές ανά δύο ρίζες στο διάστημα I.
Από το αποτέλεσμα της άσκησης 5.5.9 συνεπάγεται ότι υπάρχει ξ στο εσωτερικό του I ώστε $h^{(n)}(\xi) = 0$. Επειδή το Q είναι πολυώνυμο βαθμού $\leq n-1$, συνεπάγεται $Q^{(n)}(\xi) = 0$, οπότε από την $h^{(n)}(\xi) = 0$ και την (14.106) προκύπτει $f^{(n)}(\xi) = A$. Τέλος, από την (14.105) συνεπάγεται η (14.104).

Άσκηση 5.5.20. *Αποδείξτε τον τύπο του Leibniz, $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$ αν $n \in \mathbb{N}$.*

Λύση: Με την αρχή της επαγωγής.
Για $n = 1$ έχουμε $(fg)' = fg' + f'g = \binom{1}{0} f^{(0)} g^{(1)} + \binom{1}{1} f^{(1)} g^{(0)}$.
Έστω ότι για κάποιον $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$.

Τότε

$$
\begin{aligned}
(fg)^{(n+1)} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (f^{(k)} g^{(n-k)})' \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} \\
&= \binom{n}{0} f^{(0)} g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \\
&\quad + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \binom{n}{n} f^{(n+1)} g^{(0)} \\
&= \binom{n+1}{0} f^{(0)} g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \binom{n+1}{n+1} f^{(n+1)} g^{(0)} \\
&= \binom{n+1}{0} f^{(0)} g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right) f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \binom{n+1}{n+1} f^{(n+1)} g^{(0)} \\
&= \binom{n+1}{0} f^{(0)} g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \binom{n+1}{n+1} f^{(n+1)} g^{(0)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}.
\end{aligned}
$$

Στην προτελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε την ταυτότητα $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$, η οποία αποδεικνύεται ως εξής:

$$
\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n+1-k)!} = \frac{n!((n+1-k)+k)}{k!(n+1-k)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}.
$$

Άσκηση 5.5.22. *Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^{-x^2}$.*

Αποδείξτε με την αρχή της επαγωγής ότι $f^{(n)}(x) = (-1)^n H_n(x) e^{-x^2}$ για κάθε x, όπου $H_n(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού n. Για παράδειγμα: $H_1(x) = 2x$, $H_2(x) = 4x^2 - 2$, $H_3(x) = 8x^3 - 12x$.

Αποδείξτε ότι $H_{n+1}(x) = -H_n{}'(x) + 2xH_n(x)$ για κάθε x.

Παραγωγίστε n φορές τη σχέση $f'(x) = -2xf(x)$ με τον τύπο του Leibniz της άσκησης 5.5.20 και αποδείξτε ότι $H_{n+2}(x) = 2xH_{n+1}(x) - 2(n+1)H_n(x)$ για κάθε x.

Αποδείξτε ότι $H_{n+1}{}'(x) = 2(n+1)H_n(x)$ για κάθε x.

Αποδείξτε ότι ο συντελεστής του x^n στο $H_n(x)$ είναι ο 2^n.

Αποδείξτε ότι $H_n{}''(x) - 2xH_n{}'(x) + 2nH_n(x) = 0$ για κάθε x.

Λύση: Το πρώτο και το δεύτερο ερώτημα. Για $n = 1$ έχουμε $f'(x) = -2xe^{-x^2} = -H_1(x)e^{-x^2}$, όπου $H_1(x) = 2x$.
Έστω ότι για κάποιον $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $f^{(n)}(x) = (-1)^n H_n(x) e^{-x^2}$ για κάθε x, όπου $H_n(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού n.
Τότε

$$
f^{(n+1)}(x) = (-1)^n H_n{}'(x) e^{-x^2} - 2(-1)^n x H_n(x) e^{-x^2} = (-1)^{n+1} H_{n+1}(x) e^{-x^2},
$$

όπου $H_{n+1}(x) = -H_n{}'(x) + 2xH_n(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού $n+1$.
Το τρίτο ερώτημα. Για $n \geq 2$ έχουμε

$$
\begin{aligned}
f^{(n+1)}(x) &= -2\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{(k)} f^{(n-k)}(x) = -2\binom{n}{0} x f^{(n)}(x) - 2\binom{n}{1} f^{(n-1)}(x) \\
&= -2xf^{(n)}(x) - 2nf^{(n-1)}(x).
\end{aligned}
$$

Άρα

$$
(-1)^{n+1} H_{n+1}(x) e^{-x^2} = -2x(-1)^n H_n(x) e^{-x^2} - 2n(-1)^{n-1} H_{n-1}(x) e^{-x^2}
$$

και, επομένως, ισχύει $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$ για κάθε x. Άρα για $n \geq 1$ ισχύει $H_{n+2}(x) = 2xH_{n+1}(x) - 2(n+1)H_n(x)$ για κάθε x.
Το τέταρτο ερώτημα. Από τη σχέση του δεύτερου ερωτήματος με $n+1$ αντί του n και από τη σχέση του τρίτου ερωτήματος έχουμε $-H_{n+1}{}'(x) + 2xH_{n+1}(x) = 2xH_{n+1}(x) - 2(n+1)H_n(x)$ και άρα $H_{n+1}{}'(x) = 2(n+1)H_n(x)$ για κάθε x.
Το πέμπτο ερώτημα. Ο συντελεστής του x στο $H_1(x) = 2x$ είναι ο 2.

Έστω ότι για κάποιον n ο συντελεστής του x^n στο $H_n(x)$ είναι ο 2^n.
Από την σχέση $H_{n+1}(x) = -H_n{}'(x) + 2xH_n(x)$ του δεύτερου ερωτήματος έχουμε ότι ο συντελεστής του x^{n+1} στο $H_{n+1}(x)$ είναι $2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$.

Το έκτο ερώτημα. Από τις σχέσεις του δεύτερου και του τέταρτου ερωτήματος έχουμε

$$\begin{aligned} H_n{}''(x) &= -H_{n+1}{}'(x) + 2xH_n{}'(x) + 2H_n(x) = -2(n+1)H_n(x) + 2xH_n{}'(x) + 2H_n(x) \\ &= 2xH_n{}'(x) - 2nH_n(x). \end{aligned}$$

Άσκηση 5.5.23. *Έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο (a, b) και $a < \xi < b$. Αν ισχύει $f'(x) \geq f'(\xi)$ για κάθε $x \in (a, b)$, αποδείξτε ότι ο ξ είναι σημείο καμπής της f.*

Λύση: Αν $\xi < x < b$, υπάρχει $\eta \in (\xi, x)$ ώστε $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = f'(\eta) \geq f'(\xi)$ και άρα

$$f(x) \geq f'(\xi)(x - \xi) + f(\xi).$$

Αν $a < x < \xi$, υπάρχει $\eta \in (x, \xi)$ ώστε $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = f'(\eta) \geq f'(\xi)$ και άρα

$$f(x) \leq f'(\xi)(x - \xi) + f(\xi).$$

Άρα ο ξ είναι σημείο καμπής της f.

Άσκηση 5.5.25. *Έστω $\lambda, \mu \geq 0$, διάστημα I και $f, g : I \to \mathbb{R}$ κυρτές στο I. Αποδείξτε ότι οι $\lambda f + \mu g : I \to \mathbb{R}$ και $\max\{f, g\} : I \to \mathbb{R}$ είναι κυρτές στο I.*
Έστω διαστήματα I, J και $f : I \to J$ κυρτή στο I και $g : J \to \mathbb{R}$ κυρτή στο J. Αν η g είναι αυξουσα στο J, αποδείξτε ότι η $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ είναι κυρτή το I.
Έστω διάστημα I και $\mathcal{F}$ ένα σύνολο, κάθε στοιχείο του οποίου είναι συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ κυρτή στο I. Για κάθε $x \in I$ ορίζουμε $F(x) = \sup\{f(x) \mid f \in \mathcal{F}\}$. Αν υποθέσουμε ότι $F(x) \in \mathbb{R}$ για κάθε $x \in I$, αποδείξτε ότι η $F : I \to \mathbb{R}$ είναι κυρτή στο I.

Λύση: Το πρώτο ερώτημα. Έστω $x_1, x_2 \in I$ με $x_1 < x_2$ και έστω $0 < t < 1$. Τότε

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2), \quad g((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)g(x_1) + tg(x_2).$$

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη σχέση με λ και την δεύτερη με μ, προσθέτουμε και βρίσκουμε

$$(\lambda f + \mu g)((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)(\lambda f + \mu g)(x_1) + t(\lambda f + \mu g)(x_2).$$

Άρα η $\lambda f + \mu g$ είναι κυρτή στο I.
Αν ορίσουμε $h = \max\{f, g\}$, τότε από τις δύο παραπάνω σχέσεις έχουμε

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)h(x_1) + th(x_2), \quad g((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)h(x_1) + th(x_2)$$

και άρα

$$h((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)h(x_1) + th(x_2).$$

Άρα η h είναι κυρτή στο I.

Το δεύτερο ερώτημα. Έστω $x_1, x_2 \in I$ με $x_1 < x_2$ και έστω $0 < t < 1$. Επειδή η f είναι κυρτή στο I, συνεπάγεται

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2).$$

Ορίζουμε $y_1 = f(x_1) \in J$, $y_2 = f(x_2) \in J$ και $y = f((1-t)x_1 + tx_2) \in J$, οπότε η παραπάνω ανισότητα γράφεται $y \leq (1-t)y_1 + ty_2$. Τώρα, επειδή η g είναι αύξουσα και κυρτή στο J, έχουμε

$$g(y) \leq g((1-t)y_1 + ty_2) \leq (1-t)g(y_1) + tg(y_2).$$

Άρα

$$g(f((1-t)x_1 + tx_2)) \leq (1-t)g(f(x_1)) + tg(f(x_2)),$$

οπότε η $g \circ f$ είναι κυρτή στο I.

Το τρίτο ερώτημα. Έστω $x_1, x_2 \in I$ με $x_1 < x_2$ και έστω $0 < t < 1$. Τότε για κάθε $f \in \mathcal{F}$ ισχύει

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2) \leq (1-t)F(x_1) + tF(x_2)$$

και άρα ισχύει

$$F((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)F(x_1) + tF(x_2),$$

οπότε η F είναι κυρτή στο I.

Άσκηση 5.5.26. *Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$.*

Αποδείξτε ότι η f είναι κυρτή στο I αν και μόνο αν για κάθε $\xi \in I$ η συνάρτηση $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ είναι αύξουσα συνάρτηση του x στο $I \setminus \{\xi\}$.

Αποδείξτε ότι η f είναι κυρτή στο I αν και μόνο αν $\frac{f(b')-f(a')}{b'-a'} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ για κάθε $a, a', b, b' \in I$, $a' \leq a$, $b' \leq b$ και, φυσικά, $a \neq b$ και $a' \neq b'$.

Λύση: Το πρώτο ερώτημα. Έστω ότι η f είναι κυρτή στο I και έστω $x_1, x_2 \in I \setminus \{\xi\}$ με $x_1 < x_2$. Αν $x_1 < \xi < x_2$, χρησιμοποιούμε την ανισότητα της κυρτότητας

$$f(x) \leq \tfrac{x_2-x}{x_2-x_1} f(x_1) + \tfrac{x-x_1}{x_2-x_1} f(x_2)$$

με $x = \xi$ και μετά από λίγες πράξεις βρίσκουμε ότι $\frac{f(x_1)-f(\xi)}{x_1-\xi} \leq \frac{f(x_2)-f(\xi)}{x_2-\xi}$.
Αν $x_1 < x_2 < \xi$, χρησιμοποιούμε την ίδια ανισότητα, αλλά με τον x_2 στη θέση του x και με τον ξ στη θέση του x_2, και πάλι βρίσκουμε ότι $\frac{f(x_1)-f(\xi)}{x_1-\xi} \leq \frac{f(x_2)-f(\xi)}{x_2-\xi}$.
Αν $\xi < x_1 < x_2$, χρησιμοποιούμε πάλι την ίδια ανισότητα, αλλά με τον x_1 στη θέση του x και με τον ξ στη θέση του x_1, και βρίσκουμε ότι $\frac{f(x_1)-f(\xi)}{x_1-\xi} \leq \frac{f(x_2)-f(\xi)}{x_2-\xi}$.
Για το αντίστροφο θεωρούμε $x_1, x_2, x \in I$ με $x_1 < x < x_2$. Επειδή η συνάρτηση $\frac{f(t)-f(x)}{t-x}$ είναι αύξουσα συνάρτηση του t στο $I \setminus \{x\}$, συνεπάγεται

$$\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x} \leq \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}.$$

Από αυτήν την ανισότητα προκύπτει η ανισότητα $f(x) \leq \frac{x_2-x}{x_2-x_1} f(x_1) + \frac{x-x_1}{x_2-x_1} f(x_2)$ που χαρακτηρίζει την κυρτότητα.

Το δεύτερο ερώτημα. Χρησιμοποιούμε το αποτέλεσμα του πρώτου ερωτήματος. Αν η f είναι κυρτή, τότε για κάθε $a, a', b, b' \in I$, $a' \leq a$, $b' \leq b$ έχουμε

$$\frac{f(b')-f(a')}{b'-a'} \leq \frac{f(b)-f(a')}{b-a'} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

αν $b \neq a'$ και

$$\frac{f(b')-f(a')}{b'-a'} \leq \frac{f(b')-f(a)}{b'-a} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

αν $b' \neq a$. (Δεν είναι δυνατό να είναι $b = a'$ και $b' = a$.)
Αντιστρόφως, χρησιμοποιούμε την $\frac{f(b')-f(a')}{b'-a'} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ με $a' = a = \xi$ και το αποτέλεσμα του πρώτου ερωτήματος για να συμπεράνουμε ότι η f είναι κυρτή στο I.

Άσκηση 5.5.28. *Έστω $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ με $a < b$ και $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ κυρτή στο (a, b).*

Αποδείξτε ότι υπάρχει το $\lim_{x\to b-} f(x)$.

Αν, επιπλέον, $b \in \mathbb{R}$ και η f είναι ορισμένη στο b, αποδείξτε ότι η f είναι κυρτή στο $(a, b]$ αν και μόνο αν $\lim_{x\to b-} f(x) \leq f(b)$.

Λύση: Παίρνουμε οποιονδήποτε $\xi \in (a, b)$. Από το αποτέλεσμα της άσκησης 5.5.26 έχουμε ότι η συνάρτηση $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ είναι αύξουσα στο διάστημα (ξ, b), οπότε υπάρχει το $l = \lim_{x\to b-} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ και η τιμή του είναι αριθμός ή $+\infty$. Άρα υπάρχει και το όριο

$$\lim_{x\to b-} f(x) = \lim_{x\to b-} \tfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} (x - \xi) + f(\xi) = l(b - \xi) + f(\xi)$$

και η τιμή του είναι αριθμός ή $+\infty$.
Τώρα, έστω, επιπλέον, ότι $b \in \mathbb{R}$ και η f είναι ορισμένη στο b.
Αν η f είναι κυρτή στο $(a, b]$, τότε για κάθε $x \in (\xi, b)$ ισχύει

$$f(x) \leq \tfrac{b-x}{b-\xi} f(\xi) + \tfrac{x-\xi}{b-\xi} f(b)$$

και άρα $\lim_{x \to b-} f(x) \leq f(b)$.
Αντιστρόφως, έστω $\lim_{x \to b-} f(x) \leq f(b)$. Για να αποδείξουμε ότι η f είναι κυρτή στο $(a, b]$ (με δεδομένο ότι είναι κυρτή στο (a, b)) αρκεί να πάρουμε τυχόντες $x_1, x \in (a, b)$ με $x_1 < x$ και να αποδείξουμε ότι

$$f(x) \leq \tfrac{b-x}{b-x_1} f(x_1) + \tfrac{x-x_1}{b-x_1} f(b).$$

Πράγματι, για κάθε $x' \in (x, b)$ ισχύει

$$f(x) \leq \tfrac{x'-x}{x'-x_1} f(x_1) + \tfrac{x-x_1}{x'-x_1} f(x'),$$

οπότε

$$\begin{aligned} f(x) &\leq \lim_{x' \to b-} \big(\tfrac{x'-x}{x'-x_1} f(x_1) + \tfrac{x-x_1}{x'-x_1} f(x')\big) = \tfrac{b-x}{b-x_1} f(x_1) + \tfrac{x-x_1}{b-x_1} \lim_{x' \to b-} f(x') \\ &\leq \tfrac{b-x}{b-x_1} f(x_1) + \tfrac{x-x_1}{b-x_1} f(b). \end{aligned}$$

Άσκηση 5.5.29. *Έστω f κυρτή στο διάστημα I και $x_1, x_2 \in I$ με $x_1 < x_2$.*
Αν είναι $f(x_0) = \frac{x_2-x_0}{x_2-x_1} f(x_1) + \frac{x_0-x_1}{x_2-x_1} f(x_2)$ για κάποιον $x_0 \in (x_1, x_2)$, αποδείξτε ότι ισχύει $f(x) = \frac{x_2-x}{x_2-x_1} f(x_1) + \frac{x-x_1}{x_2-x_1} f(x_2)$ για κάθε $x \in (x_1, x_2)$.

Λύση: Το ότι η f είναι κυρτή συνεπάγεται ότι για κάθε $x \in (x_1, x_2)$ το σημείο $(x, f(x))$ δεν βρίσκεται πάνω από την ευθεία l η οποία διέρχεται από τα σημεία $(x_1, f(x_1))$ και $(x_2, f(x_2))$. Από την άλλη μεριά, η ισότητα που πρέπει να αποδείξουμε λέει ότι το $(x, f(x))$ ανήκει στην ευθεία l.
Άρα πρέπει να αποδείξουμε ότι το $(x, f(x))$ δεν βρίσκεται κάτω από την ευθεία l.
Η ισότητα της υπόθεσης λέει ότι το σημείο $(x_0, f(x_0))$ ανήκει στην ευθεία l.
Τώρα, έστω $x_0 < x < x_2$ και έστω (για άτοπο) ότι το $(x, f(x))$ βρίσκεται κάτω από την ευθεία l. Τότε, όμως, το $(x_0, f(x_0))$ βρίσκεται πάνω από την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $(x_1, f(x_1))$ και $(x, f(x))$ και καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα το $(x, f(x))$ ανήκει στην ευθεία l.
Αν $x_1 < x < x_0$, με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι το $(x, f(x))$ ανήκει στην ευθεία l.

Άσκηση 5.5.30. *Έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο (a, b). Αν για κάθε $x_1, x_2 \in (a, b)$ με $x_1 < x_2$ υπάρχει ακριβώς ένας $\xi \in (x_1, x_2)$ ώστε $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(\xi)$, αποδείξτε ότι η f είναι είτε γνησίως κυρτή είτε γνησίως κοίλη στο (a, b). Ισχύει το αντίστροφο;*

Υπόδειξη: Αποδείξτε ότι καμία ευθεία δεν τέμνει το γράφημα της f σε περισσότερα από δύο σημεία.

Άσκηση 5.5.31. *Έστω $f : (0, b) \to \mathbb{R}$ κυρτή στο $(0, b)$. Αν $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$, αποδείξτε ότι η $\frac{f(x)}{x}$ είναι αύξουσα στο $(0, b)$. Αν $\lim_{x \to 0} f(x) < 0$, αποδείξτε ότι η $\frac{f(x)}{x}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, b)$.*

Λύση: Έστω $x_1, x_2 \in (0, b)$ με $x_1 < x_2$.
Παίρνουμε τυχόντα $x' \in (0, x_1)$. Από το αποτέλεσμα της άσκησης 5.5.26 συνεπάγεται

$$\tfrac{f(x_1)-f(x')}{x_1-x'} \leq \tfrac{f(x_2)-f(x')}{x_2-x'}.$$

Αν $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$, παίρνοντας όριο όταν $x' \to 0+$, βρίσκουμε $\frac{f(x_1)}{x_1} \leq \frac{f(x_2)}{x_2}$ και άρα η $\frac{f(x)}{x}$ είναι αύξουσα στο $(0, b)$.
Τώρα, έστω $l = \lim_{x \to 0} f(x) < 0$. Πάλι από το αποτέλεσμα της άσκησης 5.5.26 συνεπάγεται

$$\tfrac{f(x')-f(x_1)}{x'-x_1} \leq \tfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

Παίρνοντας όριο όταν $x' \to 0+$, βρίσκουμε $\frac{l-f(x_1)}{-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ και άρα $l \neq -\infty$.
Τώρα, όπως πριν, παίρνουμε όριο όταν $x' \to 0+$ στην αρχική ανισότητα $\frac{f(x_1)-f(x')}{x_1-x'} \leq \frac{f(x_2)-f(x')}{x_2-x'}$ και βρίσκουμε $\frac{f(x_1)-l}{x_1} \leq \frac{f(x_2)-l}{x_2}$. Συνεπάγεται

$$x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2) \leq l(x_2 - x_1) < 0.$$

Επομένως, $\frac{f(x_1)}{x_1} < \frac{f(x_2)}{x_2}$ και άρα η $\frac{f(x)}{x}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, b)$.

Άσκηση 5.5.32. *Αν η $f : I \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο διάστημα I και αν για κάθε $x_1, x_2 \in I$ με $x_1 < x_2$ υπάρχει $t \in (0,1)$ ώστε $f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$, αποδείξτε ότι η f είναι κυρτή στο I.*
Μια ενδιαφέρουσα ειδική περίπτωση: αν η $f : I \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο διάστημα I και αν για κάθε $x_1, x_2 \in I$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(\frac{x_1+x_2}{2}) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, τότε η f είναι κυρτή στο I.
Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \leq 0 \\ 0, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$ Αποδείξτε ότι η f ικανοποιεί τη δεύτερη υπόθεση παραπάνω αλλά ότι δεν είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$. Είναι η f συνεχής στο $\mathbb{R}$;

Λύση: Το πρώτο ερώτημα. Έστω ότι η f δεν είναι κυρτή στο διάστημα I.
Τότε υπάρχουν $a, b \in I$ με $a < b$ και υπάρχει s με $0 < s < 1$ ώστε $f((1-s)a + sb) > (1-s)f(a) + sf(b)$.
Τότε η συνάρτηση $g(t) = f((1-t)a + tb) - (1-t)f(a) - tf(b)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[0,1]$ και είναι $g(0) = g(1) = 0$ και $g(s) > 0$.
Από το αποτέλεσμα της άσκησης 4.2.10 συνεπάγεται ότι υπάρχουν $t_1 \in [0, s)$ και $t_2 \in (s, 1]$ ώστε να είναι $g(t_1) = g(t_2) = 0$ και να ισχύει

$$g(t) > 0 \qquad \text{για κάθε } t \in (t_1, t_2). \tag{14.107}$$

Ορίζουμε

$$x_1 = (1-t_1)a + t_1 b, \qquad x_2 = (1-t_2)a + t_2 b \tag{14.108}$$

και τότε έχουμε $x_1, x_2 \in [a, b]$ και $x_1 < x_2$. Επίσης, είναι πολύ εύκολο να δούμε ότι για κάθε $t \in (0,1)$ υπάρχει κάποιος $t' \in (t_1, t_2)$ ώστε

$$(1-t)x_1 + tx_2 = (1-t')a + t'b. \tag{14.109}$$

Η σχέση ανάμεσα στους t_1, x_1, ανάμεσα στους t_2, x_2 και ανάμεσα στους t, t' δίνεται από τις σχέσεις

$$t_1 = \tfrac{x_1-a}{b-a}, \qquad t_2 = \tfrac{x_2-a}{b-a}, \qquad t' = \tfrac{x_2-x_1}{b-a}t + \tfrac{x_1-a}{b-a}. \tag{14.110}$$

Τώρα, από τις $g(t_1) = g(t_2) = 0$ και τις (14.108) παίρνουμε

$$f(x_1) = (1-t_1)f(a) + t_1 f(b), \qquad f(x_2) = (1-t_2)f(a) + t_2 f(b)$$

και άρα

$$(1-t)f(x_1) + tf(x_2) = (1 - t_1 + tt_1 - tt_2)f(a) + (t_1 - tt_1 + tt_2)f(b).$$

Τώρα, χρησιμοποιώντας τις (14.110), η τελευταία ισότητα γίνεται

$$(1-t)f(x_1) + tf(x_2) = (1-t')f(a) + t'f(b). \tag{14.111}$$

Επομένως, από τις (14.109), (14.111) και (14.107) συνεπάγεται ότι για κάθε $t \in (0,1)$ ισχύει

$$f((1-t)x_1 + tx_2) - (1-t)f(x_1) - tf(x_2) = f((1-t')a + t'b) - (1-t')f(a) - t'f(b) = g(t') > 0$$

και καταλήγουμε σε άτοπο.
Άρα η f είναι κυρτή στο I.

Η ειδική περίπτωση είναι εφαρμογή του προηγούμενου συμπεράσματος με $t = \frac{1}{2}$.
Το δεύτερο ερώτημα. Η συγκεκριμένη συνάρτηση δεν είναι συνεχής στον 0. Επίσης, δεν είναι κυρτή. Για παράδειγμα, είναι $f(-1) = 1$, $f(0) = 1$, $f(1) = 0$ και άρα

$$f\left(\tfrac{1}{2}(-1) + \tfrac{1}{2}1\right) = f(0) > \tfrac{1}{2}f(-1) + \tfrac{1}{2}f(1).$$

Από την άλλη μεριά η f ικανοποιεί την επίμαχη υπόθεση. Πράγματι, αν $x_1 < x_2 \leq 0$ ή αν $0 < x_1 < x_2$, τότε όποιον t με $0 < t < 1$ κι αν πάρουμε η $f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$ ισχύει ως ισότητα: $1 = 1$ ή $0 = 0$, αντιστοίχως. Αν $x_1 \leq 0 < x_2$, τότε παίρνουμε κάποιον t με $0 < t < 1$ ώστε $0 < (1-t)x_1 + tx_2$ και τότε η $f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$ γίνεται $0 \leq 1 - t$ και ισχύει. Για να βρούμε έναν κατάλληλο t αρκεί να δούμε ότι η $0 < (1-t)x_1 + tx_2$ γράφεται ισοδύναμα $-\frac{x_1}{x_2 - x_1} < t$ και ότι $0 < -\frac{x_1}{x_2 - x_1} < 1$.

Άσκηση 5.5.33. [α] *Αποδείξτε ότι, αν η f είναι κυρτή και άνω φραγμένη στο $\mathbb{R}$, τότε είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.*

Λύση: Έστω ότι ισχύει $f(x) \leq u$ για κάθε x.
Έστω $x_1 < x_2$. Από το αποτέλεσμα της άσκησης 5.5.26, για κάθε x με $x_1 < x_2 < x$ έχουμε

$$\tfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \tfrac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \tfrac{M - f(x_1)}{x - x_1}.$$

Παίρνοντας όριο όταν $x \to +\infty$, βρίσκουμε $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq 0$ και άρα $f(x_2) \leq f(x_1)$.
Με τον ίδιο τρόπο, για κάθε x με $x < x_1 < x_2$ έχουμε

$$\tfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq \tfrac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \geq \tfrac{M - f(x_1)}{x - x_1}$$

και, παίρνοντας όριο όταν $x \to -\infty$, βρίσκουμε $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0$ και άρα $f(x_2) \geq f(x_1)$.
Από τις $f(x_2) \leq f(x_1)$ και $f(x_2) \geq f(x_1)$ συνεπάγεται $f(x_1) = f(x_2)$, οπότε η f είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

Άσκηση 5.5.34. *Έστω $a < 0$ ή $a > 1$.*
Αποδείξτε ότι $((1-t)x_1 + tx_2)^a < (1-t){x_1}^a + t{x_2}^a$ για $0 < x_1 < x_2$ και $0 < t < 1$.
Αποδείξτε ότι $x^a > a\xi^{a-1}(x - \xi) + \xi^a$ για $x, \xi > 0$ και $x \neq \xi$.

Λύση: Η πρώτη ανισότητα εκφράζει το ότι η συνάρτηση x^a είναι γνησίως κυρτή στο $(0, +\infty)$.
Η δεύτερη ανισότητα λέει ότι η εφαπτόμενη ευθεία στο γράφημα της x^a στο σημείο (ξ, ξ^a) είναι γνήσια ευθεία στήριξης από κάτω του γραφήματος.

Άσκηση 5.5.38. *Αποδείξτε την ανισότητα του Young στην άσκηση 5.4.21 με δύο τρόπους: χρησιμοποιώντας το ότι η $\log x$ είναι γνησίως κοίλη στο $(0, +\infty)$ και το ότι η $x^{1/p}$ είναι γνησίως κοίλη στο $[0, +\infty)$ όταν $p > 1$.*

Λύση: Έστω $a, b \geq 0$ και $p, q > 1$ με $\frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι $ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$.
Επειδή η ανισότητα είναι προφανής αν $a = 0$ ή $b = 0$, υποθέτουμε ότι $a, b > 0$. Επίσης, είναι εύκολο να δούμε ότι, αν $a^p = b^q$, η ανισότητα ισχύει ως ισότητα, οπότε θα υποθέσουμε ότι $a^p \neq b^q$ και θα αποδείξουμε την γνήσια ανισότητα $ab < \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$.
Τώρα, επειδή η $\log x$ είναι γνησίως κοίλη στο $(0, +\infty)$, θεωρούμε $t = \frac{1}{q}$, οπότε $1 - t = \frac{1}{p}$ και $0 < t < 1$, και έχουμε

$$\log\left(\tfrac{1}{p}a^p + \tfrac{1}{q}b^q\right) > \tfrac{1}{p}\log(a^p) + \tfrac{1}{q}\log(b^q) = \log(ab).$$

Άρα $ab < \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$.
Εναλλακτικός τρόπος απόδειξης είναι να θεωρήσουμε την γνησίως κοίλη $x^{1/p}$ και τότε έχουμε την ανισότητα

$$x^{1/p} - \xi^{1/p} < \tfrac{1}{p}\xi^{(1/p)-1}(x - \xi)$$

για $x \neq \xi$, η οποία εκφράζει το ότι η εφαπτόμενη ευθεία στο γράφημα της $x^{1/p}$ στο σημείο $(\xi, \xi^{1/p})$ είναι γνήσια ευθεία στήριξης από κάτω του γραφήματος της συνάρτησης.
Θέτουμε $x = a^p$ και $\xi = b^q$ και βρίσκουμε

$$a - b^{q/p} < \tfrac{1}{p} b^{-1} a^p - \tfrac{1}{p} b^{q/p}$$

οπότε $a < \frac{1}{p} b^{-1} a^p + \frac{1}{q} b^{q/p}$ και άρα $ab < \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q$.

Άσκηση 5.5.39. *Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ κυρτή στο διάστημα I. Αν $x_1, \ldots, x_n \in I$ και $w_1, \ldots, w_n > 0$ και $w_1 + \cdots + w_n = 1$, αποδείξτε την ανισότητα του Jensen,*

$$f(x_1 w_1 + \cdots + x_n w_n) \leq f(x_1) w_1 + \cdots + f(x_n) w_n.$$

Παρατηρήστε ότι, αν $n = 2$, η ανισότητα Jensen είναι ακριβώς ίδια με την ανισότητα βάσει της οποίας ορίζεται η έννοια της κυρτότητας.
Αποδείξτε ότι, αν η f είναι γνησίως κυρτή στο I, τότε η ανισότητα Jensen ισχύει ως ισότητα αν και μόνο αν $x_1 = \ldots = x_n$.
Πώς διατυπώνονται τα προηγούμενα αν η f είναι (γνησίως) κοίλη στο I;
Έστω $a_1, \ldots, a_n > 0$. Χρησιμοποιώντας το ότι η $x^{1/q}$ είναι γνησίως κοίλη στο $[0, +\infty)$ όταν $q > 1$ και θεωρώντας $x_1 = \frac{{b_1}^q}{{a_1}^p}, \ldots, x_n = \frac{{b_n}^q}{{a_n}^p}$ και $w_1 = \frac{{a_1}^p}{A^p}, \ldots, w_n = \frac{{a_n}^p}{A^p}$, όπου $A = ({a_1}^p + \cdots + {a_n}^p)^{1/p}$, αποδείξτε την ανισότητα του Hölder στην άσκηση 5.4.22[α]. Μελετήστε την περίπτωση της ισότητας.
Αποδείξτε την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου στην άσκηση 5.4.20 χρησιμοποιώντας το ότι η $\log x$ είναι γνησίως κοίλη στο $(0, +\infty)$. Μελετήστε την περίπτωση της ισότητας.

Λύση: Το πρώτο ερώτημα. Πρώτη λύση. Με $n = 2$ η ανισότητα Jensen γράφεται

$$f(x_1 w_1 + x_2 w_2) \leq f(x_1) w_1 + f(x_2) w_2.$$

Αν θέσουμε $t = w_2$, τότε είναι $1 - t = w_1$ και $0 < t < 1$, οπότε η ανισότητα γράφεται ισοδύναμα $f((1-t)x_1 + t x_2) \leq (1-t) f(x_1) + t f(x_2)$ και αυτή είναι η ανισότητα η οποία εκφράζει την κυρτότητα της f στο I. Μάλιστα, αν η f είναι γνησίως κυρτή, τότε η ανισότητα ισχύει αν και μόνο αν $x_1 = x_2$.
Τώρα, έστω ότι για κάποιον n ισχύει $f(x_1 w_1 + \cdots + x_n w_n) \leq f(x_1) w_1 + \cdots + f(x_n) w_n$ για κάθε $x_1, \ldots, x_n \in I$ και για κάθε $w_1, \ldots, w_n > 0$ με $w_1 + \cdots + w_n = 1$. Επίσης, αν η f είναι γνησίως κυρτή, έστω ότι η ανισότητα ισχύει ως ισότητα αν και μόνο αν $x_1 = \ldots = x_n$.
Αν $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1} \in I$ και $w_1, \ldots, w_n, w_{n+1} > 0$ με $w_1 + \cdots + w_n + w_{n+1} = 1$, τότε ορίζουμε

$$u_{n+1} = 1 - w_{n+1} = w_1 + \cdots + w_n$$

και έχουμε $u_{n+1}, w_{n+1} > 0$ και $u_{n+1} + w_{n+1} = 1$. Επίσης, είναι $\frac{w_1}{u_{n+1}}, \ldots, \frac{w_n}{u_{n+1}} > 0$ και

$$\tfrac{w_1}{u_{n+1}} + \cdots + \tfrac{w_n}{u_{n+1}} = \tfrac{w_1 + \cdots + w_n}{u_{n+1}} = 1.$$

Άρα από την περίπτωση $n = 2$ και από την υπόθεση για την περίπτωση n έχουμε

$$\begin{aligned} f(x_1 w_1 + \cdots + x_n w_n + x_{n+1} w_{n+1}) &= f\big(\big(x_1 \tfrac{w_1}{u_{n+1}} + \cdots + x_n \tfrac{w_n}{u_{n+1}}\big) u_{n+1} + x_{n+1} w_{n+1}\big) \\ &\leq f\big(x_1 \tfrac{w_1}{u_{n+1}} + \cdots + x_n \tfrac{w_n}{u_{n+1}}\big) u_{n+1} + f(x_{n+1}) w_{n+1} \\ &\leq \big(f(x_1) \tfrac{w_1}{u_{n+1}} + \cdots + f(x_n) \tfrac{w_n}{u_{n+1}}\big) u_{n+1} + f(x_{n+1}) w_{n+1} \\ &= f(x_1) w_1 + \cdots + f(x_n) w_n + f(x_{n+1}) w_{n+1}. \end{aligned}$$

Τώρα, έστω ότι η f είναι γνησίως κυρτή.
Αν $x_1 = \ldots = x_n = x_{n+1} = x$, τότε η

$$f(x_1 w_1 + \cdots + x_n w_n + x_{n+1} w_{n+1}) = f(x_1) w_1 + \cdots + f(x_n) w_n + f(x_{n+1}) w_{n+1}$$

γράφεται $f(x) = f(x)$ και είναι φυσικά, σωστή.
Αντιστρόφως, έστω ότι ισχύει η παραπάνω ισότητα. Τότε οι δύο ανισότητες στην παραπάνω διαδοχή ανισοτήτων/ισοτήτων πρέπει να ισχύουν ως ισότητες. Άρα από την περίπτωση $n = 2$ και από την υπόθεση για την περίπτωση n συνεπάγεται ότι

$$x_1 \tfrac{w_1}{u_{n+1}} + \cdots + x_n \tfrac{w_n}{u_{n+1}} = x_{n+1}, \quad x_1 = \ldots = x_n$$

και, επομένως, $x_1 = \ldots = x_n = x_{n+1}$.
Δεύτερη λύση. Έστω $\xi = x_1 w_1 + \cdots + x_n w_n$.
Επειδή οι $x_1, \ldots, x_n$ ανήκουν στο διάστημα I, συνεπάγεται ότι και ο ξ ανήκει στο I.
Τώρα, έχουμε δύο περιπτώσεις.
Αν ο ξ είναι ένα από τα άκρα του I, τότε όλοι οι $x_1, \ldots, x_n$ είναι ίσοι με το ίδιο άκρο του I, οπότε $x_1 = \ldots = x_n = \xi$. Σ' αυτήν την περίπτωση έχουμε $f(x_1) = \ldots = f(x_n) = f(\xi)$ και, επομένως, η σχέση $f(x_1 w_1 + \cdots + x_n w_n) \leq f(x_1) w_1 + \cdots + f(x_n) w_n$ γράφεται $f(\xi) \leq f(\xi)$ και ισχύει ως ισότητα.
Αν ο ξ είναι εσωτερικό σημείο του διαστήματος I, τότε υπάρχει ευθεία στήριξης από κάτω του γραφήματος της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$. Δηλαδή, υπάρχει αριθμός μ τέτοιος ώστε να ισχύει $f(x) \geq \mu(x - \xi) + f(\xi)$ για κάθε $x \in I$. Συνεπάγεται ότι ισχύει $f(x_k) \geq \mu(x_k - \xi) + f(\xi)$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$ και άρα

$$\begin{aligned} f(x_1) w_1 + \cdots + f(x_n) w_n \geq \mu\big((x_1 - \xi) w_1 + \cdots + (x_n - \xi) w_n\big) \\ + f(\xi)(w_1 + \cdots + w_n) \\ = \mu(x_1 w_1 + \cdots + x_n w_n - \xi) + f(\xi) = f(\xi). \end{aligned} \tag{14.112}$$

Έστω ότι η f είναι γνησίως κυρτή στο I και έστω ότι ισχύει η ισότητα $f(x_1 w_1 + \cdots + x_n w_n) = f(x_1) w_1 + \cdots + f(x_n) w_n$, δηλαδή η $f(\xi) = f(x_1) w_1 + \cdots + f(x_n) w_n$.
Είδαμε ότι, αν ο ξ είναι ίσος με ένα από τα άκρα του I, τότε ισχύει $x_1 = \ldots = x_n$.
Αν ο ξ είναι εσωτερικό σημείο του I, τότε από την (14.112) συνεπάγεται ότι ισχύει η ισότητα

$$f(x_1) w_1 + \cdots + f(x_n) w_n = \mu\big((x_1 - \xi) w_1 + \cdots + (x_n - \xi) w_n\big) + f(\xi)(w_1 + \cdots + w_n).$$

Επομένως, ισχύει $f(x_k) = \mu(x_k - \xi) + f(\xi)$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$ και, επειδή η ευθεία στήριξης από κάτω του γραφήματος της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ είναι γνήσια ευθεία στήριξης, συνεπάγεται ότι ισχύει $x_k = \xi$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$.
Το δεύτερο ερώτημα. Αν η f είναι κοίλη, τότε ισχύουν όλα τα παραπάνω με αντίστροφες ανισότητες.
Το τρίτο ερώτημα. Έστω $a_1, \ldots, a_n > 0$ και $p, q > 1$ με $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Η $x^{1/q}$ είναι γνησίως κοίλη στο $[0, +\infty)$, οπότε με $x_1 = \frac{b_1{}^q}{a_1{}^p}, \ldots, x_n = \frac{b_n{}^q}{a_n{}^p}$ και $w_1 = \frac{a_1{}^p}{A^p}, \ldots, w_n = \frac{a_n{}^p}{A^p}$, όπου $A = (a_1{}^p + \cdots + a_n{}^p)^{1/p}$, από την ανισότητα Jensen έχουμε

$$\big(\tfrac{b_1{}^q}{a_1{}^p} \tfrac{a_1{}^p}{A^p} + \cdots + \tfrac{b_n{}^q}{a_n{}^p} \tfrac{a_n{}^p}{A^p}\big)^{1/q} \geq \tfrac{b_1}{a_1{}^{p/q}} \tfrac{a_1{}^p}{A^p} + \cdots + \tfrac{b_n}{a_n{}^{p/q}} \tfrac{a_n{}^p}{A^p}$$

και άρα

$$\tfrac{(b_1{}^q + \cdots + b_n{}^q)^{1/q}}{A^{p/q}} \geq \tfrac{a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n}{A^p}$$

και άρα

$$(a_1{}^p + \cdots + a_n{}^p)^{1/p} (b_1{}^q + \cdots + b_n{}^q)^{1/q} \geq a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n.$$

Επειδή η $x^{1/q}$ είναι γνησίως κοίλη, η τελευταία ανισότητα ισχύει ως ισότητα αν και μόνο αν ισχύει η ανισότητα Jensen που χρησιμοποιήσαμε ως ισότητα, δηλαδή αν και μόνο αν $\frac{b_1{}^q}{a_1{}^p} = \ldots = \frac{b_n{}^q}{a_n{}^p}$.
Το τέταρτο ερώτημα. Έστω $a_1, \ldots, a_n > 0$. Η $\log x$ είναι γνησίως κοίλη στο $(0, +\infty)$, οπότε με $x_1 = a_1, \ldots, x_n = a_n$ και $w_1 = \ldots = w_n = \frac{1}{n}$, από την ανισότητα Jensen έχουμε

$$\log\big(a_1 \tfrac{1}{n} + \cdots + a_n \tfrac{1}{n}\big) \geq (\log a_1) \tfrac{1}{n} + \cdots + (\log a_n) \tfrac{1}{n}$$

και άρα

$$\tfrac{a_1+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1\cdots a_n}.$$

Η ανισότητα αυτή ισχύει ως ισότητα αν και μόνο αν ισχύει η ανισότητα Jensen που χρησιμοποιήσαμε ως ισότητα, δηλαδή αν και μόνο αν $a_1 = \cdots = a_n$.

Άσκηση 5.5.41. *Αν η $f : I \to \mathbb{R}$ είναι κυρτή στο διάστημα I, αποδείξτε ότι το σύνολο των σημείων στα οποία η f δεν είναι παραγωγίσιμη είναι αριθμήσιμο.*

Υπόδειξη: Δείτε την άσκηση 4.1.17. Αν η f είναι κυρτή, αποδείξτε βάσει της πρότασης 5.11 ότι η f'_+ είναι αύξουσα στο εσωτερικό του I και ότι σε κάθε σημείο συνέχειας της f'_+ στο εσωτερικό του I η f είναι παραγωγίσιμη.

Άσκηση 5.6.2. *Βρείτε τα* $\lim_{x\to 0}\big(\frac{1}{\log(1+x)} - \frac{1}{x}\big)$, $\lim_{x\to 0}(x+e^x)^{1/x}$, $\lim_{x\to 1+}\log x\log(x-1)$, $\lim_{x\to 0+} x^{x^x-1}$, $\lim_{x\to +\infty}\frac{x(x^{1/x}-1)}{\log x}$.

Λύση: Το πρώτο όριο είναι απροσδιόριστη μορφή $(\pm\infty)-(\pm\infty)$. Γράφουμε

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\Big(\tfrac{1}{\log(1+x)} - \tfrac{1}{x}\Big) &= \lim_{x\to 0}\tfrac{x-\log(1+x)}{x\log(1+x)} = \lim_{x\to 0}\tfrac{1-1/(1+x)}{\log(1+x)+x/(1+x)}\\ &= \lim_{x\to 0}\tfrac{1/(1+x)^2}{1/(1+x)+1/(1+x)^2} = \lim_{x\to 0}\tfrac{1}{2+x} = \tfrac{1}{2}.\end{aligned}$$

Το δεύτερο όριο είναι απροσδιόριστη μορφή $1^{\pm\infty}$. Γράφουμε $(x+e^x)^{1/x} = e^{(1/x)\log(x+e^x)}$ και υπολογίζουμε το όριο $\lim_{x\to 0}\frac{\log(x+e^x)}{x}$, το οποίο είναι απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$. Έχουμε

$$\lim_{x\to 0}\tfrac{\log(x+e^x)}{x} = \lim_{x\to 0}\tfrac{1+e^x}{x+e^x} = 2,$$

και άρα $\lim_{x\to 0}(x+e^x)^{1/x} = e^2$.
Το τρίτο όριο είναι απροσδιόριστη μορφή $(0+)(-\infty)$. Γράφουμε

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1+}\log x\log(x-1) &= \lim_{x\to 1+}\tfrac{\log(x-1)}{1/\log x} = \lim_{x\to 1+}\tfrac{1/(x-1)}{-1/(x(\log x)^2)}\\ &= -\lim_{x\to 1+}\tfrac{x(\log x)^2}{x-1} = -\lim_{x\to 1+}\tfrac{(\log x)^2}{x-1} = -\lim_{x\to 1+}\tfrac{2\log x}{x} = 0.\end{aligned}$$

Το τέταρτο όριο είναι πιο σύνθετο από τα προηγούμενα τρία. Το $\lim_{x\to 0+}x^x$ είναι απροσδιόριστη μορφή 0^0 και το υπολογίζουμε αφού γράψουμε $x^x = e^{x\log x}$. Έχουμε

$$\lim_{x\to 0+}x\log x = \lim_{x\to 0+}\tfrac{\log x}{1/x} = \lim_{x\to 0+}\tfrac{1/x}{-1/x^2} = -\lim_{x\to 0+}x = 0.$$

Επομένως, $\lim_{x\to 0+}x^x = e^0 = 1$ και άρα το $\lim_{x\to 0+}x^{x^x-1}$ είναι πάλι απροσδιόριστη μορφή 0^0. Τώρα γράφουμε $x^{x^x-1} = e^{(x^x-1)\log x}$, οπότε αρκεί να βρούμε το $\lim_{x\to 0+}(x^x-1)\log x$ που είναι απροσδιόριστη μορφή $0(-\infty)$. Τώρα

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0+}(x^x-1)\log x &= \lim_{x\to 0+}\tfrac{x^x-1}{1/\log x} = \lim_{x\to 0+}\tfrac{x^x(\log x+1)}{-1/(x(\log x)^2)}\\ &= -\lim_{x\to 0+}x^{x+1}(\log x+1)(\log x)^2\\ &= -\lim_{x\to 0+}x(\log x+1)(\log x)^2\\ &= -\lim_{x\to 0+}\big(x(\log x)^3 + x(\log x)^2\big).\end{aligned}$$

Από το $\lim_{x\to 0+}x\log x = 0$ προκύπτει εύκολα το $\lim_{x\to 0+}x(\log x)^n = 0$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Πράγματι,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0+}x(\log x)^n &= \lim_{x\to 0+}(x^{1/n}\log x)^n = n^n\lim_{x\to 0+}(x^{1/n}\log(x^{1/n}))^n\\ &= n^n\lim_{y\to 0+}(y\log y)^n = 0.\end{aligned}$$

Άρα

$$\lim_{x\to 0+}(x^x-1)\log x = -\lim_{x\to 0+}\big(x(\log x)^3 + x(\log x)^2\big) = 0$$

και, επομένως, $\lim_{x\to 0+} x^{x^x-1} = e^0 = 1$.
Το πέμπτο όριο είναι κι αυτό σύνθετο. Το $\lim_{x\to+\infty} x^{1/x}$ είναι απροσδιόριστη μορφή $(+\infty)^0$. Έχουμε $x^{1/x} = e^{(\log x)/x}$ και υπολογίζουμε το $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x}$ που είναι απροσδιόριστη μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$. Τώρα

$$\lim_{x\to+\infty} \tfrac{\log x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \tfrac{1}{x} = 0,$$

οπότε $\lim_{x\to+\infty} x^{1/x} = e^0 = 1$.
Άρα στο $\lim_{x\to+\infty} \frac{x(x^{1/x}-1)}{\log x}$ ακόμη και το όριο του αριθμητή είναι απροσδιόριστη μορφή $(+\infty)0$. Σκεφτόμαστε, όμως, ένα κόλπο. Γράφουμε

$$\lim_{x\to+\infty} \tfrac{x(x^{1/x}-1)}{\log x} = \lim_{x\to+\infty} \tfrac{e^{(\log x)/x}-1}{(\log x)/x} = \lim_{y\to 0} \tfrac{e^y-1}{y} = 1.$$

Άσκηση 5.6.5. *Βρείτε a, b ώστε $\lim_{x\to 0} \big(\frac{1-\cos x}{x^4} + ax^{-2} + b\big) = 0$.*

Λύση: Είναι

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \big(\tfrac{1-\cos x}{x^4} + ax^{-2} + b\big) &= \lim_{x\to 0} \tfrac{1-\cos x + ax^2 + bx^4}{x^4} = \lim_{x\to 0} \tfrac{\sin x + 2ax + 4bx^3}{4x^3} \\ &= \lim_{x\to 0} \tfrac{\cos x + 2a + 12bx^2}{12x^2} = b + \lim_{x\to 0} \tfrac{\cos x + 2a}{12x^2}.\end{aligned}$$

Τώρα, είναι $\lim_{x\to 0}(\cos x + 2a) = 1 + 2a$. Αν $1 + 2a \neq 0$, τότε $b + \lim_{x\to 0} \frac{\cos x + 2a}{12x^2} = +\infty$ και, επομένως, $\lim_{x\to 0} \big(\frac{1-\cos x}{x^4} + ax^{-2} + b\big) = +\infty$ και καταλήγουμε σε άτοπο.
Άρα $1 + 2a = 0$, δηλαδή $a = -\frac{1}{2}$. Τότε

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \big(\tfrac{1-\cos x}{x^4} + ax^{-2} + b\big) &= b + \lim_{x\to 0} \tfrac{\cos x + 2a}{12x^2} = b + \lim_{x\to 0} \tfrac{\cos x - 1}{12x^2} \\ &= b - \lim_{x\to 0} \tfrac{\sin x}{24x} = b - \tfrac{1}{24}\end{aligned}$$

και άρα $b = \frac{1}{24}$.

Άσκηση 5.6.6. *Μπορείτε να βρείτε τα $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+e^{-x}}{e^x}$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ με διαδοχικές εφαρμογές του δεύτερου κανόνα του l' Hopitâl; Μήπως τα όρια αυτά υπολογίζονται πολύ εύκολα, χωρίς αναφορά στους κανόνες του l' Hopitâl;*

Λύση: Από το πρώτο όριο με διαδοχικές εφαρμογές του δεύτερου κανόνα του l' Hopitâl προκύπτουν συνεχώς οι ίδιες δύο απροσδιόριστες μορφές $\frac{+\infty}{+\infty}$ και δημιουργείται ένας αέναος φαύλος κύκλος:

$$\lim_{x\to+\infty} \tfrac{e^x+e^{-x}}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \tfrac{e^x-e^{-x}}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \tfrac{e^x+e^{-x}}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \tfrac{e^x-e^{-x}}{e^x} = \dots$$

Το ίδιο γίνεται και με το δεύτερο όριο:

$$\lim_{x\to+\infty} \tfrac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \tfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty} \tfrac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \tfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \dots$$

Και τα δύο όρια υπολογίζονται ως εξής:

$$\lim_{x\to+\infty} \tfrac{e^x+e^{-x}}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}(1 + e^{-2x}) = 1,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \tfrac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \big(1 + \tfrac{1}{x^2}\big)^{1/2} = 1.$$

Άσκηση 5.6.8. *Βρείτε $f, g : (0, 1) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες στο διάστημα $(0, 1)$ ώστε $\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} g(x) = 0$, ώστε να ισχύει $g(x), g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$ και ώστε να υπάρχει το $\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)}{g(x)}$ αλλά να μην υπάρχει το $\lim_{x\to 0+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.*

Λύση: Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$ και $g(x) = x$ στο διάστημα $(0, 1)$. Αυτές ικανοποιούν όλες τις απαιτούμενες συνθήκες και

$$\lim_{x\to 0+} \tfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0+} x \sin\tfrac{1}{x} = 0$$

αλλά το
$$\lim_{x\to 0+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0+}\big(2x\sin\tfrac{1}{x}-\cos\tfrac{1}{x}\big)=-\lim_{x\to 0+}\cos\tfrac{1}{x}$$
δεν υπάρχει.

Άσκηση 5.6.9. *Έστω* $f:(\xi-\delta,\xi+\delta)\to\mathbb{R}$, $a<\xi<b$.
Αν υπάρχει η $f'(\xi)$, *αποδείξτε ότι* $\lim_{h\to 0+}\frac{f(\xi+h)-f(\xi-h)}{2h}=f'(\xi)$. *Για το όριο αυτό δεν χρειάζεται ο πρώτος κανόνας του l' Hopitâl.*
Αν υπάρχει η $f''(\xi)$, *αποδείξτε ότι* $\lim_{h\to 0+}\frac{f(\xi+h)-2f(\xi)+f(\xi-h)}{h^2}=f''(\xi)$.
Αν υπάρχει η $f''(\xi)$, *αποδείξτε ότι* $\lim_{h\to 0}\frac{f(\xi+2h)-2f(\xi+h)+f(\xi)}{h^2}=f''(\xi)$.
Αιτιολογήστε το σύμβολο $\frac{d^ny}{dx^n}$ *για την* n*-οστή παράγωγο συνάρτησης* $y=f(x)$.

Λύση: Για το πρώτο όριο εφαρμόζουμε τον ορισμό της παραγώγου:

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(\xi+h)-f(\xi-h)}{2h}=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0+}\big(\frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h}+\frac{f(\xi-h)-f(\xi)}{-h}\big)=\frac{1}{2}(f'(\xi)+f'(\xi))=f'(\xi).$$

Για τα επόμενα δύο όρια χρησιμοποιούμε τον πρώτο κανόνα του l' Hopitâl (παραγωγίζοντας ως προς h). Για το πρώτο θα χρησιμοποιήσουμε και το προηγούμενο αποτέλεσμα ενώ για το δεύτερο θα χρησιμοποιήσουμε την ιδέα πίσω από το προηγούμενο αποτέλεσμα.

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(\xi+h)-2f(\xi)+f(\xi-h)}{h^2}=\lim_{h\to 0+}\frac{f'(\xi+h)-f'(\xi-h)}{2h}=f''(\xi).$$

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(\xi+2h)-2f(\xi+h)+f(\xi)}{h^2}&=\lim_{h\to 0}\frac{2f'(\xi+2h)-2f'(\xi+h)}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(\xi+2h)-f'(\xi+h)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\big(\frac{f'(\xi+2h)-f'(\xi)}{h}-\frac{f'(\xi+h)-f'(\xi)}{h}\big)\\&=\lim_{h\to 0}\big(2\frac{f'(\xi+2h)-f'(\xi)}{2h}-\frac{f'(\xi+h)-f'(\xi)}{h}\big)\\&=2f''(\xi)-f''(\xi)=f''(\xi).\end{aligned}$$

Αμέσως μετά από το παράδειγμα 5.5.4 μιλήσαμε για τα σύμβολα των διαφορών $\Delta x=h$ και

$$\Delta y=f(\xi+h)-f(\xi)$$

καθώς και για το σύμβολο της δεύτερης διαφοράς $\Delta^2y=\Delta(\Delta y)$ το οποίο προκύπτει από δύο διαδοχικές εφαρμογές της “πράξης” της διαφοράς. Δηλαδή: $(\Delta y)(\xi)=f(\xi+h)-f(\xi)$ και $(\Delta y)(\xi+h)=f(\xi+2h)-f(\xi+h)$ και άρα

$$\Delta^2y=(\Delta y)(\xi+h)-(\Delta y)(\xi)=f(\xi+2h)-2f(\xi+h)+f(\xi).$$

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να βρούμε διαφορές ανώτερης τάξης:

$$\begin{aligned}\Delta^3y&=(\Delta^2y)(\xi+h)-(\Delta^2y)(\xi)\\&=(f(\xi+3h)-2f(\xi+2h)+f(\xi+h))-(f(\xi+2h)-2f(\xi+h)+f(\xi))\\&=f(\xi+3h)-3f(\xi+2h)+3f(\xi+h)-f(\xi).\end{aligned}$$

Τώρα, μπορείτε να αποδείξετε με την αρχή της επαγωγής ότι

$$\Delta^ny=\textstyle\sum_{k=0}^n(-1)^{n-k}\binom{n}{k}f(\xi+kh).$$

(Δείτε την ιδέα της απόδειξης στη λύση της άσκησης 5.5.20.)
Τώρα θα αποδείξουμε ότι
$$\lim_{\Delta x=h\to 0}\frac{\Delta^ny}{(\Delta x)^n}=f^{(n)}(\xi)$$
ώστε να αιτιολογήσουμε το σύμβολο $\frac{d^ny}{dx^n}$ για την $f^{(n)}(\xi)$.
Στα παρακάτω κάνουμε συνεχή χρήση του κανόνα του l' Hopitâl. Επίσης, στην πέμπτη ισότητα από το τέλος και στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιούμε, αντιστοίχως, τις ταυτότητες

$$\textstyle\sum_{k=1}^n(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^{n-1}=0,\qquad \sum_{k=1}^n(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^n=n!$$

οι οποίες αποδεικνύονται εύκολα με την αρχή της επαγωγής.

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta x=h\to 0}\tfrac{\Delta^n y}{(\Delta x)^n} &= \lim_{h\to 0}\tfrac{1}{h^n}\textstyle\sum_{k=0}^n(-1)^{n-k}\binom{n}{k}f(\xi+kh)\\
&= \lim_{h\to 0}\tfrac{1}{nh^{n-1}}\textstyle\sum_{k=1}^n(-1)^{n-k}\binom{n}{k}kf'(\xi+kh)\\
&= \lim_{h\to 0}\tfrac{1}{n(n-1)h^{n-2}}\textstyle\sum_{k=1}^n(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^2f''(\xi+kh)\\
&= \lim_{h\to 0}\tfrac{1}{n(n-1)(n-2)h^{n-3}}\textstyle\sum_{k=1}^n(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^3f'''(\xi+kh)\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&= \lim_{h\to 0}\tfrac{1}{n(n-1)\cdots 2h}\textstyle\sum_{k=1}^n(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^{n-1}f^{(n-1)}(\xi+kh)\\
&= \lim_{h\to 0}\tfrac{1}{n!h}\textstyle\sum_{k=1}^n(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^{n-1}(f^{(n-1)}(\xi+kh)-f^{(n-1)}(\xi))\\
&= \lim_{h\to 0}\tfrac{1}{n!}\textstyle\sum_{k=1}^n(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^n\tfrac{f^{(n-1)}(\xi+kh)-f^{(n-1)}(\xi)}{kh}\\
&= \tfrac{1}{n!}\textstyle\sum_{k=1}^n(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^n\lim_{h\to 0}\tfrac{f^{(n-1)}(\xi+kh)-f^{(n-1)}(\xi)}{kh}\\
&= \tfrac{1}{n!}\textstyle\sum_{k=1}^n(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^nf^{(n)}(\xi)\\
&= f^{(n)}(\xi)
\end{aligned}$$

Άσκηση 5.6.10. *Έστω $0<k<1$ και $n\in\mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι υπάρχει ακριβώς μία θετική λύση της εξίσωσης $1+\frac{x}{1!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}=ke^x$. Αν συμβολίσουμε x_n αυτήν τη λύση, αποδείξτε ότι η ακολουθία (x_n) είναι γνησίως αύξουσα.*

Λύση: Θεωρούμε τη συνάρτηση $f_n(x)=e^{-x}\big(1+\frac{x}{1!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\big)$.
Τότε

$$f_n{}'(x)=-e^{-x}\big(1+\tfrac{x}{1!}+\cdots+\tfrac{x^n}{n!}\big)+e^{-x}\big(1+\tfrac{x}{1!}+\cdots+\tfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}\big)=-e^{-x}\tfrac{x^n}{n!}<0$$

για κάθε $x>0$.
Άρα η f_n είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$. Επίσης, είναι $f_n(0)=1$ και $\lim_{x\to+\infty}f_n(x)=0$.
Το όριο αυτό ισχύει διότι είναι $\lim_{x\to+\infty}e^{-x}x^k=0$ για κάθε $k=0,1,\ldots,n$.
Άρα το σύνολο τιμών της f_n στο $(0,+\infty)$ είναι το $(0,1)$ και, επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα, συνεπάγεται ότι για κάθε $k\in(0,1)$ υπάρχει μοναδικός $x_n>0$ ώστε να ισχύει $f_n(x_n)=k$.
Έστω, τώρα ότι για τον ίδιο $k\in(0,1)$ έχουμε και τον μοναδικό $x_{n+1}>0$ ώστε να ισχύει $f_{n+1}(x_{n+1})=k$.
Είναι σαφές ότι ισχύει $f_n(x)<f_{n+1}(x)$ για κάθε $x>0$:

$$f_n(x)=e^{-x}\big(1+\tfrac{x}{1!}+\cdots+\tfrac{x^n}{n!}\big)<e^{-x}\big(1+\tfrac{x}{1!}+\cdots+\tfrac{x^n}{n!}+\tfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}\big)=f_{n+1}(x).$$

Επομένως, επειδή $x_{n+1}>0$ έχουμε

$$f_n(x_{n+1})<f_{n+1}(x_{n+1})=k=f_n(x_n).$$

Επειδή η f_n είναι γνησίως φθίνουσα, από την $f_n(x_{n+1})<f_n(x_n)$ συνεπάγεται $x_n<x_{n+1}$.

Άσκηση 5.6.11. [α] *Έστω $a<\xi<b$ και έστω ότι η $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ είναι $n-1$ φορές παραγωγίσιμη στο (a,b). Αν υπάρχει η $f^{(n)}(\xi)$, αποδείξτε ότι*

$$\lim_{x\to\xi}\Big(f(x)-f(\xi)-\tfrac{f^{(1)}(\xi)}{1!}(x-\xi)^1-\cdots-\tfrac{f^{(n-1)}(\xi)}{(n-1)!}(x-\xi)^{n-1}\Big)\Big/(x-\xi)^n=\tfrac{f^{(n)}(\xi)}{n!}.$$

Αν $n=1$, το παραπάνω όριο είναι ακριβώς ο ορισμός της παραγώγου $f'(\xi)$. Γράψτε το όριο στις περιπτώσεις $n=2$, $n=3$.
[β] *Έστω $\lim_{x\to\xi}\frac{\sum_{k=0}^n b_k(x-\xi)^k}{(x-\xi)^n}=\lim_{x\to\xi}\frac{\sum_{k=0}^n b_k'(x-\xi)^k}{(x-\xi)^n}\in\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι $b_k=b_k'$ για κάθε $k=0,1,\ldots,n$.*
[γ] *Στο [α] υποθέστε, επιπλέον, ότι $f^{(n)}(\xi)\in\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι το $P_n(x)=\sum_{k=0}^n\frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}(x-\xi)^k$*

είναι το μοναδικό πολυώνυμο $P(x)$ βαθμού $\leq n$ ώστε $\lim_{x\to\xi}\frac{f(x)-P(x)}{(x-\xi)^n}=0$.
[δ] *Αν η $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ και δύο φορές παραγωγίσιμη στον 0 και $f(0)=1$, $f'(0)=0$, $f''(0)=-1$, αποδείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty}\left(f\left(a/\sqrt{x}\right)\right)^x=e^{-a^2/2}$.*

Λύση: [α] Εφαρμόζουμε συνεχώς τον κανόνα του l' Hopitâl και έχουμε

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\xi}\frac{f(x)-f(\xi)-\frac{f^{(1)}(\xi)}{1!}(x-\xi)^1-\cdots-\frac{f^{(n-1)}(\xi)}{(n-1)!}(x-\xi)^{n-1}}{(x-\xi)^n}\\
&\quad=\lim_{x\to\xi}\frac{f^{(1)}(x)-f^{(1)}(\xi)-\frac{f^{(2)}(\xi)}{1!}(x-\xi)^1-\cdots-\frac{f^{(n-1)}(\xi)}{(n-2)!}(x-\xi)^{n-2}}{n(x-\xi)^{n-1}}\\
&\quad=\lim_{x\to\xi}\frac{f^{(2)}(x)-f^{(2)}(\xi)-\frac{f^{(3)}(\xi)}{1!}(x-\xi)^1-\cdots-\frac{f^{(n-1)}(\xi)}{(n-3)!}(x-\xi)^{n-3}}{n(n-1)(x-\xi)^{n-2}}\\
&\quad\cdots\cdots\\
&\quad=\lim_{x\to\xi}\frac{f^{(n-2)}(x)-f^{(n-2)}(\xi)-\frac{f^{(n-1)}(\xi)}{1!}(x-\xi)^1}{n(n-1)\cdots 3(x-\xi)^2}\\
&\quad=\lim_{x\to\xi}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(\xi)}{n(n-1)\cdots 3\cdot 2(x-\xi)}\\
&\quad=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}.
\end{aligned}$$

Αν $n=2$ ή $n=3$, το παραπάνω όριο γράφεται:

$$\lim_{x\to\xi}\frac{f(x)-f(\xi)-f'(\xi)(x-\xi)}{(x-\xi)^2}=\frac{f''(\xi)}{2},\quad \lim_{x\to\xi}\frac{f(x)-f(\xi)-f'(\xi)(x-\xi)-\frac{f''(\xi)}{2}(x-\xi)^2}{(x-\xi)^3}=\frac{f'''(\xi)}{6}.$$

[β] Από τη σχέση $\lim_{x\to\xi}\frac{\sum_{k=0}^n b_k(x-\xi)^k}{(x-\xi)^n}=\lim_{x\to\xi}\frac{\sum_{k=0}^n b'_k(x-\xi)^k}{(x-\xi)^n}\in\mathbb{R}$ συνεπάγεται

$$\lim_{x\to\xi}\frac{\sum_{k=0}^n(b_k-b'_k)(x-\xi)^k}{(x-\xi)^n}=0. \tag{14.113}$$

Πολλαπλασιάζουμε την (14.113) με το $\lim_{x\to\xi}(x-\xi)^n=0$ και βρίσκουμε

$$\lim_{x\to\xi}\sum_{k=0}^n(b_k-b'_k)(x-\xi)^k=0$$

και άρα $b_0=b'_0$.
Άρα η (14.113) μετά από απλοποίηση με τον παράγοντα $x-\xi$ γίνεται

$$\lim_{x\to\xi}\frac{\sum_{k=1}^n(b_k-b'_k)(x-\xi)^{k-1}}{(x-\xi)^{n-1}}=0. \tag{14.114}$$

Τώρα, πολλαπλασιάζουμε την (14.114) με το $\lim_{x\to\xi}(x-\xi)^{n-1}=0$ και βρίσκουμε

$$\lim_{x\to\xi}\sum_{k=1}^n(b_k-b'_k)(x-\xi)^{k-1}=0$$

και άρα $b_1=b'_1$.
Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, αποδεικνύουμε διαδοχικά $b_2=b'_2$, $b_3=b'_3$ κ.τ.λ.
[γ] Αν υποθέσουμε ότι $f^{(n)}(\xi)\in\mathbb{R}$, τότε από το αποτέλεσμα του [α] συνεπάγεται

$$\lim_{x\to\xi}\frac{f(x)-f(\xi)-\frac{f^{(1)}(\xi)}{1!}(x-\xi)^1-\cdots-\frac{f^{(n-1)}(\xi)}{(n-1)!}(x-\xi)^{n-1}-\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n}{(x-\xi)^n}=0$$

και άρα $\lim_{x\to\xi}\frac{f(x)-P(x)}{(x-\xi)^n}=0$ με $P_n(x)=\sum_{k=0}^n\frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}(x-\xi)^k$.
Τώρα, από το αποτέλεσμα του [β] συνεπάγεται η μοναδικότητα του πολυωνύμου P_n.
[δ] Ορίζουμε τη συνάρτηση $g(t)=\log(f(t))$ και υπολογίζουμε:

$$g(0)=0,\quad g'(0)=\frac{f'(0)}{f(0)}=0,\quad g''(0)=\frac{f''(0)f(0)-(f'(0))^2}{(f(0))^2}=-1.$$

Εφαρμόζουμε το αποτέλεσμα του [α] με την g και $n=2$ και έχουμε $\lim_{t\to 0}\frac{g(t)}{t^2}=-\frac{1}{2}$ και άρα

$$\lim_{x\to+\infty} x\log\big(f(\tfrac{a}{\sqrt{x}})\big)=\lim_{x\to+\infty} xg(\tfrac{a}{\sqrt{x}})=a^2\lim_{t\to 0}\tfrac{g(t)}{t^2}=-\tfrac{a^2}{2}.$$

Επομένως, $\lim_{x\to+\infty}\big(f\big(a/\sqrt{x}\big)\big)^x=\lim_{x\to+\infty}e^{x\log(f(a/\sqrt{x}))}=e^{-a^2/2}$.

Άσκηση 5.6.12. *Εφαρμόστε την άσκηση 5.6.11 και αποδείξτε τα παρακάτω.*

Έστω $a<\xi<b$ και έστω ότι η f είναι $2m-1$ φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα (a,b) και ότι υπάρχει η $f^{(2m)}(\xi)$. Αν $f^{(1)}(\xi)=\ldots=f^{(2m-1)}(\xi)=0$, τότε ο ξ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της f, αν $f^{(2m)}(\xi)>0$, και σημείο τοπικού μεγίστου της f, αν $f^{(2m)}(\xi)<0$.

Έστω $a<\xi<b$ και έστω ότι η f είναι $2m$ φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα (a,b) και ότι υπάρχει η $f^{(2m+1)}(\xi)$. Αν $f^{(1)}(\xi)=\ldots=f^{(2m)}(\xi)=0$ και $f^{(2m+1)}(\xi)\neq 0$, τότε ο ξ δεν είναι σημείο τοπικού ακροτάτου της f.

Λύση: Από το αποτέλεσμα της άσκησης 5.6.11 συνεπάγεται ότι αν $f^{(1)}(\xi)=\ldots=f^{(n-1)}(\xi)=0$ και υπάρχει η $f^{(n)}(\xi)$, τότε

$$\lim_{x\to\xi}\tfrac{f(x)-f(\xi)}{(x-\xi)^n}=f^{(n)}(\xi). \tag{14.115}$$

Τώρα, αν $n=2m$, από την (14.115) έχουμε

$$\lim_{x\to\xi}\tfrac{f(x)-f(\xi)}{(x-\xi)^{2m}}=f^{(2m)}(\xi).$$

Αν $f^{(2m)}(\xi)>0$, τότε ισχύει $\frac{f(x)-f(\xi)}{(x-\xi)^{2m}}>0$ και άρα $f(x)>f(\xi)$ κοντά στον ξ, οπότε ο ξ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της f. Αν $f^{(2m)}(\xi)<0$, τότε ισχύει $\frac{f(x)-f(\xi)}{(x-\xi)^{2m}}<0$ και άρα $f(x)<f(\xi)$ κοντά στον ξ, οπότε ο ξ είναι σημείο τοπικού μεγίστου της f.
Τέλος, αν $n=2m+1$, από την (14.115) έχουμε

$$\lim_{x\to\xi}\tfrac{f(x)-f(\xi)}{(x-\xi)^{2m+1}}=f^{(2m+1)}(\xi).$$

Αν $f^{(2m+1)}(\xi)>0$, τότε ισχύει $\frac{f(x)-f(\xi)}{(x-\xi)^{2m+1}}>0$ κοντά στον ξ. Άρα ισχύει $f(x)>f(\xi)$ κοντά στον ξ από τα δεξιά του και $f(x)<f(\xi)$ κοντά στον ξ από τα αριστερά του, οπότε ο ξ δεν είναι σημείο τοπικού ακροτάτου της f. Αν $f^{(2m+1)}(\xi)<0$, τότε ισχύει $\frac{f(x)-f(\xi)}{(x-\xi)^{2m+1}}<0$ κοντά στον ξ. Άρα ισχύει $f(x)<f(\xi)$ κοντά στον ξ από τα δεξιά του και $f(x)>f(\xi)$ κοντά στον ξ από τα αριστερά του, οπότε πάλι ο ξ δεν είναι σημείο τοπικού ακροτάτου της f.

Άσκηση 5.6.14. *Έστω $f,g:[0,1)\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμες στο $[0,1)$ και δύο φορές παραγωγίσιμες στον 0 και έστω $f'(0)g''(0)\neq f''(0)g'(0)$. Σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής του Cauchy, για κάθε $x\in(0,1)$ υπάρχει $\xi\in(0,x)$ ώστε $(f(x)-f(0))g'(\xi)=(g(x)-g(0)f'(\xi)$. Γράφοντας $\xi=\xi(x)$ για να δηλώσουμε την εξάρτηση του ξ από τον x, αποδείξτε ότι $\lim_{x\to 0}\frac{\xi(x)}{x}=\frac{1}{2}$.*

Λύση: Είναι

$$\lim_{x\to 0}\tfrac{f(x)-f(0)-f'(0)x}{x^2}=\tfrac{f''(0)}{2},\qquad \lim_{\xi\to 0}\tfrac{f'(\xi)-f'(0)}{\xi}=f''(0). \tag{14.116}$$

και ισχύουν και τα αντίστοιχα όρια για την g.
Στα επόμενα θα γράφουμε, χάριν συντομίας, ξ αντί $\xi(x)$ και, επίσης, θα χρησιμοποιούμε το ότι $\xi\to 0$ όταν $x\to 0$.
Από το πρώτο όριο (14.116) και από την συνέχεια της g' στον 0 καθώς και από το αντίστοιχο όριο για την g και από τη συνέχεια της f' στον 0 συνεπάγεται

$$\lim_{x\to 0}\tfrac{(f(x)-f(0))g'(\xi)-f'(0)g'(\xi)x}{x^2}=\tfrac{f''(0)g'(0)}{2},\quad \lim_{x\to 0}\tfrac{(g(x)-g(0))f'(\xi)-g'(0)f'(\xi)x}{x^2}=\tfrac{g''(0)f'(0)}{2}.$$

Αφαιρώντας αυτές τις σχέσεις και χρησιμοποιώντας την $(f(x)-f(0))g'(\xi)=(g(x)-g(0)f'(\xi)$, βρίσκουμε

$$\lim_{x\to 0}\tfrac{g'(0)f'(\xi)-f'(0)g'(\xi)}{x}=\tfrac{f''(0)g'(0)-g''(0)f'(0)}{2}. \tag{14.117}$$

Τώρα, από το δεύτερο όριο (14.116) και από το αντίστοιχο όριο για την g συνεπάγεται

$$\lim_{\xi\to 0}\frac{g'(0)f'(\xi)-f'(0)g'(0)}{\xi}=f''(0)g'(0),\qquad \lim_{\xi\to 0}\frac{f'(0)g'(\xi)-f'(0)g'(0)}{\xi}=g''(0)f'(0).$$

Αφαιρώντας, βρίσκουμε

$$\lim_{\xi\to 0}\frac{g'(0)f'(\xi)-f'(0)g'(\xi)}{\xi}=f''(0)g'(0)-g''(0)f'(0).$$

Επειδή $f'(0)g''(0)\neq f''(0)g'(0)$, από το τελευταίο όριο συνεπάγεται ότι ισχύει $g'(0)f'(\xi)-f'(0)g'(\xi)\neq 0$ κοντά στον 0 και, επομένως, διαιρώντας την τελευταία σχέση και την (14.117), βρίσκουμε $\lim_{x\to 0}\frac{\xi}{x}=\frac{1}{2}$.

Άσκηση 5.6.15. *Έστω f παραγωγίσιμη στο $(a,+\infty)$ και έστω $\lim_{x\to+\infty}(f(x)+f'(x))=\eta$. Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\eta$ και $\lim_{x\to+\infty}f'(x)=0$.*

Λύση: Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=e^xf(x)$ και εφαρμόζουμε τον κανόνα του l' Hopitâl. Είναι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g'(x)}{(e^x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^xf(x)+e^xf'(x)}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}(f(x)+f'(x))=\eta.$$

Άρα $\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{e^x}=\eta$ και, επομένως, $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\eta$.
Τώρα, από το $\lim_{x\to+\infty}(f(x)+f'(x))=\eta$ συνεπάγεται $\lim_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

Άσκηση 5.6.16. *Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to 0+}x^{-m}e^{-1/x}=0$ για κάθε $m\in\mathbb{N}$.*

Έστω η συνάρτηση $h(x)=\begin{cases}e^{-1/x}, & \text{αν } x>0\\ 0, & \text{αν } x\leq 0\end{cases}$ Αποδείξτε ότι η h είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ότι, για κάθε n, είναι $h^{(n)}(x)=\begin{cases}P_{2n}(1/x)e^{-1/x}, & \text{αν } x>0\\ 0, & \text{αν } x\leq 0\end{cases}$ όπου P_{2n} είναι καποιο πολυώνυμο βαθμού $2n$. Ειδικότερα, είναι $h^{(n)}(0)=0$ για κάθε n.

Έστω η συνάρτηση $g(x)=\begin{cases}e^{-2/(1-x^2)}, & \text{αν } -1<x<1\\ 0, & \text{αν } |x|\geq 1\end{cases}$ Αποδείξτε ότι η g είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Λύση: Το πρώτο ερώτημα. Είναι

$$\lim_{x\to 0+}x^{-m}e^{-1/x}=\lim_{y\to+\infty}\frac{y^m}{e^y}=0.$$

Θα κάνουμε, τώρα, μια παρατήρηση που θα χρειαστεί για το δεύτερο ερώτημα. Αν πάρουμε οποιοδήποτε πολυώνυμο $P(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$, τότε είναι

$$\lim_{x\to 0+}P\big(\tfrac{1}{x}\big)e^{-1/x}=0.$$

Πράγματι,

$$\lim_{x\to 0+}P\big(\tfrac{1}{x}\big)e^{-1/x}=\lim_{x\to 0+}(a_nx^{-n}e^{-1/x}+\cdots+a_1x^{-1}e^{-1/x}+a_0e^{-1/x})=0.$$

Το δεύτερο ερώτημα. Αν $x>0$, τότε είναι $h'(x)=\frac{1}{x^2}e^{-1/x}=P_2(\frac{1}{x})e^{-1/x}$, όπου $P_2(t)=t^2$ είναι πολυώνυμο δεύτερου βαθμού. Επίσης, η h είναι παραγωγίσιμη στον 0, αφού

$$\lim_{x\to 0+}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x}\,e^{-1/x}=0,\quad \lim_{x\to 0-}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0-}0=0$$

και άρα $h'(0)=0$. Άρα η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $h^{(1)}(x)=\begin{cases}P_2(1/x)e^{-1/x}, & \text{αν } x>0\\ 0, & \text{αν } x\leq 0\end{cases}$
Τώρα, έστω ότι για κάποιον $n\in\mathbb{N}$ η h είναι n φορές παραγωγίσιμη και ότι

$$h^{(n)}(x)=\begin{cases}P_{2n}(1/x)e^{-1/x}, & \text{αν } x>0\\ 0, & \text{αν } x\leq 0\end{cases}$$

όπου P_{2n} είναι καποιο πολυώνυμο βαθμού $2n$.
Τότε, για $x > 0$ είναι

$$h^{(n+1)}(x) = -\tfrac{1}{x^2}P_{2n}{}'\big(\tfrac{1}{x}\big)e^{-1/x} + \tfrac{1}{x^2}P_{2n}\big(\tfrac{1}{x}\big)e^{-1/x} = P_{2n+2}\big(\tfrac{1}{x}\big)e^{-1/x},$$

όπου το $P_{2n+2}(t) = t^2P_{2n}(t) - t^2P_{2n}{}'(t)$ είναι πολυώνυμο βαθμού $2n+2$. Επίσης,

$$\lim_{x\to 0+} \tfrac{h^{(n)}(x)-h^{(n)}(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0+} \tfrac{1}{x}\, P_{2n}\big(\tfrac{1}{x}\big)e^{-1/x} = 0,$$

$$\lim_{x\to 0-} \tfrac{h^{(n)}(x)-h^{(n)}(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0-} 0 = 0.$$

Άρα $(h^{(n)})'(0) = 0$, οπότε η $h^{(n)}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, δηλαδή η h είναι $n+1$ φορές παραγωγίσμη στο $\mathbb{R}$, και

$$h^{(n+1)}(x) = \begin{cases} P_{2n+2}(1/x)e^{-1/x}, & \text{αν } x > 0 \\ 0, & \text{αν } x \leq 0 \end{cases}$$

Το τρίτο ερώτημα. Η g είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ διότι είναι σύνθεση δύο συναρτήσεων οι οποίες είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$. Πράγματι, ισχύει

$$g(x) = h\big(\tfrac{1-x^2}{2}\big) \qquad \text{για κάθε } x.$$

Διότι, αν $-1 < x < 1$, τότε $\frac{1-x^2}{2} > 0$ και άρα $h(\frac{1-x^2}{2}) = e^{-2/(1-x^2)}$ ενώ, αν $|x| \geq 1$, τότε $\frac{1-x^2}{2} \leq 0$ και άρα $h(\frac{1-x^2}{2}) = 0$.

Άσκηση 5.7.3. *Εφαρμόστε τον τύπο του Taylor με υπόλοιπο Lagrange για να προσεγγίσετε τους* $\sin(1^o)$ *και* $\sin(31^o)$ *με ακρίβεια έως και χιλιοστού δεκαδικού ψηφίου.*

Υπόδειξη: $1^o = 0 + \frac{\pi}{180}$, $31^o = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180}$.

Άσκηση 5.7.4. *Έστω ότι η* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *είναι συνεχής στο* $[a,b]$ *και δύο φορές παραγωγίσιμη στο* (a,b), *ότι* $f(a) = f(b) = 0$ *και ότι ισχύει* $|f''(x)| \leq M$ *για κάθε* $x \in (a,b)$. *Αποδείξτε ότι ισχύει* $|f'(x)| \leq M\frac{(x-a)^2+(x-b)^2}{2(b-a)}$ *για κάθε* $x \in (a,b)$.

Λύση: Έστω $a < x < b$. Τότε υπάρχουν $\zeta_1 \in (a,x)$ και $\zeta_2 \in (x,b)$ ώστε

$$f(a) = f(x)+f'(x)(a-x)+\tfrac{f''(\zeta_1)}{2}(a-x)^2, \qquad f(b) = f(x)+f'(x)(b-x)+\tfrac{f''(\zeta_2)}{2}(b-x)^2.$$

Αφαιρούμε τις δύο αυτές ισότητες παίρνοντας υπ' όψη ότι $f(a) = f(b) = 0$ και βρίσκουμε

$$0 = f'(x)(b-a) + \tfrac{f''(\zeta_2)}{2}(b-x)^2 - \tfrac{f''(\zeta_1)}{2}(a-x)^2.$$

Άρα

$$|f'(x)|(b-a) = \big|\tfrac{f''(\zeta_2)}{2}(b-x)^2 - \tfrac{f''(\zeta_1)}{2}(a-x)^2\big| \leq \tfrac{M}{2}(b-x)^2 + \tfrac{M}{2}(a-x)^2 = M\tfrac{(x-a)^2+(x-b)^2}{2}.$$

Άσκηση 5.7.5. *Έστω* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *παραγωγίσιμη στο* $[a,b]$ *και δύο φορές παραγωγίσιμη στο* (a,b). *Αν* $f'(a) = f'(b) = 0$, *αποδείξτε ότι υπάρχει* $\xi \in (a,b)$ *ώστε* $|f(b)-f(a)| \leq \frac{(b-a)^2}{4}|f''(\xi)|$.

Λύση: Υπάρχουν $\zeta_1 \in (a, \frac{a+b}{2})$ και $\zeta_2 \in (\frac{a+b}{2}, b)$ ώστε

$$f\big(\tfrac{a+b}{2}\big) = f(a) + f'(a)\big(\tfrac{a+b}{2} - a\big) + \tfrac{f''(\zeta_1)}{2}\big(\tfrac{a+b}{2} - a\big)^2,$$

$$f\big(\tfrac{a+b}{2}\big) = f(b) + f'(b)\big(\tfrac{a+b}{2} - b\big) + \tfrac{f''(\zeta_2)}{2}\big(\tfrac{a+b}{2} - b\big)^2.$$

Αφαιρούμε τις δύο αυτές ισότητες παίρνοντας υπ' όψη ότι $f'(a) = f'(b) = 0$ και βρίσκουμε

$$0 = f(b) - f(a) + \tfrac{f''(\zeta_2)}{2}\,\tfrac{(b-a)^2}{4} - \tfrac{f''(\zeta_1)}{2}\,\tfrac{(b-a)^2}{4}.$$

Συνεπάγεται
$$|f(b)-f(a)|\leq \tfrac{|f''(\zeta_1)|+|f''(\zeta_2)|}{2}\,\tfrac{(b-a)^2}{4}\leq |f''(\xi)|\,\tfrac{(b-a)^2}{4}$$
όπου $\xi=\zeta_1$ ή $\xi=\zeta_2$ αν, αντιστοίχως, $|f''(\zeta_1)|\geq|f''(\zeta_2)|$ ή $|f''(\zeta_1)|\leq|f''(\zeta_2)|$.

Άσκηση 5.7.6. *Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ ώστε να ισχύει $0<m\leq f'(x)$ και $0<f''(x)\leq M$ για κάθε x στο $[a,b]$. Επίσης, έστω $f(a)<0<f(b)$, οπότε υπάρχει $\xi\in(a,b)$ ώστε $f(\xi)=0$. Αποδείξτε ότι ένας τέτοιος ξ είναι μοναδικός.*
Και τώρα θα περιγράψουμε την λεγόμενη επαναληπτική διαδικασία του Newton για την προσέγγιση της ρίζας ξ της εξίσωσης $f(x)=0$.
Ορίζουμε ακολουθία (x_n) αρχίζοντας με οποιονδήποτε $x_1\in(\xi,b]$, για παράδειγμα τον $x_1=b$, και συνεχίζοντας με τον αναδρομικό τύπο $x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ για κάθε n.
Αποδείξτε ότι η (x_n) είναι γνησίως φθίνουσα και ότι $x_n\to\xi$.
Αποδείξτε ότι για κάθε n υπάρχει $\zeta\in(\xi,x_n)$ ώστε $x_{n+1}-\xi=\frac{f''(\zeta)}{2f'(x_n)}(x_n-\xi)^2$.
Αποδείξτε ότι για κάθε n ισχύει $0<x_n-\xi\leq\frac{2m}{M}\big(\frac{M}{2m}(x_1-\xi)\big)^{2^{n-1}}$.
Εφαρμόστε την παραπάνω διαδικασία στην εξίσωση $x^2-2=0$ για να προσεγγίσετε τον αριθμό $\sqrt{2}$ στο διάστημα $[1,2]$. Ξεκινήστε με $x_1=2$ και βρείτε τους x_2,x_3,x_4. Εκτιμήστε για καθέναν από αυτούς το σφάλμα σε σχέση με την αληθινή τιμή του $\sqrt{2}$. Ποιός πρέπει να είναι ο n ώστε ο x_n να προσεγγίζει τον $\sqrt{2}$ με ακρίβεια έως εκατοντάκις χιλιοστού δεκαδικού ψηφίου;

Λύση: Η ρίζα ξ της f είναι μοναδική. Πράγματι, αν υπάρχουν δύο ρίζες $\xi_1,\xi_2\in(a,b)$ με $\xi_1<\xi_2$, τότε υπάρχει $\eta\in(\xi_1,\xi_2)$ ώστε $f'(\eta)=0$. Αυτό είναι άτοπο, διότι ισχύει $f'(x)>0$ για κάθε $x\in[a,b]$.
Τώρα, παρατηρούμε ότι ισχύει
$$f(x)<0\quad\text{για } a\leq x<\xi\qquad\text{και}\qquad f(x)>0\quad\text{για } \xi<x\leq b.$$
Πράγματι, στο διάστημα $[a,\xi)$ δεν υπάρχει ρίζα της f, οπότε η f διατηρεί πρόσημο στο διάστημα αυτό και, επειδή $f(a)<0$, συνεπάγεται ότι ισχύει $f(x)<0$ στο $[a,\xi)$. Ομοίως, στο $(\xi,b]$ η f διατηρεί πρόσημο και, επειδή $f(b)>0$, συνεπάγεται ότι ισχύει $f(x)>0$ στο $(\xi,b]$.
Το πρώτο ερώτημα. Επειδή $x_1\in(\xi,b]$, συνεπάγεται $f(x_1)>0$ και, επειδή $f'(x_1)>0$, συνεπάγεται
$$x_2=x_1-\tfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}<x_1.$$
Επίσης, υπάρχει $\eta\in(\xi,x_1)$ ώστε $f'(\eta)=\frac{f(x_1)-f(\xi)}{x_1-\xi}=\frac{f(x_1)}{x_1-\xi}$ και, επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα, έχουμε
$$x_2=x_1-\tfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}=x_1-\tfrac{f'(\eta)(x_1-\xi)}{f'(x_1)}>x_1-(x_1-\xi)=\xi.$$
Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι $\xi<x_2<x_1$.
Τώρα, έστω ότι για κάποιον $n\in\mathbb{N}$ είναι $\xi<x_{n+1}<x_n$.
Τότε, επειδή $f(x_{n+1})>0$ και $f'(x_{n+1})>0$, έχουμε
$$x_{n+2}=x_{n+1}-\tfrac{f(x_{n+1})}{f'(x_{n+1})}<x_{n+1}.$$
Επίσης, υπάρχει $\eta\in(\xi,x_{n+1})$ ώστε $f'(\eta)=\frac{f(x_{n+1})-f(\xi)}{x_{n+1}-\xi}=\frac{f(x_{n+1})}{x_{n+1}-\xi}$ και, επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα, έχουμε
$$x_{n+2}=x_{n+1}-\tfrac{f(x_{n+1})}{f'(x_{n+1})}=x_{n+1}-\tfrac{f'(\eta)(x_{n+1}-\xi)}{f'(x_{n+1})}>x_{n+1}-(x_{n+1}-\xi)=\xi.$$
Άρα $\xi<x_{n+2}<x_{n+1}$.
Άρα η (x_n) είναι γνησίως φθίνουσα και περιέχεται στο διάστημα $(\xi,b]$.
Συνεπάγεται ότι η (x_n) συγκλίνει και, αν $x_n\to\eta$, τότε $\xi\leq\eta\leq b$.

Λόγω συνέχειας των f, f' έχουμε $f(x_n) \to f(\eta)$ και $f'(x_n) \to f'(\eta)$. Τώρα, από τον αναδρομικό τύπο της ακολουθίας βρίσκουμε
$$\eta = \eta - \tfrac{f(\eta)}{f'(\eta)}$$
και άρα $f(\eta) = 0$. Επομένως, $\eta = \xi$, οπότε $x_n \to \xi$.
Το δεύτερο ερώτημα. Υπάρχει $\zeta \in (\xi, x_n)$ ώστε
$$0 = f(\xi) = f(x_n) + f'(x_n)(\xi - x_n) + \tfrac{f''(\zeta)}{2}(\xi - x_n)^2,$$
δηλαδή $f'(x_n)(x_n - \xi) - f(x_n) = \frac{f''(\zeta)}{2}(x_n - \xi)^2$ και άρα
$$x_{n+1} - \xi = x_n - \xi - \tfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \tfrac{f''(\zeta)}{2f'(x_n)}(x_n - \xi)^2.$$
Το τρίτο ερώτημα. Από το αποτέλεσμα του δεύτερου ερωτήματος έχουμε ότι ισχύει
$$0 < x_{n+1} - \xi \leq \tfrac{M}{2m}(x_n - \xi)^2 \qquad \text{για κάθε } n.$$
Τώρα η σχέση $0 < x_n - \xi \leq \frac{2m}{M}\big(\frac{M}{2m}(x_1 - \xi)\big)^{2^{n-1}}$ προκύπτει εύκολα με την αρχή της επαγωγής.
Το τέταρτο ερώτημα. Για την $f(x) = x^2 - 2$ έχουμε $f'(x) = 2x \geq 2$ και $f''(x) = 2$ για κάθε $x \in [1, 2]$. Άρα είναι $m = 2$ και $M = 2$. Επίσης, είναι $f(1) = -1$ και $f(2) = 2$ και στο $[1, 2]$ περιέχεται η ρίζα $\sqrt{2}$ της $f(x) = 0$.
Αν $x_1 = 2$, τότε
$$x_2 = 2 - \tfrac{f(2)}{f'(2)} = \tfrac{3}{2} = 1.5, \quad x_3 = \tfrac{3}{2} - \tfrac{f(3/2)}{f'(3/2)} = \tfrac{17}{12} = 1.41666\ldots,$$
$$x_4 = \tfrac{17}{12} - \tfrac{f(17/12)}{f'(17/12)} = \tfrac{577}{408} = 1.414215686\ldots.$$
Από τη γενική ανισοτική σχέση του τρίτου ερωτήματος έχουμε ότι ισχύει
$$0 < x_n - \sqrt{2} \leq 2\big(\tfrac{1}{2}(2 - \sqrt{2})\big)^{2^{n-1}} < 2\big(\tfrac{1}{2}(2 - 1)\big)^{2^{n-1}} = 1/2^{2^{n-1}-1} \qquad \text{για κάθε } n.$$
Για παράδειγμα, είναι $0 < x_1 - \sqrt{2} < 1$, $0 < x_2 - \sqrt{2} < \frac{1}{2}$, $0 < x_3 - \sqrt{2} < \frac{1}{8}$ και $0 < x_4 - \sqrt{2} < \frac{1}{128} < \frac{1}{10^2}$. Δηλαδή, ο x_4 και ο $\sqrt{2}$ έχουν τα ίδια δύο πρώτα (τουλάχιστον) δεκαδικά ψηφία. Πράγματι, βλέπουμε ότι οι $x_4 = 1.414215686\ldots$ και $\sqrt{2} = 1.41421356237\ldots$ έχουν τα ίδια πέντε πρώτα δεκαδικά ψηφία.
Τώρα, για να προσεγγίζει ο x_n τον $\sqrt{2}$ με ακρίβεια έως εκατοντάκις χιλιοστού δεκαδικού ψηφίου, πρέπει να είναι $x_n - \sqrt{2} < \frac{1}{10^{10^5}}$ και άρα αρκεί να είναι
$$\tfrac{2}{2^{2^{n-1}}} \leq \tfrac{1}{10^{10^5}}$$
ή, ισοδύναμα, $2^{2^{n-1}-1} \geq 10^{10^5}$. Εύκολα βλέπουμε ότι αυτό ισχύει για $n = 18$ και άρα ο x_{18} και ο $\sqrt{2}$ έχουν τα ίδια εκατό χιλιάδες πρώτα (τουλάχιστον) δεκαδικά ψηφία.

Άσκηση 5.7.7. *Στον τύπο του Taylor με υπόλοιπο Lagrange* $\frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}(x - \xi)^{n+1}$ *ο* ζ *εξαρτάται, φυσικά, από τον* x. *Αν αυτό το δηλώσουμε γράφοντας* $\zeta = \zeta(x)$, *αποδείξτε ότι, αν υπάρχει η* $f^{(n+2)}(\xi)$ *και είναι αριθμός* $\neq 0$, *τότε* $\lim_{x \to \xi+} \frac{\zeta(x) - \xi}{x - \xi} = \frac{1}{n+2}$.

Υπόδειξη: Συνδυάστε τον τύπο του Taylor με το όριο της άσκησης 5.6.11 στην περίπτωση του $n + 2$.

Άσκηση 5.7.8. [α] *Έστω* $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ *δύο φορές παραγωγίσιμη στο* $(a, +\infty)$. *Αποδείξτε ότι, αν* $u_0 = \sup\{|f(x)| \,|\, x > a\}$, $u_1 = \sup\{|f'(x)| \,|\, x > a\}$, $u_2 = \sup\{|f''(x)| \,|\, x > a\}$, *τότε* ${u_1}^2 \leq 4u_0u_2$.
[β] *Έστω* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *δύο φορές παραγωγίσιμη στο* $\mathbb{R}$. *Αποδείξτε ότι, αν* $u_0 = \sup\{|f(x)| \,|\, x \in \mathbb{R}\}$,

$u_1 = \sup\{|f'(x)| \,|\, x \in \mathbb{R}\}$, $u_2 = \sup\{|f''(x)| \,|\, x \in \mathbb{R}\}$, *τότε* ${u_1}^2 \le 2u_0u_2$.
[γ] *Έστω* $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$. *Αν η* f'' *είναι φραγμένη στο* $(0, +\infty)$ *και* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, *αποδείξτε ότι* $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

Λύση: [α] Για κάθε $x > a$ και κάθε $h > 0$ υπάρχει $\zeta \in (x, x+h)$ ώστε

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \tfrac{f''(\zeta)}{2}h^2.$$

Συνεπάγεται

$$|f'(x)|h \le |f(x+h)| + |f(x)| + \tfrac{1}{2}|f''(\zeta)|h^2 \le 2u_0 + \tfrac{1}{2}u_2h^2,$$

και, επομένως, $u_1h \le 2u_0 + \frac{1}{2}u_2h^2$ για κάθε $h > 0$.
Αν $u_2 = 0$, συνεπάγεται ότι ισχύει $u_1h \le 2u_0$ για κάθε $h > 0$, οπότε πρέπει να είναι $u_1 \le 0$ και άρα $u_1 = 0$. Σ' αυτήν την περίπτωση η $u_1^2 \le 4u_0u_2$ ισχύει ως ισότητα $0 = 0$.
Αν $u_1 = 0$, τότε η ${u_1}^2 \le 4u_0u_2$ είναι προφανής.
Αν $u_1 > 0$ και $u_2 > 0$, τότε στην σχέση $u_1h \le 2u_0 + \frac{1}{2}u_2h^2$ χρησιμοποιούμε τον $h = \frac{u_1}{u_2}$ και προκύπτει η ${u_1}^2 \le 4u_0u_2$.
[β] Για κάθε x και κάθε $h > 0$ υπάρχουν $\zeta_1 \in (x-h, x)$ και $\zeta_2 \in (x, x+h)$ ώστε

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \tfrac{f''(\zeta_1)}{2}h^2, \qquad f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \tfrac{f''(\zeta_2)}{2}h^2.$$

Αφαιρούμε τις δύο σχέσεις και βρίσκουμε

$$f(x+h) - f(x-h) = 2f'(x)h + \tfrac{f''(\zeta_2) - f''(\zeta_1)}{2}h^2.$$

Συνεπάγεται

$$2|f'(x)|h \le |f(x+h)| + |f(x-h)| + \tfrac{|f''(\zeta_2)| + |f''(\zeta_1)|}{2}h^2 \le 2u_0 + u_2h^2,$$

και, επομένως, $u_1h \le u_0 + \frac{1}{2}u_2h^2$ για κάθε $h > 0$.
Από αυτήν την σχέση συνεπάγεται ${u_1}^2 \le 2u_0u_2$ ακριβώς όπως στο [α].
[γ] Έστω $u_2 = \sup\{|f''(x)| \,|\, x > 0\}$ και έστω τυχών $\epsilon > 0$.
Επειδή $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, υπάρχει $N > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x)| < \frac{\epsilon^2}{4(u_2+1)}$ για κάθε $x > N$.
Ορίζουμε

$$u_{0,N} = \sup\{|f(x)| \,|\, x > N\}, \quad u_{1,N} = \sup\{|f'(x)| \,|\, x > N\}, \quad u_{2,N} = \sup\{|f''(x)| \,|\, x > N\}$$

και τότε έχουμε $u_{0,N} \le \frac{\epsilon^2}{4(u_2+1)}$ και $u_{2,N} \le u_2$, οπότε από το αποτέλεσμα του [α] συνεπάγεται

$${u_{1,N}}^2 \le 4u_{0,N}u_{2,N} \le 4\tfrac{\epsilon^2}{4(u_2+1)}u_2 < \epsilon^2$$

και άρα $u_{1,N} < \epsilon$. Επομένως, ισχύει $|f'(x)| < \epsilon$ για κάθε $x > N$ και άρα $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

Άσκηση 5.7.9. *Έστω* $n \in \mathbb{Z}$, $n \ge 0$, $f, g : [\xi, c] \to \mathbb{R}$, n *φορές παραγωγίσιμες στο* $[\xi, c]$ *ώστε οι* $f^{(n)}$, $g^{(n)}$ *να είναι συνεχείς στο* $[\xi, c]$ *και παραγωγίσιμες στο* (ξ, c). *Αποδείξτε ότι για κάθε* $x \in (\xi, c]$ *υπάρχει* $\zeta \in (\xi, x)$ *ώστε*

$$\Big(f(x) - \textstyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}(x-\xi)^k\Big)g^{(n+1)}(\zeta) = \Big(g(x) - \textstyle\sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(\xi)}{k!}(x-\xi)^k\Big)f^{(n+1)}(\zeta).$$

Λύση: Σταθεροποιούμε έναν $x \in (\xi, c]$ και ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$F(t) = f(x) - \textstyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k, \qquad G(t) = g(x) - \textstyle\sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k. \tag{14.118}$$

Τότε είναι $F(x) = f(x) - f(x) = 0$ και $G(x) = g(x) - g(x) = 0$.
Άρα για τη συνάρτηση $h(t) = G(\xi)F(t) - F(\xi)G(t)$ έχουμε $h(\xi) = h(x) = 0$, οπότε υπάρχει $\zeta \in (\xi, x)$ ώστε $h'(\zeta) = 0$ ή, ισοδύναμα,

$$F(\xi)G'(\zeta) = G(\xi)F'(\zeta). \tag{14.119}$$

Από την (14.118) συνεπάγεται

$$F'(t) = -\sum_{k=0}^{n} \tfrac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k + \sum_{k=1}^{n} \tfrac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1} = -\tfrac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

και, ομοίως,

$$G'(t) = -\tfrac{g^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Από αυτές τις δύο σχέσεις και από την (14.119) συνεπάγεται η σχέση που πρέπει να αποδείξουμε.

14.6 Κεφάλαιο 6.

Άσκηση 6.1.1. *Έστω φραγμένη $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.*
Αν υπάρχει διαμέριση Δ του $[a, b]$ ώστε $\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta)$, αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή στο $[a, b]$.
Αν υπάρχουν διαμερίσεις Δ', Δ'' του $[a, b]$ ώστε $\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta') = \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta'')$, αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή στο $[a, b]$.

Λύση: Το πρώτο ερώτημα. Έστω $\Delta = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$ η διαμέριση για την οποία ισχύει $\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta)$ και έστω $l_k = \inf\{f(x) \,|\, x_{k-1} \le x \le x_k\}$ και $u_k = \sup\{f(x) \,|\, x_{k-1} \le x \le x_k\}$.
Γνωρίζουμε ότι

$$\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = \sum_{k=1}^{n}(u_k - l_k)(x_k - x_{k-1})$$

και ότι κάθε όρος του αθροίσματος είναι ≥ 0.
Επειδή $\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = 0$, συνεπάγεται ότι κάθε όρος του αθροίσματος είναι ίσος με 0 και, επομένως, ισχύει $l_k = u_k$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$.
Άρα για κάθε k το σύνολο $\{f(x) \,|\, x_{k-1} \le x \le x_k\}$ αποτελείται από ένα μόνο στοιχείο. Δηλαδή η f είναι σταθερή σε κάθε υποδιάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ και άρα είναι σταθερή στο $[a, b]$.
Το δεύτερο ερώτημα. Θεωρούμε την κοινή εκλέπτυνση $\Delta = \Delta' \cup \Delta''$.
Επειδή $\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta') \le \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) \le \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) \le \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta'')$, από την $\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta') = \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta'')$ συνεπάγεται $\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta)$ και από το αποτέλεσμα του πρώτου ερωτήματος έχουμε ότι η f είναι σταθερή στο $[a, b]$.

Άσκηση 6.1.2. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι, αν η f δεν είναι άνω φραγμένη στο $[a, b]$, τότε για κάθε διαμέριση Δ του $[a, b]$ είναι $\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = +\infty$.*

Λύση: Έστω ότι υπάρχει διαμέριση Δ του $[a, b]$ ώστε $\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) < +\infty$.
Αν $\Delta = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$ και $u_k = \sup\{f(x) \,|\, x_{k-1} \le x \le x_k\}$, τότε είναι

$$\sum_{k=1}^{n} u_k(x_k - x_{k-1}) < +\infty$$

και άρα είναι $u_k < +\infty$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$.
Ορίζουμε $u = \max\{u_1, \ldots, u_n\}$.
Τώρα, για κάθε $x \in [a, b]$ υπάρχει k ώστε $x \in [x_{k-1}, x_k]$ και, επομένως, $f(x) \le u_k \le u$. Άρα ισχύει $f(x) \le u$ για κάθε $x \in [a, b]$, οπότε η f είναι άνω φραγμένη στο $[a, b]$.

Άσκηση 6.1.3. *Έστω $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ και $l = \inf\{f(x) \,|\, c \le x \le d\}$, $u = \sup\{f(x) \,|\, c \le x \le d\}$. Ορίζουμε $\omega(f; c, d) = u - l$.*

Παρατηρήστε ότι $0 \leq \omega(f;c,d) \leq +\infty$ και αποδείξτε ότι $\omega(f;c,d) < +\infty$ αν και μόνο αν η f είναι φραγμένη στο $[c,d]$.

Αποδείξτε ότι $\omega(f;c,d) = \sup\{f(s) - f(t) \,|\, s,t \in [c,d]\}$.

Λύση: Είναι $-\infty < u \leq +\infty$ και $-\infty \leq l < +\infty$. Άρα $-\infty < u \leq +\infty$ και $-\infty < -l \leq +\infty$.
Επίσης, είναι $l \leq u$.
Συνεπάγεται $0 \leq u - l \leq +\infty$.
Παρατηρούμε, επίσης, ότι ισχύει $u - l < +\infty$ αν και μόνο αν $u < +\infty$ και $-l < \infty$ ή, ισοδύναμα, $-\infty < l$. Δηλαδή, ισχύει $u - l < +\infty$ αν και μόνο αν η f είναι άνω φραγμένη και κάτω φραγμένη στο $[c,d]$.
Κατόπιν, για κάθε $s,t \in [c,d]$ ισχύει $f(s) - f(t) \leq u - l$, οπότε το $u - l$ είναι άνω φράγμα του $\{f(s) - f(t) \,|\, s,t \in [c,d]\}$. Άρα

$$\sup\{f(s) - f(t) \,|\, s,t \in [c,d]\} \leq u - l = \omega(f;c,d). \tag{14.120}$$

Αντιστρόφως, αν θέσουμε $U = \sup\{f(s) - f(t) \,|\, s,t \in [c,d]\}$, τότε για κάθε $s,t \in [c,d]$ ισχύει $f(s) - f(t) \leq U$ και άρα $f(s) \leq U + f(t)$. Άρα το $U + f(t)$ είναι άνω φράγμα του $\{f(s) \,|\, s \in [c,d]\}$ και, επομένως, ισχύει $u \leq U + f(t)$ για κάθε $t \in [c,d]$. Τώρα, αν $U < +\infty$, συνεπάγεται ότι ισχύει $u - U \leq f(t)$ για κάθε $t \in [c,d]$, οπότε το $u - U$ είναι κάτω φράγμα του $\{f(t) \,|\, t \in [c,d]\}$. Επομένως, $u - U \leq l$ και άρα $u - l \leq U$. Τέλος, αν $U = +\infty$, τότε η $u - l \leq U$ ισχύει αυτομάτως. Σε κάθε περίπτωση ισχύει

$$\omega(f;c,d) = u - l \leq \sup\{f(s) - f(t) \,|\, s,t \in [c,d]\}. \tag{14.121}$$

Από τις (14.120) και (14.121) συνεπάγεται $\omega(f;c,d) = \sup\{f(s) - f(t) \,|\, s,t \in [c,d]\}$.

Άσκηση 6.2.3. *Θεωρήστε τη συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0, & \text{αν } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ και αποδείξτε ότι $\underline{\int_0^1} f(x)\,dx = 0$ και $\overline{\int_0^1} f(x)\,dx = \frac{1}{2}$.*

Λύση: Θεωρούμε οποιαδήποτε διαμέριση $\Delta = \{0 = x_0, \ldots, x_n = 1\}$ του $[0,1]$.
Σε κάθε υποδιάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ υπάρχει τουλάχιστον ένας ρητός x και τότε $f(x) = 0$. Επίσης, όλες οι τιμές της f είναι ≥ 0, οπότε η ελάχιστη τιμή της f στο $[x_{k-1}, x_k]$ είναι ο 0. Δηλαδή, $l_k = \inf\{f(x) \,|\, x_{k-1} \leq x \leq x_k\} = 0$.
Άρα

$$\underline{\Sigma}(f;0,1;\Delta) = \textstyle\sum_{k=1}^n l_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n 0(x_k - x_{k-1}) = 0$$

και, επομένως,

$$\underline{\textstyle\int_0^1} f = \sup\{\underline{\Sigma}(f;0,1;\Delta) \,|\, \Delta \text{ διαμέριση του } [a,b]\} = \sup\{0\} = 0.$$

Τώρα, είναι

$$\begin{aligned}\{f(x) \,|\, x_{k-1} \leq x \leq x_k\} &= \{f(x) \,|\, x_{k-1} \leq x \leq x_k, x \in \mathbb{Q}\} \cup \{f(x) \,|\, x_{k-1} \leq x \leq x_k, x \notin \mathbb{Q}\} \\ &= \{0\} \cup \{x \,|\, x_{k-1} \leq x \leq x_k, x \notin \mathbb{Q}\}.\end{aligned}$$

Από το αποτέλεσμα της άσκησης 1.4.1 συνεπάγεται ότι $u_k = \sup\{f(x) \,|\, x_{k-1} \leq x \leq x_k\} = x_k$.
Άρα

$$\begin{aligned}\overline{\Sigma}(f;0,1;\Delta) &= \textstyle\sum_{k=1}^n u_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n x_k(x_k - x_{k-1}) \\ &\geq \textstyle\sum_{k=1}^n \frac{x_k + x_{k-1}}{2}(x_k - x_{k-1}) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n ({x_k}^2 - {x_{k-1}}^2) \\ &= \tfrac{1}{2}({x_n}^2 - {x_0}^2) = \tfrac{1}{2}.\end{aligned}$$

Επομένως, ο $\frac{1}{2}$ είναι κάτω φράγμα του συνόλου $\{\overline{\Sigma}(f;0,1;\Delta) \,|\, \Delta \text{ διαμέριση του } [a,b]\}$ και άρα

$$\tfrac{1}{2} \leq \inf\{\overline{\Sigma}(f;0,1;\Delta) \,|\, \Delta \text{ διαμέριση του } [a,b]\}.$$

Επίσης, αν θεωρήσουμε την διαμέριση Δ του $[0,1]$ σε n ισομήκη διαστήματα, τότε θα έχουμε $x_k = \frac{k}{n}$ για $k = 0, 1, \ldots, n$ και τότε

$$\overline{\Sigma}(f;0,1;\Delta) = \sum_{k=1}^{n} x_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}.$$

Τώρα, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{2n} < \epsilon$ και, επομένως, για την αντίστοιχη διαμέριση Δ ισχύει $\overline{\Sigma}(f;0,1;\Delta) < \frac{1}{2} + \epsilon$. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει τουλάχιστον ένα στοιχείο του συνόλου $\{\overline{\Sigma}(f;0,1;\Delta) \,|\, \Delta$ διαμέριση του $[a,b]\}$ το οποίο είναι $< \frac{1}{2} + \epsilon$, οπότε

$$\overline{\int_0^1} f = \inf\{\overline{\Sigma}(f;0,1;\Delta) \,|\, \Delta \text{ διαμέριση του } [a,b]\} = \tfrac{1}{2}.$$

Άσκηση 6.2.4. *Έστω f φραγμένη στο $[a,b]$ και δύο ακολουθίες διαμερίσεων του $[a,b]$, η (Δ_n') και η (Δ_n''), έτσι ώστε $\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n'') - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n') \to 0$. Αποδείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και ότι $\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n'') \to \int_a^b f$ και $\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n') \to \int_a^b f$.*

Λύση: Γνωρίζουμε ότι ισχύει

$$\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n') \le \underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f \le \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n'') \tag{14.122}$$

και, επομένως,

$$0 \le \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \le \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n'') - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n')$$

για κάθε n. Παίρνοντας το όριο καθώς $n \to +\infty$, βρίσκουμε $\overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f = 0$, οπότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.
Τώρα, η (14.122) γράφεται

$$\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n') \le \int_a^b f \le \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n'')$$

και, επομένως, έχουμε ότι ισχύει

$$0 \le \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n'') - \int_a^b f \le \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n'') - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n')$$

και

$$0 \le \int_a^b f - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n') \le \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n'') - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n')$$

για κάθε n. Παίρνοντας, πάλι, όρια καθώς $n \to +\infty$, βρίσκουμε $\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n'') \to \int_a^b f$ και $\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta_n') \to \int_a^b f$.

Άσκηση 6.2.5. *Έστω f ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και έστω ότι ισχύει $f(r) = 0$ για κάθε ρητό $r \in [a,b]$. Αποδείξτε ότι $\int_a^b f = 0$.*

Λύση: Θεωρούμε τυχούσα διαμέριση $\Delta = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$ του $[a,b]$.
Στο υποδιάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ υπάρχει τουλάχιστον ένας ρητός. Άρα η f έχει τιμή 0 σε τουλάχιστον ένα σημείο του $[x_{k-1}, x_k]$, οπότε ο 0 είναι στοιχείο του συνόλου $\{f(x) \,|\, x_{k-1} \le x \le x_k\}$. Επειδή $l_k = \inf\{f(x) \,|\, x_{k-1} \le x \le x_k\}$ και $u_k = \sup\{f(x) \,|\, x_{k-1} \le x \le x_k\}$, συνεπάγεται

$$l_k \le 0 \le u_k.$$

Αυτό ισχύει σε κάθε υποδιάστημα, οπότε έχουμε

$$\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) = \sum_{k=1}^{n} l_k(x_k - x_{k-1}) \le 0, \qquad \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x_k - x_{k-1}) \ge 0.$$

Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι για κάθε διαμέριση Δ του $[a,b]$ ισχύει

$$\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) \le 0 \le \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta). \tag{14.123}$$

Επίσης, επειδή η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ ισχύει

$$\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) \leq \int_a^b f \leq \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta). \tag{14.124}$$

Τώρα, έστω τυχών $\epsilon > 0$. Από το κριτήριο ολοκληρωσιμότητας συνεπάγεται ότι υπάρχει διαμέριση Δ του $[a,b]$ για την οποία ισχύει

$$\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) < \epsilon.$$

Επομένως, για την συγκεκριμένη Δ, από τις (14.123) και (14.124) συνεπάγεται $|\int_a^b f - 0| < \epsilon$ και, επειδή αυτό το τελευταίο ισχύει για κάθε $\epsilon > 0$, συνεπάγεται $\int_a^b f = 0$.

Άσκηση 6.2.6. *Έστω $f, g, h : [a,b] \to \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$. Αν οι f και h είναι ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$ και $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b h(x)\,dx$, αποδείξτε ότι και η g είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και $\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b h(x)\,dx$.*

Υπόδειξη: Έστω τυχών $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχουν διαμερίσεις Δ', Δ'' του $[a,b]$ ώστε

$$\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta') - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta') < \tfrac{\epsilon}{2}, \qquad \overline{\Sigma}(h;a,b;\Delta'') - \underline{\Sigma}(h;a,b;\Delta'') < \tfrac{\epsilon}{2}.$$

Θεωρούμε την κοινή εκλέπτυνση $\Delta = \Delta' \cup \Delta''$ και έχουμε ότι

$$\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) < \tfrac{\epsilon}{2}, \qquad \overline{\Sigma}(h;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(h;a,b;\Delta) < \tfrac{\epsilon}{2}. \tag{14.125}$$

Επίσης, γνωρίζουμε ότι

$$\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) \leq \int_a^b f \leq \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta), \qquad \underline{\Sigma}(h;a,b;\Delta) \leq \int_a^b h \leq \overline{\Sigma}(h;a,b;\Delta). \tag{14.126}$$

Από τις (14.125), (14.126) και από την σχέση $\int_a^b f = \int_a^b h$ συνεπάγεται

$$\overline{\Sigma}(h;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) < \epsilon. \tag{14.127}$$

Τώρα, έστω $\Delta = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$ και l_k', u_k' οι γνωστές ποσότητες για την f στο υποδιάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ και l_k, u_k οι αντίστοιχες για την g και l_k'', u_k'' οι αντίστοιχες για την h.
Για κάθε $x \in [x_{k-1}, x_k]$ ισχύει $l_k' \leq f(x) \leq g(x) \leq h(x) \leq u_k''$, οπότε οι l_k' και u_k'' είναι, αντιστοίχως, κάτω φράγμα και άνω φράγμα του συνόλου $\{g(x) \,|\, x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$. Άρα $l_k' \leq l_k \leq u_k \leq u_k''$ για κάθε k και, τώρα, πολλαπλασιάζοντας κάθε τέτοια σχέση με τον αντίστοιχο $x_k - x_{k-1}$ και προσθέτοντας για $k = 1, \ldots, n$, βρίσκουμε ότι

$$\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) \leq \underline{\Sigma}(g;a,b;\Delta) \leq \overline{\Sigma}(g;a,b;\Delta) \leq \overline{\Sigma}(h;a,b;\Delta).$$

Η σχέση αυτή μαζί με την (14.127) δίνει ότι

$$\overline{\Sigma}(g;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(g;a,b;\Delta) < \epsilon.$$

Άρα η g είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.
Τέλος, επειδή ισχύει $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$, συνεπάγεται $\int_a^b f \leq \int_a^b g \leq \int_a^b h$. Άρα από την $\int_a^b f = \int_a^b h$ συνεπάγεται $\int_a^b f = \int_a^b g = \int_a^b h$.

Άσκηση 6.2.7. *Έστω φραγμένη $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[c,b]$ για κάθε c με $a < c < b$, αποδείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to a+} \int_c^b f(x)\,dx$.*

Υπόδειξη: Η f είναι φραγμένη , οπότε υπάρχει $M > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [a,b]$.
Παίρνουμε οποιονδήποτε $c \in (a,b)$ ώστε $c - a < \frac{\epsilon}{4M}$.
Η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[c,b]$, οπότε υπάρχει διαμέριση $\Delta' = \{c = x_0, \ldots, x_n = b\}$ του $[c,b]$ ώστε

$$\overline{\Sigma}(f;c,b;\Delta') - \underline{\Sigma}(f;c,b;\Delta') < \tfrac{\epsilon}{2}. \tag{14.128}$$

Θεωρούμε τη διαμέριση $\Delta = \{a\} \cup \Delta' = \{a, c = x_0, \ldots, x_n = b\}$ του $[a, b]$.
Η Δ ορίζει $n+1$ υποδιαστήματα του $[a, b]$: το $[a, c]$ και τα n υποδιαστήματα του $[c, b]$ που ορίζει η Δ'. Επομένως, αν θέσουμε $l = \inf\{f(x) \,|\, a \le x \le c\}$ και $u = \sup\{f(x) \,|\, a \le x \le c\}$, τότε είναι

$$\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = l(c-a) + \underline{\Sigma}(f; c, b; \Delta'), \quad \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = u(c-a) + \overline{\Sigma}(f; c, b; \Delta')$$

και άρα

$$\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = (u-l)(c-a) + \overline{\Sigma}(f; c, b; \Delta') - \underline{\Sigma}(f; c, b; \Delta'),$$

οπότε από την (14.128) έχουμε

$$\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) < (u-l)(c-a) + \tfrac{\epsilon}{2}. \tag{14.129}$$

Για κάθε $x \in [a, c]$ ισχύει $-M \le f(x) \le M$ και άρα $-M \le l \le u \le M$. Συνεπάγεται $u - l \le 2M$, και επειδή $c - a < \frac{\epsilon}{4M}$, από την (14.129) έχουμε ότι

$$\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) < \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Άρα η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.
Τώρα, έχουμε ότι

$$-M(c-a) \le l(c-a) \le \textstyle\int_a^c f \le u(c-a) \le M(c-a).$$

Άρα $|\int_a^c f| \le M(c-a) < \frac{\epsilon}{4}$ και, επομένως,

$$\big|\textstyle\int_c^b f - \int_a^b f\big| = \big|\int_a^c f\big| < \tfrac{\epsilon}{4}.$$

Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \frac{\epsilon}{4M} > 0$ ώστε για κάθε $c \in (a, b)$ με $c - a < \delta$ να ισχύει $|\int_c^b f - \int_a^b f| < \epsilon$. Άρα $\int_a^b f = \lim_{c \to a+} \int_c^b f$.

Άσκηση 6.2.8. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Αν $\int_a^b f(x)\, dx > 0$, αποδείξτε ότι υπάρχει υποδιάστημα (όχι μονοσύνολο) $[c, d]$ του $[a, b]$ ώστε να ισχύει $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [c, d]$.*

Λύση: Γνωρίζουμε ότι $\underline{\int_a^b} f = \int_a^b f > 0$.
Επειδή

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) \,|\, \Delta \text{ διαμέριση του } [a, b]\},$$

υπάρχει διαμέριση $\Delta = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$ του $[a, b]$ ώστε να είναι $\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) > 0$.
Τώρα, αν $l_k = \inf\{f(x) \,|\, x_{k-1} \le x \le x_k\}$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$, έχουμε ότι

$$\textstyle\sum_{k=1}^n l_k(x_k - x_{k-1}) = \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) > 0.$$

Αν ίσχυε $l_k \le 0$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$, τότε θα συνεπαγόταν $\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) \le 0$. Άρα υπάρχει κάποιος k ώστε να είναι $l_k > 0$.
Επομένως, για κάθε x στο υποδιάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ ισχύει $f(x) \ge l_k > 0$.

Άσκηση 6.2.9. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.*
Αποδείξτε ότι υπάρχει $[a_1, b_1] \subseteq (a, b)$ ώστε να είναι $0 < b_1 - a_1 < 1$ και $\sup\{f(x) \,|\, a_1 \le x \le b_1\} - \inf\{f(x) \,|\, a_1 \le x \le b_1\} < 1$.
Κατασκευάστε ακολουθία διαστημάτων $([a_n, b_n])$ ώστε $0 < b_n - a_n < \frac{1}{n}$, $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq (a_n, b_n)$ και $\sup\{f(x) \,|\, a_n \le x \le b_n\} - \inf\{f(x) \,|\, a_n \le x \le b_n\} < \frac{1}{n}$ για κάθε n. Τότε υπάρχει ακριβώς ένας ξ ώστε $\xi \in (a_n, b_n)$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στον ξ.
Αποδείξτε ότι σε κάθε ανοικτό υποδιάστημα του $[a, b]$ υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο στο οποίο η f είναι συνεχής. Δηλαδή, το σύνολο των σημείων συνέχειας της f είναι πυκνό στο $[a, b]$.

Λύση: Έστω $[c,d]$ οποιοδήποτε υποδιάστημα του $[a,b]$ και τυχών $\epsilon > 0$.
Επειδή η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, υπάρχει διαμέριση Δ του $[a,b]$ ώστε να είναι

$$\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) < (d-c)\epsilon. \tag{14.130}$$

Αν οι c,d δεν είναι Δ-σημεία, τότε μπορούμε να τούς επισυνάψουμε στην Δ και έτσι θα προκύψει μια λεπτότερη διαμέριση, η οποία θα ικανοποιεί την (14.130) και, επιπλέον θα έχει τους c,d ως διαιρετικά σημεία. Την καινούργια αυτή διαμέριση θα ξαναονομάσουμε Δ (και θα ξεχάσουμε την παλιά Δ). (Φυσικά, αν οι c,d είναι διαιρετικά σημεία της αρχικής Δ, τότε δεν θα κάνουμε καμία αλλαγή στην Δ.)
Τώρα, αν $\Delta = \{a = x_0, \dots, x_n = b\}$, θα είναι $c = x_p$ και $d = x_q$ για κάποιους p,q με $0 \leq p < q \leq n$. Επίσης, αν $l_k = \inf\{f(x) \,|\, x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$ και $u_k = \sup\{f(x) \,|\, x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$ για κάθε $k = 1, \dots, n$, τότε από την (14.130) έχουμε

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{k=p+1}^{q}(u_k - l_k)(x_k - x_{k-1}) &\leq \textstyle\sum_{k=1}^{n}(u_k - l_k)(x_k - x_{k-1})\\ &= \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) < (d-c)\epsilon.\end{aligned} \tag{14.131}$$

Αν ισχύει $\epsilon \leq u_k - l_k$ για κάθε $k = p+1, \dots, q$, τότε είναι

$$\textstyle\sum_{k=p+1}^{q}(u_k - l_k)(x_k - x_{k-1}) \geq \epsilon \sum_{k=p+1}^{q}(x_k - x_{k-1}) = \epsilon(x_q - x_p) = \epsilon(d-c),$$

οπότε από την (14.131) προκύπτει άτοπο.
Άρα υπάρχει κάποιος $k = p+1, \dots, q$ ώστε $u_k - l_k < \epsilon$.
Το αντίστοιχο $[x_{k-1}, x_k]$ είναι υποδιάστημα του $[c,d]$ και, τώρα, παίρνουμε ένα οποιοδήποτε διάστημα $[u,v] \subseteq (x_{k-1}, x_k) \subseteq (c,d)$ με θετικό μήκος $v - u < \epsilon$. Τότε, προφανώς, είναι

$$\begin{aligned}\sup\{f(x) \,|\, u \leq x \leq v\} &- \inf\{f(x) \,|\, u \leq x \leq v\}\\ &\leq \sup\{f(x) \,|\, x_{k-1} \leq x \leq x_k\} - \inf\{f(x) \,|\, x_{k-1} \leq x \leq x_k\}\\ &= u_k - l_k < \epsilon.\end{aligned}$$

Έχουμε, λοιπόν, αποδείξει το εξής αποτέλεσμα: για κάθε υποδιάστημα $[c,d]$ του $[a,b]$ και για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει ανοικτό $(u,v) \subseteq [c,d]$ έτσι ώστε

$$0 < v - u < \epsilon, \qquad \sup\{f(x) \,|\, u \leq x \leq v\} - \inf\{f(x) \,|\, u \leq x \leq v\} < \epsilon.$$

Τώρα είμαστε έτοιμοι να απαντήσουμε στα διάφορα ερωτήματα της άσκησης.
Το πρώτο ερώτημα. Εφαρμόζουμε το προηγούμενο αποτέλεσμα στο $[c,d] = [a,b]$ με $\epsilon = 1$ και το αντίστοιχο $[u,v]$ το ονομάζουμε $[a_1, b_1]$. Άρα υπάρχει $[a_1, b_1] \subseteq (a,b)$ ώστε να είναι

$$0 < b_1 - a_1 < 1, \qquad \sup\{f(x) \,|\, a_1 \leq x \leq b_1\} - \inf\{f(x) \,|\, a_1 \leq x \leq b_1\} < 1.$$

Κατόπιν, εφαρμόζουμε το προηγούμενο συμπέρασμα στο $[c,d] = [a_1, b_1]$ με $\epsilon = \frac{1}{2}$ και το αντίστοιχο $[u,v]$ το ονομάζουμε $[a_2, b_2]$. Άρα υπάρχει $[a_2, b_2] \subseteq (a_1, b_1)$ ώστε να είναι

$$0 < b_2 - a_2 < \tfrac{1}{2}, \qquad \sup\{f(x) \,|\, a_2 \leq x \leq b_2\} - \inf\{f(x) \,|\, a_2 \leq x \leq b_2\} < \tfrac{1}{2}.$$

Συνεχίζουμε επαγωγικά και έτσι δημιουργούμε ακολουθία διαστημάτων $([a_n, b_n])$ ώστε για κάθε n να είναι $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq (a_n, b_n)$ και

$$0 < b_n - a_n < \tfrac{1}{n}, \quad \sup\{f(x) \,|\, a_n \leq x \leq b_n\} - \inf\{f(x) \,|\, a_n \leq x \leq b_n\} < \tfrac{1}{n}. \tag{14.132}$$

Συνεπάγεται ότι υπάρχει ακριβώς ένας ξ ώστε $\xi \in [a_n, b_n]$ για κάθε n. Αυτό μπορεί να γίνει λίγο ισχυρότερο. Πράγματι, για κάθε n είναι $\xi \in [a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq (a_n, b_n)$ και άρα ισχύει

$$\xi \in (a_n, b_n) \qquad \text{για κάθε } n. \tag{14.133}$$

Τώρα, έστω τυχών $\epsilon > 0$. Θεωρούμε $n \in \mathbb{N}$ με $\frac{1}{n} < \epsilon$ και το αντίστοιχο διάστημα (a_n, b_n). Για κάθε $x \in (a_n, b_n)$ ισχύει $\inf\{f(t) \,|\, a_n \le t \le b_n\} \le f(x) \le \sup\{f(t) \,|\, a_n \le t \le b_n\}$ και, λόγω της (14.133), $\inf\{f(t) \,|\, a_n \le t \le b_n\} \le f(\xi) \le \sup\{f(t) \,|\, a_n \le t \le b_n\}$ και, επομένως, από την (14.132) έχουμε

$$|f(x) - f(\xi)| \le \sup\{f(x) \,|\, a_n \le x \le b_n\} - \inf\{f(x) \,|\, a_n \le x \le b_n\} < \frac{1}{n} < \epsilon.$$

Άρα ισχύει $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$ για κάθε $x \in (a_n, b_n)$. Άρα πάλι λόγω της (14.133) έχουμε ότι ισχύει $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$ κοντά στον ξ, οπότε η f είναι συνεχής στον ξ.

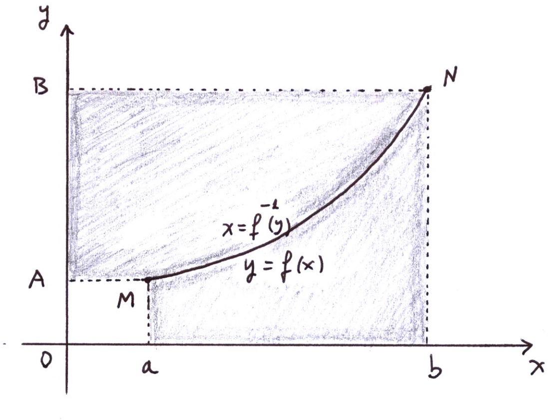
Το δεύτερο ερώτημα. Αντί να ξεκινήσουμε την απάντηση του πρώτου ερωτήματος με το $[c, d]$ να είναι το ίδιο με το $[a, b]$, παίρνουμε ένα οποιοδήποτε υποδιάστημα $[c, d]$ του $[a, b]$ και, ακολουθώντας την ίδια διαδικασία, αποδεικνύουμε την ύπαρξη ενός $\xi \in [c, d]$ στον οποίο η f είναι συνεχής. Το συμπέρασμα είναι ότι κάθε υποδιάστημα (με θετικό μήκος) του $[a, b]$ περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο συνέχειας της f και άρα το σύνολο των σημείων συνέχειας της f είναι πυκνό στο $[a, b]$.

Άσκηση 6.3.1. *Σε ποιά διαστήματα είναι ολοκληρώσιμες οι $x^3 - x$, $1/(x^3 - x)$, $\sqrt{x^3 - x}$;*

Λύση: Η $x^3 - x$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα $[a, b]$.
Η $1/(x^3 - x)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R} \setminus \{0, \pm 1\}$, οπότε είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα $[a, b]$ το οποίο δεν περιέχει κανέναν από τους $0, \pm 1$. Δηλαδή, η συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ αν και μόνο αν $b < -1$ ή $-1 < a < b < 0$ ή $0 < a < b < 1$ ή $1 < a$.
Η $\sqrt{x^3 - x}$ είναι συνεχής στο $[-1, 0] \cup [1, +\infty)$, οπότε είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα $[a, b]$ το οποίο περιέχεται σ' αυτό το σύνολο. Δηλαδή, η συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ αν και μόνο αν $-1 \le a < b \le 0$ ή $1 \le a$.

Άσκηση 6.3.2. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[a, b]$. Το σύνολο τιμών της f είναι το $[A, B]$, όπου $A = f(a), B = f(b)$, και η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : [A, B] \to [a, b]$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[A, B]$.*
Αποδείξτε ότι $\int_a^b f(x)\,dx + \int_A^B f^{-1}(y)\,dy = bB - aA$.
Αν $0 \le a < b$ και $0 \le A < B$, περιγράψτε το γεωμετρικό νόημα αυτής της ισότητας.

Λύση: Αρχίζουμε με το γεωμετρικό περιεχόμενο της ισότητας που θέλουμε να αποδείξουμε.
Στο σχήμα 40 φαίνεται το γράφημα της f ως συνάρτηση από το $[a, b]$ στο $[A, B]$ και το γράφημα της f^{-1} ως συνάρτηση από το $[A, B]$ στο $[a, b]$. Τα δύο γραφήματα ταυτίζονται με την ίδια καμπύλη. Προσέξτε: αν θέλαμε να τοποθετήσουμε την ανεξάρτητη μεταβλητή της f^{-1} σε οριζόντιο άξονα και την εξαρτημένη μεταβλητή της σε κατακόρυφο άξονα, θα κάναμε ανάκλαση του γραφήματος της f ως προς την κύρια διαγώνιο του επιπέδου και τότε το γράφημα της f^{-1} θα ήταν το συμμετρικό του γραφήματος της f ως προς την κύρια διαγώνιο. Όμως, εμείς τώρα κρατάμε την ανεξάρτητη μεταβλητή της f^{-1}, δηλαδή την y, στον κατακόρυφο άξονα και την εξαρτημένη μεταβλητή της, δηλαδή την x, στον οριζόντιο άξονα.



Σx 40

Τώρα, το $\int_a^b f$ είναι ίσο με το εμβαδό του καμπυλόγραμμου χωρίου $abNM$ και το $\int_A^B f^{-1}$ είναι ίσο με το εμβαδό του καμπυλόγραμμου χωρίου $ABNM$. Άρα το άθροισμα των δύο ολοκληρωμάτων

είναι ίσο με το εμβαδό του χωρίου $aMABNb$, το οποίο είναι ίσο με την διαφορά των εμβαδών των ορθογωνίων $0bNB$ και $0aMA$, δηλαδή ίσο με $Bb - Aa$.
Θεωρούμε τυχούσα διαμέριση $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ του $[a, b]$. Δηλαδή,

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Θεωρούμε και τα αντίστοιχα σημεία $y_k = f(x_k)$, οπότε, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, έχουμε

$$A = y_0 < y_1 < \ldots < y_{k-1} < y_k < \ldots < y_{n-1} < y_n = B.$$

Έτσι ορίζεται μια αντίστοιχη διαμέριση $\Delta' = \{y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n\}$ του $[A, B]$.
Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, σε κάθε υποδιάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ ισχύει

$$l_k = f(x_{k-1}) = y_{k-1}, \qquad u_k = f(x_k) = y_k,$$

οπότε

$$\begin{aligned} \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) &= \textstyle\sum_{k=1}^n y_{k-1}(x_k - x_{k-1}), \\ \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) &= \textstyle\sum_{k=1}^n y_k(x_k - x_{k-1}). \end{aligned} \tag{14.134}$$

Επειδή ισχύει $f^{-1}(y_k) = x_k$ για κάθε k και επειδή η f^{-1} είναι κι αυτή γνησίως αύξουσα, ισχύει, εντελώς ανάλογα,

$$\begin{aligned} \underline{\Sigma}(f^{-1}; A, B; \Delta') &= \textstyle\sum_{k=1}^n x_{k-1}(y_k - y_{k-1}), \\ \overline{\Sigma}(f^{-1}; A, B; \Delta') &= \textstyle\sum_{k=1}^n x_k(y_k - y_{k-1}). \end{aligned} \tag{14.135}$$

Από τις (14.134), (14.135) έχουμε

$$\begin{aligned} \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) + \overline{\Sigma}(f^{-1}; A, B; \Delta') &= \textstyle\sum_{k=1}^n y_{k-1}(x_k - x_{k-1}) \\ &\quad + \textstyle\sum_{k=1}^n x_k(y_k - y_{k-1}) \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^n y_{k-1}x_k - \sum_{k=1}^n y_{k-1}x_{k-1} \\ &\quad + \textstyle\sum_{k=1}^n x_k y_k - \sum_{k=1}^n x_k y_{k-1} \\ &= -\textstyle\sum_{k=1}^n y_{k-1}x_{k-1} + \sum_{k=1}^n x_k y_k \\ &= x_n y_n - x_0 y_0 = Bb - Aa. \end{aligned} \tag{14.136}$$

Εντελώς όμοια, πάλι από τις (14.134), (14.135) έχουμε

$$\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) + \underline{\Sigma}(f^{-1}; A, B; \Delta') = Bb - Aa. \tag{14.137}$$

Τώρα θεωρούμε τυχόντα $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει διαμέριση Δ του $[a, b]$ ώστε

$$0 \leq \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) < \epsilon. \tag{14.138}$$

Από τις (14.136), (14.137) και (14.138) βρίσκουμε εύκολα ότι

$$0 \leq \overline{\Sigma}(f^{-1}; A, B; \Delta') - \underline{\Sigma}(f^{-1}; A, B; \Delta') < \epsilon. \tag{14.139}$$

Έχουμε, επιπλέον, και τις σχέσεις

$$\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) \leq \textstyle\int_a^b f \leq \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta), \tag{14.140}$$

$$\underline{\Sigma}(f^{-1}; A, B; \Delta') \leq \textstyle\int_A^B f^{-1} \leq \overline{\Sigma}(f^{-1}; A, B; \Delta'). \tag{14.141}$$

Από τις (14.138), (14.140) βρίσκουμε ότι

$$0 \leq \textstyle\int_a^b f - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) < \epsilon \tag{14.142}$$

και από τις (14.139), (14.141) ότι

$$0 \le \overline{\Sigma}(f^{-1}; A, B; \Delta') - \int_A^B f^{-1} < \epsilon. \tag{14.143}$$

Αφαιρώντας τις (14.142), (14.143), βρίσκουμε

$$-\epsilon < \left(\int_a^b f + \int_A^B f^{-1}\right) - \left(\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) + \overline{\Sigma}(f^{-1}; A, B; \Delta')\right) < \epsilon,$$

οπότε η (14.136) δίνει

$$\left|\left(\int_a^b f + \int_A^B f^{-1}\right) - (Bb - Aa)\right| < \epsilon.$$

Επειδή αυτό ισχύει για κάθε $\epsilon > 0$, συνεπάγεται $\int_a^b f + \int_A^B f^{-1} = Bb - Aa$.

Άσκηση 6.4.2. *Έστω $[c, d] \subseteq [a, b]$. Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και ισχύει $f(x) \ge 0$ για κάθε $x \in [a, b]$, αποδείξτε ότι $\int_a^b f \ge \int_c^d f$.*

Λύση: Μια πρώτη περίπτωση είναι όταν $a < c < d < b$.
Επειδή ισχύει $f(x) \ge 0$ για κάθε $x \in [a, c]$, συνεπάγεται $\int_a^c f \ge 0$.
Ομοίως, επειδή ισχύει $f(x) \ge 0$ για κάθε $x \in [d, b]$, συνεπάγεται $\int_d^b f \ge 0$.
Άρα

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^d f + \int_d^b f \ge 0 + \int_c^d f + 0 = \int_c^d f.$$

Οι άλλες τρεις περιπτώσεις είναι όταν $a = c < d < b$, $a < c < d = b$ και $a = c < d = b$ και λύνονται με τον ίδιο τρόπο (και απλούστερα).

Άσκηση 6.4.3. *Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$. Αποδείξτε ότι η $\max\{f, g\} : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.*

Λύση: Η απόδειξη είναι άμεση από τη σχέση $\max\{f, g\} = \frac{f+g+|f-g|}{2}$.

Άσκηση 6.4.4. *Αποδείξτε ότι $\int_0^\pi (\sin x)^{n+1}\, dx \le \int_0^\pi (\sin x)^n\, dx$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, χωρίς να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα.*

Λύση: Για κάθε $x \in [0, \pi]$ ισχύει $0 \le \sin x \le 1$ και, επομένως, $(\sin x)^{n+1} \le (\sin x)^n$.

Άσκηση 6.4.5. *Χωρίς να βρείτε το ολοκλήρωμα, αποδείξτε ότι $3e^{-2} \le \int_{1/2}^2 xe^{-x}\, dx \le \frac{3}{2}e^{-1}$.*

Λύση: Η συνάρτηση xe^{-x} έχει παράγωγο $e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$ και άρα είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[\frac{1}{2}, 1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1, 2]$. Άρα έχει μέγιστη τιμή ίση με $1e^{-1} = e^{-1}$ και ελάχιστη τιμή ίση με τον μικρότερο από τους $\frac{1}{2}e^{-1/2}$ και $2e^{-2}$, δηλαδή ίση με $2e^{-2}$. Άρα ισχύει $2e^{-2} \le xe^{-x} \le e^{-1}$ για κάθε $x \in [\frac{1}{2}, 2]$ και, επομένως,

$$2e^{-2}\left(2 - \tfrac{1}{2}\right) \le \int_{1/2}^2 xe^{-x}\, dx \le e^{-1}\left(2 - \tfrac{1}{2}\right).$$

Άσκηση 6.4.7. *Βρείτε τα $\lim_{x\to+\infty} \int_x^{x+\sqrt{x}} \frac{t}{1+t^2}\, dt$, $\lim_{x\to 0+} \frac{1}{2x} \int_{1-x}^{1+x} \frac{t}{1+t^2}\, dt$.*

Λύση: Τα συγκεκριμένα ολοκληρώματα μπορούν να υπολογισθούν ακριβώς. Προτιμάμε, όμως, στην παρούσα φάση να δούμε πώς θα εκτιμήσουμε τα ολοκληρώματα χωρίς να τα υπολογίσουμε ακριβώς.
Το πρώτο όριο. Η συνάρτηση $\frac{t}{1+t^2}$ έχει παράγωγο $\frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}$ η οποία είναι > 0 στο διάστημα $(-1, 1)$ και < 0 στα διαστήματα $(-\infty, -1)$ και $(1, +\infty)$. Άρα η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-1, 1]$ και γνησίως φθίνουσα στα $(-\infty, -1]$ και $[1, +\infty)$.
Επειδή μας ενδιαφέρει το όριο καθώς $x \to +\infty$, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $x \ge 1$, οπότε η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x, x + \sqrt{x}]$. Άρα η ελαχιστη και η μέγιστη τιμή της συνάρτησης στο διάστημα αυτό είναι οι τιμές της στα άκρα του διαστήματος, και έχουμε ότι ισχύει

$$\frac{x+\sqrt{x}}{1+(x+\sqrt{x})^2} \le \frac{t}{1+t^2} \le \frac{x}{1+x^2} \qquad \text{για κάθε } t \in [x, x + \sqrt{x}].$$

Άρα

$$\tfrac{x+\sqrt{x}}{1+(x+\sqrt{x})^2}\,\sqrt{x} \leq \int_x^{x+\sqrt{x}} \tfrac{t}{1+t^2}\,dt \leq \tfrac{x}{1+x^2}\,\sqrt{x}.$$

Αυτό ισχύει για κάθε $x \geq 1$ και τώρα με την ιδιότητα παρεμβολής βρίσκουμε ότι

$$\lim_{x\to+\infty} \int_x^{x+\sqrt{x}} \tfrac{t}{1+t^2}\,dt = 0.$$

Το δεύτερο όριο. Επειδή μας ενδιαφέρει το όριο καθώς $x \to 0+$, θεωρούμε ότι $0 < x \leq 1$, οπότε η συνάρτηση $\frac{t}{1+t^2}$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1-x,1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1,1+x]$. Άρα η μέγιστη τιμή της συνάρτησης στο $[1-x,1+x]$ είναι η τιμή της στο 1 και η ελάχιστη τιμή της στο $[1-x,1+x]$ είναι η μικρότερη από τις τιμές της στα άκρα $1-x$ και $1+x$. Με μια απλή σύγκριση βρίσκουμε ότι η μικρότερη από τις δύο τιμές στα άκρα είναι η τιμή στο $1-x$ και συμπεραίνουμε ότι, αν $0 < x \leq 1$, τότε ισχύει

$$\tfrac{1-x}{1+(1-x)^2} \leq \tfrac{t}{1+t^2} \leq \tfrac{1}{2} \qquad \text{για κάθε } t \in [1-x,1+x].$$

Συνεπάγεται ότι ισχύει

$$\tfrac{1-x}{1+(1-x)^2}\,2x \leq \int_{1-x}^{1+x} \tfrac{t}{1+t^2}\,dt \leq \tfrac{1}{2}\,2x$$

και, επομένως,

$$\tfrac{1-x}{1+(1-x)^2} \leq \tfrac{1}{2x}\int_{1-x}^{1+x} \tfrac{t}{1+t^2}\,dt \leq \tfrac{1}{2}$$

για κάθε x με $0 < x \leq 1$.
Από την ιδιότητα παρεμβολής έχουμε ότι

$$\lim_{x\to0+} \tfrac{1}{2x}\int_{1-x}^{1+x} \tfrac{t}{1+t^2}\,dt = \tfrac{1}{2}.$$

Υπάρχει και ένας δεύτερος τρόπος να αποδείξουμε το ίδιο όριο.
Παρατηρούμε ότι, όταν ο $x > 0$ είναι πολύ κοντά στον 0, τότε το διάστημα $[1-x,1+x]$, το οποίο περιέχει τον 1, είναι πολύ μικρό, οπότε κάθε t στο διάστημα αυτό είναι περίπου ίσο με 1 και, επομένως, θα ισχύει

$$\tfrac{t}{1+t^2} \approx \tfrac{1}{2}.$$

Άρα, όταν ο $x > 0$ είναι πολύ κοντα στον 0, θα έχουμε

$$\tfrac{1}{2x}\int_{1-x}^{1+x} \tfrac{t}{1+t^2}\,dt \approx \tfrac{1}{2x}\int_{1-x}^{1+x} \tfrac{1}{2}\,dt = \tfrac{1}{2}. \tag{14.144}$$

Επομένως, αναμένουμε ότι το ζητούμενο όριο θα είναι ίσο με $\frac{1}{2}$ και ξεκινάμε να αποδείξουμε ότι

$$\tfrac{1}{2x}\int_{1-x}^{1+x} \tfrac{t}{1+t^2}\,dt \to \tfrac{1}{2} \qquad \text{όταν } x \to 0+\,. \tag{14.145}$$

Τώρα, γράφουμε

$$\tfrac{1}{2x}\int_{1-x}^{1+x} \tfrac{t}{1+t^2}\,dt - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2x}\int_{1-x}^{1+x} \tfrac{t}{1+t^2}\,dt - \tfrac{1}{2x}\int_{1-x}^{1+x} \tfrac{1}{2}\,dt.$$

(Πώς σκεφτήκαμε να αντικαταστήσουμε τον αριθμό $\frac{1}{2}$ με την παράσταση $\frac{1}{2x}\int_{1-x}^{1+x}\frac{1}{2}\,dt$; Μα κάναμε ήδη τον υπολογισμό πιο πάνω στο τέλος της (14.144).)
Άρα

$$\tfrac{1}{2x}\int_{1-x}^{1+x} \tfrac{t}{1+t^2}\,dt - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2x}\int_{1-x}^{1+x} \big(\tfrac{t}{1+t^2} - \tfrac{1}{2}\big)\,dt,$$

οπότε

$$\big|\tfrac{1}{2x}\int_{1-x}^{1+x} \tfrac{t}{1+t^2}\,dt - \tfrac{1}{2}\big| \leq \tfrac{1}{2x}\int_{1-x}^{1+x} \big|\tfrac{t}{1+t^2} - \tfrac{1}{2}\big|\,dt. \tag{14.146}$$

Τώρα κάνουμε πράξεις και βλέπουμε ότι

$$\big|\tfrac{t}{1+t^2} - \tfrac{1}{2}\big| = \tfrac{(t-1)^2}{2(1+t^2)} \leq \tfrac{(t-1)^2}{2} \qquad \text{για κάθε } t \in [1-x,1+x],$$

οπότε η (14.146) συνεπάγεται

$$\left|\tfrac{1}{2x}\int_{1-x}^{1+x}\tfrac{t}{1+t^2}\,dt-\tfrac{1}{2}\right|\le\tfrac{1}{4x}\int_{1-x}^{1+x}(t-1)^2\,dt=\tfrac{1}{4x}\int_{-x}^{x}u^2\,du=\tfrac{x^2}{6}.$$

Άρα αποδείξαμε την (14.145).

Άσκηση 6.4.8. *Έστω f,g συνεχείς στο $[a,b]$ και $\int_a^b f=\int_a^b g$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi\in(a,b)$ ώστε $f(\xi)=g(\xi)$.*

Λύση: Η συνάρτηση $h=f-g$ είναι συνεχής στο $[a,b]$ και $\int_a^b h=0$.
Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει $\xi\in(a,b)$ ώστε $h(\xi)=0$.
Υποθέτουμε (για άτοπο) ότι ισχύει $h(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(a,b)$.
Επειδή η h είναι συνεχής στο (a,b), συνεπάγεται ότι είτε ισχύει $h(x)>0$ για κάθε $x\in(a,b)$ είτε ισχύει $h(x)>0$ για κάθε $x\in(a,b)$. Θεωρούμε την πρώτη περίπτωση. Αυτά που ακολουθούν είναι παρόμοια και στην δεύτερη περίπτωση.
Επειδή η h είναι συνεχής στα a,b και επειδή ισχύει $h(x)>0$ για κάθε $x\in(a,b)$, συνεπάγεται $h(a)=\lim_{x\to a+}h(x)\ge 0$ και $h(b)=\lim_{x\to b-}h(x)\ge 0$. Άρα ισχύει $h(x)\ge 0$ για κάθε $x\in[a,b]$.
Επομένως, επειδή $\int_a^b h=0$, συνεπάγεται ότι ισχύει $h(x)=0$ για κάθε $x\in[a,b]$ στο οποίο η h είναι συνεχής. Αυτό είναι άτοπο, διότι η h είναι συνεχής στο $[a,b]$ και έχουμε ότι ισχύει $h(x)>0$ για κάθε $x\in(a,b)$.
Άρα υπάρχει $\xi\in(a,b)$ ώστε $h(\xi)=0$ και, επομένως, $f(\xi)=g(\xi)$.

Άσκηση 6.4.10. *Σχεδιάστε το γράφημα της συνάρτησης $x-[x]-\frac{1}{2}$.*
Έστω $k\in\mathbb{Z}$. Αποδείξτε ότι $\int_k^{k+1}(x-[x]-\frac{1}{2})\,dx=0$, $\int_k^{k+(1/2)}(x-[x]-\frac{1}{2})\,dx=-\frac{1}{8}$ και $\int_{k+(1/2)}^{k+1}(x-[x]-\frac{1}{2})\,dx=\frac{1}{8}$.
Αποδείξτε ότι $-\frac{1}{8}\le\int_a^b(x-[x]-\frac{1}{2})\,dx\le\frac{1}{8}$ για κάθε a,b με $a<b$.

Λύση: Το γράφημα της συνάρτησης βρίσκεται στο σχήμα 36 στην λύση της άσκησης 4.1.3.
Το πρώτο ερώτημα. Αν $k\in\mathbb{Z}$, τότε στο διάστημα $[k,k+1]$ η συνάρτηση $x-[x]-\frac{1}{2}$ ταυτίζεται με την $x-k-\frac{1}{2}$ εκτός μόνο στο σημείο $k+1$. Άρα

$$\begin{aligned}\int_k^{k+1}(x-[x]-\tfrac{1}{2})\,dx&=\int_k^{k+1}(x-k-\tfrac{1}{2})\,dx=0,\\ \int_k^{k+(1/2)}(x-[x]-\tfrac{1}{2})\,dx&=\int_k^{k+(1/2)}(x-k-\tfrac{1}{2})\,dx=-\tfrac{1}{8},\\ \int_{k+(1/2)}^{k+1}(x-[x]-\tfrac{1}{2})\,dx&=\int_{k+(1/2)}^{k+1}(x-k-\tfrac{1}{2})\,dx=\tfrac{1}{8}.\end{aligned}\tag{14.147}$$

Το δεύτερο ερώτημα. Έστω $k\in\mathbb{Z}$ και $k\le a<k+1$ (δηλαδή $[a]=k$).
Αν $k\le a\le k+\frac{1}{2}$, τότε, επειδή ισχύει $x-[x]-\frac{1}{2}\le 0$ για κάθε $x\in[k,k+\frac{1}{2}]$, έχουμε

$$0\ge\int_k^a(x-[x]-\tfrac{1}{2})\,dx\ge\int_k^{k+(1/2)}(x-[x]-\tfrac{1}{2})\,dx=-\tfrac{1}{8}.$$

Επίσης, αν $k+\frac{1}{2}\le a<k+1$, τότε, επειδή ισχύει $x-[x]-\frac{1}{2}\ge 0$ για κάθε $x\in[k+\frac{1}{2},k+1)$, έχουμε

$$0\ge\int_k^a(x-[x]-\tfrac{1}{2})\,dx=-\int_a^{k+1}(x-[x]-\tfrac{1}{2})\,dx\ge-\int_{k+(1/2)}^{k+1}(x-[x]-\tfrac{1}{2})\,dx=-\tfrac{1}{8}.$$

Άρα, σε κάθε περίπτωση ισχύει

$$0\ge\int_k^a(x-[x]-\tfrac{1}{2})\,dx\ge-\tfrac{1}{8}.\tag{14.148}$$

Άρα, αν $l\in\mathbb{Z}$ και $l\le b<l+1$ (δηλαδή $[b]=l$), τότε είναι

$$0\le\int_b^{l+1}(x-[x]-\tfrac{1}{2})\,dx=-\int_l^b(x-[x]-\tfrac{1}{2})\,dx\le\tfrac{1}{8}.\tag{14.149}$$

Επειδή $a < b$, συνεπάγεται $k \leq l$ και άρα από την (14.147) έχουμε

$$\int_k^{l+1} (x - [x] - \tfrac{1}{2})\, dx = \sum_{n=k}^{l} \int_n^{n+1} (x - [x] - \tfrac{1}{2})\, dx = \sum_{n=k}^{l} 0 = 0.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} \int_a^b (x - [x] - \tfrac{1}{2})\, dx &= \int_k^{l+1} (x - [x] - \tfrac{1}{2})\, dx - \int_k^a (x - [x] - \tfrac{1}{2})\, dx - \int_b^{l+1} (x - [x] - \tfrac{1}{2})\, dx \\ &= - \int_k^a (x - [x] - \tfrac{1}{2})\, dx - \int_b^{l+1} (x - [x] - \tfrac{1}{2})\, dx, \end{aligned}$$

οπότε από τις (14.148), (14.149) συνεπάγεται

$$-\tfrac{1}{8} \leq \int_a^b (x - [x] - \tfrac{1}{2})\, dx \leq \tfrac{1}{8}.$$

Άσκηση 6.4.11. [β] *Αν $0 < p < 1$, αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{1}{(n+1)^p} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{x^p}\, dx \leq \frac{1}{n^p}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*
Αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{1}{(n+1)^p} \leq \frac{(n+1)^{1-p} - n^{1-p}}{1-p} \leq \frac{1}{n^p}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
Αποδείξτε ότι η ακολουθία (x_n), όπου $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p} - \frac{n^{1-p}}{1-p}$ για κάθε n, είναι φθίνουσα και ότι συγκλίνει.
Αποδείξτε ότι $n^{p-1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p} \to \frac{1}{1-p}$.
[ε] *Αποδείξτε ότι ισχύει $\log \frac{m+1}{n} \leq \sum_{k=n}^{m} \frac{1}{k} \leq \frac{1}{n} + \log \frac{m}{n}$ για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ με $n \leq m$.*
Για κάθε $p \in \mathbb{N}$, αποδείξτε ότι

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{pn-1} + \frac{1}{pn} \to \log p.$$

[στ] *Θεωρήστε την ακολουθία (y_n), όπου $y_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ για κάθε n. Στην ενότητα 2.5 αποδείξαμε ότι η (y_n) συγκλίνει. Αν $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n$ για κάθε n, αποδείξτε ότι ισχύει $y_{2n} = x_{2n} - x_n + \log 2$ για κάθε n και, κατόπιν, ότι $y_{2n} \to \log 2$. Συμπεράνατε ότι*

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \tfrac{1}{n} \to \log 2.$$

Λύση: [β] Ισχύει $\frac{1}{(n+1)^p} \leq \frac{1}{x^p} \leq \frac{1}{n^p}$ για κάθε $x \in [n, n+1]$ και άρα

$$\frac{1}{(n+1)^p} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{x^p}\, dx \leq \frac{1}{n^p}.$$

Μετα από υπολογισμό του ολοκληρώματος έχουμε

$$\frac{1}{(n+1)^p} \leq \frac{(n+1)^{1-p} - n^{1-p}}{1-p} \leq \frac{1}{n^p}. \tag{14.150}$$

Τώρα,

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \Big(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^p} - \frac{(n+1)^{1-p}}{1-p} \Big) - \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p} - \frac{n^{1-p}}{1-p} \Big) \\ &= \frac{1}{(n+1)^p} - \frac{(n+1)^{1-p} - n^{1-p}}{1-p} \leq 0 \end{aligned}$$

λόγω της αριστερής ανισότητας (14.150). Άρα η (x_n) είναι φθίνουσα.
Τώρα γράφουμε τις δεξιές ανισότητες (14.150) με k αντί n και αθροίζουμε για $k = 1, \ldots, n$ και βρίσκουμε

$$\frac{(n+1)^{1-p} - 1^{1-p}}{1-p} \leq x_n + \frac{n^{1-p}}{1-p}$$

και άρα

$$-\frac{1}{1-p} \leq x_n.$$

Άρα η (x_n) είναι, εκτός από φθίνουσα, κάτω φραγμένη και άρα συγκλίνει.
Τέλος, είναι

$$n^{p-1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p} = n^{p-1} x_n + \frac{1}{1-p} \to \frac{1}{1-p}.$$

[ε] Για $k \in \mathbb{N}$ ισχύει $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k}$ για κάθε $x \in [k, k+1]$ και άρα

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\, dx \leq \frac{1}{k},$$

οπότε

$$\frac{1}{k+1} \leq \log(k+1) - \log k \leq \frac{1}{k}.$$

Αθροίζοντας τις αριστερές ανισότητες για $k = n, \ldots, m-1$ και τις δεξιές ανισότητες για $k = n, \ldots, m$, βρίσκουμε

$$\log \frac{m+1}{n} \leq \sum_{k=n}^{m} \frac{1}{k} \leq \frac{1}{n} + \log \frac{m}{n}.$$

Γράφοντας την τελευταία σχέση με $n+1$ αντί n και με pn αντί m, βρίσκουμε

$$\log \frac{pn+1}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{pn-1} + \frac{1}{pn} \leq \frac{1}{n+1} + \log \frac{pn}{n+1}.$$

Από την ιδιότητα παρεμβολής συνεπάγεται $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{pn-1} + \frac{1}{pn} \to \log p$.

[στ] Έχουμε

$$\begin{aligned} y_{2n} &= 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \cdots + \tfrac{1}{2n-1} - \tfrac{1}{2n} \\ &= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \cdots + \tfrac{1}{2n-1} + \tfrac{1}{2n} - 2\big(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \cdots + \tfrac{1}{2n}\big) \\ &= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \cdots + \tfrac{1}{2n-1} + \tfrac{1}{2n} - \big(1 + \tfrac{1}{2} + \cdots + \tfrac{1}{n}\big) \\ &= \tfrac{1}{n+1} + \tfrac{1}{n+2} \cdots + \tfrac{1}{2n}. \end{aligned} \tag{14.151}$$

Από το αποτέλεσμα του [ε] με $p = 2$ βρίσκουμε ότι $y_{2n} \to \log 2$.
Τέλος, $y_{2n-1} = y_{2n} + \frac{1}{2n} \to \log 2 + 0 = \log 2$.
Άρα $y_n \to \log 2$.
Τέλος, από την (14.151) συνεπάγεται

$$\begin{aligned} y_{2n} &= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \cdots + \tfrac{1}{2n-1} + \tfrac{1}{2n} - \big(1 + \tfrac{1}{2} + \cdots + \tfrac{1}{n}\big) \\ &= x_{2n} + \log(2n) - x_n - \log n = x_{2n} - x_n + \log 2. \end{aligned}$$

Άσκηση 6.4.12. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ και ότι ισχύει $|f(x') - f(x'')| \leq M|x' - x''|$ για κάθε $x', x'' \in [a, b]$.*
Αποδείξτε ότι $\big|\int_c^d f(x)\, dx - f(d)(d-c)\big| \leq M\frac{(d-c)^2}{2}$ για κάθε $[c, d] \subseteq [a, b]$.
Αποδείξτε ότι $\big|\int_a^b f(x)\, dx - \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a + k\frac{b-a}{n})\big| \leq \frac{M(b-a)^2}{2n}$ για κάθε n και, επομένως, ότι $\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a + k\frac{b-a}{n}) \to \int_a^b f(x)\, dx$.

Λύση: Το πρώτο ερώτημα. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \Big|\int_c^d f(x)\, dx - f(d)(d-c)\Big| &= \Big|\int_c^d (f(x) - f(d))\, dx\Big| \leq \int_c^d |f(x) - f(d)|\, dx \\ &\leq M\int_c^d (d-x)\, dx = M\frac{(d-c)^2}{2}. \end{aligned}$$

Το δεύτερο ερώτημα. Θεωρούμε τους $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$ για $k = 0, 1, \ldots n$ και εφαρμόζουμε την προηγούμενη ανισότητα στο διάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ για $k = 1, \ldots n$. Βρίσκουμε ότι

$$\Big|\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\, dx - f(x_k)\frac{b-a}{n}\Big| \leq M\frac{(b-a)^2}{2n^2} \qquad \text{για κάθε } k = 1, \ldots n.$$

Αθροίζουμε αυτές τις ανισότητες και έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \Big|\int_a^b f(x)\, dx - \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Big| &= \Big|\sum_{k=1}^{n}\Big(\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\, dx - f(x_k)\frac{b-a}{n}\Big)\Big| \\ &\leq \sum_{k=1}^{n}\Big|\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\, dx - f(x_k)\frac{b-a}{n}\Big| \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} M\frac{(b-a)^2}{2n^2} = \frac{M(b-a)^2}{2n}. \end{aligned}$$

Άρα $\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^n f(x_k)\to\int_a^b f(x)\,dx$.

Άσκηση 6.4.13. *Έστω* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *ολοκληρώσιμη στο* $[a,b]$. *Αποδείξτε:* $\lim_{x\to\xi+}\int_\xi^x f(t)\,dt=0$ *για κάθε* $\xi\in[a,b)$.

Λύση: Η f είναι φραγμένη στο $[a,b]$, οπότε υπάρχει M ώστε να ισχύει $|f(x)|\leq M$ για κάθε $x\in[a,b]$.
Άρα ισχύει $|\int_\xi^x f|\leq M(x-\xi)$, αν $a\leq\xi<x\leq b$, και, επομένως, $\lim_{x\to\xi+}\int_\xi^x f=0$.

Άσκηση 6.4.14. [α] *Έστω* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *ολοκληρώσιμη στο* $[a,b]$ *και έστω η* $g:[a+c,b+c]\to\mathbb{R}$ *με τύπο* $g(x)=f(x-c)$ *για κάθε* $x\in[a+c,b+c]$. *Αποδείξτε ότι η* g *είναι ολοκληρώσιμη στο* $[a+c,b+c]$ *και* $\int_{a+c}^{b+c}g(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx$ *ή, ισοδύναμα,* $\int_{a+c}^{b+c}f(x-c)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx$.
[β] *Έστω* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *περιοδική με περίοδο* $\tau>0$, *δηλαδή ισχύει* $f(x+\tau)=f(x)$ *για κάθε* x. *Έστω ότι υπάρχει* κ *ώστε η* f *να είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα* $[\kappa,\kappa+\tau]$.
Αποδείξτε ότι η f *είναι ολοκληρώσιμη στο* $[a,b]$ *για κάθε* a,b *με* $a<b$.
Αποδείξτε ότι $\int_a^b f(x)\,dx=\int_{a+\tau}^{b+\tau}f(x)\,dx$ *και* $\int_a^{a+\tau}f(x)\,dx=\int_b^{b+\tau}f(x)\,dx$ *για κάθε* a,b *με* $a<b$.

Λύση: [α] Έστω τυχών $\epsilon>0$.
Τότε υπάρχει διαμέριση $\Delta'=\{a={x_0}',\dots,{x_n}'=b\}$ του $[a,b]$ ώστε

$$\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta')-\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta')<\epsilon. \tag{14.152}$$

Κατόπιν, θεωρούμε τη διαμέριση Δ του $[a+c,b+c]$ η οποία προκύπτει από τη Δ' παίρνοντας $x_k={x_k}'+c$ για $k=0,\dots,n$. Για τις γνωστές ποσότητες ${u_k}',{l_k}'$ της f στο $[{x_{k-1}}',{x_k}']$ και τις αντίστοιχες u_k,l_k της g στο $[x_{k-1},x_k]$ ισχύουν οι σχέσεις

$$u_k={u_k}',\quad l_k={l_k}'\qquad \text{για κάθε } k=1,\dots,n. \tag{14.153}$$

Πράγματι, είναι

$$\begin{aligned}u_k&=\sup\{g(x)\,|\,x_{k-1}\leq x\leq x_k\}=\sup\{f(x-c)\,|\,x_{k-1}\leq x\leq x_k\}\\&=\sup\{f(x)\,|\,x_{k-1}\leq x+c\leq x_k\}=\sup\{f(x)\,|\,{x_{k-1}}'\leq x\leq {x_k}'\}={u_k}'\end{aligned}$$

και με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται η δεύτερη ισότητα (14.153).
Από τις (14.153) συνεπάγεται

$$\overline{\Sigma}(g;a+c,b+c;\Delta)=\sum_{k=1}^n u_k(x_k-x_{k-1})=\sum_{k=1}^n {u_k}'({x_k}'-{x_{k-1}}')=\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta') \tag{14.154}$$

και, ομοίως,

$$\underline{\Sigma}(g;a+c,b+c;\Delta)=\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta'). \tag{14.155}$$

Από τις (14.152), (14.154), (14.155) συνεπάγεται

$$\overline{\Sigma}(g;a+c,b+c;\Delta)-\underline{\Sigma}(g;a+c,b+c;\Delta)=\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta')-\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta')<\epsilon$$

και άρα η g είναι ολοκληρώσιμη στο $[a+c,b+c]$.
Τώρα, έχουμε και τις σχέσεις

$$\underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta')\leq\int_a^b f\leq\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta'),\quad \underline{\Sigma}(g;a+c,b+c;\Delta)\leq\int_{a+c}^{b+c}g\leq\underline{\Sigma}(g;a+c,b+c;\Delta).$$

Από αυτές και από τις (14.152), (14.154), (14.155) συνεπάγεται

$$\Big|\int_{a+c}^{b+c}g-\int_a^b f\Big|<\epsilon.$$

Επειδή αυτό ισχύει για κάθε $\epsilon>0$, συνεπάγεται $\int_{a+c}^{b+c}g=\int_a^b f$.
[β] *Το πρώτο ερώτημα*. Εφαρμόζουμε το αποτέλεσμα του [α] στα διαστήματα $[\kappa,\kappa+\tau]$ και $[\kappa+$

$n\tau, \kappa + (n+1)\tau]$ με $n \in \mathbb{Z}$ και στις αντίστοιχες συναρτήσεις $f(x)$ στο πρώτο διάστημα και $g(x) = f(x - n\tau) = f(x)$ στο δεύτερο διάστημα και βρίσκουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[\kappa + n\tau, \kappa + (n+1)\tau]$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ και ότι

$$\int_{\kappa+n\tau}^{\kappa+(n+1)\tau} f = \int_{\kappa}^{\kappa+\tau} f \qquad \text{για κάθε } n \in \mathbb{Z}.$$

Το δεύτερο ερώτημα. Θεωρούμε $n, m \in \mathbb{Z}$ ώστε $\kappa + n\tau \leq a$ και $b < \kappa + (m+1)\tau$. Τότε είναι $n \leq m$ και το $[a,b]$ περιέχεται στο διάστημα $[\kappa + n\tau, \kappa + (m+1)\tau]$, το οποίο είναι η ένωση των διαδοχικών διαστημάτων $[\kappa + n\tau, \kappa + (n+1)\tau], \ldots, [\kappa + m\tau, \kappa + (m+1)\tau]$. Η f είναι ολοκληρώσιμη σε καθένα από αυτά τα διαστήματα, οπότε είναι ολοκληρώσιμη και στην ένωσή τους και, επομένως, και στο $[a,b]$.

Το τρίτο ερώτημα. Εφαρμόζουμε το αποτέλεσμα του [α] στα διαστήματα $[a,b]$ και $[a+\tau, b+\tau]$ και στις αντίστοιχες συναρτήσεις $f(x)$ στο πρώτο διάστημα και $g(x) = f(x-\tau) = f(x)$ στο δεύτερο διάστημα και έχουμε ότι

$$\int_{a+\tau}^{b+\tau} f = \int_a^b f.$$

Τέλος, έχουμε ότι

$$\int_a^{a+\tau} f + \int_{a+\tau}^{b+\tau} f = \int_a^{b+\tau} f = \int_a^b f + \int_b^{b+\tau} f = \int_{a+\tau}^{b+\tau} f + \int_b^{b+\tau} f$$

και άρα $\int_a^{a+\tau} f = \int_b^{b+\tau} f$.

Άσκηση 6.4.15. [α] *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Αν $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$ για κάθε συνάρτηση $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, αποδείξτε ότι η f μηδενίζεται σε κάθε σημείο συνέχειάς της. Ειδικότερα, αν η f είναι συνεχής στο $[a,b]$, τότε ισχύει $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a,b]$.*

[β] *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Αν $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$ για κάθε συνάρτηση $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχή στο $[a,b]$ με $g(a) = g(b) = 0$, αποδείξτε ότι η f μηδενίζεται σε κάθε σημείο συνέχειάς της. Ειδικότερα, αν η f είναι συνεχής στο $[a,b]$, τότε ισχύει $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a,b]$.*

Λύση: [α] Αφού ισχύει $\int_a^b fg = 0$ για κάθε g ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, συνεπάγεται ότι ισχύει $\int_a^b f^2 = 0$.

[β] Έστω ότι η f είναι συνεχής στον $\xi \in [a,b]$ και $f(\xi) > 0$.

Τότε υπάρχει $[c,d] \subseteq [a,b]$ ώστε $d - c > 0$, $\xi \in [c,d]$ και ώστε να ισχύει $f(x) \geq \frac{f(\xi)}{2}$ για κάθε $x \in [c,d]$.

Θεωρούμε την *τριγωνική συνάρτηση* g η οποία μηδενίζεται στα $[a,c]$ και $[d,b]$, έχει τιμή 1 στο σημείο $\frac{c+d}{2}$ και είναι αφφινική στο $[c, \frac{c+d}{2}]$ και αφφινική στο $[\frac{c+d}{2}, d]$. Η g είναι συνεχής στο $[a,b]$ και ισχύει $g(a) = g(b) = 0$. Από την υπόθεση συνεπάγεται $\int_a^b fg = 0$.

Όμως,

$$\int_a^b fg = \int_c^d fg \geq \frac{f(\xi)}{2} \int_c^d g > 0$$

και καταλήγουμε σε άτοπο.

Με τον ίδιο τρόπο καταλήγουμε σε άτοπο αν $f(\xi) < 0$ και συμπεραίνουμε ότι η f μηδενίζεται σε κάθε σημείο συνέχειάς της.

Άσκηση 6.4.16. *Δείτε την άσκηση 6.3.2.*

Έστω $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[0,+\infty)$, $f(0) = 0$ και έστω ότι $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Το σύνολο τιμών της f είναι το $[0,+\infty)$ και η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[0,+\infty)$.

Αποδείξτε ότι $ab \leq \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^b f^{-1}(y)\,dy$ για κάθε $a, b > 0$ και ότι η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $f(a) = b$.

Εφαρμόστε το αποτέλεσμα αυτό στη συνάρτηση x^{p-1} με $p > 1$ για να αποδείξετε την ανισότητα του Young στην άσκηση 5.4.21 (και στην άσκηση 5.5.38).

Λύση: Το πρώτο ερώτημα. Από το αποτέλεσμα της άσκησης 6.3.2 συνεπάγεται η ισότητα

$$\int_0^a f + \int_0^{f(a)} f^{-1} = af(a). \tag{14.156}$$

Τώρα, έστω $f(a) < b$. Επειδή η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[f(a), b]$, ισχύει $f^{-1}(y) > f^{-1}(f(a)) = a$ για κάθε $y \in (f(a), b]$. Επομένως, είναι

$$\int_{f(a)}^b f^{-1} > a(b - f(a)),$$

οπότε από την (14.156) συνεπάγεται

$$\int_0^a f + \int_0^b f^{-1} = \int_0^a f + \int_0^{f(a)} f^{-1} + \int_{f(a)}^b f^{-1} > af(a) + a(b - f(a)) = ab.$$

Τέλος, έστω $f(a) > b$. Επειδή η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[b, f(a)]$, ισχύει $f^{-1}(y) < f^{-1}(f(a)) = a$ για κάθε $y \in [b, f(a))$. Επομένως, είναι

$$\int_b^{f(a)} f^{-1} < a(f(a) - b),$$

οπότε από την (14.156) συνεπάγεται

$$\int_0^a f + \int_0^b f^{-1} = \int_0^a f + \int_0^{f(a)} f^{-1} - \int_b^{f(a)} f^{-1} > af(a) - a(f(a) - b) = ab.$$

Το δεύτερο ερώτημα. Αν $p > 1$ και $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, τότε η x^{p-1} έχει αντίστροφη συνάρτηση την y^{q-1}. Άρα για κάθε $a, b > 0$ ισχύει

$$ab \leq \int_0^a x^{p-1}\,dx + \int_0^b y^{q-1}\,dy = \tfrac{1}{p}a^p + \tfrac{1}{q}b^q$$

και η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $b = a^{p-1}$ ή, ισοδύναμα, $b^q = a^p$.

Άσκηση 6.4.18. *Έστω $f, g : [a, b] \to [0, +\infty)$ συνεχείς στο $[a, b]$ και $p, q > 1$ ώστε $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*
[α] *Αποδείξτε την ανισότητα του Hölder για ολοκληρώματα:*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq \big(\int_a^b (f(x))^p\,dx\big)^{1/p} \big(\int_a^b (g(x))^q\,dx\big)^{1/q}.$$

Αποδείξτε ότι ισχύει η ισότητα αν και μόνο αν υπάρχουν $s, t \geq 0$ όχι και οι δύο ίσοι με 0 ώστε να ισχύει $s(f(x))^p = t(g(x))^q$ για κάθε $x \in [a, b]$.
Επειδή $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, η πολύ σημαντική ανισότητα των Schwarz, Buniakowsky,

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq \big(\int_a^b (f(x))^2\,dx\big)^{1/2} \big(\int_a^b (g(x))^2\,dx\big)^{1/2},$$

είναι ειδική περίπτωση της ανισότητας του Hölder.
[β] *Αποδείξτε την ανισότητα του Minkowski για ολοκληρώματα:*

$$\big(\int_a^b (f(x) + g(x))^p\,dx\big)^{1/p} \leq \big(\int_a^b (f(x))^p\,dx\big)^{1/p} + \big(\int_a^b (g(x))^p\,dx\big)^{1/p}.$$

Αποδείξτε ότι ισχύει η ισότητα αν και μόνο αν υπάρχουν $s, t \geq 0$ όχι και οι δύο ίσοι με 0 ώστε να ισχύει $sf(x) = tg(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$.

Υπόδειξη: [α] Έστω $A = (\int_a^b (f(x))^p\,dx)^{\frac{1}{p}}$ και $B = (\int_a^b (g(x))^q\,dx)^{\frac{1}{q}}$. Αν $A = 0$ ή $B = 0$, η ανισότητα είναι προφανής. Αν $A, B \neq 0$, εφαρμόστε την ανισότητα του Young της άσκησης 5.4.21 σε κάθε ζεύγος $\frac{f(x)}{A}$, $\frac{g(x)}{B}$. Ειδικά για την ανισότητα των Schwarz, Buniakowsky έχουμε άλλους δύο τρόπους.
Πρώτος τρόπος: Αποδείξτε ότι

$$\big(\int_a^b (f(x))^2\,dx\big)t^2 + \big(2\int_a^b f(x)g(x)\,dx\big)t + \big(\int_a^b (g(x))^2\,dx\big) = \int_a^b (tf(x) + g(x))^2\,dx \geq 0$$

για κάθε t.
Δεύτερος τρόπος: Αποδείξτε ότι

$$\int_a^b (f(x))^2\,dx \int_a^b (g(x))^2\,dx - \Big(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\Big)^2 = \tfrac{1}{2}\int_a^b \Big(\int_a^b (f(t)g(s)-g(t)f(s))^2\,ds\Big)\,dt.$$

[β] Γράψτε $\int_a^b (f(x)+g(x))^p\,dx = \int_a^b f(x)(f(x)+g(x))^{p-1}\,dx + \int_a^b g(x)(f(x)+g(x))^{p-1}\,dx$ και εφαρμόστε την ανισότητα του Hölder σε καθένα από τα $\int_a^b f(x)(f(x)+g(x))^{p-1}\,dx$ και $\int_a^b g(x)(f(x)+g(x))^{p-1}\,dx$.

Άσκηση 6.4.19. [α] *Έστω $f:[a,b]\to[c,d]$ συνεχής στο $[a,b]$ και $g:[c,d]\to\mathbb{R}$ κυρτή και συνεχής στο $[c,d]$. Αποδείξτε την ανισότητα του Jensen για ολοκληρώματα: $g\big(E(f;a,b)\big)\le E(g\circ f;a,b)$ ή, ισοδύναμα, $g\big(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\big)\le \frac{1}{b-a}\int_a^b g(f(x))\,dx$.*
Αν η g είναι, επιπλέον, γνησίως κυρτή στο $[c,d]$, αποδείξτε ότι ισχύει η ισότητα αν και μόνο αν η f είναι σταθερή στο $[a,b]$.

Λύση: Έστω $\eta=E(f;a,b)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$.
Ισχύει $c\le f(x)\le d$ για κάθε $x\in[a,b]$, οπότε $c(b-a)\le\int_a^b f(x)\,dx\le d(b-a)$ ή, ισοδύναμα, $c\le\eta\le d$.
Τώρα, έχουμε δύο περιπτώσεις.
Αν $\eta=c$ ή $\eta=d$, τότε η συνεχής f είναι σταθερή c ή d, αντιστοίχως, στο $[a,b]$. Δηλαδή, η f είναι σταθερή η στο $[a,b]$ και, επομένως, και η $g\circ f$ είναι σταθερή $g(\eta)$ στο $[a,b]$. Άρα η σχέση $g\big(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\big)\le\frac{1}{b-a}\int_a^b g(f(x))\,dx$ γράφεται $g(\eta)\le g(\eta)$ και ισχύει ως ισότητα.
Αν $c<\eta<d$, τότε υπάρχει ευθεία στήριξης από κάτω του γραφήματος της g στο σημείο $(\eta,g(\eta))$. Δηλαδή, υπάρχει αριθμός μ ώστε να ισχύει $g(y)\ge\mu(y-\eta)+g(\eta)$ για κάθε $y\in[c,d]$. Συνεπάγεται ότι ισχύει $g(f(x))\ge\mu(f(x)-\eta)+g(\eta)$ για κάθε $x\in[a,b]$ και άρα

$$\begin{aligned}\int_a^b g(f(x))\,dx &\ge \mu\int_a^b (f(x)-\eta)\,dx + g(\eta)(b-a)\\ &= \mu\Big(\int_a^b f(x)\,dx-\eta(b-a)\Big)+g(\eta)(b-a)=g(\eta)(b-a).\end{aligned}\tag{14.157}$$

Από αυτήν την σχέση συνεπάγεται η $g\big(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\big)\le\frac{1}{b-a}\int_a^b g(f(x))\,dx$.
Έστω ότι η g είναι γνησίως κυρτή στο $[c,d]$ και έστω ότι ισχύει η ισότητα $g\big(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\big)=\frac{1}{b-a}\int_a^b g(f(x))\,dx$, δηλαδή η $\int_a^b g(f(x))\,dx=g(\eta)(b-a)$.
Είδαμε ότι, αν $\eta=c$ ή $\eta=d$, τότε η f είναι σταθερή στο $[a,b]$.
Αν $c<\eta<d$, τότε από την (14.157) συνεπάγεται ότι ισχύει η ισότητα

$$\int_a^b g(f(x))\,dx=\mu\int_a^b (f(x)-\eta)\,dx+g(\eta)(b-a).$$

Επομένως, ισχύει $g(f(x))=\mu(f(x)-\eta)+g(\eta)$ για κάθε $x\in[a,b]$ και, επειδή η ευθεία στήριξης από κάτω του γραφήματος της g στο σημείο $(\eta,g(\eta))$ είναι γνήσια ευθεία στήριξης, συνεπάγεται ότι ισχύει $f(x)=\eta$ για κάθε $x\in[a,b]$.
Άρα σε κάθε περίπτωση η f είναι σταθερή στο $[a,b]$.

Άσκηση 6.4.20. *Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b]$ και έστω ότι ισχύει $f(x)\ge0$ για κάθε $x\in[a,b]$. Αν $u=\max\{f(x)\,|\,a\le x\le b\}$ αποδείξτε ότι $\big(\int_a^b (f(x))^n\,dx\big)^{1/n}\to u$.*

Λύση: Αν $u=0$, τότε η f είναι σταθερή 0 στο $[a,b]$ και άρα $\big(\int_a^b (f(x))^n\,dx\big)^{1/n}=0\to0$.
Τώρα, έστω $u>0$.
Υπάρχει $\xi\in[a,b]$ ώστε $f(\xi)=u>0$ και, θεωρώντας $\epsilon>0$ με $\epsilon\le 2u$, από τη συνέχεια της f στον ξ συνεπάγεται ότι υπάρχει $[c,d]\subseteq[a,b]$ με $d-c>0$ και $\xi\in[c,d]$ και ώστε να ισχύει

$$u-\tfrac{\epsilon}{2}<f(x)\qquad\text{για κάθε } x\in[c,d].\tag{14.158}$$

Επίσης, επειδή $(d-c)^{1/n}\to1$ όταν $n\to+\infty$, συνεπάγεται ότι υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει

$$1-\tfrac{\epsilon}{2u}<(d-c)^{1/n}\qquad\text{για κάθε } n\ge n_0.\tag{14.159}$$

Τώρα, χρησιμοποιώντας τις (14.158), (14.159), το ότι η f είναι ≥ 0 στα διαστήματα $[a,c]$ και $[d,b]$ και το ότι η f είναι $\leq u$ στο $[a,b]$, βρίσκουμε

$$u \geq \Big(\int_a^b (f(x))^n\,dx\Big)^{1/n} \geq \Big(\int_c^d (f(x))^n\,dx\Big)^{1/n} \geq \big(u-\tfrac{\epsilon}{2}\big)\big(1-\tfrac{\epsilon}{2u}\big) > u-\epsilon \quad \text{για κάθε } n \geq n_0.$$

Άρα $\big(\int_a^b (f(x))^n\,dx\big)^{1/n} \to u$.

Άσκηση 6.4.21. *Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b]$ και έστω ότι ισχύει $|f(x)| \leq \kappa \int_a^x |f(t)|\,dt$ για κάθε $x\in[a,b]$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή 0 στο $[a,b]$.*

Λύση: Υπάρχει M ώστε να ισχύει $|f(x)|\leq M$ για κάθε $x\in[a,b]$.
Θα αποδείξουμε με την αρχή της επαγωγής ότι ισχύει

$$|f(x)| \leq M\frac{\kappa^n(x-a)^n}{n!} \qquad \text{για κάθε } x\in(a,b] \text{ και κάθε } n\in\mathbb{Z}, n\geq 0. \tag{14.160}$$

Είναι προφανές ότι η (14.160) ισχύει για $n=0$.
Έστω ότι η (14.160) ισχύει για κάποιον $n\geq 0$. Τότε

$$|f(x)| \leq \kappa\int_a^x |f(t)|\,dt \leq M\frac{\kappa^{n+1}}{n!}\int_a^x (t-a)^n\,dt = M\frac{\kappa^{n+1}(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \qquad \text{για κάθε } x\in(a,b].$$

Άρα η (14.160) αποδείχτηκε.
Τώρα, με σταθερό αλλά τυχόντα $x\in(a,b]$, παίρνουμε όριο όταν $n\to+\infty$ στην (14.160) και βρίσκουμε ότι ισχύει $|f(x)|=0$ και άρα $f(x)=0$. Λόγω συνέχειας της f, ισχύει και $f(0)=0$.
Σχόλιο. Το όριο $\frac{\kappa^n(x-a)^n}{n!}\to 0$ αποδεικνύεται με το κριτήριο λόγου.

Άσκηση 6.4.22. *Αν η $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$ και συνεχής στον 0, αποδείξτε ότι $\int_0^1 f(x^n)\,dx \to f(0)$.*

Λύση: Υπάρχει M ώστε να ισχύει $|f(x)|\leq M$ για κάθε $x\in[0,1]$.
Παίρνουμε τυχόντα $\epsilon>0$ με $\epsilon\leq 2M$ και τότε, λόγω συνέχειας της f στον 0, υπάρχει $\delta>0$ ώστε να ισχύει

$$|f(x)-f(0)| \leq \tfrac{\epsilon}{2} \qquad \text{για κάθε } x\in[0,\delta]. \tag{14.161}$$

Επειδή $(1-\frac{\epsilon}{4M})^n\to 0$, συνεπάγεται ότι υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει

$$\big(1-\tfrac{\epsilon}{4M}\big)^n \leq \delta \qquad \text{για κάθε } n\geq n_0. \tag{14.162}$$

Από τις (14.161), (14.162) και από το ότι η $|f|$ είναι $\leq M$ στο $[0,1]$ συνεπάγεται ότι για κάθε $n\geq n_0$ ισχύει

$$\begin{aligned}\Big|\int_0^1 f(x^n)\,dx - f(0)\Big| &\leq \int_0^1 |f(x^n)-f(0)|\,dx\\ &= \int_0^{1-\frac{\epsilon}{4M}} |f(x^n)-f(0)|\,dx + \int_{1-\frac{\epsilon}{4M}}^1 |f(x^n)-f(0)|\,dx\\ &\leq \int_0^{1-\frac{\epsilon}{4M}} \tfrac{\epsilon}{2}\,dx + \int_{1-\frac{\epsilon}{4M}}^1 2M\,dx\\ &\leq \tfrac{\epsilon}{2}\big(1-\tfrac{\epsilon}{4M}\big) + 2M\tfrac{\epsilon}{4M} < \tfrac{\epsilon}{2}+\tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon.\end{aligned}$$

Άρα $\int_0^1 f(x^n)\,dx \to f(0)$.

Άσκηση 6.4.23. [α] *Έστω $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένες στο $[a,b]$. Αποδείξτε ότι $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx + \underline{\int_a^b} g(x)\,dx \leq \underline{\int_a^b}(f(x)+g(x))\,dx \leq \overline{\int_a^b}(f(x)+g(x))\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \overline{\int_a^b} g(x)\,dx$.*

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τις (6.12) και (6.13) και το αποτέλεσμα της άσκησης 1.2.16[γ].

Άσκηση 6.4.24. *Έστω φραγμένη $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ και $\xi_0,\ldots,\xi_m$ ώστε $a=\xi_0<\cdots<\xi_m=b$ και ώστε η f να είναι συνεχής στο (ξ_{k-1},ξ_k) για κάθε $k=1,\ldots,m$. Αποδείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Προσέξτε: μπορεί να μην υπάρχουν τα πλευρικά όρια στους ξ_k.*

Υπόδειξη: Εφαρμόστε το αποτέλεσμα της άσκησης 6.2.7.

Άσκηση 6.4.25. *Έστω η* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} (-1)^{[1/x]}, & \text{αν } 0 < x \le 1 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ *Αποδείξτε ότι η* f *είναι ολοκληρώσιμη στο* $[0,1]$ *και υπολογίστε το* $\int_0^1 f(x)\,dx$.

Λύση: Ισχύει $|f(x) = |\pm 1| = 1$ για κάθε $x \in (0,1]$ και $f(0) = 0$. Άρα η f είναι φραγμένη στο $[0,1]$.
Σε κάθε διάστημα $(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ με $n \in \mathbb{N}$ η f είναι σταθερή $(-1)^n$. Άρα, αν πάρουμε οποιονδήποτε $c \in (0,1]$ και βρούμε τον n για τον οποίο είναι $\frac{1}{n+1} < c \le \frac{1}{n}$, τότε έχουμε ότι η f είναι σταθερή σε καθένα από τα διαστήματα $[c, \frac{1}{n}], (\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}], \ldots, (\frac{1}{2}, 1]$. Δηλαδή, η f είναι τμηματικά σταθερή και άρα ολοκληρώσιμη στο $[c,1]$.
Από το αποτέλεσμα της άσκησης 6.2.7 συνεπάγεται ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$ και ότι

$$\int_0^1 f = \lim_{c \to 0+} \int_c^1 f.$$

Τώρα, θεωρώντας την ακολουθία $(\frac{1}{n+1})$ έχουμε ότι

$$\int_{1/(n+1)}^1 f \to \int_0^1 f. \tag{14.163}$$

Όμως,

$$\begin{aligned}\int_{1/(n+1)}^1 f &= \sum_{k=1}^n \int_{1/(k+1)}^{1/k} f = \sum_{k=1}^n (-1)^k \big(\tfrac{1}{k} - \tfrac{1}{k+1}\big) = \sum_{k=1}^n \big(\tfrac{(-1)^k}{k} + \tfrac{(-1)^{k+1}}{k+1}\big) \\ &= \sum_{k=1}^n \tfrac{(-1)^k}{k} + \sum_{k=1}^n \tfrac{(-1)^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=1}^n \tfrac{(-1)^k}{k} + \sum_{k=2}^{n+1} \tfrac{(-1)^k}{k} \\ &= 2\sum_{k=1}^n \tfrac{(-1)^k}{k} + 1 + \tfrac{(-1)^{n+1}}{n+1} \to -2\log 2 + 1,\end{aligned}$$

όπου για το όριο στο τέλος χρησιμοποιήσαμε το αποτέλεσμα της άσκησης 6.4.11[στ].
Άρα από την (14.163) συνεπάγεται ότι $\int_0^1 f = 1 - 2\log 2 = \log \frac{e}{4}$.

Άσκηση 6.4.26. [α] *Αποδείξτε ότι η* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *είναι ολοκληρώσιμη στο* $[a,b]$ *αν και μόνο αν για κάθε* $\epsilon > 0$ *υπάρχουν τμηματικά σταθερές συναρτήσεις* $g, h : [a,b] \to \mathbb{R}$ *ώστε να ισχύει* $g(x) \le f(x) \le h(x)$ *για κάθε* $x \in [a,b]$ *και* $\int_a^b h(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx < \epsilon$.
[β] *Έστω ότι η* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *είναι τμηματικά σταθερή. Αποδείξτε ότι για κάθε* $\epsilon > 0$ *υπάρχουν* $g, h : [a,b] \to \mathbb{R}$ *συνεχείς στο* $[a,b]$ *ώστε να ισχύει* $g(x) \le f(x) \le h(x)$ *για κάθε* $x \in [a,b]$ *και* $\int_a^b h(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx < \epsilon$.
[γ] *Αποδείξτε ότι η* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *είναι ολοκληρώσιμη στο* $[a,b]$ *αν και μόνο αν για κάθε* $\epsilon > 0$ *υπάρχουν* $g, h : [a,b] \to \mathbb{R}$ *συνεχείς στο* $[a,b]$ *ώστε να ισχύει* $g(x) \le f(x) \le h(x)$ *για κάθε* $x \in [a,b]$ *και* $\int_a^b h(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx < \epsilon$.

Λύση: Έστω ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχουν συναρτήσεις $g, h : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$ ώστε να ισχύει $g(x) \le f(x) \le h(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$ και $\int_a^b h - \int_a^b g < \epsilon$.
Παίρνουμε τυχόντα $\epsilon > 0$ και έχουμε ότι υπάρχουν συναρτήσεις g, h ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$ ώστε να ισχύει $g(x) \le f(x) \le h(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$ και

$$\int_a^b h - \int_a^b g < \tfrac{\epsilon}{2}. \tag{14.164}$$

Κατόπιν, υπάρχουν διαμερίσεις Δ', Δ'' του $[a,b]$ ώστε να ισχύει

$$\overline{\Sigma}(g;a,b;\Delta') - \underline{\Sigma}(g;a,b;\Delta') < \tfrac{\epsilon}{4}, \qquad \overline{\Sigma}(h;a,b;\Delta'') - \underline{\Sigma}(h;a,b;\Delta'') < \tfrac{\epsilon}{4}.$$

Θεωρούμε την κοινή εκλέπτυνση $\Delta = \Delta' \cup \Delta''$ και έχουμε

$$\overline{\Sigma}(g;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(g;a,b;\Delta) < \tfrac{\epsilon}{4}, \qquad \overline{\Sigma}(h;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(h;a,b;\Delta) < \tfrac{\epsilon}{4}. \tag{14.165}$$

Έχουμε και τις

$$\underline{\Sigma}(g;a,b;\Delta) \le \int_a^b g \le \overline{\Sigma}(g;a,b;\Delta), \qquad \underline{\Sigma}(h;a,b;\Delta) \le \int_a^b h \le \overline{\Sigma}(h;a,b;\Delta). \tag{14.166}$$

Από τις (14.164), (14.165), (14.166) συνεπάγεται

$$\begin{aligned}\overline{\Sigma}(h;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(g;a,b;\Delta) &= \big(\overline{\Sigma}(h;a,b;\Delta) - \textstyle\int_a^b h\big) \\ &\quad + \big(\textstyle\int_a^b h - \int_a^b g\big) + \big(\textstyle\int_a^b g - \underline{\Sigma}(g;a,b;\Delta)\big) \\ &< \tfrac{\epsilon}{4} + \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{4} = \epsilon.\end{aligned} \tag{14.167}$$

Από την απόδειξη της άσκησης 6.2.6 (δείτε τη σχέση μετά από την (14.127)) και από το ότι ισχύει $g(x) \le f(x) \le h(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$ συμπεραίνουμε ότι

$$\underline{\Sigma}(g;a,b;\Delta) \le \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) \le \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) \le \overline{\Sigma}(h;a,b;\Delta). \tag{14.168}$$

Από τις (14.167), (14.168) συνεπάγεται $\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) < \epsilon$ και άρα η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.
Αυτό το οποίο αποδείξαμε απαντά στην μία κατεύθυνση των ισοδυναμιών στα [α] και [γ], αφού οι τμηματικά σταθερές και οι συνεχείς συναρτήσεις είναι ολοκληρώσιμες. Επομένως, απομένει να αποδείξουμε το [β] και την αντίστροφη κατεύθυνση των ισοδυναμιών στα [α] και [γ].
[α] Έστω ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και έστω τυχών $\epsilon > 0$.
Τότε υπάρχει διαμέριση $\Delta = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$ του $[a,b]$ ώστε

$$\overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta) < \epsilon. \tag{14.169}$$

Αν l_k, u_k είναι οι γνωστές ποσότητες για το διάστημα $[x_{k-1}, x_k]$, τότε ισχύει $l_k \le f(x) \le u_k$ για κάθε $x \in [x_{k-1}, x_k]$.
Τώρα, σχηματίζουμε δύο τμηματικά σταθερές συναρτήσεις g, h στο $[a,b]$ ως εξής. Στο $[a, x_1)$ ορίζουμε σταθερές $g(x) = l_1$ και $h(x) = u_1$. Στο $(x_{n-1}, b]$ ορίζουμε σταθερές $g(x) = l_n$ και $h(x) = u_n$. Για κάθε $k = 2, \ldots, n-1$, στο (x_{k-1}, x_k) ορίζουμε σταθερές $g(x) = l_k$ και $h(x) = u_k$. Τέλος, για κάθε $k = 2, \ldots, n-1$, στο σημείο x_k ορίζουμε $g(x_k) = \max\{l_k, l_{k+1}\}$ και $h(x_k) = \min\{u_k, u_{k+1}\}$.
Είναι εύκολο να δει κάποιος ότι ισχύει $g(x) \le f(x) \le h(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$ και ότι

$$\begin{aligned}\textstyle\int_a^b g &= \textstyle\sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} g = \sum_{k=1}^n l_k(x_k - x_{k-1}) = \underline{\Sigma}(f;a,b;\Delta)\\ \textstyle\int_a^b h &= \textstyle\sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} h = \sum_{k=1}^n u_k(x_k - x_{k-1}) = \overline{\Sigma}(f;a,b;\Delta).\end{aligned}$$

Άρα από την (14.169) συνεπάγεται ότι $\int_a^b h - \int_a^b g < \epsilon$.
[β] Η f είναι τμηματικά σταθερή, οπότε υπάρχει διαμέριση $\Delta = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$ και αριθμοί $c_1, \ldots, c_n$ ώστε να είναι $f(x) = c_k$ σε κάθε ανοικτό διάστημα (x_{k-1}, x_k).
Έστω τυχών $\epsilon > 0$.
Τώρα θεωρούμε μικρά διαστήματα

$$[a = x_0, \eta_0], [\xi_1, \eta_1], \ldots, [\xi_{n-1}, \eta_{n-1}], [\xi_n, x_n = b]$$

έτσι ώστε να είναι ανά δύο ξένα και κάθε $[\xi_k, \eta_k]$ να περιέχει τον x_k ως εσωτερικό του σημείο. Πόσο μικρά θεωρούμε αυτά τα διαστήματα; Φροντίζουμε να έχουν το καθένα μήκος $< \frac{\epsilon}{4(n+1)M}$, όπου ο $M > 0$ είναι τέτοιος ώστε να ισχύει $|f(x)| \le M$ για κάθε $x \in [a,b]$.
Αυτομάτως, δημιουργούνται και τα "συμπληρωματικά" διαστήματα

$$[\eta_0, \xi_1], [\eta_1, \xi_2], \ldots, [\eta_{n-2}, \xi_{n-1}], [\eta_{n-1}, \xi_n].$$

Παρατηρήστε ότι κάθε $[\eta_{k-1}, \xi_k]$ περιέχεται στο αντίστοιχο ανοικτό (x_{k-1}, x_k).
Κατόπιν, θα ορίσουμε μια συνεχή συνάρτηση h στο $[a, b]$ ώστε να ισχύει $f(x) \leq h(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$ και

$$\int_a^b h - \int_a^b f < \tfrac{\epsilon}{2}. \tag{14.170}$$

Σε κάθε "συμπληρωματικό" διάστημα $[\eta_{k-1}, \xi_k]$ ορίζουμε σταθερή $h(x) = c_k$. Παρατηρήστε ότι, επειδή το $[\eta_{k-1}, \xi_k]$ περιέχεται στο (x_{k-1}, x_k), η h ταυτίζεται με την f στο διάστημα αυτό.
Αν $f(x_0) \leq c_1$, τότε στο διάστημα $[x_0, \eta_0]$ ορίζουμε σταθερή $h(x) = c_1$. Αν, όμως, $c_1 < f(x_0)$, τότε στο διάστημα $[x_0, \eta_0]$ ορίζουμε την h να είναι αφφινική με $h(x_0) = f(x_0)$ και $h(\eta_0) = c_1$.
Αν $f(x_n) \leq c_n$, τότε στο διάστημα $[\xi_n, x_n]$ ορίζουμε σταθερή $h(x) = c_n$. Αν, όμως, $c_n < f(x_n)$, τότε στο διάστημα $[\xi_n, x_n]$ ορίζουμε την h να είναι αφφινική με $h(\xi_n) = c_n$ και $h(x_n) = f(x_n)$.
Τώρα, για κάθε $k = 1, \ldots, n-1$ θα ορίσουμε την h στο διάστημα $[\xi_k, \eta_k]$ ως εξής. Αν $c_k \leq c_{k+1}$ και $f(x_k) \leq c_{k+1}$, τότε ορίζουμε την h να είναι αφφινική στο διάστημα $[\xi_k, x_k]$ με $h(\xi_k) = c_k$ και $h(x_k) = c_{k+1}$ και να είναι σταθερή $h(x) = c_{k+1}$ στο διάστημα $[x_k, \eta_k]$. Αν $c_{k+1} \leq c_k$ και $f(x_k) \leq c_k$, τότε ορίζουμε την h να είναι αφφινική στο διάστημα $[x_k, \eta_k]$ με $h(x_k) = c_k$ και $h(\eta_k) = c_{k+1}$ και να είναι σταθερή $h(x) = c_k$ στο διάστημα $[\xi_k, x_k]$. Τέλος, αν $c_k < f(x_k)$ και $c_{k+1} < f(x_k)$, τότε ορίζουμε την h να είναι αφφινική στο διάστημα $[\xi_k, x_k]$ με $h(\xi_k) = c_k$ και $h(x_k) = f(x_k)$ και να είναι αφφινική στο διάστημα $[x_k, \eta_k]$ με $h(x_k) = f(x_k)$ και $h(\eta_k) = c_{k+1}$.
Από τον τρόπο που ορίσαμε την h είναι φανερό ότι αυτή είναι συνεχής στο $[a, b]$ και ότι ισχύει $f(x) \leq h(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$.
Είναι φανερό, επίσης, ότι σε καθένα από τα $[a = x_0, \eta_0], [\xi_1, \eta_1], \ldots, [\xi_{n-1}, \eta_{n-1}], [\xi_n, x_n = b]$ ισχύει $h(x) - f(x) \leq 2M$. Άρα

$$\begin{aligned}\int_a^b h - \int_a^b f = \int_a^b (h-f) &= \int_{x_0}^{\eta_0} (h-f) + \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\xi_k}^{\eta_k} (h-f) + \int_{\xi_n}^{x_n} (h-f) \\ &\leq 2M(\eta_0 - x_0) + \sum_{k=1}^{n-1} 2M(\eta_k - \xi_k) + 2M(x_n - \xi_n) \\ &< 2M(n+1)\tfrac{\epsilon}{4(n+1)M} = \tfrac{\epsilon}{2}.\end{aligned}$$

Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να ορίσουμε συνεχή συνάρτηση g στο $[a, b]$ ώστε να ισχύει $g(x) \leq f(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$ και

$$\int_a^b f - \int_a^b g < \tfrac{\epsilon}{2}. \tag{14.171}$$

Από τις (14.170), (14.171) συνεπάγεται

$$\int_a^b h - \int_a^b g = \left(\int_a^b h - \int_a^b f\right) + \left(\int_a^b f - \int_a^b g\right) < \epsilon.$$

[γ] Έστω f ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και τυχών $\epsilon > 0$.
Από το αποτέλεσμα του [α] συνεπάγεται ότι υπάρχουν τμηματικά σταθερές g_1, h_1 στο $[a, b]$ ώστε να ισχύει $g_1(x) \leq f(x) \leq h_1(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$ και $\int_a^b h_1 - \int_a^b g_1 < \frac{\epsilon}{2}$.
Κατόπιν, από το αποτέλεσμα του [β] συνεπάγεται ότι υπάρχει συνεχής h στο $[a, b]$ ώστε να ισχύει $h_1(x) \leq h(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$ και $\int_a^b h - \int_a^b h_1 < \frac{\epsilon}{4}$. Επίσης, υπάρχει συνεχής g στο $[a, b]$ ώστε να ισχύει $g(x) \leq g_1(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$ και $\int_a^b g_1 - \int_a^b g < \frac{\epsilon}{4}$.
Επομένως, ισχύει $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$ και

$$\int_a^b h - \int_a^b g = \left(\int_a^b h - \int_a^b h_1\right) + \left(\int_a^b h_1 - \int_a^b g_1\right) + \left(\int_a^b g_1 - \int_a^b g\right) < \tfrac{\epsilon}{4} + \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{4} = \epsilon.$$

Άσκηση 6.4.27. [α] *Έστω $f : [a, b] \to [c, d]$ ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[c, d]$. Αποδείξτε ότι η $g \circ f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.*
[γ] *Έστω, για κάθε n, πεπερασμένο $A_n \subseteq [a, b]$ ώστε $A_m \cap A_n = \emptyset$ για κάθε m, n με $m \neq n$. Ορίζουμε $f(x) = \begin{cases} 1/n, & \text{αν } x \in A_n \text{ για κάποιον } n \\ 0, & \text{αν } x \in [a,b] \text{ και } x \notin A_n \text{ για κάθε } n \end{cases}$ Αποδείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και $\int_a^b f(x)\, dx = 0$.*
[δ] *Θεωρήστε $A_n = \{\frac{2k-1}{2^n} \,|\, 1 \leq k \leq 2^{n-1}\}$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι $A_n \subseteq [0, 1]$ για κάθε n και*

$A_m \cap A_n = \emptyset$ *για κάθε* m, n *με* $m \neq n$. *Αποδείξτε ότι για κάθε* $c, d \in [0,1]$ *με* $c < d$ *υπάρχει* $x \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ *ώστε* $c < x < d$. *Δηλαδή, ότι το σύνολο* $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ *είναι πυκνό στο διάστημα* $[0,1]$.

[ε] *Τώρα θα δούμε ότι η σύνθεση ολοκληρώσιμων συναρτήσεων μπορεί να μην είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση.*

Θεωρήστε την $f : [0,1] \to [0,1]$ *που ορίζεται στο* [γ] *με βάση τα συγκεκριμένα* A_n *του* [δ]. *Θεωρήστε και την* $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ *με* $g(y) = \begin{cases} 1, & \text{αν } 0 < y \leq 1 \\ 0, & \text{αν } y = 0 \end{cases}$ *Τότε οι* f, g *είναι ολοκληρώσιμες, αλλά αποδείξτε ότι η* $g \circ f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *δεν είναι ολοκληρώσιμη στο* $[0,1]$.

Λύση: [α] Έστω τυχών $\epsilon > 0$.
Η g είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[c,d]$, οπότε υπάρχει $\delta' > 0$ ώστε να ισχύει

$$|g(y') - g(y'')| < \tfrac{\epsilon}{4(b-a)} \qquad \text{για κάθε } y', y'' \in [c,d] \text{ με } |y' - y''| < \delta'. \tag{14.172}$$

Επίσης, η g είναι φραγμένη στο $[c,d]$, οπότε υπάρχει $M > 0$ ώστε να ισχύει

$$|g(y)| \leq M \qquad \text{για κάθε } y \in [c,d]. \tag{14.173}$$

Έστω $\delta = \min\{\delta', \frac{\epsilon}{8M}\}$.
Τότε υπάρχει διαμέριση $\Delta = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$ του $[a,b]$ ώστε

$$\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) < \delta^2. \tag{14.174}$$

Έστω ${u_k}', {l_k}'$ οι γνωστές ποσότητες για την f στο $[x_{k-1}, x_k]$ καθώς και u_k, l_k οι αντίστοιχες ποσότητες για την $g \circ f$.
Χωρίζουμε τους $k = 1, \ldots, n$ σε δύο κατηγορίες. Το A έχει ως στοιχεία του τους k με την ιδιότητα ${u_k}' - {l_k}' < \delta$ και το B έχει ως στοιχεία του τους υπόλοιπους k, δηλαδή αυτούς με την ιδιότητα ${u_k}' - {l_k}' \geq \delta$.
Αν $k \in A$, τότε για κάθε $x', x'' \in [x_{k-1}, x_k]$ ισχύει ${l_k}' - {u_k}' \leq f(x') - f(x'') \leq {u_k}' - {l_k}'$ και, επομένως, $|f(x') - f(x'')| \leq {u_k}' - {l_k}' < \delta \leq \delta'$, οπότε από την (14.172) συνεπάγεται

$$|g(f(x')) - g(f(x''))| < \tfrac{\epsilon}{4(b-a)}.$$

Άρα (δείτε την παρατήρηση 3 πριν από το λήμμα 6.2)

$$u_k - l_k \leq \tfrac{\epsilon}{4(b-a)} \qquad \text{αν } k \in A. \tag{14.175}$$

Αν $k \in B$, τότε, βάσει της (14.173), για κάθε $x', x'' \in [x_{k-1}, x_k]$ ισχύει $|g(f(x')) - g(f(x''))| \leq |g(f(x'))| + |g(f(x''))| \leq 2M$, οπότε, όπως πριν, συνεπάγεται

$$u_k - l_k \leq 2M \qquad \text{αν } k \in B. \tag{14.176}$$

Επίσης, από την (14.174) συνεπάγεται

$$\delta^2 > \textstyle\sum_{k \in B}({u_k}' - {l_k}')(x_k - x_{k-1}) \geq \delta \sum_{k \in B}(x_k - x_{k-1}),$$

οπότε

$$\textstyle\sum_{k \in B}(x_k - x_{k-1}) < \delta. \tag{14.177}$$

Από τις (14.175), (14.176), (14.177) συνεπάγεται

$$\begin{aligned} \overline{\Sigma}((g \circ f); a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}((g \circ f); a, b; \Delta) &= \textstyle\sum_{k=1}^{n}(u_k - l_k)(x_k - x_{k-1}) \\ &= \textstyle\sum_{k \in A}(u_k - l_k)(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k \in B}(u_k - l_k)(x_k - x_{k-1}) \\ &\leq \tfrac{\epsilon}{4(b-a)} \textstyle\sum_{k \in A}(x_k - x_{k-1}) + 2M \sum_{k \in B}(x_k - x_{k-1}) \\ &\leq \tfrac{\epsilon}{4(b-a)}(b-a) + 2M\delta \leq \tfrac{\epsilon}{4} + \tfrac{\epsilon}{4} < \epsilon. \end{aligned}$$

Άρα η $g \circ f$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.
[γ] Έστω τυχών $\epsilon > 0$.
Θεωρούμε φυσικό n_0 ώστε $\frac{1}{n_0+1} < \frac{\epsilon}{2(b-a)}$. Επίσης, θεωρούμε το $A = A_1 \cup \cdots \cup A_{n_0}$ και έστω N το πλήθος των στοιχείων του A.
Τώρα, φτιάχνουμε N μικρά διαστήματα ξένα ανά δύο ώστε το καθένα να έχει μήκος $< \frac{\epsilon}{2N}$ και να περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο του A στο εσωτερικό του, εκτός αν κάποιο στοιχείο του A είναι ο a ή ο b οπότε το αντίστοιχο μικρό διάστημα θα έχει αυτό το στοιχείο ως άκρο. Τα άκρα αυτών των διαστημάτων μαζί με τους a, b ορίζουν διαμέριση $\Delta = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$ του $[a, b]$ και έστω u_k, l_k οι γνωστές ποσότητες για την f σε κάθε υποδιάστημα $[x_{k-1}, x_k]$.
Χωρίζουμε τους $k = 1, \ldots, n$ σε δύο κατηγορίες. Το σύνολο M έχει ως στοιχεία του τους k για τους οποίους το αντίστοιχο $[x_{k-1}, x_k]$ περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο του A. Παρατηρήστε ότι το σύνολο M έχει ακριβώς N στοιχεία. Το σύνολο L περιέχει τους υπόλοιπους k, δηλαδή εκείνους για τους οποίους το αντίστοιχο $[x_{k-1}, x_k]$ δεν περιέχει κανένα στοιχείο του A.
Αν $k \in M$, τότε ισχύει $f(x) \leq 1$ για κάθε $x \in [x_{k-1}, x_k]$ και άρα

$$u_k \leq 1 \qquad \text{αν } k \in M. \tag{14.178}$$

Αν $k \in L$, τότε ισχύει $f(x) \leq \frac{1}{n_0+1}$ για κάθε $x \in [x_{k-1}, x_k]$ και άρα

$$u_k \leq \tfrac{1}{n_0+1} \qquad \text{αν } k \in L. \tag{14.179}$$

Από τις (14.178), (14.179) συνεπάγεται

$$\begin{aligned}\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) &= \textstyle\sum_{k \in M} u_k(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k \in L} u_k(x_k - x_{k-1}) \\ &\leq \textstyle\sum_{k \in M}(x_k - x_{k-1}) + \frac{1}{n_0+1} \sum_{k \in L}(x_k - x_{k-1}) < N\frac{\epsilon}{2N} + \frac{1}{n_0+1}(b-a) < \epsilon.\end{aligned}$$

Τέλος, ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [x_{k-1}, x_k]$ και άρα είναι $l_k \geq 0$ για κάθε k, οπότε

$$\underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) = \textstyle\sum_{k=1}^{n} l_k(x_k - x_{k-1}) \geq 0.$$

Συνεπάγεται $\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) < \epsilon$ και άρα η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.
[δ] Αν $1 \leq k \leq 2^{n-1}$, τότε $0 < \frac{2k-1}{2^n} \leq \frac{2^n-1}{2^n} < 1$. Άρα είναι $A_n \subseteq (0, 1)$ για κάθε n.
Αν $n < m$ και $\frac{2k-1}{2^n} \in A_n$ και $\frac{2l-1}{2^m} \in A_m$, τότε από την $\frac{2k-1}{2^n} = \frac{2l-1}{2^m}$ συνεπάγεται $2^{m-n}(2k-1) = 2l - 1$ το οποίο είναι άτοπο και άρα $A_n \cap A_m = \emptyset$.
Τώρα, έστω $c, d \in [0, 1]$ με $c < d$. Τότε υπάρχει n ώστε $\frac{1}{2^{n-1}} < d - c$ και θεωρούμε τον $k = [2^{n-1}c + \frac{1}{2}] + 1$. Τότε είναι

$$c = \tfrac{2(2^{n-1}c+\frac{1}{2})-1}{2^n} < \tfrac{2k-1}{2^n} \leq \tfrac{2((2^{n-1}c+\frac{1}{2})+1)-1}{2^n} = c + \tfrac{1}{2^{n-1}} < d.$$

Άρα το στοιχείο $\frac{2k-1}{2^n}$ του A_n ανήκει στο διάστημα (c, d).
[ε] Αν $x \in A$, τότε είναι $f(x) > 0$ και άρα $g(f(x)) = 1$. Αν $x \in [0, 1] \setminus A$, τότε είναι $f(x) = 0$ και άρα $g(f(x)) = 0$.
Τώρα, έστω οποιαδήποτε διαμέριση $\Delta = \{0 = x_0, \ldots, x_n = 1\}$ του $[0, 1]$ και u_k, l_k οι γνωστές ποσότητες για την $g \circ f$ στο αντίστοιχο $[x_{k-1}, x_k]$.
Επειδή, βάσει του αποτελέσματος του [δ], το A είναι πυκνό στο $[0, 1]$, σε κάθε $[x_{k-1}, x_k]$ υπάρχει τουλάχιστον ένα στοιχείο του A και σ' αυτό το σημείο η $g \circ f$ έχει τιμή 1. Επειδή όλες οι τιμές της $g \circ f$ είναι ≤ 1, συνεπάγεται ότι $u_k = 1$.
Είναι γνωστό ότι κάθε διάστημα (όχι μονοσύνολο) είναι υπεραριθμήσιμο. (Δείτε την άσκηση **??**.)
Επειδή το A είναι αριθμήσιμο, σε κάθε $[x_{k-1}, x_k]$ υπάρχει τουλάχιστον ένα στοιχείο εκτός του A και σ' αυτό το σημείο η $g \circ f$ έχει τιμή 0. Επειδή όλες οι τιμές της $g \circ f$ είναι ≥ 0, συνεπάγεται ότι $l_k = 0$.
Άρα

$$\underline{\Sigma}(g \circ f; 0, 1; \Delta) = \textstyle\sum_{k=1} l_k(x_k - x_{k-1}) = 0, \quad \overline{\Sigma}(g \circ f; 0, 1; \Delta) = \sum_{k=1} u_k(x_k - x_{k-1}) = 1.$$

Επειδή αυτό ισχύει για κάθε διαμέριση Δ του $[0,1]$, συνεπάγεται $\underline{\int}_0^1(g\circ f)=0$ και $\overline{\int}_0^1(g\circ f)=1$, οπότε η $g\circ f$ δεν είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$.

Άσκηση 6.4.28. *Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ και έστω ότι ισχύει $|f'(x)|\leq M$ για κάθε $x\in[a,b]$. Αποδείξτε ότι $\left|\int_a^b f(x)\,dx-f(\frac{a+b}{2})(b-a)\right|\leq\frac{(b-a)^2M}{4}$.*
Αν $x_k=a+k\frac{b-a}{n}$ για $k=0,\ldots,n$ και $\xi_k=\frac{x_{k-1}+x_k}{2}$ και $\eta_k=f(\xi_k)$ για $k=1,\ldots,n$, αποδείξτε ότι

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx-(\eta_1+\cdots+\eta_n)\tfrac{b-a}{n}\right|\leq\tfrac{1}{4}\tfrac{(b-a)^2M}{n}.$$

Λύση: Το πρώτο ερώτημα. Προσεγγίζουμε την f με τη σταθερή συνάρτηση (πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού 0) $P(x)=f(\xi)$, όπου $\xi=\frac{a+b}{2}$. Αυτό γίνεται ως εξής.
Για κάθε $x\in[a,b]$ υπάρχει ζ ανάμεσα στους x και ξ ώστε

$$f(x)-P(x)=f(x)-f(\xi)=f'(\zeta)(x-\xi).$$

Άρα ισχύει

$$|f(x)-P(x)|\leq M|x-\xi|\qquad\text{για κάθε } x\in[a,b].$$

Επειδή $\int_a^b P(x)\,dx=f(\xi)(b-a)$, έχουμε

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx-f(\xi)(b-a)\right|=\left|\int_a^b(f(x)-P(x))\,dx\right|\leq M\int_a^b|x-\xi|\,dx=\tfrac{(b-a)^2M}{4}.$$

Το δεύτερο ερώτημα. Εφαρμόζοντας το προηγούμενο αποτέλεσμα σε κάθε $[x_{k-1},x_k]$, βρίσκουμε

$$\left|\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx-\eta_k\tfrac{b-a}{n}\right|\leq\tfrac{(b-a)^2M}{4n^2}\qquad\text{για κάθε } k.$$

Από την ισότητα

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx+\cdots+\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx$$

και από την τριγωνική ανισότητα των απόλυτων τιμών βρίσκουμε

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx-(\eta_1+\cdots+\eta_n)\tfrac{b-a}{n}\right|\leq n\tfrac{(b-a)^2M}{4n^2}=\tfrac{(b-a)^2M}{4n}.$$

Άσκηση 6.4.29. *Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ και έστω ότι ισχύει $|f''(x)|\leq M$ για κάθε $x\in[a,b]$. Αποδείξτε ότι $\left|\int_a^b f(x)\,dx-\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)\right|\leq\frac{(b-a)^3M}{12}$.*
Αν $x_k=a+k\frac{b-a}{n}$ και $y_k=f(x_k)$ για $k=0,\ldots,n$, αποδείξτε ότι

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx-\left(\tfrac{y_0}{2}+y_1+\cdots+y_{n-1}+\tfrac{y_n}{2}\right)\tfrac{b-a}{n}\right|\leq\tfrac{1}{12}\tfrac{(b-a)^3M}{n^2}.$$

Λύση: Το πρώτο ερώτημα. Προσεγγίζουμε την f με πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού 1, η οποία ταυτίζεται με την f στα άκρα a και b του διαστήματος. Η συνάρτηση αυτή είναι η

$$P(x)=f(a)+\tfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

και η προσέγγιση γίνεται ως εξής.
Για κάθε $x\in(a,b)$ ορίζουμε τον αριθμό c μέσω της ισότητας

$$f(x)-P(x)=c(x-a)(x-b).$$

Ορίζουμε και τη συνάρτηση $g(t)=f(t)-P(t)-c(t-a)(t-b)$ στο $[a,b]$.
Τότε είναι $g(a)=g(x)=g(b)=0$, οπότε υπάρχει $\zeta\in(a,b)$ ώστε $g''(\zeta)=0$. Όμως, είναι $g''(t)=f''(t)-2c$ και άρα $c=\frac{f''(\zeta)}{2}$. Έχουμε, λοιπόν, ότι για κάθε $x\in(a,b)$ υπάρχει $\zeta\in(a,b)$ ώστε

$$f(x)-P(x)=\tfrac{f''(\zeta)}{2}(x-a)(x-b).$$

Άρα ισχύει
$$|f(x)-P(x)| \leq \tfrac{M}{2}(x-a)(b-x) \qquad \text{για κάθε } x\in[a,b].$$
(Αποδείξαμε την ανισότητα για $x\in(a,b)$, αλλά ισχύει, προφανώς, και για $x=a$ και $x=b$.)
Τώρα, είναι $\int_a^b P(x)\,dx = \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$ και άρα
$$\big|\int_a^b f(x)\,dx - \tfrac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)\big| = \big|\int_a^b (f(x)-P(x))\,dx\big| \leq \tfrac{M}{2}\int_a^b (x-a)(b-x)\,dx = \tfrac{(b-a)^3M}{12}.$$
Το δεύτερο ερώτημα. Εφαρμόζοντας το προηγούμενο αποτέλεσμα σε κάθε $[x_{k-1},x_k]$, βρίσκουμε
$$\big|\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx - \tfrac{y_{k-1}+y_k}{2}\tfrac{b-a}{n}\big| \leq \tfrac{(b-a)^3M}{12n^3} \qquad \text{για κάθε } k.$$
Αθροίζοντας τα ολοκληρώματα σε όλα τα υποδιαστήματα και χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα των απόλυτων τιμών, βρίσκουμε
$$\big|\int_a^b f(x)\,dx - \big(\tfrac{y_0}{2}+y_1+\cdots+y_{n-1}+\tfrac{y_n}{2}\big)\tfrac{b-a}{n}\big| \leq n\tfrac{(b-a)^3M}{12n^3} = \tfrac{(b-a)^3M}{12n^2}.$$
Άσκηση 6.4.30. *Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ και έστω ότι ισχύει $|f''(x)|\leq M$ για κάθε $x\in[a,b]$.*
Αποδείξτε ότι $|\int_a^b f(x)\,dx - f(\frac{a+b}{2})(b-a)| \leq \frac{(b-a)^3M}{24}$.
Αν $x_k = a+k\frac{b-a}{n}$ για $k=0,\ldots,n$ και $\xi_k = \frac{x_{k-1}+x_k}{2}$ και $\eta_k = f(\xi_k)$ για $k=1,\ldots,n$, αποδείξτε ότι
$$\big|\int_a^b f(x)\,dx - (\eta_1+\cdots+\eta_n)\tfrac{b-a}{n}\big| \leq \tfrac{1}{24}\,\tfrac{(b-a)^3M}{n^2}.$$
Λύση: Το πρώτο ερώτημα. Προσεγγίζουμε την f με πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού 1, η οποία ταυτίζεται με την f στο σημείο $\xi=\frac{a+b}{2}$ και έχει την ίδια παράγωγο με την f στο ίδιο σημείο. Η συνάρτηση αυτή είναι η
$$P(x) = f(\xi) + f'(\xi)(x-\xi)$$
και η προσέγγιση γίνεται μέσω του τύπου του Taylor ως εξής.
Για κάθε $x\in[a,b]$ υπάρχει ζ ανάμεσα στους x και ξ ώστε
$$f(x) = f(\xi)+f'(\xi)(x-\xi)+\tfrac{f''(\zeta)}{2}(x-\xi)^2$$
και, επομένως, ισχύει
$$|f(x)-P(x)| \leq \tfrac{M}{2}(x-\xi)^2 \qquad \text{για κάθε } x\in[a,b].$$
Επειδή $\int_a^b P(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$, έχουμε
$$\big|\int_a^b f(x)\,dx - f(\xi)(b-a)\big| = \big|\int_a^b (f(x)-P(x))\,dx\big| \leq \tfrac{M}{2}\int_a^b (x-\xi)^2\,dx = \tfrac{(b-a)^3M}{24}.$$
Το δεύτερο ερώτημα. Εφαρμόζουμε το προηγούμενο αποτέλεσμα σε κάθε $[x_{k-1},x_k]$ και βρίσκουμε
$$\big|\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx - \eta_k\tfrac{b-a}{n}\big| \leq \tfrac{(b-a)^3M}{24n^3} \qquad \text{για κάθε } k.$$
Από την τριγωνική ανισότητα των απόλυτων τιμών,
$$\big|\int_a^b f(x)\,dx - (\eta_1+\cdots+\eta_n)\tfrac{b-a}{n}\big| \leq n\tfrac{(b-a)^3M}{24n^3} = \tfrac{(b-a)^3M}{24n^2}.$$
Άσκηση 6.4.31. [β] *Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ και έστω ότι ισχύει $|f^{(4)}(x)|\leq M$ για κάθε $x\in[a,b]$.*
Αποδείξτε ότι $|\int_a^b f(x)\,dx - (f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b))\frac{b-a}{6}| \leq \frac{(b-a)^5M}{2880}$.
Αν $x_k = a+k\frac{b-a}{n}$ και $y_k=f(x_k)$ για $k=0,\ldots,n$ και $\xi_k=\frac{x_{k-1}+x_k}{2}$ και $\eta_k=f(\xi_k)$ για $k=1,\ldots,n$, αποδείξτε ότι
$$\big|\int_a^b f(x)\,dx - \big(y_0+y_n+2(y_1+\cdots+y_{n-1})+4(\eta_1+\cdots+\eta_n)\big)\,\tfrac{b-a}{6n}\big| \leq \tfrac{1}{2880}\,\tfrac{(b-a)^5M}{n^4}.$$

Λύση: Το πρώτο ερώτημα. Χρησιμοποιούμε την πολυωνυμική συνάρτηση τρίτου βαθμού, η οποία ταυτίζεται με την f στα σημεία a, $\xi = \frac{a+b}{2}$ και b και έχει ίδια παράγωγο με την f στον ξ. Η συνάρτηση αυτή είναι η

$$P(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)(x-\xi) + c_3(x-a)(x-\xi)(x-b),$$

όπου οι αριθμοί c_0, c_1, c_2, c_3 υπολογίζονται διαδοχικά από τις ισότητες

$$\begin{aligned} f(a) &= c_0 \\ f(\xi) &= c_0 + c_1(\xi - a) \\ f(b) &= c_0 + c_1(b-a) + c_2(b-a)(b-\xi) \\ f'(\xi) &= c_1 + c_2(\xi-a) + c_3(\xi-a)(\xi-b) \end{aligned}$$

(Δεν χρειάζεται να υπολογίσουμε τώρα αυτούς τους αριθμούς.) Τώρα προσεγγίζουμε την f με την P ως εξής.
Έστω $x \in (a,b)$, $x \neq \xi$. Ορίζουμε τον αριθμό c μέσω της ισότητας

$$f(x) - P(x) = c(x-a)(x-\xi)^2(x-b).$$

Ορίζουμε και τη συνάρτηση $g(t) = f(t) - P(t) - c(t-a)(t-\xi)^2(t-b)$ στο $[a,b]$.
Τότε είναι $g(a) = g(\xi) = g(x) = g(b) = 0$ και $g'(\xi) = 0$. Από το θεώρημα του Rolle προκύπτει ότι υπάρχει $\zeta \in (a,b)$ ώστε $g^{(4)}(\zeta) = 0$. Εύκολα βλέπουμε ότι $g^{(4)}(\zeta) = f^{(4)}(\zeta) - 24c$ και, επομένως, $c = \frac{f^{(4)}(\zeta)}{24}$. Άρα για κάθε $x \in (a,b)$, $x \neq \xi$ υπάρχει $\zeta \in (a,b)$ ώστε να είναι

$$f(x) - P(x) = \tfrac{f^{(4)}(\zeta)}{24}(x-a)(x-\xi)^2(x-b),$$

οπότε ισχύει

$$|f(x) - P(x)| \leq \tfrac{M}{24}(x-a)(x-\xi)^2(b-x) \qquad \text{για κάθε } x \in [a,b].$$

(Αποδείξαμε την ανισότητα για $x \in (a,b)$, $x \neq \xi$, αλλά ισχύει και για $x = a$, $x = \xi$ και $x = b$.)
Σύμφωνα με το αποτέλεσμα του [α] είναι

$$\textstyle\int_a^b P(x)\,dx = \frac{P(a)+4P(\xi)+P(b)}{6}(b-a) = \frac{f(a)+4f(\xi)+f(b)}{6}(b-a)$$

και άρα

$$\begin{aligned} \big|\textstyle\int_a^b f(x)\,dx - \frac{f(a)+4f(\xi)+f(b)}{6}(b-a)\big| &= \big|\textstyle\int_a^b (f(x) - P(x))\,dx\big| \\ &\leq \tfrac{M}{24}\textstyle\int_a^b (x-a)(x-\xi)^2(b-x)\,dx = \frac{(b-a)^5 M}{2880}. \end{aligned}$$

Το δεύτερο ερώτημα. Εφαρμόζουμε το προηγούμενο αποτέλεσμα σε κάθε υποδιάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ και βρίσκουμε

$$\big|\textstyle\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx - (y_{k-1} + 4\eta_k + y_k)\frac{b-a}{6n}\big| \leq \frac{(b-a)^5 M}{2880 n^5} \qquad \text{για κάθε } k.$$

Προσθέτοντας και χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα, βρίσκουμε

$$\big|\textstyle\int_a^b f(x)\,dx - \big((y_0 + 4\eta_1 + y_1) + \cdots + (y_{n-1} + 4\eta_n + y_n)\big)\frac{b-a}{6n}\big| \leq n\frac{(b-a)^5 M}{2880 n^5} = \frac{(b-a)^5 M}{2880 n^4}.$$

Άσκηση 6.4.32. Έστω $a < b$ και $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ ώστε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [a,b]$. Αποδείξτε ότι $\int_a^b f > 0$.

Υπόδειξη: Δείτε την άσκηση 6.2.9.

Άσκηση 6.5.1. [α] *Έστω f ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Αποδείξτε ότι* $\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\big(a + k\frac{b-a}{n}\big) \to \int_a^b f$.

[β] *Έστω φυσικός $p \geq 2$. Αποδείξτε ότι $\sum_{k=n+1}^{pn} \frac{1}{k} \to \int_1^p \frac{1}{x}\, dx = \log p$.*

Λύση: [α] Θεωρούμε τη διαμέριση $\Delta_n = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$ του $[a, b]$ σε n ισομήκη υποδιαστήματα. Δηλαδή, παίρνουμε $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$ για $k = 0, \ldots, n$.
Τότε είναι $x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$ για κάθε k, οπότε $w(\Delta_n) = \frac{b-a}{n} \to 0$.
Για κάθε Δ_n παίρνουμε ως επιλογή Ξ_n ενδιάμεσων σημείων τα δεξιά άκρα των υποδιαστημάτων που ορίζει η Δ_n. Δηλαδή, παίρνουμε $\xi_k = x_k = a + k\frac{b-a}{n}$ για $k = 1, \ldots, n$.
Επειδή $w(\Delta_n) \to 0$ και η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$, συνεπάγεται $\Sigma(f; a, b; \Delta_n, \Xi_n) \to \int_a^b f$ και η απόδειξη τελειώνει παρατηρώντας ότι

$$\Sigma(f; a, b; \Delta_n, \Xi_n) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\big(a + k\tfrac{b-a}{n}\big).$$

[β] Θα γράψουμε το άθροισμα $\sum_{k=n+1}^{pn} \frac{1}{k}$ στη μορφή $\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(a+k\frac{b-a}{n})$ για να εφαρμόσουμε το αποτέλεσμα του [α].
Βλέπουμε ότι το $\sum_{k=n+1}^{pn} \frac{1}{k}$ έχει $pn - n = (p-1)n$ προσθετέους. Τώρα, γράφουμε

$$\sum_{k=n+1}^{pn} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{pn-n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{(p-1)n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \frac{p-1}{(p-1)n} \sum_{k=1}^{(p-1)n} \frac{1}{1+k\frac{p-1}{(p-1)n}}.$$

Θέτουμε $m = (p-1)n$ και τότε

$$\sum_{k=n+1}^{pn} \frac{1}{k} = \frac{p-1}{m} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{1+k\frac{p-1}{m}}.$$

Τώρα παρατηρούμε ότι το τελευταίο άθροισμα είναι το $\frac{b-a}{m} \sum_{k=1}^{m} f(a+k\frac{b-a}{m})$ για τη συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$ στο διάστημα $[1, p]$. Φυσικά, $m \to +\infty$ όταν $n \to +\infty$, οπότε

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{pn} \frac{1}{k} = \lim_{m\to+\infty} \frac{p-1}{m} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{1+k\frac{p-1}{m}} = \int_1^p \frac{1}{x}\, dx = \log p.$$

Άσκηση 6.5.2. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και οποιαδήποτε ακολουθία (Δ_n) διαμερίσεων του $[a, b]$ ώστε $w(\Delta_n) \to 0$. Αποδείξτε ότι $\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta_n) \to \int_a^b f(x)\, dx$.*

Λύση: Σύμφωνα με το λήμμα 6.6, για κάθε Δ_n υπάρχει κάποια επιλογή Ξ_n ενδιάμεσων σημείων για την Δ_n ώστε

$$\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta_n) - \frac{1}{n} < \Sigma(f; a, b; \Delta_n; \Xi_n) \leq \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta_n).$$

Επειδή $\Sigma(f; a, b; \Delta_n; \Xi_n) \to \int_a^b f(x)\, dx$, συνεπάγεται $\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta_n) \to \int_a^b f(x)\, dx$.

Άσκηση 6.5.3. *Αποδείξτε ότι η $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ αν και μόνο αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε δύο διαμερίσεις Δ_1, Δ_2 του $[a, b]$ με $w(\Delta_1) < \delta$, $w(\Delta_2) < \delta$ και κάθε δύο επιλογές Ξ_1, Ξ_2 ενδιάμεσων σημείων των Δ_1, Δ_2, αντιστοίχως, να είναι $|\Sigma(f; a, b; \Delta_1; \Xi_1) - \Sigma(f; a, b; \Delta_2; \Xi_2)| < \epsilon$.*

Λύση: Έστω ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και έστω τυχών $\epsilon > 0$.
Τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε διαμέριση Δ του $[a, b]$ με $w(\Delta) < \delta$ και κάθε επιλογή Ξ ενδιάμεσων σημείων για την Δ ισχύει $|\Sigma(f; a, b; \Delta; \Xi) - \int_a^b f| < \frac{\epsilon}{2}$.
Άρα για κάθε δύο διαμερίσεις Δ_1, Δ_2 του $[a, b]$ με $w(\Delta_1) < \delta$, $w(\Delta_2) < \delta$ και κάθε δύο επιλογές Ξ_1, Ξ_2 ενδιάμεσων σημείων των Δ_1, Δ_2, αντιστοίχως, ισχύει $|\Sigma(f; a, b; \Delta_1; \Xi_1) - \int_a^b f| < \frac{\epsilon}{2}$ και $|\Sigma(f; a, b; \Delta_2; \Xi_2) - \int_a^b f| < \frac{\epsilon}{2}$ και άρα

$$\begin{aligned} |\Sigma(f; a, b; \Delta_1; \Xi_1) - \Sigma(f; a, b; \Delta_2; \Xi_2)| &\leq \big|\Sigma(f; a, b; \Delta_1; \Xi_1) - \textstyle\int_a^b f\big| \\ &\quad + \big|\Sigma(f; a, b; \Delta_2; \Xi_2) - \textstyle\int_a^b f\big| \\ &< \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Αντιστρόφως, έστω ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε δύο διαμερίσεις Δ_1, Δ_2 του $[a, b]$ με $w(\Delta_1) < \delta$, $w(\Delta_2) < \delta$ και κάθε δύο επιλογές Ξ_1, Ξ_2 ενδιάμεσων σημείων των Δ_1, Δ_2,

αντιστοίχως, να είναι $|\Sigma(f;a,b;\Delta_1;\Xi_1) - \Sigma(f;a,b;\Delta_2;\Xi_2)| < \epsilon$.
Θεωρούμε μια οποιαδήποτε ακολουθία διαμερίσεων (Δ_n) του $[a,b]$ με $w(\Delta_n) \to 0$.
Μπορούμε, για παράδειγμα, να πάρουμε ως Δ_n την διαμέριση του $[a,b]$ σε n ισομήκη υποδιαστήματα, οπότε θα έχουμε $w(\Delta_n) = \frac{b-a}{n} \to 0$.
Για κάθε n θεωρούμε μια οποιαδήποτε επιλογή Ξ_n ενδιάμεσων σημείων για την Δ_n. (Για παράδειγμα, τα δεξιά άκρα των υποδιαστημάτων της Δ_n.)
Τώρα, έστω τυχών $\epsilon > 0$. Θεωρούμε και τον αντίστοιχο δ της υπόθεσης. Τότε υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $w(\Delta_n) < \delta$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα για κάθε $n, m \geq n_0$ ισχύει $w(\Delta_n) < \delta$ και $w(\Delta_m) < \delta$, οπότε, βάσει της υπόθεσης, ισχύει

$$|\Sigma(f;a,b;\Delta_n;\Xi_n) - \Sigma(f;a,b;\Delta_m;\Xi_m)| < \epsilon \qquad \text{για κάθε } n, m \geq n_0.$$

Αυτό σημαίνει ότι η ακολουθία αριθμών $\big(\Sigma(f;a,b;\Delta_n;\Xi_n)\big)$ είναι ακολουθία Cauchy και, επομένως, συγκλίνει. Άρα υπάρχει αριθμός $\mathcal{I}$ ώστε να είναι

$$\Sigma(f;a,b;\Delta_n;\Xi_n) \to \mathcal{I}. \tag{14.180}$$

Έστω, πάλι, $\epsilon > 0$. Τώρα, θεωρούμε τον δ ο οποίος αντιστοιχεί, βάσει της υπόθεσης, στον $\frac{\epsilon}{2}$.
Παίρνουμε οποιαδήποτε διαμέριση Δ του $[a,b]$ με $w(\Delta) < \delta$ και οποιαδήποτε επιλογή Ξ ενδιάμεσων σημείων για την Δ.
Παίρνουμε και μια Δ_n, από αυτές που θεωρήσαμε προηγουμένως, έτσι ώστε να είναι

$$w(\Delta_n) < \delta \qquad \text{και} \qquad |\Sigma(f;a,b;\Delta_n;\Xi_n) - \mathcal{I}| < \tfrac{\epsilon}{2}. \tag{14.181}$$

Αυτό είναι εφικτό διότι $w(\Delta_n) \to 0$ και λόγω της (14.180).
Τώρα, από $w(\Delta) < \delta$ και $w(\Delta_n) < \delta$ συνεπάγεται

$$|\Sigma(f;a,b;\Delta;\Xi) - \Sigma(f;a,b;\Delta_n;\Xi_n)| < \tfrac{\epsilon}{2}.$$

Σε συνδυασμό με την (14.181) έχουμε

$$\begin{aligned} |\Sigma(f;a,b;\Delta;\Xi) - \mathcal{I}| &\leq |\Sigma(f;a,b;\Delta;\Xi) - \Sigma(f;a,b;\Delta_n;\Xi_n)| + |\Sigma(f;a,b;\Delta_n;\Xi_n) - \mathcal{I}| \\ &< \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Άρα για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε διαμέριση Δ του $[a,b]$ με $w(\Delta) < \delta$ και οποιαδήποτε επιλογή Ξ ενδιάμεσων σημείων για την Δ ισχύει $|\Sigma(f;a,b;\Delta;\Xi) - \mathcal{I}| < \epsilon$. Συμπεραίνουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και $\int_a^b f = \mathcal{I}$.

Άσκηση 6.5.5. *Αποδείξτε την ανισότητα Jensen για ολοκληρώματα, που βρίσκεται στην άσκηση 6.4.19[α], όταν η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ (και η g είναι συνεχής), χρησιμοποιώντας την αντίστοιχη ανισότητα για αθροίσματα, που βρίσκεται στην άσκηση 5.5.39.*

Λύση: Έστω οποιαδήποτε διαμέριση $\Delta = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$ του $[a,b]$ και οποιαδήποτε επιλογή ενδιάμεσων σημείων $\Xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ για την Δ.
Ορίζουμε

$$\mu_k = \tfrac{x_k - x_{k-1}}{b-a} \qquad \text{για } k = 1, \ldots, n,$$

οπότε είναι $\mu_1, \ldots, \mu_n > 0$ και $\mu_1 + \cdots + \mu_n = 1$.
Από το αποτέλεσμα της άσκησης 5.5.39 έχουμε

$$g\big(\tfrac{x_1-x_0}{b-a} f(\xi_1) + \cdots + \tfrac{x_n-x_{n-1}}{b-a} f(\xi_n)\big) \leq \tfrac{x_1-x_0}{b-a} g(f(\xi_1)) + \cdots + \tfrac{x_n-x_{n-1}}{b-a} g(f(\xi_n))$$

ή, ισοδύναμα,

$$g\big(\tfrac{1}{b-a}\Sigma(f;a,b;\Delta,\Xi)\big) \leq \tfrac{1}{b-a}\Sigma(g \circ f;a,b;\Delta,\Xi). \tag{14.182}$$

Επειδή ισχύει $c \leq f(x) \leq d$ για κάθε $x \in [a,b]$, συνεπάγεται $c \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq d$ και άρα η g είναι συνεχής στον αριθμό $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$.

Επίσης, σύμφωνα με την άσκηση 6.4.27[α], η $g\circ f$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.
Τώρα, θεωρούμε οποιαδήποτε ακολουθία διαμερίσεων (Δ_k) του $[a,b]$ ώστε $w(\Delta_k)\to 0$ και, για κάθε k, μια οποιαδήποτε επιλογή ενδιάμεσων σημείων Ξ_k για την Δ_k. Σύμφωνα με την πρόταση 6.15, συνεπάγεται

$$\tfrac{1}{b-a}\Sigma(f;a,b;\Delta_k,\Xi_k)\to\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx,\quad \tfrac{1}{b-a}\Sigma(g\circ f;a,b;\Delta_k,\Xi_k)\to\tfrac{1}{b-a}\int_a^b g(f(x))\,dx.$$

Από αυτά τα όρια και την (14.182) συμπεραίνουμε ότι $g\big(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\big)\le\frac{1}{b-a}\int_a^b g(f(x))\,dx$.
Σχόλιο. Μπορούμε να αποδείξουμε, μέσω αυτής της διαδικασίας, τα συμπεράσματα σχετικά με την περίπτωση της ισότητας όταν η g είναι γνησίως κυρτή;

Άσκηση 6.5.6. *Θεωρούμε καμπύλη Γ στο xy-επίπεδο με παραμετρικές εξισώσεις $x=x(t)$ και $y=y(t)$, όπου η παράμετρος t διατρέχει το διάστημα $[a,b]$ και οι συναρτήσεις $x,y:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχείς στο $[a,b]$. Θεωρούμε οποιαδήποτε διαμέριση $\Delta=\{t_0=a,t_1,\dots,t_{n-1},t_n=b\}$ του $[a,b]$ και σχηματίζουμε την πολυγωνική γραμμή Γ_Δ στο xy-επίπεδο με διαδοχικές κορυφές τα σημεία $(x_k,y_k)=(x(t_k),y(t_k))$ για $k=0,1,\dots,n-1,n$. Το μήκος αυτής της πολυγωνικής γραμμής είναι, φυσικά, ίσο με $l(\Gamma_\Delta)=\sum_{k=1}^n\sqrt{(x_k-x_{k-1})^2+(y_k-y_{k-1})^2}$.*
Στη Γεωμετρία, ως μήκος της καμπύλης Γ ορίζεται το $l(\Gamma)=\sup\big\{l(\Gamma_\Delta)\,|\,\Delta$ διαμέριση του $[a,b]\big\}$.
Αν έχουμε καμπύλες Γ_1 με παραμετρικές εξισώσεις $x=x_1(t)$ και $y=y_1(t)$ στο διάστημα $[a,b]$ και Γ_2 με παραμετρικές εξισώσεις $x=x_2(t)$ και $y=y_2(t)$ στο διάστημα $[b,c]$ και αν $x_1(b)=x_2(b)$, $y_1(b)=y_2(b)$, ορίζουμε την καμπύλη Γ με παραμετρικές εξισώσεις $x=x(t)$ και $y=y(t)$ στο $[a,c]$, όπου $x(t)=\begin{cases}x_1(t), & \text{αν } t\in[a,b]\\ x_2(t), & \text{αν } t\in[b,c]\end{cases}$ και $y(t)=\begin{cases}y_1(t), & \text{αν } t\in[a,b]\\ y_2(t), & \text{αν } t\in[b,c]\end{cases}$ Η Γ ονομάζεται άθροισμα των Γ_1 και Γ_2 και συμβολίζεται $\Gamma_1\dot{+}\Gamma_2$.
Αποδείξτε την αθροιστικότητα του μήκους, δηλαδή ότι $l(\Gamma_1\dot{+}\Gamma_2)=l(\Gamma_1)+l(\Gamma_2)$.
Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b]$. Θεωρούμε την ειδικού τύπου καμπύλη Γ στο xy-επίπεδο με παραμετρική εξίσωση $y=f(x)$, όπου η παράμετρος x διατρέχει το διάστημα $[a,b]$ (δηλαδή, με παραμετρικές εξισώσεις $x=t$ και $y=f(t)$ στο $[a,b]$). Αν η $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ έχει παράγωγο ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, αποδείξτε ότι $l(\Gamma)=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$.

Λύση: Το πρώτο ερώτημα. Αρχικά γράφουμε για απλούστευση $\Gamma=\Gamma_1\dot{+}\Gamma_2$.
Θεωρούμε οποιαδήποτε διαμέριση Δ_1 του $[a,b]$ και οποιαδήποτε διαμέριση Δ_2 του $[b,c]$. Τότε η $\Delta=\Delta_1\cup\Delta_2$ είναι διαμέριση του $[a,c]$ (και ένα από τα Δ-σημεία είναι το b).
Έτσι σχηματίζονται οι αντίστοιχες πολυγωνικές γραμμές $\Gamma_{\Delta_1},\Gamma_{\Delta_2}$ και Γ_Δ και είναι $\Gamma_\Delta=\Gamma_{\Delta_1}\cup\Gamma_{\Delta_2}$ και άρα

$$l(\Gamma_{\Delta_1})+l(\Gamma_{\Delta_2})=l(\Gamma_\Delta).$$

Από τον ορισμό του μήκους καμπύλης συνεπάγεται

$$l(\Gamma_{\Delta_1})+l(\Gamma_{\Delta_2})\le l(\Gamma).$$

Αν $l(\Gamma)<+\infty$, τότε έχουμε ότι για κάθε Δ_1 ισχύει $l(\Gamma_{\Delta_1})\le l(\Gamma)-l(\Gamma_{\Delta_2})$ και, επομένως, $l(\Gamma_1)\le l(\Gamma)-l(\Gamma_{\Delta_2})$. Άρα για κάθε Δ_2 ισχύει $l(\Gamma_{\Delta_2})\le l(\Gamma)-l(\Gamma_1)$ και, επομένως, $l(\Gamma_2)\le l(\Gamma)-l(\Gamma_1)$. Άρα

$$l(\Gamma_1)+l(\Gamma_2)\le l(\Gamma). \tag{14.183}$$

Αν $l(\Gamma)=+\infty$, τότε η (14.183) ισχύει αυτομάτως.
Τώρα, έστω οποιαδήποτε διαμέριση Δ του $[a,c]$ και η αντίστοιχη πολυγωνική γραμμή Γ_Δ. Θεωρούμε την διαμέριση $\Delta'=\Delta\cup\{b\}$ του $[a,c]$. Η αντίστοιχη πολυγωνική γραμμή $\Gamma_{\Delta'}$ έχει το πολύ ένα επιπλέον σημείο από την Γ_Δ και, επομένως,

$$l(\Gamma_\Delta)\le l(\Gamma_{\Delta'}).$$

Η Δ' χωρίζεται σε δύο διαμερίσεις: μια Δ_1 του $[a,b]$ και μια Δ_2 του $[b,c]$. Για τις αντίστοιχες πολυγωνικές γραμμές έχουμε

$$l(\Gamma_\Delta) \le l(\Gamma_{\Delta'}) = l(\Gamma_{\Delta_1}) + l(\Gamma_{\Delta_2}) \le l(\Gamma_1) + l(\Gamma_2)$$

και, επειδή αυτό ισχύει για κάθε Δ, συνεπάγεται

$$l(\Gamma) \le l(\Gamma_1) + l(\Gamma_2). \tag{14.184}$$

Από τις (14.183), (14.184) συνεπάγεται ότι $l(\Gamma) = l(\Gamma_1) + l(\Gamma_2)$.
Το δεύτερο ερώτημα. Κατ'αρχάς θα αποδείξουμε την εξής ανισότητα:

$$\sqrt{(b-a)^2 + (f(b)-f(a))^2} \le \int_a^b \sqrt{1+(f')^2}. \tag{14.185}$$

Θεωρούμε μια οποιαδήποτε διαμέριση $\Delta = \{x_0 = a, \ldots, x_n = b\}$ του $[a,b]$ και σχηματίζουμε την πολυγωνική γραμμή Γ_Δ στο xy-επίπεδο με διαδοχικές κορυφές τα σημεία $(x_k, f(x_k))$ για $k = 0, \ldots, n$. Τότε είναι

$$\sqrt{(b-a)^2 + (f(b)-f(a))^2} \le l(\Gamma_\Delta) = \sum_{k=1}^n \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}.$$

Τώρα, για κάθε k υπάρχει $\xi_k \in (x_{k-1}, x_k)$ ώστε $f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ και άρα η τελευταία σχέση γράφεται

$$\sqrt{(b-a)^2 + (f(b)-f(a))^2} \le l(\Gamma_\Delta) = \sum_{k=1}^n \sqrt{1+(f'(\xi_k))^2}(x_k - x_{k-1}).$$

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι για κάθε διαμέριση Δ του $[a,b]$ υπάρχει μια επιλογή Ξ ενδιάμεσων σημείων για την Δ ώστε

$$\sqrt{(b-a)^2 + (f(b)-f(a))^2} \le l(\Gamma_\Delta) = \Sigma\big(\sqrt{1+(f')^2}; a, b; \Delta; \Xi\big).$$

Τώρα παίρνουμε μια οποιαδήποτε ακολουθία (Δ_n) διαμερίσεων του $[a,b]$ με $w(\Delta_n) \to 0$ και την αντίστοιχη ακολουθία επιλογών (Ξ_n) ενδιάμεσων σημείων και έχουμε ότι ισχύει

$$\sqrt{(b-a)^2 + (f(b)-f(a))^2} \le l(\Gamma_{\Delta_n}) = \Sigma\big(\sqrt{1+(f')^2}; a, b; \Delta_n; \Xi_n\big) \qquad \text{για κάθε } n.$$

Σύμφωνα με το αποτέλεσμα της άσκησης 6.4.27[α], η συνάρτηση $\sqrt{1+(f')^2}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και άρα

$$l(\Gamma_{\Delta_n}) = \Sigma\big(\sqrt{1+(f')^2}; a, b; \Delta_n; \Xi_n\big) \to \int_a^b \sqrt{1+(f')^2}. \tag{14.186}$$

Από τις δύο τελευταίες σχέσεις προκύπτει η (14.185).
Κατόπιν, θεωρούμε μια οποιαδήποτε διαμέριση $\Delta = \{x_0 = a, \ldots, x_n = b\}$ του $[a,b]$ και εφαρμόζουμε την (14.185) σε κάθε υποδιάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ και αθροίζουμε για $k = 1, \ldots, n$. Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} l(\Gamma_\Delta) &= \sum_{k=1}^n \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2} \\ &\le \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} \sqrt{1+(f')^2} = \int_a^b \sqrt{1+(f')^2}. \end{aligned}$$

Επειδή αυτό ισχύει για κάθε διαμέριση Δ του $[a,b]$, συνεπάγεται

$$l(\Gamma) \le \int_a^b \sqrt{1+(f')^2}. \tag{14.187}$$

Όμως, ξανακοιτώντας την (14.186), σκεφτόμαστε ότι ισχύει $l(\Gamma_{\Delta_n}) \le l(\Gamma)$ για κάθε n και άρα

$$\int_a^b \sqrt{1+(f')^2} \le l(\Gamma).$$

Από αυτήν την ανισότητα και την (14.187) συνεπάγεται ότι $l(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{1+(f')^2}$.

14.7 Κεφάλαιο 7.

Άσκηση 7.1.1. *Βρείτε όλες τις αντιπαραγώγους της $2x + 3x^2$ στο $\mathbb{R}$. Βρείτε μια αντιπαράγωγο της $2x + 3x^2$ στο $\mathbb{R}$ ώστε η τιμή της στον 1 να είναι -2. Πόσες τέτοιες αντιπαράγωγοι υπάρχουν;*

Λύση: Η συνάρτηση $x^2 + x^3$ είναι αντιπαράγωγος της $2x + 3x^2$ στο $\mathbb{R}$.
Επειδή το $\mathbb{R}$ είναι διάστημα, συνεπάγεται ότι οι συναρτήσεις $x^2 + x^3 + c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση, είναι όλες οι αντιπαράγωγοι της $2x + 3x^2$ στο $\mathbb{R}$.
Για να βρούμε μια αντιπαράγωγο με τίμη -2 στον 1, γράφουμε $1^2 + 1^3 + c = -2$ και βρίσκουμε $c = -4$. Άρα υπάρχει μόνο μία αντιπαράγωγος της $2x + 3x^2$ στο $\mathbb{R}$ με τιμή -2 στον 1 και αυτή είναι η συνάρτηση $x^2 + x^3 - 4$.

Άσκηση 7.1.2. *Βρείτε συνάρτηση $F(x)$ ώστε να ισχύει $F'(\log x) = 1$ για κάθε $x \in (0, 1]$ και $F'(\log x) = x$ για κάθε $x \in [1, +\infty)$ και ώστε $F(0) = 1$.*

Λύση: Αλλάζουμε μεταβλητή:

$$t = \log x \qquad x = e^t.$$

Όταν ο x διατρέχει το διάστημα $(0, 1]$, ο t διατρέχει το διάστημα $(-\infty, 0]$ και, όταν ο x διατρέχει το διάστημα $[1, +\infty)$, ο t διατρέχει το διάστημα $[0, +\infty)$.
Άρα οι δοσμένες συνθήκες, εκτός της $F(0) = 1$, γράφονται, ισοδύναμα,

$$F'(t) = 1 \quad \text{για κάθε } t \in (-\infty, 0] \qquad \text{και} \qquad F'(t) = e^t \quad \text{για κάθε } t \in [0, +\infty).$$

Επειδή ισχύει $F'(t) = 1$ για κάθε $t \in (-\infty, 0)$ και η F είναι συνεχής στο $(-\infty, 0]$, συνεπάγεται ότι υπάρχει c_1 ώστε να ισχύει $F(t) = t + c_1$ για κάθε $t \in (-\infty, 0]$.
Ομοίως, επειδή ισχύει $F'(t) = e^t$ για κάθε $t \in (0, +\infty)$ και η F είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$, συνεπάγεται ότι υπάρχει c_2 ώστε να ισχύει $F(t) = e^t + c_2$ για κάθε $t \in [0, +\infty)$.
Άρα $c_1 = 1 + c_2 = F(0) = 1$ και, επομένως, ισχύει

$$F(t) = \begin{cases} t + 1, & \text{αν } t \leq 0 \\ e^t, & \text{αν } t \geq 0 \end{cases}$$

Ελέγχουμε εύκολα ότι η F είναι παραγωγίσιμη στον 0 και ότι $F'(0) = 1$.
Παρατήρηση: Λύστε την άσκηση θεωρώντας τη συνάρτηση $G(x) = F(\log x)$.

Άσκηση 7.1.3. *Θεωρήστε τις $\begin{cases} 0, & \text{αν } x \leq 0 \\ 1, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$ και $\begin{cases} 2x \sin(1/x) - \cos(1/x), & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ Παρατηρήστε ότι και οι δύο συναρτήσεις είναι ασυνεχείς στον 0 και αποδείξτε ότι η πρώτη δεν έχει αντιπαράγωγο στο $\mathbb{R}$ ενώ η δεύτερη έχει αντιπαράγωγο στο $\mathbb{R}$.*

Λύση: Η πρώτη συνάρτηση. Έστω F αντιπαράγωγος της f στο $\mathbb{R}$. Δηλαδή, έστω $F' = f$ στο $\mathbb{R}$.
Επειδή ισχύει $F'(x) = 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0)$ και η F είναι συνεχής στο $(-\infty, 0]$, συνεπάγεται ότι υπάρχει c_1 ώστε να ισχύει $F(x) = c_1$ για κάθε $x \in (-\infty, 0]$.
Ομοίως, επειδή ισχύει $F'(x) = 1$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ και η F είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$, συνεπάγεται ότι υπάρχει c_2 ώστε να ισχύει $F(x) = x + c_2$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$.
Άρα $c_1 = F(0) = c_2$ και, συμβολίζοντας $c = c_1 = c_2$, συμπεραίνουμε ότι ισχύει

$$F(x) = \begin{cases} c, & \text{αν } x \leq 0 \\ x + c, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$$

Τώρα, όμως, είναι ${F_-}'(0) = 0$ και ${F_+}'(0) = 1$, οπότε η F δεν έχει παράγωγο στο 0. Αυτό είναι άτοπο, διότι πρέπει να ισχύει $F'(0) = f(0) = 0$.
Η δεύτερη συνάρτηση. Αναλογιζόμενοι ποιά συνάρτηση μπορεί να είναι αντιπαράγωγος της f, μας έρχεται στο μυαλό ότι ισχύει

$$\left(x^2 \sin \tfrac{1}{x}\right)' = 2x \sin \tfrac{1}{x} - \cos \tfrac{1}{x} \qquad \text{για κάθε } x \neq 0$$

και θεωρούμε τη συνάρτηση

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

Η τιμή $F(0) = 0$ προκύπτει επειδή θέλουμε η F να είναι παραγωγίσιμη και, επομένως, συνεχής στο 0, οπότε αναγκαστικά:

$$F(0) = \lim_{x\to 0} x^2 \sin \tfrac{1}{x} = 0.$$

Τώρα, έχουμε ήδη ελέγξει ότι ισχύει $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \neq 0$, ενώ για $x = 0$ έχουμε

$$F'(0) = \lim_{x\to 0} \tfrac{F(x)-F(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \tfrac{F(x)}{x} = \lim_{x\to 0} x \sin \tfrac{1}{x} = 0 = f(0).$$

Άρα η F είναι αντιπαράγωγος της f στο $\mathbb{R}$.

Άσκηση 7.1.4. *Βρείτε όλα τα αόριστα ολοκληρώματα της $1 - x$ στο $\mathbb{R}$. Βρείτε ένα αόριστο ολοκλήρωμα της $1 - x$ στο $\mathbb{R}$ ώστε η τιμή του στον 2 να είναι -1. Πόσα τέτοια αόριστα ολοκληρώματα υπάρχουν;*

Λύση: Η συνάρτηση $\int_0^x (1-t)\,dt = x - \frac{x^2}{2}$ είναι ένα αόριστο ολοκλήρωμα της $1 - x$ στο $\mathbb{R}$.
Επειδή το $\mathbb{R}$ είναι διάστημα, συνεπάγεται ότι οι συναρτήσεις $x - \frac{x^2}{2} + c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση στο $\mathbb{R}$, είναι όλα τα αόριστα ολοκληρώματα της $1 - x$ στο $\mathbb{R}$.
Για να βρούμε ένα αόριστο ολοκλήρωμα με τίμη -1 στον 2, γράφουμε $2 - \frac{2^2}{2} + c = -1$ και βρίσκουμε $c = -1$. Άρα υπάρχει μόνο ένα αόριστο ολοκλήρωμα της $1-x$ στο $\mathbb{R}$ με τιμή -1 στον 2 και αυτό είναι η συνάρτηση $x - \frac{x^2}{2} - 1$.

Άσκηση 7.1.5. *Υποθέστε ότι $\int f(x)\,dx = \int g(x)\,dx + x^2 - 3$. Με τί είναι ίση η παράσταση $\int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$;*

Λύση: Η παράσταση $\int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$ είναι όλες οι συναρτήσεις $x^2 - 3 + c = x^2 + c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση στο $\mathbb{R}$.

Άσκηση 7.1.6. *Έστω f ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [a, b]$ ώστε $\int_a^\xi f = \int_\xi^b f$.*

Λύση: Γράφουμε αυτό που έχουμε να αποδείξουμε στη μορφή $\int_a^\xi f + \int_b^\xi f = 0$ και ορίζουμε την συνάρτηση με τύπο $F(x) = \int_a^x f + \int_b^x f$ για κάθε $x \in [a, b]$.
Η F είναι συνεχής στο $[a, b]$ ως άθροισμα δύο αόριστων ολοκληρωμάτων της f στο $[a, b]$.
Τώρα, είναι $F(a) = -\int_a^b f$ και $F(b) = \int_a^b f$, οπότε $F(a)F(b) = -\big(\int_a^b f\big)^2 \leq 0$.
Άρα υπάρχει $\xi \in [a, b]$ ώστε $F(\xi) = 0$.

Άσκηση 7.1.7. *Θεωρήστε την $f(x) = x - [x] - \frac{1}{2}$ η οποία εμφανίστηκε και στην άσκηση 6.4.10.*
Αποδείξτε ότι η f είναι περιοδική στο $\mathbb{R}$ με περίοδο 1.
Αποδείξτε ότι το αόριστο ολοκλήρωμα $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ είναι περιοδική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με περίοδο 1 και υπολογίστε το στο $[0, 1)$. Εκφράστε με απλό τρόπο τον τύπο της F στο $\mathbb{R}$ χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση $[x]$.
Αποδείξτε ότι το αόριστο ολοκλήρωμα $G(x) = \int_0^x (F(t) + \frac{1}{12})\,dt$ είναι περιοδική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με περίοδο 1.
Σε ποιά διαστήματα είναι η f συνεχής; Σε ποιά διαστήματα είναι η F αντιπαράγωγος της f;
Σε κάθε σημείο ασυνέχειας της f να συγκρίνετε καθένα από τα δύο πλευρικά όρια της f με την αντίστοιχη πλευρική παράγωγο της F. Τί παρατηρείτε;

Λύση: Από τη γνωστή ανισότητα $[x] \leq x < [x] + 1$ συνεπάγεται $[x] + 1 \leq x + 1 < ([x] + 1) + 1$. Επειδή ο $[x] + 1$ είναι ακέραιος, συμπεραίνουμε ότι ισχύει

$$[x + 1] = [x] + 1.$$

Άρα για κάθε x ισχύει $f(x + 1) = (x + 1) - [x + 1] - \frac{1}{2} = x - [x] - \frac{1}{2} = f(x)$, οπότε η f είναι περιοδική στο $\mathbb{R}$ με περίοδο 1.

Τώρα, με μια απλή αλλαγή μεταβλητής (για την τελευταία ισότητα), έχουμε

$\int_0^x f(t)\,dt + \int_x^{x+1} f(t)\,dt = \int_0^{x+1} f(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt + \int_1^{x+1} f(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt + \int_0^x f(t)\,dt$

και άρα

$$\int_x^{x+1} f(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt. \tag{14.188}$$

Παρατηρούμε ότι η (14.188) ισχύει για κάθε περιοδική συνάρτηση με περίοδο 1.
Άρα

$$\int_x^{x+1} f(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt = 0$$

και, επομένως,

$$F(x+1) = \int_0^{x+1} f(t)\,dt = \int_0^x f(t)\,dt + \int_x^{x+1} f(t)\,dt = F(x) + 0 = F(x),$$

οπότε η F είναι περιοδική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με περίοδο 1.
Αν $x \in [0,1)$, τότε

$$F(x) = \int_0^x (t - [t] - \tfrac{1}{2})\,dt = \int_0^x (t - \tfrac{1}{2})\,dt = \tfrac{x^2 - x}{2}.$$

Τώρα, για κάθε x ισχύει $x - [x] \in [0,1)$ και, επειδή ο $[x]$ είναι ακέραιος και η F είναι περιοδική με περίοδο 1, συνεπάγεται

$$F(x) = F(x - [x]) = \tfrac{(x-[x])^2 - (x-[x])}{2}. \tag{14.189}$$

Κατόπιν, εφαρμόζουμε την (14.188) στην περιοδική F και έχουμε

$$\int_x^{x+1} F(t)\,dt = \int_0^1 F(t)\,dt = -\tfrac{1}{12}.$$

Άρα

$$\begin{aligned} G(x+1) &= \int_0^{x+1} (F(t) + \tfrac{1}{12})\,dt = \int_0^x (F(t) + \tfrac{1}{12})\,dt + \int_x^{x+1} F(t)\,dt + \int_x^{x+1} \tfrac{1}{12}\,dt \\ &= G(x) - \tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{12} = G(x), \end{aligned}$$

οπότε η G είναι περιοδική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με περίοδο 1.
Η f είναι συνεχής σε κάθε διάστημα $[k, k+1)$, όπου k είναι οποιοσδήποτε ακέραιος: στο διάστημα $[k, k+1)$ η f γράφεται $f(x) = x - k - \frac{1}{2}$.
Σε κάθε ακέραιο k η f δεν είναι συνεχής, αφού

$$\lim_{x\to k-} f(x) = \lim_{x\to k-} \big(x - (k-1) - \tfrac{1}{2}\big) = \tfrac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to k+} f(x) = \lim_{x\to k+} \big(x - k - \tfrac{1}{2}\big) = -\tfrac{1}{2} = f(k).$$

Στο ανοικτό διάστημα $(k, k+1)$ (όπου k είναι ακέραιος) από την (14.189) συνεπάγεται ότι ισχύει

$$F'(x) = \tfrac{d}{dx}\,\tfrac{(x-k)^2 - (x-k)}{2} = x - k - \tfrac{1}{2} = f(x).$$

Άρα η F είναι αντιπαράγωγος της f στο $(k, k+1)$.
Τέλος, αν ο k είναι ακέραιος, έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{x\to k-} \tfrac{F(x)-F(k)}{x-k} &= \lim_{x\to k-} \tfrac{F(x)}{x-k} = \lim_{x\to k-} \tfrac{(x-k+1)^2 - (x-k+1)}{2(x-k)} = \lim_{x\to k-} \tfrac{x-k+1}{2} = \tfrac{1}{2} \\ &= \lim_{x\to k-} f(x) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \lim_{x\to k+} \tfrac{F(x)-F(k)}{x-k} &= \lim_{x\to k+} \tfrac{F(x)}{x-k} = \lim_{x\to k+} \tfrac{(x-k)^2 - (x-k)}{2(x-k)} = \lim_{x\to k-} \tfrac{x-k-1}{2} = -\tfrac{1}{2} \\ &= \lim_{x\to k+} f(x). \end{aligned}$$

Άσκηση 7.2.1. *Σκεφτείτε ότι το $\int f(x)\,dx = F(x)+c$ ισοδυναμεί με $F'(x) = f(x)$ αν η f είναι συνεχής στο κατάλληλο διάστημα. Αποδείξτε ότι $\int \frac{1}{x\log x}\,dx = \log(\log x) + c$ στο διάστημα $(1,+\infty)$.*

Λύση: Επειδή ισχύει $\frac{d}{dx}\log(\log x) = \frac{1}{x\log x}$ στο διάστημα $(1,+\infty)$, συνεπάγεται $\int \frac{1}{x\log x}\,dx = \log(\log x) + c$ στο ίδιο διάστημα.

Άσκηση 7.2.2. *Βρείτε $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχή στο $\mathbb{R}$ και αριθμό a ώστε να ισχύει $\int_a^x f(t)\,dt = \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}$ για κάθε x. Πόσες λύσεις υπάρχουν;*

Υπάρχει $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $\int_0^x f(t)\,dt = e^x$ για κάθε x; Ίδια ερώτηση για την $\int_0^x f(t)\,dt = e^x - 1$. Πόσες λύσεις υπάρχουν;

Λύση: Το πρώτο ερώτημα. Αν υπάρχει f συνεχής στο $\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $\int_a^x f(t)\,dt = \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}$ για κάθε x, τότε παραγωγίζοντας αυτήν τη σχέση, βρίσκουμε ότι ισχύει $f(x) = \cos x$ για κάθε x. Με την συνάρτηση $f(x) = \cos x$ έχουμε $\int_a^x f(t)\,dt = \sin x - \sin a$, οπότε ισχύει $\int_a^x f(t)\,dt = \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}$ για κάθε x αν και μόνο αν $\sin a = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
Άρα υπάρχει μοναδική συνάρτηση, η $f(x) = \cos x$, και άπειροι a, οι $\frac{\pi}{3} + k2\pi$ και οι $\frac{2\pi}{3} + k2\pi$ για $k \in \mathbb{Z}$.
Το δεύτερο ερώτημα. Δεν είναι δυνατό να ισχύει $\int_0^x f(t)\,dt = e^x$ για κάθε x, αφού δεν ισχύει για $x = 0$.
Αντιθέτως, η $\int_0^x f(t)\,dt = e^x - 1$ ισχύει για $x = 0$.
Τώρα, αν υπάρχει f συνεχής στο $\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $\int_0^x f(t)\,dt = e^x - 1$ για κάθε x, τότε παραγωγίζοντας αυτήν τη σχέση, βρίσκουμε ότι ισχύει $f(x) = e^x$ για κάθε x.
Με την $f(x) = e^x$ έχουμε, πράγματι, ότι ισχύει $\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x e^t\,dt = e^x - 1$ για κάθε x.

Άσκηση 7.2.3. *Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο στο I. Αν ισχύει $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in I$, αποδείξτε ότι $\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log\frac{f(b)}{f(a)}$ για κάθε $a, b \in I$. Συζητήστε ιδιαίτερα τον ρόλο της υπόθεσης ότι ισχύει $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in I$ σε σχέση με το πρόσημο της f στο I.*

Λύση: Επειδή η f είναι συνεχής στο διάστημα I, συνεπάγεται ότι είτε ισχύει $f(x) > 0$ για κάθε $x \in I$ είτε ισχύει $f(x) < 0$ για κάθε $x \in I$.
Αν ισχύει $f(x) > 0$ για κάθε $x \in I$, τότε έχουμε $\frac{d}{dx}\log(f(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ για κάθε $x \in I$ και άρα $\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log(f(b)) - \log(f(a)) = \log\frac{f(b)}{f(a)}$ για κάθε $a, b \in I$.
Αν ισχύει $f(x) < 0$ για κάθε $x \in I$, τότε έχουμε $\frac{d}{dx}\log(-f(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ για κάθε $x \in I$ και άρα $\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log(-f(b)) - \log(-f(a)) = \log\frac{f(b)}{f(a)}$ για κάθε $a, b \in I$.
Παρατήρηση. Και στις δύο περιπτώσεις ο λόγος $\frac{f(b)}{f(a)}$ έχει θετική τιμή.

Άσκηση 7.2.4. *Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής στο διάστημα I και $a \in I$.*
Αν η $\int_a^x f(t)\,dt$ είναι σταθερή στο I, αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή 0 στο I.

Λύση: Αν η $\int_a^x f(t)\,dt$ είναι σταθερή στο I, τότε, παραγωγίζοντας, βρίσκουμε ότι ισχύει $f(x) = 0$ για κάθε $x \in I$.

Άσκηση 7.2.5. *Βρείτε τις συναρτήσεις $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $f(x) = 1 + \frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt$ για κάθε $x > 0$.*

Λύση: Αν ισχύει $f(x) = 1 + \frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt$ για κάθε $x > 0$, τότε η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, αφού το αόριστο ολοκλήρωμα $\int_1^x f(t)\,dt$ είναι συνεχής συνάρτηση στο $(0,+\infty)$. Τότε, όμως, το αόριστο ολοκλήρωμα $\int_1^x f(t)\,dt$ είναι και παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $(0,+\infty)$.
Συνεπάγεται ότι ισχύει $x(f(x) - 1) = \int_1^x f(t)\,dt$ για κάθε $x > 0$, οπότε, παραγωγίζοντας, βρίσκουμε ότι ισχύει $f(x) - 1 + xf'(x) = f(x)$ ή, ισοδύναμα, $f'(x) = \frac{1}{x}$ για κάθε $x > 0$. Άρα ισχύει $f(x) = \log x + c$ για κάθε $x > 0$, όπου c είναι κάποια σταθερή συνάρτηση στο $(0,+\infty)$.
Από την αρχική σχέση $f(x) = 1 + \frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt$ με $x = 1$ συνεπάγεται $f(1) = 1$ και άρα $c = 1$.
Άρα, αν ισχύει $f(x) = 1 + \frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt$ για κάθε $x > 0$, τότε η f έχει τύπο $f(x) = \log x + 1$ για κάθε $x > 0$.

Αντιστρόφως, η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\log x+1$ για κάθε $x>0$ ικανοποιεί την $f(x)=1+\frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt$ για κάθε $x>0$.
Πράγματι, ισχύει

$$\tfrac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt=\int_1^x(\log t+1)\,dt=\tfrac{1}{x}\int_1^x \tfrac{d}{dt}(t\log t)\,dt=\log x=f(x)-1$$

για κάθε $x>0$.

Άσκηση 7.2.6. *Έστω διάστημα I και $f:I\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I. Επίσης, έστω $g,h:A\to I$ και η $F:A\to\mathbb{R}$ με τύπο $F(x)=\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt$ για κάθε $x\in A$.*
Αν οι g,h είναι συνεχείς στον $x\in A$, αποδείξτε ότι η F είναι κι αυτή συνεχής στον x.
Αν οι g,h είναι παραγωγίσιμες στον $x\in A$ και η f είναι συνεχής στους $g(x),h(x)$, αποδείξτε ότι η F είναι παραγωγίσιμη στον x και $F'(x)=g'(x)f(g(x))-h'(x)f(h(x))$.
Βρείτε τα πεδία ορισμού των $\int_1^{x^2-x}\frac{t^2-2t}{e^t+2t^2}\,dt$, $\int_x^{x^2}\frac{e^t}{t}\,dt$ και τις παραγώγους τους.
Βρείτε $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ συνεχή στο $[0,+\infty)$ ώστε να ισχύει $\int_0^{x^2} f(t)\,dt=1-2^{x^2}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Λύση: Το πρώτο ερώτημα. Θεωρούμε οποιονδήποτε $s_0\in I$ και γράφουμε

$$F(x)=\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt=\int_{s_0}^{g(x)} f(t)\,dt-\int_{s_0}^{h(x)} f(t)\,dt\qquad \text{για κάθε } x\in A.$$

Η συνάρτηση $\int_{s_0}^{g(x)} f(t)\,dt$ είναι σύνθεση του αόριστου ολοκληρώματος $\int_{s_0}^{s} f(t)\,dt$ και της g, οπότε είναι συνεχής στο A. Το ίδιο ισχύει και για τη συνάρτηση $\int_{s_0}^{h(x)} f(t)\,dt$, οπότε η F είναι συνεχής στο A.
Το δεύτερο ερώτημα. Όπως στο πρώτο ερώτημα.
Το τρίτο ερώτημα. Η συνάρτηση $f(t)=\frac{t^2-2t}{e^t+2t^2}$ ορίζεται σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$, οπότε και η $F(x)=\int_1^{x^2-x}\frac{t^2-2t}{e^t+2t^2}\,dt$ ορίζεται σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$ και ισχύει

$$F'(x)=(2x-1)\tfrac{(x^2-x)^2-2(x^2-x)}{e^{x^2-x}+2(x^2-x)^2}\qquad \text{για κάθε } x.$$

Η συνάρτηση $f(t)=\frac{e^t}{t}$ ορίζεται στο $(-\infty,0)$ και στο $(0,+\infty)$. Οι x,x^2 πρέπει να ανήκουν είτε και οι δύο στο $(-\infty,0)$ είτε και οι δύο στο $(0,+\infty)$ και άρα πρέπει να ανήκουν και οι δύο στο $(0,+\infty)$. Άρα το πεδίο ορισμού της $F(x)=\int_x^{x^2}\frac{e^t}{t}\,dt$ είναι το $(0,+\infty)$ και ισχύει

$$F'(x)=2x\tfrac{e^{x^2}}{x^2}-\tfrac{e^x}{x}\qquad \text{για κάθε } x>0.$$

Άσκηση 7.2.7. *Βρείτε το $\lim_{x\to+\infty}e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt$.*
Βρείτε $a>0$ και b,c,d ώστε $\lim_{x\to0+}\frac{1}{e^x-b-cx-dx^2}\int_0^x\frac{t^2}{\sqrt{a+t}}\,dt=1$.

Λύση: Με τον κανόνα του l' Hopitâl έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty}e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt=\lim_{x\to+\infty}\tfrac{e^{x^2}}{2xe^{x^2}}=0.$$

Είναι $\lim_{x\to0+}(e^x-b-cx-dx^2)=1-b$ και $\lim_{x\to0+}\int_0^x\frac{t^2}{\sqrt{a+t}}\,dt=0$.
Άρα, αν $b\neq1$, τότε $\lim_{x\to0+}\frac{1}{e^x-b-cx-dx^2}\int_0^x\frac{t^2}{\sqrt{a+t}}\,dt=0$ και, επομένως, $b=1$.
Τώρα, από τον κανόνα του l' Hopitâl συνεπάγεται

$$\lim_{x\to0+}\tfrac{1}{e^x-1-cx-dx^2}\int_0^x\tfrac{t^2}{\sqrt{a+t}}\,dt=\lim_{x\to0+}\tfrac{1}{e^x-c-2dx}\tfrac{x^2}{\sqrt{a+x}}=\tfrac{1}{\sqrt{a}}\lim_{x\to0+}\tfrac{x^2}{e^x-c-2dx}.$$

Για να εφαρμόσουμε τον κανόνα του l' Hopitâl πρέπει να υπάρχει το τελευταίο όριο. Και, πράγματι, το όριο αυτό υπάρχει και είναι ίσο με 0 αν $c\neq1$, οπότε σ'αυτήν την περίπτωση καταλήγουμε σε άτοπο, ή, αν $c=1$, είναι ίσο με

$$\lim_{x\to0+}\tfrac{x^2}{e^x-1-2dx}=\lim_{x\to0+}\tfrac{2x}{e^x-2d}.$$

Και πάλι, για να εφαρμόσουμε τον κανόνα του l' Hopitâl πρέπει να υπάρχει το τελευταίο όριο. Το όριο αυτό υπάρχει και είναι ίσο με 0 αν $2d \neq 1$, οπότε σ'αυτήν την περίπτωση καταλήγουμε σε άτοπο, ή, αν $2d = 1$, είναι ίσο με

$$\lim_{x\to 0+} \tfrac{2x}{e^x-1} = \lim_{x\to 0+} \tfrac{2}{e^x} = 2.$$

Άρα πρέπει να είναι $b = c = 1$ και $d = \frac{1}{2}$ και τότε

$$1 = \lim_{x\to 0+} \tfrac{1}{e^x-1-x-(1/2)x^2} \int_0^x \tfrac{t^2}{\sqrt{a+t}}\,dt = \tfrac{1}{\sqrt{a}} \lim_{x\to 0+} \tfrac{x^2}{e^x-1-x} = \tfrac{1}{\sqrt{a}} \lim_{x\to 0+} \tfrac{2x}{e^x-1}$$
$$= \tfrac{1}{\sqrt{a}} \lim_{x\to 0+} \tfrac{2}{e^x} = \tfrac{2}{\sqrt{a}}$$

και, επομένως, $a = 4$.

Άσκηση 7.2.8. *Αν $a \neq \pm b$, αποδείξτε ότι* $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} \int_0^x \sin(at)\sin(bt)\,dt = 0$.

Λύση: Έχουμε

$$\int_0^x \sin(at)\sin(bt)\,dt = \tfrac{1}{2}\int_0^x \cos((a-b)t)\,dt - \tfrac{1}{2}\int_0^x \cos((a+b)t)\,dt = \tfrac{\sin((a-b)x)}{2(a-b)} - \tfrac{\sin((a+b)x)}{2(a+b)}$$

και άρα

$$\lim_{x\to\pm\infty} \tfrac{1}{x}\int_0^x \sin(at)\sin(bt)\,dt = \lim_{x\to\pm\infty} \tfrac{\sin((a-b)x)}{2(a-b)x} - \lim_{x\to\pm\infty} \tfrac{\sin((a+b)x)}{2(a+b)x} = 0 - 0 = 0.$$

Άσκηση 7.2.9. [α] *Δώστε δεύτερη απόδειξη του λήμματος 6.5[β] με βάση το θεμελιώδες θεώρημα.*
[γ] *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Αν $\int_{x'}^{x''} f(t)\,dt \geq 0$ για κάθε $x', x'' \in [a,b]$ με $x' < x''$, αποδείξτε ότι ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε σημείο συνέχειας x της f.*

Λύση: [α] Θεωρούμε το αόριστο ολοκλήρωμα με τύπο $F(x) = \int_a^x f$ για κάθε $x \in [a,b]$.
Έστω $a \leq x_1 < x_2 \leq b$. Τότε, επειδή ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [x_1, x_2]$, συνεπάγεται $\int_{x_1}^{x_2} f \geq 0$, οπότε

$$F(x_2) = \int_a^{x_2} f = \int_a^{x_1} f + \int_{x_1}^{x_2} f \geq \int_a^{x_1} f = F(x_1).$$

Άρα η F είναι αύξουσα στο $[a,b]$.
Τώρα, επειδή $F(a) = 0$ και $F(b) = \int_a^b f = 0$, συνεπάγεται ότι η F είναι σταθερή 0 στο $[a,b]$.
Άρα ισχύει $f(x) = F'(x) = 0$ για κάθε $x \in [a,b]$ στον οποίο η f είναι συνεχής.
[γ] Θεωρούμε πάλι το αόριστο ολοκλήρωμα με τύπο $F(x) = \int_a^x f$ για κάθε $x \in [a,b]$.
Έστω $a \leq x_1 < x_2 \leq b$. Τότε έχουμε

$$F(x_2) = \int_a^{x_2} f = \int_a^{x_1} f + \int_{x_1}^{x_2} f \geq \int_a^{x_1} f = F(x_1).$$

Άρα η F είναι αύξουσα στο $[a,b]$.
Άρα ισχύει $f(x) = F'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a,b]$ στον οποίο η f είναι συνεχής.

Άσκηση 7.2.10. *Έστω f συνεχής στο $[0,+\infty)$ και έστω ότι ισχύει $f(x) \neq 0$ για κάθε $x > 0$ και*

$$(f(x))^2 = 2\int_0^x f \qquad \text{για κάθε } x \geq 0. \tag{14.190}$$

Αποδείξτε ότι ισχύει $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$.
Αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$.
Αποδείξτε ότι ισχύει $f(x) = x$ για κάθε $x \geq 0$.

Λύση: Το πρώτο ερώτημα. Από την (14.190) συνεπάγεται $f(0) = 0$.
Επειδή η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f(x) \neq 0$ για κάθε $x > 0$, συνεπάγεται ότι είτε ισχύει $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$ είτε ισχύει $f(x) < 0$ για κάθε $x > 0$.
Αν ισχύει $f(x) < 0$ για κάθε $x > 0$, τότε ισχύει $\int_0^x f \leq 0$ για κάθε $x > 0$, οπότε βάσει της

(14.190) έχουμε $(f(x))^2 \le 0$ για κάθε $x > 0$ και, επομένως, $f(x) = 0$ για κάθε $x > 0$. Αυτό είναι άτοπο, οπότε ισχύει $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$.

Το δεύτερο ερώτημα. Επειδή ισχύει $f(x) \ge 0$ για κάθε $x \ge 0$, από την (14.190) συνεπάγεται ότι ισχύει

$$f(x) = \sqrt{2}\sqrt{\textstyle\int_0^x f} \qquad \text{για κάθε } x \ge 0. \tag{14.191}$$

Τώρα, έστω $x > 0$. Η f είναι συνεχής στο $[0, x]$ και ισχύει $f(t) \ge 0$ για κάθε $t \in [0, x]$. Άρα είναι $\int_0^x f \ge 0$ και μάλιστα, επειδή η f δεν είναι σταθερή 0 στο $[0, x]$, ισχύει $\int_0^x f > 0$.
Το ίδιο αποδεικνύεται πιο απλά ως εξής. Αν $x > 0$, τότε $f(x) > 0$, οπότε από την (14.190) συνεπάγεται $\int_0^x f > 0$.
Έχουμε, λοιπόν, ότι ισχύει

$$\textstyle\int_0^x f > 0 \qquad \text{για κάθε } x > 0.$$

Τώρα, η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$, οπότε ισχύει

$$\big(\textstyle\int_0^x f\big)' = f(x) \qquad \text{για κάθε } x > 0.$$

Επίσης, η συνάρτηση $\sqrt{y}$ είναι παραγωγίσιμη για $y > 0$. Άρα από την (14.191) συνεπάγεται ότι η f είναι παραγωγίσιμη για $x > 0$ και ότι

$$f'(x) = \sqrt{2}\,\frac{f(x)}{2\sqrt{\int_0^x f}} = \frac{f(x)}{\sqrt{2}\sqrt{\int_0^x f}} = 1 \qquad \text{για κάθε } x > 0,$$

όπου στην τελευταία ισότητα εφαρμόζουμε πάλι την (14.191).

Το τρίτο ερώτημα. Από την τελευταία σχέση και από το ότι η f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ συνεπάγεται ότι υπάρχει σταθερά c ώστε να ισχύει $f(x) = x + c$ για κάθε $x \ge 0$.
Για $x = 0$ παίρνουμε $0 = 0 + c$, οπότε $c = 0$ και άρα ισχύει $f(x) = x$ για κάθε $x \ge 0$.

Άσκηση 7.2.11. *Έστω f παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0, a]$ έτσι ώστε η f' να είναι συνεχής στο $[0, a]$ και έστω $f(0) = 0$. Θεωρήστε την $g : [0, a] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = \begin{cases} (f(x))^2/x, & \text{αν } 0 < x \le a \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ και αποδείξτε ότι είναι παραγωγίσιμη στο $[0, a]$.*
Να συγκρίνετε τις παραγώγους των $g(x)$ και $\int_0^x (f')^2$.
Αποδείξτε ότι ισχύει

$$(f(x))^2 \le x \textstyle\int_0^x (f')^2 \qquad \text{για κάθε } x \in [0, a]. \tag{14.192}$$

Αν $(f(a))^2 = a \int_0^a (f')^2$, αποδείξτε ότι η $\frac{f(x)}{x}$ είναι σταθερή στο $(0, a]$.
Αν $(f(a))^2 = a \int_0^a (f')^2$ και $f'(0) = 2$, αποδείξτε ότι ισχύει $f(x) = 2x$ για κάθε $x \in [0, a]$.

Λύση: Το πρώτο ερώτημα. Για $x \in (0, a]$ έχουμε $g'(x) = \frac{2xf(x)f'(x) - (f(x))^2}{x^2}$.
Για $x = 0$, έχουμε

$$g'(0) = \lim_{x\to 0+} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0+} \frac{(f(x))^2}{x^2} = \Big(\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}\Big)^2 = (f'(0))^2.$$

Άρα η g είναι παραγωγίσιμη στο $[0, a]$ και ισχύει

$$g'(x) = \begin{cases} \frac{2xf(x)f'(x)-(f(x))^2}{x^2}, & \text{αν } 0 < x \le a \\ (f'(0))^2, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

Το δεύτερο ερώτημα. Γράφουμε (χωρίς να γνωρίζουμε αν είναι σωστές) τις διαδοχικές ισοδύναμες σχέσεις:

$$g'(x) \le \big(\textstyle\int_0^x (f')^2\big)'$$
$$g'(x) \le (f'(x))^2.$$

Η τελευταία σχέση ισχύει, προφανώς, ως ισότητα για $x = 0$, ενώ για $x \in (0, a]$ είναι ισοδύναμη με τις διαδοχικές ισοδύναμες σχέσεις

$$\tfrac{2xf(x)f'(x)-(f(x))^2}{x^2} \leq (f'(x))^2$$

$$2xf(x)f'(x) - (f(x))^2 \leq x^2(f'(x))^2$$

$$0 \leq (xf'(x) - f(x))^2.$$

Η τελευταία ανισότητα είναι σωστή, οπότε ισχύει

$$g'(x) \leq \big(\textstyle\int_0^x (f')^2\big)' \qquad \text{για κάθε } x \in [0, a].$$

Το τρίτο ερώτημα. Η (14.192) είναι σωστή ως ισότητα για $x = 0$ και για $x \in (0, a]$ γράφεται ισοδύναμα

$$g(x) \leq \textstyle\int_0^x (f')^2.$$

Θεωρούμε την συνάρτηση με τύπο $h(x) = \int_0^x (f')^2 - g(x)$ για κάθε $x \in [0, a]$.
Τότε, βάσει του αποτελέσματος του δεύτερου ερωτήματος, ισχύει $h'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [0, a]$.
Άρα η h είναι αύξουσα στο $[0, a]$, οπότε ισχύει $h(x) \geq h(0) = 0$ για κάθε $x \in (0, a]$. Άρα η (14.192) είναι σωστή και για $x \in (0, a]$.
Το τέταρτο ερώτημα. Αν $(f(a))^2 = a \int_0^a (f')^2$, τότε είναι $h(a) = 0$.
Τώρα, επειδή η h είναι αύξουσα στο $[0, a]$ και $h(0) = h(a) = 0$, συνεπάγεται ότι η h είναι σταθερή 0 στο $[0, a]$. Άρα ισχύει $\int_0^x (f')^2 - g(x) = h(x) = 0$ για κάθε $x \in [0, a]$. Παραγωγίζοντας, βρίσκουμε ότι ισχύει $(f'(x))^2 = g'(x)$ για κάθε $x \in [0, a]$.
Για $x \in (0, a]$ έχουμε τις διαδοχικές ισοδύναμες σχέσεις

$$(f'(x))^2 = \tfrac{2xf(x)f'(x)-(f(x))^2}{x^2}$$

$$(xf'(x) - f(x))^2 = 0$$

$$xf'(x) - f(x) = 0$$

$$\big(\tfrac{f(x)}{x}\big)' = 0.$$

Άρα υπάρχει σταθερά c ώστε να ισχύει $\frac{f(x)}{x} = c$ ή, ισοδύναμα, $f(x) = cx$ για κάθε $x \in (0, a]$. Το τελευταίο ισχύει ούτως ή άλλως και για $x = 0$, όποια κι αν είναι η σταθερά c.
Το πέμπτο ερώτημα. Συγκρίνοντας τις παραγώγους των δύο πλευρών της σχέσης $f(x) = cx$ για $x = 0$, βρίσκουμε $c = f'(0) = 2$.

Άσκηση 7.2.12. *Έστω $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ ώστε η $f' : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ να είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ και $f(0) = 0$.*
Αποδείξτε ότι ισχύει $e^{f(x)/x} \leq \frac{1}{x}\int_0^x e^{f'(t)}\,dt$ για κάθε $x > 0$.
Αν υπάρχει $a > 0$ ώστε να ισχύει $e^{f(a)/a} = \frac{1}{a}\int_0^a e^{f'(t)}\,dt$, αποδείξτε ότι υπάρχει σταθερά c ώστε να ισχύει $f(x) = cx$ για κάθε $x \in [0, a]$.

Λύση: Θεωρούμε τη συνάρτηση με τύπο $h(x) = \int_0^x e^{f'(t)}\,dt - xe^{f(x)/x}$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.
Τότε

$$\begin{aligned} h'(x) &= e^{f'(x)} - \tfrac{xf'(x)-f(x)}{x}\, e^{f(x)/x} - e^{f(x)/x} \\ &= e^{f(x)/x}\big(e^{f'(x)-f(x)/x} - \big(f'(x) - \tfrac{f(x)}{x}\big) - 1\big) \geq 0. \end{aligned} \tag{14.193}$$

Στην τελευταία ανισότητα χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα $e^t \geq t + 1$ με $t = f'(x) - \frac{f(x)}{x}$.
Επομένως, η h είναι αύξουσα στο $(0, +\infty)$ και, επειδή

$$\lim_{x\to 0+} h(x) = \textstyle\int_0^0 e^{f'(t)}\,dt - 0\lim_{x\to 0+} e^{(f(x)-f(0))/(x-0)} = 0 - 0e^{f'(0)} = 0,$$

συνεπάγεται ότι ισχύει $h(x) \geq 0$ ή, ισοδύναμα, $e^{f(x)/x} \leq \frac{1}{x} \int_0^x e^{f'(t)}\, dt$ για κάθε $x > 0$.
Αν υπάρχει $a > 0$ ώστε να ισχύει $e^{f(a)/a} = \frac{1}{a} \int_0^a e^{f'(t)}\, dt$, τότε $h(a) = 0$ και άρα η h είναι σταθερή 0 στο διάστημα $(0, a]$, οπότε ισχύει $h'(x) = 0$ για κάθε $x \in (0, a]$.
Από τη σχέση (14.193) και από το ότι ισχύει $e^t = t + 1$ αν και μόνο αν $t = 0$ συνεπάγεται ότι ισχύει

$$f'(x) - \frac{f(x)}{x} = 0 \qquad \text{για κάθε } x \in (0, a].$$

Άρα ισχύει $\big(\frac{f(x)}{x}\big)' = 0$ για κάθε $x \in (0, a]$.
Επομένως, υπάρχει σταθερά c ώστε να ισχύει $\frac{f(x)}{x} = c$ ή, ισοδύναμα, $f(x) = cx$ για κάθε $x \in [0, a]$. Η σχέση αυτή ισχύει, προφανώς, και για $x = 0$.

Άσκηση 7.2.13. *Έστω διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I. Έστω $a \in I$ και το αόριστο ολοκλήρωμα $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ για κάθε $x \in I$. Αν υπάρχει το $\lim_{y \to x+} f(y) \in \overline{\mathbb{R}}$, αποδείξτε ότι $F'_+(x) = \lim_{y \to x+} f(y)$.*

Λύση: Η απόδειξη είναι ουσιαστικά ίδια με την απόδειξη του θεμελιώδους θεωρήματος του απειροστικού λογισμού.
Πρώτη περίπτωση. Υποθέτουμε ότι $\lim_{y \to x+} f(y) = l \in \mathbb{R}$.
Έστω, λοιπόν, $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(t) - l| < \frac{\epsilon}{2}$ για κάθε $t \in (x, x + \delta)$.
Έστω, τώρα, οποιοσδήποτε $y \in (x, x + \delta)$. Τότε ισχύει

$$|f(t) - l| < \tfrac{\epsilon}{2} \qquad \text{για κάθε } t \in (x, y].$$

Άρα

$$\Big| \int_x^y (f(t) - l)\, dt \Big| \leq \tfrac{\epsilon}{2}(y - x) < \epsilon(y - x).$$

Τότε

$$\begin{aligned}
\Big| \frac{F(y) - F(x)}{y - x} - l \Big| &= \frac{1}{y - x} \big| F(y) - F(x) - l(y - x) \big| \\
&= \frac{1}{y - x} \Big| \int_a^y f(t)\, dt - \int_a^x f(t)\, dt - l(y - x) \Big| \\
&= \frac{1}{y - x} \Big| \int_x^y f(t)\, dt - l(y - x) \Big| = \frac{1}{y - x} \Big| \int_x^y f(t)\, dt - \int_x^y l\, dt \Big| \\
&= \frac{1}{y - x} \Big| \int_x^y (f(t) - l)\, dt \Big| < \epsilon.
\end{aligned}$$

Βλέπουμε, δηλαδή, ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $y \in (x, x + \delta)$ να ισχύει $\big| \frac{F(y) - F(x)}{y - x} - l \big| < \epsilon$. Άρα $\lim_{y \to x+} \frac{F(y) - F(x)}{y - x} = l$, οπότε $F'_+(x) = l$.
Δεύτερη περίπτωση. Υποθέτουμε ότι $\lim_{y \to x+} f(y) = +\infty$.
Έστω $M > 0$. Τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $f(t) > \frac{M}{2}$ για κάθε $t \in (x, x + \delta)$.
Έστω, τώρα, οποιοσδήποτε $y \in (x, x + \delta)$. Τότε ισχύει

$$f(t) > \tfrac{M}{2} \qquad \text{για κάθε } t \in (x, y]$$

και άρα

$$\int_x^y f(t)\, dt \geq \tfrac{M}{2}(y - x) > M(y - x).$$

Τότε

$$\frac{F(y) - F(x)}{y - x} = \frac{1}{y - x} \Big(\int_a^y f(t)\, dt - \int_a^x f(t)\, dt \Big) = \frac{1}{y - x} \int_x^y f(t)\, dt > M.$$

Δηλαδή, για κάθε $M > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $y \in (x, x + \delta)$ να ισχύει $\frac{F(y) - F(x)}{y - x} > M$.
Άρα $F'_+(x) = \lim_{y \to x+} \frac{F(y) - F(x)}{y - x} = +\infty$.
Η *τρίτη περίπτωση*, όπου $\lim_{y \to x+} f(y) = -\infty$, είναι όμοια με την προηγούμενη.

Άσκηση 7.2.14. *Έστω $p, r : I \to \mathbb{R}$ συνεχείς στο διάστημα I. Λέμε ότι η συνάρτηση $y(x)$ είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης*

$$y' + p(x)y = r(x) \tag{14.194}$$

στο διάστημα I αν ισχύει $y'(x) + p(x)y(x) = r(x)$ για κάθε $x \in I$.

Αν $x_0 \in I$ και αν $\mu(x) = e^{\int_{x_0}^x p(t)\,dt}$ για κάθε $x \in I$, αποδείξτε ότι οι λύσεις της (14.194) στο I είναι οι συναρτήσεις $y(x) = \frac{1}{\mu(x)}\big(\int_{x_0}^x \mu(t)r(t)\,dt + c\big)$ για $x \in I$ και μόνο αυτές.

Λύση: Ισχύει

$$\mu'(x) = p(x)e^{\int_{x_0}^x p(t)\,dt} = p(x)\mu(x) \qquad \text{για κάθε } x \in I.$$

Επειδή, προφανώς, ισχύει $\mu(x) > 0$ για κάθε $x \in I$, συνεπάγεται ότι στο διάστημα I έχουμε τις παρακάτω διαδοχικές ισοδύναμες σχέσεις:

$$\begin{gathered}
y'(x) + p(x)y(x) = r(x)\\
\mu(x)y'(x) + p(x)\mu(x)y(x) = \mu(x)r(x)\\
\mu(x)y'(x) + \mu'(x)y(x) = \mu(x)r(x)\\
(\mu(x)y(x))' = \mu(x)r(x)\\
\mu(x)y(x) = \textstyle\int_{x_0}^x \mu(t)r(t)\,dt + c,
\end{gathered}$$

όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση στο I.

Άσκηση 7.2.15. *Συνέχεια της άσκησης 5.3.19. Έστω $p, q : I \to \mathbb{R}$ συνεχείς στο διάστημα I. Λέμε ότι η συνάρτηση $y(x)$ είναι λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{14.195}$$

στο διάστημα I αν ισχύει $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$ για κάθε $x \in I$.

Στα επόμενα θεωρήστε γνωστό το εξής θεώρημα. Για κάθε $x_0 \in I$ και για κάθε δύο αριθμούς y_0, y_0' υπάρχει μοναδική λύση $y(x)$ της $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ στο I ώστε $y(x_0) = y_0$ και $y'(x_0) = y_0'$.

Έστω $y_1(x)$ και $y_2(x)$ δύο οποιεσδήποτε λύσεις της διαφορικής εξίσωσης (14.195) στο I.

[β] *Δείτε την άσκηση 7.2.14 και αποδείξτε ότι η $W(y_1, y_2)(x)$ είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης $y' + p(x)y = 0$ στο I.*

[γ] *Αποδείξτε ότι είτε (i) ισχύει $W(y_1, y_2)(x) = 0$ για κάθε $x \in I$ είτε (ii) ισχύει $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$ για κάθε $x \in I$. Στην περίπτωση (i) αποδείξτε ότι μια από τις δύο αυτές λύσεις είναι σταθερό πολλαπλάσιο της άλλης στο I. Στην περίπτωση (ii) αποδείξτε ότι καμιά από τις δύο αυτές λύσεις δεν είναι σταθερό πολλαπλάσιο της άλλης στο I, δηλαδή ότι οι δύο λύσεις $y_1(x)$ και $y_2(x)$ στο I είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Σύμφωνα με την άσκηση 5.3.19, στην περίπτωση (ii), ανάμεσα σε δύο διαδοχικές ρίζες της μιας λύσης βρίσκεται ακριβώς μία ρίζα της άλλης λύσης και αντιστρόφως.*

[δ] *Έστω ότι ισχύει η περίπτωση (ii) στο [γ]. Θεωρήστε οποιαδήποτε λύση $y(x)$ της (14.195) στο I και οποιονδήποτε $x_0 \in I$. Αποδείξτε ότι το γραμμικό σύστημα*

$$\begin{aligned}
\lambda_1 y_1(x_0) + \lambda_2 y_2(x_0) &= y(x_0)\\
\lambda_1 {y_1}'(x_0) + \lambda_2 {y_2}'(x_0) &= y'(x_0)
\end{aligned}$$

έχει μοναδική λύση ως προς τους λ_1 και λ_2. Κατόπιν, αποδείξτε ότι $W(y, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = 0$ για κάθε $x \in I$ και ότι $y(x) = \lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x)$ για κάθε $x \in I$. Άρα οι λύσεις της (14.195) στο I είναι οι γραμμικοί συνδυασμοί $\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x)$ και μόνο αυτοί. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι οι λύσεις $y_1(x)$ και $y_2(x)$ παράγουν τον γραμμικό χώρο των λύσεων της (14.195) στο I. Και, επειδή, οι δύο αυτές λύσεις είναι γραμμικά ανεξάρτητες, αποτελούν βάση του χώρου των λύσεων. Δηλαδή, ο χώρος των λύσεων έχει γραμμική διάσταση ίση με 2.

Λύση: [β] Για κάθε $x \in I$ έχουμε

$$\begin{aligned}
W(y_1, y_2)'(x) &= \big(y_1(x){y_2}'(x) - {y_1}'(x)y_2(x)\big)' = y_1(x){y_2}''(x) - {y_1}''(x)y_2(x)\\
&= y_1(x)\big(-p(x){y_2}'(x) - q(x)y_2(x)\big) - \big(-p(x){y_1}'(x) - q(x)y_1(x)\big)y_2(x)\\
&= -p(x)\big(y_1(x){y_2}'(x) - {y_1}'(x)y_2(x)\big)\\
&= -p(x)W(y_1, y_2)(x).
\end{aligned}$$

[γ] Αν εφαρμόσουμε το αποτέλεσμα του [β] σε συνδυασμό με το αποτέλεσμα της άσκησης 7.2.14 με $r(x) = 0$ για κάθε $x \in I$, τότε βλέπουμε ότι υπάρχει σταθερή συνάρτηση c στο I ώστε να ισχύει

$$W(y_1, y_2)(x) = ce^{\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt} \qquad \text{για κάθε } x \in I,$$

όπου x_0 είναι οποιοδήποτε στοιχείο του I.
Επομένως: (i) αν $c = 0$, τότε ισχύει $W(y_1, y_2)(x) = 0$ για κάθε $x \in I$ και (ii) αν $c \neq 0$, τότε ισχύει $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$ για κάθε $x \in I$.
Στην περίπτωση (ii) είναι εύκολο να δούμε ότι καμιά από τις y_1, y_2 δεν είναι σταθερό πολλαπλάσιο της άλλης στο I.
Πράγματι, αν ίσχυε $y_2(x) = ky_1(x)$ για κάθε $x \in I$, τότε για κάθε $x \in I$ θα είχαμε

$$W(y_1, y_2)(x) = y_1(x){y_2}'(x) - {y_1}'(x)y_2(x) = ky_1(x){y_1}'(x) - k{y_1}'(x)y_1(x) = 0$$

και θα καταλήγαμε σε άτοπο.
Τώρα, έστω ότι έχουμε την περίπτωση (i). Τότε η ορίζουσα του γραμμικού συστήματος

$$\begin{aligned} \lambda_1 y_1(x_0) + \lambda_2 y_2(x_0) &= 0 \\ \lambda_1 {y_1}'(x_0) + \lambda_2 {y_2}'(x_0) &= 0 \end{aligned}$$

είναι ίση με 0, οπότε το σύστημα έχει τουλάχιστον μία μη-μηδενική λύση. Δηλαδή, υπάρχουν λ_1, λ_2, όχι και οι δύο ίσοι με 0, που ικανοποιούν το σύστημα.
Ορίζουμε τη συνάρτηση $y(x) = \lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x)$ στο I και τότε, σύμφωνα με το αποτέλεσμα του [α], η $y(x)$ είναι λύση της (14.195) και ικανοποιεί τις $y(x_0) = 0$ και $y'(x_0) = 0$.
Όμως, η σταθερή συνάρτηση 0 έχει τις ίδιες ιδιότητες, οπότε, βάσει του θεωρήματος που θεωρούμε γνωστό, ισχύει

$$\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) = 0 \qquad \text{για κάθε } x \in I.$$

Αν $\lambda_1 \neq 0$, τότε έχουμε $y_1(x) = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} y_2(x)$ για κάθε $x \in I$ και, αν $\lambda_2 \neq 0$, τότε έχουμε $y_2(x) = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} y_1(x)$ για κάθε $x \in I$.
[δ] Το σύστημα

$$\begin{aligned} \lambda_1 y_1(x_0) + \lambda_2 y_2(x_0) &= y(x_0) \\ \lambda_1 {y_1}'(x_0) + \lambda_2 {y_2}'(x_0) &= y'(x_0) \end{aligned}$$

έχει μοναδική λύση ως προς τους λ_1 και λ_2, διότι η ορίζουσά του δεν είναι ίση με 0.
Είναι

$$W(y, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)(x_0) = y(x_0)(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)'(x_0) - y'(x_0)(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)(x_0) = 0,$$

οπότε από το αποτέλεσμα του [β] έχουμε ότι ισχύει $W(y, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)(x) = 0$ για κάθε $x \in I$.
Άρα, σύμφωνα με το αποτέλεσμα του [γ], μια από τις $y(x)$ και $\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x)$ είναι σταθερό πολλαπλάσιο της άλλης στο I. Επειδή οι δύο συναρτήσεις έχουν ίδια τιμή στον x_0, συνεπάγεται ότι ισχύει $y(x) = \lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x)$ για κάθε $x \in I$.

Άσκηση 7.2.17. *Συνέχεια της άσκησης 5.6.16.*
Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = c\int_{-1}^{x} g(t)\,dt$ για κάθε x. Αποδείξτε ότι υπάρχει κατάλληλη θετική τιμή του αριθμού c ώστε η f να είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, να είναι σταθερή 0 στο $(-\infty, -1]$, σταθερή 1 στο $[1, +\infty)$ και γνησίως αύξουσα στο $[-1, 1]$.

Λύση: Η συνάρτηση g είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, είναι ταυτοτικά ίση με 0 στα $(-\infty, -1]$ και $[1, +\infty)$ και ισχύει $g(x) > 0$ για κάθε $x \in (-1, 1)$.
Προφανώς, όποιος κι αν είναι ο c, η f είναι παραγωγίσμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = cg(x)$ για κάθε x. Άρα η f είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.
Επίσης, ισχύει

$$f(x) = c\int_{-1}^{x} g(t)\,dt = 0 \qquad \text{για κάθε } x \leq -1$$

και

$$f(x) = c\int_{-1}^{x} g(t)\,dt = c\int_{-1}^{1} g(t)\,dt + c\int_{1}^{x} g(t)\,dt = c\int_{-1}^{1} g(t)\,dt \qquad \text{για κάθε } x \geq 1.$$

Ο αριθμός $\int_{-1}^{1} g(t)\,dt$ είναι θετικός, οπότε επιλέγοντας $c = 1/(\int_{-1}^{1} g(t)\,dt)$ έχουμε ότι ισχύει $f(x) = 1$ για κάθε $x \geq 1$.
Τέλος, ισχύει $f'(x) = cg(x) > 0$ για $x \in (-1,1)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1.1]$.

Άσκηση 7.2.19. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b]$. Ορίζουμε $f_n(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)\,dt$ για κάθε $x \in [a,b]$ και κάθε n.*
Αποδείξτε ότι ισχύει ${f_1}'(x) = f(x)$ και ${f_{n+1}}'(x) = f_n(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$ και κάθε n.
Αποδείξτε ότι ισχύει ${f_n}^{(n)}(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$ και κάθε n.
Αποδείξτε ότι ισχύει $f_{n+1}(x) = \int_a^x f_n(t)\,dt$ για κάθε $x \in [a,b]$ και κάθε n.
Αποδείξτε ότι το πλήθος των εναλλαγών προσήμου της f στο $[a,b]$ δεν είναι μικρότερο από το πλήθος των εναλλαγών προσήμου στην $(n+1)$-άδα $(f(b), f_1(b), \ldots, f_n(b))$.

Λύση: Το πρώτο ερώτημα. Από την σχέση $f_1(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ συνεπάγεται η ${f_1}'(x) = f(x)$.
Τώρα θα δούμε τρεις τρόπους απόδειξης της δεύτερης σχέσης: ${f_{n+1}}'(x) = f_n(x)$.
Πρώτα μέσω του διωνυμικού τύπου του Newton:

$$\begin{aligned}
{f_{n+1}}'(x) &= \tfrac{1}{n!}\tfrac{d}{dx}\int_a^x (x-t)^n f(t)\,dt = \tfrac{1}{n!}\tfrac{d}{dx}\textstyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}x^k\int_a^x t^{n-k}f(t)\,dt \\
&= \tfrac{1}{n!}\big(\textstyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}k\binom{n}{k}x^{k-1}\int_a^x t^{n-k}f(t)\,dt + \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}x^k x^{n-k}f(x)\big) \\
&= \tfrac{1}{n!}\big(\textstyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}n\binom{n-1}{k-1}x^{k-1}\int_a^x t^{n-k}f(t)\,dt + x^n f(x)\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\big) \\
&= \tfrac{1}{n!}\big(\textstyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{(n-1)-(k-1)}n\binom{n-1}{k-1}x^{k-1}\int_a^x t^{(n-1)-(k-1)}f(t)\,dt \\
&\quad + x^n f(x)(1+(-1))^n\big) \\
&= \tfrac{1}{(n-1)!}\textstyle\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{(n-1)-k}\binom{n-1}{k}x^k\int_a^x t^{(n-1)-k}f(t)\,dt \\
&= \tfrac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}f(t)\,dt = f_n(x).
\end{aligned}$$

Κατόπιν, με την αρχή της επαγωγής. Αν θέσουμε $f_0 = f$, τότε για $n = 0$ η σχέση ${f_{n+1}}'(x) = f_n(x)$ είναι η ${f_1}'(x) = f(x)$. Ας υποθέσουμε, τώρα, ότι για κάθε συνάρτηση f ισχύει ${f_{n+1}}'(x) = f_n(x)$ για κάποιον $n \geq 0$. Τότε, αν θέσουμε $g(x) = xf(x)$, έχουμε

$$\begin{aligned}
{f_{n+2}}'(x) &= \tfrac{1}{(n+1)!}\tfrac{d}{dx}\int_a^x (x-t)^{n+1}f(t)\,dt \\
&= \tfrac{1}{(n+1)!}\tfrac{d}{dx}\big(x\int_a^x (x-t)^n f(t)\,dt - \int_a^x (x-t)^n t f(t)\,dt\big) \\
&= \tfrac{1}{n+1}\tfrac{d}{dx}\big(x\tfrac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f(t)\,dt - \tfrac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n g(t)\,dt\big) \\
&= \tfrac{1}{n+1}\tfrac{d}{dx}\big(xf_{n+1}(x) - g_{n+1}(x)\big) \\
&= \tfrac{1}{n+1}\big(f_{n+1}(x) + xf_n(x) - g_n(x)\big) \\
&= \tfrac{1}{n+1}\big(\tfrac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f(t)\,dt + x\tfrac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}f(t)\,dt \\
&\quad - \tfrac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}t f(t)\,dt\big) \\
&= \tfrac{1}{n+1}\big(\tfrac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f(t)\,dt + \tfrac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^n f(t)\,dt\big) \\
&= \tfrac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f(t)\,dt = f_{n+1}(x).
\end{aligned}$$

Ο τρίτος τρόπος βασίζεται στον ορισμό της παραγώγου. Γράφουμε

$$\begin{aligned}
\tfrac{f_{n+1}(x+h)-f_{n+1}(x)}{h} &= \tfrac{1}{n!}\tfrac{1}{h}\big(\int_a^{x+h}(x+h-t)^n f(t)\,dt - \int_a^x (x-t)^n f(t)\,dt\big) \\
&= \tfrac{1}{n!}\tfrac{1}{h}\big(\int_a^{x+h}(x+h-t)^n f(t)\,dt - \int_a^x (x+h-t)^n f(t)\,dt \\
&\quad + \int_a^x (x+h-t)^n f(t)\,dt - \int_a^x (x-t)^n f(t)\,dt\big) \\
&= \tfrac{1}{n!}\tfrac{1}{h}\int_x^{x+h}(x+h-t)^n f(t)\,dt + \tfrac{1}{n!}\int_a^x \tfrac{(x+h-t)^n-(x-t)^n}{h}f(t)\,dt.
\end{aligned} \tag{14.196}$$

Θεωρούμε κάποιον $M \geq 0$ ώστε να ισχύει $|f(t)| \leq M$ για κάθε $t \in [a,b]$ και τότε έχουμε $|x+h-t| \leq |h|$ για κάθε t ανάμεσα στους x και $x+h$ και άρα

$$\Big|\tfrac{1}{h}\int_x^{x+h}(x+h-t)^n f(t)\,dt\Big| \leq \tfrac{|h|^n M|h|}{|h|} = M|h|^n. \tag{14.197}$$

Επίσης, μπορούμε να γράψουμε

$$\tfrac{(x+h-t)^n-(x-t)^n}{h} = n\xi^{n-1}$$

για κάποιον ξ ανάμεσα στους $x+h-t$ και $x-t$ και άρα έχουμε $|\xi| \leq b-a$ και, επομένως,

$$\begin{aligned}\Big|\tfrac{(x+h-t)^n-(x-t)^n}{h} - n(x-t)^{n-1}\Big| &= n|\xi^{n-1}-(x-t)^{n-1}|\\ &= n|\xi-(x-t)|\Big|\textstyle\sum_{k=0}^{n-2}\xi^k(x-t)^{n-2-k}\Big|\\ &\leq n|h|\textstyle\sum_{k=0}^{n-2}|\xi|^k|x-t|^{n-2-k}\\ &\leq n(n-1)|h|(b-a)^{n-2}.\end{aligned} \tag{14.198}$$

Τώρα, έχουμε

$$\begin{aligned}\tfrac{f_{n+1}(x+h)-f_{n+1}(x)}{h} - f_n(x) &= \tfrac{1}{n!}\,\tfrac{1}{h}\int_x^{x+h}(x+h-t)^n f(t)\,dt\\ &+ \tfrac{1}{n!}\int_a^x\Big(\tfrac{(x+h-t)^n-(x-t)^n}{h} - n(x-t)^{n-1}\Big)f(t)\,dt\end{aligned}$$

και, συνδυάζοντας τις (14.196), (14.197) και (14.198), βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned}\Big|\tfrac{f_{n+1}(x+h)-f_{n+1}(x)}{h} - f_n(x)\Big| &\leq \tfrac{M}{n!}|h|^n + \tfrac{1}{n!}\int_a^x n(n-1)|h|(b-a)^{n-2}|f(t)|\,dt\\ &\leq \tfrac{M}{n!}|h|^n + \tfrac{M(b-a)^{n-1}}{(n-2)!}|h|.\end{aligned}$$

Άρα $f'_{n+1}(x) = \lim_{h\to 0}\tfrac{f_{n+1}(x+h)-f_{n+1}(x)}{h} = f_n(x)$.
Το δεύτερο ερώτημα. Επαγωγικά, έχουμε

$$f_n{}^{(1)}(x) = f_{n-1}(x),\ \ f_n{}^{(2)}(x) = f_{n-1}{}^{(1)}(x) = f_{n-2}(x),\ \ f_n{}^{(3)}(x) = f_{n-2}{}^{(1)}(x) = f_{n-3}(x)$$

κ.τ.λ.
Το τρίτο ερώτημα. Αυτό είναι εύκολο:

$$\int_a^x f_n(t)\,dt = \int_a^x f_{n+1}{}'(t) = f_{n+1}(x) - f_{n+1}(a) = f_{n+1}(x).$$

Το τέταρτο ερώτημα. Με την αρχή της επαγωγής.
Αν δεν υπάρχει καμία εναλλαγή προσήμου στο ζευγάρι $(f(b), f_1(b))$, τότε το αποτέλεσμα είναι προφανές. Άρα ας υποθέσουμε ότι $f(b)f_1(b) < 0$.
Έστω, λοιπόν, $f(b) < 0$ και $f_1(b) > 0$. Τότε υπάρχει $\xi \in (a,b)$ ώστε

$$f(\xi) = f_1{}'(\xi) = \tfrac{f_1(b)-f_1(a)}{b-a} = \tfrac{f_1(b)}{b-a} > 0.$$

Άρα είναι $f(b) < 0$ και $f(\xi) > 0$, οπότε η f έχει τουλάχιστον μία εναλλαγή προσήμου στο $[a,b]$.
Η περίπτωση όπου $f(b) > 0$ και $f_1(b) < 0$ είναι παρόμοια.
Τώρα, έστω ότι το αποτέλεσμα είναι σωστό για κάθε συνάρτηση f και για κάποια τιμή του $n \geq 1$.
Έστω ότι υπάρχουν k εναλλαγές προσήμου στην $(n+2)$-άδα $(f(b), f_1(b), \ldots, f_{n+1}(b))$.
Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f_1(x)$ για $x \in [a,b]$.
Έχουμε

$$\begin{aligned}g_1(x) &= \int_a^x g(t)\,dt = \int_a^x f_1(t)\,dt = f_2(t),\\ g_2(x) &= \int_a^x g_1(t)\,dt = \int_a^x f_2(t)\,dt = f_3(t)\end{aligned}$$

κ.τ.λ. Οπότε, επαγωγικά, ισχύει $g_n(x) = f_{n+1}(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$ και κάθε $n \geq 1$.
Τώρα, η υπόθεσή μας διατυπώνεται ως εξής: υπάρχουν k εναλλαγές προσήμου στην $(n+2)$-άδα $(f(b), g(b), \ldots, g_n(b))$.
Πρώτη περίπτωση. Αν $f(b)g(b) \geq 0$, τότε υπάρχουν k εναλλαγές προσήμου στην $(n+1)$-άδα $(g(b), \ldots, g_n(b))$, οπότε από την επαγωγική μας υπόθεση συνεπάγεται ότι η g έχει τουλάχιστον k εναλλαγές προσήμου στο $[a,b]$. Δηλαδή, υπάρχουν $x_0, x_1, \ldots, x_k$ ώστε

$$a < x_0 < x_1 < \ldots < x_{k-1} < x_k \leq b$$

και ώστε οι τιμές της g στους αριθμούς αυτούς να είναι εναλλάξ θετικές και αρνητικές. Αν για κάποιον j έχουμε $g(x_{j-1}) < 0$ και $g(x_j) > 0$, τότε υπάρχει $\xi_j \in (x_{j-1}, x_j)$ ώστε

$$f(\xi_j) = g'(\xi_j) = \tfrac{g(x_j)-g(x_{j-1})}{x_j-x_{j-1}} > 0.$$

Ομοίως, αν για κάποιον j έχουμε $g(x_{j-1}) > 0$ και $g(x_j) < 0$, τότε υπάρχει $\xi_j \in (x_{j-1}, x_j)$ ώστε $f(\xi_j) < 0$.
Τέλος, επειδή $g(a) = 0$, αν $g(x_0) > 0$, τότε υπάρχει $\xi_0 \in (a, x_0)$ ώστε $f(\xi_0) > 0$ και, αν $g(x_0) < 0$, τότε υπάρχει $\xi_0 \in (a, x_0)$ ώστε $f(\xi_0) < 0$.
Από τα προηγούμενα είναι φανερό ότι οι τιμές της f στους διαδοχικούς αριθμούς $x_0, x_1, \ldots x_k$ στο (a,b) είναι εναλλάξ θετικές και αρνητικές και άρα η f έχει τουλάχιστον k εναλλαγές προσήμου στο $[a,b]$.
Δεύτερη περίπτωση. Αν $f(b)g(b) < 0$, τότε υπάρχουν $k-1$ εναλλαγές προσήμου στην $(n+1)$-άδα $(g(b), \ldots, g_n(b))$, οπότε από την επαγωγική μας υπόθεση συνεπάγεται ότι η g έχει τουλάχιστον $k-1$ εναλλαγές προσήμου στο $[a,b]$. Δηλαδή, υπάρχουν $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$ ώστε

$$a < x_0 < x_1 < \ldots < x_{k-2} < x_{k-1} \leq b$$

και ώστε οι τιμές της g στους αριθμούς αυτούς να είναι εναλλάξ θετικές και αρνητικές.
Τώρα, όπως στην πρώτη περίπτωση, βρίσκουμε ότι υπάρχουν διαδοχικοί αριθμοί $x_0, x_1, \ldots x_{k-1}$ στο (a,b) στους οποίους οι τιμές της f είναι εναλλάξ θετικές και αρνητικές. Άρα έχουμε, μέχρι στιγμής, τουλάχιστον $k-1$ εναλλαγές προσήμου της f.
Τώρα, έστω $f(b) > 0$ και $g(b) < 0$.
Ας παρατηρήσουμε το τελευταίο διάστημα $[x_{k-2}, x_{k-1}]$ στο εσωτερικό του οποίου ανήκει ο ξ_{k-1}. Αν $g(x_{k-1}) < 0$, τότε $f(\xi_{k-1}) < 0$ και, επειδή $f(b) > 0$, η f έχει μία επιπλέον εναλλαγή προσήμου στο $[a,b]$. Αν $g(x_{k-1}) > 0$, τότε $f(\xi_{k-1}) > 0$ και, επειδή $g(b) < 0$, υπάρχει $\xi_k \in (x_{k-1}, b)$ ώστε $f(\xi_k) < 0$, οπότε η f έχει μία επιπλέον εναλλαγή προσήμου στο $[a,b]$.
Άρα η f έχει τουλάχιστον k εναλλαγές προσήμου στο $[a,b]$.
Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι, αν $f(b) < 0$ και $g(b) > 0$, τότε η f έχει τουλάχιστον k εναλλαγές προσήμου στο $[a,b]$.
Άρα σε κάθε περίπτωση η f έχει τουλάχιστον k εναλλαγές προσήμου στο $[a,b]$.

Άσκηση 7.2.20. *Έστω διάστημα I και $F : I \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο I ώστε η $F' : I \to \mathbb{R}$ να είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I. Αποδείξτε ότι ισχύει $\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$ για κάθε $a, b \in I$.*

Λύση: Πρώτος τρόπος. Έστω $a, b \in I$ με $a < b$ και έστω τυχών $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει διαμέριση $\Delta = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$ του $[a,]$ ώστε

$$\overline{\Sigma}(F'; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(F'; a, b; \Delta) < \epsilon.$$

Έστω u_k και l_k τα supremum και infimum της F' στο $[x_{k-1}, x_k]$.
Γνωρίζουμε ότι υπάρχει $\xi_k \in (x_{k-1}, x_k)$ ώστε $F(x_k) - F(x_{k-1}) = F'(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$, οπότε

$$l_k(x_k - x_{k-1}) \leq F(x_k) - F(x_{k-1}) \leq u_k(x_k - x_{k-1}).$$

Προσθέτουμε αυτές τις ανισότητες για $k = 1, \ldots, n$ και βρίσκουμε

$$\underline{\Sigma}(F'; a, b; \Delta) \leq F(b) - F(a) \leq \overline{\Sigma}(F'; a, b; \Delta).$$

Από αυτήν τη σχέση και από την

$$\underline{\Sigma}(F'; a, b; \Delta) \leq \int_a^b F'(x)\, dx \leq \overline{\Sigma}(F'; a, b; \Delta)$$

συνεπάγεται

$$\left|F(b) - F(a) - \int_a^b F'(x)\, dx\right| \leq \overline{\Sigma}(F'; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(F'; a, b; \Delta) < \epsilon.$$

Άρα ισχύει $\left|F(b) - F(a) - \int_a^b F'(x)\, dx\right| < \epsilon$ για κάθε $\epsilon > 0$, οπότε $\int_a^b F'(x)\, dx = F(b) - F(a)$. Οι περιπτώσεις $b < a$ και $a = b$ είναι άμεσες.
Δεύτερος τρόπος. Έστω $a, b \in I$ με $a < b$ και έστω τυχών $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε διαμέριση Δ του $[a, b]$ με $w(\Delta) < \delta$ και κάθε επιλογή Ξ ενδιάμεσων σημείων για την Δ να ισχύει

$$|\Sigma(F'; a, b; \Delta, \Xi) - \int_a^b F'(x)\, dx| < \epsilon.$$

Θεωρούμε μια οποιαδήποτε διαμέριση $\Delta = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$ του $[a, b]$ με $w(\Delta) < \delta$.
Για κάθε $k = 1, \ldots, n$ υπάρχει $\xi_k \in (x_{k-1}, x_k)$ ώστε $F(x_k) - F(x_{k-1}) = F'(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ και, επομένως,

$$\Sigma(F'; a, b; \Delta, \Xi) = \sum_{k=1}^n F'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n F(x_k) - F(x_{k-1}) = F(b) - F(a).$$

Τώρα, επειδή $w(\Delta) < \delta$, έχουμε

$$\left|F(b) - F(a) - \int_a^b F'(x)\, dx\right| = |\Sigma(F'; a, b; \Delta, \Xi) - \int_a^b F'(x)\, dx| < \epsilon.$$

Όπως και με τον πρώτο τρόπο, συμπεραίνουμε ότι $\int_a^b F'(x)\, dx = F(b) - F(a)$.

Άσκηση 7.2.21. *Θυμόμαστε ότι, αν η f είναι κυρτή σε διάστημα I, τότε για κάθε εσωτερικό σημείο x του I ορίζονται οι πλευρικές παράγωγοι $f'_-(x)$ και $f'_+(x)$, αυτές είναι αριθμοί και ισχύει $f'_-(x) \leq f'_+(x)$.*
[α] *Έστω ανοικτό διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$ κυρτή στο I. Έστω $g : I \to \mathbb{R}$ ώστε για κάθε $x \in I$ ο αριθμός $g(x)$ να είναι ανάμεσα στους $f'_+(x)$ και $f'_-(x)$. Αποδείξτε ότι η g είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I και $\int_a^b g(x)\, dx = f(b) - f(a)$ για κάθε $a, b \in I$. Ειδικότερα, $\int_a^b f'_-(x)\, dx = f(b) - f(a)$ και $\int_a^b f'_+(x)\, dx = f(b) - f(a)$ για κάθε $a, b \in I$.*
[γ] *Έστω ανοικτό διάστημα I και $f : I \to \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η f είναι κυρτή στο I αν και μόνο αν είναι αόριστο ολοκλήρωμα μιας αύξουσας συνάρτησης στο I.*

Υπόδειξη: [α] Έστω ότι η f είναι κυρτή στο I.
Αν $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, τότε είναι

$$g(x_1) \leq f'_+(x_1) \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq f'_-(x_2) \leq g(x_2),$$

οπότε η g είναι αύξουσα στο I. Άρα η g είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I.
Έστω $a, b \in I$ με $a < b$ και τυχών $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει διαμέριση $\Delta = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$ του $[a, b]$ ώστε

$$\overline{\Sigma}(g; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(g; a, b; \Delta) < \epsilon.$$

Έστω u_k και l_k το supremum και το infimum της g στο $[x_{k-1}, x_k]$.
Επειδή η g είναι αύξουσα, είναι $u_k = g(x_k)$ και $l_k = g(x_{k-1})$, οπότε

$$l_k = g(x_{k-1}) \leq \frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}} \leq g(x_k) = u_k.$$

Άρα

$$\begin{aligned}\underline{\Sigma}(g;a,b;\Delta) &= \sum_{k=1}^n l_k(x_k-x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^n \frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}(x_k-x_{k-1}) \\ &\leq \sum_{k=1}^n u_k(x_k-x_{k-1}) = \overline{\Sigma}(g;a,b;\Delta).\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\underline{\Sigma}(g;a,b;\Delta) \leq f(b)-f(a) \leq \overline{\Sigma}(g;a,b;\Delta).$$

Από αυτήν τη σχέση και από την

$$\underline{\Sigma}(g;a,b;\Delta) \leq \int_a^b g(x)\,dx \leq \overline{\Sigma}(g;a,b;\Delta)$$

συνεπάγεται

$$\left|f(b)-f(a)-\int_a^b g(x)\,dx\right| \leq \overline{\Sigma}(g;a,b;\Delta)-\underline{\Sigma}(g;a,b;\Delta) < \epsilon.$$

Αποδείξαμε ότι ισχύει $\left|f(b)-f(a)-\int_a^b g(x)\,dx\right| < \epsilon$ για κάθε $\epsilon > 0$, οπότε $\int_a^b g(x)\,dx = f(b)-f(a)$. Οι περιπτώσεις $b<a$ και $a=b$ είναι άμεσες.

[γ] Έστω ότι η f είναι κυρτή στο I. Τότε οποιαδήποτε $g : I \to \mathbb{R}$ από το [α] είναι αύξουσα στο I και, όπως αποδείχθηκε, ισχύει $f(x)-f(a) = \int_a^x g(t)\,dt$ για κάθε $a,x \in I$. Άρα ισχύει $f(x) = \int_a^x g(t)\,dt + f(a)$ για κάθε $x \in I$.

Αντιστρόφως, έστω $g : I \to \mathbb{R}$ αύξουσα συνάρτηση στο I και, επομένως, ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I.

Θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \int_a^x g(t)\,dt + c$ για κάθε $x \in I$, όπου $a \in I$, είναι κυρτή στο I.

Έστω $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ και $x \in (x_1,x_2)$. Επειδή η g είναι αύξουσα, ισχύει

$$f(x)-f(x_1) = \int_{x_1}^x g(t)\,dt \leq g(x)(x-x_1),$$

$$f(x_2)-f(x) = \int_x^{x_2} g(t)\,dt \geq g(x)(x_2-x).$$

Συνεπάγεται

$$\frac{x_2-x}{x_2-x_1}f(x_1)+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}f(x_2) \geq \frac{x_2-x}{x_2-x_1}\big(f(x)-g(x)(x-x_1)\big)+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\big(f(x)+g(x)(x_2-x)\big) = f(x)$$

και, επομένως, η f είναι κυρτή στο I.

Άσκηση 7.3.1. *Βρείτε με αλλαγές μεταβλητής τα* $\int \tan x\,dx$, $\int \frac{1}{1+e^x}\,dx$, $\int (\sin x)^3\,dx$, $\int (\sin x)^4\,dx$, $\int \frac{1}{1+\cos x}\,dx$.

Λύση: Για το πρώτο ολοκλήρωμα χρησιμοποιούμε αλλαγή μεταβλητής από x σε $y = \cos x$ και έχουμε

$$\int \tan x = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{1}{y}\,dy\Big|_{y=\cos x} = -(\log|y|+c)\Big|_{y=\cos x} = -\log|\cos x| + c.$$

Η ισότητα αυτή ισχύει στα ανοικτά διαστήματα $(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$, όπου $k \in \mathbb{Z}$, αλλά όχι σε μεγαλύτερα διαστήματα. Μάλιστα, αν ο k είναι άρτιος, τότε έχουμε $\int \tan x = -\log(\cos x)+c$ στο αντίστοιχο διάστημα ενώ, αν ο k είναι περιττός, τότε έχουμε $\int \tan x = -\log(-\cos x)+c$ στο αντίστοιχο διάστημα.

Για το δεύτερο ολοκλήρωμα κάνουμε αλλαγή μεταβλητής από x σε $y = e^x$ και τότε

$$\int \frac{1}{1+e^x}\,dx = \int \frac{1}{(1+y)y}\,dy\Big|_{y=e^x}.$$

Κατόπιν, έχουμε $\frac{1}{(1+y)y} = \frac{1}{y} - \frac{1}{1+y}$ και άρα

$$\int \frac{1}{(1+y)y}\,dy = \int \frac{1}{y}\,dy - \int \frac{1}{1+y}\,dy = \log|y| - \log|1+y| + c = \log\left|\frac{y}{1+y}\right| + c.$$

Επομένως,
$$\int \frac{1}{1+e^x}\,dx = \left(\log\left|\frac{y}{1+y}\right| + c\right)\Big|_{y=e^x} = \log\frac{e^x}{1+e^x} + c.$$
Η σχέση $\int \frac{1}{1+e^x}\,dx = \log\frac{e^x}{1+e^x} + c$ ισχύει στο $\mathbb{R}$.
Παρατηρήστε ότι στο ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{(1+y)y}\,dy$, το οποίο χρησιμοποιήσαμε, η μεταβλητή y ανήκει στο $(0,+\infty)$ αφού είναι $y = e^x$. Επομένως, στον υπολογισμό του θα μπορούσαμε να γράψουμε $\int \frac{1}{(1+y)y}\,dy = \int \frac{1}{y}\,dy - \int \frac{1}{1+y}\,dy = \log y - \log(1+y) + c = \log\frac{y}{1+y} + c$ χωρίς να χρησιμοποιήσουμε απόλυτες τιμές.
Για το τρίτο ολοκλήρωμα κάνουμε αλλαγή μεταβλητής από x σε $y = \cos x$ και έχουμε
$$\int (\sin x)^3\,dx = -\int (1-y^2)\,dy\Big|_{y=\cos x} = \left(\tfrac{1}{3}\,y^3 - y + c\right)\Big|_{y=\cos x} = \tfrac{1}{3}(\cos x)^3 - \cos x + c.$$
Η σχέση $\int (\sin x)^3\,dx = \frac{1}{3}(\cos x)^3 - \cos x + c$ ισχύει στο $\mathbb{R}$.
Για το τέταρτο ολοκλήρωμα χρησιμοποιούμε την ταυτότητα $(\sin x)^2 = \frac{1-\cos(2x)}{2}$ και την αλλαγή μεταβλητής από x σε $y = 2x$ και βρίσκουμε
$$\int (\sin x)^4\,dx = \tfrac{1}{4}\int (1-\cos(2x))^2\,dx = \tfrac{1}{8}\int (1-\cos y)^2\,dy\Big|_{y=2x}.$$
Τώρα
$$\int (1-\cos y)^2\,dy = \int\,dy - 2\int \cos y\,dy + \int (\cos y)^2\,dy = y - 2\sin y + \int (\cos y)^2\,dy.$$
Χρησιμοποιούμε πάλι την ταυτότητα $(\cos y)^2 = \frac{1+\cos(2y)}{2}$ και την αλλαγή μεταβλητής από y σε $u = 2y$ και τότε
$$\begin{aligned}\int (\cos y)^2\,dy &= \tfrac{1}{2}\int (1+\cos(2y))\,dy = \tfrac{1}{4}\int (1+\cos u)\,du\Big|_{u=2y} = \tfrac{1}{4}(u + \sin u + c)\Big|_{u=2y}\\ &= \tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{4}\sin(2y) + c.\end{aligned}$$
Άρα
$$\int (1-\cos y)^2\,dy = y - 2\sin y + \tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{4}\sin(2y) + c = \tfrac{3}{2}y - 2\sin y + \tfrac{1}{4}\sin(2y) + c$$
και, τέλος,
$$\int (\sin x)^4\,dx = \tfrac{1}{8}\left(\tfrac{3}{2}y - 2\sin y + \tfrac{1}{4}\sin(2y) + c\right)\Big|_{y=2x} = \tfrac{3}{8}x - \tfrac{1}{4}\sin(2x) + \tfrac{1}{32}\sin(4x) + c.$$
Η σχέση αυτή ισχύει στο $\mathbb{R}$.
Για το πέμπτο ολοκλήρωμα χρησιμοποιούμε μια από τις προηγούμενες ταυτότητες στη μορφή $1 + \cos x = 2(\cos\frac{x}{2})^2$ και την αλλαγή μεταβλητής από x σε $y = \frac{x}{2}$ και βρίσκουμε
$$\int \frac{1}{1+\cos x}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{(\cos(x/2))^2}\,dx = \int \frac{1}{(\cos y)^2}\,dy\Big|_{y=(x/2)} = (\tan y + c)\Big|_{y=(x/2)} = \tan\frac{x}{2} + c.$$
Η σχέση $\int \frac{1}{1+\cos x}\,dx = \tan\frac{x}{2} + c$ ισχύει στα ανοικτά διαστήματα $((2k-1)\pi, (2k+1)\pi)$, όπου $k \in \mathbb{Z}$, αλλά όχι σε μεγαλύτερα διαστήματα.

Άσκηση 7.3.2. *Βρείτε με ολοκληρώσεις κατά παράγοντες και αλλαγές μεταβλητής τα* $\int x^3 e^{-x^2} dx$, $\int \arcsin x\,dx$, $\int \frac{x}{(\cos x)^2}\,dx$, $\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx$, $\int \frac{\arctan(e^x)}{e^x}\,dx$.

Λύση: Στο πρώτο ολοκλήρωμα κάνουμε αλλαγή μεταβλητής από x σε $y = -x^2$ και έχουμε
$$\int x^3 e^{-x^2} dx = \tfrac{1}{2}\int y e^y\,dy\Big|_{y=-x^2}.$$
Κατόπιν,
$$\int y e^y\,dy = \int y\frac{de^y}{dy}\,dy = y e^y - \int \frac{dy}{dy} e^y\,dy = y e^y - \int e^y\,dy = y e^y - e^y + c$$

και άρα
$$\int x^3e^{-x^2}dx = \tfrac{1}{2}(ye^y - e^y + c)\big|_{y=-x^2} = -\tfrac{1}{2}x^2e^{-x^2} - \tfrac{1}{2}e^{-x^2} + c.$$
Η σχέση αυτή ισχύει στο $\mathbb{R}$.
Για το δεύτερο ολοκλήρωμα έχουμε
$$\int \arcsin x\,dx = \int \tfrac{dx}{dx}\arcsin x\,dx = x\arcsin x - \int x\tfrac{d\arcsin x}{dx}\,dx = x\arcsin x - \int \tfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$
Τώρα,
$$\int \tfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\tfrac{1}{2}\int \tfrac{1}{\sqrt{y}}\,dy\big|_{y=1-x^2} = (-\sqrt{y}+c)\big|_{y=1-x^2} = -\sqrt{1-x^2}+c$$
και, επομένως,
$$\int \arcsin x\,dx = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c.$$
Η σχέση αυτή ισχύει στο κλειστό διάστημα $[-1,1]$.
Για το τρίτο ολοκλήρωμα γράφουμε
$$\begin{aligned}\int \tfrac{x}{(\cos x)^2}\,dx &= \int x\tfrac{d\tan x}{dx}\,dx = x\tan x - \int \tfrac{dx}{dx}\tan x\,dx = x\tan x - \int \tan x\,dx\\ &= x\tan x + \log|\cos x| + c\end{aligned}$$
από την άσκηση 7.3.1. Η ισότητα $\int \frac{x}{(\cos x)^2}\,dx = x\tan x + \log|\cos x| + c$ ισχύει στα ανοικτά διαστήματα $(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$, όπου $k\in\mathbb{Z}$, αλλά όχι σε μεγαλύτερα διαστήματα.
Για το τέταρτο ολοκλήρωμα έχουμε
$$\begin{aligned}\int \tfrac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx &= -\tfrac{1}{2}\int x\tfrac{d}{dx}\tfrac{1}{x^2+1}\,dx = -\tfrac{x}{2(x^2+1)} + \tfrac{1}{2}\int \tfrac{dx}{dx}\,\tfrac{1}{x^2+1}\,dx\\ &= -\tfrac{x}{2(x^2+1)} + \tfrac{1}{2}\int \tfrac{1}{x^2+1}\,dx = -\tfrac{x}{2(x^2+1)} + \tfrac{1}{2}\arctan x + c.\end{aligned}$$
Η σχέση αυτή ισχύει στο $\mathbb{R}$.
Για το πέμπτο ολοκλήρωμα γράφουμε
$$\int \tfrac{\arctan(e^x)}{e^x}\,dx = \int \tfrac{\arctan y}{y^2}\,dy\big|_{y=e^x}.$$
Τώρα
$$\int \tfrac{\arctan y}{y^2}\,dy = -\int \tfrac{d}{dy}\tfrac{1}{y}\,\arctan y\,dy = -\tfrac{\arctan y}{y} + \int \tfrac{1}{y}\,\tfrac{d\arctan y}{dy}\,dy = -\tfrac{\arctan y}{y} + \int \tfrac{1}{y(y^2+1)}\,dy$$
και
$$\int \tfrac{1}{y(y^2+1)}\,dy = \int \tfrac{y}{y^2(y^2+1)}\,dy = \tfrac{1}{2}\int \tfrac{1}{u(u+1)}\,du\big|_{u=y^2}.$$
Επίσης,
$$\int \tfrac{1}{u(u+1)}\,du = \int \big(\tfrac{1}{u} - \tfrac{1}{u+1}\big)\,du = \log|u| - \log|u+1| + c = \log\big|\tfrac{u}{u+1}\big| + c.$$
Άρα
$$\int \tfrac{1}{y(y^2+1)}\,dy = \tfrac{1}{2}\big(\log\big|\tfrac{u}{u+1}\big| + c\big)_{u=y^2} = \tfrac{1}{2}\log\tfrac{y^2}{y^2+1} + c$$
και
$$\int \tfrac{\arctan y}{y^2}\,dy = -\tfrac{\arctan y}{y} + \tfrac{1}{2}\log\tfrac{y^2}{y^2+1} + c$$
και, τέλος,
$$\int \tfrac{\arctan(e^x)}{e^x}\,dx = \big(-\tfrac{\arctan y}{y} + \tfrac{1}{2}\log\tfrac{y^2}{y^2+1} + c\big)\big|_{y=e^x} = -\tfrac{\arctan(e^x)}{e^x} + \tfrac{1}{2}\log\tfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1} + c.$$
Η σχέση $\int \frac{\arctan(e^x)}{e^x}\,dx = -\frac{\arctan(e^x)}{e^x} + \frac{1}{2}\log\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1} + c$ ισχύει στο $\mathbb{R}$.
Παρατηρούμε ότι στο ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{u(u+1)}\,du$, το οποίο χρησιμοποιήσαμε, η μεταβλητή u ανήκει στο $(0,+\infty)$ αφού είναι $u=y^2=e^{2x}$. Επομένως, στον υπολογισμό του θα μπορούσαμε να

γράψουμε $\int \frac{1}{u(u+1)}\,du = \int \big(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\big)\,du = \log u - \log(u+1) + c = \log\frac{u}{u+1} + c$ χωρίς να χρησιμοποιήσουμε απόλυτες τιμές.

Άσκηση 7.3.3. *Βρείτε τα ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων* $\int \frac{1}{x^4+1}\,dx$, $\int \frac{1}{x^5+1}\,dx$, $\int \frac{1}{x^6+1}\,dx$.

Υπόδειξη: Αποδείξτε, ξεκινώντας από την *αριστερή* τους μεριά και χρησιμοποιώντας απλές ταυτότητες, τις παραγοντοποιήσεις:

$$x^4+1 = (x^2+\sqrt{2}\,x+1)(x^2-\sqrt{2}\,x+1), \quad x^5+1 = (x+1)\big(x^2-\tfrac{\sqrt{5}+1}{2}x+1\big)\big(x^2+\tfrac{\sqrt{5}-1}{2}x+1\big),$$

$$x^6+1 = (x^2+1)(x^2+\sqrt{3}\,x+1)(x^2-\sqrt{3}\,x+1).$$

Άσκηση 7.3.4. *Βρείτε το* $\int \frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}\,dx$.

Λύση: Πρώτος τρόπος. Κάνουμε αλλαγή μεταβλητής από x σε $u = \tan\frac{x}{2}$ και, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \qquad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \qquad dx = \frac{2}{1+u^2}\,du,$$

βρίσκουμε

$$\int \frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}\,dx = \int \frac{2u}{(1+u)(1+u^2)}\,du\Big|_{u=\tan(x/2)}.$$

Χωρίζουμε σε απλά κλάσματα:

$$\frac{2u}{(1+u)(1+u^2)} = \frac{1}{1+u^2} + \frac{u}{1+u^2} - \frac{1}{1+u}.$$

Επομένως,

$$\int \frac{2u}{(1+u)(1+u^2)}\,du = \arctan u + \frac{1}{2}\log(1+u^2) - \log|1+u| + c$$

και άρα

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}\,dx &= \big(\arctan u + \tfrac{1}{2}\log(1+u^2) - \log|1+u| + c\big)\big|_{u=\tan(x/2)}\\ &= \arctan(\tan\tfrac{x}{2}) - \log\big|\cos\tfrac{x}{2}\big| - \log\big|1+\tan\tfrac{x}{2}\big| + c\\ &= \arctan(\tan\tfrac{x}{2}) - \log\big|\sin\tfrac{x}{2}+\cos\tfrac{x}{2}\big| + c.\end{aligned}$$

Δεύτερος τρόπος. Γράφουμε

$$\frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x} = \frac{2\sin(x/2)\cos(x/2)}{2(\cos(x/2))^2+2\sin(x/2)\cos(x/2)} = \frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)+\sin(x/2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{\sin(x/2)}{\sin((x/2)+(\pi/4))}.$$

Κάνοντας αλλαγή μεταβλητής από x σε $y = \frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}$, έχουμε

$$\frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{\sin(y-\pi/4)}{\sin y} = \frac{1}{2}\,\frac{\sin y-\cos y}{\sin y} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{\cos y}{\sin y}.$$

Άρα

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}\,dx &= \int \big(1-\tfrac{\cos y}{\sin y}\big)\,dy\Big|_{y=(x/2)+(\pi/4)} = \big(y - \log|\sin y| + c\big)\big|_{y=(x/2)+(\pi/4)}\\ &= \tfrac{x}{2} - \log\big|\sin\big(\tfrac{x}{2}+\tfrac{\pi}{4}\big)\big| + c = \tfrac{x}{2} - \log\big|\sin\tfrac{x}{2}+\cos\tfrac{x}{2}\big| + c.\end{aligned}$$

Ας ελέγξει ο αναγνώστης ότι οι δύο τρόποι δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα και ας βρει τα διαστήματα στα οποία ισχύουν οι σχέσεις που βρήκαμε.

Άσκηση 7.3.5. *Βρείτε τα* $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-x-2}}\,dx$, $\int \frac{1}{5\sqrt{x-1}+3\sqrt{x+1}}\,dx$.

Λύση: Για το πρώτο ολοκλήρωμα γράφουμε $x^2-x-2 = (x-\frac{1}{2})^2 - (\frac{3}{2})^2$ και κάνουμε αλλαγή μεταβλητής από x σε $t = \frac{2}{3}(x-\frac{1}{2})$ και βρίσκουμε

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-x-2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\,dt\Big|_{t=\frac{2}{3}(x-\frac{1}{2})}.$$

Ο x ανήκει στην ένωση $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$. Αν ο x διατρέχει το $(-\infty,-1)$, τότε ο t διατρέχει το $(-\infty,-1)$ και, αν ο x διατρέχει το $(2,+\infty)$, τότε ο t διατρέχει το $(1,+\infty)$.

Αν ο t διατρέχει το $(1,+\infty)$, κάνουμε αλλαγή μεταβλητής από t σε $u=t+\sqrt{t^2-1}$. Τότε ο u διατρέχει το $(1,+\infty)$ και έχουμε $\sqrt{t^2-1}=\frac{u^2-1}{2u}$ και $dt=\frac{u^2-1}{2u^2}\,du$ και άρα

$$\int \tfrac{1}{\sqrt{t^2-1}}\,dt=\int \tfrac{1}{u}\,du\big|_{u=t+\sqrt{t^2-1}}=(\log u+c)\big|_{u=t+\sqrt{t^2-1}}=\log(t+\sqrt{t^2-1})+c.$$

Επομένως,

$$\int \tfrac{1}{\sqrt{x^2-x-2}}\,dx=\big(\log(t+\sqrt{t^2-1})+c\big)_{t=\frac{2}{3}(x-\frac{1}{2})}=\log\big(x-\tfrac{1}{2}+\sqrt{x^2-x-2}\big)+c.$$

Η σχέση αυτή ισχύει στο $(2,+\infty)$.
Αν ο t διατρέχει το $(-\infty,-1)$, κάνουμε αλλαγή μεταβλητής από t σε $u=t-\sqrt{t^2-1}$. Τότε ο u διατρέχει το $(-\infty,-1)$ και έχουμε $\sqrt{t^2-1}=-\frac{u^2-1}{2u}$ και $dt=\frac{u^2-1}{2u^2}\,du$ και άρα

$$\int \tfrac{1}{\sqrt{t^2-1}}\,dt=-\int \tfrac{1}{u}\,du\big|_{u=t-\sqrt{t^2-1}}=(-\log|u|+c)\big|_{u=t-\sqrt{t^2-1}}=-\log(-t+\sqrt{t^2-1})+c.$$

Επομένως,

$$\int \tfrac{1}{\sqrt{x^2-x-2}}\,dx=\big(-\log(-t+\sqrt{t^2-1})+c\big)_{t=\frac{2}{3}(x-\frac{1}{2})}=-\log\big(-x+\tfrac{1}{2}+\sqrt{x^2-x-2}\big)+c.$$

Η σχέση αυτή ισχύει στο $(-\infty,-1)$.
Για το δεύτερο ολοκλήρωμα κάνουμε αλλαγή μεταβλητής από x σε $t=\sqrt{x-1}$ και βρίσκουμε

$$\int \tfrac{1}{5\sqrt{x-1}+3\sqrt{x+1}}\,dx=2\int \tfrac{t}{5t+3\sqrt{t^2+2}}\,dt\big|_{t=\sqrt{x-1}}.$$

Κατόπιν, έχουμε

$$2\int \tfrac{t}{5t+3\sqrt{t^2+2}}\,dt=2\sqrt{2}\int \tfrac{s}{5s+3\sqrt{s^2+1}}\,ds\big|_{s=t/\sqrt{2}}.$$

Τέλος, κάνουμε αλλαγή μεταβλητής από s σε $u=s+\sqrt{s^2+1}$ και, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις

$$s=\tfrac{u^2-1}{2u},\qquad \sqrt{s^2+1}=\tfrac{u^2+1}{2u},\qquad ds=\tfrac{u^2+1}{2u^2}\,du,$$

βρίσκουμε

$$2\sqrt{2}\int \tfrac{s}{5s+3\sqrt{s^2+1}}\,ds=\tfrac{1}{\sqrt{2}}\int \tfrac{u^4-1}{(4u^2-1)u^2}\,du\big|_{u=s+\sqrt{s^2+1}}.$$

Τα υπόλοιπα ας τα βρει ο αναγνώστης. Να παρατηρήσουμε, όμως, ότι η μεταβλητή x διατρέχει το $[1,+\infty)$, οι μεταβλητές t και s διατρέχουν το $[0,+\infty)$ και η u διατρέχει το $[1,+\infty)$.

Άσκηση 7.3.7. [α] *Αν η $f(\sin x)$ είναι συνεχής στο $[0,\frac{\pi}{2}]$, αποδείξτε ότι και η $f(\cos x)$ είναι συνεχής στο $[0,\frac{\pi}{2}]$ και ότι $\int_0^{\pi/2} f(\sin x)\,dx=\int_0^{\pi/2} f(\cos x)\,dx$.*
Εφαρμόστε, βρίσκοντας το $\int_0^{\pi/2}(\sin x)^2\,dx$.

Λύση: Επειδή ισχύει

$$f(\cos x)=f(\sin(\tfrac{\pi}{2}-x))$$

για κάθε $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$, βλέπουμε ότι η συνάρτηση $f(\cos x)$ είναι σύνθεση της $y=\frac{\pi}{2}-x$ και της $f(\sin y)$ και άρα είναι συνεχής στο $[0,\frac{\pi}{2}]$.
Τώρα, με την αλλαγή μεταβλητής από x σε $y=\frac{\pi}{2}-x$ βρίσκουμε ότι

$$\int_0^{\pi/2} f(\cos x)\,dx=\int_0^{\pi/2} f(\cos(\tfrac{\pi}{2}-y))\,dy=\int_0^{\pi/2} f(\sin y)\,dy.$$

Εφαρμόζουμε με τη συνάρτηση $f(t)=t^2$ και έχουμε ότι

$$\int_0^{\pi/2}(\sin x)^2\,dx=\int_0^{\pi/2}(\cos x)^2\,dx.$$

Άρα

$$2\int_0^{\pi/2}(\sin x)^2\,dx=\int_0^{\pi/2}(\sin x)^2\,dx+\int_0^{\pi/2}(\cos x)^2\,dx=\int_0^{\pi/2}\,dx=\tfrac{\pi}{2}.$$

Επομένως, $\int_0^{\pi/2}(\sin x)^2\,dx = \frac{\pi}{4}$.

Άσκηση 7.3.9. [α] *Ορίζουμε* $I_n(x)=\int x^n e^x\,dx$ *για κάθε* $n\in\mathbb{Z}$, $n\geq 0$. *Αποδείξτε τον αναδρομικό τύπο* $I_{n+1}(x)=x^{n+1}e^x-(n+1)I_n(x)$ *και βρείτε μέσω αυτού το* $I_n(x)$.

Λύση: Έχουμε

$$\begin{aligned} I_{n+1}(x) &= \int x^{n+1}e^x\,dx = \int x^{n+1}\tfrac{de^x}{dx}\,dx = x^{n+1}e^x - \int \tfrac{dx^{n+1}}{dx}e^x\,dx \\ &= x^{n+1}e^x-(n+1)\int x^n e^x\,dx = x^{n+1}e^x-(n+1)I_n(x). \end{aligned} \tag{14.199}$$

Τώρα, η σχέση (14.199) γράφεται

$$\tfrac{1}{(n+1)!}I_{n+1}(x)=\tfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^x-\tfrac{1}{n!}I_n(x)$$

και από αυτήν τη σχέση βρίσκουμε επαγωγικά:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{n!}I_n(x) &= \tfrac{x^n}{n!}e^x-\tfrac{1}{(n-1)!}I_{n-1}(x) \\ &= \tfrac{x^n}{n!}e^x-\tfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}e^x+\tfrac{1}{(n-2)!}I_{n-2}(x) \\ &= \tfrac{x^n}{n!}e^x-\tfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}e^x+\tfrac{x^{n-2}}{(n-2)!}e^x-\tfrac{1}{(n-3)!}I_{n-3}(x) \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &= \tfrac{x^n}{n!}e^x-\tfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}e^x+\tfrac{x^{n-2}}{(n-2)!}e^x-\cdots+(-1)^{n-1}\tfrac{x}{1!}e^x+(-1)^n\tfrac{1}{0!}I_0(x) \\ &= \tfrac{x^n}{n!}e^x-\tfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}e^x+\tfrac{x^{n-2}}{(n-2)!}e^x-\cdots+(-1)^{n-1}\tfrac{x}{1!}e^x+(-1)^n\tfrac{1}{0!}e^x+c. \end{aligned}$$

αφού $I_0(x)=\int e^x\,dx=e^x+c$.

Άσκηση 7.3.11. *Ορίζουμε* $I_n=\int_0^{\pi/2}(\sin x)^n\,dx$ *για κάθε* $n\in\mathbb{Z}$, $n\geq 0$.
Αποδείξτε τον αναδρομικό τύπο $I_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}I_n$.
Είναι προφανές ότι $I_0=\frac{\pi}{2}$ *και* $I_1=1$. *Αποδείξτε ότι ισχύει* $I_{2n}=\frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1}{2n(2n-2)\cdots 4\cdot 2}\frac{\pi}{2}$ *και* $I_{2n+1}=\frac{2n(2n-2)\cdots 4\cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 5\cdot 3}$ *για κάθε* $n\geq 1$.
Αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{\pi}{2}=\frac{(2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n))^2}{(3\cdot 5\cdots(2n-1))^2(2n+1)}\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}$ *για κάθε* $n\geq 1$ *και* $(n+1)I_nI_{n+1}=\frac{\pi}{2}$ *για κάθε* $n\geq 0$.
Αποδείξτε ότι ισχύει $I_{2n+1}\leq I_{2n}\leq I_{2n-1}=\frac{2n+1}{2n}I_{2n+1}$ *και* $1\leq\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}\leq 1+\frac{1}{2n}$ *για κάθε* $n\geq 1$ *και, επομένως,* $\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}\to 1$.
Αποδείξτε τον τύπο του Wallis, $\frac{1}{2n+1}\big(\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n-2)2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)(2n-1)}\big)^2\to\frac{\pi}{2}$.
Αποδείξτε ότι $\binom{2n}{n}\frac{\sqrt{n}}{4^n}=\frac{(2n)!}{(n!)^2}\frac{\sqrt{n}}{4^n}\to\frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

Λύση: Το πρώτο ερώτημα. Έχουμε

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \int_0^{\pi/2}(\sin x)^{n+2}\,dx = -\int_0^{\pi/2}(\sin x)^{n+1}\tfrac{d\cos x}{dx}\,dx \\ &= \int_0^{\pi/2}\tfrac{d(\sin x)^{n+1}}{dx}\cos x\,dx \\ &= (n+1)\int_0^{\pi/2}(\sin x)^n(\cos x)^2\,dx = (n+1)\int_0^{\pi/2}(\sin x)^n(1-(\sin x)^2)\,dx \\ &= (n+1)\int_0^{\pi/2}(\sin x)^n\,dx-(n+1)\int_0^{\pi/2}(\sin x)^{n+2}\,dx \\ &= (n+1)I_n-(n+1)I_{n+2} \end{aligned}$$

και άρα

$$(n+2)I_{n+2}=(n+1)I_n. \tag{14.200}$$

Το δεύτερο ερώτημα. Η σχέση (14.200) μας δίνει

$$I_{2n}=\tfrac{2n-1}{2n}I_{2n-2}=\tfrac{(2n-1)(2n-3)}{2n(2n-2)}I_{2n-4}=\ldots=\tfrac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1}{2n(2n-2)\cdots 4\cdot 2}I_0=\tfrac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1}{2n(2n-2)\cdots 4\cdot 2}\tfrac{\pi}{2}$$

και

$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} I_{2n-1} = \frac{2n(2n-2)}{(2n+1)(2n-1)} I_{2n-3} = \ldots = \frac{2n(2n-2)\cdots 4\cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 5\cdot 3} I_1 = \frac{2n(2n-2)\cdots 4\cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 5\cdot 3}.$$

Το τρίτο ερώτημα. Η σχέση

$$\frac{\pi}{2} = \frac{(2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n))^2}{(3\cdot 5\cdots(2n-1))^2(2n+1)} \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \tag{14.201}$$

αποδεικνύεται αμέσως από τους τύπους των I_{2n} και I_{2n+1} που μόλις αποδείξαμε.
Από τη σχέση (14.200) συνεπάγεται ότι ισχύει $(n+2)I_{n+2}I_{n+1} = (n+1)I_{n+1}I_n$ για κάθε $n \geq 0$. Αυτό σημαίνει ότι η ακολουθία $\big((n+1)I_{n+1}I_n\big)$ είναι σταθερή και, επομένως, ισχύει

$$(n+1)I_{n+1}I_n = I_1 I_0 = \frac{\pi}{2}.$$

Το τέταρτο ερώτημα. Επειδή ισχύει $(\sin x)^{n+1} \leq (\sin x)^n$ για κάθε $n \geq 0$ και κάθε $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, συνεπάγεται ότι ισχύει

$$I_{n+1} = \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{n+1}\, dx \leq \int_0^{\pi/2} (\sin x)^n\, dx = I_n.$$

Άρα, συνδυάζοντας και με την (14.200), έχουμε

$$I_{2n+1} \leq I_{2n} \leq I_{2n-1} = \frac{2n+1}{2n} I_{2n+1}.$$

Από αυτήν τη σχέση συνεπάγεται η $1 \leq \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \leq 1 + \frac{1}{2n}$ και άρα έχουμε το όριο

$$\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \to 1.$$

Το πέμπτο ερώτημα. Από το τελευταίο όριο και από την (14.201) συνεπάγεται ότι

$$\frac{1}{2n+1}\Big(\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n-2)2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)(2n-1)}\Big)^2 \to \frac{\pi}{2}. \tag{14.202}$$

Το έκτο ερώτημα. Πολλαπλασιάζοντας το τελευταίο όριο με το $\frac{2n+1}{n} \to 2$, βρίσκουμε το

$$\frac{1}{n}\Big(\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n-2)2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)(2n-1)}\Big)^2 \to \pi$$

και από αυτό το

$$\sqrt{n}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n-2)2n} \to \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

Πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή με το $2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n-2)2n = 2^n n!$ και βρίσκουμε

$$\sqrt{n}\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \to \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

Άσκηση 7.3.12. *Αν ο $n \in \mathbb{N}$ είναι άρτιος, αποδείξτε ότι ισχύει $\int x^n e^{-x^2}\, dx = P_{n-1}(x)e^{-x^2} + \frac{n!}{2^{n-1}(n/2)!}\int e^{-x^2}\, dx$, όπου $P_{n-1}(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού $n-1$.*

Λύση: Με την αρχή της επαγωγής.
Για $n = 2$ έχουμε

$$\int x^2 e^{-x^2}\, dx = -\frac{1}{2}\int x\frac{de^{-x^2}}{dx}\, dx = -\frac{1}{2}xe^{-x^2} + \int \frac{dx}{dx}e^{-x^2}\, dx = -\frac{1}{2}xe^{-x^2} + \int e^{-x^2}\, dx.$$

Έστω ότι για κάποιον άρτιο $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $\int x^n e^{-x^2}\, dx = P_{n-1}(x)e^{-x^2} + \frac{n!}{2^{n-1}(n/2)!}\int e^{-x^2}\, dx$, όπου $P_{n-1}(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού $n-1$. Τότε

$$\begin{aligned}\int x^{n+2}e^{-x^2}\, dx &= -\frac{1}{2}\int x^{n+1}\frac{de^{-x^2}}{dx}\, dx = -\frac{1}{2}x^{n+1}e^{-x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx^{n+1}}{dx}e^{-x^2}\, dx\\ &= -\frac{1}{2}x^{n+1}e^{-x^2} + \frac{n+1}{2}\int x^n e^{-x^2}\, dx\\ &= -\frac{1}{2}x^{n+1}e^{-x^2} + \frac{n+1}{2}P_{n-1}(x)e^{-x^2} + \frac{n+1}{2}\frac{n!}{2^{n-1}(n/2)!}\int e^{-x^2}\, dx\\ &= P_{n+1}(x)e^{-x^2} + \frac{(n+2)!}{2^{n+1}((n+2)/2)!}\int e^{-x^2}\, dx,\end{aligned}$$

όπου το πολυώνυμο $P_{n+1}(x) = -\frac{1}{2}x^{n+1} + \frac{n+1}{2}P_{n-1}(x)$ είναι βαθμού $n+1$.

Άσκηση 7.3.16. *Αποδείξτε το δεύτερο θεώρημα μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού: αν η $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι μονότονη και έχει συνεχή παράγωγο στο $[a,b]$ και η $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a,b]$, τότε υπάρχει $\xi \in [a,b]$ ώστε $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)\int_a^\xi g(x)\,dx + f(b)\int_\xi^b g(x)\,dx$.*
Έστω ότι η ϕ έχει μονότονη παράγωγο και συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $[a,b]$ και ότι υπάρχει $m>0$ ώστε να ισχύει $\phi'(x) \geq m$ για κάθε $x \in [a,b]$. Αποδείξτε ότι $\left|\int_a^b \sin(\phi(x))\,dx\right| \leq \frac{4}{m}$.

Λύση: Το πρώτο ερώτημα. Θεωρούμε το αόριστο ολοκλήρωμα $G(x) = \int_a^x g(t)\,dt$.
Ισχύει $G'(x) = g(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$, οπότε

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \int_a^b f(x)G'(x)\,dx = f(b)G(b) - \int_a^b f'(x)G(x)\,dx. \tag{14.203}$$

Τώρα, έστω ότι η f είναι αύξουσα στο $[a,b]$, οπότε ισχύει $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a,b]$. Γνωρίζουμε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in [a,b]$ ώστε να ισχύει $G(x_1) \leq G(x) \leq G(x_2)$ και άρα $f'(x)G(x_1) \leq f'(x)G(x) \leq f'(x)G(x_2)$ για κάθε $x \in [a,b]$. Συνεπάγεται

$$\int_a^b f'(x)G(x_1)\,dx \leq \int_a^b f'(x)G(x)\,dx \leq \int_a^b f'(x)G(x_2)\,dx,$$

δηλαδή

$$(f(b)-f(a))G(x_1) \leq \int_a^b f'(x)G(x)\,dx \leq (f(b)-f(a))G(x_2). \tag{14.204}$$

Αν $f(a) < f(b)$, συνεπάγεται

$$G(x_1) \leq \frac{1}{f(b)-f(a)}\int_a^b f'(x)G(x)\,dx \leq G(x_2),$$

οπότε υπάρχει $\xi \in [a,b]$ ώστε

$$\frac{1}{f(b)-f(a)}\int_a^b f'(x)G(x)\,dx = G(\xi)$$

και άρα

$$\int_a^b f'(x)G(x)\,dx = (f(b)-f(a))G(\xi). \tag{14.205}$$

Αν $f(a) = f(b)$, τότε από την (14.204) συνεπάγεται $\int_a^b f'(x)G(x)\,dx = 0$, οπότε η (14.205) ισχύει για οποιονδήποτε $\xi \in [a,b]$.
Τώρα, από τις (14.203) και (14.205) συνεπάγεται

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)\,dx &= f(b)G(b) - (f(b)-f(a))G(\xi) \\ &= f(a)G(\xi) + f(b)(G(b)-G(\xi)) \\ &= f(a)\int_a^\xi g(x)\,dx + f(b)\int_\xi^b g(x)\,dx.\end{aligned} \tag{14.206}$$

Αν η f είναι φθίνουσα στο $[a,b]$, η απόδειξη είναι παρόμοια.
Το δεύτερο ερώτημα. Γράφουμε

$$\int_a^b \sin(\phi(x))\,dx = \int_a^b \frac{1}{\phi'(x)}\,\phi'(x)\sin(\phi(x))\,dx.$$

Ορίζουμε τις συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{\phi'(x)}$ και $g(x) = \phi'(x)\sin(\phi(x))$ για $x \in [a,b]$.
Τότε η f είναι μονότονη και έχει συνεχή παράγωγο και η g είναι συνεχής στο $[a,b]$. Άρα, σύμφωνα με το προηγούμενο αποτέλεσμα, υπάρχει $\xi \in [a,b]$ ώστε

$$\begin{aligned}\int_a^b \sin(\phi(x))\,dx &= \frac{1}{\phi'(a)}\int_a^\xi \phi'(x)\sin(\phi(x))\,dx + \frac{1}{\phi'(b)}\int_\xi^b \phi'(x)\sin(\phi(x))\,dx \\ &= -\frac{\cos(\phi(\xi))-\cos(\phi(a))}{\phi'(a)} - \frac{\cos(\phi(b))-\cos(\phi(\xi))}{\phi'(b)}\end{aligned}$$

και, επομένως,

$$\left|\int_a^b \sin(\phi(x))\,dx\right| \leq \frac{|\cos(\phi(\xi))-\cos(\phi(a))|}{|\phi'(a)|} + \frac{|\cos(\phi(b))-\cos(\phi(\xi))|}{|\phi'(b)|} \leq \frac{2}{m} + \frac{2}{m} = \frac{4}{m}.$$

Άσκηση 7.3.17. *Έστω $a < b$ και $Q_n(x) = (x-a)^n(x-b)^n$ για κάθε n. Ορίζουμε τα πολυώνυμα $P_0(x) = 1$ και $P_n(x) = \frac{1}{n!(b-a)^n}{Q_n}^{(n)}(x)$ για κάθε n.*

Αποδείξτε ότι το $P_n(x)$ έχει βαθμό n.

Αποδείξτε ότι $\int_a^b P(x)P_n(x)\,dx = 0$ για κάθε πολυώνυμο $P(x)$ βαθμού $< n$.

Αποδείξτε ότι $\int_a^b P_n(x)P_m(x)\,dx = 0$, αν $m \neq n$, και $\int_a^b (P_n(x))^2\,dx = \frac{b-a}{2n+1}$.

Αποδείξτε ότι για κάθε πολυώνυμο $P(x)$ βαθμού n υπάρχουν $c_0, \ldots, c_n$ ώστε να ισχύει $P(x) = \sum_{k=0}^n c_k P_k(x)$ για κάθε x και, κατόπιν, αποδείξτε ότι οι $c_0, \ldots, c_n$ δίνονται από τον τύπο $c_k = \frac{2k+1}{b-a}\int_a^b P(x)P_k(x)\,dx$.

Έστω $P(x)$ πολυώνυμο βαθμού n με την ιδιότητα: $\int_a^b Q(x)P(x)\,dx = 0$ για κάθε πολυώνυμο $Q(x)$ βαθμού $< n$. Αποδείξτε ότι υπάρχει αριθμός c ώστε να ισχύει $P(x) = cP_n(x)$ για κάθε x.

Λύση: Το πρώτο ερώτημα. Κάθε φορά που παραγωγίζουμε ένα πολυώνυμο ο βαθμός του μειώνεται κατά μία μονάδα. Επειδή το $Q_n(x)$ έχει βαθμό $2n$, συνεπάγεται ότι το ${Q_n}^{(n)}(x)$ έχει βαθμό n.

Το δεύτερο ερώτημα. Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι

$${Q_n}^{(k)}(a) = {Q_n}^{(k)}(b) = 0 \qquad \text{αν } k = 0, \ldots, n-1$$

και

$${Q_n}^{(n)}(a) = {Q_n}^{(n)}(b) = n!$$

Τώρα, έστω ότι το $P(x)$ είναι βαθμού $k < n$. Εφαρμόζουμε διαδοχικές ολοκληρώσεις κατά παράγοντες:

$$\begin{aligned}\int_a^b P(x){Q_n}^{(n)}(x)\,dx &= -\int_a^b P'(x){Q_n}^{(n-1)}(x)\,dx \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &= (-1)^{k+1}\int_a^b P^{(k+1)}(x){Q_n}^{(n-k-1)}(x)\,dx = 0,\end{aligned} \tag{14.207}$$

διότι το πολυώνυμο $P^{(k+1)}(x)$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

Το τρίτο ερώτημα. Αν $m < n$, τότε, βάσει του αποτελέσματος του [α], $\int_a^b P_n(x)P_m(x)\,dx = 0$ αφού ο βαθμός του $P_m(x)$ είναι μικρότερος από τον βαθμό του $P_n(x)$. Το ίδιο ισχύει αν $n < m$ με εναλλαγή των m, n.

Τώρα, έστω $m = n$. Τότε η σχέση (14.207) με $k = n-1$ και $P(x) = {Q_n}^{(n)}(x)$ δεν καταλήγει σε αποτέλεσμα ίσο με 0 αλλά στο

$$\int_a^b {Q_n}^{(n)}(x){Q_n}^{(n)}(x)\,dx = (-1)^n\int_a^b {Q_n}^{(2n)}(x){Q_n}^{(0)}(x)\,dx = (-1)^n(2n)!\int_a^b Q_n(x)\,dx,$$

Με διαδοχικές ολοκληρώσεις κατά παράγοντες βρίσκουμε

$$\begin{aligned}\int_a^b Q_n(x)\,dx &= \int_a^b (x-a)^n(x-b)^n\,dx = (-1)^n\frac{n(n-1)\cdots 2\cdot 1}{(n+1)(n+2)\cdots(2n-1)2n}\int_a^b (x-b)^{2n}\,dx \\ &= (-1)^{n+1}\frac{n(n-1)\cdots 2\cdot 1}{(n+1)(n+2)\cdots(2n-1)2n(2n+1)}(a-b)^{2n+1} = (-1)^n\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}(b-a)^{2n+1}.\end{aligned}$$

Άρα

$$\int_a^b {Q_n}^{(n)}(x){Q_n}^{(n)}(x)\,dx = (-1)^n(2n)!\int_a^b Q_n(x)\,dx = \frac{(n!)^2}{2n+1}(b-a)^{2n+1}$$

και, επομένως,

$$\int_a^b (P_n(x))^2\,dx = \frac{1}{(n!)^2(b-a)^{2n}}\,\frac{(n!)^2}{2n+1}(b-a)^{2n+1} = \frac{b-a}{2n+1}.$$

Το τέταρτο ερώτημα. Έστω $n = 0$ και έστω ότι το πολυώνυμο $P(x)$ είναι βαθμού 0. Τότε ισχύει $P(x) = c_0 = c_0P_0(x)$ για κάθε x.

Έστω ότι για κάποιον n και για κάθε πολυώνυμο $P(x)$ βαθμού n υπάρχουν $c_0, \dots, c_n$ ώστε να ισχύει $P(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k P_k(x)$ για κάθε x.
Αν το πολυώνυμο $P(x)$ είναι βαθμού $n+1$, τότε έχουμε $P(x) = R(x) + a_{n+1}x^{n+1}$, όπου το $R(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού $\leq n$. Επίσης, το $P_{n+1}(x)$ είναι βαθμού $n+1$, οπότε είναι $P_{n+1}(x) = S(x) + b_{n+1}x^{n+1}$, όπου το $S(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού $\leq n$. Άρα

$$P(x) = R(x) + \tfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}(P_{n+1}(x) - S(x)) = R(x) - \tfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}S(x) + \tfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}P_{n+1}(x).$$

Το πολυώνυμο $R(x) - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}S(x)$ είναι βαθμού $\leq n$, οπότε υπάρχουν $c_0, \dots, c_n$ ώστε να ισχύει $R(x) - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}S(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k P_k(x)$ για κάθε x. Άρα, αν θέσουμε $c_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$, έχουμε ότι

$$P(x) = \textstyle\sum_{k=0}^{n+1} c_k P_k(x) \qquad \text{για κάθε } x.$$

Άρα, βάσει της αρχής της επαγωγής, για κάθε πολυώνυμο $P(x)$ βαθμού n υπάρχουν $c_0, \dots, c_n$ ώστε να ισχύει $P(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k P_k(x)$ για κάθε x.
Τώρα, από τα αποτελέσματα του τρίτου ερωτήματος έχουμε ότι

$$\int_a^b P(x)P_k(x)\,dx = \textstyle\sum_{j=0}^{n} c_j \int_a^b P_j(x)P_k(x)\,dx = c_k \int_a^b (P_k(x))^2\,dx = c_k \frac{b-a}{2k+1}.$$

Το πέμπτο ερώτημα. Έστω $P(x)$ πολυώνυμο βαθμού n με την ιδιότητα: $\int_a^b Q(x)P(x)\,dx = 0$ για κάθε πολυώνυμο $Q(x)$ βαθμού $< n$.
Πρώτον, έχουμε ότι υπάρχουν $c_0, \dots, c_n$ ώστε να ισχύει $P(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k P_k(x)$ για κάθε x. Τώρα, επειδή κάθε $P_k(x)$ με $k < n$ είναι βαθμού $< n$, συνεπάγεται

$$c_k = \tfrac{2k+1}{b-a} \int_a^b P(x)P_k(x)\,dx = 0 \qquad \text{για } 0 \leq k < n.$$

Άρα $P(x) = c_n P_n(x)$ για κάθε x.

Άσκηση 7.3.18. *Έστω f με συνεχή παράγωγο στο $[a,b]$ με $f(a) = f(b) = 0$ και $\int_a^b (f(x))^2\,dx = 1$. Αποδείξτε ότι $\int_a^b xf(x)f'(x)\,dx = -\frac{1}{2}$ και την ανισότητα $\int_a^b x^2(f(x))^2\,dx \int_a^b (f'(x))^2\,dx > \frac{1}{4}$.*

Λύση: Ισχύει

$$\int_a^b xf(x)f'(x)\,dx = \tfrac{1}{2}\int_a^b x\tfrac{d(f(x))^2}{dx}\,dx = -\tfrac{1}{2}\int_a^b \tfrac{dx}{dx}(f(x))^2\,dx = -\tfrac{1}{2}\int_a^b (f(x))^2\,dx = -\tfrac{1}{2}.$$

Εφαρμόζουμε την ανισότητα των Schwarz, Buniakowsky στην άσκηση 6.4.18 με τις συναρτήσεις $|xf(x)|$ και $|f'(x)|$ και βρίσκουμε

$$\tfrac{1}{4} = \Big|\int_a^b xf(x)f'(x)\,dx\Big|^2 \leq \Big(\int_a^b |xf(x)||f'(x)|\,dx\Big)^2 \leq \int_a^b x^2(f(x))^2\,dx \int_a^b (f'(x))^2\,dx.$$

Αν ισχύει η ισότητα $\int_a^b x^2(f(x))^2\,dx \int_a^b (f'(x))^2\,dx = \frac{1}{4}$, τότε αφενός ισχύει η ισότητα

$$\int_a^b |xf(x)||f'(x)|\,dx = \Big(\int_a^b x^2(f(x))^2\,dx\Big)^{1/2}\Big(\int_a^b (f'(x))^2\,dx\Big)^{1/2} \tag{14.208}$$

αφετέρου ισχύει η ισότητα

$$\Big|\int_a^b xf(x)f'(x)\,dx\Big| = \int_a^b |xf(x)||f'(x)|\,dx. \tag{14.209}$$

Από την (14.208) συνεπάγεται ότι υπάρχουν αριθμοί $s, t \geq 0$ όχι και οι δύο ίσοι με 0 ώστε να ισχύει

$$sx^2(f(x))^2 = t(f'(x))^2 \qquad \text{για κάθε } x \in [a,b]. \tag{14.210}$$

Από την (14.209) συνεπάγεται ότι είτε ισχύει $xf(x)f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a,b]$ είτε ισχύει $xf(x)f'(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [a,b]$. Επειδή $\int_a^b xf(x)f'(x)\,dx = -\frac{1}{4}$, συνεπάγεται ότι ισχύει

$$xf(x)f'(x) \leq 0 \qquad \text{για κάθε } x \in [a,b].$$

Επομένως, από την (14.210) συνεπάγεται ότι υπάρχουν $\kappa, \lambda \geq 0$ ($\kappa = \sqrt{s}$ και $\lambda = \sqrt{t}$) όχι και οι δύο ίσοι με 0 ώστε να ισχύει

$$\kappa x f(x) = -\lambda f'(x) \qquad \text{για κάθε } x \in [a, b].$$

Αν $\lambda = 0$, τότε $\kappa \neq 0$, οπότε ισχύει $x f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b]$, το οποίο αντιφάσκει με το $\int_a^b x f(x) f'(x)\, dx = -\frac{1}{4}$.
Άρα $\lambda > 0$, οπότε, παίρνοντας $\mu = \frac{\kappa}{2\lambda}$, έχουμε ότι ισχύει

$$f'(x) + 2\mu x f(x) = 0 \qquad \text{για κάθε } x \in [a, b].$$

Συνεπάγεται ότι ισχύει

$$\big(e^{\mu x^2} f(x)\big)' = 0 \qquad \text{για κάθε } x \in [a, b],$$

οπότε η συνάρτηση $e^{\mu x^2} f(x)$ είναι σταθερή στο $[a, b]$.
Τώρα, επειδή $f(a) = 0$ συνεπάγεται ότι ισχύει $e^{\mu x^2} f(x) = 0$ και άρα $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b]$.
Κι αυτό, όμως, είναι άτοπο διότι $\int_a^b x f(x) f'(x)\, dx = -\frac{1}{4}$.
Άρα η ισότητα $\int_a^b x^2 (f(x))^2\, dx \int_a^b (f'(x))^2\, dx = \frac{1}{4}$ δεν είναι σωστή και, επομένως, έχουμε ότι $\int_a^b x^2 (f(x))^2\, dx \int_a^b (f'(x))^2\, dx > \frac{1}{4}$.

Άσκηση 7.3.19. *Αποδείξτε ότι* $\int_1^n \log x\, dx \leq \sum_{k=2}^n \log k \leq \int_2^n \log x\, dx + \log n$ *για κάθε* $n \geq 2$.
Αποδείξτε ότι $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \to \frac{1}{e}$.

Λύση: Το πρώτο ερώτημα. Η συνάρτηση $\log x$ είναι αύξουσα, οπότε για κάθε $k = 1, \ldots, n-1$ ισχύει

$$\log k \leq \log x \leq \log(k+1) \qquad \text{για κάθε } x \in [k, k+1]$$

και άρα

$$\log k \leq \textstyle\int_k^{k+1} \log x\, dx \leq \log(k+1).$$

Προσθέτουμε τις αριστερές ανισότητες για $k = 2, \ldots, n-1$ και βρίσκουμε

$$\textstyle\sum_{k=2}^{n-1} \log k \leq \int_2^n \log x\, dx.$$

Τέλος, προσθέτουμε τις δεξιές ανισότητες για $k = 1, \ldots, n-1$ και βρίσκουμε

$$\textstyle\int_1^n \log x\, dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} \log(k+1) = \sum_{k=2}^n \log k.$$

Από τις δύο τελευταίες ανισότητες συνεπάγεται η

$$\textstyle\int_1^n \log x\, dx \leq \sum_{k=2}^n \log k \leq \int_2^n \log x\, dx + \log n.$$

Το δεύτερο ερώτημα. Από την τελευταία ανισότητα έχουμε

$$n \log n - n + 1 \leq \log(n!) \leq n \log n - n - 2\log 2 + 2 + \log n,$$

οπότε

$$-n + 1 \leq \log(n!) - n \log n \leq -n - 2\log 2 + 2 + \log n,$$

οπότε

$$-1 + \tfrac{1}{n} \leq \log \tfrac{\sqrt[n]{n!}}{n} \leq -1 - \tfrac{2\log 2 - 2}{n} + \tfrac{\log n}{n}.$$

Άρα $\log \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \to -1$, οπότε $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \to \frac{1}{e}$.

Άσκηση 7.3.20. [α] *Έστω* $m, n \in \mathbb{Z}$ *με* $m \leq n$ *και αριθμοί* $a_m, \ldots, a_n$. *Ορίζουμε την τμηματικά σταθερή συνάρτηση* $A : [m, n] \to \mathbb{R}$ *με τύπο* $A(x) = \sum_{k=m}^{[x]} a_k$ *για κάθε* $x \in [m, n]$. *Κατανοήστε το γράφημα της* A. *Ποιά είναι τα σημεία ασυνέχειας της* A *και ποιά είναι τα αντίστοιχα άλματά της;*
Έστω $f : [m, n] \to \mathbb{R}$ *με συνεχή παράγωγο στο* $[m, n]$. *Αποδείξτε ότι για κάθε* $x \in [m, n]$ *ισχύει*

$\sum_{k=m}^{[x]} a_k f(k) = A(x)f(x) - \int_m^x A(t)f'(t)\,dt$.

[β] *Είτε κατευθείαν είτε εφαρμόζοντας το [α] με* $m=1$, $a_k=1$ *για κάθε* k *και* $f(x)=\frac{1}{x^p}$, *αποδείξτε ότι ισχύει* $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^p} = \frac{1}{n^{p-1}} + p\int_1^n \frac{[x]}{x^{p+1}}\,dx$ *για κάθε* n *και κάθε* p.

[ε] *Βάσει του [β], αποδείξτε ότι ισχύει* $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \log n + 1 - \int_1^n \frac{x-[x]}{x^2}\,dx$ *για κάθε* n.

Αν $x_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log n$ *για κάθε* n, *αποδείξτε ότι η ακολουθία* (x_n) *είναι φθίνουσα και συγκλίνει.*

[στ] *Έστω* $m,n\in\mathbb{Z}$ *με* $m\le n$ *και* $f:[m,n]\to\mathbb{R}$ *με συνεχή παράγωγο στο* $[m,n]$. *Είτε κατευθείαν είτε βάσει του [α], αποδείξτε τον τύπο άθροισης του Euler,* $\sum_{k=m}^{n} f(k) = \int_m^n f(x)\,dx + \int_m^n f'(x)(x-[x]-\frac{1}{2})\,dx + \frac{f(m)+f(n)}{2}$.

[ζ] *Έστω* $m,n\in\mathbb{Z}$ *με* $m\le n$ *και* $f:[m,n]\to\mathbb{R}$ *με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο* $[m,n]$. *Θεωρούμε την* $\phi(x) = \int_m^x (t-[t]-\frac{1}{2})\,dt$ *για κάθε* $x\in[m,n]$. *Αποδείξτε, βάσει του [στ], ότι* $\sum_{k=m}^{n} f(k) = \int_m^n f(x)\,dx - \int_m^n f''(x)\phi(x)\,dx + \frac{f(m)+f(n)}{2}$.

[η] *Έστω* $\phi(x) = \int_1^x (t-[t]-\frac{1}{2})\,dt$ *για κάθε* $x\in[1,+\infty)$. *Εφαρμόζοντας το [ζ] με* $m=1$ *και με την* $f(x)=\log x$, *αποδείξτε ότι ισχύει* $\log(n!) = (n+\frac{1}{2})\log n - n + 1 + \int_1^n \frac{\phi(x)}{x^2}\,dx$ *για κάθε* n.

[θ] *Δείτε στην άσκηση 6.4.10 κάποιες απλές ιδιότητες της* $\phi(x)$ *στα [ζ],[η].*

Αν $x_n = \frac{n!}{e^{-n}n^{n+(1/2)}}$ *για κάθε* n, *αποδείξτε, βάσει του [η], ότι η ακολουθία* (x_n) *συγκλίνει σε κάποιον θετικό αριθμό.*

Αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{{x_n}^2}{x_{2n}} = \frac{2\cdot4\cdot6\cdots(2n-2)(2n)}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-3)(2n-1)}\left(\frac{2}{n}\right)^{1/2}$ *για κάθε* n *και, βάσει του τύπου του Wallis στην άσκηση 7.3.11, αποδείξτε ότι* $\frac{{x_n}^2}{x_{2n}}\to\sqrt{2\pi}$.

Τέλος, αποδείξτε τον πολύ σημαντικό τύπο του Stirling, $\frac{n!}{\sqrt{2\pi}\,e^{-n}n^{n+(1/2)}}\to 1$.

Λύση: [α] Αν $x\in[m,m+1)$, τότε $[x]=m$ και άρα $A(x)=\sum_{k=m}^{m} a_k = a_m$.
Αν $x\in[m+1,m+2)$, τότε $[x]=m+1$ και άρα $A(x)=\sum_{k=m}^{m+1} a_k = a_m + a_{m+1}$.
Και, γενικότερα, αν $x\in[j,j+1)$, όπου $m\le j\le n-1$, τότε $[x]=j$ και άρα $A(x)=\sum_{k=m}^{j} a_k = a_m+\cdots+a_j$.
Τέλος, αν $x=n$, τότε $A(x)=\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m+\cdots+a_n$.
Επομένως, η A είναι τμηματικά σταθερή στο διάστημα $[m,n]$ και παρουσιάζει *πιθανές* ασυνέχειες στα σημεία $m+1,\ldots,n$. Αν $m+1\le j\le n$ και $a_j\ne 0$, τότε η f έχει άλμα στον j ίσο με a_j.
Τώρα, αν $m\le j\le n-1$, έχουμε

$$\int_j^{j+1} A(t)f'(t)\,dt = (a_m+\cdots+a_j)\int_j^{j+1} f'(t)\,dt = (a_m+\cdots+a_j)(f(j+1)-f(j))$$

και, αν $x\in[j,j+1)$ ή, ισοδύναμα, $j=[x]$, τότε

$$\int_j^{x} A(t)f'(t)\,dt = (a_m+\cdots+a_j)\int_j^{x} f'(t)\,dt = (a_m+\cdots+a_j)(f(x)-f(j)).$$

Από αυτές τις σχέσεις συνεπάγεται

$$\begin{aligned}
\int_m^x A(t)f'(t)\,dt &= \sum_{k=m}^{[x]-1} \int_k^{k+1} A(t)f'(t)\,dt + \int_{[x]}^x A(t)f'(t)\,dt \\
&= \sum_{k=m}^{[x]-1}(a_m+\cdots+a_k)(f(k+1)-f(k)) \\
&\quad + (a_m+\cdots+a_{[x]})(f(x)-f([x])) \\
&= \sum_{k=m}^{[x]-1}(a_m+\cdots+a_k)f(k+1) - \sum_{k=m}^{[x]-1}(a_m+\cdots+a_k)f(k) \\
&\quad + (a_m+\cdots+a_{[x]})(f(x)-f([x])) \\
&= \sum_{k=m+1}^{[x]}(a_m+\cdots+a_{k-1})f(k) - \sum_{k=m}^{[x]-1}(a_m+\cdots+a_k)f(k) \\
&\quad + (a_m+\cdots+a_{[x]})(f(x)-f([x])) \\
&= \sum_{k=m+1}^{[x]-1}(a_m+\cdots+a_{k-1})f(k) + (a_m+\cdots+a_{[x]-1})f([x]) - a_mf(m) \\
&\quad - \sum_{k=m+1}^{[x]-1}(a_m+\cdots+a_k)f(k) + (a_m+\cdots+a_{[x]})(f(x)-f([x])) \\
&= -\sum_{k=m+1}^{[x]-1} a_kf(k) - a_mf(m) - a_{[x]}f([x]) + (a_m+\cdots+a_{[x]})f(x) \\
&= -\sum_{k=m}^{[x]} a_kf(k) + (a_m+\cdots+a_{[x]})f(x) \\
&= -\sum_{k=m}^{[x]} a_kf(k) + A(x)f(x)
\end{aligned}$$

και, επομένως,

$$\sum_{k=m}^{[x]} a_kf(k) = A(x)f(x) - \int_m^x A(t)f'(t)\,dt. \tag{14.211}$$

[β] Το αποτέλεσμα είναι άμεσο πόρισμα της (14.211) αν σκεφτούμε ότι, με $m=1$ και $a_k=1$ για κάθε k, είναι

$$A(x) = \sum_{k=1}^{[x]} 1 = [x].$$

Τότε με $f(t)=\frac{1}{t^p}$ και $x=n$ έχουμε

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^p} = \frac{1}{n^{p-1}} + p\int_1^n \frac{[x]}{x^{p+1}}\,dx. \tag{14.212}$$

[ε] Παίρνοντας $p=1$ η (14.212) δίνει

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \int_1^n \frac{[x]}{x^2}\,dx = \log n + 1 - \int_1^n \frac{x-[x]}{x^2}\,dx$$

οπότε

$$x_n = 1 - \int_1^n \frac{x-[x]}{x^2}\,dx.$$

Επειδή ισχύει $x-[x]\geq 0$ για κάθε x, έχουμε ότι

$$x_{n+1}-x_n = -\int_n^{n+1} \frac{x-[x]}{x^2}\,dx \leq 0$$

και άρα η (x_n) είναι φθίνουσα.

Επίσης, ισχύει $x-[x]<1$ για κάθε x, οπότε

$$x_n \geq 1 - \int_1^n \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{1}{n} > 0.$$

Άρα η (x_n) ως φθίνουσα και κάτω φραγμένη συγκλίνει.

[στ] Εφαρμόζουμε την (14.211) πάλι με $a_k=1$ για κάθε k και έχουμε

$$A(x) = \sum_{k=m}^{[x]} 1 = [x]-m+1,$$

οπότε με $x=n$ βρίσκουμε

$$\begin{aligned}
\sum_{k=m}^n f(k) &= (n-m+1)f(n) - \int_m^n([x]-m+1)f'(x)\,dx \\
&= (n-m+1)f(n) - \int_m^n(x-m+\tfrac{1}{2})f'(x)\,dx \\
&\quad + \int_m^n(x-[x]-\tfrac{1}{2})f'(x)\,dx \\
&= (n-m+1)f(n) - (n-m+\tfrac{1}{2})f(n) + \tfrac{1}{2}f(m) \\
&\quad + \int_m^n(x-m+\tfrac{1}{2})'f(x)\,dx + \int_m^n(x-[x]-\tfrac{1}{2})f'(x)\,dx \\
&= \int_m^n f(x)\,dx + \int_m^n f'(x)(x-[x]-\tfrac{1}{2})\,dx + \frac{f(m)+f(n)}{2}.
\end{aligned} \tag{14.213}$$

[ζ] Από την άσκηση 6.4.10 γνωρίζουμε ότι αν ο j είναι ακέραιος, τότε $\int_j^{j+1}(x-[x]-\frac{1}{2})\,dx=0$. Άρα, αν ο k είναι ακέραιος, τότε

$$\phi(k)=\int_m^k(t-[t]-\tfrac{1}{2})\,dt=\sum_{j=m}^{k-1}\int_j^{j+1}(t-[t]-\tfrac{1}{2})\,dt=0.$$

Άρα, αν ο k είναι ακέραιος, έχουμε

$$\begin{aligned}\int_k^{k+1}f'(x)(x-[x]-\tfrac{1}{2})\,dx&=\int_k^{k+1}f'(x)\phi'(x)\,dx\\&=f'(k+1)\phi(k+1)-f'(k)\phi(k)-\int_k^{k+1}f''(x)\phi(x)\,dx\\&=-\int_k^{k+1}f''(x)\phi(x)\,dx.\end{aligned}$$

Συνεπάγεται

$$\begin{aligned}\int_m^n f'(x)(x-[x]-\tfrac{1}{2})\,dx&=\sum_{k=m}^{n-1}\int_k^{k+1}f'(x)(x-[x]-\tfrac{1}{2})\,dx\\&=-\sum_{k=m}^{n-1}\int_k^{k+1}f''(x)\phi(x)\,dx=-\int_m^n f''(x)\phi(x)\,dx.\end{aligned}$$

Επομένως, από την (14.213) έχουμε

$$\sum_{k=m}^n f(k)=\int_m^n f(x)\,dx-\int_m^n f''(x)\phi(x)\,dx+\frac{f(m)+f(n)}{2}. \tag{14.214}$$

[η] Εφαρμόζουμε την (14.214) με $m=1$ και με την $f(x)=\log x$ και βρίσκουμε

$$\sum_{k=1}^n\log k=\int_1^n\log x\,dx+\int_1^n\frac{\phi(x)}{x^2}\,dx+\frac{\log n}{2}$$

ή, ισοδύναμα,

$$\log(n!)=(n+\tfrac{1}{2})\log n-n+1+\int_1^n\frac{\phi(x)}{x^2}\,dx.$$

[θ] Από την τελευταία σχέση και από την $x_n=\frac{n!}{e^{-n}n^{n+(1/2)}}$ βλέπουμε ότι

$$\log x_n=\int_1^n\frac{\phi(x)+(1/8)}{x^2}\,dx-\frac{1}{8}\int_1^n\frac{1}{x^2}\,dx=\int_1^n\frac{\phi(x)+(1/8)}{x^2}\,dx-\frac{1}{8}+\frac{1}{8n}. \tag{14.215}$$

Από την άσκηση 6.4.10 γνωρίζουμε ότι ισχύει $-\frac{1}{8}\le\phi(x)\le\frac{1}{8}$ και άρα

$$0\le\phi(x)+\tfrac{1}{8}\le\tfrac{1}{4}\qquad\text{για κάθε } x\ge 1.$$

Επομένως, αν ορίσουμε $y_n=\int_1^n\frac{\phi(x)+(1/8)}{x^2}\,dx$, τότε

$$y_{n+1}-y_n=\int_n^{n+1}\frac{\phi(x)+(1/8)}{x^2}\,dx\ge 0$$

και

$$y_n=\int_1^n\frac{\phi(x)+(1/8)}{x^2}\,dx\le\frac{1}{4}\int_1^n\frac{1}{x^2}\,dx=\frac{1}{4}-\frac{1}{4n}<\frac{1}{4}.$$

Άρα η ακολουθία (y_n) είναι αύξουσα και άνω φραγμένη και, επομένως, συγκλίνει. Αν $y_n\to y$, τότε από την (14.215) συνεπάγεται

$$\log x_n\to y-\tfrac{1}{8}$$

και άρα η (x_n) συγκλίνει στον αριθμό $x=e^{y-(1/8)}>0$.
Από τον τύπο της (x_n) προκύπτει εύκολα ότι

$$\frac{{x_n}^2}{x_{2n}}=\frac{2\cdot4\cdot6\cdots(2n-2)2n}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-3)(2n-1)}\left(\frac{2}{n}\right)^{1/2},$$

οπότε, βάσει του τύπου του Wallis στην άσκηση 7.3.11, έχουμε ότι

$$\frac{{x_n}^2}{x_{2n}}\to\sqrt{2\pi}.$$

Επειδή $x_n \to x$ και $x_{2n} \to x$ και $x > 0$, συνεπάγεται $x = \sqrt{2\pi}$ και άρα

$$\frac{n!}{\sqrt{2\pi}\, e^{-n} n^{n+(1/2)}} = \frac{x_n}{\sqrt{2\pi}} \to 1.$$

Άσκηση 7.3.21. [α] *Έστω $n \in \mathbb{N}$ και η συνάρτηση $P_n(x) = \frac{1}{n!}x^n(1-x)^n$.*
Αποδείξτε ότι ισχύει $0 \le P_n(x) \le \frac{1}{4^n n!}$ για κάθε $x \in [0,1]$.
Αποδείξτε ότι, για κάθε k, οι ${P_n}^{(k)}(0)$ και ${P_n}^{(k)}(1)$ είναι ακέραιοι.
[β] *Υποθέστε ότι ο π είναι ρητός, δηλαδή $\pi = \frac{m}{l}$ με $m, l \in \mathbb{N}$.*
Θεωρήστε τη συνάρτηση $Q_n(x) = l^{2n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k {P_n}^{(2k)}(x)\pi^{2n-2k}$.
Αποδείξτε ότι οι $Q_n(0)$ και $Q_n(1)$ είναι ακέραιοι.
Αποδείξτε ότι ισχύει $\pi^2 m^{2n} P_n(x)\sin(\pi x) = \frac{d}{dx}\big({Q_n}'(x)\sin(\pi x) - \pi Q_n(x)\cos(\pi x)\big)$ για κάθε x.
Αποδείξτε ότι $Q_n(1) + Q_n(0) = \pi m^{2n} \int_0^1 P_n(x)\sin(\pi x)\,dx$.
Αποδείξτε ότι, αν ο n είναι κατάλληλα μεγάλος, τότε $0 < Q_n(0) + Q_n(1) < 1$ και καταλήξτε σε αντίφαση. Συμπεράνατε ότι ο π είναι άρρητος.

Λύση: [α] *Το πρώτο ερώτημα.* Ισχύει $0 \le x(1-x) \le \frac{1}{4}$ για κάθε $x \in [0,1]$.
Το δεύτερο ερώτημα. Από τον τύπο του Leibniz στην άσκηση 5.5.20 έχουμε ότι

$${P_n}^{(k)}(x) = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (x^n)^{(j)}((1-x)^n)^{(k-j)}. \tag{14.216}$$

Τώρα, παρατηρούμε τα εξής τρία.
Αν $j > n$, τότε είναι $(x^n)^{(j)} = 0$ και, αν $k - j > n$, τότε είναι $((1-x)^n)^{(k-j)} = 0$.
Αν $j = n$, τότε είναι $(x^n)^{(j)} = n!$ και, αν $k - j = n$, τότε είναι $((1-x)^n)^{(k-j)} = (-1)^n n!$.
Αν $j < n$, τότε η $(x^n)^{(j)}$ είναι ίση με 0 για $x = 0$ και, αν $k - j < n$, τότε η $((1-x)^n)^{(k-j)}$ είναι ίση με 0 για $x = 1$.
Άρα για $x = 0$ ο μοναδικός όρος του αθροίσματος στην (14.216) που δεν μηδενίζεται είναι αυτός που αντιστοιχεί στον $j = n$. Για να υφίσταται αυτός ο όρος πρέπει να είναι $k \ge n$. Άρα

$${P_n}^{(k)}(0) = 0 \quad \text{αν } k < n \qquad \text{και} \qquad {P_n}^{(k)}(0) = \frac{1}{n!}\binom{k}{n} n!((1-x)^n)^{(k-n)}\big|_{x=0} \quad \text{αν } k \ge n.$$

Επειδή ο διωνυμικός συντελεστής $\binom{k}{n}$ είναι ακέραιος και επειδή ο αριθμός $((1-x)^n)^{(k-n)}\big|_{x=0}$ είναι κι αυτός ακέραιος, έχουμε ότι ο ${P_n}^{(k)}(0) = \binom{k}{n}((1-x)^n)^{(k-n)}\big|_{x=0}$ είναι ακέραιος. Άρα σε κάθε περίπτωση ο ${P_n}^{(k)}(0)$ είναι ακέραιος.
Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι και ο ${P_n}^{(k)}(1)$ είναι ακέραιος.
[β] *Το πρώτο ερώτημα.* Αν $0 \le k \le n$, ο

$$l^{2n}\pi^{2n-2k} = l^{2n} m^{2n-2k} l^{2k-2n} = m^{2n-2k} l^{2k}$$

είναι ακέραιος. Άρα ο

$$Q_n(0) = l^{2n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k {P_n}^{(2k)}(0)\pi^{2n-2k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k {P_n}^{(2k)}(0) m^{2n-2k} l^{2k}$$

είναι ακέραιος, αφού κάθε ${P_n}^{(2k)}(0)$ είναι ακέραιος σύμφωνα με το αποτέλεσμα του [α].
Ομοίως, και ο $Q_n(1)$ είναι ακέραιος.
Το δεύτερο ερώτημα. Είναι

$$\begin{aligned}
{Q_n}''(x) + \pi^2 Q_n(x) &= l^{2n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k {P_n}^{(2k+2)}(x)\pi^{2n-2k} \\
&\quad + \pi^2 l^{2n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k {P_n}^{(2k)}(x)\pi^{2n-2k} \\
&= l^{2n} \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} {P_n}^{(2k)}(x)\pi^{2n-2k+2} \\
&\quad + l^{2n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k {P_n}^{(2k)}(x)\pi^{2n-2k+2} \\
&= -l^{2n} \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k {P_n}^{(2k)}(x)\pi^{2n-2k+2} \\
&\quad + l^{2n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k {P_n}^{(2k)}(x)\pi^{2n-2k+2} \\
&= -l^{2n}(-1)^{n+1} {P_n}^{(2n+2)}(x) + l^{2n} P_n(x)\pi^{2n+2} \\
&= l^{2n} P_n(x)\pi^{2n+2} = \pi^2 m^{2n} P_n(x).
\end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned}\tfrac{d}{dx}\big(Q_n{}'(x)\sin(\pi x)-\pi Q_n(x)\cos(\pi x)\big)&=Q_n{}''(x)\sin(\pi x)+\pi^2Q_n(x)\sin(\pi x)\\&=\pi^2m^{2n}P_n(x)\sin(\pi x).\end{aligned}$$

Το τρίτο ερώτημα. Από το προηγούμενο αποτέλεσμα συνεπάγεται

$$\begin{aligned}\pi^2m^{2n}\int_0^1 P_n(x)\sin(\pi x)\,dx&=\big(Q_n{}'(1)\sin(\pi 1)-\pi Q_n(1)\cos(\pi 1)\big)\\&\quad-\big(Q_n{}'(0)\sin(\pi 0)-\pi Q_n(0)\cos(\pi 0)\big)\\&=\pi Q_n(1)+\pi Q_n(0)\end{aligned}$$

και άρα $Q_n(1)+Q_n(0)=\pi m^{2n}\int_0^1 P_n(x)\sin(\pi x)\,dx$.
Το τέταρτο ερώτημα. Από το αποτέλεσμα του πρώτου ερωτήματος του [α] συνεπάγεται ότι ισχύει $P_n(x)\sin(\pi x)>0$ για κάθε $x\in(0,1)$, οπότε από το αποτέλεσμα του τρίτου ερωτήματος είναι $Q_n(1)+Q_n(0)>0$.
Ομοίως, από το αποτέλεσμα του πρώτου ερωτήματος του [α] έχουμε ότι

$$Q_n(1)+Q_n(0)=\pi m^{2n}\int_0^1 P_n(x)\sin(\pi x)\,dx\leq\tfrac{\pi m^{2n}}{4^nn!}\int_0^1\sin(\pi x)\,dx=\tfrac{2m^{2n}}{4^nn!}\to 0$$

όταν $n\to+\infty$.
Άρα όταν ο n είναι αρκετά μεγάλος ισχύει $0<Q_n(0)+Q_n(1)<1$. Αυτό είναι άτοπο, διότι, σύμφωνα με το αποτέλεσμα του πρώτου ερωτήματος, ο $Q_n(0)+Q_n(1)$ είναι ακέραιος.

Άσκηση 7.3.22. [α] *Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b]$. Αποδείξτε ότι*

$$\lim_{\lambda\to\pm\infty}\int_a^b f(x)\cos(\lambda x)\,dx=0,\qquad \lim_{\lambda\to\pm\infty}\int_a^b f(x)\sin(\lambda x)\,dx=0.$$

[β] *Αποδείξτε ότι τα όρια στο [α] ισχύουν για κάθε $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ τμηματικά σταθερή στο $[a,b]$.*
[γ] *Δείτε την άσκηση 6.4.26 και αποδείξτε με δύο τρόπους ότι τα όρια στο [α] ισχύουν για κάθε $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.*

Λύση: [α] Έστω $\lambda>\frac{\pi}{b-a}$. Τότε

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\cos(\lambda x)\,dx&=\int_a^{b-\frac{\pi}{\lambda}} f(x)\cos(\lambda x)\,dx+\int_{b-\frac{\pi}{\lambda}}^b f(x)\cos(\lambda x)\,dx\\&=-\int_{a+\frac{\pi}{\lambda}}^b f(x-\tfrac{\pi}{\lambda})\cos(\lambda x)\,dx+\int_{b-\frac{\pi}{\lambda}}^b f(x)\cos(\lambda x)\,dx.\end{aligned}$$

και

$$\int_a^b f(x)\cos(\lambda x)\,dx=\int_{a+\frac{\pi}{\lambda}}^b f(x)\cos(\lambda x)\,dx+\int_a^{a+\frac{\pi}{\lambda}} f(x)\cos(\lambda x)\,dx.$$

Προσθέτουμε τις δύο αυτές σχέσεις και έχουμε

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\cos(\lambda x)\,dx&=\tfrac12\int_{a+\frac{\pi}{\lambda}}^b\big(f(x)-f(x-\tfrac{\pi}{\lambda})\big)\cos(\lambda x)\,dx\\&\quad+\tfrac12\int_{b-\frac{\pi}{\lambda}}^b f(x)\cos(\lambda x)\,dx+\tfrac12\int_a^{a+\frac{\pi}{\lambda}} f(x)\cos(\lambda x)\,dx.\end{aligned}\tag{14.217}$$

Η f είναι φραγμένη στο $[a,b]$, οπότε υπάρχει $M\geq 0$ ώστε να ισχύει $|f(x)|\leq M$ για κάθε $x\in[a,b]$.
Έστω τυχών $\epsilon>0$. Επειδή η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a,b]$, υπάρχει $\delta>0$ ώστε να ισχύει $|f(x')-f(x'')|<\frac{\epsilon}{(b-a)}$ για κάθε $x',x''\in[a,b]$ με $|x'-x''|<\delta$.
Τώρα, έστω $\lambda>\max\{\frac{\pi}{\delta},\frac{2M\pi}{\epsilon},\frac{\pi}{b-a}\}$.
Τότε είναι $\frac{\pi}{\lambda}<\delta$, οπότε ισχύει $|f(x)-f(x-\frac{\pi}{\lambda})|<\frac{\epsilon}{(b-a)}$ για κάθε $x\in[a+\frac{\pi}{\lambda},b]$. Επίσης, είναι $\lambda>\frac{\pi}{b-a}$, οπότε από την (14.217) συνεπάγεται

$$\begin{aligned}\Big|\int_a^b f(x)\cos(\lambda x)\,dx\Big|&\leq\tfrac12\int_{a+\frac{\pi}{\lambda}}^b\big|f(x)-f(x-\tfrac{\pi}{\lambda})\big|\,dx+\tfrac12\int_{b-\frac{\pi}{\lambda}}^b|f(x)|\,dx+\tfrac12\int_a^{a+\frac{\pi}{\lambda}}|f(x)|\,dx\\&\leq\tfrac12\tfrac{\epsilon}{(b-a)}(b-a)+\tfrac12M\tfrac{\pi}{\lambda}+\tfrac12M\tfrac{\pi}{\lambda}=\tfrac{\epsilon}{2}+\tfrac{M\pi}{\lambda}<\epsilon.\end{aligned}$$

Άρα $\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos(\lambda x)\,dx = 0$.
Το όριο $\lim_{\lambda\to-\infty}\int_a^b f(x)\cos(\lambda x)\,dx = 0$ ανάγεται, προφανώς, στο προηγούμενο και τα όρια $\lim_{\lambda\to\pm\infty}\int_a^b f(x)\sin(\lambda x)\,dx = 0$ αποδεικνύονται με τον ίδιο τρόπο.
[β] Έστω $a = \xi_0 < \ldots < \xi_m = b$ και $c_0, \ldots, c_m$ ώστε να ισχύει $f(x) = c_k$ για κάθε $x \in (\xi_{k-1}, \xi_k)$ και κάθε $k = 1, \ldots, m$. Τότε, για $\lambda \neq 0$, είναι

$$\int_a^b f(x)\cos(\lambda x)\,dx = \sum_{k=1}^m c_k \int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k}\cos(\lambda x)\,dx = \sum_{k=1}^m c_k \frac{\sin(\lambda\xi_k)-\sin(\lambda\xi_k)}{\lambda}.$$

Άρα

$$\big|\int_a^b f(x)\cos(\lambda x)\,dx\big| \leq \frac{2}{|\lambda|}\sum_{k=1}^m |c_k|,$$

οπότε $\lim_{\lambda\to\pm\infty}\int_a^b f(x)\cos(\lambda x)\,dx = 0$.
[γ] Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και τυχών $\epsilon > 0$.
Σύμφωνα με την άσκηση 6.4.26[α], υπάρχουν τμηματικά σταθερές συναρτήσεις $g, h : [a,b] \to \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$ και $\int_a^b h(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx < \frac{\epsilon}{2}$. Τότε

$$\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx = \int_a^b (f(x)-g(x))\,dx \leq \int_a^b (h(x)-g(x))\,dx < \tfrac{\epsilon}{2}.$$

Σύμφωνα με το αποτέλεσμα του [β], υπάρχει $\lambda_0 > 0$ ώστε να ισχύει $\big|\int_a^b g(x)\cos(\lambda x)\,dx\big| < \frac{\epsilon}{2}$ για κάθε $\lambda > \lambda_0$. Τότε για κάθε $\lambda > \lambda_0$ ισχύει

$$\begin{aligned}\big|\int_a^b f(x)\cos(\lambda x)\,dx\big| &\leq \big|\int_a^b (f(x)-g(x))\cos(\lambda x)\,dx\big| + \big|\int_a^b g(x)\cos(\lambda x)\,dx\big| \\ &\leq \int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx + \big|\int_a^b g(x)\cos(\lambda x)\,dx\big| < \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon.\end{aligned}$$

Επίσης, σύμφωνα με την άσκηση 6.4.26[γ], θα μπορούσαμε να επιλέξουμε συνεχείς g, h, οπότε θα χρησιμοποιούσαμε το αποτέλεσμα του [α] με τον ίδιο τρόπο.

Άσκηση 7.3.23. [α] *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ ώστε η f' να είναι συνεχής στο $[a,b]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $M \geq 0$ ώστε*

$$\big|\int_a^b f(x)\cos(\lambda x)\,dx\big| \leq M\min\{1, 1/|\lambda|\}, \qquad \big|\int_a^b f(x)\sin(\lambda x)\,dx\big| \leq M\min\{1, 1/|\lambda|\}.$$

Αυτές οι εκτιμήσεις ισχύουν ακόμη και αν η f' είναι απλώς ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.
Αν, επιπλέον, είναι και $f(a) = f(b) = 0$, αποδείξτε ότι

$$\lim_{\lambda\to\pm\infty}\lambda\int_a^b f(x)\cos(\lambda x)\,dx = 0, \qquad \lim_{\lambda\to\pm\infty}\lambda\int_a^b f(x)\sin(\lambda x)\,dx = 0.$$

Και πάλι, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η f' είναι απλώς ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.

Λύση: Το πρώτο ερώτημα. Είναι

$$\lambda\int_a^b f(x)\cos(\lambda x)\,dx = f(b)\sin(\lambda b) - f(a)\sin(\lambda a) - \int_a^b f'(x)\sin(\lambda x)\,dx, \tag{14.218}$$

οπότε

$$|\lambda|\big|\int_a^b f(x)\cos(\lambda x)\,dx\big| \leq |f(b)| + |f(a)| + \int_a^b |f'(x)|\,dx. \tag{14.219}$$

Επίσης,

$$\big|\int_a^b f(x)\cos(\lambda x)\,dx\big| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx. \tag{14.220}$$

Άρα, αν πάρουμε $M = \max\{|f(b)|+|f(a)|+\int_a^b |f'(x)|\,dx, \int_a^b |f(x)|\,dx\}$, τότε από τις (14.219), (14.220) συνεπάγεται

$$\big|\int_a^b f(x)\cos(\lambda x)\,dx\big| \leq M\min\{1, 1/|\lambda|\}.$$

Η δεύτερη ανισότητα έχει ίδια απόδειξη.
Η σχέση (14.218) ισχύει ακόμη και αν η f' είναι ολοκληρώσιμη. Πράγματι, τότε η

$$(f(x)\sin(\lambda x))' = \lambda f(x)\cos(\lambda x) + f'(x)\sin(\lambda x)$$

είναι ολοκληρώσιμη, οπότε, σύμφωνα με το αποτέλεσμα της άσκησης 7.2.20, ισχύει

$$\int_a^b (f(x)\sin(\lambda x))'\,dx = f(b)\sin(\lambda b) - f(a)\sin(\lambda a)$$

και από εδώ προκύπτει η (14.218).
Τα υπόλοιπα βήματα για την απόδειξη της $\left|\int_a^b f(x)\cos(\lambda x)\,dx\right| \leq M\min\{1, 1/|\lambda|\}$ όταν η f' είναι απλώς ολοκληρώσιμη είναι όπως πριν.

Το δεύτερο ερώτημα. Η απόδειξη είναι άμεση συνέπεια της (14.218) και του αποτελέσματος της άσκησης 7.3.22[α,γ].

Άσκηση 7.3.24. [α] *Έστω $f : [-a,a] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο $[-a,a]$ και συνεχής στον 0 και $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $\phi(x) \geq 0$ για κάθε x, η ϕ να είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο διάστημα και ώστε $\lim_{\mu\to+\infty}\int_{-\mu}^{\mu}\phi(x)\,dx = 1$. Αποδείξτε ότι*

$$\lim_{\lambda\to 0+}\tfrac{1}{\lambda}\int_{-a}^{a}\phi(\tfrac{x}{\lambda})f(x)\,dx = f(0).$$

Λύση: Η f είναι φραγμένη στο $[-a,a]$, οπότε υπάρχει $M > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [a,b]$.
Επίσης, επειδή ισχύει $\phi(x) \geq 0$ για κάθε x, αν $0 \leq \mu_1 < \mu_2$, συνεπάγεται

$$\int_{-\mu_2}^{\mu_2}\phi(x)\,dx = \int_{-\mu_2}^{-\mu_1}\phi(x)\,dx + \int_{-\mu_1}^{\mu_1}\phi(x)\,dx + \int_{\mu_1}^{\mu_2}\phi(x)\,dx \geq \int_{-\mu_1}^{\mu_1}\phi(x)\,dx,$$

οπότε η $\int_{-\mu}^{\mu}\phi(x)\,dx$ είναι, ως συνάρτηση του μ, αύξουσα στο $[0,+\infty)$.
Επομένως, επειδή $\lim_{\mu\to+\infty}\int_{-\mu}^{\mu}\phi(x)\,dx = 1$, συνεπάγεται ότι ισχύει

$$\int_{-\mu}^{\mu}\phi(x)\,dx \leq 1 \qquad \text{για κάθε } \mu > 0. \tag{14.221}$$

Έστω τυχών $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $\mu_0 > 0$ ώστε να ισχύει

$$1 - \int_{-\mu}^{\mu}\phi(x)\,dx < \tfrac{\epsilon}{4M} \qquad \text{για κάθε } \mu \geq \mu_0. \tag{14.222}$$

Επίσης, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει

$$|f(x) - f(0)| < \tfrac{\epsilon}{4} \qquad \text{για κάθε } x \in [-a,a] \text{ με } |x| < \delta. \tag{14.223}$$

Τότε για $0 < \lambda < \min\{\frac{\delta}{\mu_0}, \frac{a}{\mu_0}\}$ ισχύει

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{\lambda}\int_{-a}^{a}\phi(\tfrac{x}{\lambda})f(x)\,dx - f(0) &= \int_{-\frac{a}{\lambda}}^{\frac{a}{\lambda}}\phi(x)f(\lambda x)\,dx - f(0)\\ &= \int_{-\frac{a}{\lambda}}^{\frac{a}{\lambda}}\phi(x)(f(\lambda x) - f(0))\,dx + f(0)\int_{-\frac{a}{\lambda}}^{\frac{a}{\lambda}}\phi(x)\,dx - f(0),\end{aligned}$$

οπότε

$$\left|\tfrac{1}{\lambda}\int_{-a}^{a}\phi(\tfrac{x}{\lambda})f(x)\,dx - f(0)\right| \leq \int_{-\frac{a}{\lambda}}^{\frac{a}{\lambda}}\phi(x)|f(\lambda x) - f(0)|\,dx + |f(0)|\big(1 - \int_{-\frac{a}{\lambda}}^{\frac{a}{\lambda}}\phi(x)\,dx\big). \tag{14.224}$$

Είναι $\frac{a}{\lambda} > \mu_0$, οπότε από την (14.222) συνεπάγεται

$$|f(0)|\big(1 - \int_{-\frac{a}{\lambda}}^{\frac{a}{\lambda}}\phi(x)\,dx\big) < M\tfrac{\epsilon}{4M} = \tfrac{\epsilon}{4}. \tag{14.225}$$

Επίσης, έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{a}{\lambda}}^{\frac{a}{\lambda}}\phi(x)|f(\lambda x) - f(0)|\,dx &= \int_{-\mu_0}^{\mu_0}\phi(x)|f(\lambda x) - f(0)|\,dx\\ &\quad + \int_{-\frac{a}{\lambda}}^{-\mu_0}\phi(x)|f(\lambda x) - f(0)|\,dx\\ &\quad + \int_{\mu_0}^{\frac{a}{\lambda}}\phi(x)|f(\lambda x) - f(0)|\,dx.\end{aligned} \tag{14.226}$$

Είναι $\lambda\mu_0 < \delta$, οπότε από την (14.223) συνεπάγεται

$$|f(\lambda x) - f(0)| < \tfrac{\epsilon}{4} \qquad \text{για κάθε } x \in [-\mu_0, \mu_0]. \tag{14.227}$$

Τώρα, από τις (14.226), (14.227), (14.221) και (14.222) συνεπάγεται

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{a}{\lambda}}^{\frac{a}{\lambda}} \phi(x)|f(\lambda x) - f(0)|\,dx &\le \tfrac{\epsilon}{4}\int_{-\mu_0}^{\mu_0} \phi(x)\,dx + 2M\int_{-\frac{a}{\lambda}}^{-\mu_0} \phi(x)\,dx + 2M\int_{\mu_0}^{\frac{a}{\lambda}} \phi(x)\,dx\\ &\le \tfrac{\epsilon}{4} + 2M\big(\int_{-\frac{a}{\lambda}}^{\frac{a}{\lambda}} \phi(x)\,dx - \int_{-\mu_0}^{\mu_0} \phi(x)\,dx\big)\\ &\le \tfrac{\epsilon}{4} + 2M\big(1 - \int_{-\mu_0}^{\mu_0} \phi(x)\,dx\big) \le \tfrac{\epsilon}{4} + 2M\tfrac{\epsilon}{4M} = \tfrac{3\epsilon}{4}.\end{aligned}$$

Τέλος, από την τελευταία σχέση και από τις (14.224), (14.225) συνεπάγεται

$$\big|\tfrac{1}{\lambda}\int_{-a}^{a} \phi(\tfrac{x}{\lambda})f(x)\,dx - f(0)\big| < \tfrac{3\epsilon}{4} + \tfrac{\epsilon}{4} = \epsilon$$

και άρα $\lim_{\lambda\to 0+} \frac{1}{\lambda}\int_{-a}^{a} \phi(\frac{x}{\lambda})f(x)\,dx = f(0)$.

Άσκηση 7.3.25. *Έστω διάστημα I και $f, g : I \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες στο I ώστε οι $f', g' : I \to \mathbb{R}$ να είναι ολοκληρώσιμες σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I. Αποδείξτε ότι*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx \qquad \text{για κάθε } a, b \in I.$$

Λύση: Η $(fg)' = f'g + fg'$ είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I, οπότε από το αποτέλεσμα της άσκησης 7.2.20 συνεπάγεται

$$\int_a^b (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))\,dx = \int_a^b (fg)'(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

Άσκηση 7.3.26. [α] *Έστω $v, w : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$ και $f(x) = \int_a^x v(t)\,dt$, $g(x) = \int_a^x w(t)\,dt$ για κάθε $x \in [a, b]$. Αποδείξτε ότι $\int_a^b (v(x)g(x) + f(x)w(x))\,dx = f(b)g(b)$.*
[β] *Έστω διάστημα I και $v, w : I \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I και $f, g : I \to \mathbb{R}$ δύο αόριστα ολοκληρώματα των v, w, αντιστοίχως, στο I. Αποδείξτε ότι*

$$\int_a^b (v(x)g(x) + f(x)w(x))\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) \qquad \text{για κάθε } a, b \in I.$$

Λύση: [α] (i) Έστω ότι ισχύει $v(x), w(x) \ge 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. Τότε οι f, g είναι αύξουσες και συνεχείς στο $[a, b]$.
Θεωρούμε τη διαμέριση $\Delta = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$ του $[a, b]$ σε n ισομήκη υποδιαστήματα. Τότε έχουμε

$$g(x_{k-1})(f(x_k) - f(x_{k-1})) \le \int_{x_{k-1}}^{x_k} v(x)g(x)\,dx \le g(x_k)(f(x_k) - f(x_{k-1})),$$

$$f(x_{k-1})(g(x_k) - g(x_{k-1})) \le \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)w(x)\,dx \le f(x_k)(g(x_k) - g(x_{k-1})).$$

Προσθέτοντας αυτές τις δύο σχέσεις και προσθέτοντας για $k = 1, \ldots, n$, βρίσκουμε

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^n \big(g(x_{k-1})(f(x_k) - f(x_{k-1})) + f(x_{k-1})(g(x_k) - g(x_{k-1}))\big)\\ &\qquad \le \int_a^b (v(x)g(x) + f(x)w(x))\,dx\\ &\qquad \le \sum_{k=1}^n \big(g(x_k)(f(x_k) - f(x_{k-1})) + f(x_k)(g(x_k) - g(x_{k-1}))\big).\end{aligned}$$

Συνεπάγεται

$$\begin{aligned}&f(b)g(b) - \sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1}))(g(x_k) - g(x_{k-1}))\\ &\qquad \le \int_a^b (v(x)g(x) + f(x)w(x))\,dx\\ &\qquad \le f(b)g(b) + \sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1}))(g(x_k) - g(x_{k-1}))\end{aligned}$$

και άρα

$$\begin{aligned}&\big|\textstyle\int_a^b(v(x)g(x)+f(x)w(x))\,dx-f(b)g(b)\big|\\ &\qquad\le\textstyle\sum_{k=1}^n(f(x_k)-f(x_{k-1}))(g(x_k)-g(x_{k-1})).\end{aligned}\tag{14.228}$$

Οι v, w είναι φραγμένες στο $[a, b]$, οπότε υπάρχει u ώστε να ισχύει $0 \le v(x) \le u$ και $0 \le w(x) \le u$ για κάθε $x \in [a, b]$. Τότε έχουμε

$$0 \le f(x_k) - f(x_{k-1}) = \textstyle\int_{x_{k-1}}^{x_k} v(x)\,dx \le u(x_k - x_{k-1}) = \frac{u(b-a)}{n}$$

και, ομοίως, $0 \le g(x_k) - g(x_{k-1}) \le \frac{u(b-a)}{n}$.
Από την (14.228) συνεπάγεται

$$\big|\textstyle\int_a^b(v(x)g(x)+f(x)w(x))\,dx-f(b)g(b)\big| \le \frac{u^2(b-a)^2}{n}$$

και, επειδή αυτό ισχύει για κάθε n, έχουμε ότι

$$\textstyle\int_a^b(v(x)g(x)+f(x)w(x))\,dx=f(b)g(b).\tag{14.229}$$

(ii) Αν συνεχίσουμε να υποθέτουμε ότι ισχύει $v(x) \ge 0$ για κάθε $x \in [a, b]$ και εφαρμόσουμε την (14.229) με τη σταθερή συνάρτηση $w(x) = 1$, τότε έχουμε την αντίστοιχη συνάρτηση $g(x) = x-a$ και

$$\textstyle\int_a^b v(x)(x-a)\,dx+\int_a^b f(x)\,dx=f(b)(b-a).\tag{14.230}$$

Αν, τώρα, υποθέσουμε ότι η v είναι, απλώς, ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$, τότε υπάρχει l ώστε να ισχύει $v(x) \ge l$ για κάθε $x \in [a, b]$.
Ορίζουμε τη συνάρτηση $v_*(x) = v(x) - l$ και την αντίστοιχη $f_*(x) = f(x) - l(x-a)$.
Τότε ισχύει $v_*(x) \ge 0$ για κάθε $x \in [a, b]$, οπότε από την (14.230) συνεπάγεται

$$\textstyle\int_a^b v_*(x)(x-a)\,dx+\int_a^b f_*(x)\,dx=f_*(b)(b-a)$$

από την οποία προκύπτει η

$$\textstyle\int_a^b v(x)(x-a)\,dx+\int_a^b f(x)\,dx=f(b)(b-a).\tag{14.231}$$

(iii) Στη γενική περίπτωση, όπου απλώς υποθέτουμε ότι οι v, w είναι ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$, έχουμε ότι υπάρχει l ώστε να ισχύει $v(x) \ge l$ και $w(x) \ge l$ για κάθε $x \in [a, b]$.
Ορίζουμε τις συναρτήσεις $v_*(x) = v(x) - l$ και $w_*(x) = w(x) - l$ και έχουμε τις αντίστοιχες $f_*(x) = f(x) - l(x-a)$ και $g_*(x) = g(x) - l(x-a)$.
Επειδή ισχύει $v_*(x), w_*(x) \ge 0$ για κάθε $x \in [a, b]$, από την (14.229) συνεπάγεται

$$\textstyle\int_a^b(v_*(x)g_*(x)+f_*(x)w_*(x))\,dx=f_*(b)g_*(b).$$

Χρησιμοποιώντας σ' αυτήν την τελευταία σχέση την (14.231) (με τις v, f αλλά και με τις w, g) βρίσκουμε ότι

$$\textstyle\int_a^b(v(x)g(x)+f(x)w(x))\,dx=f(b)g(b).\tag{14.232}$$

[β] Έστω $a, b \in I$ με $a < b$. Θεωρούμε τα αόριστα ολοκληρώματα $f(x) = \int_a^x v(t)\,dt + c$ και $g(x) = \int_a^x w(t)\,dt + d$ για $x \in I$.
Τώρα, εφαρμόζουμε την (14.232) στις $f(x) - c$, $g(x) - d$ και προκύπτει ότι

$$\textstyle\int_a^b(v(x)g(x)+f(x)w(x))\,dx=f(b)g(b)-f(a)g(a).$$

Άσκηση 7.3.27. [α] *Έστω* $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ *με* $b_1 \ge \cdots \ge b_n \ge 0$. *Αν* $s_k = a_1+\cdots+a_k$ *για κάθε* $k = 1, \dots, n$, *αποδείξτε ότι*

$$b_1 \min\{s_k \,|\, 1 \le k \le n\} \le b_1a_1 + \cdots + b_na_n \le b_1 \max\{s_k \,|\, 1 \le k \le n\}.$$

[β] *Έστω* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *μονότονη στο* $[a,b]$ *και* $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ *ολοκληρώσιμη στο* $[a,b]$. *Αποδείξτε ότι υπάρχει* $\xi\in[a,b]$ *ώστε*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)\int_a^\xi g(x)\,dx + f(b)\int_\xi^b g(x)\,dx.$$

Λύση: [α] Είναι

$$\begin{aligned} b_1a_1+\cdots+b_na_n &= b_1s_1+b_2(s_2-s_1)+\cdots+b_n(s_n-s_{n-1}) \\ &= (b_1-b_2)s_1+\cdots+(b_{n-1}-b_n)s_{n-1}+b_ns_n. \end{aligned} \tag{14.233}$$

Αν θέσουμε $l=\min\{s_k\,|\,1\le k\le n\}$ και $u=\max\{s_k\,|\,1\le k\le n\}$, τότε από την (14.233) συνεπάγεται

$$b_1a_1+\cdots+b_na_n\le(b_1-b_2)u+\cdots+(b_{n-1}-b_n)u+b_nu=b_1u$$

και

$$b_1a_1+\cdots+b_na_n\ge(b_1-b_2)l+\cdots+(b_{n-1}-b_n)l+b_nl=b_1l.$$

[β] (i) Έστω ότι η f είναι φθίνουσα, ότι $f(a)>f(b)=0$ και ότι $\int_a^b f(x)g(x)\,dx\ge 0$.
Έστω τυχών $\epsilon>0$. Τότε υπάρχει διαμέριση $\Delta=\{a=x_0,\,\dots\,,x_n=b\}$ ώστε

$$\overline{\Sigma}(g;a,b;\Delta)-\underline{\Sigma}(g;a,b;\Delta)<\epsilon. \tag{14.234}$$

Έστω u_k και l_k το supremum και το infimum της g στο $[x_{k-1},x_k]$. Τότε

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx=\sum_{k=1}^n\int_{x_{k-1}}^{x_k}f(x)g(x)\,dx\le\sum_{k=1}^n u_k\int_{x_{k-1}}^{x_k}f(x)\,dx.$$

Ορίζουμε $a_k=u_k(x_k-x_{k-1})$ και $b_k=\frac{\int_{x_{k-1}}^{x_k}f(x)\,dx}{x_k-x_{k-1}}\ge 0$, οπότε η τελευταία σχέση γράφεται

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx\le\sum_{k=1}^n b_ka_k.$$

Επειδή η f είναι φθίνουσα, συνεπάγεται

$$b_k\ge\frac{\int_{x_{k-1}}^{x_k}f(x_k)\,dx}{x_k-x_{k-1}}=f(x_k)=\frac{\int_{x_k}^{x_{k+1}}f(x_k)\,dx}{x_{k+1}-x_k}\ge b_{k+1}.$$

Άρα, σύμφωνα με το αποτέλεσμα του [α], υπάρχει κάποιος k_0 ώστε

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx\le\sum_{k=1}^n b_ka_k\le b_1\sum_{k=1}^{k_0}u_k(x_k-x_{k-1}). \tag{14.235}$$

Από την (14.234) συνεπάγεται

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{k_0}(u_k-l_k)(x_k-x_{k-1}) &\le\sum_{k=1}^n(u_k-l_k)(x_k-x_{k-1}) \\ &=\overline{\Sigma}(g;a,b;\Delta)-\underline{\Sigma}(g;a,b;\Delta)<\epsilon\end{aligned}$$

οπότε από την (14.235) προκύπτει

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)\,dx &\le b_1\big(\sum_{k=1}^{k_0}l_k(x_k-x_{k-1})+\epsilon\big)\le b_1\big(\sum_{k=1}^{k_0}\int_{x_{k-1}}^{x_k}g(x)\,dx+\epsilon\big) \\ &=b_1\big(\int_a^{x_{k_0}}g(x)\,dx+\epsilon\big).\end{aligned} \tag{14.236}$$

Τώρα, έστω $G(x)=\int_a^x g(t)\,dt$ για $x\in[a,b]$.
Η G είναι συνεχής στο $[a,b]$, οπότε υπάρχει $\zeta\in[a,b]$ ώστε να ισχύει $G(x)\le G(\zeta)$ για κάθε $x\in[a,b]$. Από την (14.236) συνεπάγεται

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx\le b_1(G(\zeta)+\epsilon).$$

Επειδή $b_1 = \frac{\int_a^{x_1} f(x)\,dx}{x_1 - a} \le \frac{\int_a^{x_1} f(a)\,dx}{x_1 - a} = f(a)$ και επειδή $G(\zeta) \ge G(a) = 0$, συνεπάγεται ότι $\int_a^b f(x)g(x)\,dx \le f(a)(G(\zeta) + \epsilon)$ και άρα

$$\tfrac{1}{f(a)} \int_a^b f(x)g(x)\,dx \le G(\zeta) + \epsilon.$$

Επειδή αυτό ισχύει για κάθε $\epsilon > 0$, συνεπάγεται $0 \le \frac{1}{f(a)} \int_a^b f(x)g(x)\,dx \le G(\zeta)$ και, επειδή $G(a) = 0$, έχουμε

$$G(a) \le \tfrac{1}{f(a)} \int_a^b f(x)g(x)\,dx \le G(\zeta).$$

Άρα υπάρχει $\xi \in [a,b]$ ώστε $G(\xi) = \frac{1}{f(a)} \int_a^b f(x)g(x)\,dx$ ή, ισοδύναμα,

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a) \int_a^\xi g(x)\,dx = f(a) \int_a^\xi g(x)\,dx + f(b) \int_\xi^b g(x)\,dx, \tag{14.237}$$

διότι $f(b) = 0$.
(ii) Τώρα, έστω ότι η f είναι φθίνουσα, ότι $f(a) > f(b) = 0$ και ότι $\int_a^b f(x)g(x)\,dx < 0$.
Ορίζουμε την $g_* = -g$ και τότε $\int_a^b f(x)g_*(x)\,dx = -\int_a^b f(x)g(x)\,dx > 0$.
Άρα υπάρχει $\xi \in [a,b]$ ώστε να ισχύει η (14.237) με την g_* στη θέση της g. Δηλαδή,

$$\int_a^b f(x)g_*(x)\,dx = f(a) \int_a^\xi g_*(x)\,dx + f(b) \int_\xi^b g_*(x)\,dx$$

ή, ισοδύναμα,

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a) \int_a^\xi g(x)\,dx + f(b) \int_\xi^b g(x)\,dx. \tag{14.238}$$

(iii) Κατόπιν, έστω ότι η f είναι φθίνουσα και ότι $f(a) = f(b) = 0$.
Τότε, προφανώς, η f είναι σταθερή 0 στο $[a,b]$ και η (14.238) ισχύει για κάθε $\xi \in [a,b]$.
Μέχρι στιγμής έχουμε αποδείξει ότι ισχύει η (14.238) για κάποιον $\xi \in [a,b]$ όταν η f είναι φθίνουσα και $f(b) = 0$.
(iv) Έστω ότι η f είναι φθίνουσα και $f(b) \ne 0$.
Ορίζουμε την $f_* = f - f(b)$, η οποία είναι φθίνουσα στο $[a,b]$ με $f_*(b) = f(b) - f(b) = 0$. Επομένως, υπάρχει $\xi \in [a,b]$ ώστε να ισχύει η (14.238) με την f_* στη θέση της f. Δηλαδή,

$$\int_a^b f_*(x)g(x)\,dx = f_*(a) \int_a^\xi g(x)\,dx + f_*(b) \int_\xi^b g(x)\,dx$$

και με λίγες πράξεις καταλήγουμε πάλι στην (14.238).
(v) Τέλος, έστω ότι η f είναι αύξουσα.
Ορίζουμε την $f_* = -f$, η οποία είναι φθίνουσα στο $[a,b]$. Άρα υπάρχει $\xi \in [a,b]$ ώστε να ισχύει η (14.238) με την f_* στη θέση της f. Δηλαδή,

$$\int_a^b f_*(x)g(x)\,dx = f_*(a) \int_a^\xi g(x)\,dx + f_*(b) \int_\xi^b g(x)\,dx$$

από την οποία και πάλι προκύπτει η (14.238).

Άσκηση 7.3.29. *Αποδείξτε ότι η e^x, η $\log x$, η x^a με άρρητο a και οι τριγωνομετρικές και οι αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις είναι υπερβατικές συναρτήσεις σε κάθε ανοικτό διάστημα.*

Υπόδειξη: Για την e^x. Έστω $P_0(x) + P_1(x)e^x + \cdots + P_n(x)e^{nx} = 0$ για κάθε $x \in (a,b)$, όπου κάθε $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_n(x)$ είναι πολυώνυμο, $n \ge 1$ και το $P_n(x)$ δεν είναι το μηδενικό πολυώνυμο και έστω ότι ο n είναι ο ελάχιστος δυνατός $n \in \mathbb{N}$ και το $P_n(x)$ έχει τον ελάχιστο δυνατό βαθμό για να συμβαίνει κάτι τέτοιο. Παραγωγίστε την αρχική ισότητα και αφαιρέστε από την προκύπτουσα ισότητα το n-πλάσιο της αρχικής ισότητας.
Για την $\log x$. Έστω $P_0(x) + P_1(x)\log x + \cdots + P_n(x)(\log x)^n = 0$ για κάθε $x \in (a,b)$, όπου $0 \le a < b$, κάθε $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_n(x)$ είναι πολυώνυμο, $n \ge 1$ και το $P_n(x)$ δεν είναι το μηδενικό πολυώνυμο. Με την αλλαγή μεταβλητής $x = e^t$ προκύπτει ότι η e^t είναι αλγεβρική συνάρτηση στο διάστημα $(\log a, \log b)$.

Για την $\arctan x$. Έστω $P_0(x)+P_1(x)\arctan x+\cdots+P_n(x)(\arctan x)^n=0$ για κάθε $x\in(a,b)$, όπου κάθε $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_n(x)$ είναι πολυώνυμο, $n\geq 1$ και το $P_n(x)$ δεν είναι το μηδενικό πολυώνυμο και έστω ότι ο n είναι ο ελάχιστος δυνατός $n\in\mathbb{N}$ και το $P_n(x)$ έχει τον ελάχιστο δυνατό βαθμό για να συμβαίνει κάτι τέτοιο. Έστω, μετά από κατάλληλη απλοποίηση, ότι $P_n(x)=x^k+a_{k-1}x^{k-1}+\cdots$. Παραγωγίστε την αρχική ισότητα, πολλαπλασιάστε την προκύπτουσα ισότητα με το x^2+1 και από την τελευταία ισότητα αφαιρέστε την αρχική πολλαπλασιασμένη με το $kx-a_{k-1}$.

Για την $\tan x$. Υποθέστε ότι η $\tan x$ είναι αλγεβρική σε κάποιο $(a,b)\subseteq(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ και δείτε την υπόδειξη για την περίπτωση του $\log x$ για να αναχθείτε στην αλγεβρικότητα της $\arctan t$.

Για την x^a με άρρητο a. Έστω $P_0(x)+P_1(x)x^a+\cdots+P_n(x)x^{na}=0$ για κάθε $x\in(a,b)$, όπου κάθε $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_n(x)$ είναι πολυώνυμο, $n\geq 1$ και το $P_n(x)$ δεν είναι το μηδενικό πολυώνυμο και έστω ότι ο n είναι ο ελάχιστος δυνατός $n\in\mathbb{N}$ και το $P_n(x)$ έχει τον ελάχιστο δυνατό βαθμό για να συμβαίνει κάτι τέτοιο. Έστω, μετά από κατάλληλη απλοποίηση, ότι $P_n(x)=x^k+a_{k-1}x^{k-1}+\cdots$. Παραγωγίστε την αρχική ισότητα, πολλαπλασιάστε την προκύπτουσα ισότητα με το x και από την τελευταία ισότητα αφαιρέστε την αρχική πολλαπλασιασμένη με το $k+na$.

Άσκηση 7.3.30. *Δείτε την άσκηση 6.5.6 για τους τύπους υπολογισμού μήκους καμπύλης.*
Υπολογίστε το μήκος οποιουδήποτε τόξου της παραβολής $y=ax^2$.
Γράψτε το μήκος οποιουδήποτε τόξου της έλλειψης $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ως ελλειπτικό ολοκλήρωμα.

Λύση: Για την παραβολή χρησιμοποιούμε την παραμετρικοποίηση $x=x$, $y=y(x)=ax^2$ με $x\in[x_1,x_2]$ και έχουμε ότι το μήκος του αντίστοιχου τόξου της είναι ίσο με

$$\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+4a^2x^2}\,dx=\frac{1}{2a}\int_{2ax_1}^{2ax_2}\sqrt{1+x^2}\,dx.$$

Κάνουμε αλλαγή μεταβλητής από x σε $u=x+\sqrt{1+x^2}$ και βρίσκουμε ότι το μήκος του παραβολικού τόξου είναι ίσο με

$$\frac{1}{8a}\int_{u_1}^{u_2}\frac{(u^2+1)^2}{u^3}\,du=\frac{1}{8a}\Big(\frac{{u_2}^2-{u_1}^2}{2}+2\log\frac{u_2}{u_1}+\frac{{u_2}^2-{u_1}^2}{4(u_1u_2)^2}\Big),$$

όπου $u_1=2ax_1+\sqrt{1+4a^2{x_1}^2}$ και $u_2=2ax_2+\sqrt{1+4a^2{x_2}^2}$.
Για την έλλειψη περιοριζόμαστε σε τόξο της που περιέχεται στο άνω ημιεπίπεδο και χρησιμοποιούμε την παραμετρικοποίηση $x=x$, $y=y(x)=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ με $x\in[x_1,x_2]\subseteq[-a,a]$. Τότε το μήκος του αντίστοιχου τόξου της έλλειψης είναι ίσο με

$$\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+\frac{b^2x^2}{a^2(a^2-x^2)}}\,dx.$$

Κάνουμε αλλαγή μεταβλητής από x σε $t=\arccos\frac{x}{a}$ και βρίσκουμε ότι το μήκος του ελλειπτικού τόξου είναι ίσο με

$$-\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{a^2(\sin t)^2+b^2(\cos t)^2}\,dt, \tag{14.239}$$

όπου $t_1=\arccos\frac{x_1}{a}$, $t_2=\arccos\frac{x_2}{a}$ και $[t_2,t_1]\subseteq[0,\pi]$.
Τώρα, κάνουμε αλλαγή μεταβλητής από t σε $u=\tan\frac{t}{2}$ και το μήκος του ελλειπτικού τόξου είναι ίσο με

$$-\int_{u_1}^{u_2}\sqrt{a^2\frac{4u^2}{(1+u^2)^2}+b^2\frac{(1-u^2)^2}{(1+u^2)^2}}\,\frac{2}{1+u^2}\,du=-2\int_{u_1}^{u_2}\frac{\sqrt{b^2u^4+(4a^2-2b^2)u^2+b^2}}{(1+u^2)^2}\,du, \tag{14.240}$$

όπου $u_1=\tan\frac{t_1}{2}=\sqrt{\frac{a-x_1}{a+x_1}}$, $u_2=\tan\frac{t_2}{2}=\sqrt{\frac{a-x_2}{a+x_2}}$ και $[u_2,u_1]\subseteq[0,+\infty]$.
Το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι ένα ελλειπτικό ολοκλήρωμα.
Σχόλιο. Φυσικά, στην περίπτωση όπου $a=b$, δηλαδή στην περίπτωση που η έλλειψη είναι κύκλος (ακτίνας a) το μήκος του τόξου που εξετάζουμε είναι, βάσει της (14.239), ίσο με

$$-a\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{(\sin t)^2+(\cos t)^2}\,dt=-a\int_{t_1}^{t_2}dt=a(t_1-t_2).$$

Αυτό δεν είναι άλλο από έναν γνωστό τύπο της Ευκλείδειας γεωμετρίας.
Στην ίδια περίπτωση (όπου $a = b$), ακόμη κι αν χρησιμοποιήσουμε το τελευταίο ελλειπτικό ολοκλήρωμα στην (14.240), βλέπουμε ότι αυτό *απλοποιείται*:

$$-2\int_{u_1}^{u_2}\frac{\sqrt{a^2u^4+2a^2u^2+a^2}}{(1+u^2)^2}\,du = -2a\int_{u_1}^{u_2}\frac{1}{1+u^2}\,du = 2a\big(\arctan u_1 - \arctan u_2\big) = a(t_1-t_2).$$

14.8 Κεφάλαιο 8.

Άσκηση 8.1.2. *Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις* $\sum_{n=1}^{+\infty} n\log(1+\frac{1}{n})$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}$.

Λύση: Έχουμε

$$n\log(1+\tfrac{1}{n}) = \log(1+\tfrac{1}{n})^n \to \log e = 1, \qquad \frac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}} = \frac{3^n}{3^{n+1}}\frac{(2/3)^n+1}{(2/3)^{n+1}+1} = \frac{1}{3}\frac{(2/3)^n+1}{(2/3)^{n+1}+1} \to \frac{1}{3}.$$

Επειδή και τα δύο όρια είναι $\neq 0$, οι σειρές αποκλίνουν.

Άσκηση 8.1.3. *Χρησιμοποιώντας γεωμετρικές σειρές, εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές* $\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{2}{3})^{n+2}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{4}{3})^{n-3}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{3^{n-1}}$ *και βρείτε τα αθροίσματά τους (αν υπάρχουν).*

Λύση: Κάνοντας μια απλή αλλαγή μεταβλητής, βλέπουμε ότι η πρώτη σειρά είναι ίδια με την $\sum_{n=3}^{+\infty}(\frac{2}{3})^n$ και, τώρα, αυτή η σειρά συγκλίνει διότι διαφέρει από την συγκλίνουσα γεωμετρική σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{2}{3})^n$ μόνο ως προς κάποιους αρχικούς όρους. Μάλιστα, έχουμε

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(\tfrac{2}{3})^{n+2} = \sum_{n=3}^{+\infty}(\tfrac{2}{3})^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(\tfrac{2}{3})^n - \sum_{n=0}^{2}(\tfrac{2}{3})^n = \frac{1}{1-(2/3)} - 1 - \frac{2}{3} - (\tfrac{2}{3})^2 = \frac{8}{9}.$$

Γράφουμε την δεύτερη σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{4}{3})^{n-3} = \sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{3}{4})^2(\frac{4}{3})^{n-1}$ και, τώρα, επειδή η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{4}{3})^{n-1}$ αποκλίνει στο $+\infty$, συνεπάγεται ότι

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(\tfrac{4}{3})^{n-3} = (\tfrac{3}{4})^2\sum_{n=1}^{+\infty}(\tfrac{4}{3})^{n-1} = (\tfrac{3}{4})^2(+\infty) = +\infty.$$

Επειδή η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{3^{n-1}} = \sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{1}{3})^{n-1}$ συγκλίνει, έχουμε ότι και η $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{3^{n-1}}$ συγκλίνει και

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{3^{n-1}} = 2\sum_{n=1}^{+\infty}(\tfrac{1}{3})^{n-1} = 2\,\frac{1}{1-(1/3)} = 3.$$

Άσκηση 8.1.4. *Για ποιές τιμές του x συγκλίνουν οι σειρές* $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x}{(1+x)^{n-1}}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}$ *;*

Λύση: Για την πρώτη σειρά προϋποτίθεται ότι $x \neq -1$. Αν $x = 0$, τότε η σειρά είναι η μηδενική σειρά και συγκλίνει.
Αν $x \neq 0$, τότε η σειρά συγκλίνει αν και μόνο αν η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{1}{1+x})^{n-1}$ συγκλίνει ή, ισοδύναμα, αν και μόνο αν $|\frac{1}{x+1}| < 1$ ή, ισοδύναμα, αν και μόνο αν $x < -2$ ή $x > 0$.
Άρα η πρώτη σειρά συγκλίνει αν και μόνο αν $x < -2$ ή $x \geq 0$.
Αναγκαία συνθήκη για να συγκλίνει η δεύτερη σειρά είναι να ισχύει $\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}} \to 0$.
Αν $|x| < 1$, τότε $\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}} \to \frac{1-0}{1+0} = 1$. Αν $|x| > 1$, τότε $\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}} = \frac{(1/x)^{2n}-1}{(1/x)^{2n}+1} \to \frac{0-1}{0+1} = -1$.
Αν $|x| = 1$, τότε $\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}} = 0$, οπότε η σειρά είναι η μηδενική σειρά και συγκλίνει.
Άρα η δεύτερη σειρά συγκλίνει αν και μόνο αν $x = \pm 1$.

Άσκηση 8.1.5. *Βρείτε συνοπτικό τύπο για τα μερικά αθροίσματα της σειράς* $\sum_{n=1}^{+\infty}(b_n - b_{n+1})$ *και, βάσει αυτού, αποδείξτε ότι αυτή έχει άθροισμα αν και μόνο αν υπάρχει το* $\lim_{n\to+\infty} b_n$ *και ότι το άθροισμα είναι αριθμός αν και μόνο αν το* $\lim_{n\to+\infty} b_n$ *είναι αριθμός. Αποδείξτε την εξής σχέση ανάμεσα στο άθροισμα της σειράς και στο* $\lim_{n\to+\infty} b_n$ *:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(b_n - b_{n+1}) = b_1 - \lim_{n\to+\infty} b_n.$$

Βρείτε τα αθροίσματα των $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$.

Λύση: Το n-οστό μερικό άθροισμα της σειράς γράφεται

$$s_n = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \cdots + (b_{n-1} - b_n) + (b_n - b_{n+1}) = b_1 - b_{n+1}.$$

Επομένως, η ακολουθία (s_n) έχει όριο αν και μόνο αν η ακολουθία (b_n) έχει όριο και, μάλιστα,

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = b_1 - \lim_{n\to+\infty} b_{n+1} = b_1 - \lim_{n\to+\infty} b_n.$$

Άρα η $\sum_{n=1}^{+\infty}(b_n - b_{n+1})$ έχει άθροισμα αν και μόνο αν υπάρχει το $\lim_{n\to+\infty} b_n$ και σ' αυτήν την περίπτωση το άθροισμα της σειράς είναι

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(b_n - b_{n+1}) = b_1 - \lim_{n\to+\infty} b_n.$$

Είναι σαφές ότι το άθροισμα της σειράς είναι αριθμός αν και μόνο αν το $\lim_{n\to+\infty} b_n$ είναι αριθμός.
Έχουμε ότι $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Επειδή $\frac{1}{n} \to 0$, η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ έχει άθροισμα και

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - 0 = 1.$$

Για την δεύτερη σειρά έχουμε ότι $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$. Επειδή $\frac{1}{n(n+1)} \to 0$, η σειρά έχει άθροισμα και

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 0\right) = \frac{1}{4}.$$

Τέλος, είναι

$$(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)} = (-1)^{n-1}\frac{(n+1)+n}{n(n+1)} = (-1)^{n-1}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) = \frac{(-1)^{n-1}}{n} - \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

Επειδή $\frac{(-1)^{n-1}}{n} \to 0$, η τρίτη σειρά έχει άθροισμα και

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^{n-1}}{n} - \frac{(-1)^n}{n+1}\right) = 1 - 0 = 1.$$

Άσκηση 8.1.6. *Βρείτε, αν υπάρχει, το άθροισμα της σειράς $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$, όπου $x_{2k-1} = \frac{1}{k}$ και $x_{2k} = -\frac{1}{k}$ για κάθε k.*

Λύση: Αν (s_n) είναι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς, τότε

$$\begin{aligned} s_{2k} &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \cdots + x_{2k-3} + x_{2k-2} + x_{2k-1} + x_{2k} \\ &= 1 - 1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} + \cdots + \tfrac{1}{k-1} - \tfrac{1}{k-1} + \tfrac{1}{k} - \tfrac{1}{k} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_{2k-1} &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \cdots + x_{2k-3} + x_{2k-2} + x_{2k-1} \\ &= 1 - 1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} + \cdots + \tfrac{1}{k-1} - \tfrac{1}{k-1} + \tfrac{1}{k} = \tfrac{1}{k}. \end{aligned}$$

Άρα $s_{2k} \to 0$ και $s_{2k-1} \to 0$ και, επομένως, $s_n \to 0$. Άρα το άθροισμα της σειράς είναι ίσο με 0.

Άσκηση 8.1.7. *Έστω $x \neq y$. Αν οι σειρές $\sum_{k=1}^{+\infty}(a_{2k} + xa_{2k-1})$ και $\sum_{k=1}^{+\infty}(a_{2k} + ya_{2k-1})$ συγκλίνουν, αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ συγκλίνει.*

Υπόδειξη: Αφαιρώντας τις δύο συγκλίνουσες σειρές, αποδείξτε ότι η $\sum_{k=1}^{+\infty} a_{2k-1}$ συγκλίνει. Κατόπιν, αποδείξτε ότι και η $\sum_{k=1}^{+\infty} a_{2k}$ συγκλίνει. Τέλος, συσχετίστε τα μερικά αθροίσματα της σειράς $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ με τα μερικά αθροίσματα των $\sum_{k=1}^{+\infty} a_{2k-1}$ και $\sum_{k=1}^{+\infty} a_{2k}$.

Άσκηση 8.1.8. *Αποδείξτε ότι* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2^{n-1}}}{1-x^{2^n}} = \begin{cases} x/(1-x), & \text{αν } |x| < 1 \\ 1/(1-x), & \text{αν } |x| > 1 \end{cases}$

Λύση: Ο τύπος του n-οστού όρου της σειράς φαίνεται περίπλοκος. Γι αυτό προσπαθούμε να υπολογίσουμε τα αρχικά μερικά αθροίσματα ώστε να αποκτήσουμε μια ιδέα γι αυτά:

$$s_1 = \frac{x}{1-x^2},$$

$$s_2 = \frac{x}{1-x^2} + \frac{x^2}{1-x^4} = \frac{x(1+x^2)}{1-x^4} + \frac{x^2}{1-x^4} = \frac{(x+x^3)+x^2}{1-x^4} = \frac{x+x^2+x^3}{1-x^4},$$

$$\begin{aligned} s_3 &= \frac{x}{1-x^2} + \frac{x^2}{1-x^4} + \frac{x^4}{1-x^8} = \frac{x+x^2+x^3}{1-x^4} + \frac{x^4}{1-x^8} \\ &= \frac{(x+x^2+x^3)(1+x^4)}{1-x^8} + \frac{x^4}{1-x^8} = \frac{(x+x^2+x^3+x^5+x^6+x^7)+x^4}{1-x^8} = \frac{x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7}{1-x^8}. \end{aligned}$$

Καταλαβαίνουμε, λοιπόν, ότι μάλλον το n-οστό μερικό άθροισμα έχει τύπο

$$s_n = \frac{x+x^2+\cdots+x^{2^n-1}}{1-x^{2^n}}.$$

Αυτό είναι, τώρα, πολύ εύκολο να αποδειχθεί με την αρχή της επαγωγής και μπορεί να το κάνει ο αναγνώστης.
Άρα έχουμε

$$s_n = x\,\frac{1+x+x^2+\cdots+x^{2^n-2}}{1-x^{2^n}} = x\,\frac{1-x^{2^n-1}}{(1-x)(1-x^{2^n})},$$

οπότε, αν $|x| < 1$, τότε $s_n \to \frac{x}{1-x}$ και, αν $|x| > 1$, τότε $s_n \to \frac{1}{1-x}$.

Άσκηση 8.1.9. *Έστω $k \in \mathbb{N}$ και $x_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2-k^2}, & \text{αν } n \neq k \\ 0, & \text{αν } n = k \end{cases}$ Βρείτε το άθροισμα της $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.*

Υπόδειξη: Αν s_n είναι το n-οστό μερικό άθροισμα της σειράς, αποδείξτε ότι

$$s_n = \frac{3}{2k^2} - \frac{1}{2k}\Big(\frac{1}{n-k+1} + \frac{1}{n-k+2} + \cdots + \frac{1}{n+k-1} + \frac{1}{n+k}\Big) \qquad \text{αν } n \geq k+1$$

και άρα $s_n \to \frac{3}{2k^2}$. Βασιστείτε στο ότι $\frac{1}{n^2-k^2} = \frac{1}{2k}\big(\frac{1}{n-k} - \frac{1}{n+k}\big)$.

Άσκηση 8.1.11. *Ένα αυτοκίνητο ξεκινά από την πόλη Α και σε ευθύ δρόμο κατευθύνεται προς την πόλη Β με σταθερή ταχύτητα v. Όλοι γνωρίζουμε ότι, αν η απόσταση των δύο πόλεων είναι d, τότε το αυτοκίνητο θα ολοκληρώσει τη διαδρομή σε χρόνο $\frac{d}{v}$. Απαντήστε, όμως, σε κάποιον που ισχυρίζεται ότι το αυτοκίνητο δεν θα φτάσει ποτέ στην πόλη Β και το δικαιολογεί ως εξής:*

"Ας υποθέσουμε ότι το αυτοκίνητο καλύπτει τη μισή απόσταση και, μάλιστα, στον προβλεπόμενο γι αυτή χρόνο. Ας υποθέσουμε, επίσης, ότι κατόπιν το αυτοκίνητο καλύπτει τη μισή από την εναπομένουσα απόσταση στον προβλεπόμενο γι αυτή χρόνο. Και ούτω καθ' εξής. Το αυτοκίνητο έχει, όμως, πάντοτε μπροστά του κάποια εναπομένουσα (έστω και πολύ μικρή) απόσταση μέχρι την πόλη Β, οπότε δεν θα φτάσει ποτέ εκεί".

Η απάντησή σας για να είναι πειστική πρέπει οπωσδήποτε να ακολουθήσει τα λογικά βήματα του παραπάνω ισχυρισμού.

Λύση: Το αυτοκίνητο θα καλύψει τη μισή απόσταση σε χρόνο $\frac{d/2}{v} = \frac{d}{2v}$. Η εναπομένουσα απόσταση είναι $\frac{d}{2}$ και το αυτοκίνητο θα καλύψει τη μισή από την εναπομένουσα απόσταση σε χρόνο $\frac{d/4}{v} = \frac{d}{4v}$. Τώρα, η εναπομένουσα απόσταση είναι $\frac{d}{4}$ και το αυτοκίνητο θα καλύψει τη μισή από την εναπομένουσα απόσταση σε χρόνο $\frac{d/8}{v} = \frac{d}{8v}$. Και ούτω καθ' εξής. Έτσι το αυτοκίνητο θα καλύψει την συνολική απόσταση σε χρόνο

$$\frac{d}{2v} + \frac{d}{4v} + \frac{d}{8v} + \cdots = \frac{d}{v}\sum_{n=1}^{+\infty}\big(\tfrac{1}{2}\big)^n = \frac{d}{v}\,\frac{1/2}{1-(1/2)} = \frac{d}{v}.$$

Άρα ο συνολικός χρόνος είναι πεπερασμένος *και όχι άπειρος* όπως ισχυρίζεται ο φίλος μας όταν λέει ότι το αυτοκίνητο δεν θα φτάσει ποτέ στην πόλη Β. Μάλιστα, ο χρόνος είναι $\frac{d}{v}$, όπως ακριβώς επιβεβαιώνει το πείραμα.

Άσκηση 8.1.12. *Σε κάθε σειρά αντιστοιχεί η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της. Αποδείξτε ότι, αντιστρόφως, σε κάθε ακολουθία αντιστοιχεί μια σειρά έτσι ώστε η ακολουθία αυτή να ταυτίζεται με την ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς.*

Λύση: Έστω τυχούσα ακολουθία (s_n).

Ορίζουμε την ακολουθία (x_n) με τύπο $x_1 = s_1$ και $x_n = s_n - s_{n-1}$ για κάθε $n \geq 2$.
Τότε για $n \geq 2$ έχουμε

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n = s_1 + (s_2 - s_1) + \cdots + (s_{n-1} - s_{n-2}) + (s_n - s_{n-1}) = s_n.$$

Άρα στην ακολουθία (s_n) αντιστοιχεί η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ με τέτοιο τρόπο ώστε τα μερικά αθροίσματα της σειράς αυτής να είναι οι όροι της (s_n).

Άσκηση 8.2.1. *Χρησιμοποιώντας τη σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ από την άσκηση 8.1.5, αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει.*

Λύση: Αφού ισχύει $\frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n(n+1)}$ για κάθε $n \geq 1$, συνεπάγεται

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Άρα η σειρά (μη-αρνητικών όρων) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει.

Άσκηση 8.2.2. *Συγκρίνοντας με απλούστερες σειρές, μελετήστε τις σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt{n^2+1} - n\right)$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$, $\sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt[n]{e} - 1)$, $\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)$.*

Λύση: Για να δούμε αν ο n-οστός όρος της πρώτης σειράς τείνει στο 0, γράφουμε

$$\sqrt{n^2+1} - n = \frac{(n^2+1) - n^2}{\sqrt{n^2+1} + n} = \frac{1}{\sqrt{n^2+1} + n} \to 0.$$

Από τον ίδιο τύπο βλέπουμε ότι ο n-οστός όρος συμπεριφέρεται όπως ο $\frac{1}{\sqrt{n^2}+n} = \frac{1}{2n}$. Επομένως, θα συσχετίσουμε την αρχική σειρά με την $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ και χρησιμοποιούμε τον λόγο των n-οστών όρων τους.

$$\frac{\sqrt{n^2+1} - n}{1/n} = \frac{n}{\sqrt{n^2+1} + n} = \frac{1}{\sqrt{1 + (1/n^2)} + 1} \to \frac{1}{2}.$$

Επειδή $0 < \frac{1}{2} < +\infty$, οι σειρές είτε και οι δύο συγκλίνουν είτε και οι δύο αποκλίνουν στο $+\infty$. Επειδή $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$, συνεπάγεται

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt{n^2+1} - n\right) = +\infty.$$

Ο n-οστός όρος της δεύτερης σειράς είναι στη μορφή $\log(1+x)$ όπου ο $x = \frac{1}{n^2}$ είναι ένας μικρός αριθμός ο οποίος τείνει στο 0. Τώρα θυμόμαστε το όριο

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x} = 1.$$

Επομένως,

$$\frac{\log(1 + (1/n^2))}{1/n^2} \to 1$$

και, επειδή $0 < 1 < +\infty$, η σειρά μας και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ συμπεριφέρονται ως προς την σύγκλιση με τον ίδιο τρόπο. Άρα, επειδή $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$, συνεπάγεται

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) < +\infty.$$

Με τον ίδιο τρόπο χειριζόμαστε και τις άλλες δύο σειρές. Για την τρίτη σειρά έχουμε το όριο

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} e^x = 1,$$

οπότε

$$\frac{\sqrt[n]{e} - 1}{1/n} = \frac{e^{1/n} - 1}{1/n} \to 1.$$

Άρα η σειρά μας και η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ συμπεριφέρονται ως προς την σύγκλιση με τον ίδιο τρόπο. Άρα

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt[n]{e} - 1) = +\infty.$$

Για την τέταρτη σειρά έχουμε το όριο

$$\lim_{x\to 0} \tfrac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \tfrac{\sin x}{2x} = \tfrac{1}{2},$$

οπότε

$$\tfrac{1-\cos(1/n)}{1/n^2} \to \tfrac{1}{2}, \qquad \tfrac{n(1-\cos(1/n))}{1/n} \to \tfrac{1}{2}.$$

Επειδή $0 < \frac{1}{2} < +\infty$, η σειρά μας και η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ συμπεριφέρονται ως προς την σύγκλιση με τον ίδιο τρόπο. Άρα

$$\textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} n\big(1 - \cos\frac{1}{n}\big) = +\infty.$$

Σχόλιο: Τα τρία προηγούμενα όρια, ακόμη κι αν κάποιος δεν τα θυμάται, μπορεί να τα σκεφτεί αν θυμηθεί τις παρακάτω πολύ γνωστές σειρές Taylor:

$$\begin{aligned} \log(1+x) &= x - \tfrac{1}{2}\,x^2 + \tfrac{1}{3}\,x^3 + \cdots = \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\,x^n \\ e^x &= 1 + x + \tfrac{1}{2!}\,x^2 + \tfrac{1}{3!}\,x^3 + \cdots = \textstyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\,x^n \\ \cos x &= 1 - \tfrac{1}{2!}\,x^2 + \tfrac{1}{4!}\,x^4 - \cdots = \textstyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\,x^{2n}. \end{aligned}$$

Όταν ο x είναι πολύ κοντά στον 0, οι δυνάμεις του x με εκθέτη μεγαλύτερο του 1 είναι “αμελητέες” σε σχέση με τον x, διότι

$$\lim_{x\to 0} \tfrac{x^a}{x} = \lim_{x\to 0} x^{a-1} = 0 \qquad \text{όταν } a > 1.$$

Ομοίως, και οι δυνάμεις του x με εκθέτη μεγαλύτερο του 2 είναι “αμελητέες” σε σχέση με τον x^2 όταν ο x είναι πολύ κοντά στον 0.
Άρα, παραλείποντας στις δύο πρώτες ισότητες τις δυνάμεις του x με εκθέτη μεγαλύτερο του 1 και στην τρίτη ισότητα τις δυνάμεις του x με εκθέτη μεγαλύτερο του 2, έχουμε, αντιστοίχως,

$$\log(1+x) \sim x, \qquad e^x - 1 \sim x, \qquad 1 - \cos x \sim \tfrac{1}{2}\,x^2$$

για x κοντά στον 0.

Άσκηση 8.2.3. *Βρείτε τις τιμές της παραμέτρου a για τις οποίες η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} n^a\big(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\big)$ συγκλίνει.*
Βρείτε τις τιμές των a, b με $a > b > 0$, για τις οποίες η σειρά $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^a - n^b}$ συγκλίνει.

Λύση: Αν συμβολίσουμε x_n τον n-οστό όρο της σειράς, βλέπουμε ότι

$$x_n = n^a\big(\tfrac{1}{\sqrt{n}} - \tfrac{1}{\sqrt{n+1}}\big) = n^a\,\tfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} = \tfrac{n^a}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}.$$

Άρα ο x_n είναι περίπου ίσος με τον

$$y_n = \tfrac{n^a}{\sqrt{n}\sqrt{n}(\sqrt{n}+\sqrt{n})} = \tfrac{1}{2n^{(3/2)-a}}.$$

Για τον λόγο των x_n και y_n έχουμε ότι

$$\tfrac{x_n}{y_n} = \tfrac{n^a}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}\,2n^{\frac{3}{2}-a} = \tfrac{2}{\sqrt{1+(1/n)}\big(\sqrt{1+(1/n)}+1\big)} \to 1.$$

Επειδή $0 < 1 < +\infty$, η αρχική σειρά και η $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συμπεριφέρονται με τον ίδιο τρόπο σε σχέση με την σύγκλιση. Όμως γνωρίζουμε ότι

$$\textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} y_n = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{(3/2)-a}} \begin{cases} < +\infty, & \text{αν } \frac{3}{2} - a > 1 \\ = +\infty, & \text{αν } \frac{3}{2} - a \le 1 \end{cases}$$

Άρα η δοσμένη σειρά συγκλίνει αν $a < \frac{1}{2}$ και αποκλίνει στο $+\infty$ αν $a \ge \frac{1}{2}$.

Έχουμε $\frac{1}{n^a-n^b}=\frac{1}{n^a(1-n^{b-a})}$, οπότε

$$\frac{1/(n^a-n^b)}{1/n^a}=\frac{1}{1-n^{b-a}}\to 1.$$

Αν $0<a\leq 1$, η $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^a}$ αποκλίνει, οπότε και η $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^a-n^b}$ αποκλίνει. Επειδή, επιπλέον, αυτή είναι σειρά με μη-αρνητικούς προσθετέους, συνεπάγεται ότι $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^a-n^b}=+\infty$.
Αν $1<a$, η $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^a}$ συγκλίνει, οπότε και η $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^a-n^b}$ συγκλίνει.

Άσκηση 8.2.4. *Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)}$ συγκλίνει.*

Υπόδειξη: Αποδείξτε ότι $\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)}\leq(\frac{2}{3})^n$ για κάθε n.

Άσκηση 8.2.5. *Εφαρμόστε το ολοκληρωτικό κριτήριο στις σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+1}$, $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n\log n}$ και $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n(\log n)^2}$. Για όσες σειρές συγκλίνουν βρείτε εκτιμήσεις για το άθροισμά τους. Για όσες σειρές αποκλίνουν στο $+\infty$ βρείτε εκτιμήσεις για τα μερικά αθροίσματά τους. Κατόπιν, εφαρμόστε και το κριτήριο συμπύκνωσης στις παραπάνω σειρές.*

Λύση: Στην πρώτη σειρά η ακολουθία των προσθετέων είναι φθίνουσα. Θεωρούμε την συνάρτηση $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(u)=\frac{1}{u^2+1}$. Η f είναι φθίνουσα και οι τιμές της στους φυσικούς ταυτίζονται με τους αντίστοιχους όρους της σειράς, οπότε εξετάζουμε το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{u^2+1}\,du=\lim_{t\to+\infty}\int_1^t\frac{1}{u^2+1}\,du=\lim_{t\to+\infty}(\arctan t-\arctan 1)=\frac{\pi}{4}<+\infty.$$

Άρα η σειρά συγκλίνει:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+1}<+\infty.$$

Για το άθροισμα της σειράς έχουμε την εκτίμηση

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{u^2+1}\,du\leq\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+1}\leq\frac{1}{1^2+1}+\int_1^{+\infty}\frac{1}{u^2+1}\,du$$

και άρα $\frac{\pi}{4}\leq\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+1}\leq\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$.
Στην ίδια σειρά θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε και το κριτήριο σύγκρισης:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+1}\leq\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}<+\infty.$$

Όμως, στις επόμενες δύο σειρές αυτό δεν είναι τόσο εύκολο και το πιο απλό είναι να εφαρμόσουμε το ολοκληρωτικό κριτήριο.
Και στις δύο σειρές η ακολουθία των προσθετέων είναι φθίνουσα. Για την δεύτερη σειρά θεωρούμε την φθίνουσα συνάρτηση στο διάστημα $[2,+\infty)$ με τύπο $f(u)=\frac{1}{u\log u}$ και εξετάζουμε το αντίστοιχο γενικευμένο ολοκλήρωμα:

$$\begin{aligned}\int_2^{+\infty}\frac{1}{u\log u}\,du&=\lim_{t\to+\infty}\int_2^t\frac{1}{u\log u}\,du=\lim_{t\to+\infty}\int_{\log 2}^{\log t}\frac{1}{y}\,dy\\&=\lim_{t\to+\infty}\big(\log(\log t)-\log(\log 2)\big)=+\infty.\end{aligned}$$

Άρα

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n\log n}=+\infty.$$

Για τα μερικά αθροίσματα της σειράς έχουμε τις εκτιμήσεις

$$\int_2^{n+1}\frac{1}{u\log u}\,du\leq\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\log k}\leq\frac{1}{2\log 2}+\int_2^{n}\frac{1}{u\log u}\,du$$

και άρα $\log\frac{\log(n+1)}{\log 2}\leq\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\log k}\leq\frac{1}{\log 4}+\log\frac{\log n}{\log 2}$.
Για την τρίτη σειρά θεωρούμε την φθίνουσα συνάρτηση στο διάστημα $[2,+\infty)$ με τύπο $f(u)=\frac{1}{u(\log u)^2}$ και μελετάμε το γενικευμένο ολοκλήρωμά της:

$$\begin{aligned}\int_2^{+\infty}\frac{1}{u(\log u)^2}\,du&=\lim_{t\to+\infty}\int_2^t\frac{1}{u(\log u)^2}\,du=\lim_{t\to+\infty}\int_{\log 2}^{\log t}\frac{1}{y^2}\,dy\\&=\lim_{t\to+\infty}\Big(\frac{1}{\log 2}-\frac{1}{\log t}\Big)=\frac{1}{\log 2}<+\infty.\end{aligned}$$

Άρα
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\log n)^2} < +\infty$$
και για το άθροισμα της σειράς έχουμε την εκτίμηση
$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{u(\log u)^2}\,du \le \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\log n)^2} \le \frac{1}{2(\log 2)^2} + \int_2^{+\infty} \frac{1}{u(\log u)^2}\,du$$
και, επομένως, $\frac{1}{\log 2} \le \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\log n)^2} \le \frac{1}{2(\log 2)^2} + \frac{1}{\log 2}$.
Εφαρμόζοντας το κριτήριο συμπύκνωσης στην πρώτη σειρά βρίσκουμε ότι
$$\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k \frac{1}{(2^k)^2+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{2^{2k}+1} \le \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{2^{2k}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} < +\infty.$$
Άρα η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$ συγκλίνει.
Για τη δεύτερη σειρά έχουμε
$$\sum_{k=1}^{+\infty} 2^k \frac{1}{2^k \log(2^k)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k\log 2} = \frac{1}{\log 2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty,$$
οπότε η $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\log n}$ αποκλίνει στο $+\infty$.
Τέλος, για την τρίτη σειρά έχουμε
$$\sum_{k=1}^{+\infty} 2^k \frac{1}{2^k(\log(2^k))^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2(\log 2)^2} = \frac{1}{(\log 2)^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty,$$
οπότε η $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\log n)^2}$ συγκλίνει.

Άσκηση 8.2.6. *Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\log n)^p}$ συγκλίνει, αν $p > 1$, και αποκλίνει στο $+\infty$, αν $p \le 1$.*

Λύση: Αν $p > 0$, η συνάρτηση $\frac{1}{x(\log x)^p}$ είναι φθίνουσα στο $[2, +\infty)$. Ισχύει
$$\int_2^x \frac{1}{t(\log t)^p}\,dt = \begin{cases} \log(\log x) - \log(\log 2), & \text{αν } p = 1 \\ \frac{(\log x)^{1-p} - (\log 2)^{1-p}}{1-p}, & \text{αν } p \ne 1 \end{cases}$$
και, επομένως,
$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t(\log t)^p}\,dt = \lim_{x\to+\infty} \int_2^x \frac{1}{t(\log t)^p}\,dt = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } p \le 1 \\ \frac{(\log 2)^{1-p}}{p-1}, & \text{αν } 1 < p \end{cases}$$
Άρα, η $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\log n)^p}$ συγκλίνει, αν $p > 1$, και αποκλίνει, αν $0 < p \le 1$.
Αν $p \le 0$, τότε
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\log n)^p} \ge (\log 2)^{-p} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty,$$
οπότε η $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\log n)^p}$ αποκλίνει.

Άσκηση 8.2.7. *Έστω $a > 0$. Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a^n n^b}$ συγκλίνει αν $a = 1$, $b > 1$ και αν $a > 1$ και ότι αποκλίνει στο $+\infty$ σε κάθε άλλη περίπτωση.*

Λύση: Εφαρμόζουμε το κριτήριο λόγου:
$$\left|\frac{1/(a^{n+1}(n+1)^b)}{1/(a^n n^b)}\right| = \frac{1}{a}\left(\frac{n}{n+1}\right)^b \to \frac{1}{a}.$$
Άρα, αν $a < 1$, η σειρά αποκλίνει και, αν $a > 1$, η σειρά συγκλίνει.
Απομένει η περίπτωση $a = 1$. Τότε η σειρά γίνεται $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^b}$ και συγκλίνει, αν $b > 1$, ενώ αποκλίνει, αν $b \le 1$.
Μπορούμε να εφαρμόσουμε και το κριτήριο ρίζας. Υπολογίζουμε
$$\sqrt[n]{|1/(a^n n^b)|} \to \frac{1}{a}$$

και συνεχίζουμε όπως πριν.

Άσκηση 8.2.9. *Έστω $p > 1$.*
Αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{1}{(p-1)k^{p-1}} \leq \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n^p} \leq \frac{1}{k^p} + \frac{1}{(p-1)k^{p-1}}$ για κάθε k.
Αποδείξτε ότι $k^{p-1} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n^p} \to \frac{1}{p-1}$ (όταν $k \to +\infty$).
Αποδείξτε ότι ισχύει $\lim_{p\to 1+}(p-1) \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n^p} = 1$ για κάθε k.

Υπόδειξη: Για το πρώτο ερώτημα εφαρμόστε το ολοκληρωτικό κριτήριο. Οι απαντήσεις στα άλλα δύο ερωτήματα είναι άμεσες από το αποτέλεσμα του πρώτου ερωτήματος με παρεμβολή.

Άσκηση 8.2.10. *Έστω $x > 0$. Αποδείξτε ότι $\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{x} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^2+x^2} \leq \frac{x}{1+x^2} + \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{x}$.*
Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^2+x^2} = \frac{\pi}{2}$.
Άρα τί απαντάμε αν κάποιος ισχυριστεί ότι γενικά ισχύει η εναλλαγή $\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} f_n(x)$ των συμβόλων του ορίου και της σειράς;

Υπόδειξη: Το πρώτο ερώτημα απαντάται με το ολοκληρωτικό κριτήριο. Για το δεύτερο ερώτημα κάνουμε παρεμβολή.
Η απάντηση στο ισχυρισμό του τρίτου ερωτήματος είναι: *όχι*.
Πράγματι, στο συγκεκριμένο παράδειγμα έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^2+x^2} = \frac{\pi}{2}$$

και

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{n^2+x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0.$$

Άσκηση 8.2.11. *Έστω ότι ισχύει $x_n > 0$ για κάθε n και $a \geq 1$. Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει, αποδείξτε ότι και οι σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} {x_n}^a$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{{x_n}^a}{1+{x_n}^a}$ συγκλίνουν.*

Λύση: Επειδή η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει, συνεπάγεται ότι $x_n \to 0$.
Για την πρώτη σειρά. Η απάντηση είναι προφανής αν $a = 1$. Αν $a > 1$, τότε $\frac{{x_n}^a}{x_n} = {x_n}^{a-1} \to 0$ και, επειδή η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει, συνεπάγεται ότι και η $\sum_{n=1}^{+\infty} {x_n}^a$ συγκλίνει.
Για τη δεύτερη σειρά. Επειδή $\frac{{x_n}^a/(1+{x_n}^a)}{{x_n}^a} = \frac{1}{1+{x_n}^a} \to 1$ και επειδή η $\sum_{n=1}^{+\infty} {x_n}^a$ συγκλίνει, συνεπάγεται ότι και η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{{x_n}^a}{1+{x_n}^a}$ συγκλίνει.

Άσκηση 8.2.12. *Έστω ότι ισχύει $x_n \geq 0$ για κάθε n.*
Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει, αποδείξτε ότι και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{x_n}}{n}$ συγκλίνει.
Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει, αποδείξτε ότι και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{x_n x_{n+1}}$ συγκλίνει. Αν, επιπλέον, η (x_n) είναι φθίνουσα, τότε αποδείξτε και το αντίστροφο.
Βρείτε παράδειγμα σειράς $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ η οποία αποκλίνει στο $+\infty$ ώστε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{x_n x_{n+1}}$ να συγκλίνει.

Λύση: Από τη γνωστή ανισότητα $ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$ έχουμε $\frac{\sqrt{x_n}}{n} \leq \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{2}\frac{1}{n^2}$ για κάθε n. Άρα,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{x_n}}{n} \leq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} x_n + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty,$$

οπότε η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{x_n}}{n}$ συγκλίνει.
Τώρα από την ίδια στοιχειώδη ανισότητα παίρνουμε $\sqrt{x_n x_{n+1}} \leq \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{2}x_{n+1}$ για κάθε n. Άρα,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{x_n x_{n+1}} \leq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} x_n + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} x_{n+1} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} x_n + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{+\infty} x_n < +\infty.$$

Για το αντίστροφο βλέπουμε ότι, επειδή η (x_n) είναι φθίνουσα, έχουμε $x_{n+1} \leq \sqrt{x_n x_{n+1}}$ για κάθε n. Άρα,

$$\sum_{n=2}^{+\infty} x_n = \sum_{n=1}^{+\infty} x_{n+1} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{x_n x_{n+1}} < +\infty.$$

Θεωρούμε $x_n = 1$, αν ο n είναι περιττός, και $x_n = \frac{1}{n^4}$, αν ο n είναι άρτιος. Δηλαδή, η ακολουθία (x_n) είναι η: $1, \frac{1}{2^4}, 1, \frac{1}{4^4}, 1, \frac{1}{6^4}, \ldots$.

Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ αποκλίνει στο $+\infty$ διότι είναι σειρά μη-αρνητικών όρων και η (x_n) δεν έχει όριο 0. Όμως, η $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{x_n x_{n+1}}$ συγκλίνει.
Πράγματι, αν ο n είναι περιττός, τότε $x_n x_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^4}$, οπότε $\sqrt{x_n x_{n+1}} = \frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n^2}$, και, αν ο n είναι άρτιος, τότε $x_n x_{n+1} = \frac{1}{n^4}$, οπότε $\sqrt{x_n x_{n+1}} = \frac{1}{n^2}$. Επομένως,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{x_n x_{n+1}} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty.$$

Άσκηση 8.2.13. [α] *Έστω ότι ισχύει $x_n, y_n > 0$ για κάθε n και έστω ότι ισχύει τελικά $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \frac{y_{n+1}}{y_n}$. Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνει, αποδείξτε ότι και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει.*
[β] *Έστω ότι ισχύει $x_n > 0$ για κάθε n.*
Αν $0 < a < 1$ και αν ισχύει τελικά $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq a$, αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει.
Αν $a > 1$ και αν ισχύει τελικά $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq a$, αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ αποκλίνει.

Υπόδειξη: [α] Η ακολουθία $(\frac{x_n}{y_n})$ είναι τελικά φθίνουσα και, επομένως, άνω φραγμένη.
[β] Στην πρώτη περίπτωση να χρησιμοποιήσετε το αποτέλεσμα του [α] με $y_n = a^n$ για κάθε n. Στη δεύτερη περίπτωση εναλλάξτε τους ρόλους των x_n και y_n.

Άσκηση 8.2.14. [α] *Έστω (x_n) φθίνουσα ώστε να ισχύει $x_n \geq 0$ για κάθε n. Αν $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n < +\infty$, αποδείξτε ότι $n x_n \to 0$.*
Αποδείξτε ότι $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} = +\infty$ αν $0 \leq p \leq 1$.
[β] *Δείτε την άσκηση 8.1.5. Έστω ακολουθία (x_n) ώστε να ισχύει $x_{n+1} \leq \frac{x_n + x_{n+2}}{2}$ για κάθε n και $x_n \to 0$. Αποδείξτε ότι $\sum_{n=1}^{+\infty} n(x_n - 2x_{n+1} + x_{n+2}) = x_1$.*

Λύση: [α] Αν $n \geq 2$, τότε $[\frac{n}{2}] \geq 1$ και, επειδή η (x_n) είναι φθίνουσα, συνεπάγεται

$$x_{[n/2]} + \cdots + x_n \geq x_n + \cdots + x_n = \big(n - \big[\tfrac{n}{2}\big] + 1\big) x_n \geq \big(n - \tfrac{n}{2} + 1\big) x_n \geq \tfrac{n}{2} x_n.$$

Έχουμε, λοιπόν, ότι για $n \geq 2$ ισχύει

$$0 \leq n x_n \leq 2(x_{[n/2]} + \cdots + x_n) \leq 2 \sum_{k=[n/2]}^{+\infty} x_k.$$

Επειδή $[\frac{n}{2}] \to +\infty$, συνεπάγεται $\sum_{k=[n/2]}^{+\infty} x_k \to 0$ και άρα $n x_n \to 0$.
Η $(\frac{1}{n^p})$ είναι φθίνουσα, οπότε, αν η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ συγκλίνει, συνεπάγεται ότι $n \frac{1}{n^p} \to 0$, το οποίο είναι άτοπο.
[β] Από την $x_{n+1} \leq \frac{x_n + x_{n+2}}{2}$ συνεπάγεται $x_n - x_{n+1} \geq x_{n+1} - x_{n+2}$.
Επίσης, από το ότι $x_n \to 0$ έχουμε ότι $x_n - x_{n+1} \to 0$ και άρα η ακολουθία $(x_n - x_{n+1})$ είναι φθίνουσα με όριο 0 και άρα όλοι οι όροι της είναι ≥ 0.
Από το αποτέλεσμα της άσκησης 8.1.5 και από το ότι $x_n \to 0$ συνεπάγεται ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty}(x_n - x_{n+1})$ συγκλίνει και, μάλιστα,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(x_n - x_{n+1}) = x_1.$$

Τώρα, η τελευταία σειρά έχει μη-αρνητικούς όρους οι οποίοι φθίνουν, οπότε από το αποτέλεσμα του [α] συνεπάγεται ότι

$$n(x_n - x_{n+1}) \to 0. \tag{14.241}$$

Τέλος, έστω s_n τα μερικά αθροίσματα της $\sum_{n=1}^{+\infty} n(x_n - 2x_{n+1} + x_{n+2})$. Τότε

$$\begin{aligned}
s_n &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} k(x_k - 2x_{k+1} + x_{k+2}) = \sum_{k=1}^{n} k(x_k - x_{k+1}) - \sum_{k=1}^{n} k(x_{k+1} - x_{k+2}) \\
&= \textstyle\sum_{k=1}^{n} k(x_k - x_{k+1}) - \sum_{k=2}^{n+1}(k-1)(x_k - x_{k+1}) \\
&= \textstyle(x_1 - x_2) + \sum_{k=2}^{n} k(x_k - x_{k+1}) - \sum_{k=2}^{n}(k-1)(x_k - x_{k+1}) - n(x_{n+1} - x_{n+2}) \\
&= \textstyle(x_1 - x_2) + \sum_{k=2}^{n}(x_k - x_{k+1}) - n(x_{n+1} - x_{n+2}) \\
&= (x_1 - x_2) + (x_2 - x_{n+1}) - n(x_{n+1} - x_{n+2}) = x_1 - x_{n+1} - n(x_{n+1} - x_{n+2}).
\end{aligned}$$

Από το ότι $x_n \to 0$ και από την (14.241) συνεπάγεται ότι $s_n \to x_1$ και άρα

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n(x_n - 2x_{n+1} + x_{n+2}) = x_1.$$

Άσκηση 8.2.16. *Έστω ότι ισχύει $x_n \leq y_n \leq z_n$ για κάθε n. Αν οι σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ συγκλίνουν, αποδείξτε ότι και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνει.*

Υπόδειξη: Θεωρήστε τις σειρές μη-αρνητικών όρων $\sum_{n=1}^{+\infty}(z_n - x_n)$ και $\sum_{n=1}^{+\infty}(y_n - x_n)$.

Άσκηση 8.2.17. *Έστω $m_1, m_2, m_3, \ldots$ κατά γνησίως αύξουσα διάταξη οι φυσικοί οι οποίοι δεν περιέχουν το δεκαδικό ψηφίο 3 στο δεκαδικό τους ανάπτυγμα. Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{m_n}$ συγκλίνει.*

Λύση: Υπάρχουν 8 όροι της ακολουθίας (m_n) στο διάστημα $[1, 10)$, οι $1, 2, 4, 5, 6, 7, 8$ και 9. Στο διάστημα $[10, 10^2)$ υπάρχουν $8 \cdot 9$ όροι της ακολουθίας, αφού στην δεκαδική τους παράσταση έχουμε 8 επιλογές για το πρώτο ψηφίο και 9 επιλογές για το δεύτερο ψηφίο. Έτσι, είναι προφανές ότι, γενικότερα, στο διάστημα $[10^k, 10^{k+1})$ υπάρχουν $8 \cdot 9^k$ όροι της ακολουθίας (m_n).
Είναι, επίσης, προφανές ότι για όλους τους όρους m_n που είναι στο διάστημα $[10^k, 10^{k+1})$ ισχύει $\frac{1}{m_n} \leq \frac{1}{10^k}$, οπότε το συνολικό άθροισμα των αντίστοιχων $\frac{1}{m_n}$ είναι $\leq 8 \cdot 9^k \frac{1}{10^k} = 8(\frac{9}{10})^k$. Άρα,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{m_n} \leq \sum_{k=0}^{+\infty} 8\big(\tfrac{9}{10}\big)^k = 8\frac{1}{1-(9/10)} = 80.$$

Άσκηση 8.2.18. *Έστω ότι ισχύει $x_n > 0$ για κάθε n και έστω ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει. Θέτουμε $r_n = \sum_{k=n}^{+\infty} x_k$ για κάθε n.*
Αν $p \geq 1$, αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{x_{m+1}}{{r_{m+1}}^p} + \cdots + \frac{x_n}{{r_n}^p} \geq \frac{1}{{r_{m+1}}^{p-1}} - \frac{r_{n+1}}{{r_{m+1}}^p}$ για κάθε m, n με $m < n$ και συμπεράνατε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{{r_n}^p}$ αποκλίνει.
Αν $0 < p < 1$, αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{x_n}{{r_n}^p} \leq \frac{1}{1-p}({r_n}^{1-p} - {r_{n+1}}^{1-p})$ για κάθε n και συμπεράνατε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{{r_n}^p}$ συγκλίνει.
Λύση: Το πρώτο ερώτημα. Στην περίπτωση $p = 1$ έχουμε

$$r_n = \sum_{k=n}^{+\infty} x_k = x_n + \sum_{k=n+1}^{+\infty} x_k = x_n + r_{n+1} > r_{n+1}$$

για κάθε n. Άρα, η (r_n) είναι φθίνουσα ακολουθία, οπότε για $m < n$ έχουμε

$$\frac{x_{m+1}}{r_{m+1}} + \cdots + \frac{x_n}{r_n} \geq \frac{x_{m+1}}{r_{m+1}} + \cdots + \frac{x_n}{r_{m+1}} = \frac{x_{m+1}+\cdots+x_n}{r_{m+1}} = \frac{r_{m+1}-r_{n+1}}{r_{m+1}} = 1 - \frac{r_{n+1}}{r_{m+1}}.$$

Επειδή η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει, συνεπάγεται ότι $r_n \to 0$. Παίρνουμε, τώρα, οποιονδήποτε $m \geq 1$, οπότε $r_{m+1} > 0$, και βρίσκουμε $n > m$ αρκετά μεγάλο ώστε να ισχύει $r_{n+1} < \frac{r_{m+1}}{2}$. Βλέπουμε, λοιπόν, ότι για κάθε $m \geq 1$ υπάρχει $n > m$ ώστε

$$\frac{x_{m+1}}{r_{m+1}} + \cdots + \frac{x_n}{r_n} \geq 1 - \frac{r_{n+1}}{r_{m+1}} > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Συνεπάγεται ότι *δεν* ισχύει $\lim_{m,n\to+\infty}\left(\frac{x_{m+1}}{r_{m+1}} + \cdots + \frac{x_n}{r_n}\right) = 0$, οπότε η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{r_n}$ αποκλίνει.
Κάντε εσείς την περίπτωση $p > 1$.
Το δεύτερο ερώτημα. Στην περίπτωση $p = \frac{1}{2}$ έχουμε

$$\frac{x_n}{\sqrt{r_n}} = \frac{r_n - r_{n+1}}{\sqrt{r_n}} = \frac{(\sqrt{r_n}+\sqrt{r_{n+1}})(\sqrt{r_n}-\sqrt{r_{n+1}})}{\sqrt{r_n}} \leq 2(\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}}) \qquad \text{για κάθε } n. \tag{14.242}$$

Επειδή $r_n \to 0$, από το αποτέλεσμα της άσκησης 8.1.5 έχουμε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty}(\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}})$ συγκλίνει και, μάλιστα,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}}) = \sqrt{r_1}.$$

Τώρα, από την (14.242) συνεπάγεται ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{\sqrt{r_n}}$ συγκλίνει.
Δείτε εσείς την γενικότερη περίπτωση $0 < p < 1$.

Άσκηση 8.2.19. [α] *Έστω ότι ισχύει $x_n > 0$ για κάθε n και έστω ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ αποκλίνει. Θέτουμε $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ για κάθε n.*
Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{1+x_n}$ αποκλίνει.
Αν $p \le 1$, αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{x_{m+1}}{s_{m+1}{}^p} + \cdots + \frac{x_n}{s_n{}^p} \ge \frac{1}{s_n{}^{p-1}} - \frac{s_m}{s_n{}^p}$ για κάθε m, n με $m < n$ και συμπεράνατε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{s_n{}^p}$ αποκλίνει.
Αν $p > 1$, αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{x_n}{s_n{}^p} \le \frac{1}{p-1}\big(\frac{1}{s_{n-1}{}^{p-1}} - \frac{1}{s_n{}^{p-1}}\big)$ για κάθε $n \ge 2$ και συμπεράνατε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{s_n{}^p}$ συγκλίνει.

Λύση: Το πρώτο ερώτημα. Υποθέτουμε, για να καταλήξουμε σε άτοπο, ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{1+x_n}$ συγκλίνει. Συνεπάγεται ότι $\frac{x_n}{1+x_n} \to 0$, οπότε $1 + \frac{1}{x_n} = \frac{1+x_n}{x_n} \to +\infty$, οπότε $x_n \to 0$. Άρα,

$$\frac{x_n}{x_n/(1+x_n)} = 1 + x_n \to 1$$

και, επομένως, η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει. Αυτό είναι άτοπο.
Το δεύτερο ερώτημα. Με $p = 1$, έχουμε ότι η (s_n) είναι αύξουσα ακολουθία, οπότε

$$\frac{x_{m+1}}{s_{m+1}} + \cdots + \frac{x_n}{s_n} \ge \frac{x_{m+1}}{s_n} + \cdots + \frac{x_n}{s_n} = \frac{x_{m+1}+\cdots+x_n}{s_n} = \frac{s_n - s_m}{s_n} = 1 - \frac{s_m}{s_n}.$$

Επειδή η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ αποκλίνει, συνεπάγεται ότι $s_n \to +\infty$. Παίρνουμε οποιοδήποτε $m \ge 1$ και βρίσκουμε $n > m$ αρκετά μεγάλο ώστε να ισχύει $s_n > 2s_m$. Βλέπουμε, τώρα, ότι για κάθε $m \ge 1$ υπάρχει $n > m$ ώστε

$$\frac{x_{m+1}}{s_{m+1}} + \cdots + \frac{x_n}{s_n} \ge 1 - \frac{s_m}{s_n} > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Συνεπάγεται ότι *δεν ισχύει* $\lim_{m,n\to+\infty} \big(\frac{x_{m+1}}{s_{m+1}} + \cdots + \frac{x_n}{s_n}\big) = 0$, οπότε η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{s_n}$ αποκλίνει.
Δείτε εσείς την περίπτωση $p < 1$.
Το τρίτο ερώτημα. Με $p = 2$ έχουμε

$$\frac{x_n}{s_n{}^2} = \frac{s_n - s_{n-1}}{s_n{}^2} \le \frac{s_n - s_{n-1}}{s_n s_{n-1}} = \frac{1}{s_{n-1}} - \frac{1}{s_n} \qquad \text{για κάθε } n \ge 2. \tag{14.243}$$

Από το ότι $\frac{1}{s_n} \to 0$ και από το αποτέλεσμα της άσκησης 8.1.5 έχουμε ότι η $\sum_{n=2}^{+\infty} \big(\frac{1}{s_{n-1}} - \frac{1}{s_n}\big)$ συγκλίνει και

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \Big(\frac{1}{s_{n-1}} - \frac{1}{s_n}\Big) = \frac{1}{s_1} = \frac{1}{x_1}.$$

Άρα, από την (14.243) συνεπάγεται ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{s_n{}^2}$ συγκλίνει.
Δείτε εσείς την γενικότερη περίπτωση $p > 1$.

Άσκηση 8.2.20. [α] *Έστω ότι ισχύει $x_n > 0$ για κάθε n και έστω ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει. Αποδείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (y_n) ώστε $y_n \to +\infty$ και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n y_n$ να συγκλίνει.*
[β] *Έστω ότι ισχύει $x_n > 0$ για κάθε n και έστω ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ αποκλίνει. Αποδείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (y_n) ώστε $y_n \to 0$ και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n y_n$ να αποκλίνει.*

Λύση: [α] Θέτουμε $r_n = \sum_{k=n}^{+\infty} x_k$ για κάθε n. Τότε $r_n \to 0$ και από το αποτέλεσμα της άσκησης 8.2.18 συνεπάγεται ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{\sqrt{r_n}}$ συγκλίνει. Άρα αν ορίσουμε $y_n = \frac{1}{\sqrt{r_n}}$ για κάθε n, τότε $y_n \to +\infty$ και η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n y_n$ συγκλίνει.
Υπάρχει και δεύτερος τρόπος.
Θεωρούμε n_1 έτσι ώστε $r_{n_1} \le 1$. Αυτό είναι εφικτό διότι $r_n \to 0$. Κατόπιν (με την ίδια αιτιολόγηση) θεωρούμε $n_2 > n_1$ ώστε $r_{n_2} \le \frac{1}{2^3}$. Κατόπιν θεωρούμε $n_3 > n_2$ ώστε $r_{n_3} \le \frac{1}{3^3}$. Και ούτω καθ' εξής. Έτσι δημιουργούμε την γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών (n_k) ώστε να ισχύει

$$r_{n_k} \le \frac{1}{k^3} \qquad \text{για κάθε } k.$$

Τώρα ορίζουμε την ακολουθία (y_n) με τον εξής τρόπο. Θέτουμε $y_n = 0$ αν $1 \le n < n_1$. Κατόπιν θέτουμε $y_n = 1$ αν $n_1 \le n < n_2$. Κατόπιν θέτουμε $y_n = 2$ αν $n_2 \le n < n_3$. Και ούτω καθ' εξής. Δηλαδή, για κάθε k, ισχύει

$$y_n = k \qquad \text{αν } n_k \le n < n_{k+1}.$$

Έχουμε ότι $y_n \to +\infty$. Πράγματι, για κάθε $M > 0$ ισχύει $y_n \geq k = [M] + 1 > M$ για κάθε $n \geq n_k$.
Επίσης,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} x_n y_n &= \sum_{n=1}^{n_1-1} x_n y_n + \sum_{k=1}^{+\infty} \big(\sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} x_n y_n\big) \\ &= \sum_{n=1}^{n_1-1} x_n 0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \big(\sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} x_n k\big) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} k\big(\sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} x_n\big) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} k r_{n_k} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \tfrac{1}{k^2} < +\infty.\end{aligned}$$

[β] Θέτουμε $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ για κάθε n. Τότε $s_n \to +\infty$ και από το αποτέλεσμα της άσκησης 8.2.19 συνεπάγεται ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{s_n}$ αποκλίνει. Άρα αν ορίσουμε $y_n = \frac{1}{s_n}$ για κάθε n, τότε $y_n \to 0$ και η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n y_n$ αποκλίνει.
Όπως και στο [α], υπάρχει και δεύτερος τρόπος.
Θεωρούμε n_1 έτσι ώστε $s_{n_1} \geq 1$. Αυτό είναι εφικτό διότι $s_n \to +\infty$. Κατόπιν θεωρούμε $n_2 > n_1$ ώστε $s_{n_2} - s_{n_1} \geq 2$. Αυτό είναι εφικτό διότι $s_n - s_{n_1} \to +\infty$. Κατόπιν (με την ίδια αιτιολόγηση) θεωρούμε $n_3 > n_2$ ώστε $s_{n_3} - s_{n_2} \geq 3$. Και ούτω καθ' εξής. Έτσι δημιουργούμε την γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών (n_k) ώστε να ισχύει

$$s_{n_1} \geq 1 \qquad \text{και} \qquad s_{n_{k+1}} - s_{n_k} \geq k+1 \quad \text{για κάθε } k.$$

Τώρα ορίζουμε την ακολουθία (y_n) με τον εξής τρόπο. Θέτουμε $y_n = 1$ αν $1 \leq n \leq n_1$. Κατόπιν θέτουμε $y_n = \frac{1}{2}$ αν $n_1 < n \leq n_2$. Κατόπιν θέτουμε $y_n = \frac{1}{3}$ αν $n_2 < n \leq n_3$. Και ούτω καθ' εξής. Δηλαδή, για κάθε k, ισχύει

$$y_n = 1 \quad \text{αν } 1 \leq n \leq n_1 \qquad \text{και} \qquad y_n = \tfrac{1}{k+1} \qquad \text{αν } n_k < n \leq n_{k+1}.$$

Έχουμε ότι $y_n \to 0$. Πράγματι, για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει $y_n \leq \frac{1}{k+1} = \frac{1}{[1/\epsilon]+1} < \epsilon$ για κάθε $n > n_k$.
Επίσης,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} x_n y_n &= \sum_{n=1}^{n_1} x_n y_n + \sum_{k=1}^{+\infty} \big(\sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} x_n y_n\big) \\ &= \sum_{n=1}^{n_1} x_n 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \big(\sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} x_n \tfrac{1}{k+1}\big) \\ &= s_{n_1} + \sum_{k=1}^{+\infty} \tfrac{1}{k+1}\big(\sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} x_n\big) \\ &= s_{n_1} + \sum_{k=1}^{+\infty} \tfrac{1}{k+1}(s_{n_{k+1}} - s_{n_k}) \geq 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} 1 = +\infty.\end{aligned}$$

Άσκηση 8.2.21. *Έστω $a_n, b_n \geq 0$ για κάθε n και $p, q > 1$ ώστε $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*
[α] *Αν $\sum_{n=1}^{+\infty} {a_n}^p < +\infty$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} {b_n}^q < +\infty$, αποδείξτε την ανισότητα του Hölder για σειρές,*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n \leq \big(\sum_{n=1}^{+\infty} {a_n}^p\big)^{1/p} \big(\sum_{n=1}^{+\infty} {b_n}^q\big)^{1/q}.$$

Αποδείξτε ότι ισχύει η ισότητα αν και μόνο αν υπάρχουν $s, t \geq 0$ όχι και οι δύο ίσοι με 0 ώστε να ισχύει $s{a_n}^p = t{b_n}^q$ για κάθε n.
Αν $\sum_{n=1}^{+\infty} {a_n}^2 < +\infty$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} {b_n}^2 < +\infty$, επειδή $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, η πολύ σημαντική ανισότητα του Cauchy,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n \leq \big(\sum_{n=1}^{+\infty} {a_n}^2\big)^{1/2} \big(\sum_{n=1}^{+\infty} {b_n}^2\big)^{1/2},$$

είναι ειδική περίπτωση της ανισότητας του Hölder.

Υπόδειξη: Πρώτος τρόπος. Θεωρήστε το όριο καθώς $n \to +\infty$ στην ανισότητα του Hölder της άσκησης 5.4.22. Με αυτόν το τρόπο δύσκολα θα χειριστείτε την περίπτωση της ισότητας.
Δεύτερος τρόπος. Θεωρήστε $A = \big(\sum_{n=1}^{+\infty} {a_n}^p\big)^{1/p}$ και $B = \big(\sum_{n=1}^{+\infty} {b_n}^q\big)^{1/q}$. Αν $A = 0$ ή $B = 0$, η ανισότητα είναι προφανής. Αν $A, B > 0$, εφαρμόστε την ανισότητα του Young της άσκησης 5.4.21 σε κάθε ζεύγος $\frac{a_n}{A}, \frac{b_n}{B}$.
Τρίτος τρόπος για την ανισότητα του Cauchy. Αποδείξτε ότι $\big(\sum_{n=1}^{+\infty} {a_n}^2\big)t^2 + \big(2\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n\big)t +$

$\big(\sum_{n=1}^{+\infty} b_n{}^2\big) = \sum_{n=1}^{+\infty}(ta_n + b_n)^2 \geq 0$ για κάθε t.

Άσκηση 8.2.22. *Βρείτε $f : [1,+\infty) \to [0,+\infty)$ συνεχή στο $[1,+\infty)$ ώστε $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) = +\infty$ και το $\lim_{t\to+\infty} \int_1^t f(u)\,du$ να είναι αριθμός.*

Λύση: Θεωρούμε διάστημα $[1, 1+a_1]$ και, για κάθε $n \geq 2$, θεωρούμε διάστημα $[n-a_n, n+a_n]$ έτσι ώστε τα διαστήματα αυτά να είναι ξένα ανά δύο και ώστε η σειρά των μηκών τους να συγκλίνει:

$$a_1 + \sum_{n=2}^{+\infty} 2a_n < +\infty. \tag{14.244}$$

Για παράδειγμα, μπορούμε να πάρουμε $a_1 = \frac{1}{2}$ και $a_n = \frac{1}{n^2}$ για $n \geq 2$.
Τώρα ορίζουμε την f στο $[1,+\infty)$ ώστε να είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$, ώστε να είναι ταυτοτικά ίση με 0 έξω από τα παραπάνω διαστήματα, ώστε να είναι $f(n) = 1$ για κάθε n και ώστε να είναι αφφινική στο διάστημα $[1, 1+a_1]$ και σε κάθε διάστημα $[n-a_n, n]$ και $[n, n+a_n]$.
Τότε έχουμε $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{+\infty} 1 = +\infty$.
Ισχύει $0 \leq f(u) \leq 1$ για κάθε u στο $[1, 1+a_1]$ και σε κάθε $[n-a_n, n+a_n]$ και άρα

$$0 \leq \int_1^{1+a_1} f(u)\,du \leq a_1, \qquad 0 \leq \int_{n-a_n}^{n+a_n} f(u)\,du \leq 2a_n \quad \text{για } n \geq 2.$$

Τώρα, για κάθε $t \geq 1$ βρίσκουμε κάποιον $k > t$ (για παράδειγμα, τον $k = [t]+1$) και τότε

$$\begin{aligned} \int_1^t f(u)\,du &\leq \int_1^{1+a_1} f(u)\,du + \int_{2-a_2}^{2+a_2} f(u)\,du + \cdots + \int_{k-a_k}^{k+a_k} f(u)\,du \\ &\leq a_1 + 2a_2 + \cdots + 2a_k \leq a_1 + \sum_{n=2}^{+\infty} 2a_n. \end{aligned} \tag{14.245}$$

Επειδή ισχύει $f(u) \geq 0$ για κάθε $u \geq 1$, η συνάρτηση $\int_1^t f(u)\,du$ είναι αύξουσα (ως συνάρτηση του t) και άρα το $\lim_{t\to+\infty} \int_1^t f(u)\,du$ υπάρχει και είναι αριθμός ή $+\infty$. Από τις (14.244), (14.245) συνεπάγεται

$$\lim_{t\to+\infty} \int_1^t f(u)\,du \leq a_1 + \sum_{n=2}^{+\infty} 2a_n < +\infty.$$

Άσκηση 8.2.28. *Έστω $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$ και οποιοδήποτε συγκεκριμένο p-αδικό ψηφίο k (δηλαδή $0 \leq k \leq p-1$). Αποδείξτε ότι το σύνολο των αριθμών στο $[0,1)$ των οποίων το n-οστό p-αδικό ψηφίο είναι ίσο με k είναι η ένωση p^{n-1} διαστημάτων τύπου $[a,b)$. Ποιά ακριβώς είναι αυτά τα διαστήματα και τί μήκος έχει καθένα από αυτά; Ποιό είναι το συνολικό μήκος αυτών των διαστημάτων;*

Υπόδειξη: Δείτε πρώτα τις περιπτώσεις $n = 1, 2, 3, 4$.

Άσκηση 8.2.30. *Έστω $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$. Αποδείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{N}$ υπάρχουν μοναδικοί $n_0 \in \mathbb{Z}$, $n_0 \geq 0$ και $x_0, x_1, \ldots, x_{n_0} \in \mathbb{Z}$ με $0 \leq x_0, x_1, \ldots, x_{n_0} \leq p-1$ και $x_{n_0} \geq 1$ ώστε $x = x_{n_0} p^{n_0} + \cdots + x_1 p + x_0$.*

Υπόδειξη: Υπάρχει μοναδικός $n_0 \in \mathbb{Z}$, $n_0 \geq 0$ ώστε $p^{n_0} \leq x < p^{n_0+1}$. Θεωρήστε τους $x_0 = x - p[\frac{x}{p}]$, $x_1 = [\frac{x}{p}] - p[\frac{x}{p^2}]$ και, γενικά, $x_n = [\frac{x}{p^n}] - p[\frac{x}{p^{n+1}}]$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Άσκηση 8.2.32. *Έστω ακολουθία (p_n) στο $\mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $p_n \geq 2$ για κάθε n.*
Θεωρούμε οποιαδήποτε ακολουθία (a_n) στο $\mathbb{Z}$ ώστε να ισχύει $0 \leq a_n \leq p_n - 1$ για κάθε n και ώστε να μην ισχύει τελικά $a_n = p_n - 1$. Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{p_1\cdots p_n}$ συγκλίνει και ότι το άθροισμά της ανήκει στο $[0,1)$.
Αποδείξτε ότι για κάθε $x \in [0,1)$ υπάρχει μοναδική ακολουθία (a_n) στο $\mathbb{Z}$ ώστε να ισχύει $0 \leq a_n \leq p_n - 1$ για κάθε n, ώστε να μην ισχύει τελικά $a_n = p_n - 1$ και ώστε $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{p_1\cdots p_n}$. Βρείτε αναδρομικό τύπο για την ακολουθία (a_n).

Υπόδειξη: Μιμηθείτε την απόδειξη που είδαμε στην θεωρία στην περίπτωση που όλοι οι p_n είναι ίσοι με τον ίδιο p.
Για το τελευταίο ερώτημα θεωρήστε $a_n = [p_1 \cdots p_n x] - p_n[p_1 \cdots p_{n-1} x]$ για κάθε n.

Άσκηση 8.3.1. *Εφαρμόστε το κριτήριο λόγου στις $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\cdot5\cdot8\cdots(3n-1)}{1\cdot5\cdot9\cdots(4n-3)}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n(n+1)!}{n^n}$.*

Λύση: Για την πρώτη σειρά έχουμε $x_n = \frac{n!}{n^n}$ και $x_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$. Τότε

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \frac{(n+1)!n^n}{n!(n+1)^{n+1}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \to \frac{1}{e} < 1.$$

Άρα η σειρά συγκλίνει (απολύτως).
Ομοίως, για την δεύτερη σειρά με $x_n = \frac{2\cdot5\cdot8\cdots(3n-1)}{1\cdot5\cdot9\cdots(4n-3)}$ και $x_{n+1} = \frac{2\cdot5\cdot8\cdots(3n-1)(3n+2)}{1\cdot5\cdot9\cdots(4n-3)(4n+1)}$ έχουμε

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \frac{3n+2}{4n+1} \to \frac{3}{4} < 1.$$

Άρα η σειρά συγκλίνει (απολύτως).
Ομοίως, για την τρίτη σειρά με $x_n = \frac{e^n(n+1)!}{n^n}$ και $x_{n+1} = \frac{e^{n+1}(n+2)!}{(n+1)^{n+1}}$ έχουμε

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = e\,\frac{(n+2)!n^n}{(n+1)!(n+1)^{n+1}} = e\,\frac{(n+2)n^n}{(n+1)(n+1)^n} = e\,\frac{n+2}{n+1}\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^n \to e\cdot 1\cdot\frac{1}{e} = 1.$$

Άρα το κριτήριο λόγου δεν δίνει συμπέρασμα για τη σύγκλιση της σειράς.

Άσκηση 8.3.2. *Εφαρμόστε το κριτήριο ρίζας στις σειρές* $\sum_{n=1}^{+\infty} n^3$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(\sqrt[n]{n}+1)^n}$.

Λύση: Για την πρώτη σειρά έχουμε

$$\sqrt[n]{|n^3|} = \big(\sqrt[n]{n}\big)^3 \to 1,$$

οπότε το κριτήριο ρίζας δεν δίνει συμπέρασμα. Βέβαια, μπορούμε να δούμε πολύ εύκολα ότι η σειρά αποκλίνει στο $+\infty$, διότι

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^3 \geq \sum_{n=1}^{+\infty} 1 = +\infty.$$

Για τη δεύτερη σειρά έχουμε

$$\sqrt[n]{\left|\frac{n}{(\sqrt[n]{n}+1)^n}\right|} = \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{n}+1} \to \frac{1}{2} < 1.$$

Άρα αυτή η σειρά συγκλίνει (απολύτως).

Άσκηση 8.3.3. *Εξετάστε τη σύγκλιση των σειρών* $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\cdots$ *και* $\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^7}+\frac{1}{2^6}+\cdots$*, εφαρμόζοντας τα κριτήρια λόγου και ρίζας.*

Λύση: Αν γράψουμε την πρώτη σειρά στη μορφή $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$, τότε ο λόγος $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ είναι ίσος με $\frac{1/3^{(n+1)/2}}{1/2^{(n+1)/2}} = \big(\frac{2}{3}\big)^{(n+1)/2}$ όταν ο n είναι περιττός και είναι ίσος με $\frac{1/2^{(n/2)+1}}{1/3^{n/2}} = \frac{1}{2}\big(\frac{3}{2}\big)^{n/2}$ όταν ο n είναι άρτιος. Συνεπάγεται ότι η υποακολουθία των περιττών όρων της $\big(|\frac{x_{n+1}}{x_n}|\big)$ έχει όριο 0 ενώ η υποακολουθία των άρτιων όρων έχει όριο $+\infty$. Άρα

$$\underline{\lim}\,\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = 0 \leq 1 \leq +\infty = \overline{\lim}\,\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|$$

και, επομένως, με το κριτήριο λόγου δε μπορούμε να συμπεράνουμε για τη σύγκλιση της σειράς.
Παρατηρούμε ότι ο $\sqrt[n]{|x_n|}$ είναι ίσος με $\frac{1}{\sqrt{2}^{1+(1/n)}}$ όταν ο n είναι περιττός και ίσος με $\frac{1}{\sqrt{3}}$ όταν ο n είναι άρτιος. Συνεπάγεται ότι η υποακολουθία των περιττών όρων της $\big(\sqrt[n]{|x_n|}\big)$ έχει όριο $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ενώ η υποακολουθία των άρτιων όρων έχει όριο $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Άρα

$$\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|x_n|} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$$

και, επομένως, το κριτήριο ρίζας λέει ότι η σειρά συγκλίνει.
Αν γράψουμε τη δεύτερη σειρά στη μορφή $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$, τότε ο λόγος $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ είναι ίσος με $\frac{1/2^{n-1}}{1/2^n} = 2$ όταν ο n είναι περιττός και είναι ίσος με $\frac{1/2^{n+1}}{1/2^{n-2}} = \frac{1}{8}$ όταν ο n είναι άρτιος. Συνεπάγεται ότι η

υποακολουθία των περιττών όρων της $\left(|\frac{x_{n+1}}{x_n}|\right)$ έχει όριο 2 ενώ η υποακολουθία των άρτιων όρων έχει όριο $\frac{1}{8}$. Άρα

$$\underline{\lim}\,|\tfrac{x_{n+1}}{x_n}| = \tfrac{1}{8} \leq 1 \leq 2 = \overline{\lim}\,|\tfrac{x_{n+1}}{x_n}|,$$

οπότε με το κριτήριο λόγου δε μπορούμε να συμπεράνουμε για τη σύγκλιση της σειράς.
Ο $\sqrt[n]{|x_n|}$ είναι ίσος με $\frac{1}{2}$ όταν ο n είναι περιττός και ίσος με $\frac{1}{2^{1-(2/n)}}$ όταν ο n είναι άρτιος. Συνεπάγεται ότι η υποακολουθία των περιττών όρων της $\left(\sqrt[n]{|x_n|}\right)$ και η υποακολουθία των άρτιων όρων έχουν το ίδιο όριο $\frac{1}{2}$. Άρα

$$\overline{\lim}\,\sqrt[n]{|x_n|} = \tfrac{1}{2} < 1$$

και, επομένως, σύμφωνα με το κριτήριο ρίζας η σειρά συγκλίνει.

Άσκηση 8.3.4. *Εξετάστε ως προς την σύγκλιση και την απόλυτη σύγκλιση τις σειρές* $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n\log n}$, $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(\log n)^2}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\frac{\log n}{n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}n^2}{3^n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\sin\frac{1}{n}$.

Λύση: Η πρώτη σειρά δεν συγκλίνει απολύτως, διότι γνωρίζουμε από τις ασκήσεις 8.2.5 και 8.2.6 ότι

$$\textstyle\sum_{n=2}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^{n-1}}{n\log n}\right| = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\log n} = +\infty.$$

Όμως, η σειρά συγκλίνει βάσει του κριτηρίου εναλλασσόμενων προσήμων, διότι η ακολουθία $\left(\frac{1}{n\log n}\right)$ είναι φθίνουσα και τείνει στο 0.

Σχόλιο: Αν δεν μας ζητούσαν να εξετάσουμε τη σειρά ως προς την απόλυτη σύγκλιση, τότε θα εφαρμόζαμε χωρίς χρονοτριβή το κριτήριο εναλλασσόμενων προσήμων και θα βλέπαμε αμέσως ότι η σειρά συγκλίνει. Από την άλλη μεριά, αν φαίνεται αμέσως ότι μια σειρά συγκλίνει απολύτως, τότε δεν χάνουμε τίποτα να πούμε ότι η σειρά συγκλίνει απολύτως και, επομένως, ότι συγκλίνει. Βέβαια, για την συγκεκριμένη σειρά καθώς και για την επόμενη δεν είναι εύκολο να αποφασίσουμε αμέσως για την απόλυτη σύγκλισή τους. Αυτό είχε γίνει στις ασκήσεις 8.2.5 και 8.2.6 μέσω του ολοκληρωτικού κριτηρίου.

Η δεύτερη σειρά συγκλίνει απολύτως, διότι (πάλι από την άσκηση 8.2.6)

$$\textstyle\sum_{n=2}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^{n-1}}{n(\log n)^2}\right| = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\log n)^2} < +\infty.$$

Άρα η σειρά συγκλίνει. Αυτό το τελευταίο φαίνεται και ανεξάρτητα από το κριτήριο απόλυτης σύγκλισης. Σύμφωνα με το κριτήριο εναλλασσόμενων προσήμων η σειρά συγκλίνει, διότι η ακολουθία $\left(\frac{1}{n(\log n)^2}\right)$ είναι φθίνουσα και τείνει στο 0.

Η τρίτη σειρά δεν συγκλίνει απολύτως διότι

$$\textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left|(-1)^{n-1}\frac{\log n}{n}\right| = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\log n}{n} \geq \log 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Τώρα θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{\log x}{x}$ για $1 \leq x < +\infty$ και εξετάζουμε αν αυτή είναι φθίνουσα και αν έχει όριο 0 στο $+\infty$. Έχουμε

$$f'(x) = \frac{1-\log x}{x^2} \begin{cases} \geq 0, & \text{αν } 1 \leq x \leq e \\ \leq 0, & \text{αν } e \leq x \end{cases}$$

Άρα η f είναι φθίνουσα στο διάστημα $[e, +\infty)$. Επίσης, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log' x}{x'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Άρα η ακολουθία $\left(\frac{\log n}{n}\right)$ είναι φθίνουσα από τον τρίτο όρο της και πέρα και τείνει στο 0, οπότε η σειρά συγκλίνει υπό συνθήκη.

Η τέταρτη σειρά συγκλίνει απολύτως. Εφαρμόζουμε είτε το κριτήριο λόγου είτε το κριτήριο ρίζας. Με το κριτήριο λόγου έχουμε

$$\left|\frac{(-1)^n(n+1)^2/3^{n+1}}{(-1)^{n-1}n^2/3^n}\right| = \frac{(n+1)^2}{3n^2} \to \frac{1}{3}.$$

Άρα $\overline{\lim}\left|\frac{(-1)^n(n+1)^2/3^{n+1}}{(-1)^{n-1}n^2/3^n}\right| = \frac{1}{3} < 1$, οπότε η σειρά συγκλίνει απολύτως. Με το κριτήριο ρίζας έχουμε

$$\sqrt[n]{|(-1)^{n-1}n^2/3^n|} = (\sqrt[n]{n})^2/3 \to \tfrac{1}{3}.$$

Άρα $\overline{\lim}\ \sqrt[n]{|(-1)^{n-1}n^2/3^n|} = \frac{1}{3} < 1$, οπότε η σειρά συγκλίνει απολύτως.

Μπορούμε να εφαρμόσουμε και το κριτήριο εναλλασσόμενων προσήμων, διότι η ακολουθία $(\frac{n^2}{3^n})$ είναι φθίνουσα από τον δεύτερο όρο της και πέρα και τείνει στο 0.
Η πέμπτη σειρά δεν συγκλίνει απολύτως, διότι

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left|(-1)^{n-1}\sin\tfrac{1}{n}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty}\sin\tfrac{1}{n} = +\infty.$$

Πράγματι, από το όριο $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ συνεπάγεται $\frac{\sin(1/n)}{1/n} \to 1$ και, επειδή $0 < 1 < +\infty$ και $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n} = +\infty$, συνεπάγεται $\sum_{n=1}^{+\infty}\sin\frac{1}{n} = +\infty$.
Η σειρά όμως συγκλίνει, διότι η ακολουθία $(\sin\frac{1}{n})$ είναι φθίνουσα και τείνει στο 0. Το ότι είναι φθίνουσα ισχύει διότι η συνάρτηση $\sin x$ είναι αύξουσα στο διάστημα $[0,\frac{\pi}{2}]$ στο οποίο ανήκουν όλοι οι αριθμοί $\frac{1}{n}$. Πράγματι,

$$0 < \tfrac{1}{n+1} < \tfrac{1}{n} < \tfrac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \sin\tfrac{1}{n+1} < \sin\tfrac{1}{n}.$$

Άσκηση 8.3.5. *Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση και την απόλυτη σύγκλιση τη σειρά* $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3n+(-1)^n n}$.

Λύση: Παρατηρούμε ότι ο συντελεστής $3+(-1)^n$ του n στον παρονομαστή του n-οστού όρου είναι ίσος με 2 όταν ο n είναι περιττός και ίσος με 4 αν ο n είναι άρτιος. Δηλαδή η σειρά γράφεται

$$\tfrac{1}{2\cdot 1} - \tfrac{1}{4\cdot 2} + \tfrac{1}{2\cdot 3} - \tfrac{1}{4\cdot 4} + \tfrac{1}{2\cdot 5} - \tfrac{1}{4\cdot 6} + \tfrac{1}{2\cdot 7} - \tfrac{1}{4\cdot 8} + \cdots .$$

Παρατηρούμε ότι η σειρά δεν συγκλίνει απολύτως. Ο πιο απλός τρόπος να το δούμε είναι να συγκρίνουμε τη σειρά με τα απόλυτα με την αρμονική σειρά, μικραίνοντας τους προσθετέους: κάθε παρονομαστής είναι ίσος με $2n$ ή $4n$ και είναι μικρότερος (με την ευρεία έννοια) από $4n$. Άρα

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\tfrac{(-1)^{n-1}}{(3+(-1)^n)n}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{1}{(3+(-1)^n)n} \ge \sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{1}{4n} = \tfrac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{1}{n} = +\infty.$$

Τώρα, για να εφαρμόσουμε το κριτήριο εναλλασσόμενων προσήμων στην σειρά πρέπει να δούμε αν η ακολουθία με n-οστό όρο

$$b_n = \tfrac{1}{(3+(-1)^n)n}$$

είναι φθίνουσα και τείνει στο 0.
Το ότι η ακολουθία τείνει στο 0 είναι εύκολο να το δούμε: πάλι, επειδή κάθε παρονομαστής είναι ίσος με $2n$ ή $4n$, έχουμε

$$0 \le b_n \le \tfrac{1}{2n}$$

και, επομένως, $b_n \to 0$.
Όμως, η ακολουθία *δεν* είναι (τελικά) φθίνουσα. Αυτό το υποψιαζόμαστε από τους αρχικούς όρους και το βλέπουμε παρατηρώντας τρεις διαδοχικούς όρους:

$$b_{2k} < b_{2k+1} > b_{2k+2}$$

το οποίο είναι ισοδύναμο με

$$\tfrac{1}{8k} < \tfrac{1}{4k+2} > \tfrac{1}{8k+8}.$$

Άρα δεν εφαρμόζεται το κριτήριο εναλλασσόμενων προσήμων.
Θα δούμε τώρα ότι η σειρά αποκλίνει στο $+\infty$.
Αν (s_n) είναι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς, τότε

$$\begin{aligned} s_{2k} &= (b_1 - b_2) + \cdots + (b_{2k-1} - b_{2k}) = \big(\tfrac{1}{2\cdot 1} - \tfrac{1}{4\cdot 2}\big) + \cdots + \big(\tfrac{1}{4k-2} - \tfrac{1}{8k}\big) \\ &\ge \tfrac{1}{8} + \cdots + \tfrac{1}{8k} = \tfrac{1}{8}\big(1 + \cdots + \tfrac{1}{k}\big). \end{aligned}$$

Επειδή, $1+\cdots+\frac{1}{k}\to+\infty$, συνεπάγεται $s_{2k}\to+\infty$.
Τέλος, επειδή $s_{2k+1}=s_{2k}+b_{2k+1}$ και $b_n\to 0$, συνεπάγεται $s_{2k+1}\to+\infty$. Άρα $s_n\to+\infty$.

Άσκηση 8.3.6. *Αποδείξτε ότι η* $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}(\sqrt[n]{n}-1)$ *συγκλίνει υπό συνθήκη.*

Λύση: Έχουμε $\sqrt[n]{n}-1\to 0$, οπότε θα δούμε αν η ακολουθία $(\sqrt[n]{n}-1)$ είναι φθίνουσα, δηλαδή αν $\sqrt[n+1]{n+1}\le\sqrt[n]{n}$. Αυτό είναι ισοδύναμο με το $(n+1)^n\le n^{n+1}$ κι αυτό με το $(1+\frac{1}{n})^n\le n$. Αυτό ισχύει για κάθε $n\ge 3$, διότι ισχύει $(1+\frac{1}{n})^n<e\le 3$. Άρα η ακολουθία $(\sqrt[n]{n}-1)$ είναι τελικά φθίνουσα, οπότε η σειρά συγκλίνει.
Ένας άλλος τρόπος να δούμε ότι η ακολουθία $(\sqrt[n]{n}-1)$ είναι τελικά φθίνουσα είναι να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση $x^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{\log x}{x}}$ είναι φθίνουσα σε κάποιο διάστημα $[a,+\infty)$ ή, ισοδύναμα, ότι η συνάρτηση $\frac{\log x}{x}$ είναι φθίνουσα σε κάποιο διάστημα $[a,+\infty)$. Πράγματι, με παραγώγιση βλέπουμε εύκολα ότι η $\frac{\log x}{x}$ είναι φθίνουσα στο διάστημα $[e,+\infty)$.
Τώρα θα δούμε ότι η σειρά δεν συγκλίνει απολύτως.
Από την $(1+\frac{1}{n})^n\le n$ που αποδείξαμε ότι ισχύει για κάθε $n\ge 3$ συνεπάγεται $\sqrt[n]{n}-1\ge\frac{1}{n}$. Άρα

$$\sum_{n=3}^{+\infty}\left|(-1)^{n-1}(\sqrt[n]{n}-1)\right|=\sum_{n=3}^{+\infty}(\sqrt[n]{n}-1)\ge\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n}=+\infty.$$

Άσκηση 8.3.7. *Αποδείξτε ότι η* $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1+x^n}$ *συγκλίνει αν και μόνο αν* $|x|>1$.

Λύση: Για να συγκλίνει η $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1+x^n}$, είναι αναγκαίο να ισχύει $\frac{1}{1+x^n}\to 0$.
Αν $x=-1$, η σειρά δεν ορίζεται. Αν $x=1$, τότε $\frac{1}{1+x^n}=\frac{1}{2}\to\frac{1}{2}$. Και, αν $|x|<1$, τότε $\frac{1}{1+x^n}\to 1$. Άρα, αν $|x|\le 1$, η σειρά αποκλίνει.
Έστω, τώρα, ότι $|x|>1$. Θα συγκρίνουμε τη σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1+x^n}$ με την $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{x^n}=\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{1}{x})^n$ η οποία συγκλίνει επειδή $|\frac{1}{x}|<1$. Υπολογίζουμε

$$\frac{1/(1+x^n)}{1/x^n}=\frac{x^n}{1+x^n}=\frac{1}{1+(1/x)^n}\to 1.$$

Επομένως, η $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1+x^n}$ συγκλίνει.

Άσκηση 8.3.8. [β] *Αν* $0\le r<1$, *αποδείξτε ότι*

$$1+2\sum_{n=1}^{+\infty}r^n\cos(nx)=\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2},\qquad 2\sum_{n=1}^{+\infty}r^n\sin(nx)=\frac{2r\sin x}{1-2r\cos x+r^2}.$$

[γ] *Αν η* (x_n) *είναι φθίνουσα και* $x_n\to 0$, *αποδείξτε ότι η* $\sum_{n=1}^{+\infty}x_n\cos(nx)$ *συγκλίνει αν* $x\ne m2\pi$ *για κάθε* $m\in\mathbb{Z}$ *και ότι η* $\sum_{n=1}^{+\infty}x_n\sin(nx)$ *συγκλίνει για κάθε* x.

Υπόδειξη: [β] Πολλαπλασιάστε με $1-2r\cos x+r^2$ και χρησιμοποιήστε τους τύπους $\cos a\cos b=\frac{1}{2}\cos(a+b)+\frac{1}{2}\cos(a-b)$ και $\sin a\cos b=\frac{1}{2}\sin(a+b)+\frac{1}{2}\sin(a-b)$.
Ένας εναλλακτικός και πολύ πιο φυσιολογικός τρόπος (διότι δεν απαιτείται να γνωρίζουμε εκ των προτέρων τα αθροίσματα των δύο σειρών) είναι ο εξής. Χρησιμοποιήστε μιγαδικούς και γράψτε $\cos x+i\sin x=e^{ix}$. Τότε ισχύει $\cos(nx)+i\sin(nx)=e^{inx}$ για κάθε n. Παρατηρήστε ότι οι δύο σειρές είναι το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της γεωμετρικής σειράς $\sum_{n=0}^{+\infty}r^ne^{inx}=\sum_{n=0}^{+\infty}(re^{ix})^n$. Αφού υπολογίσετε το άθροισμα αυτής της σειράς, βρείτε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του. Για να δικαιολογηθούν όλα αυτά τα βήματα, πρέπει να αποδείξετε ότι μερικές απλές ιδιότητες σειρών ισχύουν και για σειρές με μιγαδικούς όρους. Αξίζει τον κόπο να το κάνετε. Μπορείτε, επίσης, να συμβουλευτείτε κάποιο βιβλίο μιγαδικής ανάλυσης.
[γ] Δείτε τους τύπους (6.40) και αποδείξτε ότι $|\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)|\le\frac{1}{\sin(x/2)}$ και $|\sum_{k=1}^{n}\sin(kx)|\le\frac{1}{\sin(x/2)}$ για κάθε n αν $x\ne m2\pi$ για κάθε $m\in\mathbb{Z}$. Κατόπιν, χρησιμοποιήστε το κριτήριο του Dirichlet.

Άσκηση 8.3.9. *Αποδείξτε ότι* $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\ge\int_1^{n+1}\frac{1}{2x}\,dx=\log\sqrt{n+1}$ *για κάθε* n. *Κατόπιν, βάσει της* $1+x\le e^x$, *αποδείξτε ότι* $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}\le\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ *για κάθε* n.

Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}$ *συγκλίνει.*

Αποδείξτε ότι $1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\leq 1+\int_1^n\frac{1}{2x-1}\,dx=1+\log\sqrt{2n-1}$ *για κάθε* n. *Κατόπιν, βάσει της* $1+x\leq e^x$, *αποδείξτε ότι* $\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\geq\frac{1}{e\sqrt{2n-1}}$ *για κάθε* n.

Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}$ *δεν συγκλίνει απολύτως.*

Τί έχετε να πείτε για τις $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\big(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\big)^2$, $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\big(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\big)^3$ *ως προς τη σύγκλιση και την απόλυτη σύγκλιση;*

Λύση: Το πρώτο ερώτημα. Η συνάρτηση $\frac{1}{x}$ είναι φθίνουσα σε κάθε διάστημα $[k,k+1]$ με $k\in\mathbb{N}$ και άρα ισχύει

$$\frac{1}{k}\geq\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,dx\qquad\text{για κάθε } k\in\mathbb{N}.$$

Άρα

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}\big(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\big)\geq\frac{1}{2}\int_1^{n+1}\frac{1}{x}\,dx=\log\sqrt{n+1}.$$

Από αυτήν την ανισότητα και από την $1+x\leq e^x$ έχουμε

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}=\big(1-\frac{1}{2}\big)\big(1-\frac{1}{4}\big)\cdots\big(1-\frac{1}{2n}\big)\leq e^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\cdots-\frac{1}{2n}}\leq e^{-\log\sqrt{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Το δεύτερο ερώτημα. Αν θέσουμε $x_n=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}$, τότε από το αποτέλεσμα του πρώτου ερωτήματος έχουμε ότι $0<x_n\leq\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ και άρα $x_n\to 0$. Επίσης, είναι πολύ εύκολο να δούμε ότι ισχύει $x_{n+1}\leq x_n$ για κάθε n. Πράγματι,

$$x_{n+1}=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)(2n+2)}=x_n\,\frac{2n+1}{2n+2}\leq x_n.$$

Άρα η $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}x_n$ συγκλίνει.
Το τρίτο ερώτημα. Η συνάρτηση $\frac{1}{2x-1}$ είναι φθίνουσα σε κάθε διάστημα $[k-1,k]$ με $k\in\mathbb{N}$, $k\geq 2$ και άρα ισχύει

$$\frac{1}{2k-1}\leq\int_{k-1}^{k}\frac{1}{2x-1}\,dx\qquad\text{για κάθε } k\in\mathbb{N}, k\geq 2.$$

Άρα

$$1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\leq 1+\int_1^n\frac{1}{2x-1}\,dx=1+\log\sqrt{2n-1}.$$

Από αυτήν την ανισότητα και από την $1+x\leq e^x$ έχουμε

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{2n}{2n-1}=(1+1)\big(1+\frac{1}{3}\big)\cdots\big(1+\frac{1}{2n-1}\big)\leq e^{1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}}\leq e^{1+\log\sqrt{2n-1}}=e\sqrt{2n-1}.$$

Άρα $x_n=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\geq\frac{1}{e\sqrt{2n-1}}$.
Το τέταρτο ερώτημα. Έχουμε

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\Big|(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\Big|=\sum_{n=1}^{+\infty}x_n\geq\frac{1}{e\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=+\infty.$$

Το πέμπτο ερώτημα. Οι δύο σειρές γράφονται $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}{x_n}^2$ και $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}{x_n}^3$. Βάσει όσων αποδείξαμε, εύκολα προκύπτει ότι η πρώτη σειρά συγκλίνει υπο συνθήκη και ότι η δεύτερη συγκλίνει απολύτως.

Άσκηση 8.3.11. *Έστω* (b_n) *φθίνουσα με* $b_n\to 0$. *Έστω* $s=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}b_n$ *και τα μερικά αθροίσματα* $s_n=b_1-b_2+\cdots+(-1)^{n-1}b_n$. *Αποδείξτε ότι ισχύει* $0\leq(-1)^n(s-s_n)\leq b_{n+1}$ *για κάθε* n.

Λύση: Έχουμε

$$\begin{aligned}(-1)^n(s-s_n)&=(-1)^n\big(\textstyle\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}b_k-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}b_k\big)\\&=(-1)^n\textstyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^{k-1}b_k\\&=b_{n+1}-b_{n+2}+b_{n+3}-b_{n+4}+b_{n+5}-\cdots.\end{aligned}$$

Τώρα,

$$(-1)^n(s-s_n)=\lim_{m\to+\infty}\big((b_{n+1}-b_{n+2})+\cdots+(b_{n+2m-1}-b_{n+2m})\big)\geq 0.$$

Αυτό ισχύει διότι $(b_{n+1}-b_{n+2})+\cdots+(b_{n+2m-1}-b_{n+2m})\geq 0$ για κάθε m, αφού κάθε παρένθεση είναι ≥ 0.
Επίσης,

$$(-1)^n(s-s_n)=\lim_{m\to+\infty}\big(b_{n+1}-(b_{n+2}-b_{n+3})-\cdots-(b_{n+2m}-b_{n+2m+1})\big)\leq b_{n+1}.$$

Αυτό ισχύει διότι $b_{n+1}-(b_{n+2}-b_{n+3})-\cdots-(b_{n+2m}-b_{n+2m+1})\leq b_{n+1}$ αφού κάθε παρένθεση είναι ≥ 0.

Άσκηση 8.3.12. [α] *Έστω ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n^p}$ συγκλίνει. Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n^{p'}}$ συγκλίνει, αν $p'>p$, και συγκλίνει απολύτως, αν $p'>p+1$.*
[β] *Έστω ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n^{p_0}}$ συγκλίνει υπό συνθήκη. Αποδείξτε ότι υπάρχουν p_1,p_2 ώστε $p_1\leq p_0\leq p_2$ και $p_2-p_1\leq 1$ και ώστε η $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n^p}$ να αποκλίνει, αν $p<p_1$, να συγκλίνει υπό συνθήκη, αν $p_1<p<p_2$, και να συγκλίνει απολύτως, αν $p>p_2$.*

Λύση: [α] Αν $p'>p$, τότε η ακολουθία $\big(\frac{1}{n^{p'-p}}\big)$ είναι φθίνουσα και συγκλίνει στον 0. Παρατηρούμε ότι

$$\textstyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n^{p'}}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n^p}\,\frac{1}{n^{p'-p}},$$

οπότε από το κριτήριο του Dirichlet (ή και από το κριτήριο του Abel) συνεπάγεται ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n^{p'}}$ συγκλίνει.
Επειδή η $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n^p}$ συγκλίνει, η ακολουθία $\big(\frac{a_n}{n^p}\big)$ τείνει στον 0 και άρα είναι φραγμένη. Δηλαδή, υπάρχει M ώστε να ισχύει $\big|\frac{a_n}{n^p}\big|\leq M$ για κάθε n. Άρα, αν $p'>p+1$, τότε έχουμε

$$\textstyle\sum_{n=1}^{+\infty}\big|\frac{a_n}{n^{p'}}\big|=\sum_{n=1}^{+\infty}\big|\frac{a_n}{n^p}\big|\,\frac{1}{n^{p'-p}}\leq M\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{p'-p}}<+\infty.$$

[β] Θεωρούμε τα σύνολα

$$A=\big\{p\,\big|\,\text{η }\textstyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n^p}\text{ συγκλίνει}\big\},$$

$$B=\big\{p\,\big|\,\text{η }\textstyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n^p}\text{ συγκλίνει απολύτως}\big\}.$$

Ένα από τα συμπεράσματα του [α] είναι ότι, αν κάποιος p ανήκει στο A, τότε και κάθε $p'>p$ ανήκει στο A.
Είναι πολύ εύκολο να αποδειχθεί ότι, αν κάποιος p ανήκει στο B, τότε και κάθε $p'>p$ ανήκει στο B. Πράγματι, αν $\sum_{n=1}^{+\infty}\big|\frac{a_n}{n^p}\big|<+\infty$ και $p'>p$, τότε

$$\textstyle\sum_{n=1}^{+\infty}\big|\frac{a_n}{n^{p'}}\big|\leq\sum_{n=1}^{+\infty}\big|\frac{a_n}{n^p}\big|<+\infty.$$

Είναι, επίσης, προφανές ότι $B\subseteq A$, διότι, αν η $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n^p}$ συγκλίνει απολύτως, τότε συγκλίνει.
Το A είναι μη-κενό, αφού $p_0\in A$. Επίσης, αν $p<p_0-1$, τότε ο p δεν ανήκει στο A. Διότι, αν η $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n^p}$ συγκλίνει, τότε από το ότι $p_0>p+1$ και από ένα από τα αποτελέσματα του [α] συνεπάγεται ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n^{p_0}}$ συγκλίνει απολύτως που είναι άτοπο.
Τώρα, έστω $p_1=\inf A$.
Αν $p>p_1$, τότε υπάρχει $p'\in A$ ώστε $p'<p$ και άρα $p\in A$. Άρα $(p_1,+\infty)\subseteq A$. Επειδή, προφανώς, $A\subseteq[p_1,+\infty)$, συνεπάγεται ότι

$$A=(p_1,+\infty)\qquad\text{ή}\qquad A=[p_1,+\infty).$$

Είναι σαφές ότι ο p_1 είναι αριθμός και όχι $-\infty$, αφού, όπως είδαμε, κάθε $p<p_0-1$ δεν ανήκει στο A.
Το B δεν είναι κενό, αφού από ένα από τα αποτελέσματα του [α] συνεπάγεται ότι κάθε $p>p_0+1$

ανήκει στο B.
Έστω $p_2 = \inf B$.
Όπως και στην περίπτωση του A, βλέπουμε ότι

$$B = (p_2, +\infty) \qquad \text{ή} \qquad B = [p_2, +\infty).$$

Επειδή $B \subseteq A$, έχουμε ότι $p_1 \leq p_2$. Επίσης, επειδή $p_0 \in A$ και $p_0 \notin B$, έχουμε ότι $p_1 \leq p_0 \leq p_2$.
Αν $p_2 - 1 > p_1$, τότε υπάρχει $p \in A$ ώστε $p < p_2 - 1$, οπότε $p + 1 < p_2$. Παίρνουμε έναν οποιονδήποτε p' με $p + 1 < p' < p_2$. Επειδή $p \in A$, έχουμε $p' \in B$ και καταλήγουμε σε άτοπο, αφού $p' < p_2$. Συμπεραίνουμε ότι $p_2 - 1 \leq p_1$ ή, ισοδύναμα, $p_2 - p_1 \leq 1$.
Τέλος, αν $p < p_1$, τότε $p \notin A$, οπότε η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^p}$ αποκλίνει. Αν $p_1 < p < p_2$, τότε $p \in A$ και $p \notin B$ και άρα η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^p}$ συγκλίνει υπό συνθήκη. Αν $p > p_2$, τότε $p \in B$, οπότε η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^p}$ συγκλίνει απολύτως.

Άσκηση 8.3.13. *Έστω $u_n \to u > 0$ και $|x| < 1$. Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} x^{u_1+\cdots+u_n}$ συγκλίνει απολύτως.*

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το κριτήριο λόγου. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε και το κριτήριο ρίζας, αλλά τότε θα πρέπει να χρησιμοποιήσετε και το θεώρημα του Cesaro στην άσκηση 2.3.41.

Άσκηση 8.3.14. *Έστω ότι η ακολουθία (b_n) είναι μονότονη και $b_n \to l$. Αν $s_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} b_k$ για κάθε n, αποδείξτε ότι $\overline{\lim}\, s_n - \underline{\lim}\, s_n = |l|$.*

Λύση: Έστω ότι η (b_n) είναι φθίνουσα. Η άλλη περίπτωση είναι παρόμοια.
Τότε

$$s_{2k+2} = (b_1 - b_2) + \cdots + (b_{2k-1} - b_{2k}) + (b_{2k+1} - b_{2k+2}) = s_{2k} + (b_{2k+1} - b_{2k+2}) \geq s_{2k},$$

οπότε η (s_{2k}) είναι αύξουσα.
Επίσης,

$$s_{2k+1} = (b_1 - b_2) + \cdots + (b_{2k-1} - b_{2k}) + b_{2k+1} = s_{2k-1} - (b_{2k} - b_{2k+1}) \leq s_{2k-1},$$

οπότε η (s_{2k-1}) είναι φθίνουσα.
Άρα υπάρχουν τα όρια $p = \lim_{k \to +\infty} s_{2k} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ και $q = \lim_{k \to +\infty} s_{2k-1} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.
Επειδή $s_{2k-1} - s_{2k} = b_{2k} \to l$, συνεπάγεται $q - p = l$.
Αν $l = 0$, τότε $p = q \in \mathbb{R}$ και άρα $s_n \to p = q$. Επομένως, $\overline{\lim}\, s_n - \underline{\lim}\, s_n = 0 = |l|$.
Αν $l > 0$, τότε $q > p$ και άρα $\overline{\lim}\, s_n = q$ και $\underline{\lim}\, s_n = p$, οπότε $\overline{\lim}\, s_n - \underline{\lim}\, s_n = q - p = l = |l|$.
Αν $l < 0$, τότε $q < p$ και άρα $\overline{\lim}\, s_n = p$ και $\underline{\lim}\, s_n = q$, οπότε $\overline{\lim}\, s_n - \underline{\lim}\, s_n = p - q = -l = |l|$.

Άσκηση 8.3.17. *Βρείτε ακολουθία (b_n) ώστε να ισχύει $b_n > 0$ για κάθε n, ώστε $b_n \to 0$ και ώστε η $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} b_n$ να αποκλίνει.*

Υπόδειξη: Θεωρήστε μια (b_n) που να μην είναι φθίνουσα. Για παράδειγμα θεωρήστε $b_n = \frac{1}{n}$, αν ο n είναι περιττός, και $b_n = \frac{1}{2n}$, αν ο n είναι άρτιος. Κατόπιν, αν s_n είναι το n-οστό μερικό άθροισμα της $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} b_n$, αποδείξτε ότι $s_{2n} \to +\infty$ και, τέλος, ότι $s_{2n-1} = s_{2n} - b_{2n} \to +\infty$.

Άσκηση 8.3.19. *Βρείτε $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ η οποία συγκλίνει ώστε η $\sum_{n=1}^{+\infty} {x_n}^2$ να αποκλίνει.*

Υπόδειξη: Θεωρήστε κατάλληλη $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ με εναλλασσόμενα πρόσημα.

Άσκηση 8.3.20. *Έστω ότι η ακολουθία (a_n) είναι περιοδική. Δηλαδή, υπάρχει p ώστε να ισχύει $a_{n+p} = a_n$ για κάθε n. Έστω, επίσης, ότι η ακολουθία (b_n) είναι φθίνουσα και $b_n \to 0$.*
Αν $a_1 + \cdots + a_p = 0$, αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ συγκλίνει.
Αν $a_1 + \cdots + a_p \neq 0$, αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ συγκλίνει.

Λύση: Το πρώτο ερώτημα. Έστω s_n το n-οστό μερικό άθροισμα της $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.
Τότε για κάθε n ισχύει $kp \leq n < (k+1)p$ για κάποιον $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$ και άρα

$$\begin{aligned} s_{n+p} - s_n &= a_{n+1} + \cdots + a_{n+p} = (a_{n+1} + \cdots + a_{(k+1)p}) + (a_{(k+1)p+1} + \cdots + a_{n+p}) \\ &= (a_{n+1-kp} + \cdots + a_p) + (a_1 + \cdots + a_{n-kp}) = a_1 + \cdots + a_p = 0. \end{aligned}$$

Άρα η ακολουθία (s_n) είναι περιοδική και, επομένως, είναι φραγμένη. Άρα, βάσει του κριτηρίου του Dirichlet, η $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ συγκλίνει.
[β] Ορίζουμε $a = \frac{a_1+\cdots+a_p}{p} \neq 0$ και $a'_n = a_n - a$ για κάθε n.
Η ακολουθία (a'_n) είναι περιοδική και ισχύει

$$a'_1 + \cdots + a'_p = a_1 + \cdots + a_p - pa = 0.$$

Από το αποτέλεσμα του [α] συνεπάγεται ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} a'_n b_n$ συγκλίνει.
Τώρα, έχουμε $a_n b_n = a'_n b_n + a b_n$ για κάθε n και άρα η $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ συγκλίνει.

Άσκηση 8.3.21. *Έστω ακολουθία (x_n) και $y_n = n(x_n - x_{n+1})$ για κάθε n.*
Αν $nx_n \to a$ και $a \neq 0$, αποδείξτε ότι οι $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ αποκλίνουν.
Αν οι $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνουν, αποδείξτε ότι $nx_n \to 0$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = \sum_{n=1}^{+\infty} y_n$.

Υπόδειξη: Αν $nx_n \to a$ και $a \neq 0$, να συγκρίνετε την $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ με την $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$. Για όλα τα υπόλοιπα αποδείξτε ότι, αν s_n και t_n είναι τα n-οστά μερικά αθροίσματα των $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$, αντιστοίχως, τότε ισχύει $t_n = s_n - nx_{n+1}$ για κάθε n.

Άσκηση 8.3.22. *Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει απολύτως αν και μόνο αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $|x_{n_1} + \cdots + x_{n_k}| < \epsilon$ για κάθε k και για κάθε (διαφορετικούς) $n_1, \ldots, n_k$ με $n_1, \ldots, n_k \geq n_0$.*

Λύση: Έστω ότι $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| < +\infty$.
Παίρνουμε τυχόντα ϵ και τότε, σύμφωνα με το κριτήριο του Cauchy, υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει

$$|x_{m+1}| + \cdots + |x_n| < \epsilon \qquad \text{για κάθε } m, n \text{ με } n > m \geq n_0. \tag{14.246}$$

Τώρα, για κάθε (διαφορετικούς) $n_1, \ldots, n_k$ με $n_1, \ldots, n_k \geq n'_0 = n_0 + 1$ και αφού τους διατάξουμε ως $n_1 < \ldots < n_k$ έχουμε, από την (14.246) ότι

$$|x_{n_1} + \cdots + x_{n_k}| \leq |x_{n_1}| + \cdots + |x_{n_k}| < \epsilon.$$

Αντιστρόφως, έστω ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $|x_{n_1} + \cdots + x_{n_k}| < \epsilon$ για κάθε k και για κάθε (διαφορετικούς) $n_1, \ldots, n_k$ με $n_1, \ldots, n_k \geq n_0$.
Παίρνουμε τυχόντα ϵ και θεωρούμε τον n_0 που αντιστοιχεί, βάσει της υπόθεσης, στον $\frac{\epsilon}{2}$.
Έστω n, m με $n > m \geq n_0$ και οι $x_{m+1}, \ldots, x_n$. Από αυτούς έστω ότι οι $x_{n_1}, \ldots, x_{n_k}$ είναι ≥ 0 και ότι οι $x_{m_1}, \ldots, x_{m_l}$ είναι < 0. (Δηλαδή, οι $x_{n_1}, \ldots, x_{n_k}, x_{m_1}, \ldots, x_{m_l}$ όλοι μαζί είναι οι $x_{m+1}, \ldots, x_n$.) Τότε από την υπόθεσή μας συνεπάγεται

$$|x_{n_1} + \cdots + x_{n_k}| < \tfrac{\epsilon}{2} \qquad \text{και} \qquad |x_{m_1} + \cdots + x_{m_l}| < \tfrac{\epsilon}{2}$$

και τότε

$$\begin{aligned}
|x_{m+1}| + \cdots + |x_n| &= |x_{n_1}| + \cdots + |x_{n_k}| + |x_{m_1}| + \cdots + |x_{m_l}| \\
&= x_{n_1} + \cdots + x_{n_k} - x_{m_1} - \cdots - x_{m_l} \\
&= (x_{n_1} + \cdots + x_{n_k}) - (x_{m_1} + \cdots + x_{m_l}) \\
&= |x_{n_1} + \cdots + x_{n_k}| + |x_{m_1} + \cdots + x_{m_l}| \\
&< \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Δηλαδή, ισχύει η (14.246) και άρα $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| < +\infty$.

Άσκηση 8.3.24. *Έστω ότι ισχύει $w_n > 0$ για κάθε n και $\sum_{n=1}^{+\infty} w_n = 1$. Αν η $f : I \to \mathbb{R}$ είναι κυρτή στο διάστημα I και ισχύει $a_n \in I$ για κάθε n και η $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n w_n$ συγκλίνει, αποδείξτε την ανισότητα του Jensen για σειρές,*

$$f\big(\textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n w_n\big) \leq \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} f(a_n) w_n.$$

Αν η f είναι κοίλη στο I, αποδείξτε ότι ισχύει η αντίστροφη ανισότητα.
Αν, επιπλέον, η f είναι γνησίως κυρτή (κοίλη) στο I, αποδείξτε ότι η ανισότητα αυτή ισχύει ως ισότητα αν και μόνο αν οι αριθμοί $a_1, a_2, a_3, \ldots$ είναι ίσοι μεταξύ τους.

Υπόδειξη: Δείτε την άσκηση 5.5.39. Η ανισότητα που θέλουμε να αποδείξουμε προκύπτει από την ανάλογη ανισότητα της άσκησης 5.5.39, παίρνοντας όριο όταν $n \to +\infty$. Παρατηρήστε ότι με αυτόν τον τρόπο δεν μπορούμε να αποδείξουμε το συμπέρασμα σχετικά με την περίπτωση της ισότητας όταν η f είναι γνησίως κυρτή (κοίλη). Εναλλακτικά, μιμηθείτε τον δεύτερο τρόπο απόδειξης της ανάλογης ανισότητας της άσκησης 5.5.39.

Άσκηση 8.3.25. *Χρησιμοποιώντας την άσκηση 2.7.13, αποδείξτε ότι, όταν το κριτήριο λόγου δείχνει σύγκλιση ή απόκλιση σειράς, το ίδιο συμβαίνει και με το κριτήριο ρίζας.*

Λύση: Έστω ότι το κριτήριο λόγου δείχνει σύγκλιση της $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$. Αυτό σημαίνει ότι ισχύει τελικά $x_n \neq 0$ και ότι $\overline{\lim} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| < 1$. Παραλείποντας κάποιους αρχικούς όρους της σειράς, μπορούμε να υποθέσουμε ότι ισχύει $x_n \neq 0$ για κάθε n.
Εφαρμόζοντας το αποτέλεσμα της άσκησης 2.7.13[β] στην ακολουθία (y_n) που ορίζεται με τύπο $y_1 = |x_1|$ και $y_n = \frac{|x_n|}{|x_{n-1}|}$ για $n \geq 2$, παίρνουμε ότι $\overline{\lim}\ \sqrt[n]{y_1 \cdots y_n} \leq \overline{\lim}\, y_n$ και άρα

$$\overline{\lim}\ \sqrt[n]{|x_n|} \leq \overline{\lim} \left|\frac{x_n}{x_{n-1}}\right| < 1.$$

Επομένως, το κριτήριο ρίζας δείχνει κι αυτό σύγκλιση της σειράς.
Η περίπτωση της απόκλισης είναι παρόμοια.

Άσκηση 8.3.26. *Έστω $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{N}$. Από κάθε σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ δημιουργούμε μια νέα σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ ως εξής: θέτουμε $y_1 = x_1 + \cdots + x_{f(1)}$ και $y_n = x_{f(n-1)+1} + \cdots + x_{f(n)}$ για κάθε $n \geq 2$.*
Αποδείξτε ότι, αν η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ έχει άθροισμα, τότε η $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ έχει το ίδιο άθροισμα.
Ως αντιπαράδειγμα για το αντίστροφο, θεωρήστε την $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ με τύπο $f(k) = 2k$ και τη σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}$.
Έστω ότι υπάρχει M ώστε να ισχύει $f(k+1) - f(k) \leq M$ για κάθε k και έστω $x_n \to 0$. Αποδείξτε ότι, αν η $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ έχει άθροισμα, τότε η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ έχει το ίδιο άθροισμα.

Λύση: Το πρώτο ερώτημα. Έστω $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = s$.
Αν s_n είναι το n-οστό μερικό άθροισμα της $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ και t_n είναι το n-οστό μερικό άθροισμα της $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$, τότε έχουμε την σχέση:

$$\begin{aligned} t_n &= y_1 + \cdots + y_n = (x_1 + \cdots + x_{f(1)}) + \cdots + (x_{f(n-1)+1} + \cdots + x_{f(n)}) \\ &= x_1 + \cdots + x_{f(n)} = s_{f(n)} \qquad \text{για κάθε } n. \end{aligned} \tag{14.247}$$

Επειδή η $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ είναι γνησίως αύξουσα, η $(s_{f(n)})$ είναι υποακολουθία της (s_n). Άρα από το ότι $s_n \to s$ συνεπάγεται $t_n = s_{f(n)} \to s$ και, επομένως, $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n = s$.
Το δεύτερο ερώτημα. Είναι $y_1 = x_1 + x_2 = 1 + (-1) = 0$, $y_2 = x_3 + x_4 = 1 + (-1) = 0$ και, γενικότερα, $y_n = x_{2n-1} + x_{2n} = 1 + (-1) = 0$ για κάθε n.
Άρα $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n = 0$ ενώ η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ δεν έχει άθροισμα.
Το τρίτο ερώτημα. Έστω $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n = t$. Δηλαδή, έστω $t_n \to t$.
Από την (14.247) συνεπάγεται ότι $s_{f(n)} \to t$.
Έστω τυχών $\epsilon > 0$. Επειδή $x_n \to 0$ και $s_{f(n)} \to t$, συνεπάγεται ότι υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει

$$|x_n| < \tfrac{\epsilon}{M+1} \quad \text{και} \quad |s_{f(n)} - t| < \tfrac{\epsilon}{M+1} \qquad \text{για κάθε } n \geq n_0. \tag{14.248}$$

Τώρα, έστω $n \geq f(n_0)$. Τότε υπάρχει μοναδικός $k \geq n_0$ ώστε να είναι $f(k) \leq n < f(k+1)$. Επίσης, για κάθε $m = f(k)+1, \ldots, n$ ισχύει $m > f(k) \geq f(n_0) \geq n_0$. Τέλος, το πλήθος των $f(k)+1, \ldots, n$ είναι $< f(k+1) - f(k) \leq M$. Από όλα αυτά μαζί καθώς και από την (14.248) συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned}|s_n - t| &= |s_{f(k)} + x_{f(k)+1} + \cdots + x_n - t| \leq |s_{f(k)} - t| + |x_{f(k)+1}| + \cdots + |x_n| \\ &< \tfrac{\epsilon}{M+1} + \tfrac{\epsilon}{M+1} + \cdots + \tfrac{\epsilon}{M+1} = M\tfrac{\epsilon}{M+1} < \epsilon.\end{aligned}$$

Άρα για κάθε $n \geq f(n_0)$ ισχύει $|s_n - t| < \epsilon$ και, επομένως, $s_n \to t$, οπότε $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = t$.

Άσκηση 8.3.27. [α] *Αν η* (b_n) *είναι μονότονη και φραγμένη αποδείξτε ότι* $\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n - b_{n+1}| < +\infty$.
[β] *Έστω ακολουθίες* (a_n), (b_n) *και τα μερικά αθροίσματα* $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ *της πρώτης.*
Αν $\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n - b_{n+1}| < +\infty$, *αν* $b_n \to 0$ *και αν η* (s_n) *είναι φραγμένη, αποδείξτε ότι η* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ *συγκλίνει.*
[γ] *Αποδείξτε ότι η ακολουθία* (b_n) *είναι διαφορά δύο μονότονων φραγμένων ακολουθιών αν και μόνο αν* $\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n - b_{n+1}| < +\infty$.

Λύση: [α] Αν η (b_n) είναι φθίνουσα και φραγμένη, τότε συγκλίνει, οπότε από το αποτέλεσμα της άσκησης 8.1.5 έχουμε

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n - b_{n+1}| = \sum_{n=1}^{+\infty} (b_n - b_{n+1}) = b_1 - \lim_{n\to+\infty} b_n < +\infty.$$

[β] Θα προσπαθήσουμε να μιμηθούμε την απόδειξη του κριτηρίου του Dirichlet.
Υπάρχει M ώστε να ισχύει $|s_n| \leq M$ για κάθε n.
Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει

$$\sum_{k=n}^{+\infty} |b_k - b_{k+1}| < \tfrac{\epsilon}{3M+1} \qquad \text{για κάθε } n \geq n_0. \tag{14.249}$$

Συνεπάγεται ότι ισχύει $\big|\sum_{k=n}^{+\infty} (b_k - b_{n+1})\big| < \frac{\epsilon}{3M+1}$ για κάθε $n \geq n_0$. Επειδή $b_n \to 0$, έχουμε πάλι από το αποτέλεσμα της άσκησης 8.1.5 ότι $\sum_{k=n}^{+\infty} (b_k - b_{n+1}) = b_n$ και άρα ισχύει

$$|b_n| < \tfrac{\epsilon}{3M+1} \qquad \text{για κάθε } n \geq n_0. \tag{14.250}$$

Τώρα, βάσει του τύπου άθροισης του Abel, από τις (14.249), (14.250) συνεπάγεται ότι για κάθε n, m με $n > m \geq n_0$ ισχύει

$$\begin{aligned}\big|\sum_{k=m+1}^{n} a_k b_k\big| &= \big|\sum_{k=m+1}^{n} s_k (b_k - b_{k+1}) + s_n b_{n+1} - s_m b_{m+1}\big| \\ &\leq \sum_{k=m+1}^{n} |s_k||b_k - b_{k+1}| + |s_n||b_{n+1}| + |s_m||b_{m+1}| \\ &\leq M \sum_{k=m+1}^{+\infty} |b_k - b_{k+1}| + M|b_{n+1}| + M|b_{m+1}| \\ &\leq M\tfrac{\epsilon}{3M+1} + M\tfrac{\epsilon}{3M+1} + M\tfrac{\epsilon}{3M+1} = \tfrac{3M\epsilon}{3M+1} < \epsilon.\end{aligned}$$

Από το κριτήριο του Cauchy συνεπάγεται ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ συγκλίνει.
[γ] Έστω $b_n = c_n - d_n$ για κάθε n και έστω ότι οι (c_n), (d_n) είναι μονότονες και φραγμένες. Από το αποτέλεσμα του [α] έχουμε ότι $\sum_{n=1}^{+\infty} |c_n - c_{n+1}| < +\infty$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} |d_n - d_{n+1}| < +\infty$ και άρα

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n - b_{n+1}| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |c_n - c_{n+1}| + \sum_{n=1}^{+\infty} |d_n - d_{n+1}| < +\infty.$$

Αντιστρόφως, έστω $\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n - b_{n+1}| < +\infty$.
Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} (b_n - b_{n+1})$ συγκλίνει.
Θεωρούμε τις σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} (b_n - b_{n+1})^+$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} (b_n - b_{n+1})^-$.
Από τις γνωστές σχέσεις $x^+ = \frac{|x|+x}{2}$ και $x^- = \frac{|x|-x}{2}$ συνεπάγεται ότι και οι δύο αυτές σειρές συγκλίνουν.
Τώρα έστω s_n το n-οστό μερικό άθροισμα της $\sum_{n=1}^{+\infty} (b_n - b_{n+1})$ και u_n και v_n τα αντίστοιχα n-οστά μερικά αθροίσματα των $\sum_{n=1}^{+\infty} (b_n - b_{n+1})^+$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} (b_n - b_{n+1})^-$.
Τότε

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} (b_k - b_{k+1}) = \sum_{k=1}^{n} (b_k - b_{k+1})^+ - \sum_{k=1}^{n} (b_k - b_{k+1})^- = u_n - v_n$$

και άρα ισχύει
$$b_1 - b_{n+1} = u_n - v_n \qquad \text{για κάθε } n.$$
Άρα ισχύει $b_n = (v_{n-1} + b_1) - u_{n-1}$ για κάθε $n \geq 2$.
Τέλος, παρατηρούμε ότι οι σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty}(b_n - b_{n+1})^+$ και $\sum_{n=1}^{+\infty}(b_n - b_{n+1})^-$ έχουν μη-αρνητικούς όρους, οπότε οι ακολουθίες (u_n) και (v_n) των μερικών αθροισμάτων τους είναι αύξουσες.

Άσκηση 8.3.28. [α] *Έστω ότι ισχύει $y_n > 0$ και $x_n \neq 0$ για κάθε n και έστω ότι ισχύει τελικά $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \leq \frac{y_{n+1}}{y_n}$. Αν η $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνει, αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει απολύτως.*
[β] *Έστω ότι ισχύει $x_n \neq 0$ για κάθε n και έστω ότι υπάρχει μ ώστε $n\big(\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| - 1 + \frac{\mu}{n}\big) \to 0$. Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει απολύτως, αν $\mu > 1$, και δεν συγκλίνει απολύτως, αν $\mu < 1$.*
Έστω $\mu = 1$ και έστω ότι υπάρχει λ ώστε $n\log n\big(\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| - 1 + \frac{1}{n} + \frac{\lambda}{n\log n}\big) \to 0$. Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει απολύτως, αν $\lambda > 1$, και δεν συγκλίνει απολύτως, αν $\lambda < 1$.
Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^n}{e^n n!}$ συγκλίνει υπό συνθήκη.

Υπόδειξη: [α] Άμεση συνέπεια του αποτελέσματος της άσκησης 8.2.13[α].
[β] Για το πρώτο ερώτημα, εφαρμόστε το [α] με $y_n = \frac{1}{n^p}$, όπου $1 < p < \mu$ ή $\mu < p < 1$. Για το δεύτερο ερώτημα, εφαρμόστε το [α] με $y_n = \frac{1}{n\log n}$. Για το τελευταίο ερώτημα, αποδείξτε ότι οι $x_n = (-1)^{n-1}\frac{n^n}{e^n n!}$ ικανοποιούν την $n\big(\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| - 1 + \frac{\mu}{n}\big) \to 0$ με $\mu = \frac{1}{2}$.

Άσκηση 8.3.29. *Έστω ότι ισχύει $|x_{n,m}| \leq y_n$ για κάθε n, m και $\lim_{m\to+\infty} x_{n,m} = x_n$ για κάθε n. Αν $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n < +\infty$, αποδείξτε ότι για κάθε m η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_{n,m}$ συγκλίνει, η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει, επίσης, και, τέλος, $\lim_{m\to+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} x_{n,m} = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n = \sum_{n=1}^{+\infty}\lim_{m\to+\infty} x_{n,m}$.*

Λύση: Για κάθε n ισχύει
$$\textstyle\sum_{k=1}^{n}|x_{k,m}| \leq \sum_{k=1}^{n} y_k \leq \sum_{k=1}^{+\infty} y_k.$$
Παίρνοντας όριο καθώς $m \to +\infty$, βρίσκουμε
$$\textstyle\sum_{k=1}^{n}|x_k| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} y_k.$$
Άρα
$$\textstyle\sum_{k=1}^{+\infty}|x_k| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} y_k < +\infty$$
και, επομένως, η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει απολύτως.
Κατόπιν, έστω τυχών $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει n_0 ώστε
$$\textstyle\sum_{k=n_0+1}^{+\infty} y_k < \frac{\epsilon}{3}.$$
Ακριβώς όπως πριν, προκύπτει
$$\textstyle\sum_{k=n_0+1}^{+\infty}|x_k| \leq \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} y_k < \frac{\epsilon}{3}. \tag{14.251}$$
Επίσης,
$$\textstyle\lim_{m\to+\infty}\sum_{k=1}^{n_0} x_{k,m} = \sum_{k=1}^{n_0} x_k,$$
οπότε υπάρχει m_0 ώστε να ισχύει
$$\textstyle\left|\sum_{k=1}^{n_0} x_{k,m} - \sum_{k=1}^{n_0} x_k\right| < \frac{\epsilon}{3} \qquad \text{για κάθε } m \geq m_0. \tag{14.252}$$
Τώρα, από τις (14.251), (14.252) και από το ότι ισχύει $|x_{k,m}| \leq y_k$ για κάθε k, m συνεπάγεται ότι για κάθε $m \geq m_0$ είναι
$$\begin{aligned}\textstyle\left|\sum_{k=1}^{+\infty} x_{k,m} - \sum_{k=1}^{+\infty} x_k\right| &\leq \textstyle\left|\sum_{k=1}^{n_0} x_{k,m} - \sum_{k=1}^{n_0} x_k\right| + \sum_{k=n_0+1}^{+\infty}|x_{k,m}| + \sum_{k=n_0+1}^{+\infty}|x_k| \\ &< \tfrac{\epsilon}{3} + \tfrac{\epsilon}{3} + \tfrac{\epsilon}{3} = \epsilon.\end{aligned}$$
Άρα $\lim_{m\to+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty} x_{k,m} = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k$.

Άσκηση 8.3.30. *Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ αποκλίνει, αποδείξτε ότι και η $\sum_{n=1}^{+\infty} nx_n$ αποκλίνει.*

Υπόδειξη: Υποθέστε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} nx_n$ συγκλίνει και εφαρμόστε το κριτήριο του Dirichlet (ή και του Abel).

Άσκηση 8.4.1. *Έστω ότι ισχύει $0 \leq x_{m,n} \leq y_{m,n}$ για κάθε m,n. Αν η διπλή σειρά $\sum_{m,n=1}^{+\infty} y_{m,n}$ συγκλίνει ως προς οποιονδήποτε από (και, επομένως, ως προς όλους) τους τρεις τρόπους άθροισης, αποδείξτε ότι το ίδιο ισχύει και για τη διπλή σειρά $\sum_{m,n=1}^{+\infty} x_{m,n}$. Αν s_x είναι η κοινή τιμή των διαδοχικών αθροισμάτων της $\sum_{m,n=1}^{+\infty} x_{m,n}$ και s_y είναι η κοινή τιμή των διαδοχικών αθροισμάτων της $\sum_{m,n=1}^{+\infty} y_{m,n}$, αποδείξτε ότι $s_x \leq s_y$.*

Λύση: Για κάθε m ισχύει: $0 \leq x_{m,n} \leq y_{m,n}$ για κάθε n.
Άρα για κάθε m ισχύει
$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_{m,n} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} y_{m,n}.$$
Άρα ισχύει
$$\sum_{m=1}^{+\infty} \big(\sum_{n=1}^{+\infty} x_{m,n}\big) \leq \sum_{m=1}^{+\infty} \big(\sum_{n=1}^{+\infty} y_{m,n}\big).$$
Δηλαδή,
$$s_x = \sum_{m,n=1}^{+\infty} x_{m,n} \leq \sum_{m,n=1}^{+\infty} y_{m,n} = s_y.$$

Άσκηση 8.4.2. *Βρείτε την τιμή των τριών διαδοχικών αθροισμάτων της $\sum_{m,n=1}^{+\infty} \frac{1}{(m+n)!}$.*

Λύση: Η διπλή σειρά έχει μη-αρνητικούς όρους και χρησιμοποιούμε την άθροιση πρώτα κατά διαγωνίους:
$$\begin{aligned}\sum_{m,n=1}^{+\infty} \tfrac{1}{(m+n)!} &= \sum_{k=1}^{+\infty} \big(\sum_{l=1}^{k} \tfrac{1}{((k-l+1)+l)!}\big) = \sum_{k=1}^{+\infty} \big(\sum_{l=1}^{k} \tfrac{1}{(k+1)!}\big)\\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \tfrac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{+\infty} \tfrac{(k+1)-1}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{+\infty} \tfrac{1}{k!} - \sum_{k=1}^{+\infty} \tfrac{1}{(k+1)!}\\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \tfrac{1}{k!} - \sum_{k=2}^{+\infty} \tfrac{1}{k!} = 1.\end{aligned}$$

Άσκηση 8.4.3. *Αποδείξτε ότι η διπλή σειρά $\sum_{m,n=1}^{+\infty} \frac{1}{m^p n^q}$ συγκλίνει απολύτως αν και μόνο αν $p,q>1$.*

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε άθροιση πρώτα κατά γραμμές ή πρώτα κατά στήλες.

Άσκηση 8.4.4. *Αποδείξτε ότι η διπλή σειρά $\sum_{m,n=1}^{+\infty} \frac{1}{(m+n)^p}$ συγκλίνει απολύτως αν και μόνο αν $p>2$.*

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε άθροιση πρώτα κατά διαγωνίους.

Άσκηση 8.4.5. *Εξετάστε ως προς την άθροιση πρώτα κατά γραμμές και ως προς την άθροιση πρώτα κατά στήλες τη διπλή σειρά $\sum_{m,n=1}^{+\infty} x_{m,n}$, όπου $x_{m,n} = \frac{1}{m+1}(\frac{m}{m+1})^n - \frac{1}{m+2}(\frac{m+1}{m+2})^n$ για κάθε m,n.*

Λύση: Ας δούμε την άθροιση πρώτα κατά γραμμές.
$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} x_{m,n} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{1}{m+1}(\tfrac{m}{m+1})^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{1}{m+2}(\tfrac{m+1}{m+2})^n\\ &= \tfrac{1}{m+1}\tfrac{m/(m+1)}{1-(m/(m+1))} - \tfrac{1}{m+2}\tfrac{(m+1)/(m+2)}{1-((m+1)/(m+2))} = \tfrac{m}{m+1} - \tfrac{m+1}{m+2}.\end{aligned}$$
Άρα, χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα της άσκησης 8.1.5 και το ότι $\frac{m}{m+1} \to 1$ όταν $m \to +\infty$, βρίσκουμε
$$\sum_{m=1}^{+\infty} \big(\sum_{n=1}^{+\infty} x_{m,n}\big) = \sum_{m=1}^{+\infty} \big(\tfrac{m}{m+1} - \tfrac{m+1}{m+2}\big) = \tfrac{1}{2} - 1 = -\tfrac{1}{2}.$$
Κατόπιν, θεωρούμε την άθροιση πρώτα κατά στήλες. Από το αποτέλεσμα της άσκησης 8.1.5 και από το ότι $\frac{1}{m+1}(\frac{m}{m+1})^n \to 0$ όταν $m \to +\infty$ συνεπάγεται
$$\sum_{m=1}^{+\infty} x_{m,n} = \sum_{m=1}^{+\infty} \big(\tfrac{1}{m+1}(\tfrac{m}{m+1})^n - \tfrac{1}{m+2}(\tfrac{m+1}{m+2})^n\big) = \big(\tfrac{1}{2}\big)^{n+1}.$$
Άρα,
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \big(\sum_{m=1}^{+\infty} x_{m,n}\big) = \sum_{n=1}^{+\infty} \big(\tfrac{1}{2}\big)^{n+1} = \tfrac{(1/2)^2}{1-(1/2)} = \tfrac{1}{2}.$$

Μπορείτε να χειριστείτε την άθροιση πρώτα κατά διαγωνίους;

Άσκηση 8.4.6. *Γράψτε τη σειρά* $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{1+x^{2k}}$ *ως διπλή σειρά με τέτοιο τρόπο ώστε να αποδείξετε ότι ισχύει* $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{1+x^{2k}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}x^{2k-1}}{1-x^{2k-1}}$ *για κάθε* $x \in (-1,1)$.

Υπόδειξη: Θεωρήστε $x_{m,n} = (-1)^{m-1}x^{(2m-1)n}$ με $|x| < 1$.

Άσκηση 8.4.7. *Ξεκινώντας από τη διπλή σειρά* $\sum_{m,n=1}^{+\infty} mx^{mn}$, *αποδείξτε ότι, για κάθε* x *με* $|x| < 1$, *ισχύει* $\sum_{m=1}^{+\infty} m\frac{x^m}{1-x^m} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(1-x^n)^2}$.

Λύση: Αρχικά αποδεικνύουμε ότι η διπλή σειρά συγκλίνει απολύτως, κάνοντας άθροιση πρώτα κατά γραμμές.

$$\sum_{m,n=1}^{+\infty} m|x|^{mn} = \sum_{m=1}^{+\infty} m\big(\sum_{n=1}^{+\infty} |x|^{mn}\big) = \sum_{m=1}^{+\infty} m\frac{|x|^m}{1-|x|^m}.$$

Η τελευταία σειρά συγκλίνει, διότι συγκρίνεται με τη σειρά $\sum_{m=1}^{+\infty} m|x|^m$, η οποία συγκλίνει βάσει του κριτηρίου λόγου ή του κριτηρίου ρίζας. Η σύγκριση γίνεται διότι ο λόγος των όρων των δύο σειρών ισούται με $\frac{1}{1-|x|^m}$ και έχει όριο 1 όταν $m \to +\infty$.
Αποδείχθηκε, λοιπόν, ότι η διπλή σειρά συγκλίνει απολύτως.
Άρα, είτε κάνοντας άθροιση της διπλής σειράς πρώτα κατά γραμμές είτε κάνοντας άθροιση πρώτα κατά στήλες προκύπτει το ίδιο άθροισμα.
Με άθροιση πρώτα κατά γραμμές προκύπτει άθροισμα:

$$\sum_{m,n=1}^{+\infty} mx^{mn} = \sum_{m=1}^{+\infty} m\big(\sum_{n=1}^{+\infty} x^{mn}\big) = \sum_{m=1}^{+\infty} m\frac{x^m}{1-x^m}.$$

Για την άθροιση πρώτα κατά στήλες θα χρησιμοποιήσουμε τον εξής τύπο:

$$\sum_{m=1}^{+\infty} mt^m = \frac{t}{(1-t)^2} \qquad \text{αν } |t| < 1. \tag{14.253}$$

Για να αποδείξουμε αυτόν τον τύπο, παραγωγίζουμε την γνωστή ταυτότητα $1+t+t^2+\cdots+t^m = \frac{1-t^{m+1}}{1-t}$ ως προς t, πολλαπλασιάζουμε την ταυτότητα που προκύπτει με τον t και παίρνουμε όριο όταν $m \to +\infty$.
Τώρα με άθροιση πρώτα κατά στήλες και χρησιμοποιώντας την (14.253), προκύπτει άθροισμα:

$$\sum_{m,n=1}^{+\infty} mx^{mn} = \sum_{n=1}^{+\infty} \big(\sum_{m=1}^{+\infty} mx^{mn}\big) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(1-x^n)^2}.$$

Επομένως, $\sum_{m=1}^{+\infty} m\frac{x^m}{1-x^m} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(1-x^n)^2}$.

Άσκηση 8.4.8. *Έστω* $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ *και* $g(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} b_m x^m$ *για κάθε* $x \in (-R,R)$. *Αποδείξτε ότι ισχύει* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n g(x^n) = \sum_{m=1}^{+\infty} b_m f(x^m)$ *για κάθε* $x \in (-R_1,R_1)$, *όπου* $R_1 = \min\{R,1\}$.

Λύση: Έστω τυχόν $x \in (-R_1,R_1)$, $x \neq 0$.
Παίρνουμε οποιονδήποτε r με $0 < |x| < r < R_1$, οπότε $r < 1$ και $r < R$.
Οι σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n r^n$ και $\sum_{m=1}^{+\infty} b_m r^m$ συγκλίνουν, οπότε υπάρχει κάποιος M ώστε να ισχύει

$$|a_n|r^n \leq M \quad \text{και} \quad |b_m|r^m \leq M \qquad \text{για κάθε } n, m.$$

Τότε έχουμε

$$\begin{aligned}
\sum_{m,n=1}^{+\infty} |a_n b_m x^{mn}| &\leq M^2 \sum_{m,n=1}^{+\infty} \frac{|x|^{mn}}{r^{n+m}} = \frac{M^2}{|x|} \sum_{m,n=1}^{+\infty} \frac{|x|^{mn+1}}{r^{n+m}} \\
&\leq \frac{M^2}{|x|} \sum_{m,n=1}^{+\infty} \frac{|x|^{m+n}}{r^{n+m}} = \frac{M^2}{|x|} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{|x|^m}{r^m}\big(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x|^n}{r^n}\big) \\
&= \frac{M^2}{|x|} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{|x|^m}{r^m} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x|^n}{r^n} < +\infty
\end{aligned}$$

Άρα η διπλή σειρά $\sum_{m,n=1}^{+\infty} a_n b_m x^{mn}$ συγκλίνει απολύτως όταν $x \in (-R_1, R_1)$, $x \neq 0$. Προφανώς, η σειρά συγκλίνει απολύτως και όταν $x = 0$.
Επομένως, όταν $x \in (-R_1, R_1)$ ισχύει

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n g(x^n) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \big(\sum_{m=1}^{+\infty} b_m x^{mn} \big) = \sum_{m=1}^{+\infty} b_m \big(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^{mn} \big) = \sum_{m=1}^{+\infty} b_m f(x^m).$$

Άσκηση 8.5.2. *Αποδείξτε ότι* $\frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)\cdots(x+k)} = e \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$ *για* $x \neq 0, -1, -2, \ldots$, *χρησιμοποιώντας το τελευταίο αποτέλεσμα της άσκησης 5.2.14.*

Λύση: Το τελευταίο αποτέλεσμα της άσκησης 5.2.14 είναι ότι ισχύει

$$\frac{1}{x(x+1)\cdots(x+k)} = \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} \frac{(-1)^l}{x+l} \qquad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, \ldots, -k\}.$$

Αυτό γράφεται και ως εξής:

$$\frac{1}{x(x+1)\cdots(x+k)} = \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{(k-l)!l!} \frac{(-1)^l}{x+l} \qquad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, \ldots, -k\}. \tag{14.254}$$

Παρατηρήστε ότι αυτό ισχύει και για $k = 0$ αν θεωρήσουμε ότι σ' αυτήν την περίπτωση η παράσταση $\frac{1}{x(x+1)\cdots(x+k)}$ σημαίνει $\frac{1}{x}$.
Τότε αυτό που θέλουμε να αποδείξουμε γράφεται

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)\cdots(x+k)} = e \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)} \qquad \text{για κάθε } x \neq 0, -1, -2, \ldots$$

ή, ισοδύναμα,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \big(\sum_{l=0}^{k} \frac{1}{(k-l)!l!} \frac{(-1)^l}{x+l} \big) = e \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)} \qquad \text{για κάθε } x \neq 0, -1, -2, \ldots, \tag{14.255}$$

σύμφωνα με την (14.254).
Η αριστερή μεριά της (14.255) είναι το γινόμενο Cauchy των $\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!}$ και $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$, οπότε, επειδή $\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!} = e$, για να αποδείξουμε την (14.255) πρέπει να αποδείξουμε την απόλυτη σύγκλιση των δύο σειρών.
Γνωρίζουμε ότι η $\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!}$ συγκλίνει απολύτως και, σχετικά με τη δεύτερη σειρά, παρατηρούμε ότι για κάθε $x \neq 0, -1, -2, \ldots$ υπάρχουν το πολύ δύο από τους $0, -1, -2, \ldots$ οι οποίοι απέχουν από τον x λιγότερο από 1. Επομένως,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \Big| \frac{(-1)^n}{n!(x+n)} \Big| = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!|x+n|} \leq A + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} < +\infty,$$

όπου ο A είναι ίσος με το άθροισμα των δύο το πολύ όρων της σειράς που αντιστοιχούν στους μη-αρνητικούς n με $|x+n| < 1$.

Άσκηση 8.5.3. *Για κάθε* x *ορίζουμε* $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$. *Στο παράδειγμα 8.5.2 αποδείξαμε ότι για κάθε* a, b *ισχύει* $f(a+b) = f(a)f(b)$. *Επίσης, γνωρίζουμε ότι* $f(0) = 1$ *και* $f(1) = e$.
Αποδείξτε ότι η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *είναι συνεχής στον* 0.

Λύση: Έχουμε

$$|f(x) - f(0)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x|^n}{n!} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x|^n}{2^{n-1}} = \frac{2|x|}{2-|x|} \qquad \text{για κάθε } x \text{ με } |x| < 2.$$

Άρα $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$.

Άσκηση 8.5.4. *Αποδείξτε το θεώρημα του Mertens: αν η μία από τις σειρές* $\sum_{m=0}^{+\infty} a_m$ *και* $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ *συγκλίνει απολύτως και η άλλη συγκλίνει, τότε το γινόμενο Cauchy* $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k$ *των δύο σειρών συγκλίνει και* $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m \ \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$.
Η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ *συγκλίνει. Αποδείξτε ότι το γινόμενο Cauchy της σειράς αυτής με τον εαυτό της αποκλίνει.*

Λύση: Το θεώρημα του Mertens. Έστω $T = \sum_{n=0}^{+\infty} |b_n| < +\infty$.
Θεωρούμε $s_n = a_0 + \cdots + a_n$, $t_n = b_0 + \cdots + b_n$ και $u_n = c_0 + \cdots + c_n$ για κάθε n.
Επίσης, έστω $s = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m$, $t = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ και $u = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k$.
Τότε

$$u_n = b_0 s_n + b_1 s_{n-1} + \cdots + b_{n-1} s_1 + b_n s_0,$$

οπότε

$$u_n - st = b_0(s_n - s) + b_1(s_{n-1} - s) + \cdots + b_{n-1}(s_1 - s) + b_n(s_0 - s) + (t_n - t)s$$

και άρα

$$|u_n - st| \le |b_0||s_n - s| + |b_1||s_{n-1} - s| + \cdots + |b_{n-1}||s_1 - s| + |b_n||s_0 - s| + |t_n - t||s|. \quad (14.256)$$

Υπάρχει M ώστε να ισχύει

$$|s_n - s| \le M \qquad \text{για κάθε } n. \quad (14.257)$$

Τώρα, έστω τυχών $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει

$$|s_n - s| < \tfrac{\epsilon}{3T+1}, \quad |t_n - t| < \tfrac{\epsilon}{3|s|+1} \quad \text{και} \quad \sum_{k=n}^{+\infty} |b_k| < \tfrac{\epsilon}{3M+1} \quad \text{για κάθε } n \ge n_0. \quad (14.258)$$

Από τις (14.256), (14.257) και (14.258) συνεπάγεται ότι για $n \ge 2n_0 - 1 \ge n_0$ ισχύει

$$\begin{aligned} |u_n - st| &\le (|b_0| + \cdots + |b_{n-n_0}|)\tfrac{\epsilon}{3T+1} + (|b_{n-n_0+1}| + \cdots + |b_n|)M + \tfrac{\epsilon}{3|s|+1}|s| \\ &\le T\,\tfrac{\epsilon}{3T+1} + \tfrac{\epsilon}{3M+1} M + \tfrac{\epsilon}{3|s|+1}|s| < \epsilon. \end{aligned}$$

Άρα $u_n \to st$ και, επομένως, $u = st$.
Το δεύτερο ερώτημα. Το γινόμενο Cauchy είναι η σειρά $\sum_{k=2}^{+\infty} c_k$, όπου

$$c_k = (-1)^k \sum_{l=1}^{k-1} \tfrac{1}{\sqrt{l}\sqrt{k-l}} \qquad \text{για κάθε } k \ge 2.$$

Από τη γνωστή ανισότητα $2ab \le a^2 + b^2$ συνεπάγεται $2\sqrt{l}\sqrt{k-l} \le l + (k-l) = k$ και άρα

$$|c_k| = \sum_{l=1}^{k-1} \tfrac{1}{\sqrt{l}\sqrt{k-l}} \ge \sum_{l=1}^{k-1} \tfrac{2}{k} = \tfrac{2(k-1)}{k}$$

και, επομένως, δεν ισχύει $c_k \to 0$.

Άσκηση 8.6.1. *Υπολογίστε το άθροισμα της σειράς* $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{2^9} + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^{15}} + \frac{1}{2^{14}} + \frac{1}{2^{13}} + \frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{2^{11}} + \cdots$.

Λύση: Η σειρά που έχουμε είναι αναδιάταξη της γεωμετρικής σειράς $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots$. Επειδή η γεωμετρική σειρά συγκλίνει απολύτως, η αρχική σειρά έχει το ίδιο άθροισμα με τη γεωμετρική σειρά, δηλαδή ίσο με 2.

Άσκηση 8.6.3. *Έστω ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει υπό συνθήκη. Αποδείξτε ότι για κάθε s υπάρχει ακολουθία (ϵ_n) ώστε να ισχύει $\epsilon_n = \pm 1$ για κάθε n και ώστε $\sum_{n=1}^{+\infty} \epsilon_n x_n = s$.*

Λύση: Έστω $s \ge 0$.
Επειδή $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| = +\infty$, υπάρχει n ώστε $|x_1| + \cdots + |x_n| \ge s$ και συμβολίζουμε n_1 τον μικρότερο τέτοιον n. Δηλαδή,

$$|x_1| + \cdots + |x_{n_1-1}| < s, \qquad |x_1| + \cdots + |x_{n_1}| \ge s. \quad (14.259)$$

(Αν $n_1 = 1$, τότε έχουμε απλώς ότι $|x_1| \ge s$.)
Επειδή $\sum_{n=n_1+1}^{+\infty} |x_n| = +\infty$, υπάρχει $n > n_1$ ώστε $|x_{n_1+1}| + \cdots + |x_n| \ge |x_1| + \cdots + |x_{n_1}| - s$ και συμβολίζουμε n_2 τον μικρότερο τέτοιον n. Δηλαδή,

$$\begin{aligned} |x_{n_1+1}| + \cdots + |x_{n_2-1}| &< |x_1| + \cdots + |x_{n_1}| - s, \\ |x_{n_1+1}| + \cdots + |x_{n_2}| &\ge |x_1| + \cdots + |x_{n_1}| - s. \end{aligned} \quad (14.260)$$

Επειδή $\sum_{n=n_2+1}^{+\infty}|x_n|=+\infty$, υπάρχει $n>n_2$ ώστε $|x_{n_2+1}|+\cdots+|x_n|\geq -|x_1|-\cdots-|x_{n_1}|+|x_{n_1+1}|+\cdots+|x_{n_2}|+s$ και συμβολίζουμε n_3 τον μικρότερο τέτοιον n. Δηλαδή,

$$\begin{aligned} |x_{n_2+1}|+\cdots+|x_{n_3-1}| &< -|x_1|-\cdots-|x_{n_1}|+|x_{n_1+1}|+\cdots+|x_{n_2}|+s, \\ |x_{n_2+1}|+\cdots+|x_{n_3}| &\geq -|x_1|-\cdots-|x_{n_1}|+|x_{n_1+1}|+\cdots+|x_{n_2}|+s. \end{aligned} \tag{14.261}$$

Συνεχίζουμε έτσι επ' άπειρον.

Τώρα ορίζουμε μια ακολουθία προσήμων (ϵ_n) ως εξής. Για $n=1,\ldots,n_1$ θέτουμε $\epsilon_n=1$, αν $x_n\geq 0$, και $\epsilon_n=-1$, αν $x_n<0$. Επομένως, ισχύει $\epsilon_n x_n=|x_n|$ αν $n=1,\ldots,n_1$. Για $n=n_1+1,\ldots,n_2$ θέτουμε $\epsilon_n=-1$, αν $x_n\geq 0$, και $\epsilon_n=1$, αν $x_n<0$. Επομένως, ισχύει $\epsilon_n x_n=-|x_n|$ αν $n=n_1+1,\ldots,n_2$. Για $n=n_2+1,\ldots,n_3$ θέτουμε $\epsilon_n=1$, αν $x_n\geq 0$, και $\epsilon_n=-1$, αν $x_n<0$. Επομένως, ισχύει $\epsilon_n x_n=|x_n|$ αν $n=n_2+1,\ldots,n_3$. Και ούτω καθ' εξής.

Συμβολίζουμε s_n το n-οστό μερικό άθροισμα της $\sum_{n=1}^{+\infty}\epsilon_n x_n$ και θα αποδείξουμε ότι $s_n\to s$.

Οι (14.259), (14.260) και (14.261) γράφονται:

$$s\leq s_{n_1}<s+|x_{n_1}|,\qquad s-|x_{n_2}|<s_{n_2}\leq s,\qquad s\leq s_{n_3}<s+|x_{n_3}|.$$

Γενικότερα, έχουμε ότι

$$s\leq s_{n_{2k-1}}<s+|x_{n_{2k-1}}|,\quad s-|x_{n_{2k}}|<s_{n_{2k}}\leq s\qquad \text{για κάθε } k. \tag{14.262}$$

Πρέπει, επίσης, να παρατηρήσουμε ότι οι όροι της ακολουθίας (s_n) αυξάνονται όταν $1\leq n\leq n_1$, μειώνονται όταν $n_1\leq n\leq n_2$ και, γενικότερα, αυξάνονται όταν $n_{2k-2}\leq n\leq n_{2k-1}$ και μειώνονται όταν $n_{2k-1}\leq n\leq n_{2k}$. Επομένως, από τις (14.262) συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned} s-|x_{n_{2k-2}}|<s_n<s+|x_{n_{2k-1}}| &\qquad \text{για } n_{2k-2}\leq n\leq n_{2k-1}, \\ s-|x_{n_{2k}}|<s_n<s+|x_{n_{2k-1}}| &\qquad \text{για } n_{2k-1}\leq n\leq n_{2k}. \end{aligned}$$

Από αυτές τις σχέσεις και από το ότι $x_n\to 0$ (αφού η $\sum_{n=1}^{+\infty}x_n$ συγκλίνει) συνεπάγεται ότι $s_n\to s$.

Άσκηση 8.6.4. *Έστω $0<p<+\infty$. Θεωρούμε την $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ και τήν αναδιατάσσουμε βάσει των εξής δύο κανόνων:*

(i) δεν αλλάζουμε τη διάταξη ανάμεσα στους θετικούς όρους ούτε τη διάταξη ανάμεσα στους αρνητικούς όρους,

(ii) αν από τους αρχικούς n όρους της προκύπτουσας σειράς οι k_n είναι θετικοί και οι l_n είναι αρνητικοί (οπότε $k_n+l_n=n$), τότε $\frac{k_n}{l_n}\to p$.

Αποδείξτε ότι η προκύπτουσα σειρά έχει άθροισμα $\frac{1}{2}\log(4p)$.

Λύση: Αν s_n είναι το n-οστό μερικό άθροισμα της προκύπτουσας σειράς, τότε

$$\begin{aligned} s_n &= \big(1+\tfrac{1}{3}+\cdots+\tfrac{1}{2k_n-1}\big)-\big(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\cdots+\tfrac{1}{2l_n}\big) \\ &= \big(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\cdots+\tfrac{1}{2k_n-1}+\tfrac{1}{2k_n}\big)-\tfrac{1}{2}\big(1+\tfrac{1}{2}+\cdots+\tfrac{1}{k_n}\big) \\ &\quad -\tfrac{1}{2}\big(1+\tfrac{1}{2}+\cdots+\tfrac{1}{l_n}\big). \end{aligned} \tag{14.263}$$

Εύκολα βλέπουμε ότι από τις σχέσεις $k_n+l_n=n$ και $\frac{k_n}{l_n}\to p$ συνεπάγεται ότι $k_n\to+\infty$ και $l_n\to+\infty$. Άρα από το αποτέλεσμα της άσκησης 2.4.6 και από την (14.263) συνεπάγεται ότι

$$s_n-\log(2k_n)+\tfrac{1}{2}\log k_n+\tfrac{1}{2}\log l_n\to 0$$

ή, ισοδύναμα,

$$s_n-\tfrac{1}{2}\log\big(4\tfrac{k_n}{l_n}\big)\to 0.$$

Άρα $s_n\to\frac{1}{2}\log(4p)$.

Άσκηση 8.6.5. *Έστω συναρτήσεις $f_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ για κάθε k. Υποθέτουμε ότι για κάθε k η f_k είναι ένα-προς-ένα, ότι $f_k(\mathbb{N}) \cap f_{k'}(\mathbb{N}) = \emptyset$ για κάθε k, k' με $k \neq k'$ και ότι $\bigcup_{k=1}^{+\infty} f_k(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$.*
Για κάθε σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ η οποία συγκλίνει απολύτως αποδείξτε ότι:
(i) για κάθε k η αντίστοιχη σειρά $\sum_{m=1}^{+\infty} x_{f_k(m)}$ συγκλίνει απολύτως.
(ii) αν ορίσουμε $s_k = \sum_{m=1}^{+\infty} x_{f_k(m)}$, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} s_k$ συγκλίνει απολύτως.
(iii) αν $s = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$, τότε $\sum_{k=1}^{+\infty} s_k = s$. Δηλαδή,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \Big(\sum_{m=1}^{+\infty} x_{f_k(m)} \Big) = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n.$$

Υπόδειξη: Θεωρήστε τη διπλή σειρά $\sum_{k,m=1}^{+\infty} x_{k,m}$ ορίζοντας $x_{k,m} = x_{f_k(m)}$ για κάθε k, m. Δείτε την άσκηση 8.3.26 και παρατηρήστε ότι η άθροιση της διπλής σειράς πρώτα κατά διαγωνίους προκύπτει με κατάλληλη εισαγωγή παρενθέσεων σε κατάλληλη αναδιάταξη της σειράς $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.

14.9 Κεφάλαιο 9.

Άσκηση 9.1.1. *Έστω $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ και $g_n(x) = \frac{n^2x}{1+n^2x^2}$ για κάθε x. Αποδείξτε ότι οι (f_n), (g_n) συγκλίνουν σε κάποιες f, g κατά σημείο στο $\mathbb{R}$. Βρείτε τις f, g.*

Λύση: Αν $x = 0$, έχουμε $f_n(0) = 0 \to 0$ και $g_n(0) = 0 \to 0$ όταν $n \to +\infty$.
Αν $x \neq 0$, τότε $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} \to 0$ και $g_n(x) = \frac{n^2x}{1+n^2x^2} \to \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$ όταν $n \to +\infty$.
Άρα $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} 0$ στο $\mathbb{R}$ και $g_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} g$ στο $\mathbb{R}$, όπου η g έχει τύπο $g(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x = 0 \\ 1/x, & \text{αν } x \neq 0 \end{cases}$

Παρατήρηση. Προσέξτε τον λόγο για τον οποίο χρειάστηκε να διακρίνουμε τις περιπτώσεις: $x = 0$ και $x \neq 0$. Αν $x \neq 0$, τότε $nx \to \pm\infty$ ανάλογα με το πρόσημο του x. Όμως, αυτό δεν ισχύει αν $x = 0$. Τότε είναι $n0 = 0 \to 0$.
Αυτή η διάκριση γίνεται πολύ συχνά.

Άσκηση 9.1.2. *Έστω $f_n(x) = \frac{x}{n}[\frac{n}{x}]$ για κάθε $x \neq 0$. Αποδείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει σε κάποια f κατά σημείο στο $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Βρείτε την f.*

Λύση: Εφαρμόζουμε την ανισότητα $[a] \leq a < [a] + 1$ και παίρνουμε ότι $\frac{n}{x} - 1 < [\frac{n}{x}] \leq \frac{n}{x}$.
Αν $x > 0$, συνεπάγεται ότι $\frac{x}{n}(\frac{n}{x} - 1) < \frac{x}{n}[\frac{n}{x}] \leq \frac{x}{n}\frac{n}{x}$ ή, ισοδύναμα, ότι $1 - \frac{x}{n} < f_n(x) \leq 1$. Άρα από το θεώρημα παρεμβολής έχουμε ότι $f_n(x) \to 1$.
Αν $x < 0$, συνεπάγεται ότι $\frac{x}{n}(\frac{n}{x} - 1) > \frac{x}{n}[\frac{n}{x}] \geq \frac{x}{n}\frac{n}{x}$ ή, ισοδύναμα, ότι $1 - \frac{x}{n} > f_n(x) \geq 1$. Όπως πριν, έχουμε ότι $f_n(x) \to 1$.
Άρα $f_n(x) \to 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ και, επομένως, η (f_n) συγκλίνει στη σταθερή συνάρτηση 1 κατά σημείο στο $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Άσκηση 9.1.3. *Έστω $f_n(x) = \frac{n}{x}[\frac{x}{n}]$ για κάθε $x > 0$. Αποδείξτε ότι $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} 0$ στο $(0, +\infty)$.*

Λύση: Παίρνουμε τυχόντα $x > 0$. Αν ο n γίνει μεγαλύτερος από κάποιον συγκεκριμένο αριθμό, τότε ο $\frac{x}{n}$ θα είναι στο διάστημα $(0, 1)$. (Πράγματι, αρκεί να είναι $n > x$ ή, ισοδύναμα, ο n να γίνει μεγαλύτερος από τον $[x]$.) Αυτό σημαίνει ότι για όλες τις αρκετά μεγάλες τιμές του n ο $[\frac{x}{n}]$ και, επομένως, και ο $f_n(x)$ έχει σταθερή τιμή 0. Άρα, $f_n(x) \to 0$.
Σχόλιο. Έχει ενδιαφέρον να δούμε αν η ακολουθία συναρτήσεων (f_n) συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση κατά σημείο στο $(-\infty, 0)$.
Παίρνουμε, τώρα, τυχόντα $x < 0$. Όπως πριν, αν ο n γίνει μεγαλύτερος από κάποιον συγκεκριμένο αριθμό, τότε ο $\frac{x}{n}$ θα είναι στο διάστημα $(-1, 0)$. Αυτό σημαίνει ότι για όλες τις αρκετά μεγάλες τιμές του n ο $[\frac{x}{n}]$ έχει σταθερή τιμή -1 και, επομένως, ο $f_n(x)$ έχει τιμή $-\frac{n}{x}$. Άρα, $f_n(x) \to +\infty$.
Άρα η απάντηση είναι: όχι.

Άσκηση 9.1.4. *Έστω $f_n(x) = \begin{cases} \min\{nx, 1\}, & \text{αν } x \geq 0 \\ \max\{nx, -1\}, & \text{αν } x \leq 0 \end{cases}$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι η (f_n) συ-*

γκλίνει σε κάποια f κατά σημείο στο $\mathbb{R}$. Βρείτε την f.

Λύση: Αν $x = 0$, τότε και από τους δύο τύπους της f_n προκύπτει ότι $f_n(0) = 0 \to 0$.
Αν $x > 0$, τότε για αρκετά μεγάλο n ισχύει $nx \geq 1$ και άρα $f_n(x) = \min\{nx, 1\} = 1 \to 1$.
Ομοίως, αν $x < 0$, τότε για αρκετά μεγάλο n ισχύει $nx \leq -1$ και άρα $f_n(x) = \max\{nx, -1\} = -1 \to -1$.

Άρα $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} f$ στο $\mathbb{R}$, όπου η f έχει τύπο $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x > 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \\ -1, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$

Με άλλα λόγια, $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} \text{sign}$ στο $\mathbb{R}$.

Άσκηση 9.1.5. *Γνωρίζουμε ότι η $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in [a, b] \cap \mathbb{Q} \\ 0, & \text{αν } x \in [a, b] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ δεν είναι ολοκληρώσιμη. Θεωρούμε οποιαδήποτε αρίθμηση $[a, b] \cap \mathbb{Q} = \{r_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ του $[a, b] \cap \mathbb{Q}$ και για κάθε n τη συνάρτηση $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in \{r_1, \ldots, r_n\} \\ 0, & \text{αν } x \in [a, b] \setminus \{r_1, \ldots, r_n\} \end{cases}$
Αποδείξτε ότι $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} f$ στο $[a, b]$. Είναι κάθε f_n ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$;*

Λύση: Αν $x \in [a, b] \cap \mathbb{Q}$, τότε υπάρχει κάποιος m ώστε να είναι $x = r_m$. Συνεπάγεται ότι για κάθε $n \geq m$ ισχύει $f_n(x) = 1$ και άρα $f_n(x) \to 1$.
Αν $x \in [a, b] \setminus \mathbb{Q}$, τότε για κάθε n ισχύει $f_n(x) = 0$ και άρα $f_n(x) \to 0$.
Επομένως, $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} f$ στο $[a, b]$.
Κάθε f_n είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ διότι ταυτίζεται με τη μηδενική συνάρτηση στο $[a, b]$ εκτός πεπερασμένου πλήθους σημείων του $[a, b]$.

Άσκηση 9.2.1. *Έστω $f_n : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f_n(x) = xe^{-nx}$ για κάθε $x \geq 0$. Αποδείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει σε κάποια f ομοιόμορφα στο $[0, +\infty)$. Ποιά είναι η f; Σχεδιάστε τα γραφήματα των συναρτήσεων.
Επαναλάβατε με τις $f_n : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f_n(x) = (-1)^n \sqrt{n}\, xe^{-nx}$ για κάθε $x \geq 0$.*

Λύση: Η πρώτη ακολουθία. Πρώτα βρίσκουμε συνάρτηση f ώστε $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} f$ στο $[0, +\infty)$. Αυτό είναι εύκολο:

$$f_n(x) = xe^{-nx} \to \begin{cases} 0, & \text{αν } x = 0 \\ 0, & \text{αν } 0 < x \end{cases}$$

Άρα $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} 0$ στο $[0, +\infty)$, οπότε αρκεί να δείξουμε ότι $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} 0$ στο $[0, +\infty)$.
Για να υπολογίσουμε το

$$\|f_n\|_{[0,+\infty)} = \sup\{|f_n(x)| \,|\, x \in [0, +\infty)\} = \sup\{xe^{-nx} \,|\, x \in [0, +\infty)\},$$

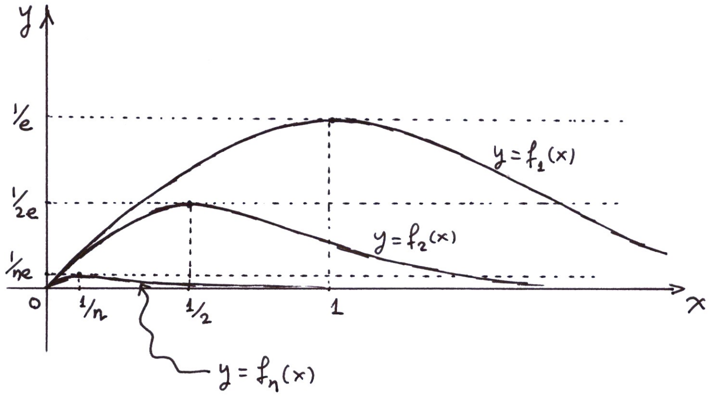
θα δούμε πώς μεταβάλλεται η $|f_n(x)| = f_n(x) = xe^{-nx}$ στο $[0, +\infty)$.
Υπολογίζουμε την παράγωγο:

$${f_n}'(x) = e^{-nx} - nxe^{-nx} = e^{-nx}(1 - nx).$$

Επομένως, η f_n είναι αύξουσα στο διάστημα $[0, \frac{1}{n}]$ και φθίνουσα στο $[\frac{1}{n}, +\infty)$. Άρα η μέγιστη τιμή του $|f_n(x)| = f_n(x)$ είναι στον $x = \frac{1}{n}$ και άρα

$$\|f_n\|_{[0,+\infty)} = \max\{|f_n(x)| \,|\, x \in [0, +\infty)\} = f_n\big(\tfrac{1}{n}\big) = \tfrac{1}{en}.$$

Άρα $\|f_n\|_{[0,+\infty)} \to 0$, οπότε $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} 0$ στο $[0, +\infty)$.
Στο σχήμα 41 φαίνονται μερικά από τα γραφήματα των f_n. Είναι σαφές ότι το γράφημα της f_n προσεγγίζει τον x-άξονα “ομοιόμορφα” στο $[0, +\infty)$, αφού το μέγιστο ύψος του γραφήματος πάνω από τον x-άξονα τείνει στο 0 όταν $n \to +\infty$.



Σχ 41

Η δεύτερη ακολουθία. Έχουμε $f_n(0) = 0 \to 0$.
Αν $x > 0$, τότε το $\lim_{n\to+\infty} \frac{x\sqrt{n}}{e^{nx}}$ είναι απροσδιόριστη μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$. Βρίσκουμε

$$\lim_{t\to+\infty} \tfrac{x\sqrt{t}}{e^{tx}} = \lim_{t\to+\infty} \tfrac{1}{2\sqrt{t}e^{tx}} = 0.$$

Άρα $\frac{x\sqrt{n}}{e^{nx}} \to 0$ και, επειδή η $\big((-1)^n\big)$ είναι φραγμένη, συνεπάγεται $f_n(x) = \frac{(-1)^n x\sqrt{n}}{e^{nx}} \to 0$.
Συμπεραίνουμε ότι $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} 0$ στο $[0, +\infty)$. Για να αποδείξουμε την ομοιόμορφη σύγκλιση υπολογίζουμε το

$$\|f_n\|_{[0,+\infty)} = \sup\{|f_n(x)| \,|\, x \geq 0\} = \sup\{\sqrt{n}\, xe^{-nx} \,|\, x \geq 0\}.$$

Βλέπουμε εύκολα ότι η συνάρτηση $\sqrt{n}\, xe^{-nx}$ είναι μη αρνητική, αύξουσα στο διάστημα $[0, \frac{1}{n}]$ και φθίνουσα στο $[\frac{1}{n}, +\infty)$. Άρα η συνάρτηση έχει μέγιστη τιμή στον $x = \frac{1}{n}$ ίση με $\frac{1}{e\sqrt{n}}$. Επομένως,

$$\|f_n\|_{[0,+\infty)} = \max\{|f_n(x)| \,|\, x \geq 0\} = \tfrac{1}{e\sqrt{n}} \to 0$$

και άρα $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} 0$ στο $[0, +\infty)$.

Άσκηση 9.2.2. *Έστω* $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *με τύπο* $f_n(x) = x^n(1-x^n)$ *για κάθε* $x \in [0, 1]$. *Αποδείξτε ότι η* (f_n) *συγκλίνει στη μηδενική συνάρτηση* 0 *κατά σημείο, αλλά όχι ομοιόμορφα, στο* $[0, 1]$. *Σχεδιάστε τα γραφήματα των συναρτήσεων.*

Λύση: Έχουμε

$$f_n(x) = x^n(1 - x^n) \to \begin{cases} 0, & \text{αν } 0 \leq x < 1 \\ 0, & \text{αν } x = 1 \end{cases}$$

Άρα $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} 0$ στο $[0, 1]$.
Για να υπολογίσουμε το $\|f_n\|_{[0,1]}$, θα δούμε πώς μεταβάλλεται η $|f_n(x)| = f_n(x) = x^n(1 - x^n)$ στο $[0, 1]$.
Υπολογίζουμε την παράγωγο:

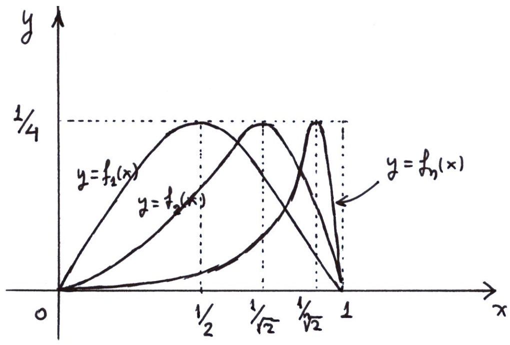
$$f_n{}'(x) = nx^{n-1}(1 - x^n) - nx^n x^{n-1} = nx^{n-1}(1 - 2x^n).$$

Άρα η f_n είναι αύξουσα στο διάστημα $[0, \frac{1}{\sqrt[n]{2}}]$ και φθίνουσα στο $[\frac{1}{\sqrt[n]{2}}, 1]$. Άρα η μέγιστη τιμή του $|f_n(x)| = f_n(x)$ είναι στον $x = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$, οπότε

$$\|f_n\|_{[0,1]} = \max\{|f_n(x)| \,|\, x \in [0, 1]\} = f_n\big(\tfrac{1}{\sqrt[n]{2}}\big) = \tfrac{1}{4}.$$

Άρα $\|f_n\|_{[0,1]} \not\to 0$, οπότε $f_n \overset{\text{ομ}}{\not\to} 0$ στο $[0, 1]$.
Στο σχήμα 42 φαίνονται μερικά από τα γραφήματα των f_n. Είναι σαφές ότι το γράφημα της f_n *δεν* προσεγγίζει τον x-άξονα "ομοιόμορφα" στο $[0, 1]$, αφού το μέγιστο ύψος του γραφήματος πάνω

από τον x-άξονα μένει σταθερά ίσο με $\frac{1}{4}$ όταν ο n αυξάνεται. Παρατηρήστε ότι, επειδή $\frac{1}{\sqrt[n]{2}} \to 1$, η κορυφή του γραφήματος της f_n μετακινείται πάνω στην οριζόντια ευθεία σε ύψος $\frac{1}{4}$ προς τα δεξιά προς το σημείο $(1, \frac{1}{4})$. Πάντως, το καμπύλο μέρος του γραφήματος της f_n που αντιστοιχεί στο διάστημα $[0, \frac{1}{\sqrt[n]{2}}]$ κατεβαίνει προς τον x-άξονα.



Σx 42

Άσκηση 9.2.3. *Έστω $f_n : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$ για κάθε $x \geq 0$. Αποδείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει σε κάποια f κατά σημείο, αλλά όχι ομοιόμορφα, στο $[0, +\infty)$. Ποιά είναι η f; Αποδείξτε ότι, για κάθε $a > 0$, $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ ομοιόμορφα στο $[a, +\infty)$.*

Να επαναλάβετε με τις $f_n : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπους $f_n(x) = e^{-nx}$ για κάθε $x \geq 0$.

Ομοίως με τις $f_n : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπους $f_n(x) = nxe^{-nx}$ για κάθε $x \geq 0$.

Λύση: Η πρώτη ακολουθία. Έχουμε

$$f_n(x) = \tfrac{1}{1+nx} \to \begin{cases} 1, & \text{αν } x = 0 \\ 0, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

Άρα $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} f$ στο $[0, +\infty)$, όπου η συνάρτηση f έχει τύπο

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x = 0 \\ 0, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

Για να υπολογίσουμε το $\|f_n - f\|_{[0,+\infty)}$, βλέπουμε ότι

$$|f_n(x) - f(x)| = \begin{cases} 0, & \text{αν } x = 0 \\ \frac{1}{1+nx}, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

οπότε

$$\{|f_n(x) - f(x)| \,|\, x \in [0, +\infty)\} = \{0\} \cup \big\{\tfrac{1}{1+nx} \,\big|\, x \in (0, +\infty)\big\} = \{0\} \cup (0, 1) = [0, 1).$$

Άρα

$$\|f_n - f\|_{[0,+\infty)} = \sup[0, 1) = 1$$

οπότε $\|f_n - f\|_{[0,+\infty)} \not\to 0$.

Υπάρχει και ένας δεύτερος, έμμεσος τρόπος να αποδείξουμε ότι η (f_n) δεν συγκλίνει στην f ομοιόμορφα στο $[0, +\infty)$. Παρατηρούμε ότι κάθε f_n είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$, οπότε, αν η (f_n) συγκλίνει στην f ομοιόμορφα στο $[0, +\infty)$, τότε και η f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$. Όμως, η f δεν είναι συνεχής στον 0.

Τέλος, θεωρούμε έναν οποιονδήποτε $a > 0$, τόν σταθεροποιούμε και θα αποδείξουμε ότι $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο $[a, +\infty)$.

Τώρα,

$$\{|f_n(x) - f(x)| \,|\, x \in [a, +\infty)\} = \big\{\tfrac{1}{1+nx} \,\big|\, x \in [a, +\infty)\big\} = \big(0, \tfrac{1}{1+na}\big].$$

Άρα
$$\|f_n - f\|_{[a,+\infty)} = \sup\left(0, \tfrac{1}{1+na}\right] = \tfrac{1}{1+na}$$
οπότε $\|f_n - f\|_{[a,+\infty)} \to 0$.
Η δεύτερη ακολουθία. Για $x = 0$ έχουμε $f_n(0) = 1 \to 1$ ενώ για $x > 0$ έχουμε $f_n(x) = e^{-nx} \to 0$. Άρα η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο στην f στο $[0, +\infty)$, όπου
$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x = 0 \\ 0, & \text{αν } 0 < x \end{cases}$$
Τώρα πρέπει να εκτιμήσουμε το $\|f_n - f\|_{[0,+\infty)}$.
Αν $x = 0$, τότε $|f_n(0) - f(0)| = |1 - 1| = 0$. Αν $x > 0$, τότε $|f_n(x) - f(x)| = e^{-nx}$. Άρα,
$$\|f_n - f\|_{[0,+\infty)} = \sup\big(\{0\} \cup \{e^{-nx} \,|\, x \in (0, +\infty)\}\big) = \sup\big(\{0\} \cup (0, 1)\big) = \sup[0, 1) = 1.$$
Άρα δεν ισχύει $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο $[0, +\infty)$.
Και σ' αυτήν την περίπτωση μπορούμε να δούμε με έμμεσο τρόπο ότι η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη στο $[0, +\infty)$, αφού κάθε f_n είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ ενώ δεν ισχύει το ίδιο για την οριακή συνάρτηση f.
Αν $a > 0$, τότε
$$\|f_n - f\|_{[a,+\infty)} = \sup\{e^{-nx} \,|\, x \in [a, +\infty)\} = \sup(0, e^{-na}] = e^{-na} \to 0.$$
Άρα $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο $[a, +\infty)$.
Η τρίτη ακολουθία. Για $x = 0$ έχουμε $f_n(0) = 0 \to 0$ και για $x > 0$ έχουμε $f_n(x) = nxe^{-nx} \to 0$. Επομένως, η (f_n) συγκλίνει στη σταθερή συνάρτηση 0 στο $[0, +\infty)$.
Για την ομοιόμορφη σύγκλιση πρέπει να εκτιμηθεί το $\|f_n\|_{[0,+\infty)}$.
Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $|f_n(x)| = f_n(x) = nxe^{-nx}$ είναι αύξουσα στο διάστημα $[0, \frac{1}{n}]$ και φθίνουσα στο $[\frac{1}{n}, +\infty)$. Άρα η μέγιστη τιμή της συνάρτησης είναι στον $x = \frac{1}{n}$ και είναι ίση με $\frac{1}{e}$. Άρα
$$\|f_n\|_{[0,+\infty)} = \max\{nxe^{-nx} \,|\, x \in [0, +\infty)\} = \tfrac{1}{e} \not\to 0.$$
Επομένως δεν ισχύει ομοιόμορφη σύγκλιση στο $[0, +\infty)$.
Παρατηρήστε ότι, σε αντίθεση με τις πρώτες δύο ακολουθίες συναρτήσεων, εδώ δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον ίδιο έμμεσο τρόπο για να αποδείξουμε την μη-ομοιόμορφη σύγκλιση στο $[0, +\infty)$. Πράγματι, κάθε f_n είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ αλλά και η οριακή συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$.
Παίρνουμε, τώρα, τυχόντα $a > 0$ και εκτιμάμε το $\|f_n\|_{[a,+\infty)} = \sup\{nxe^{-nx} \,|\, x \in [a, +\infty)\}$.
Έχουμε δει ότι η $|f_n(x)| = f_n(x) = nxe^{-nx}$ είναι αύξουσα στο διάστημα $[0, \frac{1}{n}]$ και φθίνουσα στο $[\frac{1}{n}, +\infty)$. Άρα η μέγιστη τιμή της nxe^{-nx} στο $[a, +\infty)$ θα υπολογιστεί αφού διακρίνουμε περιπτώσεις ως προς τη θέση του a σε σχέση με τον $\frac{1}{n}$.
Άν $a < \frac{1}{n}$, τότε η συνάρτηση είναι αύξουσα στο $[a, \frac{1}{n}]$ και φθίνουσα στο $[\frac{1}{n}, +\infty)$, οπότε η μέγιστη τιμή της στο $[a, +\infty)$ είναι στον $x = \frac{1}{n}$ και είναι ίση με $\frac{1}{e}$.
Αν $\frac{1}{n} \leq a$, τότε η συνάρτηση είναι φθίνουσα στο $[a, +\infty)$, οπότε η μέγιστη τιμή της στο $[a, +\infty)$ είναι στον $x = a$ και είναι ίση με nae^{-na}.
Άρα, αν $n < \frac{1}{a}$, τότε $\|f_n\|_{[a,+\infty)} = \frac{1}{e}$ και, αν $n \geq \frac{1}{a}$, τότε $\|f_n\|_{[a,+\infty)} = nae^{-na}$.
Βλέπουμε, λοιπόν, ότι, τελικά ισχύει
$$\|f_n\|_{[a,+\infty)} = nae^{-na} \to 0.$$
Άρα $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} 0$ στο $[a, +\infty)$.

Άσκηση 9.2.7. *Έστω $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο* $f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x < 1/(n+1) \text{ ή } 1/n < x \\ (\sin(\pi/x))^2, & \text{αν } 1/(n+1) \leq x \leq 1/n \end{cases}$

Αποδείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει σε κάποια f κατά σημείο στο $\mathbb{R}$ και ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Ποιά είναι η f; Ισχύει $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο $\mathbb{R}$;

Λύση: Αν $x \leq 0$, τότε $f_n(x) = 0 \to 0$. Αν $0 < x$, τότε, όταν ο n γίνει αρκετά μεγάλος, ισχύει $\frac{1}{n} < x$, οπότε $f_n(x) = 0 \to 0$. Άρα για κάθε x έχουμε $f_n(x) \to 0$ και, επομένως, $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} 0$ στο $\mathbb{R}$.
Για την ομοιόμορφη σύγκλιση πρέπει να εκτιμήσουμε το $\|f_n\|_{\mathbb{R}} = \sup\{f_n(x) \,|\, x \in \mathbb{R}\}$.
Παρατηρούμε ότι για $x = \frac{2}{2n+1}$ έχουμε $\frac{1}{n+1} < \frac{2}{2n+1} < \frac{1}{n}$, οπότε $f_n(\frac{2}{2n+1}) = 1$. Άρα

$$\|f_n\|_{\mathbb{R}} = \sup\{f_n(x) \,|\, x \in \mathbb{R}\} \geq f_n\big(\tfrac{2}{2n+1}\big) = 1$$

και, επομένως, δεν ισχύει η ομοιόμορφη σύγκλιση στο $\mathbb{R}$.

Άσκηση 9.2.8. *Έστω $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f_n(x) = n^p x(1-x^2)^n$ για κάθε $x \in [0,1]$. Αποδείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει σε κάποια f κατά σημείο στο $[0,1]$. Για ποιούς p είναι η σύγκλιση ομοιόμορφη; Για ποιούς p ισχύει $\int_0^1 f_n(x)\,dx \to \int_0^1 f(x)\,dx$;*

Λύση: Το πρώτο ερώτημα. Έχουμε

$$f_n(x) = n^p x(1-x^2)^n \to \begin{cases} 0, & \text{αν } x = 0 \\ 0, & \text{αν } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

Πράγματι, αν $0 < x < 1$, τότε θέτουμε $b = \frac{1}{1-x^2} > 1$ και έχουμε το γνωστό όριο $\frac{n^p}{b^n} \to 0$.
Επομένως, $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} 0$ στο $[0,1]$.
Το δεύτερο ερώτημα. Για να βρούμε το

$$\|f_n\|_{[0,1]} = \sup\{|f_n(x)| \,|\, x \in [0,1]\} = \sup\{n^p x(1-x^2)^n \,|\, x \in [0,1]\},$$

θεωρούμε την παράγωγο

$$f_n{}'(x) = n^p(1-x^2)^n - 2n^{p+1}x^2(1-x^2)^{n-1} = n^p(1-x^2)^{n-1}\big(1-(2n+1)x^2\big)$$

και βλέπουμε ότι η f_n είναι μη αρνητική στο $[0,1]$, αύξουσα στο $[0, \frac{1}{\sqrt{2n+1}}]$ και φθίνουσα στο $[\frac{1}{\sqrt{2n+1}}, 1]$. Άρα

$$\|f_n\|_{[0,1]} = f_n\big(\tfrac{1}{\sqrt{2n+1}}\big) = \tfrac{n^p}{\sqrt{2n+1}}\big(\tfrac{2n}{2n+1}\big)^n.$$

Επειδή

$$\big(\tfrac{2n}{2n+1}\big)^n = \tfrac{1}{(1+(1/2n))^n} \to \tfrac{1}{\sqrt{e}},$$

έχουμε

$$\|f_n\|_{[0,1]} = \tfrac{n^{p-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2+(1/n)}}\big(\tfrac{2n}{2n+1}\big)^n \to \begin{cases} +\infty, & \text{αν } p > \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2e}}, & \text{αν } p = \frac{1}{2} \\ 0, & \text{αν } p < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Επομένως, ισχύει $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} 0$ στο $[0,1]$ αν και μόνο αν $p < \frac{1}{2}$.
Το τρίτο ερώτημα. Τέλος,

$$\begin{aligned} \textstyle\int_0^1 f_n(x)\,dx &= n^p \textstyle\int_0^1 x(1-x^2)^n\,dx = \frac{n^p}{2}\int_0^1 (1-t)^n\,dt = \frac{n^p}{2}\int_0^1 u^n\,du = \frac{n^p}{2n+2} \\ &= \tfrac{n^{p-1}}{2+(2/n)} \to \begin{cases} +\infty, & \text{αν } p > 1 \\ 1/2, & \text{αν } p = 1 \\ 0, & \text{αν } p < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Άρα ισχύει $\int_0^1 f_n(x)\,dx \to \int_0^1 0\,dx = 0$ αν και μόνο αν $p < 1$.
Παρατηρήστε ότι το $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} 0$ στο $[0,1]$ ισχύει για λιγότερες τιμές της παραμέτρου p από αυτές για

τις οποίες ισχύει το $\int_0^1 f_n(x)\,dx \to \int_0^1 0\,dx$. Αυτό είναι αναμενόμενο, αφού γνωρίζουμε ότι το $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} 0$ στο $[0,1]$ συνεπάγεται το $\int_0^1 f_n(x)\,dx \to \int_0^1 0\,dx$.

Άσκηση 9.2.9. *Έστω $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$ για κάθε x. Αποδείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει σε κάποια f ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f_n'(x) \to f'(x)$, αν $x \neq 0$, αλλά $f_n'(0) \not\to f'(0)$. Αποδείξτε ότι η (f_n') συγκλίνει σε κάποια g κατά σημείο στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε με τρεις τρόπους ότι η (f_n') δεν συγκλίνει στην g ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.*

Λύση: Το πρώτο ερώτημα. Έχουμε

$$f_n(x) = \tfrac{x}{1+nx^2} \to \begin{cases} 0, & \text{αν } x = 0 \\ 0, & \text{αν } x \neq 0 \end{cases}$$

Άρα $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} 0$ στο $\mathbb{R}$.
Για να υπολογίσουμε το $\|f_n\|_{\mathbb{R}}$, βλέπουμε ότι ισχύει $|f_n(x)| = \frac{|x|}{1+nx^2}$ για κάθε x. Άρα η συνάρτηση $|f_n(x)|$ είναι άρτια και, επομένως, αρκεί να βρούμε το supremum του συνόλου τιμών της στο $[0,+\infty)$. Τώρα, για $x \geq 0$ έχουμε $|f_n(x)| = \frac{x}{1+nx^2}$ και, μελετώντας την παράγωγο της συνάρτησης, βλέπουμε ότι αυτή είναι αύξουσα στο διάστημα $[0, \frac{1}{\sqrt{n}}]$ και φθίνουσα στο $[\frac{1}{\sqrt{n}}, +\infty)$. Άρα

$$\|f_n\|_{\mathbb{R}} = \sup\{|f_n(x)| \,|\, x \in \mathbb{R}\} = f_n\big(\tfrac{1}{\sqrt{n}}\big) = \tfrac{1}{2\sqrt{n}} \to 0$$

και, επομένως, $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} 0$ στο $\mathbb{R}$.
Το δεύτερο ερώτημα. Η μηδενική συνάρτηση 0 είναι, φυσικά, παραγωγίσιμη και $0' = 0$. Όμως,

$$f_n'(x) = \tfrac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2} \to \begin{cases} 1, & \text{αν } x = 0 \\ 0, & \text{αν } x \neq 0 \end{cases}$$

Το τρίτο ερώτημα. Μόλις είδαμε ότι $f_n' \overset{\text{κ.σ.}}{\to} g$ στο $\mathbb{R}$, όπου η g είναι η συνάρτηση με τύπο

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x = 0 \\ 0, & \text{αν } x \neq 0 \end{cases}$$

Το τέταρτο ερώτημα. Πρώτος τρόπος. Κάθε f_n' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ αλλά η g δεν είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Άρα η σύγκλιση της (f_n') στην g δεν είναι ομοιόμορφη στο $\mathbb{R}$.
Δεύτερος τρόπος. Έστω ότι $f_n' \overset{\text{ομ}}{\to} g$ στο $\mathbb{R}$. Επειδή $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} 0$ στο $\mathbb{R}$, συνεπάγεται ότι $0' = g$ στο $\mathbb{R}$. Αυτό είναι άτοπο.
Τρίτος τρόπος. Θα υπολογίσουμε το $\|f_n' - g\|_{\mathbb{R}}$.
Είναι $|f_n'(0) - g(0)| = |1 - 1| = 0$ και άρα

$$\begin{aligned}\{|f_n'(x) - g(x)| \,|\, x \in \mathbb{R}\} &= \{0\} \cup \big\{\tfrac{|1-nx^2|}{(1+nx^2)^2} \,\big|\, x \neq 0\big\} \\ &= \{0\} \cup \big\{\tfrac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2} \,\big|\, 0 < x^2 \leq \tfrac{1}{n}\big\} \cup \big\{\tfrac{nx^2-1}{(1+nx^2)^2} \,\big|\, x^2 \geq \tfrac{1}{n}\big\} \\ &= \{0\} \cup \big\{\tfrac{1-nt}{(1+nt)^2} \,\big|\, 0 < t \leq \tfrac{1}{n}\big\} \cup \big\{\tfrac{nt-1}{(1+nt)^2} \,\big|\, t \geq \tfrac{1}{n}\big\}\end{aligned}$$

Στο $(0, \frac{1}{n}]$ η $\frac{1-nt}{(1+nt)^2}$ είναι γνησίως φθίνουσα και άρα $\{\frac{1-nt}{(1+nt)^2} \,|\, 0 < t \leq \frac{1}{n}\} = [0,1)$. Στο $[\frac{1}{n}, \frac{3}{n}]$ η $\frac{nt-1}{(1+nt)^2}$ είναι αύξουσα και στο $[\frac{3}{n}, +\infty)$ είναι φθίνουσα και άρα $\{\frac{nt-1}{(1+nt)^2} \,|\, t \geq \frac{1}{n}\} = [0, \frac{1}{8}]$. Επομένως,

$$\{|f_n'(x) - g(x)| \,|\, x \in \mathbb{R}\} = \{0\} \cup [0,1) \cup \big[0, \tfrac{1}{8}\big] = [0,1).$$

Άρα $\|f_n' - g\|_{\mathbb{R}} = \sup[0,1) = 1$ και η σύγκλιση της (f_n') στην g δεν είναι ομοιόμορφη στο $\mathbb{R}$.

Άσκηση 9.2.10. *Έστω $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f_n(x) = \frac{1}{n}e^{-n^2x^2}$ για κάθε x. Αποδείξτε ότι $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} 0$ και $f_n' \overset{\text{κ.σ.}}{\to} 0$ στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι, για κάθε $a > 0$, $f_n' \overset{\text{ομ}}{\to} 0$ σε καθένα από τα $(-\infty, -a]$, $[a, +\infty)$*

αλλά όχι στο $[-a, a]$.

Λύση: Το πρώτο ερώτημα. Έχουμε ότι

$$f_n(x) = \tfrac{1}{n}e^{-n^2x^2} \to \begin{cases} 0, & \text{αν } x = 0 \\ 0, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

Άρα $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} 0$ στο $[0, +\infty)$.
Επίσης,

$$\|f_n\|_{[0,+\infty)} = \sup\left\{\tfrac{1}{n}e^{-n^2x^2} \,\middle|\, x \in [0, +\infty)\right\} = \sup\left(0, \tfrac{1}{n}\right] = \tfrac{1}{n},$$

διότι η f_n είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$.
Άρα $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} 0$ στο $[0, +\infty)$.
Τώρα,

$$f_n{}'(x) = -2nxe^{-n^2x^2} \to \begin{cases} 0, & \text{αν } x = 0 \\ 0, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

Άρα $f_n{}' \overset{\text{κ.σ.}}{\to} 0$ στο $[0, +\infty)$.
Το δεύτερο ερώτημα. Για οποιονδήποτε (σταθερό) $a > 0$ έχουμε

$$\|f_n{}'\|_{[a,+\infty)} = \sup\{2nxe^{-n^2x^2} \mid x \in [a, +\infty)\}.$$

Η παράγωγος της συνάρτησης $2nxe^{-n^2x^2}$ είναι

$$2ne^{-n^2x^2} - 4n^3x^2e^{-n^2x^2} = 2ne^{-n^2x^2}(1 - 2n^2x^2),$$

οπότε η $2nxe^{-n^2x^2}$ είναι αύξουσα στο $[0, \frac{1}{\sqrt{2}n}]$ και φθίνουσα στο $[\frac{1}{\sqrt{2}n}, +\infty)$.
Τώρα βλέπουμε ότι, επειδή ο $a > 0$ είναι σταθερός, όταν ο n γίνει αρκετά μεγάλος, θα ισχύει $0 < \frac{1}{\sqrt{2}n} \leq a$. Άρα, όταν ο n γίνει αρκετά μεγάλος, η συνάρτηση $2nxe^{-n^2x^2}$ είναι φθίνουσα στο $[a, +\infty)$, οπότε

$$\|f_n{}'\|_{[a,+\infty)} = 2nae^{-n^2a^2} \to 0$$

και, επομένως, $f_n{}' \overset{\text{ομ}}{\to} 0$ στο $[a, +\infty)$.
Μπορούμε να επαναλάβουμε τα ίδια στο διάστημα $(-\infty, -a]$ ή απλώς να σκεφτούμε ότι η συνάρτηση $|f_n{}'(x)| = 2n|x|e^{-n^2x^2}$ είναι άρτια.
Σε σχέση με το διάστημα $[-a, a]$ βλέπουμε, πρώτον, ότι η συνάρτηση $|f_n{}'(x)| = 2n|x|e^{-n^2x^2}$ είναι άρτια και κατόπιν ότι, όταν ο n γίνει αρκετά μεγάλος, το σημείο $\frac{1}{\sqrt{2}n}$ περιέχεται στο διάστημα $[0, a]$, οπότε η συνάρτηση με τύπο $2nxe^{-n^2x^2}$ είναι αύξουσα στο $[0, \frac{1}{\sqrt{2}n}]$ και φθίνουσα στο $[\frac{1}{\sqrt{2}n}, a]$, οπότε

$$\|f_n{}'\|_{[-a,a]} = \sup\{2nxe^{-n^2x^2} \mid x \in [0, a]\} = \sqrt{2/e} \not\to 0.$$

Άρα $f_n{}' \overset{\text{ομ}}{\not\to} 0$ στο $[-a, a]$.

Άσκηση 9.2.13. *Έστω* $A = B \cup C$ *και* $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ *στο* B *και στο* C. *Αποδείξτε ότι* $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ *στο* A.

Λύση: Έστω $x \in A$. Τότε $x \in B$ ή $x \in C$, οπότε

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_B \quad \text{ή} \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_C,$$

αντιστοίχως. Άρα

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \max\{\|f_n - f\|_B, \|f_n - f\|_C\} \qquad \text{για κάθε } x \in A.$$

Άρα το $\max\{\|f_n - f\|_B, \|f_n - f\|_C\}$ είναι άνω φράγμα του συνόλου $\{|f_n(x) - f(x)| \mid x \in A\}$, οπότε

$$\|f_n - f\|_A \le \max\{\|f_n - f\|_B, \|f_n - f\|_C\}.$$

Παρατήρηση. Ισχύει η ισότητα αλλά αυτό είναι ξεχωριστή άσκηση για όποιον ενδιαφέρεται.
Τώρα, έχουμε

$$\|f_n - f\|_A \le \|f_n - f\|_B + \|f_n - \|_C$$

και, επειδή $\|f_n - f\|_B \to 0$ και $\|f_n - f\|_C \to 0$, συνεπάγεται ότι $\|f_n - f\|_A \to 0$ και άρα $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο A.

Άσκηση 9.2.15. *Έστω $f_n : A \to [a,b]$ και $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο A. Αποδείξτε ότι $f : A \to [a,b]$. Αν, επίσης, η $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a,b]$, αποδείξτε ότι $g \circ f_n \overset{\text{ομ}}{\to} g \circ f$ στο A.*

Λύση: Επειδή ισχύει $a \le f_n(x) \le b$ για κάθε $x \in A$ και κάθε n, παίρνοντας όριο καθώς $n \to +\infty$, βρίσκουμε ότι ισχύει $a \le f(x) \le b$ για κάθε $x \in A$. Άρα $f : A \to [a,b]$.
Έστω τυχών $\epsilon > 0$.
Η g είναι συνεχής στο $[a,b]$ και, επομένως, ομοιόμορφα συνεχής στο $[a,b]$. Άρα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει

$$|g(y') - g(y'')| \le \epsilon \qquad \text{για κάθε } y', y'' \in [a,b] \text{ με } |y' - y''| \le \delta. \tag{14.264}$$

Κατόπιν, επειδή $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο A, υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει

$$|f_n(x) - f(x)| \le \delta \qquad \text{για κάθε } x \in A \text{ και κάθε } n \ge n_0. \tag{14.265}$$

Τώρα, συνδυάζουμε τις (14.264) και (14.265), χρησιμοποιώντας τους $f_n(x)$ και $f(x)$ στη θέση των y' και y'', και συμπεραίνουμε ότι ισχύει $|g(f_n(x)) - g(f(x))| \le \epsilon$ για κάθε $x \in A$ και κάθε $n \ge n_0$.
Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι για τυχόντα $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $|g(f_n(x)) - g(f(x))| \le \epsilon$ για κάθε $x \in A$ και κάθε $n \ge n_0$. Αυτό σημαίνει ότι $g \circ f_n \overset{\text{ομ}}{\to} g \circ f$ στο A.

Άσκηση 9.2.16. *Αν $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο A και κάθε f_n είναι φραγμένη στο A, αποδείξτε ότι η (f_n) είναι ομοιόμορφα φραγμένη στο A.*

Υπόδειξη: Εφαρμόστε το κριτήριο του Cauchy για ομοιόμορφη σύγκλιση με $\epsilon = 1$.

Άσκηση 9.2.17. *Έστω $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο A. Αν κάθε f_n είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A, αποδείξτε ότι και η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A.*

Λύση: Έστω $\epsilon > 0$.
Επειδή $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο A, υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $\|f_{n_0} - f\|_A < \frac{\epsilon}{3}$.
Και επειδή η f_{n_0} είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει

$$|f_{n_0}(x') - f_{n_0}(x'')| < \tfrac{\epsilon}{3} \qquad \text{για κάθε } x', x'' \in A \text{ με } |x' - x''| < \delta.$$

Άρα για κάθε $x', x'' \in A$ με $|x' - x''| < \delta$ ισχύει

$$\begin{aligned} |f(x') - f(x'')| &\le |f(x') - f_{n_0}(x')| + |f_{n_0}(x') - f_{n_0}(x'')| + |f_{n_0}(x'') - f(x'')| \\ &\le \|f_{n_0} - f\|_A + |f_{n_0}(x') - f_{n_0}(x'')| + \|f_{n_0} - f\|_A < \tfrac{\epsilon}{3} + \tfrac{\epsilon}{3} + \tfrac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

Άρα η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A.

Άσκηση 9.2.19. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η f' είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$. Αν ορίσουμε $g_n(x) = n\big(f(x + \frac{1}{n}) - f(x)\big)$ για κάθε x, αποδείξτε ότι $g_n \overset{\text{ομ}}{\to} f'$ στο $\mathbb{R}$.*

Λύση: Έστω τυχών $\epsilon > 0$.
Επειδή η f' είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει

$$|f'(x') - f'(x'')| < \epsilon \qquad \text{για κάθε } x', x'' \text{ με } |x' - x''| < \delta. \tag{14.266}$$

Τώρα, έστω $\frac{1}{n} \leq \delta$. Τότε για κάθε x υπάρχει $\xi \in (x, x+\frac{1}{n})$ ώστε

$$g_n(x) - f'(x) = n\big(f(x+\tfrac{1}{n}) - f(x)\big) - f'(x) = f'(\xi) - f'(x)$$

και, επειδή $|\xi - x| < \frac{1}{n} \leq \delta$, από την (14.266) συνεπάγεται

$$|g_n(x) - f'(x)| = |f'(\xi) - f'(x)| < \epsilon.$$

Αφού για κάθε x ισχύει $|g_n(x) - f'(x)| < \epsilon$, συνεπάγεται ότι $\|g_n - f'\|_{\mathbb{R}} \leq \epsilon$. Αυτό, λοιπόν, ισχύει για κάθε $n \geq \frac{1}{\delta}$ και άρα $\|g_n - f'\|_{\mathbb{R}} \to 0$.

Άσκηση 9.2.20. *Έστω $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο A, η ακολουθία (x_n) είναι στο A, $\xi \in A$ και $x_n \to \xi$. Αν η f είναι συνεχής στον ξ, αποδείξτε ότι $f_n(x_n) \to f(\xi)$.*

Λύση: Το όριο που έχουμε να αποδείξουμε μοιάζει με το $f(x_n) \to f(\xi)$, το οποίο ισχύει διότι η f είναι συνεχής στο ξ.
Γράφουμε

$$|f_n(x_n) - f(\xi)| \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(\xi)|.$$

Γνωρίζουμε ότι

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| \leq \|f_n - f\|_A.$$

Άρα

$$0 \leq |f_n(x_n) - f(\xi)| \leq \|f_n - f\|_A + |f(x_n) - f(\xi)|.$$

Τώρα, $\|f_n - f\|_A \to 0$ και, επειδή η f είναι συνεχής στον ξ, έχουμε $f(x_n) \to f(\xi)$.
Άρα $f_n(x_n) \to f(\xi)$.
Σχόλιο. Ένα σχετικό "αρνητικό" παράδειγμα είναι με τις συναρτήσεις f_n με τύπους

$$f_n(x) = \begin{cases} nx, & \text{αν } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ \frac{1}{nx}, & \text{αν } \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Γνωρίζουμε ότι $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} 0$ στο $[0,1]$ και ότι η συνάρτηση 0 είναι συνεχής στον 0. Έχουμε ακόμη ότι η ακολουθία $(\frac{1}{n})$ είναι στο $[0,1]$ και ότι $\frac{1}{n} \to 0$. Αλλά *δεν* είναι σωστό ότι $f_n(\frac{1}{n}) \to 0$, αφού ισχύει $f_n(\frac{1}{n}) = 1$ για κάθε n.
Εδώ το πρόβλημα είναι ότι η υπόθεση της ομοιόμορφης συνέχειας $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} 0$ στο $[0,1]$ δεν ισχύει.

Άσκηση 9.2.21. [α] *Έστω $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο A, ξ σημείο συσσώρευσης του A και $y_n = \lim_{x\to\xi} f_n(x)$. Αποδείξτε ότι η ακολουθία (y_n) συγκλίνει και $\lim_{x\to\xi} f(x) = \lim_{n\to+\infty} y_n$. Δηλαδή,*

$$\lim_{x\to\xi} \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to\xi} f_n(x).$$

Λύση: Έστω τυχών $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει

$$\|f_n - f_m\|_A \leq \tfrac{\epsilon}{2} \qquad \text{για κάθε } n, m \geq n_0.$$

Τότε, αν $n, m \geq n_0$, για κάθε $x \in A$ ισχύει $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \frac{\epsilon}{2}$, οπότε

$$|y_n - y_m| = \lim_{x\to\xi} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \tfrac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Άρα η (y_n) είναι ακολουθία Cauchy και, επομένως, συγκλίνει.
Έστω, λοιπόν, $y_n \to y$.
Έστω τυχών $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει

$$\|f_n - f\|_A < \tfrac{\epsilon}{3} \quad \text{και} \quad |y_n - y| < \tfrac{\epsilon}{3} \qquad \text{για κάθε } n \geq n_0.$$

Αν ο $x \in A$ είναι κοντά στον ξ, τότε ισχύει $|f_{n_0}(x) - y_{n_0}| < \frac{\epsilon}{3}$ και άρα

$$\begin{aligned}|f(x) - y| &\leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - y_{n_0}| + |y_{n_0} - y| \\ &\leq \|f_{n_0} - f\|_A + |f_{n_0}(x) - y_{n_0}| + |y_{n_0} - y| \\ &< \tfrac{\epsilon}{3} + \tfrac{\epsilon}{3} + \tfrac{\epsilon}{3} = \epsilon.\end{aligned}$$

Άρα $\lim_{x\to\xi} f(x) = y$.

Άσκηση 9.2.22. *Έστω $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[0,1]$ και $f_n(x) = x^n g(x)$ για κάθε $x \in [0,1]$. Αποδείξτε ότι $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} 0$ στο $[0,1]$ αν και μόνο αν $g(1) = 0$.*

Λύση: Αν $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} 0$ στο $[0,1]$, τότε $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} 0$ στο $[0,1]$ και άρα $f_n(1) \to 0$. Επομένως, $g(1) = 0$.
Αντιστρόφως, έστω $g(1) = 0$ και ας πάρουμε τυχόντα $\epsilon > 0$.
Επειδή η g είναι συνεχής στον 1, υπάρχει διάστημα $[a,1] \subseteq [0,1]$ με $a < 1$ ώστε να ισχύει

$$|g(x)| = |g(x) - g(1)| < \epsilon \qquad \text{για κάθε } x \in [a,1].$$

Επίσης, υπάρχει $M > 0$ ώστε να ισχύει $|g(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [0,1]$ και, επειδή $a^n \to 0$, υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει

$$a^n < \frac{\epsilon}{M} \qquad \text{για κάθε } n \geq n_0.$$

Τώρα, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε ότι

$$|f_n(x)| = x^n|g(x)| \leq |g(x)| < \epsilon \qquad \text{για κάθε } x \in [a,1]$$

$$|f_n(x)| = x^n|g(x)| \leq a^n M < \frac{\epsilon}{M} M = \epsilon \qquad \text{για κάθε } x \in [0,a].$$

Επομένως, για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $|f_n(x)| < \epsilon$ για κάθε $x \in [0,1]$ και άρα $\|f_n\|_{[0,1]} \leq \epsilon$.
Άρα $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} 0$ στο $[0,1]$.

Άσκηση 9.2.23. *Έστω $P_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο $\mathbb{R}$. Αν κάθε P_n είναι πολυωνυμική συνάρτηση, αποδείξτε ότι και η f είναι πολυωνυμική συνάρτηση. Πώς σχετίζεται κάθε P_n με το οριακό πολυώνυμο f;*

Λύση: Υπάρχει κάποιος n_0 ώστε να ισχύει $\|P_n - P_m\|_{\mathbb{R}} < 1$ για κάθε $n, m \geq n_0$. Η ανισότητα $\|P_n - P_m\|_{\mathbb{R}} < 1$ συνεπάγεται, φυσικά, ότι ισχύει $|P_n(x) - P_m(x)| < 1$ για κάθε x. Όμως, η συνάρτηση $P_n - P_m$ είναι πολυωνυμική και γνωρίζουμε ότι ένα πολυώνυμο είναι φραγμένο στο $\mathbb{R}$ αν και μόνο αν είναι σταθερό πολυώνυμο. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι για κάθε $n, m \geq n_0$ οι διαφορές $P_n - P_m$ είναι σταθερές συναρτήσεις. Ειδικότερα, ισχύει

$$P_n = P_{n_0} + c_n \qquad \text{για κάθε } n \geq n_0, \tag{14.267}$$

όπου κάθε c_n είναι σταθερή συνάρτηση στο $\mathbb{R}$.
Από $P_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο $\mathbb{R}$ συνεπάγεται $P_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} f$ στο $\mathbb{R}$ και άρα για κάθε x έχουμε ότι $P_{n_0}(x) + c_n = P_n(x) \to f(x)$. Επομένως, $c_n \to f(x) - P_{n_0}(x)$. Αυτό μας λέει ότι η ακολουθία (c_n) συγκλίνει αλλά και ότι ο αριθμός $f(x) - P_{n_0}(x)$ ισούται με το όριο, έστω c, της (c_n) και άρα δεν εξαρτάται από τον x. Δηλαδή η συνάρτηση $f - P_{n_0}$ είναι σταθερή c στο $\mathbb{R}$. Δηλαδή,

$$f = P_{n_0} + c \tag{14.268}$$

και άρα η f είναι πολυωνυμική συνάρτηση.
Μάλιστα, από τις (14.267) και (14.268) συνεπάγεται ότι για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε

$$P_n = f + (c_n - c) = f + a_n,$$

όπου $a_n = c_n - c \to 0$.

Άσκηση 9.2.24. *Έστω $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ και $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} f$ στο $[a,b]$.*

Αν κάθε f_n είναι αύξουσα στο $[a, b]$, αποδείξτε ότι και η f είναι αύξουσα στο $[a, b]$.

Αν, επιπλέον, η f είναι συνεχής στο $[a, b]$, αποδείξτε ότι $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο $[a, b]$.

Λύση: Το πρώτο ερώτημα. Έστω $x_1, x_2 \in [a, b]$ με $x_1 < x_2$. Τότε για κάθε n ισχύει $f_n(x_1) \leq f_n(x_2)$ και, επειδή $f_n(x) \to f(x)$ για κάθε x, συνεπάγεται $f(x_1) \leq f(x_2)$. Άρα η f είναι αύξουσα στο $[a, b]$.

Τώρα, έστω ότι η f είναι και συνεχής στο $[a, b]$. Τότε το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα $[f(a), f(b)]$.

Παίρνουμε τυχόντα $\epsilon > 0$ και χωρίζουμε το διάστημα $[f(a), f(b)]$ σε διαστήματα μήκους $< \epsilon$. Βρίσκουμε, δηλαδή, $y_0, \ldots, y_m$ ώστε να είναι $f(a) = y_0 < y_1 < \ldots < y_{m-1} < y_m = f(b)$ και να ισχύει

$$y_k - y_{k-1} < \tfrac{\epsilon}{2} \qquad \text{για κάθε } k = 1, \ldots, m. \tag{14.269}$$

Τότε υπάρχουν $x_0, \ldots, x_m$ ώστε να είναι $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{m-1} < x_m = b$ και να ισχύει $f(x_k) = y_k$ για κάθε $k = 0, \ldots, m$.

Επειδή $f_n(x_k) \to f(x_k)$ για κάθε $k = 0, \ldots, m$, υπάρχει κάποιος n_0 ώστε να ισχύει

$$|f_n(x_k) - f(x_k)| < \tfrac{\epsilon}{2} \qquad \text{για κάθε } n \geq n_0 \text{ και κάθε } k = 0, \ldots, m. \tag{14.270}$$

Τώρα, έστω τυχών $x \in [a, b]$ οπότε $x \in [x_{k-1}, x_k]$ για κάποιον $k = 1, \ldots, m$.

Επειδή η f και κάθε f_n είναι αύξουσες, από τις (14.269) και (14.270) συνεπάγεται ότι για $n \geq n_0$ έχουμε

$$f_n(x) - f(x) \leq f_n(x_k) - f(x_{k-1}) < f(x_k) + \tfrac{\epsilon}{2} - f(x_{k-1}) = y_k - y_{k-1} + \tfrac{\epsilon}{2} < \epsilon,$$

$$f_n(x) - f(x) \geq f_n(x_{k-1}) - f(x_k) > f(x_{k-1}) - \tfrac{\epsilon}{2} - f(x_k) = y_{k-1} - y_k - \tfrac{\epsilon}{2} > -\epsilon.$$

Από τις δύο αυτές ανισότητες έχουμε $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$. Αυτό ισχύει για κάθε $x \in [a, b]$ και κάθε $n \geq n_0$. Άρα $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο $[a, b]$.

Παρατήρηση. Υποθέσαμε σιωπηρά ότι $f(a) < f(b)$. Προσαρμόστε την απόδειξη στην περίπτωση $f(a) = f(b)$. Θα δουλέψετε κατ' ευθείαν με ολόκληρο το $[a, b]$ χωρίς να χρειαστούν τα ενδιάμεσα σημεία $x_1, \ldots, x_{n-1}$.

Άσκηση 9.2.25. *Αποδείξτε το θεώρημα του Dini: Έστω ότι κάθε $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a, b]$ και ότι η $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a, b]$. Αν $f_n \overset{\text{κ.σ.}}{\to} f$ στο $[a, b]$ και αν ισχύει $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$ και κάθε n, τότε $f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f$ στο $[a, b]$.*

Λύση: Έστω $f_n \overset{\text{ομ}}{\not\to} f$ στο $[a, b]$. Δηλαδή $\|f_n - f\|_{[a,b]} \not\to 0$.

Επομένως, υπάρχει $\epsilon > 0$ και υποακολουθία (f_{n_k}) της (f_n) ώστε να ισχύει $\|f_{n_k} - f\|_{[a,b]} > \epsilon$ για κάθε k.

Επειδή $\|f_{n_k} - f\|_{[a,b]} = \sup\{|f_{n_k}(x) - f(x)| \,|\, x \in [a, b]\}$, συνεπάγεται ότι για κάθε k υπάρχει $x_k \in [a, b]$ ώστε να ισχύει

$$|f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| > \epsilon \qquad \text{για κάθε } k. \tag{14.271}$$

Από το θεώρημα των Bolzano - Weierstrass συνεπάγεται ότι υπάρχει υποακολουθία (x_{k_l}) της (x_k) ώστε $x_{k_l} \to \xi$ για κάποιον $\xi \in [a, b]$.

Επειδή $f_n(\xi) \to f(\xi)$, συνεπάγεται $f_{n_{k_l}}(\xi) \to f(\xi)$. Οπότε υπάρχει l_0 ώστε να ισχύει

$$|f_{n_{k_{l_0}}}(\xi) - f(\xi)| < \epsilon.$$

Όμως, η $f_{n_{k_{l_0}}} - f$ είναι συνεχής στον ξ, οπότε, λόγω της τελευταίας ανισότητας για τον ξ, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει

$$|f_{n_{k_{l_0}}}(x) - f(x)| < \epsilon \qquad \text{για κάθε } x \in [a, b] \text{ με } |x - \xi| < \delta. \tag{14.272}$$

Επειδή ισχύει $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$ και κάθε n, έχουμε ότι για κάθε $x \in [a,b]$ η απόσταση $|f_n(x)-f(x)| = f_n(x)-f(x)$ μειώνεται καθώς αυξάνεται ο n, οπότε από την (14.272) συνεπάγεται ότι ισχύει

$$|f_{n_{k_l}}(x) - f(x)| < \epsilon \qquad \text{για κάθε } x \in [a,b] \text{ με } |x-\xi| < \delta \text{ και κάθε } l \geq l_0. \tag{14.273}$$

Όμως, ισχύει τελικά $|x_{k_l} - \xi| < \delta$, οπότε από την τελευταία σχέση παίρνουμε ότι ισχύει τελικά

$$|f_{n_{k_l}}(x_{k_l}) - f(x_{k_l})| < \epsilon$$

και καταλήγουμε σε άτοπο λόγω της (14.271).

Άσκηση 9.3.2. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b]$ με την ιδιότητα: $\int_a^b x^n f(x)\,dx = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$. Αποδείξτε ότι $f = 0$.*

Λύση: Έστω τυχών $\epsilon > 0$.
Τότε υπάρχει πολυώνυμο $P(x)$ ώστε να ισχύει $|P(x) - f(x)| \leq \epsilon$ για κάθε $x \in [a,b]$.
Βάσει της υπόθεσης, έχουμε $\int_a^b f(x)P(x)\,dx = 0$.
Συνεπάγεται

$$0 \leq \int_a^b (f(x))^2\,dx = \int_a^b f(x)(f(x)-P(x))\,dx \leq \int_a^b |f(x)||f(x)-P(x)|\,dx \leq \epsilon \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Επειδή αυτό ισχύει για κάθε $\epsilon > 0$, συνεπάγεται ότι $\int_a^b (f(x))^2\,dx = 0$ και άρα ισχύει $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a,b]$.

Άσκηση 9.3.3. [α] *Έστω $f : [1,+\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[1,+\infty)$ και έστω ότι το $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ είναι αριθμός. Αποδείξτε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει πολυώνυμο $P(x)$ ώστε να ισχύει $|P(\frac{1}{x}) - f(x)| \leq \epsilon$ για κάθε $x \geq 1$.*

Υπόδειξη: Έστω $l = \lim_{x\to+\infty} f(x)$. Θεωρήστε την $g : (0,1] \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(t) = f(\frac{1}{t})$ για κάθε $t \in (0,1]$. Η g είναι συνεχής στο $(0,1]$. Να ορίσετε $g(0) = l$ και να εφαρμόσετε το θεώρημα του Weierstrass στην $g : [0,1] \to \mathbb{R}$.

Άσκηση 9.3.4. *Ορίζουμε, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$, συναρτήσεις $W_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ επαγωγικά ως εξής: $W_0(x) = 0$ και $W_{n+1}(x) = W_n(x) + \frac{1}{2}\big(x^2 - (W_n(x))^2\big)$ για κάθε x και κάθε $n \geq 0$. Αποδείξτε ότι για κάθε n το $W_n(x)$ είναι άρτιο πολυώνυμο βαθμού 2^n και ότι $W_n(x) \overset{\text{ομ}}{\to} |x|$ στο $[-1,1]$.*
Έστω $\xi \in [a,b]$ και η συνάρτηση $\phi_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } a \leq x \leq \xi \\ x-\xi, & \text{αν } \xi \leq x \leq b \end{cases}$ Αποδείξτε, βάσει του προηγούμένου, ότι υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων (T_n) ώστε $T_n \overset{\text{ομ}}{\to} \phi_\xi$ στο $[a,b]$.
Μια συνάρτηση $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ χαρακτηρίζεται τμηματικά αφφινική αν υπάρχουν $\xi_0, \ldots, \xi_m$ ώστε $a = \xi_0 < \cdots < \xi_m = b$ και η g είναι αφφινική σε καθένα από τα ανοικτά υποδιαστήματα $(\xi_0, \xi_1), \ldots, (\xi_{m-1}, \xi_m)$.
Έστω ότι η $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι τμηματικά αφφινική και συνεχής στο $[a,b]$ και έστω ότι ο τύπος της g σε κάθε $[\xi_{k-1}, \xi_k]$ είναι $g(x) = \lambda_k(x - \xi_{k-1}) + g(\xi_{k-1})$. Τέλος, θεωρήστε $\mu_1 = \lambda_1$ και $\mu_k = \lambda_k - \lambda_{k-1}$ για $k = 2, \ldots, m$.
Αποδείξτε ότι ισχύει $g(x) = g(a) + \mu_1\phi_{\xi_0}(x) + \cdots + \mu_m\phi_{\xi_{m-1}}(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$.
Αποδείξτε ότι υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων (P_n) ώστε $P_n \overset{\text{ομ}}{\to} g$ στο $[a,b]$.
Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b]$ και $\epsilon > 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ τμηματικά αφφινική και συνεχής στο $[a,b]$ ώστε να ισχύει $|g(x) - f(x)| \leq \epsilon$ για κάθε $x \in [a,b]$.
Αποδείξτε με δεύτερο τρόπο το θεώρημα του Weierstrass.

Λύση: Το πρώτο ερώτημα. Έχουμε $W_1(x) = \frac{1}{2}x^2$, οπότε το $W_1(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού $2 = 2^1$. Παρατηρούμε ότι από τον αναδρομικό τύπο $W_{n+1}(x) = W_n(x) + \frac{1}{2}\big(x^2 - (W_n(x))^2\big)$ συνεπάγεται ότι ο βαθμός του $W_{n+1}(x)$ είναι διπλάσιος του βαθμού του $W_n(x)$. Άρα με την αρχή

της επαγωγής είναι προφανές ότι το $W_n(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού 2^n.
Πάλι με την αρχή της επαγωγής βλέπουμε εύκολα ότι το $W_n(x)$ είναι άρτιο πολυώνυμο.
Κατόπιν, έστω $|x| \leq 1$.
Για απλότητα στον συμβολισμό θέτουμε $a_n = W_n(x)$ και έχουμε την ακολουθία (a_n) η οποία ικανοποιεί τον αναδρομικό τύπο

$$a_0 = 0 \qquad \text{και} \qquad a_{n+1} = a_n + \tfrac{1}{2}(x^2 - a_n{}^2) \quad \text{για κάθε } n \geq 0.$$

Τότε είναι $a_1 = \frac{1}{2}x^2$, $a_2 = x^2 - \frac{1}{8}x^4$ και παρατηρούμε ότι $0 = a_0 \leq a_1 \leq a_2$. Έτσι σκεφτόμαστε μήπως η (a_n) είναι αύξουσα και ελέγχουμε αν ισχύει $a_n \leq a_{n+1}$. Αυτό ισοδυναμεί με $a_n \leq a_n + \frac{1}{2}(x^2 - a_n{}^2)$ κι αυτό με $a_n{}^2 \leq x^2$ κι αυτό με $|a_n| \leq |x|$.
Θα προσπαθήσουμε να αποδείξουμε, λοιπόν, ότι ισχύει $0 \leq a_n \leq |x|$ για κάθε $n \geq 0$, οπότε θα έχουμε αποδείξει ότι η (a_n) είναι αύξουσα και, ταυτόχρονα, άνω φραγμένη.
Η $0 \leq a_n \leq |x|$ ισχύει για $n = 0$ και έστω ότι ισχύει για κάποιον $n \geq 0$. Τότε είναι $|a_n| \leq |x|$ και, όπως ήδη αποδείξαμε, συνεπάγεται $a_n \leq a_{n+1}$ και άρα $0 \leq a_{n+1}$. Επίσης, η ανισότητα $a_{n+1} \leq |x|$ ισοδυναμεί με την $a_n + \frac{1}{2}(x^2 - a_n{}^2) \leq |x|$ κι αυτή με την $(|x| - a_n)(2 - |x| - a_n) \geq 0$. Αυτή η τελευταία ανισότητα ισχύει διότι $a_n \leq |x|$ και $a_n + |x| \leq 2|x| \leq 2$.
Άρα η (a_n) είναι αύξουσα και φραγμένη και, επομένως, συγκλίνει. Αν $a_n \to l$, τότε από τον τύπο $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}(x^2 - a_n{}^2)$ συνεπάγεται $l = l + \frac{1}{2}(x^2 - l^2)$, οπότε $l = \pm|x|$. Επειδή ισχύει $a_n \geq 0$ για κάθε n, έχουμε ότι $l \geq 0$ και άρα $l = |x|$.
Επομένως, ισχύει $W_n(x) \to |x|$ για κάθε $x \in [-1, 1]$. Δηλαδή, $W_n(x) \overset{\text{κ.σ.}}{\to} |x|$ στο $[-1, 1]$.
Για την απόδειξη της ομοιόμορφης σύγκλισης χρησιμοποιούμε το ότι ισχύει $0 \leq W_n(x) \leq |x|$ για κάθε $x \in [-1, 1]$ (πρόκειται για την ανισότητα $0 \leq a_n \leq |x|$ που αποδείξαμε προηγουμένως) και ορίζουμε τη συνάρτηση

$$f_n(x) = |x| - W_n(x).$$

Τότε έχουμε ότι ισχύει $0 \leq f_n(x) \leq |x|$ για κάθε $x \in [-1, 1]$ και από τον αναδρομικό τύπο για τους $W_n(x)$ προκύπτει ο τύπος

$$f_{n+1}(x) = f_n(x)\big(1 - |x| + \tfrac{1}{2}f_n(x)\big).$$

Τώρα ορίζουμε μια ακολουθία (ϵ_n) με τον αναδρομικό τύπο

$$\epsilon_0 = 1 \qquad \text{και} \qquad \epsilon_{n+1} = \epsilon_n \tfrac{2+\epsilon_n}{2+2\epsilon_n} \quad \text{για κάθε } n \geq 0.$$

Είναι επαγωγικά σαφές ότι ισχύει $\epsilon_n \geq 0$ για κάθε $n \geq 0$ καθώς και ότι ισχύει $\epsilon_{n+1} \leq \epsilon_n$ για κάθε $n \geq 0$. Άρα η (ϵ_n) συγκλίνει σε αριθμό ≥ 0 και αν $\epsilon_n \to l$ βλέπουμε αμέσως από τον αναδρομικό τύπο ότι $l = 0$. Άρα $\epsilon_n \to 0$.
Τώρα, προφανώς, ισχύει $0 \leq f_0(x) \leq \epsilon_0$ για κάθε $x \in [-1, 1]$.
Έστω ότι ισχύει $0 \leq f_n(x) \leq \epsilon_n$ για κάθε $x \in [-1, 1]$.
Αν $|x| \leq \epsilon_{n+1}$, τότε $0 \leq f_{n+1}(x) \leq |x| \leq \epsilon_{n+1}$. Αν $\epsilon_{n+1} \leq |x| \leq 1$, τότε από τον αναδρομικό τύπο του $f_n(x)$ συνεπάγεται

$$0 \leq f_{n+1}(x) \leq \epsilon_n\big(1 - \epsilon_{n+1} + \tfrac{1}{2}\epsilon_n\big) = \epsilon_{n+1}.$$

Άρα ισχύει $0 \leq f_{n+1}(x) \leq \epsilon_{n+1}$ για κάθε $x \in [-1, 1]$.
Αποδείξαμε, λοιπόν, επαγωγικά ότι ισχύει $0 \leq f_n(x) \leq \epsilon_n$ για κάθε $x \in [-1, 1]$. Αυτό συνεπάγεται ότι $\|f_n\|_{[-1,1]} \leq \epsilon_n$ και, επειδή $\epsilon_n \to 0$, συνεπάγεται $\|f_n\|_{[-1,1]} \to 0$ και άρα $W_n(x) \overset{\text{ομ}}{\to} |x|$ στο $[-1, 1]$.
Το δεύτερο ερώτημα. Έστω $\mu = \max\{\xi - a, b - \xi\}$. Θεωρούμε τα πολυώνυμα

$$T_n(x) = \tfrac{1}{2}(x - \xi) + \tfrac{\mu}{2}W_n\big(\tfrac{x-\xi}{\mu}\big).$$

Αν $x \in [a, b]$, τότε $\frac{x-\xi}{\mu} \in [-1, 1]$ και, επομένως,

$$T_n(x) \overset{\text{ομ}}{\to} \tfrac{1}{2}(x - \xi) + \tfrac{\mu}{2}\big|\tfrac{x-\xi}{\mu}\big| = \phi_\xi(x) \quad \text{στο } [a, b].$$

Το τρίτο ερώτημα. Από τον τύπο της g σε κάθε διάστημα $[\xi_{k-1}, \xi_k]$ έχουμε ότι

$$g(\xi_k) - g(\xi_{k-1}) = \lambda_k(\xi_k - \xi_{k-1}).$$

Τώρα, έστω τυχών $x \in [a, b]$. Τότε $x \in [\xi_{k-1}, \xi_k]$ για κάποιον $k = 1, \ldots, m$, οπότε

$$\begin{aligned} g(a) + \textstyle\sum_{j=1}^m \mu_j \phi_{\xi_{j-1}}(x) &= g(\xi_0) + \textstyle\sum_{j=1}^k \mu_j (x - \xi_{j-1}) \\ &= g(\xi_0) + \mu_1(x - \xi_0) + \textstyle\sum_{j=2}^k (\lambda_j - \lambda_{j-1})(x - \xi_{j-1}) \\ &= g(\xi_0) + \lambda_1(x - \xi_0) + \textstyle\sum_{j=2}^k \lambda_j(x - \xi_{j-1}) - \sum_{j=2}^k \lambda_{j-1}(x - \xi_{j-1}) \\ &= g(\xi_0) + \lambda_1(x - \xi_0) + \textstyle\sum_{j=2}^k \lambda_j(x - \xi_{j-1}) - \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j(x - \xi_j) \\ &= g(\xi_0) + \lambda_1(x - \xi_0) + \textstyle\sum_{j=2}^{k-1} \lambda_j(x - \xi_{j-1}) + \lambda_k(x - \xi_{k-1}) \\ &\quad - \lambda_1(x - \xi_1) - \textstyle\sum_{j=2}^{k-1} \lambda_j(x - \xi_j) \\ &= g(\xi_0) + \lambda_1(\xi_1 - \xi_0) + \textstyle\sum_{j=2}^{k-1} \lambda_j(\xi_j - \xi_{j-1}) + \lambda_k(x - \xi_{k-1}) \\ &= g(\xi_1) + \textstyle\sum_{j=2}^{k-1} (g(\xi_j) - g(\xi_{j-1})) + \lambda_k(x - \xi_{k-1}) \\ &= g(\xi_{k-1}) + \lambda_k(x - \xi_{k-1}) = g(x). \end{aligned}$$

Το τέταρτο ερώτημα. Από το αποτέλεσμα του δεύτερου ερωτήματος συνεπάγεται ότι για κάθε $\phi_{\xi_j}(x)$ υπάρχει αντίστοιχη ακολουθία πολυωνύμων $(T_{j,n}(x))$ ώστε $T_{j,n}(x) \overset{\text{ομ}}{\to} \phi_{\xi_j}(x)$ στο $[a, b]$. Για κάθε n σχηματίζουμε το πολυώνυμο $P_n(x) = g(a) + \sum_{j=1}^m \mu_j T_{j-1,n}(x)$ και έχουμε ότι

$$P_n(x) \overset{\text{ομ}}{\to} g(a) + \textstyle\sum_{j=1}^m \mu_j \phi_{\xi_{j-1}}(x) = g(x) \quad \text{στο } [a, b].$$

Το πέμπτο ερώτημα. Έστω $\epsilon > 0$. Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a, b]$, οπότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$ για κάθε $x', x'' \in [a, b]$ με $|x' - x''| < \delta$.
Υποδιαιρούμε το $[a, b]$ σε υποδιαστήματα $[\xi_{k-1}, \xi_k]$ όπως στο τρίτο ερώτημα, ώστε να ισχύει $\xi_k - \xi_{k-1} < \delta$ για κάθε $k = 1, \ldots, m$.
Κατόπιν, σχηματίζουμε την τμηματικά αφφινική και συνεχή συνάρτηση g όπως στο τρίτο ερώτημα έτσι ώστε να είναι $g(\xi_k) = f(\xi_k)$ για κάθε $k = 0, \ldots, m$.
Τώρα είναι εύκολο να αποδείξει κάποιος ότι ισχύει $|g(x) - f(x)| < \epsilon$ για κάθε $x \in [a, b]$. Μπορείτε να το αποδείξετε σε κάθε υποδιάστημα $[\xi_{k-1}, \xi_k]$.
Το έκτο ερώτημα. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b]$ και $\epsilon > 0$. Τότε, σύμφωνα με το αποτέλεσμα του πέμπτου ερωτήματος, υπάρχει $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ τμηματικά αφφινική και συνεχής στο $[a, b]$ ώστε να ισχύει $|g(x) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{2}$ για κάθε $x \in [a, b]$. Και τότε, σύμφωνα με το αποτέλεσμα του τέταρτου ερωτήματος, υπάρχει πολυώνυμο $P(x)$ ώστε να ισχύει $|P(x) - g(x)| \leq \frac{\epsilon}{2}$ για κάθε $x \in [a, b]$. Άρα ισχύει

$$|P(x) - f(x)| \leq |P(x) - g(x)| + |g(x) - f(x)| \leq \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon \quad \text{για κάθε } x \in [a, b].$$

14.10 Κεφάλαιο 10.

Άσκηση 10.1.1. *Θεωρήστε τη σειρά συναρτήσεων* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x \sin(n^2 x)}{n^2}$.
Αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $s(x)$ *κατά σημείο στο* $\mathbb{R}$.
Αποδείξτε ότι, για κάθε $a > 0$, *η σειρά συγκλίνει στην* $s(x)$ *ομοιόμορφα στο* $[-a, a]$.
Αποδείξτε ότι η $s(x)$ *είναι συνεχής στο* $\mathbb{R}$.

Λύση: Το πρώτο ερώτημα. Πρώτον, θα αποδείξουμε ότι η σειρά συγκλίνει (ως σειρά αριθμών) για κάθε x. Γράφουμε:

$$\textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{x \sin(n^2 x)}{n^2}\right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x|}{n^2} = |x| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty.$$

Άρα η σειρά συγκλίνει, και μάλιστα απολύτως, για κάθε x.
Τώρα ορίζουμε

$$s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x\sin(n^2x)}{n^2} \qquad \text{για κάθε } x$$

και έτσι ορίζεται η συνάρτηση s στο $\mathbb{R}$ και

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x\sin(n^2x)}{n^2} \stackrel{\text{κ.σ.}}{=} s(x) \quad \text{στο } \mathbb{R}.$$

Σχόλιο. Όταν έχουμε να αποδείξουμε ότι μια σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση κατά σημείο σε ένα σύνολο A, παίρνουμε έναν τυχόντα $x \in A$, τόν θεωρούμε σταθερό και αποδεικνύουμε ότι η σειρά (αριθμών) $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ συγκλίνει (φυσικά, σε αριθμό). Κατόπιν, ορίζουμε $s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ για κάθε $x \in A$. Έτσι ορίζεται συνάρτηση s στο A και έχουμε ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ συγκλίνει στην s κατά σημείο στο A και γράφουμε $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \stackrel{\text{κ.σ.}}{=} s$ στο A.

Το δεύτερο ερώτημα. Έστω $a > 0$. Θα εφαρμόσουμε το κριτήριο του Weierstrass στο διάστημα $[-a, a]$. Έχουμε

$$\left|\frac{x\sin(n^2x)}{n^2}\right| \leq \frac{|x|}{n^2} \leq \frac{a}{n^2} \qquad \text{για κάθε } x \in [-a, a]$$

και, επειδή

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2} = a\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty,$$

συνεπάγεται ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x\sin(n^2x)}{n^2}$ συγκλίνει στην s ομοιόμορφα στο $[-a, a]$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x\sin(n^2x)}{n^2} \stackrel{\text{ομ}}{=} s(x) \quad \text{στο } [-a, a].$$

Το τρίτο ερώτημα. Αν είχαμε αποδείξει ότι η σειρά συναρτήσεων συγκλίνει στην s ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$, τότε, επειδή κάθε συνάρτηση $\frac{x\sin(n^2x)}{n^2}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, θα συμπεραίναμε ότι η s είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.
Όμως, αυτό που έχουμε αποδείξει είναι ότι η σειρά συγκλίνει στην s ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα $[-a, a]$. Άρα η s είναι συνεχής σε κάθε διάστημα $[-a, a]$ και από αυτό θα αποδείξουμε ότι η s είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.
Θεωρούμε τυχόντα x_0. Κατόπιν βρίσκουμε έναν a_0 έτσι ώστε ο x_0 να είναι εσωτερικό σημείο του $[-a_0, a_0]$, δηλαδή έτσι ώστε να είναι $x_0 \in (-a_0, a_0)$. Για να το κάνουμε αυτό, αρκεί να πάρουμε $a_0 > |x_0|$.
Τώρα, γνωρίζουμε ότι η s είναι συνεχής στο $[-a_0, a_0]$ και, επομένως, η s είναι συνεχής στον x_0.
Προσέξτε: φροντίζουμε να είναι ο x_0 εσωτερικό σημείο του $[-a_0, a_0]$, διότι, αν ο x_0 ήταν άκρο του $[-a_0, a_0]$, θα συμπεραίναμε ότι η s είναι συνεχής στον x_0 μόνο από τη μία πλευρά του.
Άρα η s είναι συνεχής στον τυχόντα x_0, οπότε είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Άσκηση 10.1.2. [α] *Έστω $p > 2$. Θεωρήστε τη σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^p}$.*
Αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $s(x)$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.
Αποδείξτε ότι η $s(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ότι η $s'(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.
[β] *Θεωρήστε τη σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{(nx+1)^2}$.*
Αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $s(x)$ κατά σημείο στο $[0, +\infty)$.
Αποδείξτε ότι, για κάθε $a > 0$, η σειρά συγκλίνει στην $s(x)$ ομοιόμορφα στο $[a, +\infty)$.
Αποδείξτε ότι η $s(x)$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$.
Αποδείξτε ότι η $s(x)$ δεν είναι συνεχής στον 0 και ότι $\lim_{x\to+\infty} s(x) = 0$ και $\lim_{x\to0+} s(x) = 1$.
Τέλος, αποδείξτε ότι η σειρά δεν συγκλίνει στην s ομοιόμορφα στο $[0, +\infty)$.

Λύση: [α] *Το πρώτο ερώτημα.* Ισχύει $\left|\frac{\sin(nx)}{n^p}\right| \leq \frac{1}{n^p}$ για κάθε x. Επομένως, βάσει του κριτηρίου του Weierstrass, επειδή $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} < +\infty$ (διότι $p > 2 > 1$), η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^p}$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση, έστω $s(x)$, ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

Το δεύτερο ερώτημα. Τώρα θεωρούμε τη σειρά των παραγώγων συναρτήσεων:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d}{dx}\frac{\sin(nx)}{n^p} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^{p-1}}.$$

Επειδή $\left|\frac{\cos(nx)}{n^{p-1}}\right| \leq \frac{1}{n^{p-1}}$ για κάθε x και επειδή $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{p-1}} < +\infty$ (διότι $p-1>1$), η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^{p-1}}$ συγκλίνει, βάσει του κριτηρίου του Weierstrass, σε κάποια συνάρτηση, έστω $t(x)$, ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.
Έχουμε, λοιπόν, ότι η αρχική σειρά συγκλίνει για μία τουλάχιστον τιμή του x (διότι συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$ και, επομένως, για κάθε τιμή του x) και ότι η σειρά των παραγώγων συναρτήσεων συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$. Συμπεραίνουμε ότι η $s(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ότι ισχύει

$$s'(x) = \frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^p} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d}{dx}\frac{\sin(nx)}{n^p} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^{p-1}} \qquad \text{για κάθε } x.$$

Επειδή κάθε συνάρτηση $\frac{\cos(nx)}{n^{p-1}}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και επειδή η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^{p-1}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$, συνεπάγεται ότι η $s'(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.
[β] *Το πρώτο ερώτημα.* Έστω $x \in [0,+\infty)$.
Αν $x=0$, η σειρά γράφεται $\sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0$.
Αν $x>0$, τότε

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{(nx+1)^2} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^2x^2} = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty,$$

οπότε η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{(nx+1)^2}$, ως σειρά μη-αρνητικών όρων, συγκλίνει.
Άρα η σειρά συγκλίνει για κάθε $x \in [0,+\infty)$ και, αν ορίσουμε

$$s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{(nx+1)^2} \qquad \text{για κάθε } x \in [0,+\infty),$$

έχουμε συνάρτηση s στο $[0,+\infty)$ και

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{(nx+1)^2} \overset{\text{κ.σ.}}{=} s(x) \quad \text{στο } [0,+\infty).$$

Το δεύτερο ερώτημα. Έστω $a>0$. Θα εφαρμόσουμε το κριτήριο του Weierstrass στο $[a,+\infty)$.
Έχουμε

$$\left|\frac{x}{(nx+1)^2}\right| = \frac{x}{(nx+1)^2} \leq \frac{x}{n^2x^2} = \frac{1}{xn^2} \leq \frac{1}{an^2} \qquad \text{για κάθε } x \in [a,+\infty)$$

και

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{an^2} = \frac{1}{a}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty.$$

Άρα η σειρά συγκλίνει στην s ομοιόμορφα στο $[a,+\infty)$.
Το τρίτο ερώτημα. Ξέρουμε ότι η σειρά συγκλίνει στην s ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα $[a,+\infty)$, όπου $a>0$, και, επειδή κάθε συνάρτηση $\frac{x}{(nx+1)^2}$ είναι συνεχής στο $[a,+\infty)$, συμπεραίνουμε ότι η s είναι συνεχής σε κάθε $[a,+\infty)$.
Θεωρούμε $x_0 \in (0,+\infty)$ και, κατόπιν, έναν κατάλληλο $a_0>0$ ώστε ο x_0 να είναι εσωτερικό σημείο του $[a_0,+\infty)$. Δηλαδή, παίρνουμε κάποιον a_0 με $0<a_0<x_0$. Επειδή η s είναι συνεχής στο $[a_0,+\infty)$, είναι συνεχής στον x_0.
Άρα η s είναι συνεχής στον τυχόντα $x_0 \in (0,+\infty)$, οπότε είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$.
Για να αποδείξουμε κάτι για την παραγωγισιμότητα της s, πρέπει να κοιτάξουμε τη σειρά των παραγώγων συναρτήσεων, η οποία είναι η

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d}{dx}\frac{x}{(nx+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-nx}{(nx+1)^3}.$$

Για $x=0$ η σειρά αυτή δεν συγκλίνει: $\sum_{n=1}^{+\infty} 1 = +\infty$.
Για τυχόντα $x>0$ έχουμε

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{1-nx}{(nx+1)^3}\right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+nx}{(nx+1)^3} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(nx+1)^2} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2x^2} = \frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty,$$

οπότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1-nx}{(nx+1)^3}$ συγκλίνει.
Άρα η σειρά των παραγώγων συναρτήσεων συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση t κατά σημείο στο $(0,+\infty)$ και η t έχει τύπο

$$t(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1-nx}{(nx+1)^3}\qquad \text{για } x\in(0,+\infty).$$

Τώρα θα δούμε ότι η συνάρτηση t είναι η παράγωγος της συνάρτησης s στο $(0,+\infty)$.
Έστω $a>0$. Θα εφαρμόσουμε το κριτήριο του Weierstrass στη σειρά των παραγώγων συναρτήσεων στο $[a,+\infty)$:

$$\Big|\frac{d}{dx}\frac{x}{(nx+1)^2}\Big|=\Big|\frac{1-nx}{(nx+1)^3}\Big|\le\frac{1+nx}{(nx+1)^3}=\frac{1}{(nx+1)^2}\le\frac{1}{n^2x^2}\le\frac{1}{n^2a^2}\qquad \text{για } x\in[a,+\infty)$$

και, επειδή

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2a^2}=\frac{1}{a^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}<+\infty,$$

συνεπάγεται ότι η σειρά των παραγώγων συναρτήσεων συγκλίνει στη συνάρτηση t ομοιόμορφα στο $[a,+\infty)$.
Επειδή η σειρά των αρχικών συναρτήσεων συγκλίνει για έναν τουλάχιστον $\xi\in[a,+\infty)$ (έχουμε δει ότι συγκλίνει για κάθε $x\in[a,+\infty)$), συνεπάγεται ότι η συνάρτηση s είναι παραγωγίσιμη στο $[a,+\infty)$ και ότι ισχύει $s'(x)=t(x)$ για κάθε $x\in[a,+\infty)$.
Τώρα, όπως στην περίπτωση της συνέχειας, θα εκμεταλλευτούμε ότι ο a είναι τυχών θετικός αριθμός.
Έστω $x_0\in(0,+\infty)$. Θεωρούμε έναν κατάλληλο $a_0>0$ ώστε ο x_0 να είναι εσωτερικό σημείο του $[a_0,+\infty)$. Επειδή η s είναι παραγωγίσιμη στο $[a_0,+\infty)$ και ισχύει $s'(x)=t(x)$ για κάθε $x\in[a,+\infty)$, η s είναι παραγωγίσιμη στον x_0 και ισχύει $s'(x_0)=t(x_0)$.
Επειδή ο $x_0\in(0,+\infty)$ είναι τυχών, η s είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει

$$s'(x)=t(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1-nx}{(nx+1)^3}\qquad \text{για κάθε } x\in(0,+\infty).$$

Για να δούμε ότι η s είναι δύο φορές παραγωγίσμη στο $(0,+\infty)$ ή, ισοδύναμα, ότι η t είναι παραγωγίσμη στο $(0,+\infty)$, επαναλαμβάνουμε ό,τι κάναμε προηγουμένως αλλά για τη σειρά των παραγώγων συναρτήσεων της σειράς συναρτήσεων που ορίζει την t, δηλαδή την

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{d}{dx}\frac{1-nx}{(nx+1)^3}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n^2x-4n}{(nx+1)^4}.$$

Για τυχόντα $x>0$ έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\Big|\frac{2n^2x-4n}{(nx+1)^4}\Big|&\le\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n^2x+4n}{(nx+1)^4}\le\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4n^2x+4n}{(nx+1)^4}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4n}{(nx+1)^3}\le\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4n}{n^3x^3}\\&=\frac{4}{x^3}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}<+\infty,\end{aligned}$$

οπότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n^2x-4n}{(nx+1)^4}$ συγκλίνει.
Άρα η σειρά των παραγώγων συναρτήσεων συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση u κατά σημείο στο $(0,+\infty)$ και η u έχει τύπο

$$u(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n^2x-4n}{(nx+1)^4}\qquad \text{για } x\in(0,+\infty).$$

Τώρα θα δούμε ότι η συνάρτηση u είναι η παράγωγος της συνάρτησης t στο $(0,+\infty)$.
Έστω $a>0$. Θα εφαρμόσουμε το κριτήριο του Weierstrass στη σειρά των παραγώγων συναρτήσεων στο $[a,+\infty)$:

$$\begin{aligned}\Big|\frac{d}{dx}\frac{1-nx}{(nx+1)^3}\Big|&=\Big|\frac{2n^2x-4n}{(nx+1)^4}\Big|\le\frac{2n^2x+4n}{(nx+1)^4}\\&\le\frac{4n^2x+4n}{(nx+1)^4}=\frac{4n}{(nx+1)^3}\le\frac{4n}{n^3x^3}\le\frac{4}{n^2a^3}\qquad \text{για } x\in[a,+\infty)\end{aligned}$$

και, επειδή

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^2 a^3} = \frac{4}{a^3} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty,$$

συνεπάγεται ότι η σειρά των παραγώγων συναρτήσεων συγκλίνει στην συνάρτηση u ομοιόμορφα στο $[a, +\infty)$.
Επειδή η σειρά των αρχικών συναρτήσεων συγκλίνει για έναν τουλάχιστον $\xi \in [a, +\infty)$ (έχουμε δει ότι συγκλίνει για κάθε $x \in [a, +\infty)$), συνεπάγεται ότι η συνάρτηση t είναι παραγωγίσιμη στο $[a, +\infty)$ και ότι ισχύει $t'(x) = u(x)$ για κάθε $x \in [a, +\infty)$.
Τώρα, έστω $x_0 \in (0, +\infty)$. Θεωρούμε έναν κατάλληλο $a_0 > 0$ ώστε ο x_0 να είναι εσωτερικό σημείο του $[a_0, +\infty)$. Η t είναι παραγωγίσιμη στο $[a_0, +\infty)$ και ισχύει $t'(x) = u(x)$ για κάθε $x \in [a, +\infty)$, οπότε η t είναι παραγωγίσιμη στον x_0 και ισχύει $t'(x_0) = u(x_0)$.
Επειδή ο $x_0 \in (0, +\infty)$ είναι τυχών, η t είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει

$$s''(x) = t'(x) = u(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n^2 x - 4n}{(nx+1)^4} \qquad \text{για κάθε } x \in (0, +\infty).$$

Άρα η s είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$.
Αυτή η διαδικασία συνεχίζεται επαγωγικά και έτσι αποδεικνύεται ότι η s είναι άπειρες φορές παραγωγίσμη στο $(0, +\infty)$. Μπορείτε, αν θέλετε, να δοκιμάσετε την επόμενη παράγωγο. Θα παρατηρήσετε ότι και πάλι η κατάσταση θα κριθεί από τη σύγκλιση της σειράς $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Σχόλιο. Αν προσπαθήσουμε να αποδείξουμε ότι η αρχική σειρά συγκλίνει στην s ομοιόμορφα στο $[0, +\infty)$ (και όχι μόνο στο $[a, +\infty)$) θα πρέπει να εφαρμόσουμε το κριτήριο του Weierstrass στο $[0, +\infty)$. Πρέπει, δηλαδή, να βρούμε αριθμούς M_n ώστε να ισχύει $|\frac{x}{(nx+1)^2}| \le M_n$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$ και οι M_n να είναι αρκετά μικροί ώστε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} M_n$ να συγκλίνει. Θα βρούμε, λοιπόν, τον μικρότερο δυνατό M_n, δηλαδή το μικρότερο φράγμα της μη-αρνητικής συνάρτησης $\frac{x}{(nx+1)^2}$ στο $[0, +\infty)$. Υπολογίζουμε την παράγωγο $\frac{d}{dx} \frac{x}{(nx+1)^2} = \frac{1-nx}{(nx+1)^3}$ και βλέπουμε ότι η συνάρτηση $\frac{x}{(nx+1)^2}$ είναι αύξουσα στο διάστημα $[0, \frac{1}{n}]$ και φθίνουσα στο $[\frac{1}{n}, +\infty)$, οπότε έχει μέγιστη τιμή στον $x = \frac{1}{n}$, η οποία είναι ίση με $\frac{1}{4n}$. Επομένως, ο $M_n = \frac{1}{4n}$ είναι ο ελάχιστος M_n που μπορούμε να βρούμε. Δυστυχώς, η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} M_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n}$ δεν συγκλίνει. Άρα το κριτήριο του Weierstrass αποτυγχάνει να αποδείξει ότι η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, +\infty)$.
Προσέξτε: Αυτό δεν σημαίνει ότι η σειρά δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, +\infty)$. Δεν αποκλείεται να υπάρχει άλλος τρόπος, διαφορετικός από το κριτήριο του Weierstrass, που να αποδεικνύει την ομοιόμορφη σύγκλιση της σειράς. Μάλιστα, στο βιβλίο υπάρχουν και τα κριτήρια των Dirichlet και Abel, στο θεώρημα 10.1, που χρησιμεύουν για την απόδειξη της ομοιόμορφης σύγκλισης σειράς συναρτήσεων σε διάφορες περιπτώσεις στις οποίες δεν δίνει συμπέρασμα το κριτήριο του Weierstrass.

Το τέταρτο ερώτημα. Για να υπολογίσουμε τα όρια της s στον 0 και στο $+\infty$, θα προσπαθήσουμε να βρούμε κάποιες καλές εκτιμήσεις για την s και θα θυμηθούμε το ολοκληρωτικό κριτήριο για εκτιμήσεις σειρών.
Παρατηρούμε ότι για κάθε $x > 0$ οι όροι της σειράς $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{(nx+1)^2}$ είναι μη-αρνητικοί και ότι φθίνουν όταν ο n μεγαλώνει. Επομένως, θεωρούμε τη συνάρτηση με τύπο $f(t) = \frac{x}{(tx+1)^2}$ για $t \ge 1$ η οποία είναι φθίνουσα και συνεχής στο $[1, +\infty)$ και ισχύει $f(n) = \frac{x}{(nx+1)^2}$ για κάθε φυσικό n. Άρα

$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{(tx+1)^2}\, dt \le \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{(nx+1)^2} \le \frac{x}{(x+1)^2} + \int_1^{+\infty} \frac{x}{(tx+1)^2}\, dt. \tag{14.274}$$

Υπολογίζουμε το γενικευμένο ολοκλήρωμα:

$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{(tx+1)^2}\, dt = \int_x^{+\infty} \frac{1}{(t+1)^2}\, dt = \frac{1}{x+1}.$$

Άρα η (14.274) γράφεται:

$$\frac{1}{x+1} \le s(x) \le \frac{x}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1} = \frac{2x+1}{(x+1)^2} \qquad \text{για κάθε } x > 0.$$

Από την ιδιότητα παρεμβολής έχουμε αμέσως ότι $\lim_{x\to+\infty} s(x) = 0$ και $\lim_{x\to 0+} s(x) = 1$. Επειδή $s(0) = 0$, η s δεν είναι συνεχής στον 0.
Το όριο $\lim_{x\to+\infty} s(x) = 0$ αποδεικνύεται πιο εύκολα με την ιδιότητα παρεμβολής βάσει της ανισότητας:

$$0 \leq s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{x}{(nx+1)^2} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{x}{n^2x^2} = \tfrac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{1}{n^2} = \tfrac{A}{x},$$

όπου A είναι το άθροισμα (αριθμός) της $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.
Τέλος, υπάρχει κι ένας τρίτος τρόπος να βρούμε το όριο στο $+\infty$, χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα της άσκησης 10.1.21[α]: επειδή μας ενδιαφέρει το όριο στο $+\infty$, περιοριζόμαστε στο διάστημα $[1, +\infty)$ στο οποίο έχουμε ομοιόμορφη σύγκλιση (αντί του 1 μπορούμε να θεωρήσουμε οποιονδήποτε $a > 0$) και τότε έχουμε εναλλαγή των συμβόλων του ορίου στο $+\infty$ και της σειράς και άρα

$$\lim_{x\to+\infty} s(x) = \lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{x}{(nx+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} \tfrac{x}{(nx+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0.$$

Μπορούμε, επίσης, να σκεφτούμε ως εξής (λύνοντας, ουσιαστικά, την άσκηση 10.1.21[α]).
Έστω τυχών $\epsilon > 0$. Επειδή η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[1, +\infty)$, υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει

$$\Big|\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \tfrac{x}{(nx+1)^2}\Big| < \tfrac{\epsilon}{2} \qquad \text{για κάθε } x \in [1, +\infty).$$

Τώρα, επειδή $\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{n_0} \frac{x}{(nx+1)^2} = 0$, υπάρχει $N > 0$ ώστε να ισχύει

$$\Big|\sum_{n=1}^{n_0} \tfrac{x}{(nx+1)^2}\Big| < \tfrac{\epsilon}{2} \qquad \text{για κάθε } x \in [1, +\infty) \text{ με } x > N.$$

Άρα ισχύει

$$|s(x)| \leq \Big|\sum_{n=1}^{n_0} \tfrac{x}{(nx+1)^2}\Big| + \Big|\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \tfrac{x}{(nx+1)^2}\Big| < \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon \quad \text{για κάθε } x \in [1, +\infty) \text{ με } x > N.$$

Άρα $\lim_{x\to+\infty} s(x) = 0$.
Το πέμπτο ερώτημα. Αν η αρχική σειρά συναρτήσεων συνέκλινε στην s ομοιόμορφα στο $[0, +\infty)$, επειδή κάθε συνάρτηση $\frac{x}{(nx+1)^2}$ είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$, θα συνεπαγόταν ότι η s είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$. Όμως, μόλις είδαμε ότι η s δεν είναι συνεχής στον 0.

Άσκηση 10.1.3. *Έστω $p > 0$ και θεωρήστε τη σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^p(1+nx^2)}$.*
Αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $s(x)$ κατά σημείο στο $\mathbb{R}$.
Αποδείξτε ότι, για κάθε $a > 0$, η σειρά συγκλίνει στην $s(x)$ ομοιόμορφα σε καθένα από τα $(-\infty, -a]$ και $[a, +\infty)$.
Αποδείξτε ότι η $s(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to\pm\infty} s(x) = 0$.
Έστω $p > \frac{1}{2}$. Αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει στην $s(x)$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$ και ότι η $s(x)$ είναι συνεχής και στον 0.
Αποδείξτε ότι, αν $p > 1$, τότε η $s(x)$ είναι παραγωγίσιμη και στον 0.
Αν $0 < p < \frac{1}{2}$, αποδείξτε ότι $\lim_{x\to 0+} s(x) = +\infty$. Αν $p = \frac{1}{2}$, βρείτε το $\lim_{x\to 0+} s(x)$ και αποδείξτε ότι η $s(x)$ είναι φραγμένη στο $\mathbb{R}$, αλλά ασυνεχής στον 0.

Λύση: Το πρώτο ερώτημα. Για $x = 0$ η σειρά γίνεται $\sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0$.
Για $x \neq 0$ η σειρά συγκλίνει απολύτως:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \Big|\tfrac{x}{n^p(1+nx^2)}\Big| = \sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{|x|}{n^p(1+nx^2)} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{|x|}{n^{p+1}x^2} = \tfrac{1}{|x|} \sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{1}{n^{p+1}} < +\infty.$$

Άρα η σειρά συγκλίνει κατά σημείο στο $\mathbb{R}$ στη συνάρτηση s με τύπο

$$s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{x}{n^p(1+nx^2)} \qquad \text{για κάθε } x.$$

Το δεύτερο ερώτημα. Για κάθε x στο $(-\infty, -a]$ ή στο $[a, +\infty)$ ισχύει

$$\left|\frac{x}{n^p(1+nx^2)}\right| = \frac{|x|}{n^p(1+nx^2)} \le \frac{|x|}{n^{p+1}x^2} \le \frac{1}{n^{p+1}|x|} \le \frac{1}{n^{p+1}a}.$$

Επειδή

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{p+1}a} = \frac{1}{a}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{p+1}} < +\infty,$$

από το κριτήριο του Weierstrass συνεπάγεται ότι η σειρά συγκλίνει στη συνάρτηση s ομοιόμορφα στο $(-\infty, -a]$ και στο $[a, +\infty)$.

Το τρίτο ερώτημα. Θεωρούμε τη σειρά των παραγώγων συναρτήσεων:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d}{dx}\frac{x}{n^p(1+nx^2)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-nx^2}{n^p(1+nx^2)^2}.$$

Για $x = 0$ η σειρά αυτή γίνεται $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ και συγκλίνει μόνο αν υποθέσουμε, επιπλέον, ότι $p > 1$. Για $x \neq 0$ η σειρά συγκλίνει απολύτως:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{1-nx^2}{n^p(1+nx^2)^2}\right| &\le \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+nx^2}{n^p(1+nx^2)^2} \le \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p(1+nx^2)}\\ &\le \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{p+1}x^2} = \frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{p+1}} < +\infty.\end{aligned}$$

Άρα η σειρά συγκλίνει κατά σημείο στο $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ στη συνάρτηση t με τύπο

$$t(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-nx^2}{n^p(1+nx^2)^2} \qquad \text{για κάθε } x \neq 0.$$

Όπως είπαμε, αν $p > 1$, η σειρά συγκλίνει στην συνάρτηση t με τον ίδιο τύπο κατά σημείο στο $\mathbb{R}$. Τώρα, θα εφαρμόσουμε πάλι το κριτήριο του Weierstrass στα διαστήματα $(-\infty, -a]$ και $[a, +\infty)$ για τη σειρά των παραγώγων. Για $|x| \ge a$ ισχύει

$$\left|\frac{1-nx^2}{n^p(1+nx^2)^2}\right| \le \frac{1+nx^2}{n^p(1+nx^2)^2} = \frac{1}{n^p(1+nx^2)} \le \frac{1}{n^{p+1}x^2} \le \frac{1}{n^{p+1}a^2}.$$

Επειδή

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{p+1}a^2} = \frac{1}{a^2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{p+1}} < +\infty,$$

συνεπάγεται ότι η σειρά συγκλίνει στην t ομοιόμορφα στο $(-\infty, -a]$ και στο $[a, +\infty)$. Συμπεραίνουμε ότι για κάθε x στο $(-\infty, -a]$ ή στο $[a, +\infty)$ ισχύει

$$s'(x) = t(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d}{dx}\frac{x}{n^p(1+nx^2)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-nx^2}{n^p(1+nx^2)^2}.$$

Επειδή ο $a > 0$ είναι τυχών, θα δούμε ότι η τελευταία σχέση ισχύει για κάθε x στο $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Πράγματι, αν $x_0 \neq 0$, θεωρούμε $a_0 > 0$ ώστε ο x_0 να είναι εσωτερικό σημείο του $(-\infty, -a_0]$ ή του $[a_0, +\infty)$. (Αρκεί να είναι $0 < a_0 < |x_0|$.) Τότε, όπως αποδείξαμε, η s είναι παραγωγίσιμη στον x_0 και ισχύει $s'(x_0) = t(x_0)$. Άρα

$$s'(x) = t(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-nx^2}{n^p(1+nx^2)^2} \qquad \text{για κάθε } x \neq 0.$$

Το τέταρτο ερώτημα. Για $x > 0$ έχουμε

$$0 \le s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^p(1+nx^2)} \le \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^{p+1}x^2} = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{p+1}} = \frac{A}{x},$$

όπου A είναι ο αριθμός $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{p+1}}$.
Άρα $\lim_{x\to+\infty} s(x) = 0$ και, επειδή η s είναι περιττή, $\lim_{x\to-\infty} s(x) = 0$.
Μπορούμε να βρούμε το όριο στο $+\infty$, εφαρμόζοντας το αποτέλεσμα της άσκησης 10.1.21[α]. Έχουμε ομοιόμορφη σύγκλιση στο διάστημα $[1, +\infty)$ (μπορούμε να θεωρήσουμε οποιονδήποτε $a > 0$ αντί του 1), οπότε μπορούμε να κάνουμε εναλλαγή των συμβόλων του ορίου στο $+\infty$ και της σειράς και παίρνουμε

$$\lim_{x\to+\infty} s(x) = \lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^p(1+nx^2)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{n^p(1+nx^2)} = \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0.$$

Ακόμη, μπορούμε να κάνουμε το εξής (λύνοντας, ουσιαστικά, την άσκηση 10.1.21[α]).
Έστω τυχών $\epsilon > 0$. Επειδή η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[1, +\infty)$, υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει

$$\big|\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \tfrac{x}{n^p(1+nx^2)}\big| < \tfrac{\epsilon}{2} \qquad \text{για κάθε } x \in [1, +\infty).$$

Τώρα, επειδή $\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{n_0} \frac{x}{n^p(1+nx^2)} = 0$, υπάρχει $N > 0$ ώστε να ισχύει

$$\big|\sum_{n=1}^{n_0} \tfrac{x}{n^p(1+nx^2)}\big| < \tfrac{\epsilon}{2} \qquad \text{για κάθε } x \in [1, +\infty) \text{ με } x > N.$$

Άρα ισχύει

$$|s(x)| \leq \big|\sum_{n=1}^{n_0} \tfrac{x}{n^p(1+nx^2)}\big| + \big|\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \tfrac{x}{n^p(1+nx^2)}\big| < \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon \quad \text{για } x \in [1, +\infty) \text{ με } x > N.$$

Άρα $\lim_{x\to+\infty} s(x) = 0$.
Το πέμπτο ερώτημα. Από την παράγωγο $\frac{d}{dx}\frac{x}{n^p(1+nx^2)} = \frac{1-nx^2}{n^p(1+nx^2)^2}$ βλέπουμε ότι η συνάρτηση $\frac{x}{n^p(1+nx^2)}$ είναι φθίνουσα στο $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{n}}]$, αύξουσα στο $[-\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}]$ και φθίνουσα στο $[\frac{1}{\sqrt{n}}, +\infty)$. Επίσης, έχουμε ότι οι τιμές της στα $-\frac{1}{\sqrt{n}}$ και $\frac{1}{\sqrt{n}}$ είναι $-\frac{1}{2n^p\sqrt{n}}$ και $\frac{1}{2n^p\sqrt{n}}$, αντιστοίχως, και ότι $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{n^p(1+nx^2)} = 0$. Άρα η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της συνάρτησης είναι οι $-\frac{1}{2n^p\sqrt{n}}$ και $\frac{1}{2n^p\sqrt{n}}$, αντιστοίχως, και, επομένως,

$$\big|\tfrac{x}{n^p(1+nx^2)}\big| \leq \tfrac{1}{2n^p\sqrt{n}} = \tfrac{1}{2n^{p+(1/2)}}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν $p > \frac{1}{2}$, τότε

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{1}{2n^{p+(1/2)}} < +\infty,$$

οπότε από το κριτήριο του Weierstrass συνεπάγεται ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^p(1+nx^2)}$ συγκλίνει στην s ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.
Επειδή κάθε συνάρτηση $\frac{x}{n^p(1+nx^2)}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, συνεπάγεται ότι και η συνάρτηση $s(x)$, η οποία ορίζεται από την σειρά, είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.
Το έκτο ερώτημα. Αν $p > 1$, ξανακοιτάμε τη σειρά των παραγώγων και εφαρμόζουμε το κριτήριο του Weierstrass.
Για κάθε x ισχύει

$$\big|\tfrac{1-nx^2}{n^p(1+nx^2)^2}\big| \leq \tfrac{1+nx^2}{n^p(1+nx^2)^2} = \tfrac{1}{n^p(1+nx^2)} \leq \tfrac{1}{n^p}.$$

Επειδή $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} < +\infty$, η σειρά των παραγώγων συγκλίνει στην t ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$. Άρα η s είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.
Το έβδομο ερώτημα. Η συνάρτηση $f(t) = \frac{x}{t^p(1+tx^2)}$ είναι φθίνουσα στο $[1, +\infty)$ και άρα για $x > 0$ έχουμε

$$\int_1^{+\infty} \tfrac{x}{t^p(1+tx^2)}\, dt \leq s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{x}{n^p(1+nx^2)} \leq \tfrac{x}{1+x^2} + \int_1^{+\infty} \tfrac{x}{t^p(1+tx^2)}\, dt. \tag{14.275}$$

Προσπαθούμε να εκτιμήσουμε το $\int_1^{+\infty} \frac{x}{t^p(1+tx^2)}\, dt$ και γράφουμε

$$\int_1^{+\infty} \tfrac{x}{t^p(1+tx^2)}\, dt = \tfrac{1}{x^{1-2p}} \int_{x^2}^{+\infty} \tfrac{1}{u^p(1+u)}\, du = \tfrac{1}{(1-p)x^{1-2p}} \int_{x^{2(1-p)}}^{+\infty} \tfrac{1}{1+s^{1/(1-p)}}\, ds. \tag{14.276}$$

Άρα, αν $0 < x \leq 1$, από την αριστερή ανισότητα (14.275) και από την (14.276) συνεπάγεται

$$s(x) \geq \tfrac{1}{(1-p)x^{1-2p}} \int_1^{+\infty} \tfrac{1}{1+s^{1/(1-p)}}\, ds \geq \tfrac{1}{(1-p)x^{1-2p}} \int_1^{+\infty} \tfrac{1}{2s^{1/(1-p)}}\, ds = \tfrac{1}{2px^{1-2p}}$$

και, επομένως, αν $0 < p < \frac{1}{2}$, συνεπάγεται ότι $\lim_{x\to0+} s(x) = +\infty$.
Αν $p = \frac{1}{2}$, τότε η (14.276) γίνεται

$$\int_1^{+\infty} \tfrac{x}{t^{1/2}(1+tx^2)}\, dt = 2\int_x^{+\infty} \tfrac{1}{1+s^2}\, ds = 2\big(\tfrac{\pi}{2} - \arctan x\big)$$

και από την (14.275) συνεπάγεται ότι για $x > 0$ έχουμε

$$2\big(\tfrac{\pi}{2} - \arctan x\big) \le s(x) \le \tfrac{x}{1+x^2} + 2\big(\tfrac{\pi}{2} - \arctan x\big).$$

Από το κριτήριο παρεμβολής συνεπάγεται ότι $\lim_{x\to 0+} s(x) = \pi$ και άρα η s δεν είναι συνεχής στον 0.
Επίσης, από την τελευταία διπλή σχέση έχουμε αμέσως ότι για $x > 0$ ισχύει $0 \le s(x) \le \frac{1}{2} + \pi$. Άρα η s είναι φραγμένη στο $(0, +\infty)$ και, επειδή η s είναι περιττή και $s(0) = 0$, η s είναι φραγμένη στο $\mathbb{R}$.

Άσκηση 10.1.4. *Έστω η σειρά συναρτήσεων* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$.
Αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $s(x)$ *ομοιόμορφα στο* $\mathbb{R}$.
Αποδείξτε ότι η $s(x)$ *είναι παραγωγίσιμη στο* $\mathbb{R}$. *Ποιά είναι τα σημεία μεγίστου ή ελαχίστου της* $s(x)$;
Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to\pm\infty} s(x) = 0$.

Λύση: Το πρώτο ερώτημα. Χρησιμοποιούμε το κριτήριο του Weierstrass και έχουμε

$$\big|\tfrac{1}{n^2+x^2}\big| = \tfrac{1}{n^2+x^2} \le \tfrac{1}{n^2} \qquad \text{για κάθε } x$$

και

$$\textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty.$$

Άρα η σειρά συγκλίνει στη συνάρτηση s ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$, όπου

$$s(x) = \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+x^2} \qquad \text{για κάθε } x.$$

Το δεύτερο ερώτημα. Επειδή κάθε συνάρτηση $\frac{1}{n^2+x^2}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη στο $\mathbb{R}$, συνεπάγεται ότι και η s είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.
Τώρα θεωρούμε τη σειρά των παραγώγων συναρτήσεων:

$$\textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d}{dx}\frac{1}{n^2+x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-2x}{(n^2+x^2)^2}.$$

Εφαρμόζουμε πάλι το κριτήριο του Weierstrass και έχουμε

$$\big|\tfrac{-2x}{(n^2+x^2)^2}\big| = \tfrac{2|x|}{(n^2+x^2)(n^2+x^2)} \le \tfrac{2|x|}{(n^2+x^2)2n|x|} \le \tfrac{1}{n^3} \qquad \text{για κάθε } x$$

και

$$\textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} < +\infty.$$

Άρα η σειρά συγκλίνει στη συνάρτηση t ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$, όπου

$$t(x) = \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-2x}{(n^2+x^2)^2} \qquad \text{για κάθε } x.$$

Προηγουμένως χρησιμοποιήσαμε την απλή ανισότητα $n^2 + x^2 \ge 2n|x|$. Επειδή υπάρχει περίπτωση να μην "δει" κάποιος αυτήν την ανισότητα, υπάρχει και ο "απ' ευθείας" τρόπος να βρούμε τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης $\big|\frac{-2x}{(n^2+x^2)^2}\big| = \frac{2|x|}{(n^2+x^2)^2}$ στο $\mathbb{R}$ ή, ισοδύναμα (επειδή η συνάρτηση είναι άρτια), της $\frac{2x}{(n^2+x^2)^2}$ στο $[0, +\infty)$. Γι αυτό παραγωγίζουμε και έχουμε

$$\tfrac{d}{dx}\tfrac{2x}{(n^2+x^2)^2} = \tfrac{2(n^2+x^2)^2 - 8x^2(n^2+x^2)}{(n^2+x^2)^4} = \tfrac{2n^2-6x^2}{(n^2+x^2)^3},$$

οπότε η συνάρτηση έχει μέγιστη τιμή στο $\frac{n}{\sqrt{3}}$. Αυτή η μέγιστη τιμή είναι ίση με $\frac{9}{8\sqrt{3}}\frac{1}{n^3}$ και άρα ισχύει

$$\big|\tfrac{-2x}{(n^2+x^2)^2}\big| \le \tfrac{9}{8\sqrt{3}}\tfrac{1}{n^3} \qquad \text{για κάθε } x.$$

Πάλι, λοιπόν, από το κριτήριο του Weierstrass έχουμε ότι η σειρά των παραγώγων συναρτήσεων συγκλίνει στην t ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.
Συμπεραίνουμε ότι η s είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ότι ισχύει

$$s'(x) = t(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{(n^2+x^2)^2} \qquad \text{για κάθε } x.$$

Προφανώς, η $s'(x)$ είναι θετική για $x<0$ και αρνητική για $x>0$. Άρα η s είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$. Άρα η s έχει μέγιστη τιμή στον 0 και δεν έχει ελάχιστη τιμή.
Το τρίτο ερώτημα. Με σταθερό x, θεωρούμε τη συνάρτηση με τύπο $f(u) = \frac{1}{u^2+x^2}$ για $u \geq 1$, η οποία είναι φθίνουσα στο $[1,+\infty)$, οπότε, εφαρμόζοντας το ολοκληρωτικό κριτήριο:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{u^2+x^2}\,du \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+x^2} \leq \frac{1}{1^2+x^2} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{u^2+x^2}\,du.$$

Για $x>0$ υπολογίζουμε:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{u^2+x^2}\,du = x\int_{1/x}^{+\infty} \frac{1}{x^2t^2+x^2}\,dt = \frac{1}{x}\int_{1/x}^{+\infty} \frac{1}{t^2+1}\,dt = \frac{1}{x}\big(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{x}\big).$$

Άρα

$$\frac{1}{x}\big(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{x}\big) \leq s(x) \leq \frac{1}{1^2+x^2} + \frac{1}{x}\big(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{x}\big) \qquad \text{για } x>0.$$

Από το κριτήριο παρεμβολής, $\lim_{x\to+\infty} s(x) = 0$. Επειδή η s είναι άρτια, $\lim_{x\to-\infty} s(x) = 0$.
Το όριο $\lim_{x\to+\infty} s(x) = 0$ αποδεικνύεται με δεύτερο τρόπο ως εξής. Έστω $\epsilon>0$. Επειδή η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, υπάρχει n_0 έτσι ώστε να είναι

$$\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Κατόπιν, επειδή $\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{n^2+x^2} = 0$, υπάρχει $N>0$ ώστε να ισχύει

$$\sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{n^2+x^2} < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{για κάθε } x>N.$$

Συνεπάγεται ότι για κάθε $x>N$ ισχύει

$$0 \leq s(x) = \sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{n^2+x^2} + \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+x^2} < \frac{\epsilon}{2} + \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \quad \text{για κάθε } x>N.$$

Άρα $\lim_{x\to+\infty} s(x) = 0$.
Μπορούμε, επίσης, να εφαρμόσουμε το αποτέλεσμα της άσκησης 10.1.21[α]. Έχουμε ομοιόμορφη σύγκλιση στο $\mathbb{R}$, οπότε μπορούμε να κάνουμε εναλλαγή των συμβόλων του ορίου στο $\pm\infty$ και της σειράς και παίρνουμε

$$\lim_{x\to\pm\infty} s(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{n^2+x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0.$$

Υπάρχει και τέταρτος τρόπος! Γράφουμε για $x \geq 1$ (οπότε $[x] \geq 1$),

$$\begin{aligned} 0 \leq s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+x^2} &= \sum_{n=1}^{[x]} \frac{1}{n^2+x^2} + \sum_{n=[x]+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+x^2} \\ &\leq \sum_{n=1}^{[x]} \frac{1}{x^2} + \sum_{n=[x]+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \\ &\leq \frac{[x]}{x^2} + \frac{1}{([x]+1)^2} + \int_{[x]+1}^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt \\ &\leq \frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{[x]+1} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Από την ιδιότητα παρεμβολής συνεπάγεται $\lim_{x\to+\infty} s(x) = 0$.

Άσκηση 10.1.6. *Θεωρήστε τη σειρά συναρτήσεων* $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^2+n}{n^2}$.
Αποδείξτε ότι η σειρά δεν συγκλίνει απολύτως για καμιά τιμή του x.
Αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $s(x)$ *κατά σημείο στο* $\mathbb{R}$. *Τί είδους συνάρτηση*

είναι η $s(x)$;
Αποδείξτε ότι, για κάθε $a>0$, η σειρά συγκλίνει στην $s(x)$ ομοιόμορφα στο $[-a,a]$.

Λύση: Το πρώτο ερώτημα. Ισχύει

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{x^2+n}{n^2}\right|=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^2+n}{n^2}\geq\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}=+\infty,$$

οπότε η σειρά δεν συγκλίνει απολύτως για καμία τιμή του x.
Το δεύτερο ερώτημα. Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^2+n}{n^2}$ χωρίζεται στις σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^2}{n^2}$ και $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$.
Η πρώτη σειρά συγκλίνει απολύτως και η δεύτερη σειρά συγκλίνει υπό συνθήκη. Άρα η αρχική σειρά συγκλίνει (υπό συνθήκη) για κάθε x και άρα συγκλίνει κατά σημείο στο $\mathbb{R}$ σε συνάρτηση s με τύπο

$$s(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^2+n}{n^2}=ax^2+b\qquad\text{για κάθε } x,$$

όπου $a=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$ και $b=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$.
Το τρίτο ερώτημα. Για τη σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^2}{n^2}$ έχουμε ότι

$$\left|(-1)^n\frac{x^2}{n^2}\right|=\frac{x^2}{n^2}\leq\frac{a^2}{n^2}$$

για κάθε $x\in[-a,a]$ και, επειδή

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a^2}{n^2}=a^2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}<+\infty,$$

από το κριτήριο του Weierstrass συνεπάγεται ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^2}{n^2}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-a,a]$.
Κατόπιν, η $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ συγκλίνει και, επειδή δεν εξαρτάται από τον x, συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-a,a]$.
Άρα το άθροισμα των δύο σειρών, δηλαδή η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^2+n}{n^2}$, συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-a,a]$.

Άσκηση 10.1.7. *Θεωρήστε τη σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\sin(1+\frac{x}{n})$.*
Αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $s(x)$ κατά σημείο στο $\mathbb{R}$.
Αποδείξτε ότι, για κάθε $a>0$, η σειρά συγκλίνει στην $s(x)$ ομοιόμορφα στο $[-a,a]$.
Αποδείξτε ότι η $s(x)$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Υπόδειξη: Γράψτε $\sin(1+\frac{x}{n})=\sin 1\cos\frac{x}{n}+\cos 1\sin\frac{x}{n}=\sin 1+\sin 1\,(\cos\frac{x}{n}-1)+\cos 1\sin\frac{x}{n}$. Άρα η $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\sin(1+\frac{x}{n})$ είναι συνδυασμός των $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}(\cos\frac{x}{n}-1)$ και $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\sin\frac{x}{n}$. Για τη δεύτερη σειρά χρησιμοποιήστε την ανισότητα $0\leq 1-\cos t\leq\frac{t^2}{2}$. Οι σειρές των παραγώγων συναρτήσεων τάξης ≥ 1 είναι άμεσα διαχειρίσιμες με το κριτήριο του Weierstrass.

Άσκηση 10.1.12. *Θεωρήστε τη σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+x}$.*
Αποδείξτε ότι η σειρά δεν συγκλίνει απολύτως για καμιά τιμή του $x\in[0,+\infty)$.
Αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $t(x)$ ομοιόμορφα στο $[0,+\infty)$.
Αποδείξτε ότι η $t(x)$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$.
Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to 0+}t(x)=\log 2$ και $\lim_{x\to+\infty}t(x)=0$.
Αποδείξτε ότι η $t(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα και γνησίως κυρτή στο $[0,+\infty)$.

Λύση: Το πρώτο ερώτημα. Για κάθε $x\geq 0$ έχουμε

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n+x}\right|=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n+x}\geq\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n+[x]+1}=\sum_{k=[x]+2}^{+\infty}\frac{1}{k}=+\infty,$$

διότι η τελευταία σειρά διαφέρει από την $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}$ μόνο ως προς κάποιους αρχικούς όρους.

Το δεύτερο ερώτημα. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f_n(x) = (-1)^{n-1}$ και $g_n(x) = \frac{1}{n+x}$ στο διάστημα $[0, +\infty)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
Τα μερικά αθροίσματα $s_n(x) = f_1(x)+\cdots+f_n(x)$ έχουν τιμές 1 ή 0 για κάθε $x \in [0, +\infty)$ και για κάθε n και, επομένως, η ακολουθία (s_n) των μερικών αθροισμάτων είναι ομοιόμορφα φραγμένη στο $[0, +\infty)$. Επίσης, για κάθε $x \in [0, +\infty)$ η ακολουθία αριθμών $(g_n(x))$ είναι φθίνουσα και, τέλος, ισχύει $g_n(x) \overset{\text{ομ}}{\to} 0$ στο $[0, +\infty)$. Πράγματι, ισχύει

$$|g_n(x)| = \left|\tfrac{1}{n+x}\right| = \tfrac{1}{n+x} \leq \tfrac{1}{n} \qquad \text{για κάθε } x \in [0, +\infty),$$

οπότε $\|g_n\|_{[0,+\infty)} \leq \frac{1}{n}$ και άρα $\|g_n\|_{[0,+\infty)} \to 0$.
Άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+x} = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)g_n(x)$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $t(x)$ ομοιόμορφα στο $[0, +\infty)$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{(-1)^{n-1}}{n+x} \overset{\text{ομ}}{=} t(x) \quad \text{στο } [0, +\infty).$$

Το τρίτο ερώτημα. Θεωρούμε τη σειρά των παραγώγων συναρτήσεων

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{d}{dx}\tfrac{(-1)^{n-1}}{n+x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{(-1)^n}{(n+x)^2}$$

και εφαρμόζουμε σ' αυτήν το κριτήριο του Weierstrass. Ισχύει $\left|\frac{(-1)^n}{(n+x)^2}\right| = \frac{1}{(n+x)^2} \leq \frac{1}{n^2}$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$. Άρα η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+x)^2}$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο $[0, +\infty)$ και η συνάρτηση αυτή είναι η παράγωγος της $t(x)$ στο $[0, +\infty)$. Δηλαδή,

$$t'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{(-1)^n}{(n+x)^2} \qquad \text{για κάθε } x \in [0, +\infty).$$

Με τον ίδιο τρόπο (κάντε το εσείς) αποδεικνύεται ότι η σειρά των παραγώγων συναρτήσεων της τελευταίας σειράς συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, +\infty)$ και άρα

$$t''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{(-1)^{n-1}}{(n+x)^3} \qquad \text{για κάθε } x \in [0, +\infty).$$

Το τέταρτο ερώτημα. Κάθε συνάρτηση $\frac{(-1)^{n-1}}{n+x}$ είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ και, επειδή η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+x}$ συγκλίνει στην $t(x)$ ομοιόμορφα στο $[0, +\infty)$, συνεπάγεται ότι και η $t(x)$ είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$. Άρα

$$\lim_{x\to 0+} t(x) = t(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{(-1)^{n-1}}{n} = \log 2.$$

Τώρα, έστω τυχών $\epsilon > 0$. Επειδή η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+x}$ συγκλίνει στην $t(x)$ ομοιόμορφα στο $[0, +\infty)$, υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει

$$\left|\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \tfrac{(-1)^{n-1}}{n+x}\right| \leq \tfrac{\epsilon}{2} \qquad \text{για κάθε } x \geq 0.$$

Επίσης, επειδή $\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{n_0} \frac{(-1)^{n-1}}{n+x} = 0$, υπάρχει $N > 0$ ώστε να ισχύει

$$\left|\sum_{n=1}^{n_0} \tfrac{(-1)^{n-1}}{n+x}\right| < \tfrac{\epsilon}{2} \qquad \text{για κάθε } x > N.$$

Συμπεραίνουμε ότι ισχύει

$$|t(x)| \leq \left|\sum_{n=1}^{n_0} \tfrac{(-1)^{n-1}}{n+x}\right| + \left|\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \tfrac{(-1)^{n-1}}{n+x}\right| < \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon \qquad \text{για κάθε } x > N.$$

Επομένως, $\lim_{x\to+\infty} t(x) = 0$.
Τέλος, μπορούμε να εφαρμόσουμε το αποτέλεσμα της άσκησης 10.1.21[α]. Έχουμε ομοιόμορφη σύγκλιση στο $[0, +\infty)$, οπότε μπορούμε να κάνουμε εναλλαγή των συμβόλων του ορίου στο $+\infty$ και της σειράς και παίρνουμε

$$\lim_{x\to+\infty} t(x) = \lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{(-1)^{n-1}}{n+x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} \tfrac{(-1)^{n-1}}{n+x} = \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0.$$

Το πέμπτο ερώτημα. Για κάθε k και κάθε $x \geq 0$ έχουμε

$$\sum_{n=1}^{2k} \frac{(-1)^n}{(n+x)^2} = -\big(\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{(2+x)^2}\big) - \cdots - \big(\frac{1}{(2k-1+x)^2} - \frac{1}{(2k+x)^2}\big) < 0,$$

αφού κάθε παρένθεση είναι αρνητική. Επειδή για κάθε $x \geq 0$ ισχύει

$$t'(x) = \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=1}^{2k} \frac{(-1)^n}{(n+x)^2}$$

και επειδή η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων με άρτιο δείκτη $\sum_{n=1}^{2k} \frac{(-1)^n}{(n+x)^2}$ είναι γνησίως φθίνουσα, συνεπάγεται ότι ισχύει $t'(x) < 0$ για κάθε $x \geq 0$. Άρα η t είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$.
Με τον ίδιο τρόπο, δηλαδή παρατηρώντας τα μερικά αθροίσματα με άρτιο δείκτη της σειράς $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+x)^3}$, συμπεραίνουμε ότι ισχύει $t''(x) > 0$ για κάθε $x \geq 0$, οπότε η t είναι γνησίως κυρτή στο $[0, +\infty)$.

Άσκηση 10.1.13. *Θεωρήστε τη σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\log(1+\frac{x}{n})$.*
Αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $s(x)$ κατά σημείο στο $[0, +\infty)$.
Αποδείξτε ότι, για κάθε $a > 0$, η σειρά συγκλίνει στην $s(x)$ ομοιόμορφα στο $[0, a]$.
Αποδείξτε ότι η $s(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$.
Ποιά είναι η σχέση ανάμεσα στη συνάρτηση $s(x)$ και στη συνάρτηση $t(x)$ της άσκησης 10.1.12;

Λύση: Το πρώτο ερώτημα. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f_n(x) = (-1)^{n-1}$ και $g_n(x) = \log(1+\frac{x}{n})$ στο διάστημα $[0, +\infty)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
Αρχικά σταθεροποιούμε τυχόντα $x \geq 0$. Τα μερικά αθροίσματα $s_n(x) = f_1(x) + \cdots + f_n(x)$ έχουν τιμές 1 ή 0 για κάθε n και, επομένως, η ακολουθία $(s_n(x))$ των μερικών αθροισμάτων είναι φραγμένη. Επίσης, η ακολουθία αριθμών $(g_n(x))$ είναι φθίνουσα και συγκλίνει στον 0. Άρα για τυχόντα $x \geq 0$ η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\log(1+\frac{x}{n}) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)g_n(x)$ συγκλίνει. Επομένως, ορίζεται συνάρτηση s στο $[0, +\infty)$ με τύπο

$$s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\log\big(1+\frac{x}{n}\big) \qquad \text{για κάθε } x \in [0, +\infty)$$

και η σειρά συγκλίνει στην s κατά σημείο στο $[0, +\infty)$.
Το δεύτερο ερώτημα. Τώρα, έστω $a > 0$.
Τα μερικά αθροίσματα $s_n(x) = f_1(x) + \cdots + f_n(x)$ έχουν τιμές 1 ή 0 για κάθε $x \in [0, a]$ και για κάθε n και, επομένως, η ακολουθία (s_n) των μερικών αθροισμάτων είναι ομοιόμορφα φραγμένη στο $[0, a]$. (Αυτό ισχύει και σε ολόκληρο το $[0, +\infty)$.) Επίσης, για κάθε $x \in [0, a]$ η ακολουθία αριθμών $(g_n(x))$ είναι φθίνουσα και, τέλος, ισχύει $g_n(x) \overset{\text{ομ}}{\to} 0$ στο $[0, a]$. (Αυτό δεν ισχύει σε ολόκληρο το $[0, +\infty)$.) Πράγματι, ισχύει

$$|g_n(x)| = \big|\log\big(1+\frac{x}{n}\big)\big| = \log\big(1+\frac{x}{n}\big) \leq \frac{x}{n} \leq \frac{a}{n} \qquad \text{για κάθε } x \in [0, a],$$

οπότε $\|g_n\|_{[0,a]} \leq \frac{a}{n}$ και άρα $\|g_n\|_{[0,a]} \to 0$.
Άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\log(1+\frac{x}{n}) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)g_n(x)$ συγκλίνει στην συνάρτηση $s(x)$ ομοιόμορφα στο $[0, a]$.
Το τρίτο και το τέταρτο ερώτημα. Η σειρά των παραγώγων συναρτήσεων

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d}{dx}(-1)^{n-1}\log(1+\frac{x}{n}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+x}$$

υπάρχει στην άσκηση 10.1.12. Τα υπόλοιπα ανάγονται στην λύση της άσκησης 10.1.12.

Άσκηση 10.1.14. [α] *Έστω $f_n(x) = \frac{(1-x)x^n}{\log(n+1)}$ για κάθε $x \in [0, 1]$ και κάθε n. Υπολογίστε τον $M_n = \|f_n\|_{[0,1]}$ για κάθε n και αποδείξτε ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, 1]$ ενώ η $\sum_{n=1}^{+\infty} M_n$ αποκλίνει.*

[β] *Έστω* $f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } 0 \le x \le 1/(2n+1) \text{ ή } 1/(2n-1) \le x \le 1 \\ (4n+2)x - 2, & \text{αν } 1/(2n+1) \le x \le 1/(2n) \\ 2 - (4n-2)x, & \text{αν } 1/(2n) \le x \le 1/(2n-1) \end{cases}$ *για κάθε* n. *Υπολογίστε τον* $M_n = \|f_n\|_{[0,1]}$ *για κάθε* n *και αποδείξτε ότι η σειρά συναρτήσεων* $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ *συγκλίνει ομοιόμορφα στο* $[0,1]$ *ενώ η* $\sum_{n=1}^{+\infty} M_n$ *αποκλίνει.*

Υπόδειξη: [α] Για την ομοιόμορφη σύγκλιση χρησιμοποιήστε το θεώρημα 10.1.

[β] Παρατηρήστε ότι τα διαστήματα $[\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n-1}]$ είναι ανά δύο ξένα.

Άσκηση 10.1.15. *Έστω γνησίως αύξουσα ακολουθία* (x_n) *ώστε η σειρά* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x_n}$ *να συγκλίνει, οπότε* $x_n \to +\infty$. *Θεωρήστε τη σειρά συναρτήσεων* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x_n - x}$.

Αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $s(x)$ *κατά σημείο στο σύνολο* $A = \mathbb{R} \setminus \{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$.

Αποδείξτε ότι, για κάθε a, *η σειρά συγκλίνει στην* $s(x)$ *ομοιόμορφα στο* $A \cap (-\infty, a]$.

Αποδείξτε ότι για κάθε n *είναι* $\lim_{x \to x_n-} s(x) = +\infty$ *και* $\lim_{x \to x_n+} s(x) = -\infty$. *Επίσης, αποδείξτε ότι* $\lim_{x \to -\infty} s(x) = 0$.

Αποδείξτε ότι η $s(x)$ *είναι παραγωγίσιμη στο* $(-\infty, x_1)$ *και σε κάθε* (x_n, x_{n+1}). *Επίσης, ότι η* $s(x)$ *είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα προηγούμενα διαστήματα.*

Λύση: Το πρώτο ερώτημα. Επειδή $x_n \to +\infty$, ισχύει τελικά $x_n > 0$. Άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x_n}$ είναι, από κάποιον όρο και πέρα, σειρά θετικών όρων. Επίσης, για τυχόντα (σταθερό) $x \in A$, ισχύει τελικά $x_n > x$, οπότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x_n - x}$ είναι, από κάποιον όρο και πέρα, σειρά θετικών όρων. Επομένως, μπορούμε να συγκρίνουμε τις δύο σειρές ως εξής:

$$\frac{1/(x_n - x)}{1/x_n} = \frac{x_n}{x_n - x} \to 1.$$

Επειδή η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x_n}$ συγκλίνει, συνεπάγεται ότι και η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x_n - x}$ συγκλίνει. Άρα η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x_n - x}$ συγκλίνει στη συνάρτηση s κατά σημείο στο A, όπου η s έχει τύπο

$$s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x_n - x} \qquad \text{για κάθε } x \in A.$$

Το δεύτερο ερώτημα. Έστω τυχών a. Ισχύει τελικά $x_n > a$, οπότε υπάρχει n_0 ώστε να είναι $x_{n_0} > a$ (και άρα $x_n > a$ για κάθε $n \ge n_0$). Για κάθε $n \ge n_0$ ισχύει

$$\left|\frac{1}{x_n - x}\right| = \frac{1}{x_n - x} \le \frac{1}{x_n - a} \qquad \text{για κάθε } x \in A \cap (-\infty, a].$$

Επειδή $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{1}{x_n - a} < +\infty$, από το κριτήριο του Weierstrass συνεπάγεται ότι η $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{1}{x_n - x}$ συγκλίνει στη συνάρτηση $s(x) - \sum_{n=1}^{n_0-1} \frac{1}{x_n - x}$ ομοιόμορφα στο $A \cap (-\infty, a]$. Άρα η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x_n - x}$ συγκλίνει στη συνάρτηση $s(x)$ ομοιόμορφα στο $A \cap (-\infty, a]$.

Τώρα θα δούμε ότι η s είναι συνεχής στο A. Πράγματι, έστω τυχών $x_0 \in A$. Θεωρούμε a_0 ώστε ο x_0 να είναι εσωτερικό σημείο του $(-\infty, a_0]$. Επειδή κάθε συνάρτηση $\frac{1}{x_n - x}$ είναι συνεχής στον x_0 και η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στο $A \cap (-\infty, a]$ και ο x_0 είναι εσωτερικό σημείο κάποιου από τα διαστήματα που αποτελούν το $A \cap (-\infty, a]$, συνεπάγεται ότι η s είναι συνεχής στον x_0.

Το τρίτο ερώτημα. Έστω τυχών n_0. Θεωρούμε τη σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x_n - x}$ από την οποία έχουμε παραλείψει τον όρο $\frac{1}{x_{n_0} - x}$. Δηλαδή, από την αρχική ακολουθία (x_n) παραλείπουμε τον όρο x_{n_0}. Αυτά που έχουμε αποδείξει ισχύουν και για τη νέα σειρά συναρτήσεων. Η νέα σειρά συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση σ στο σύνολο $A' = A \cup \{x_{n_0}\}$ και η σ είναι συνεχής στο A'. Ειδικότερα, η σ είναι συνεχής στον x_{n_0}. Όμως, είναι φανερό ότι ισχύει

$$s(x) = \sigma(x) + \frac{1}{x_{n_0} - x} \qquad \text{για κάθε } x \in A.$$

Άρα

$$\lim_{x \to x_{n_0}-} s(x) = \lim_{x \to x_{n_0}-} \sigma(x) + \lim_{x \to x_{n_0}-} \frac{1}{x_{n_0} - x} = \sigma(x_{n_0}) + (+\infty) = +\infty$$

και, ομοίως, $\lim_{x\to x_{n_0}+} s(x) = -\infty$.
Τέλος, θεωρούμε τον $a = x_1 - 1$ και τυχόντα $\epsilon > 0$. Επειδή η σειρά συγκλίνει στην s ομοιόμορφα στο $(-\infty, a]$, υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει

$$\big|\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \frac{1}{x_n - x}\big| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{για κάθε } x \in (-\infty, a].$$

Επίσης, επειδή $\lim_{x\to-\infty} \sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{x_n-x} = 0$, υπάρχει $N > 0$ ώστε να ισχύει

$$\big|\sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{x_n - x}\big| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{για κάθε } x \in (-\infty, a] \text{ με } x < -N.$$

Συνεπάγεται ότι ισχύει

$$|s(x)| \leq \big|\sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{x_n-x}\big| + \big|\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \frac{1}{x_n-x}\big| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \qquad \text{για κάθε } x \in (-\infty, a] \text{ με } x < -N.$$

Άρα $\lim_{x\to-\infty} s(x) = 0$.
Μπορούμε, επίσης, να εφαρμόσουμε το αποτέλεσμα της άσκησης 10.1.21[α]. Παίρνουμε τον $a = x_1 - 1$ και, λόγω ομοιόμορφης σύγκλισης στο $(-\infty, a]$, μπορούμε να κάνουμε εναλλαγή των συμβόλων του ορίου στο $-\infty$ και της σειράς και παίρνουμε

$$\lim_{x\to-\infty} t(x) = \lim_{x\to-\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x_n-x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x_n-x} = \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0.$$

Το τέταρτο ερώτημα. Η σειρά των παραγώγων συναρτήσεων είναι η

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d}{dx}\frac{1}{x_n-x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x_n-x)^2}.$$

Είναι εύκολο να δούμε, ακριβώς όπως πριν, ότι η σειρά αυτή συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση t κατά σημείο στο σύνολο A. Χρησιμοποιούμε γι αυτόν τον σκοπό το ότι $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{{x_n}^2} < +\infty$. Επίσης, βλέπουμε το ίδιο εύκολα ότι η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη στο $A \cap (-\infty, a]$ για κάθε a.
Επομένως, για κάθε a η s είναι παραγωγίσιμη στο $A \cap (-\infty, a]$ και ισχύει $s'(x) = t(x)$ για κάθε $x \in A \cap (-\infty, a]$.
Τώρα, θεωρούμε τυχόντα x_0 και παίρνουμε a_0 ώστε ο x_0 να είναι εσωτερικό σημείο του $A \cap (-\infty, a_0]$. Έτσι έχουμε ότι $s'(x_0) = t(x_0)$.
Άρα ισχύει

$$s'(x) = t(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x_n-x)^2} \qquad \text{για κάθε } x \in A.$$

Άρα ισχύει $s'(x) > 0$ για κάθε $x \in A$, οπότε η s είναι είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, x_1)$ και σε κάθε (x_n, x_{n+1}).

Άσκηση 10.1.16. *Θεωρήστε τις σειρές συναρτήσεων* $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n \cos(nx)$ *και* $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n \sin(nx)$.
[α] *Έστω* $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| < +\infty$. *Αποδείξτε ότι οι δύο σειρές συγκλίνουν σε δύο αντίστοιχες συναρτήσεις* $c(x)$ *και* $s(x)$ *ομοιόμορφα στο* $\mathbb{R}$. *Αποδείξτε ότι οι* $c(x)$ *και* $s(x)$ *είναι συνεχείς στο* $\mathbb{R}$ *και περιοδικές με περίοδο* 2π.
Ως παραδείγματα θεωρήστε τις σειρές συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^p}$ *και* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^p}$ *με* $p > 1$ *καθώς και τις* $\sum_{n=1}^{+\infty} r^n \cos(nx)$ *και* $\sum_{n=1}^{+\infty} r^n \sin(nx)$ *με* $0 \leq r < 1$.
[β] *Έστω ότι η* (x_n) *είναι φθίνουσα, ότι* $x_n \to 0$, *οπότε* $x_n \geq 0$ *για κάθε* n, *και ότι* $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = +\infty$.
Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n \cos(nx)$ *συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση* $c(x)$ *κατά σημείο στο διάστημα* $(m2\pi, (m+1)2\pi)$ *για κάθε* $m \in \mathbb{Z}$ *και ότι η* $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n \sin(nx)$ *συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση* $s(x)$ *κατά σημείο στο* $\mathbb{R}$.
Αποδείξτε ότι, για κάθε $\delta \in (0, \pi]$, *οι* $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n \cos(nx)$ *και* $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n \sin(nx)$ *συγκλίνουν στις* $c(x)$ *και* $s(x)$ *ομοιόμορφα στο* $[m2\pi + \delta, (m+1)2\pi - \delta]$ *για κάθε* $m \in \mathbb{Z}$. *Αποδείξτε ότι οι* $c(x)$ *και* $s(x)$ *είναι συνεχείς στο* $(m2\pi, (m+1)2\pi)$ *για κάθε* $m \in \mathbb{Z}$.
Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n \sin(nx)$ *συγκλίνει ομοιόμορφα στο* $\mathbb{R}$ *αν και μόνο αν* $nx_n \to 0$.
Εξετάστε, σε σχέση με τα προηγούμενα στο [β], τις δύο σειρές συναρτήσεων στις περιπτώσεις των ακολουθιών $(\frac{1}{n})$ *και* $(\frac{1}{n \log n})$.

[γ] *Έστω $0 \le r < 1$. Αποδείξτε ότι οι σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n}{n} \cos(nx)$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n}{n} \sin(nx)$ συγκλίνουν σε κάποιες αντίστοιχες συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$. Χρησιμοποιώντας τους τύπους της άσκησης 8.3.8[β], αποδείξτε ότι*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n}{n} \cos(nx) = \frac{1}{2} \log \frac{1}{1-2r\cos x + r^2}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n}{n} \sin(nx) = \arctan \frac{r \sin x}{1 - r\cos x}.$$

[δ] *Θεωρώντας τις $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n}{n} \cos(nx)$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n}{n} \sin(nx)$ ως σειρές συναρτήσεων με μεταβλητή $r \in [0,1]$, αποδείξτε ότι*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \cos(nx) = -\log(\sin\tfrac{x}{2}), \quad \text{αν } x \in (m2\pi, (m+1)2\pi) \text{ για κάποιον } m \in \mathbb{Z}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin(nx) = \begin{cases} (\pi - x)/2, & \text{αν } x \in (m2\pi, (m+1)2\pi) \text{ για κάποιον } m \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{αν } x = m2\pi \text{ για κάποιον } m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Σχεδιάστε τα γραφήματα των συναρτήσεων αυτών.

Υπόδειξη: [α] Χρησιμοποιήστε το κριτήριο του Weierstrass.

[β] Για την κατά σημείο σύγκλιση χρησιμοποιήστε το κριτήριο του Dirichlet για σύγκλιση (αριθμητικών) σειρών. Θα χρειαστείτε και τους τύπους (6.40). Δείτε και τη λύση της άσκησης 8.3.8[γ]. Για την ομοιόμορφη σύγκλιση θα χρησιμοποιήσετε πάλι τους τύπους (6.40), όπως πριν, και το θεώρημα 10.1. Σε σχέση με την ομοιόμορφη σύγκλιση στο $\mathbb{R}$ της $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n \sin(nx)$: για το ικανό της συνθήκης $nx_n \to 0$ πρέπει να κοιτάξετε μέσα στην απόδειξη του θεωρήματος 10.1[α] ενώ για το αναγκαίο θα χρησιμοποιήσετε ότι, λόγω ομοιόμορφης σύγκλισης, ισχύει $s_n(\frac{1}{n}) \to s(0) = 0$, όπου $s_n(x)$ είναι το n-οστό μερικό άθροισμα $\sum_{k=1}^{n} x_k \sin(kx)$.

[γ] Η ομοιόμορφη σύγκλιση των σειρών και των σειρών των παραγώγων συναρτήσεων είναι άμεση συνέπεια του αποτελέσματος του [α].

[δ] Συνδυάστε τα αποτελέσματα των [β,γ] (με συγκεκριμένα παραδείγματα που αναφέρονται) και την ομοιόμορφη σύγκλιση στο $[0,1]$ των $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n}{n} \cos(nx)$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n}{n} \sin(nx)$ ως σειρών συναρτήσεων με μεταβλητή $r \in [0,1]$. Για την ομοιόμορφη σύγκλιση χρησιμοποιήστε το θεώρημα 10.1 με $f_n(r) = r^n$ και $g_n(r) = \frac{\cos(nx)}{n}$ και $g_n(r) = \frac{\sin(nx)}{n}$, αντιστοίχως. Η ομοιόμορφη σύγκλιση των σειρών συνεπάγεται τη συνέχεια των συναρτήσεων στο $[0,1]$, οπότε θεωρήστε τα όρια όταν $r \to 1-$ στους τύπους του [γ].

Άσκηση 10.1.18. *Θεωρήστε τις $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+1}+\cos x}$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}\arctan(nx^2)}{n+x^2}$. Αποδείξτε ότι και οι δύο συγκλίνουν σε κάποιες αντίστοιχες συναρτήσεις ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.*

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε και για τις δύο σειρές το θεώρημα 10.1. Για τη δεύτερη σειρά θα χρειαστεί να αποδείξετε ότι τα μερικά αθροίσματα της σειράς $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \arctan(nx^2)$ είναι ομοιόμορφα φραγμένα. Παρατηρήστε ότι, με σταθερό x, η ακολουθία (αριθμών) $(\arctan(nx^2))$ είναι αύξουσα και ότι $0 \le \arctan(nx^2) \le \frac{\pi}{2}$.

Άσκηση 10.1.20. *Έστω $f_n : A \to \mathbb{R}$ για κάθε n ώστε να ισχύει $|f_n(x) - f_{n+1}(x)| \le M_n$ για κάθε $x \in A$ και κάθε n. Αποδείξτε ότι, αν $\sum_{n=1}^{+\infty} M_n < +\infty$, τότε η ακολουθία συναρτήσεων (f_n) συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο A.*

Υπόδειξη: Ποιά είναι τα μερικά αθροίσματα της σειράς $f_1(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} (f_{n+1}(x) - f_n(x))$;

Άσκηση 10.1.21. [α] *Έστω ξ σημείο συσσώρευσης του A, έστω $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \stackrel{\text{ομ}}{=} s$ στο A και έστω $y_n = \lim_{x\to\xi} f_n(x)$. Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνει και $\lim_{x\to\xi} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} y_n$. Δηλαδή,*

$$\lim_{x\to\xi} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to\xi} f_n(x).$$

[β] *Έστω $\xi \in A$ σημείο συσσώρευσης του A και κάθε $f_n : A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στον ξ και $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \stackrel{\text{ομ}}{=} s$ στο $A \setminus \{\xi\}$. Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(\xi)$ συγκλίνει και, αν ορίσουμε $s(\xi) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(\xi)$, τότε η $s : A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στον ξ.*

Υπόδειξη: Θεωρήστε τις συναρτήσεις $s_n = f_1 + \cdots + f_n$ και τους αριθμούς $t_n = y_1 + \cdots + y_n$ για κάθε n και εφαρμόστε το αποτέλεσμα της άσκησης 9.2.21.

Άσκηση 10.1.22. *Έστω $\mathbb{Q} = \{r_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ μια αρίθμηση του $\mathbb{Q}$. Έστω για κάθε n συνάρτηση $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x = r_n \\ 1, & \text{αν } x \neq r_n \end{cases}$ και η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2 f_n(x)}$. Αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση κατά σημείο στο $\mathbb{R}$ και ότι δεν συγκλίνει ομοιόμορφα σε κανένα διάστημα (a,b).*

Λύση: Αν $x \notin \mathbb{Q}$, τότε ο x είναι διαφορετικός από κάθε r_n, οπότε

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2 f_n(x)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty.$$

Αν $x \in \mathbb{Q}$, τότε $x = r_{n_0}$ για κάποιον n_0, οπότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2 f_n(x)}$ ταυτίζεται, όπως πριν, με τη σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2}$ εκτός από τον όρο $\frac{1}{1+{n_0}^2 f_{n_0}(x)} = 1$. Άρα και πάλι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2 f_n(x)}$ συγκλίνει.
Άρα η σειρά συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση s κατά σημείο στο $\mathbb{R}$.
Έστω, τώρα, ότι η σειρά συγκλίνει στην s ομοιόμορφα σε κάποιο διάστημα (a,b).
Τότε υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει

$$\Big| s(x) - \sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{1+n^2 f_n(x)} \Big| < 1 \qquad \text{για κάθε } x \in (a,b).$$

Δηλαδή, ισχύει

$$\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2 f_n(x)} < 1 \qquad \text{για κάθε } x \in (a,b).$$

Όμως, στο διάστημα (a,b) υπάρχουν άπειροι ρητοί, οπότε υπάρχει $n \geq n_0 + 1$ ώστε $r_n \in (a,b)$. Τώρα, για $x = r_n$ έχουμε ότι ο αντίστοιχος όρος της σειράς $\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2 f_n(x)}$ είναι ίσος με $\frac{1}{1+n^2 f_n(x)} = 1$ και, επειδή όλοι οι υπόλοιποι όροι είναι μη-αρνητικοί, συνεπάγεται ότι $\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2 f_n(x)} \geq 1$ και καταλήγουμε σε άτοπο.

Άσκηση 10.1.23. *Έστω η $I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $I(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \leq 0 \\ 1, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$ Έστω ακολουθία (x_n) ώστε να ισχύει $x_n \neq x_m$ για κάθε n, m με $n \neq m$ και έστω $c_n \neq 0$ για κάθε n και $\sum_{n=1}^{+\infty} |c_n| < +\infty$.*
Αποδείξτε ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n I(x - x_n)$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $s(x)$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.
Αποδείξτε ότι η $s(x)$ είναι συνεχής στον x, αν $x \neq x_n$ για κάθε n.
Αποδείξτε ότι, για κάθε n, η $s(x)$ είναι ασυνεχής στον x_n και έχει άλμα c_n στον x_n.

Λύση: Το πρώτο ερώτημα. Επειδή για κάθε n ισχύει $|c_n I(x - x_n)| \leq |c_n|$ για κάθε x και επειδή $\sum_{n=1}^{+\infty} |c_n| < +\infty$, συνεπάγεται ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n I(x - x_n)$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $s(x)$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.
Το δεύτερο ερώτημα. Αν $x \neq x_n$ για κάθε n, τότε κάθε συνάρτηση $c_n I(x - x_n)$ είναι συνεχής στον x και άρα, λόγω ομοιόμορφης σύγκλισης, η s είναι συνεχής στον x.
Το τρίτο ερώτημα. Θεωρούμε τη σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n I(x - x_n)$ αλλά χωρίς τον όρο $c_{n_0} I(x - x_{n_0})$. Όπως πριν, η σειρά αυτή συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση σ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$ και η σ είναι συνεχής στον x_{n_0}.
Ισχύει

$$s(x) = \sigma(x) + c_{n_0} I(x - x_{n_0}) \qquad \text{για κάθε } x$$

και άρα

$$\lim_{x \to x_{n_0}-} s(x) = \lim_{x \to x_{n_0}-} \sigma(x) + c_{n_0} \lim_{x \to x_{n_0}-} I(x - x_{n_0}) = \sigma(x_{n_0}),$$
$$\lim_{x \to x_{n_0}+} s(x) = \lim_{x \to x_{n_0}+} \sigma(x) + c_{n_0} \lim_{x \to x_{n_0}+} I(x - x_{n_0}) = \sigma(x_{n_0}) + c_{n_0}.$$

Επομένως, το άλμα της s στον x_{n_0} είναι ίσο με c_{n_0}.

Άσκηση 10.1.24. *Θεωρήστε τη σειρά συναρτήσεων* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx-[nx]}{n^2}$.
Αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $s(x)$ *ομοιόμορφα στο* $\mathbb{R}$. *Αποδείξτε ότι η* $s(x)$ *είναι περιοδική με περίοδο* 1.
Αποδείξτε ότι κάθε άρρητος είναι σημείο συνέχειας της $s(x)$.
Αποδείξτε ότι κάθε ρητός είναι σημείο ασυνέχειας της $s(x)$.
Αν ο x *είναι ρητός και* $x = \frac{k}{l}$, *όπου* $k \in \mathbb{Z}$, $l \in \mathbb{N}$ *και* $\gcd(k, l) = 1$, *αποδείξτε ότι το άλμα της* $s(x)$ *στον* x *είναι ίσο με* $-\frac{a}{l^2}$, *όπου* $a = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2}$.
Αποδείξτε ότι η $s(x)$ *είναι ολοκληρώσιμη στο* $[0, 1]$ *και* $\int_0^1 s(x)\, dx = \frac{a}{2}$.

Λύση: Το πρώτο ερώτημα. Επειδή για κάθε n ισχύει $0 \leq \frac{nx-[nx]}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ για κάθε x και επειδή $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$, από το κριτήριο του Weierstrass συνεπάγεται ότι η σειρά συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση s ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.
Επίσης, επειδή για κάθε n ισχύει $n(x+1)-[n(x+1)] = nx+n-[nx+n] = nx+n-[nx]-n = nx-[nx]$ για κάθε x, συνεπάγεται ότι ισχύει

$$s(x+1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(x+1)-[n(x+1)]}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx-[nx]}{n^2} = s(x) \qquad \text{για κάθε } x.$$

Άρα η s είναι περιοδική με περίοδο 1.
Το δεύτερο ερώτημα. Η συνάρτηση $x-[x]$ είναι ασυνεχής σε κάθε ακέραιο και συνεχής σε κάθε άλλο αριθμό. Άρα για κάθε n η συνάρτηση $nx-[nx]$ είναι ασυνεχής σε κάθε ακέραιο πολλαπλάσιο του $\frac{1}{n}$ και συνεχής σε κάθε άλλο αριθμό. Μάλιστα, το αριστερό και το δεξιό πλευρικό όριο της συνάρτησης αυτής σε κάθε σημείο ασυνέχειάς της είναι ίσο με 1 και 0, αντιστοίχως.
Επομένως, αν ο ξ είναι άρρητος, τότε κάθε συνάρτηση $\frac{nx-[nx]}{n^2}$ είναι συνεχής στον ξ, οπότε, λόγω ομοιόμορφης σύγκλισης, και η s είναι συνεχής στον ξ.
Το τρίτο ερώτημα. Τώρα, έστω ότι ο ξ είναι ρητός και $\xi = \frac{k}{l}$, όπου $k \in \mathbb{Z}$, $l \in \mathbb{N}$ και $\gcd(k, l) = 1$. Τότε από τις συναρτήσεις $nx-[nx]$ εκείνες οι οποίες είναι ασυνεχείς στον ξ είναι εκείνες για τις οποίες ο $\frac{k}{l}$ είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του $\frac{1}{n}$. Τώρα, η ισότητα $\frac{k}{l} = \frac{q}{n}$ με ακέραιο q είναι ισοδύναμη με $n = ml$ και $q = mk$.
Επομένως, αν $n = ml$ για κάποιον ακέραιο m, τότε

$$\lim_{x\to\xi+}(nx-[nx]) - \lim_{x\to\xi-}(nx-[nx]) = 0-1 = -1$$

και, αν $n \neq ml$ για κάθε ακέραιο m, τότε

$$\lim_{x\to\xi+}(nx-[nx]) - \lim_{x\to\xi-}(nx-[nx]) = 0.$$

Άρα, σύμφωνα με το αποτέλεσμα της άσκησης 10.1.21[α], έχουμε

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\xi+} s(x) - \lim_{x\to\xi-} s(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\lim_{x\to\xi+} \frac{nx-[nx]}{n^2} - \lim_{x\to\xi-} \frac{nx-[nx]}{n^2}\Big)\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lim_{x\to\xi+}(nx-[nx]) - \lim_{x\to\xi-}(nx-[nx])}{n^2}\\ &= \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{-1}{(ml)^2} = -\frac{1}{l^2} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2}.\end{aligned}$$

Το τέταρτο ερώτημα. Κάθε συνάρτηση $\frac{nx-[nx]}{n^2}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$, οπότε, λόγω ομοιόμορφης σύγκλισης, και η s είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$.
Είναι $\int_0^1 (x-[x])\, dx = \frac{1}{2}$, οπότε λόγω περιοδικότητας της συνάρτησης $x-[x]$ έχουμε

$$\int_0^1 (nx-[nx])\, dx = \frac{1}{n} \int_0^n (x-[x])\, dx = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} (x-[x])\, dx = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

και άρα

$$\int_0^1 s(x)\, dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \int_0^1 (nx-[nx])\, dx = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Άσκηση 10.1.25. *Έστω ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n^{x_0}}$ συγκλίνει. Θεωρήστε τη σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n^x}$.*
Αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $s(x)$ ομοιόμορφα στο $[x_0,+\infty)$.
Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to x_0+}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n^x}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n^{x_0}}$.
Αποδείξτε ότι η $s(x)$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $(x_0,+\infty)$.

Υπόδειξη: Γράψτε $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n^x}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n^{x_0}}\frac{1}{n^{x-x_0}}$ και εφαρμόστε το θεώρημα 10.1.

Άσκηση 10.1.26. *Θεωρήστε τη σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$. Γνωρίζουμε ότι η σειρά αυτή συγκλίνει για κάθε $x>1$ και αποκλίνει στο $+\infty$ για κάθε $x\leq 1$.*
Συμβολίζουμε $\zeta:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ και ονομάζουμε ζ-συνάρτηση του Riemann τη συνάρτηση με τύπο:

$$\zeta(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}\qquad \text{για κάθε }\ x\in(1,+\infty).$$

Η συνάρτηση αυτή συνδέεται με ένα από τα σημαντικότερα προβλήματα των μαθηματικών.
Αποδείξτε ότι, για κάθε $a>1$, η σειρά συγκλίνει στην $\zeta(x)$ ομοιόμορφα στο $[a,+\infty)$.
Αποδείξτε ότι η $\zeta(x)$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ και ότι

$$\zeta^{(m)}(x)=(-1)^m\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(\log n)^m}{n^x}\qquad \text{για κάθε }\ x\in(1,+\infty)\ \text{ και κάθε }\ m\in\mathbb{N}.$$

Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to 1+}\zeta(x)=+\infty$ και $\lim_{x\to+\infty}\zeta(x)=1$.
Αποδείξτε ότι η $\zeta(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα και γνησίως κυρτή στο $(1,+\infty)$.

Λύση: Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x>1$ η σειρά (αριθμών) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$ συγκλίνει ενώ για κάθε $x\leq 1$ αποκλίνει στο $+\infty$. Άρα, αν θέσουμε

$$\zeta(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}\qquad \text{για } x>1,$$

ορίζουμε την συνάρτηση ζ στο $(1,+\infty)$ και η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$ συγκλίνει στην ζ κατά σημείο στο $(1,+\infty)$.
Το πρώτο ερώτημα. Έστω $a>1$. Θα εφαρμόσουμε το κριτήριο του Weierstrass στο διάστημα $[a,+\infty)$. Ισχύει

$$\left|\frac{1}{n^x}\right|=\frac{1}{n^x}\leq\frac{1}{n^a}\qquad \text{για κάθε } x\in[a,+\infty)$$

και

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^a}<+\infty.$$

Άρα η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$ συγκλίνει στην ζ ομοιόμορφα στο $[a,+\infty)$.
Σχόλιο. Αν θέλουμε να αποδείξουμε ότι η σειρά συγκλίνει στην ζ ομοιόμορφα στο $(1,+\infty)$ θα πρέπει να εφαρμόσουμε το κριτήριο του Weierstrass στο $(1,+\infty)$. Επομένως, πρέπει να βρούμε αριθμούς M_n ώστε να ισχύει $|\frac{1}{n^x}|\leq M_n$ για κάθε $x\in(1,+\infty)$ και οι M_n να είναι αρκετά μικροί ώστε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}M_n$ να συγκλίνει. Άρα πρέπει να βρούμε τον μικρότερο δυνατό M_n, δηλαδή το μικρότερο φράγμα της μη-αρνητικής συνάρτησης $\frac{1}{n^x}$ στο $(1,+\infty)$. Η συνάρτηση είναι φθίνουσα στο διάστημα $(1,+\infty)$, οπότε το ελάχιστο άνω φράγμα της στο $(1,+\infty)$ είναι το $\lim_{x\to 1+}\frac{1}{n^x}=\frac{1}{n}$. Επομένως, ο $M_n=\frac{1}{n}$ είναι ο ελάχιστος M_n που μπορούμε να βρούμε. Όμως, η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}M_n=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ δεν συγκλίνει. Άρα το κριτήριο του Weierstrass αποτυγχάνει να αποδείξει ότι η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στο $(1,+\infty)$.
Το δεύτερο και το τέταρτο ερώτημα. Για να αποδείξουμε ότι η ζ είναι συνεχής στο $(1,+\infty)$, θεωρούμε τυχόντα $x_0\in(1,+\infty)$. Κατόπιν, παίρνουμε έναν οποιονδήποτε $a_0>1$ ώστε ο x_0 να είναι εσωτερικό σημείο του $[a_0,+\infty)$, δηλαδή ώστε $1<a_0<x_0$. Τώρα, επειδή κάθε συνάρτηση $\frac{1}{n^x}$ είναι συνεχής στο $[a_0,+\infty)$ και η σύγκλιση της σειράς στην ζ είναι ομοιόμορφη στο $[a_0,+\infty)$, συνεπάγεται ότι η ζ είναι συνεχής στο $[a_0,+\infty)$. Και, επειδή ο x_0 είναι εσωτερικό σημείο του $[a_0,+\infty)$, συνεπάγεται ότι η ζ είναι συνεχής στον x_0.
Άρα η ζ είναι συνεχής στο $(1,+\infty)$.
Τώρα θεωρούμε τη σειρά των παραγώγων συναρτήσεων:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{d}{dx}\frac{1}{n^x}=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{-\log n}{n^x}.$$

Θα αποδείξουμε ότι η σειρά αυτή συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση κατά σημείο στο $(1, +\infty)$ και ομοιόμορφα στο $[a, +\infty)$ για κάθε $a > 1$.
Θεωρούμε $x \in (1, +\infty)$ και θα εφαρμόσουμε το ολοκληρωτικό κριτήριο στην σειρά (αριθμών) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\log n}{n^x}$. (Το ίδιο κριτήριο εφαρμόσαμε για να αποδείξουμε τη σύγκλιση της $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ για κάθε $x > 1$.)
Θα δούμε αν η συνάρτηση $f(u) = \frac{\log u}{u^x}$ είναι φθίνουσα στο $[2, +\infty)$. Έχουμε:

$$f'(u) = \frac{1 - x\log u}{u^{x+1}},$$

οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, e^{1/x}]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[e^{1/x}, +\infty)$.
Τώρα θεωρούμε τον μικρότερο φυσικό αριθμό n_0 ο οποίος είναι $\geq e^{\frac{1}{x}}$ και τότε η f είναι φθίνουσα στο διάστημα $[n_0, +\infty)$. Επειδή $e^{1/x} > 1$, συνεπάγεται ότι $n_0 \geq 2$.
Επομένως, αν θέλουμε να αποδείξουμε ότι η σειρά αριθμών $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\log n}{n^x}$ συγκλίνει, αρκεί να αποδείξουμε ότι η σειρά $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{\log n}{n^x}$ συγκλίνει. Και, σύμφωνα με το ολοκληρωτικό κριτήριο, αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\int_{n_0}^{+\infty} \frac{\log u}{u^x}\, du < +\infty.$$

Τέλος, το $\int_2^{n_0} \frac{\log u}{u^x}\, du$ είναι ολοκλήρωμα συνεχούς συνάρτησης σε κλειστό, φραγμένο διάστημα, οπότε είναι αριθμός και άρα αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\int_2^{+\infty} \frac{\log u}{u^x}\, du < +\infty.$$

Για $x > 1$ υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned}\int_2^{+\infty} \frac{\log u}{u^x}\, du &= \frac{1}{1-x} \int_2^{+\infty} (u^{1-x})' \log u\, du = \frac{1}{1-x}\Big(-2^{1-x}\log 2 - \int_2^{+\infty} u^{-x}\, dx\Big) \\ &= \frac{1}{1-x}\Big(-2^{1-x}\log 2 + \frac{2^{1-x}}{1-x}\Big) < +\infty.\end{aligned}$$

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι για $x > 1$ η σειρά (αριθμών) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\log n}{n^x}$ συγκλίνει. Θέτουμε

$$t(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{-\log n}{n^x} \qquad \text{για } x > 1,$$

ορίζοντας τη συνάρτηση t στο $(1, +\infty)$, και έχουμε ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{-\log n}{n^x}$ συγκλίνει στην t κατά σημείο στο $(1, +\infty)$.
Κατόπιν, θεωρούμε $a > 1$ και εφαρμόζουμε το κριτήριο του Weierstrass στο διάστημα $[a, +\infty)$. Ισχύει

$$\Big|\frac{-\log n}{n^x}\Big| = \frac{\log n}{n^x} \leq \frac{\log n}{n^a} \qquad \text{για κάθε } x \in [a, +\infty)$$

και, όπως είδαμε,

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\log n}{n^a} < +\infty.$$

Άρα η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{-\log n}{n^x}$ συγκλίνει στην t ομοιόμορφα στο $[a, +\infty)$.
Συμπεραίνουμε ότι η ζ είναι παραγωγίσιμη στο $[a, +\infty)$ και ότι ισχύει $\zeta'(x) = t(x)$ για κάθε $x \in [a, +\infty)$. (Προσοχή: στο $x = a$ έχουμε τη δεξιά πλευρική παράγωγο.)
Για να δούμε ότι η ζ είναι παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$, θεωρούμε οποιονδήποτε $x_0 \in (1, +\infty)$. Κατόπιν, παίρνουμε οποιονδήποτε $a_0 > 1$ ώστε ο x_0 να είναι εσωτερικό σημείο του $[a_0, +\infty)$, δηλαδή ώστε $1 < a_0 < x_0$. Επειδή η ζ είναι παραγωγίσιμη στο $[a_0, +\infty)$ και ο x_0 είναι εσωτερικό σημείο του $[a_0, +\infty)$, συνεπάγεται ότι η ζ είναι παραγωγίσμη στον x_0 και ότι $\zeta'(x_0) = t(x_0)$. Άρα η ζ είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x \in (1, +\infty)$ και ισχύει

$$\zeta'(x) = t(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{-\log n}{n^x} \qquad \text{για κάθε } x > 1.$$

Με την ίδια ακριβώς διαδικασία, θεωρώντας δηλαδή τη σειρά των δεύτερων παραγώγων συναρτήσεων

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{d^2}{dx^2} \frac{1}{n^x} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{d}{dx} \frac{-\log n}{n^x} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(\log n)^2}{n^x},$$

αποδεικνύουμε ότι η συνάρτηση t είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ και ότι ισχύει

$$\zeta''(x) = t'(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(\log n)^2}{n^x} \qquad \text{για κάθε } x > 1.$$

Μετα από αυτά, είναι προφανές ότι η ζ' είναι αρνητική και η ζ'' είναι θετική στο $(1,+\infty)$, οπότε η ζ είναι γνησίως φθίνουσα και γνησίως κυρτή στο $(1,+\infty)$.
Τις παραγώγους τάξης ≥ 3 μπορείτε να τις χειριστείτε εσείς.
Το τρίτο ερώτημα. Για να υπολογίσουμε τα όρια της ζ στο $1+$ και στο $+\infty$, εφαρμόζουμε το ολοκληρωτικό κριτήριο και έχουμε

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{u^x}\,du \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \leq 1 + \int_1^{+\infty} \frac{1}{u^x}\,du \qquad \text{για } x > 1$$

ή, ισοδύναμα,

$$\frac{1}{x-1} \leq \zeta(x) \leq 1 + \frac{1}{x-1} \qquad \text{για } x > 1.$$

Με το κριτήριο παρεμβολής βλέπουμε ότι $\lim_{x\to 1+} \zeta(x) = +\infty$.
Όμως, το κριτήριο παρεμβολής δεν εφαρμόζεται όταν $x \to +\infty$. Παρατηρούμε, όμως, πάλι με το ολοκληρωτικό κριτήριο, ότι

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{u^x}\,du \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{2^x} + \int_2^{+\infty} \frac{1}{u^x}\,du \qquad \text{για } x > 1$$

ή, ισοδύναμα,

$$\frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \leq \zeta(x) - 1 \leq \frac{1}{2^x} + \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \qquad \text{για } x > 1.$$

Τώρα το κριτήριο παρεμβολής δίνει ότι $\lim_{x\to+\infty}(\zeta(x)-1) = 0$ και άρα $\lim_{x\to+\infty} \zeta(x) = 1$.
Για το όριο στο $+\infty$ μπορούμε να εφαρμόσουμε, επίσης, το αποτέλεσμα της άσκησης 10.1.21[α]. Λόγω της ομοιόμορφης σύγκλισης στο $[2,+\infty)$ (μπορούμε να πάρουμε οποιονδήποτε $a > 1$ αντί του 2), επιτρέπεται η εναλλαγή των συμβόλων του ορίου και της σειράς και έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty} \zeta(x) = \lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{n^x} = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} 0 = 1.$$

Άσκηση 10.2.1. *Στην άσκηση 5.6.10 αποδείξτε ότι $x_n \to +\infty$.*

Λύση: Από την άσκηση 5.6.10 έχουμε ότι ισχύει

$$1 + \frac{x_n}{1!} + \cdots + \frac{{x_n}^n}{n!} = k e^{x_n} \qquad \text{για κάθε } n \tag{14.277}$$

και ότι η (x_n) είναι γνησίως αύξουσα ακολουθία θετικών αριθμών.
Υποθέτουμε ότι η (x_n) δεν τείνει στο $+\infty$ και, επομένως, ότι είναι άνω φραγμένη. Άρα η (x_n) συγκλίνει και έστω $x_n \to a \in \mathbb{R}$. Τότε ισχύει $0 \leq x_n \leq a$ για κάθε n.
Αν ορίσουμε $s_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$, τότε έχουμε ότι η ακολουθία συναρτήσεων (s_n) συγκλίνει στην e^x ομοιόμορφα στο $[0,a]$, αφού η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ συγκλίνει στην e^x στο $(-\infty,+\infty)$. Συνεπάγεται ότι

$$s_n(x_n) \to e^a. \tag{14.278}$$

Πράγματι, έχουμε ότι

$$|s_n(x_n) - e^a| \leq |s_n(x_n) - e^{x_n}| + |e^{x_n} - e^a| \leq \|s_n - \exp\|_{[0,a]} + |e^{x_n} - e^a| \to 0.$$

Από τις (14.277) και (14.278) συνεπάγεται $ke^a = e^a$, το οποίο είναι άτοπο, αφού $0 < k < 1$.

Άσκηση 10.2.4. *Βρείτε τα διαστήματα σύγκλισης των δυναμοσειρών $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} x^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} n! x^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ με $a_n = \begin{cases} 1/n, & \text{αν } n \text{ άρτιος} \\ 2^n/n, & \text{αν } n \text{ περιττός} \end{cases}$ Εξετάστε τη σύγκλιση των δυναμοσειρών και στα άκρα των αντίστοιχων διαστημάτων σύγκλισης.*

Λύση: Η πρώτη σειρά. Έχουμε $\sqrt[n]{\left|\frac{1}{n2^n}\right|} = \frac{1}{2\sqrt[n]{n}} \to \frac{1}{2}$, οπότε $\overline{\lim}\sqrt[n]{\left|\frac{1}{n2^n}\right|} = \frac{1}{2}$ και η ακτίνα σύγκλισης είναι ίση με 2.
Για $x = 2$ η δυναμοσειρά γίνεται $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n2^n}2^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ και αποκλίνει. Για $x = -2$ η δυναμοσειρά γίνεται $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n2^n}(-2)^n = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ και συγκλίνει βάσει του κριτηρίου εναλλασσόμενων προσήμων. Άρα το διάστημα σύγκλισης είναι το $[-2, 2)$.
Η δεύτερη σειρά. Έχουμε $\sqrt[n]{|n!|} = \sqrt[n]{n!} \to +\infty$. Άρα $\overline{\lim}\sqrt[n]{n!} = +\infty$ και, επομένως, η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι 0. Άρα το διάστημα σύγκλισης είναι το μονοσύνολο $\{0\}$.
Η τρίτη σειρά. Αν ο n διατρέχει τους άρτιους φυσικούς, τότε $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1$. Αν ο n διατρέχει τους περιττούς φυσικούς, τότε $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{2}{\sqrt[n]{n}} \to 2$. Άρα $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} = \max\{1, 2\} = 2$, οπότε η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι ίση με $\frac{1}{2}$.
Για $x = \frac{1}{2}$ η δυναμοσειρά γίνεται

$$\begin{aligned}
&\tfrac{2^1}{1}\left(\tfrac{1}{2}\right)^1 + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{2^3}{3}\left(\tfrac{1}{2}\right)^3 + \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{1}{2}\right)^4 + \tfrac{2^5}{5}\left(\tfrac{1}{2}\right)^5 + \tfrac{1}{6}\left(\tfrac{1}{2}\right)^6 + \cdots \\
&\qquad \geq \tfrac{2^1}{1}\left(\tfrac{1}{2}\right)^1 + \tfrac{2^3}{3}\left(\tfrac{1}{2}\right)^3 + \tfrac{2^5}{5}\left(\tfrac{1}{2}\right)^5 + \cdots \\
&\qquad = 1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \cdots \geq \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{6} + \cdots \\
&\qquad = \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n} = +\infty.
\end{aligned} \tag{14.279}$$

Άρα για $x = \frac{1}{2}$ η δυναμοσειρά αποκλίνει στο $+\infty$.
Για $x = -\frac{1}{2}$ η δυναμοσειρά γίνεται

$$-\tfrac{2^1}{1}\left(\tfrac{1}{2}\right)^1 + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 - \tfrac{2^3}{3}\left(\tfrac{1}{2}\right)^3 + \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{1}{2}\right)^4 - \tfrac{2^5}{5}\left(\tfrac{1}{2}\right)^5 + \tfrac{1}{6}\left(\tfrac{1}{2}\right)^6 - \cdots.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{1}{2}\right)^4 + \tfrac{1}{6}\left(\tfrac{1}{2}\right)^6 + \cdots \leq \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^4 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^6 + \cdots = \tfrac{1}{3}.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
&-\tfrac{2^1}{1}\left(\tfrac{1}{2}\right)^1 + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 - \tfrac{2^3}{3}\left(\tfrac{1}{2}\right)^3 + \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{1}{2}\right)^4 - \tfrac{2^5}{5}\left(\tfrac{1}{2}\right)^5 + \tfrac{1}{6}\left(\tfrac{1}{2}\right)^6 - \cdots \\
&\qquad \leq -\left(\tfrac{2^1}{1}\left(\tfrac{1}{2}\right)^1 + \tfrac{2^3}{3}\left(\tfrac{1}{2}\right)^3 + \tfrac{2^5}{5}\left(\tfrac{1}{2}\right)^5 + \cdots\right) + \tfrac{1}{3} \\
&\qquad = -\left(1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \cdots\right) + \tfrac{1}{3} \\
&\qquad \leq -\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{6} + \cdots\right) + \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n} = -\infty.
\end{aligned} \tag{14.280}$$

Άρα για $x = -\frac{1}{2}$ η δυναμοσειρά αποκλίνει στο $-\infty$.
Το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι το $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
Σχόλιο. Εν γένει δεν επιτρέπεται να παραλείπουμε όρους μιας σειράς - ειδικά αν το πλήθος τους είναι άπειρο - ή να ομαδοποιούμε και να αντικαθιστούμε όρους μιας σειράς με άλλους. Αυτό το κάναμε στην (14.279) και στην (14.280). Μπορείτε να αιτιολογήσετε με αυστηρό τρόπο τους χειρισμούς που έγιναν;

Άσκηση 10.2.5. *Τί συμπεραίνετε για την ακτίνα σύγκλισης της $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ αν η ακολουθία (a_n) είναι φραγμένη; Τί συμπεραίνεται αν η $(\frac{1}{a_n})$ είναι φραγμένη;*
Αν η $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ αποκλίνει και η ακολουθία (a_n) είναι φραγμένη, αποδείξτε ότι η ακτίνα σύγκλισης της $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ είναι ίση με 1.
Αν η $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ συγκλίνει υπό συνθήκη, αποδείξτε ότι η ακτίνα σύγκλισης της $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ είναι ίση με 1.

Λύση: Το πρώτο ερώτημα. Έστω ότι ισχύει $|a_n| \leq M$ για κάθε n. Τότε ισχύει $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \sqrt[n]{M}$ για κάθε n. Αν ξ είναι οποιοδήποτε υποακολουθιακό όριο της $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)$, τότε γράφοντας n_k στη θέση του n στην τελευταία ανισοτική σχέση και παίρνοντας όριο, βρίσκουμε ότι ισχύει $\xi \leq 1$. Άρα κάθε υποακολουθιακό όριο της $\big(\sqrt[n]{|a_n|}\big)$ είναι ≤ 1 και, επομένως, $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} \leq 1$. Συμπεραίνουμε ότι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι ≥ 1.

Έστω ότι ισχύει $|\frac{1}{a_n}| \leq M$ για κάθε n. Τότε ισχύει $\sqrt[n]{|a_n|} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{M}}$ για κάθε n. Αν ξ είναι οποιοδήποτε υποακολουθιακό όριο της $\big(\sqrt[n]{|a_n|}\big)$, τότε, όπως πριν, βρίσκουμε ότι ισχύει $\xi \geq 1$. Άρα κάθε υποακολουθιακό όριο της $\big(\sqrt[n]{|a_n|}\big)$ είναι ≥ 1 και, επομένως, $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$. Συμπεραίνουμε ότι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι ≤ 1.

Το δεύτερο ερώτημα. Από το πρώτο ερώτημα γνωρίζουμε ότι η ακτίνα σύγκλισης R είναι ≥ 1. Αν $R > 1$, τότε ο $\xi + 1$ ανήκει στο διάστημα σύγκλισης. Αυτό είναι άτοπο λόγω υπόθεσης και άρα $R = 1$.

Το τρίτο ερώτημα. Επειδή η $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ συγκλίνει, έχουμε ότι $a_n \to 0$ και άρα η (a_n) είναι φραγμένη. Πάλι από το πρώτο ερώτημα γνωρίζουμε ότι η ακτίνα σύγκλισης R είναι ≥ 1. Αν $R > 1$, τότε ο $\xi + 1$ ανήκει στο *εσωτερικό* του διαστήματος σύγκλισης, οπότε η δυναμοσειρά συγκλίνει απολύτως για $x = \xi + 1$. Αυτό είναι άτοπο λόγω υπόθεσης και άρα $R = 1$.

Άσκηση 10.2.6. *Έστω ότι η (a_n) είναι φθίνουσα, ότι $a_0 > 0$ και ότι ισχύει $a_n \geq 0$ για κάθε n.*
Αποδείξτε ότι η ακτίνα σύγκλισης της $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ είναι ≥ 1.
Αποδείξτε ότι για κάθε $x \in (-1,1)$ ισχύει $\big|a_0 - (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\big| < a_0$. Αποδείξτε ότι ισχύει $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \neq 0$ για κάθε $x \in (-1,1)$.

Λύση: Το πρώτο ερώτημα. Επειδή η (a_n) είναι φθίνουσα και φραγμένη και επειδή η $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ συγκλίνει για κάθε $x \in (-1,1)$, από το κριτήριο του Abel (για αριθμητικές σειρές) συνεπάγεται ότι η $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ συγκλίνει για κάθε $x \in (-1,1)$. Άρα η ακτίνα σύγκλισής της είναι ≥ 1.

Το δεύτερο ερώτημα. Επειδή η (a_n) είναι φθίνουσα και έχει κάτω φράγμα τον 0, συγκλίνει σε αριθμό ≥ 0. Έστω $a_n \to a \geq 0$. Τότε για $|x| < 1$ έχουμε

$$\begin{aligned}\Big|a_0 - (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\Big| &= \Big|a_0 - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1}\Big| \\ &= \Big| -\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n\Big| \\ &= \Big|\sum_{n=1}^{+\infty}(a_{n-1} - a_n)x^n\Big| \leq \sum_{n=1}^{+\infty}|a_{n-1} - a_n||x|^n \\ &\leq \sum_{n=1}^{+\infty}|a_{n-1} - a_n| = \sum_{n=1}^{+\infty}(a_{n-1} - a_n) = a_0 - a \leq a_0.\end{aligned}$$

Άρα ισχύει $\big|a_0 - (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\big| \leq a_0$.
Αν ισχύει $\big|a_0 - (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\big| = a_0$, τότε σε όλη την προηγούμενη διαδοχή ισοτήτων και ανισοτήτων θα πρέπει κάθε ανισότητα να ισχύει ως ισότητα. Ειδικότερα, πρέπει να είναι $a = 0$, δηλαδή $a_n \to 0$. Επίσης, πρέπει να ισχύει $|a_{n-1} - a_n||x|^n = |a_{n-1} - a_n|$ για κάθε $n \geq 1$ και, επειδή $|x| < 1$, πρέπει να ισχύει $|a_{n-1} - a_n| = 0$ ή, ισοδύναμα, $a_{n-1} = a_n$ για κάθε $n \geq 1$. Συνεπάγεται ότι η (a_n) είναι σταθερή ακολουθία. Επειδή $a_n \to 0$, έχουμε ότι ισχύει $a_n = 0$ για κάθε n και άρα $a_0 = 0$ που είναι άτοπο.
Άρα ισχύει $\big|a_0 - (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\big| < a_0$, οπότε το $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \neq 0$ είναι άμεσο.

Άσκηση 10.2.7. [α] *Έστω $R > 0$ η ακτίνα σύγκλισης της $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-\xi)^n$ και $s(x)$ η συνάρτηση που ορίζεται από τη δυναμοσειρά στο διάστημα $(\xi - R, \xi + R)$. Αποδείξτε ότι*

$$s^{(m)}(x) = m!\sum_{n=m}^{+\infty}\binom{n}{m}a_n(x-\xi)^{n-m} \qquad \text{για κάθε } x \in (\xi - R, \xi + R), \ \ m \in \mathbb{Z}, \ \ m \geq 0$$

και $s^{(m)}(\xi) = m! a_m$ για κάθε $m \in \mathbb{Z}$ με $m \geq 0$.

Λύση: Για $m = 1$ η σχέση που θέλουμε να αποδείξουμε ισχύει διότι είναι η γνωστή από τη θεωρία:

$$\frac{d}{dx}s(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{d}{dx}(x-\xi)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (x-\xi)^{n-1} = 1!\sum_{n=1}^{+\infty}\binom{n}{1}a_n(x-\xi)^{n-1}.$$

Έστω ότι ισχύει για κάποιον m ότι

$$s^{(m)}(x) = m!\sum_{n=m}^{+\infty}\binom{n}{m}a_n(x-\xi)^{n-m}.$$

Τότε

$$\begin{aligned} s^{(m+1)}(x) &= \tfrac{d}{dx}s^{(m)}(x) = m!\sum_{n=m}^{+\infty}\tbinom{n}{m}a_n\tfrac{d}{dx}(x-\xi)^{n-m} \\ &= m!\sum_{n=m}^{+\infty}\tbinom{n}{m}(n-m)a_n(x-\xi)^{n-m-1} \\ &= (m+1)!\sum_{n=m+1}^{+\infty}\tbinom{n}{m+1}a_n(x-\xi)^{n-m-1}. \end{aligned}$$

Άρα η $s^{(m)}(x) = m!\sum_{n=m}^{+\infty}\binom{n}{m}a_n(x-\xi)^{n-m}$ ισχύει για κάθε m.
Αν $x = x_0$, παίρνουμε τον αρχικό όρο: $s^{(m)}(\xi) = m!a_m$.

Άσκηση 10.2.8. *Έστω $R > 0$ και έστω ότι ισχύει $s(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ για $x \in (-R, R)$.*
Αποδείξτε ότι η $s(x)$ είναι άρτια στο διάστημα $(-R, R)$ αν και μόνο αν ισχύει $a_n = 0$ για κάθε περιττό $n \in \mathbb{N}$.
Αποδείξτε ότι η $s(x)$ είναι περιττή στο διάστημα $(-R, R)$ αν και μόνο αν ισχύει $a_n = 0$ για κάθε άρτιο $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$.

Υπόδειξη: Και στα δύο ερωτήματα η μία κατεύθυνση είναι απλή. Για την άλλη κατεύθυνση εφαρμόστε το αποτέλεσμα της άσκησης 10.2.7[α].

Άσκηση 10.2.9. *Έστω ότι η ακτίνα σύγκλισης της $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n{}'(x-\xi)^n$ είναι R', της $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n{}''(x-\xi)^n$ είναι R'' και της $\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n{}' + a_n{}'')(x-\xi)^n$ είναι R.*
Αποδείξτε ότι, αν $R' \neq R''$, τότε $R = \min\{R', R''\}$ και, αν $R' = R''$, τότε $R \geq R' = R''$.
Βρείτε παράδειγμα ώστε να είναι $R' = R''$ και η ακτίνα σύγκλισης του αθροίσματος να είναι $R > R' = R''$.

Λύση: Το πρώτο ερώτημα. Έστω $R_1 = \min\{R', R''\}$.
Σε κάθε περίπτωση, το διάστημα $(\xi - R_1, \xi + R_1)$ περιέχεται στα διαστήματα $(\xi - R', \xi + R')$ και $(\xi - R'', \xi + R'')$. Άρα για κάθε $x \in (\xi - R_1, \xi + R_1)$ και οι δύο σειρές $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n{}'(x-\xi)^n$ και $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n{}''(x-\xi)^n$ συγκλίνουν και, επομένως, και η σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n{}' + a_n{}'')(x-\xi)^n$ συγκλίνει. Άρα το $(\xi - R_1, \xi + R_1)$ περιέχεται στο $(\xi - R, \xi + R)$, οπότε $R_1 \leq R$.
Μέχρι τώρα έχουμε καλύψει την απάντηση στο δεύτερο υποερώτημα. Έστω, λοιπόν, ότι $R' \neq R''$ και ας πάρουμε την περίπτωση $R' < R''$. (Η περίπτωση $R' > R''$ είναι συμμετρική). Θα αποδείξουμε ότι $R = R'$.
Έχουμε ήδη αποδείξει ότι $R \geq R'$, αφού $R_1 = R'$. Ας υποθέσουμε ότι $R > R'$ και ας πάρουμε κάποιον x στο $(\xi - R, \xi + R)$ και στο $(\xi - R'', \xi + R'')$ αλλά όχι στο $[\xi - R', \xi + R']$. Τότε οι σειρές $\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n{}' + a_n{}'')(x-\xi)^n$ και $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n{}''(x-\xi)^n$ συγκλίνουν αλλά όχι η $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n{}'(x-\xi)^n$. Αυτό είναι άτοπο, διότι η τελευταία σειρά είναι η διαφορά των δύο πρώτων.
Το δεύτερο ερώτημα. Θεωρούμε μια οποιαδήποτε δυναμοσειρά με πεπερασμένη ακτίνα σύγκλισης και την αντίθετή της. Για παράδειγμα, τις $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ και $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)x^n$. Έχουν την ίδια ακτίνα σύγκλισης 1, αλλά το άθροισμά τους είναι η μηδενική δυναμοσειρά με ακτίνα σύγκλισης $+\infty$.

Άσκηση 10.2.10. *Έστω $R > 0$ και έστω ότι ισχύει $s(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ για $x \in (\xi - R, \xi + R)$. Υποθέστε ότι ο ξ είναι ρίζα της $s(x)$, δηλαδή $s(\xi) = 0$ ή, ισοδύναμα, $a_0 = 0$. Αποδείξτε ότι είτε ισχύει $s(x) = 0$ για κάθε $x \in (\xi - R, \xi + R)$ είτε υπάρχει r με $0 < r \leq R$ ώστε να ισχύει $s(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\xi - r, \xi + r)$ με $x \neq \xi$. Στην δεύτερη περίπτωση, πώς προσδιορίζεται η πολλαπλότητα της ρίζας ξ της $s(x)$ από τους συντελεστές της δυναμοσειράς;*

Υπόδειξη: Έστω ότι η s δεν είναι η μηδενική συνάρτηση στο $(\xi - R, \xi + R)$. Τότε υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $a_k \neq 0$ και έστω k ο ελάχιστος φυσικός με αυτή την ιδιότητα. Τότε $s(x) = (x-\xi)^k \sum_{n=0}^{+\infty} a_{k+n}(x-\xi)^n$ για $x \in (\xi - R, \xi + R)$. Η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{k+n}(x-\xi)^n$ ορίζει συνάρτηση $t(x)$ συνεχή στο $(\xi - R, \xi + R)$ και $t(\xi) = a_k \neq 0$.

Άσκηση 10.2.12. *Προσδιορίστε τα διαστήματα σύγκλισης των δυναμοσειρών $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{1\cdot 4\cdots(3n-2)} x^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)} x^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}\Big)^2 x^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}\Big)^3 x^n$.*
Υπόδειξη: Για τα άκρα των διαστημάτων σύγκλισης δείτε το λήμμα 10.1. Για τις τρεις τελευταίες

δυναμοσειρές δείτε και την άσκηση 8.3.9.

Άσκηση 10.2.14. *Αποδείξτε ότι ισχύει* $\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1}$ *για κάθε* $x \in (-1,1)$, *γράφοντας το* $\frac{1}{1+t^2}$ *ως γεωμετρική σειρά. Κατόπιν, αποδείξτε ότι η σχέση αυτή ισχύει και για* $x = \pm 1$.

Λύση: Στην σχέση

$$\tfrac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k,$$

η οποία ισχύει για κάθε $x \in (-1,1)$, αντικαθιστούμε το x με το $-x^2$ και παίρνουμε

$$\tfrac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k x^{2k} \qquad \text{για } x \in (-1,1).$$

Ολοκληρώνουμε τη δυναμοσειρά αυτή από το 0 μέχρι το x και έχουμε

$$\int_0^x \tfrac{1}{1+t^2}\,dt = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \tfrac{x^{2k+1}}{2k+1} \qquad \text{για } x \in (-1,1).$$

Τώρα, από το κριτήριο εναλλασσόμενων προσήμων, βλέπουμε ότι η $\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ συγκλίνει και για $x = \pm 1$. Επομένως, η συνάρτηση που ορίζεται από τη δυναμοσειρά είναι συνεχής στο διάστημα $[-1,1]$ και, επειδή, και η συνάρτηση που ορίζεται από το αόριστο ολοκλήρωμα $\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$ είναι συνεχής, συνεπάγεται

$$\int_0^{-1} \tfrac{1}{1+t^2}\,dt = \lim_{x\to -1+}\int_0^x \tfrac{1}{1+t^2}\,dt = \lim_{x\to -1+}\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \tfrac{x^{2k+1}}{2k+1} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \tfrac{(-1)^{2k+1}}{2k+1}$$

και

$$\int_0^{1} \tfrac{1}{1+t^2}\,dt = \lim_{x\to 1-}\int_0^x \tfrac{1}{1+t^2}\,dt = \lim_{x\to 1-}\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \tfrac{x^{2k+1}}{2k+1} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \tfrac{1^{2k+1}}{2k+1}.$$

Άρα η σχέση $\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ ισχύει για κάθε $x \in [-1,1]$.

Άσκηση 10.2.15. *Αποδείξτε ότι ισχύει* $\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2^{k-1}(k-1)!(2k-1)^2}\,x^{2k-1}$ *για κάθε* $x \in (-1,1)$.
Αποδείξτε ότι ισχύει $\arcsin x = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2^{k-1}(k-1)!(2k-1)^2}\,x^{2k-1}$ *για κάθε* $x \in [-1,1]$.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τον γενικό διωνυμικό τύπο του Newton με $a = -\frac{1}{2}$ και $-t^2$ στη θέση του x. Προσέξτε ότι η δεύτερη σχέση ισχύει και για $x = \pm 1$.

Άσκηση 10.2.17. *Έστω* $k \in \mathbb{N}$. *Αποδείξτε ότι οι* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ *και* $\sum_{n=0}^{+\infty} n^k a_n(x-\xi)^n$ *έχουν την ίδια ακτίνα σύγκλισης.*

Λύση: Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\overline{\lim}\sqrt[n]{n^k|a_n|} = \overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}$.
Επειδή $\sqrt[n]{n^k|a_n|} = \big(\sqrt[n]{n}\big)^k\sqrt[n]{|a_n|}$ και $\sqrt[n]{n} \to 1$, το ζητούμενο είναι άμεση συνέπεια του αποτελέσματος του τελευταίου μέρους της άσκησης 2.7.8.

Άσκηση 10.2.19. *Έστω ότι ισχύει* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = s(x)$ *για κάθε* $x \in (-1,1)$. *Αν ισχύει* $b_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ *για κάθε* $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$, *αποδείξτε ότι ισχύει* $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = \frac{s(x)}{1-x}$ *για κάθε* $x \in (-1,1)$.
Αποδείξτε τον γενικό διωνυμικό τύπο του Newton $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$ *όταν ο* α *είναι αρνητικός ακέραιος, χρησιμοποιώντας το προηγούμενο.*

Λύση: Το πρώτο ερώτημα. Ουσιαστικά εφαρμόζουμε τον τύπο άθροισης του Abel της υποενότητας 8.3.2. Έχουμε:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{n} a_k x^k &= a_0 + \sum_{k=1}^{n}(b_k - b_{k-1})x^k = a_0 + \sum_{k=1}^{n} b_k x^k - \sum_{k=1}^{n} b_{k-1}x^k \\
&= b_0 + \sum_{k=1}^{n} b_k x^k - \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^{k+1} = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k - \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} b_k x^k - \sum_{k=0}^{n} b_k x^{k+1} + b_n x^{n+1} \\
&= (1-x)\sum_{k=0}^{n} b_k x^k + b_n x^{n+1}.
\end{aligned} \tag{14.281}$$

Τώρα, θέτουμε $m = [\frac{n}{2}]$ και για $|x| < 1$ έχουμε:

$$\begin{aligned}|b_n x^n| &\leq \sum_{k=0}^{m} |a_k||x|^n + \sum_{k=m+1}^{n} |a_k||x|^n = |x|^{n-m} \sum_{k=0}^{m} |a_k||x|^m + \sum_{k=m+1}^{n} |a_k||x|^n \\ &\leq |x|^{n-m} \sum_{k=0}^{m} |a_k||x|^k + \sum_{k=m+1}^{n} |a_k||x|^k \to 0 + 0 = 0.\end{aligned}$$

Το πρώτο μέρος του τελευταίου αθροίσματος τείνει στον 0, διότι $n - m \geq n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2} \to +\infty$ και διότι το $\sum_{k=0}^{m} |a_k||x|^k$ είναι φραγμένο, αφού η σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ συγκλίνει απολύτως. Το δεύτερο μέρος τείνει στον 0, διότι $m \to +\infty$ και, πάλι, η σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ συγκλίνει απολύτως. Άρα $b_n x^n \to 0$, οπότε από την (14.281) συνεπάγεται ότι η σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ συγκλίνει και

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = (1 - x) \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n.$$

Το δεύτερο ερώτημα. Με $\alpha = -m$ και $m \in \mathbb{N}$ έχουμε να αποδείξουμε ότι

$$(1 + x)^{-m} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{-m}{n} x^n$$

και μπορείτε να το κάνετε με επαγωγή ως προς m.

Άσκηση 10.2.20. *Έστω αριθμοί p, q, όχι και οι δύο ίσοι με 0, και δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Υποθέτουμε ότι ισχύει $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$. Αποδείξτε ότι για κάθε x στο διάστημα σύγκλισής της η δυναμοσειρά έχει άθροισμα $\frac{a_0 + (a_1 - pa_0)x}{1 - px - qx^2}$ (μετά από απλοποίηση, αν αυτή είναι εφικτή) και υπολογίστε την ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς συναρτήσει των p, q.*

Λύση: Έστω $s(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ το άθροισμα της δυναμοσειράς στο διάστημα σύγκλισής της I. Πολλαπλασιάζουμε τη σχέση $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$ με x^{n+2} και προσθέτουμε:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+2} x^{n+2} = px \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} x^{n+1} + qx^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Συνεπάγεται

$$s(x) - a_0 - a_1 x = px(s(x) - a_0) + qx^2 s(x)$$

και άρα ισχύει

$$(1 - px - qx^2)s(x) = a_0 + (a_1 - pa_0)x \qquad \text{για κάθε } x \in I. \tag{14.282}$$

Τώρα διακρίνουμε περιπτώσεις.
Έστω $q = 0$, οπότε $p \neq 0$, και τότε υπάρχει ο παράγων $1 - px$ στην αριστερή μεριά της (14.282). Αν η ρίζα $\frac{1}{p}$ του παράγοντα αυτού δεν ανήκει στο I, τότε ισχύει $s(x) = \frac{a_0 + (a_1 - pa_0)x}{1 - px}$ για κάθε $x \in I$. Αν η ρίζα $\frac{1}{p}$ του παράγοντα αυτού ανήκει στο I, τότε, λόγω της (14.282), πρέπει ο $\frac{1}{p}$ να είναι ρίζα και της δεξιάς μεριάς, οπότε ισχύει $a_1 = 0$. Επομένως, η (14.282) γράφεται $(1 - px)s(x) = a_0(1 - px)$. Αυτό ισχύει για κάθε $x \in I$ και άρα ισχύει $s(x) = a_0$ για κάθε $x \in I$ εκτός του $x = \frac{1}{p}$. Επειδή, όμως και οι δύο μεριές αυτής της ισότητας είναι συνεχείς στο I, συνεπάγεται ότι ισχύει $s(x) = a_0$ για κάθε $x \in I$ (συμπεριλαμβανομένου και του $x = \frac{1}{p}$).
Έστω $q \neq 0$. Αν ο παράγων $1 - px - qx^2$ δεν έχει πραγματικές ρίζες ή καμία από τις πραγματικές ρίζες του δεν ανήκει στο I, τότε ισχύει $s(x) = \frac{a_0 + (a_1 - pa_0)x}{1 - px - qx^2}$ για κάθε $x \in I$. Αν τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα ξ του παράγοντα $1 - px - qx^2$ ανήκει στο I, τότε έχουμε $-q(x - \xi)(x - \eta)s(x) = a_0 + (a_1 - pa_0)x$ για κάθε $x \in I$ (όπου η είναι η δεύτερη ρίζα του $1 - px - qx^2$). Τότε ο ξ είναι ρίζα και της δεξιάς μεριάς της ισότητας, οπότε συνεπάγεται ότι $a_0 + (a_1 - pa_0)x = -pa_0(x - \xi)$. Άρα ισχύει $-q(x - \eta)s(x) = -pa_0$ για κάθε $x \in I$ εκτός του $x = \xi$. Επειδή και οι δύο μεριές της τελευταίας ισότητας είναι συνεχείς στο I, ισχύει $-q(x - \eta)s(x) = -pa_0$ για κάθε $x \in I$. Τώρα, αν ο η δεν ανήκει στο I, ισχύει $s(x) = \frac{pa_0}{q(x - \eta)}$ για κάθε $x \in I$. Αν ο η ανήκει στο I, τότε με $x = \eta$ συνεπάγεται $pa_0 = 0$, οπότε ισχύει $q(x - \eta)s(x) = 0$ για κάθε $x \in I$. Άρα ισχύει $s(x) = 0$ για κάθε $x \in I$ εκτός του $x = \eta$ και, επειδή οι δύο μεριές της ισότητας αυτής είναι συνεχείς στο I, ισχύει $s(x) = 0$ για κάθε $x \in I$. (Προσέξτε ότι καμία από τις ρίζες ξ, η του $1 - px - qx^2$ δεν είναι ίση με 0.)

Άρα, σε κάθε περίπτωση, ισχύει $s(x) = \frac{a_0+(a_1-pa_0)x}{1-px-qx^2}$ στο I μετά από κάθε εφικτή απλοποίηση του $\frac{a_0+(a_1-pa_0)x}{1-px-qx^2}$.
Τώρα, σχετικά με τον υπολογισμό της ακτίνας σύγκλισης της δυναμοσειράς θα περιοριστούμε στη διατύπωση του αποτελέσματος και σε μια υπόδειξη, αφήνοντας τη λύση στον αναγνώστη.
Αφού γίνει η οποιαδήποτε δυνατή απλοποίηση του λόγου $\frac{a_0+(a_1-pa_0)x}{1-px-qx^2}$, βρίσκουμε την ρίζα ή τις ρίζες του παρονομαστή. Αν υπάρχει μόνο μία πραγματική ρίζα ξ, τότε η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι ίση με $|\xi|$. Αν υπάρχουν δύο πραγματικές ρίζες ξ_1, ξ_2, τότε η ακτίνα σύγκλισης είναι ίση με $\min\{|\xi_1|, |\xi_2|\}$. Αν υπάρχουν δύο συζυγείς μιγαδικές ρίζες $\kappa \pm i\lambda$ (με $\lambda \neq 0$), τότε η ακτίνα σύγκλισης είναι ίση με $\sqrt{\kappa^2+\lambda^2}$. Δηλαδή, σε κάθε περίπτωση η ακτίνα σύγκλισης είναι ίση με την απόσταση του 0 από την κοντινότερη προς αυτόν ρίζα (πραγματική ή μιγαδική) του παρονομαστή. Για την απόδειξη θα βοηθήσουν, ίσως, τα αποτελέσματα της άσκησης 2.1.10.

Άσκηση 10.2.21. *Αν οι $\sum_{m=0}^{+\infty} a_m$ και $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ συγκλίνουν και αν και το γινόμενο Cauchy $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k$ των δύο σειρών συγκλίνει, αποδείξτε ότι $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m \ \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$.*

Υπόδειξη: Οι δυναμοσειρές $\sum_{m=0}^{+\infty} a_m x^m$ και $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ έχουν ως διαστήματα σύγκλισης τουλάχιστον το $(-1,1]$. Το γινόμενο Cauchy τους είναι η δυναμοσειρά $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$ και έχει κι αυτή ως διάστημα σύγκλισης τουλάχιστον το $(-1,1]$. Λόγω απόλυτης σύγκλισης στο διάστημα $(-1,1)$, από το θεώρημα 8.4 συνεπάγεται ότι ισχύει $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m x^m \ \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ για κάθε $x \in (-1,1)$. Το συμπέρασμα προκύπτει από το θεώρημα 10.8.

Άσκηση 10.2.22. *Έστω ότι η $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ έχει ακτίνα σύγκλισης R ώστε $0 < R \leq +\infty$ και έστω $\eta \in (\xi - R, \xi + R)$, δηλαδή $|\eta - \xi| < R$. Αφού αποδείξετε ότι για κάθε $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 0$ η σειρά $\sum_{n=m}^{+\infty} \binom{n}{m} a_n (\eta-\xi)^{n-m}$ συγκλίνει απολύτως, θεωρήστε τους $b_m = \sum_{n=m}^{+\infty} \binom{n}{m} a_n(\eta-\xi)^{n-m}$ και αποδείξτε ότι*
(i) η ακτίνα σύγκλισης της $\sum_{m=0}^{+\infty} b_m(x-\eta)^m$ είναι $\geq R - |\eta - \xi|$ και
(ii) για κάθε x με $|x-\eta| < R - |\eta-\xi|$ ισχύει $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n = \sum_{m=0}^{+\infty} b_m(x-\eta)^m$.

Υπόδειξη: Θεωρήστε τη διπλή σειρά $\sum_{m,n=0}^{+\infty} c_{m,n} a_n(\eta-\xi)^{n-m}$, όπου $c_{m,n} = \binom{n}{m}$ αν $0 \leq m \leq n$ και $c_{m,n} = 0$ αν $0 \leq n < m$, και εφαρμόστε τα θεωρήματα 8.2 και 8.3.

Άσκηση 10.2.23. *Έστω ότι η $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ έχει ακτίνα σύγκλισης R ώστε $0 < R \leq +\infty$ και έστω $a_0 \neq 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\sum_{m=0}^{+\infty} b_m(x-\xi)^m$ με ακτίνα σύγκλισης R^* ώστε $0 < R^* \leq +\infty$ και ώστε να ισχύει $\sum_{m=0}^{+\infty} b_m(x-\xi)^m \ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n = 1$ για κάθε x με $|x-\xi| < \min\{R, R^*\}$.*

Λύση: Θεωρούμε το γινόμενο Cauchy των σειρών $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ και $\sum_{m=0}^{+\infty} b_m(x-\xi)^m$. Το γινόμενο Cauchy είναι η δυναμοσειρά $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k(x-\xi)^k$, όπου $c_k = \sum_{m=0}^{k} a_{k-m} b_m$. Γνωρίζουμε ότι, αν οι δύο σειρές συγκλίνουν απολύτως, τότε και το γινόμενο Cauchy τους συγκλίνει απολύτως και το άθροισμά του είναι ίσο με το γινόμενο των αθροισμάτων των δύο σειρών. Υποθέτοντας, λοιπόν, ότι υπάρχει η $\sum_{m=0}^{+\infty} b_m(x-\xi)^m$ και ότι έχει θετική ακτίνα σύγκλισης R^*, τότε για κάθε x με $|x-\xi| < \min\{R, R^*\}$ θα ισχύει

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k(x-\xi)^k = \sum_{m=0}^{+\infty} b_m(x-\xi)^m \ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n = 1$$

και άρα θα ισχύει

$$c_0 = 1, \qquad c_k = 0 \quad \text{για } k \geq 1.$$

Αυτές οι σχέσεις γράφονται ως ένα σύστημα με άπειρες εξισώσεις και άπειρους αγνώστους b_m :

$$\begin{aligned} a_0 b_0 &= 1 \\ a_0 b_1 + a_1 b_0 &= 0 \\ a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 &= 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots &= 0 \end{aligned}$$

Από την πρώτη ισότητα προσδιορίζουμε τον $b_0 = \frac{1}{a_0}$. Κατόπιν, από τη δεύτερη προσδιορίζουμε τον $b_1 = -\frac{a_1}{a_0} b_0$. Μετά, από την τρίτη ισότητα προσδιορίζουμε τον $b_2 = -\frac{a_2}{a_0} b_0 - \frac{a_1}{a_0} b_1$ και ούτω καθ' εξής. Έτσι προσδιορίζονται όλοι οι b_m επαγωγικά με τον τύπο

$$b_0 = \tfrac{1}{a_0} \qquad \text{και} \qquad b_m = -\tfrac{a_m}{a_0} b_0 - \cdots - \tfrac{a_1}{a_0} b_{m-1} \quad \text{για } m \geq 1. \tag{14.283}$$

Αφού προσδιορίσαμε τους b_m πρέπει να αποδείξουμε ότι η δυναμοσειρά $\sum_{m=0}^{+\infty} b_m (x-\xi)^m$ έχει θετική ακτίνα σύγκλισης.

Έχουμε ότι $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R} < +\infty$, οπότε, αν θεωρήσουμε οποιονδήποτε αριθμό $u > \frac{1}{R}$, συνεπάγεται ότι ισχύει τελικά $\sqrt[n]{|a_n|} \leq u$. Δηλαδή, υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $|a_n| \leq u^n$ για κάθε $n \geq n_0$. Ορίζουμε τον αριθμό

$$M = \max\left\{1, |a_0|, \tfrac{|a_1|}{u}, \ldots, \tfrac{|a_{n_0-1}|}{u^{n_0-1}}\right\}$$

και τότε εύκολα βλέπουμε ότι ισχύει

$$|a_n| \leq M u^n \qquad \text{για κάθε } n \geq 0.$$

Τώρα, από την (14.283) συνεπάγεται ότι ισχύει

$$|b_0| = \tfrac{1}{|a_0|} \leq \tfrac{M}{|a_0|} \qquad \text{και} \qquad |b_m| \leq \tfrac{M}{|a_0|}(u^m |b_0| + \cdots + u|b_{m-1}|) \quad \text{για } m \geq 1. \tag{14.284}$$

Από αυτές τις σχέσεις θα αποδείξουμε ότι υπάρχουν αριθμοί $N > 0$ και $u^* > 0$ ώστε να ισχύει

$$|b_m| \leq N(u^*)^m \qquad \text{για κάθε } m \geq 0. \tag{14.285}$$

Πάμε με επαγωγή. Πρώτα πρέπει να ισχύει $|b_0| \leq N$ και γι αυτό αρκεί - λόγω της (14.284) - να ισχύει

$$\tfrac{M}{|a_0|} \leq N.$$

Κατόπιν, για κάθε $m \geq 1$, από τις $|b_j| \leq N(u^*)^j$ για $j = 0, \ldots m-1$ πρέπει να συνεπάγεται η $|b_m| \leq N(u^*)^m$. Αυτό, λόγω της (14.284), είναι σωστό αρκεί να ισχύει

$$\tfrac{M}{|a_0|}(u^m N + \cdots + uN(u^*)^{m-1}) \leq N(u^*)^m \qquad \text{για } m \geq 1$$

ή, ισοδύναμα,

$$\left(\tfrac{u}{u^*}\right)^m + \cdots + \tfrac{u}{u^*} \leq \tfrac{|a_0|}{M} \qquad \text{για } m \geq 1$$

ή, ισοδύναμα,

$$\tfrac{u}{u^*} \, \tfrac{1-(u/u^*)^m}{1-(u/u^*)} \leq \tfrac{|a_0|}{M} \qquad \text{για } m \geq 1.$$

Τώρα, θεωρώντας ότι $\frac{u}{u^*} < 1$, βλέπουμε ότι αρκεί να ισχύει

$$\tfrac{u/u^*}{1-(u/u^*)} \leq \tfrac{|a_0|}{M}$$

ή, ισοδύναμα,

$$\tfrac{u}{u^*} \leq \tfrac{|a_0|}{M+|a_0|}.$$

Επομένως, καταλήγουμε στο ότι αν πάρουμε οποιονδήποτε $N \geq \frac{M}{|a_0|}$ και οποιονδήποτε $u^* \geq u\frac{M+|a_0|}{|a_0|}$, τότε ισχύει η (14.285). Από την (14.285) συνεπάγεται ότι ισχύει $\sqrt[m]{|b_m|} \leq \sqrt[m]{N} u^*$ για κάθε m και, επομένως, $\overline{\lim} \sqrt[m]{|b_m|} \leq u^*$. Παίρνοντας, ειδικότερα, τον $u^* = u\frac{M+|a_0|}{|a_0|}$, βρίσκουμε ότι η δυναμοσειρά $\sum_{m=0}^{+\infty} b_m(x-\xi)^m$ έχει θετική ακτίνα σύγκλισης R^* η οποία είναι $\geq \frac{1}{u^*} = \frac{1}{u}\,\frac{|a_0|}{M+|a_0|}$. Δηλαδή, βρήκαμε ότι ισχύει $R^* \geq \frac{1}{u}\,\frac{|a_0|}{M+|a_0|}$ για κάθε $u > \frac{1}{R}$ και άρα ισχύει

$$R^* \geq R\tfrac{|a_0|}{M+|a_0|} > 0.$$

Άσκηση 10.2.24. *Αποδείξτε ότι, αν η $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$, τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $a_n = 0$ για κάθε $n \geq n_0$ (δηλαδή, η δυναμοσειρά "εκφυλίζεται" σε πολυώνυμο).*

Υπόδειξη: Δείτε την άσκηση 9.2.23.

Άσκηση 10.2.25. [α] *Θεωρήστε τη δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$. Βρείτε το διάστημα σύγκλισής της και έναν συνοπτικό τύπο για τη συνάρτηση που ορίζεται από αυτήν, αφού πρώτα βρείτε έναν συνοπτικό τύπο για την δεύτερη παράγωγό της στο διάστημα σύγκλισης.*

Λύση: Ο συντελεστής του x^n είναι ίσος με $\frac{1}{(n-1)n}$ για $n \geq 2$ και ίσος με 0 για $n=0$ και $n=1$. Υπολογίζουμε

$$\sqrt[n]{\left|\frac{1}{(n-1)n}\right|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n-1}\,\sqrt[n]{n}} \to 1,$$

οπότε $\overline{\lim}\,\sqrt[n]{\left|\frac{1}{(n-1)n}\right|} = 1$ και η ακτίνα σύγκλισης είναι ίση με 1.
Για $x = \pm 1$ η δυναμοσειρά γίνεται $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\pm 1)^{n+1}}{n(n+1)}$ και συγκλίνει (απολύτως).
Άρα το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι το $[-1,1]$.
Αν $s(x)$ είναι η συνάρτηση που ορίζεται από την δυναμοσειρά, τότε

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d}{dx}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \qquad \text{για } x \in (-1,1)$$

και

$$s''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d}{dx}\frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x} \qquad \text{για } x \in (-1,1).$$

Συνεπάγεται ότι υπάρχει σταθερά c ώστε να ισχύει $s'(x) = -\log(1-x) + c$ για $x \in (-1,1)$ και, επειδή $s'(0) = 0$, είναι $0 = s'(0) = -\log(1-0) + c$, οπότε $c = 0$. Άρα

$$s'(x) = -\log(1-x) \qquad \text{για } x \in (-1,1).$$

Επομένως, υπάρχει σταθερά c ώστε να ισχύει $s(x) = (1-x)\log(1-x) + x + c$ για $x \in (-1,1)$. Επειδή $s(0) = 0$, είναι $0 = s(0) = (1-0)\log(1-0) + 0 + c$, οπότε $c = 0$. Άρα

$$s(x) = (1-x)\log(1-x) + x \qquad \text{για } x \in (-1,1).$$

Επειδή το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι το $[-1,1]$, συνεπάγεται ότι η $s(x)$ είναι συνεχής και στα σημεία ± 1.
Άρα

$$s(-1) = \lim_{x\to -1+} s(x) = \lim_{x\to -1+} \big((1-x)\log(1-x) + x\big) = 2\log 2 - 1$$

και

$$s(1) = \lim_{x\to 1-} s(x) = \lim_{x\to 1-} \big((1-x)\log(1-x) + x\big) = 1.$$

Άρα

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = \begin{cases} (1-x)\log(1-x) + x, & \text{αν } x \in [-1,1) \\ 1, & \text{αν } x = 1 \end{cases}$$

Άσκηση 10.2.26. *Έστω ότι ισχύει $s(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2^n}$ για κάθε $x \in (-1,1)$. Αποδείξτε ότι υπάρχει M ώστε να ισχύει $|s'(x)| \leq \frac{M}{1-|x|}$ για κάθε $x \in (-1,1)$.*

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το κριτήριο συμπύκνωσης του Cauchy.

Άσκηση 10.2.27. *Αποδείξτε το θεώρημα του Tauber: Έστω ότι η ακτίνα σύγκλισης της $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ είναι 1 και $s(x)$ είναι η συνάρτηση που ορίζεται από τη δυναμοσειρά στο διάστημα $(-1,1)$. Αν $na_n \to 0$ και $\lim_{x\to 1-} s(x) = p$, τότε $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = p$.*

Λύση: Θεωρούμε τυχόντα $n \in \mathbb{N}$ και τον $x_n = 1 - \frac{1}{n}$ και έχουμε

$$\sum_{k=0}^{n} a_k - s(x_n) = \sum_{k=1}^{n} a_k(1 - {x_n}^k) - \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k {x_n}^k.$$

Επειδή $1 - x_n{}^k = (1-x_n)(1+x_n+\cdots+x_n{}^{k-1}) \leq k(1-x_n)$, συνεπάγεται

$$\begin{aligned}\big|\textstyle\sum_{k=0}^{n} a_k - s(x_n)\big| &\leq (1-x_n)\textstyle\sum_{k=1}^{n} k|a_k| + \sum_{k=n+1}^{+\infty} |a_k| x_n{}^k \\ &= \tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{k=1}^{n} k|a_k| + x_n{}^{n+1}\sum_{k=n+1}^{+\infty} |a_k| x_n{}^{k-n-1} \\ &\leq \tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{k=1}^{n} k|a_k| + \sum_{k=n+1}^{+\infty} |a_k| x_n{}^{k-n-1}.\end{aligned} \tag{14.286}$$

Τώρα, έστω $\epsilon > 0$. Επειδή $na_n \to 0$, υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $n|a_n| < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα ισχύει

$$\textstyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} |a_k| x_n{}^{k-n-1} < \epsilon \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k} x_n{}^{k-n-1} < \frac{\epsilon}{n}\sum_{k=0}^{+\infty} x_n{}^k = \frac{\epsilon}{n}\frac{1}{1-x_n} = \epsilon$$

για κάθε $n \geq n_0$. Επομένως, ο δεύτερος όρος του τελευταίου αθροίσματος της (14.286) συγκλίνει στον 0 όταν $n \to +\infty$.
Τέλος, ο πρώτος όρος $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k|a_k|$ συγκλίνει κι αυτός στον 0 λόγω του θεωρήματος του Cesaro στην άσκηση 2.3.41.
Άρα από την (14.286) έχουμε ότι $\sum_{k=0}^{n} a_k - s(x_n) \to 0$ και, επειδή $s(x_n) \to p$, συνεπάγεται ότι $\sum_{k=0}^{n} a_k \to p$.

Άσκηση 10.2.28. *Έστω ότι η ακτίνα σύγκλισης της $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ είναι 1 και $s(x)$ είναι η συνάρτηση που ορίζεται από τη δυναμοσειρά στο διάστημα $(-1,1)$. Αν ισχύει $a_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, αποδείξτε ότι η $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν το $\lim_{x\to 1-} s(x)$ υπάρχει και είναι αριθμός.*

Λύση: Έστω ότι η $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ συγκλίνει. Τότε το διάστημα σύγκλισης της $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ περιέχει και τον 1. Επομένως, η $s(x)$ ορίζεται στο $(-1,1]$ (πιθανόν και στο $[-1,1]$) και είναι συνεχής στον 1. Άρα, ανεξάρτητα από το αν ισχύει $a_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ή όχι, συνεπάγεται ότι

$$\textstyle\lim_{x\to 1-} s(x) = s(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Αντιστρόφως, έστω ότι ισχύει $a_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και έστω ότι το $\lim_{x\to 1-} s(x) = s$ υπάρχει και είναι αριθμός.
Είναι εύκολο να δούμε ότι η s είναι αύξουσα στο $[0,1)$. Πράγματι, αν $0 \leq x_1 < x_2 < 1$, τότε, επειδή $a_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε

$$\textstyle s(x_1) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_1{}^n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_2{}^n = s(x_2).$$

Ή, με άλλον τρόπο,

$$\textstyle s'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \geq 0 \qquad \text{για κάθε } x \in [0,1).$$

Επομένως, ισχύει

$$\textstyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = s(x) \leq s \qquad \text{για κάθε } x \in [0,1).$$

Άρα για κάθε n ισχύει

$$\textstyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \leq s \qquad \text{για κάθε } x \in [0,1).$$

Άρα για κάθε n ισχύει

$$\textstyle\sum_{k=0}^{n} a_k = \lim_{x\to 1-} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \leq s.$$

Άρα η σειρά μη-αρνητικών όρων $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ έχει φραγμένα μερικά αθροίσματα με άνω φράγμα τον $s - a_0$ και, επομένως, συγκλίνει.

Άσκηση 10.2.29. *Έστω ότι η ακτίνα σύγκλισης της $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$ είναι R. Αν $m \in \mathbb{N}$, βρείτε τις ακτίνες σύγκλισης των $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^m (x-x_0)^n$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^{mn}$ και $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{mn} (x-x_0)^n$.*

Λύση: Η πρώτη σειρά. $\sqrt[n]{|a_n^m|} = \big(\sqrt[n]{|a_n|}\big)^m$. Συμπεραίνουμε ότι

$$\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n^m|} = \big(\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}\big)^m = \big(\tfrac{1}{R}\big)^m = \tfrac{1}{R^m}.$$

Επομένως, η ακτίνα σύγκλισης της $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^m (x-x_0)^n$ είναι ίση με R^m.
Η δεύτερη σειρά. Αν γράψουμε την $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^{mn}$ στη μορφή $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k(x-x_0)^k$, τότε ο c_k είναι ίσος με 0, αν ο k δεν είναι πολλαπλάσιος του m, και είναι ίσος με a_n, αν ο $k=mn$ είναι πολλαπλάσιος του m. Άρα η υποακολουθία της $\big(\sqrt[k]{|c_k|}\big)$ με δείκτες που δεν είναι πολλαπλάσιοι του m είναι σταθερή 0, οπότε έχει όριο 0, ενώ για την υποακολουθία της $\big(\sqrt[k]{|c_k|}\big)$ με δείκτες που είναι πολλαπλάσιοι του m έχουμε $\sqrt[mn]{|c_{mn}|} = \sqrt[mn]{|a_n|} = \big(\sqrt[n]{|a_n|}\big)^{1/m}$. Άρα,

$$\overline{\lim}\, \sqrt[k]{|c_k|} = \big(\overline{\lim}\, \sqrt[n]{|a_n|}\big)^{1/m} = \big(\tfrac{1}{R}\big)^{1/m}.$$

Επομένως, η ακτίνα σύγκλισης της $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^{mn}$ είναι ίση με $R^{1/m}$.
Η τρίτη σειρά. Έχουμε

$$\overline{\lim}\, \sqrt[n]{|a_{nm}|} = \big(\overline{\lim}\, \sqrt[nm]{|a_{nm}|}\big)^m.$$

Η $\big(\sqrt[nm]{|a_{nm}|}\big)$ είναι υποακολουθία της $\big(\sqrt[n]{|a_n|}\big)$, οπότε συνεπάγεται

$$\overline{\lim}\, \sqrt[nm]{|a_{nm}|} \le \overline{\lim}\, \sqrt[n]{|a_n|} = \tfrac{1}{R}.$$

Άρα

$$\overline{\lim}\, \sqrt[n]{|a_{nm}|} \le \big(\tfrac{1}{R}\big)^m = \tfrac{1}{R^m}.$$

Άρα η ακτίνα σύγκλισης της $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{mn}(x-x_0)^n$ είναι $\ge R^m$.
Στην περίπτωση αυτή δεν μπορούμε να προσδιορίσουμε την ακριβή τιμή της ακτίνας σύγκλισης της $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{mn}(x-x_0)^n$.
Πάρτε ως $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ την $\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n+1}$ και πάρτε $m=2$. Δηλαδή, $a_n=0$, αν ο n είναι άρτιος, και $a_n=1$, αν ο n είναι περιττός. Τότε υπολογίζεται εύκολα ότι η $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ έχει ακτίνα σύγκλισης $R=1$ ενώ η $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n}(x-x_0)^n$ είναι η σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} 0x^n$ και έχει ακτίνα σύγκλισης $+\infty$.

Άσκηση 10.3.1. *Χρησιμοποιήστε γνωστές σειρές Taylor για να βρείτε συνοπτικούς τύπους των δυναμοσειρών* $\sum_{n=1}^{+\infty}\big(1-(-2)^n\big)x^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n-1}x^{2n-1}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n}x^{2n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n-1}{n!}x^n$, $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^{2n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1}$, $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\log a)^n}{n!}x^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}x^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1\cdot4\cdot7\cdots(3n-2)}{3\cdot6\cdot9\cdots(3n)}x^n$.

Λύση: Βρείτε εσείς τα διαστήματα σύγκλισης:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\big(1-(-2)^n\big)x^n = \sum_{n=1}^{+\infty}x^n - \sum_{n=1}^{+\infty}(-2x)^n = \tfrac{x}{1-x}+\tfrac{2x}{1+2x} = \tfrac{3x}{1+x-2x^2}.$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{1}{2n}x^{2n} = \tfrac12\sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac1n x^{2n} = \tfrac12\log\tfrac{1}{1-x^2} = \log\tfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{1}{2n-1}x^{2n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac1n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{1}{2n}x^{2n} = \log\tfrac{1}{1-x} - \tfrac12\log\tfrac{1}{1-x^2} = \log\sqrt{\tfrac{1+x}{1-x}}.$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{n-1}{n!}x^n = x\sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{1}{(n-1)!}x^{n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{1}{n!}x^n = xe^x-(e^x-1) = (x-1)e^x+1.$$
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\tfrac{(-1)^n}{n!}x^{2n} = e^{-x^2}.$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1} = \tfrac12\sum_{n=0}^{+\infty}\tfrac{1}{n!}x^n - \tfrac12\sum_{n=0}^{+\infty}\tfrac{1}{n!}(-x)^n = \tfrac12(e^x-e^{-x}) = \sinh x.$$
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\tfrac{(\log a)^n}{n!}x^n = e^{x\log a} = a^x.$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{(2n)!}{2^n(n!)^2}x^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\tbinom{-1/2}{n}(-2x)^n = (1-2x)^{-1/2}-1 = \tfrac{1}{\sqrt{1-2x}}-1.$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\tfrac{1\cdot4\cdot7\cdots(3n-2)}{3\cdot6\cdot9\cdots(3n)}x^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\tbinom{-1/3}{n}x^n = (1+x)^{-1/3}-1 = \tfrac{1}{\sqrt[3]{1+x}}-1.$$

Άσκηση 10.3.5. *Βρείτε τις σειρές Taylor στον* 0 *των* $\sin(x^3)$, $(\sin x)^3$, $\sin x\sin(3x)$, $(\sin x)^6+(\cos x)^6$, $\log(1+x+x^2)$, $\frac{1}{1-5x+6x^2}$.

Υπόδειξη: Για την $\sin(x^3)$ αντικαταστήστε τον x με τον x^3 στη σειρά Taylor στον 0 της $\sin x$.
Για την $(\sin x)^3$ γράψτε $(\sin x)^3 = \frac34\sin x - \frac14\sin(3x)$.
Για την $\sin x\sin(3x)$ γράψτε $\sin x\sin(3x) = \frac12\cos(2x) - \frac12\cos(4x)$.

Για την $(\sin x)^6 + (\cos x)^6$ γράψτε $(\sin x)^6 + (\cos x)^6 = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos(4x)$.
Για την $\log(1 + x + x^2)$ γράψτε $1 + x + x^2 = \frac{1-x^3}{1-x}$.
Για την $\frac{1}{1-5x+6x^2}$ χωρίστε σε απλούς λόγους.

Άσκηση 10.3.6. *Υπολογίστε τα αθροίσματα* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n)^2-1}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)^2-1}$.

Υπόδειξη: Χωρίστε τα $\frac{1}{(2n)^2-1}$ και $\frac{1}{(2n+1)^2-1}$ σε απλούς λόγους.

Άσκηση 10.3.7. *Η άσκηση 5.6.16 λέει ότι η* $h(x) = \begin{cases} e^{-1/x}, & \text{αν } x > 0 \\ 0, & \text{αν } x \leq 0 \end{cases}$ *είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο* $\mathbb{R}$ *και ότι* $h^{(n)}(0) = 0$ *για κάθε* n. *Αναπαριστά σε κάποιο διάστημα με μέσο τον* 0 *και που δεν αποτελείται μόνο από τον* 0 *η σειρά Taylor* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{h^{(n)}(0)}{n!} x^n$ *στον* 0 *την* h; *Ποιό είναι το διάστημα σύγκλισης αυτής της δυναμοσειράς;*

Λύση: Η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{h^{(n)}(0)}{n!} x^n$ είναι η μηδενική δυναμοσειρά και άρα έχει διάστημα σύγκλισης το $(-\infty, +\infty)$ και συγκλίνει στη μηδενική συνάρτηση στο διάστημα αυτό.
Αν η σειρά Taylor της h στον 0 αναπαριστούσε την h σε κάποιο διάστημα με μέσο τον 0 και που δεν αποτελείται μόνο από τον 0, τότε θα συνέκλινε στην h σε κάποιο διάστημα $(-R, R)$ με $R > 0$ και, επομένως, θα ίσχυε $h(x) = 0$ για $-R < x < R$. Αυτό είναι, φυσικά, άτοπο.

Άσκηση 10.3.8. *Αποδείξτε ότι η* $f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-k} \cos(k^2 x)$ *είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο* $\mathbb{R}$ *και ότι η σειρά Taylor* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ *συγκλίνει μόνο όταν* $x = 0$.

Λύση: Για κάθε k ισχύει $|e^{-k} \cos(k^2 x)| \leq e^{-k}$ για κάθε x και $\sum_{k=1}^{+\infty} e^{-k} < +\infty$. Από το κριτήριο του Weierstrass συνεπάγεται ότι η σειρά συγκλίνει σε συνάρτηση - η οποία έχει ήδη ονομασθεί $f(x)$ στη διατύπωση της άσκησης - ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.
Η σειρά των παραγώγων συναρτήσεων είναι η

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{d}{dx}(e^{-k} \cos(k^2 x)) = -\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 e^{-k} \sin(k^2 x).$$

Πάλι με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι, επειδή $\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 e^{-k} < +\infty$, η σειρά αυτή συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάποια συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ και, επομένως, η συνάρτηση αυτή είναι η παράγωγος της f. Άρα

$$f'(x) = -\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 e^{-k} \sin(k^2 x) \qquad \text{για κάθε } x.$$

Συνεχίζοντας επαγωγικά, βλέπουμε εύκολα ότι η f είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ότι

$$f^{(2m)}(x) = (-1)^m \sum_{k=1}^{+\infty} k^{4m} e^{-k} \cos(k^2 x) \qquad \text{για κάθε } x,$$
$$f^{(2m-1)}(x) = (-1)^m \sum_{k=1}^{+\infty} k^{4m-2} e^{-k} \sin(k^2 x) \qquad \text{για κάθε } x.$$

Όλα αυτά εξαρτώνται, φυσικά, από το ότι ισχύει $\sum_{k=1}^{+\infty} k^p e^{-k} < +\infty$ για κάθε p.
Άρα, ειδικώτερα,

$$f^{(2m)}(0) = (-1)^m \sum_{k=1}^{+\infty} k^{4m} e^{-k}, \qquad f^{(2m-1)}(0) = 0,$$

οπότε η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ γράφεται

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{f^{(2m)}(0)}{(2m)!} x^{2m} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m)!} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} k^{4m} e^{-k} \right) (-x^2)^m.$$

Θέτουμε $t = -x^2$ και βρίσκουμε την δυναμοσειρά

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m)!} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} k^{4m} e^{-k} \right) t^m. \tag{14.287}$$

Αν η αρχική δυναμοσειρά συγκλίνει για κάποιον $x \neq 0$, τότε και η τελευταία δυναμοσειρά συγκλίνει για κάποιον $t \neq 0$ και, επειδή το διάστημα σύγκλισης πρέπει να είναι συμμετρικό ως προς

τον 0, θα συγκλίνει για κάποιον $t > 0$.
Τώρα μελετάμε τη σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} k^{4m}e^{-k}$. Εύκολα βλέπουμε ότι η συνάρτηση $x^{4m}e^{-x}$ έχει μέγιστη τιμή για $x = 4m$ και απομονώνουμε τον αντίστοιχο όρο της $\sum_{k=1}^{+\infty} k^{4m}e^{-k}$. Έτσι, επειδή όλοι οι υπόλοιποι όροι της σειράς είναι μη-αρνητικοί, έχουμε

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^{4m}e^{-k} \geq (4m)^{4m}e^{-4m}.$$

Σε σχέση με τη δυναμοσειρά (14.287) συνεπάγεται ότι για κάθε $t \geq 0$ ισχύει

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m)!}\big(\sum_{k=1}^{+\infty} k^{4m}e^{-k}\big)t^m \geq \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(4m)^{4m}e^{-4m}}{(2m)!}t^m. \tag{14.288}$$

Άρα, αν η σειρά στην αριστερή μεριά συγκλίνει για κάποιον $t > 0$, τότε συγκλίνει και η σειρά στη δεξιά μεριά για τον ίδιο $t > 0$. Εφαρμόζοντας το κριτήριο λόγου με τυχόντα $t > 0$ στη σειρά της δεξιάς μεριάς βρίσκουμε ότι

$$\frac{(4m+4)^{4m+4}e^{-4m-4}t^{m+1}/(2m+2)!}{(4m)^{4m}e^{-4m}t^m/(2m)!} = \big(\tfrac{4}{e}\big)^4\big(1+\tfrac{1}{m}\big)^{4m}\frac{(m+1)^4}{(2m+1)(2m+2)} \to +\infty,$$

οπότε η σειρά στη δεξιά μεριά της (14.288) αποκλίνει στο $+\infty$ για κάθε $t > 0$.

Άσκηση 10.3.9. *Έστω ότι η $f : I \to \mathbb{R}$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα I. Η f χαρακτηρίζεται* **πραγματική-αναλυτική** *στο I αν για κάθε $\xi \in I$ υπάρχει $r > 0$ ώστε $(\xi - r, \xi + r) \subseteq I$ και ώστε να ισχύει $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n$ για κάθε $x \in (\xi - r, \xi + r)$. Δηλαδή, η f είναι πραγματική-αναλυτική στο I αν για κάθε $\xi \in I$ η f αναπαρίσταται σε κάποιο ανοικτό διάστημα που περιέχει τον ξ από τη σειρά Taylor της στον ξ.*

Έστω ότι η $f : I \to \mathbb{R}$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα I. Αποδείξτε ότι η f είναι πραγματική-αναλυτική στο I αν και μόνο αν για κάθε $\xi \in I$ υπάρχει ανοικτό διάστημα $J \subseteq I$ ώστε $\xi \in J$ και αριθμοί $M \geq 0$, $\rho > 0$ ώστε να ισχύει $|f^{(n)}(x)| \leq M\frac{n!}{\rho^n}$ για κάθε $x \in J$ και κάθε $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$.

Αποδείξτε το **θεώρημα του Bernstein***: Έστω ότι η $f : I \to \mathbb{R}$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα I και έστω ότι ισχύει $f^{(n)}(x) \geq 0$ για κάθε $x \in I$ και κάθε $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$. Τότε η f είναι πραγματική-αναλυτική στο I.*

Έστω ότι η $f : I \to \mathbb{R}$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα I και έστω ότι ισχύει $(-1)^n f^{(n)}(x) \geq 0$ για κάθε $x \in I$ και κάθε $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$. Αποδείξτε ότι η f είναι πραγματική-αναλυτική στο I.

Λύση: Το πρώτο ερώτημα. Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα I και έστω ότι για κάθε $\xi \in I$ υπάρχει ανοικτό διάστημα $J \subseteq I$ ώστε $\xi \in J$ και αριθμοί $M \geq 0$, $\rho > 0$ ώστε να ισχύει $|f^{(n)}(x)| \leq M\frac{n!}{\rho^n}$ για κάθε $x \in J$ και κάθε $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$.
Θεωρούμε τυχόντα $\xi \in I$ και θα αποδείξουμε ότι η f αναπαρίσταται σε κάποιο ανοικτό διάστημα που περιέχει τον ξ από τη σειρά Taylor της στον ξ. Παίρνουμε το αντίστοιχο ανοικτό διάστημα $J \subseteq I$ το οποίο περιέχει τον ξ και τους αντίστοιχους $M \geq 0$, $\rho > 0$. Παίρνουμε και $\rho' > 0$ έτσι ώστε να είναι $(\xi - \rho', \xi + \rho') \subseteq J$ και κατόπιν θεωρούμε οποιονδήποτε $R > 0$ με $R < \min\{\rho, \rho'\} > 0$.
Τότε για κάθε $x \in (\xi - R, \xi + R)$ το υπόλοιπο Lagrange τάξης n της f στον ξ είναι ίσο με $R_{n,\xi}(x,\zeta) = \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}(x-\xi)^{n+1}$, όπου ο ζ είναι ανάμεσα στους ξ, x και άρα ανήκει στο J. Επομένως, έχουμε ότι

$$|R_{n,\xi}(x,\zeta)| = \big|\tfrac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}(x-\xi)^{n+1}\big| \leq M\tfrac{R^{n+1}}{\rho^{n+1}} = M\big(\tfrac{R}{\rho}\big)^{n+1} \to 0 \quad \text{όταν } n \to +\infty.$$

Άρα, σύμφωνα με το θεώρημα 10.11, η f αναπαρίσταται στο $(\xi - R, \xi + R)$ από τη σειρά Taylor της στον ξ.
Αντιστρόφως, έστω ότι για κάθε $\xi \in I$ η f αναπαρίσταται σε κάποιο ανοικτό διάστημα που περιέχει τον ξ από τη σειρά Taylor της στον $\xi \in I$. Θεωρούμε τυχόντα $\xi \in I$ και τη σειρά Taylor της f στον ξ. Τότε υπάρχει $R > 0$ ώστε να ισχύει

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n \qquad \text{για κάθε } x \in (\xi - R, \xi + R).$$

Η σειρά Taylor συγκλίνει απολύτως στο $(\xi - R, \xi + R)$ και η σειρά των απολύτων τιμών, ως δυναμοσειρά, ορίζει συνάρτηση συνεχή, έστω g, στο $(\xi - R, \xi + R)$. Δηλαδή, έχουμε

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|f^{(n)}(\xi)|}{n!}|x-\xi|^n \qquad \text{για κάθε } x \in (\xi - R, \xi + R).$$

Θεωρούμε $\rho' > 0$ με $\rho' < R$ και τότε η g είναι φραγμένη στο κλειστό διάστημα $[\xi - \rho', \xi + \rho']$. Δηλαδή, υπάρχει $M' \geq 0$ ώστε να ισχύει $g(x) \leq M'$ για κάθε $x \in [\xi - \rho', \xi + \rho']$. Άρα ισχύει $\frac{|f^{(n)}(\xi)|}{n!}|x-\xi|^n \leq g(x) \leq M'$ και, επομένως, με $x = \xi + \rho'$ έχουμε ότι ισχύει

$$|f^{(n)}(\xi)| \leq M' \frac{n!}{(\rho')^n} \qquad \text{για κάθε } n \in \mathbb{Z}, n \geq 0.$$

Κατόπιν, παίρνουμε $\rho'' > 0$ με $\rho'' < \rho'$ και τότε για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$ και κάθε $x \in (\xi - \rho'', \xi + \rho'')$ έχουμε

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} n(n-1)\cdots(n-k+1)(x-\xi)^{n-k}$$

και άρα

$$\begin{aligned} |f^{(k)}(x)| &\leq \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{|f^{(n)}(\xi)|}{n!} n(n-1)\cdots(n-k+1)|x-\xi|^{n-k} \\ &\leq M' \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{(\rho')^n} n(n-1)\cdots(n-k+1)(\rho'')^{n-k} \\ &\leq M' \frac{1}{(\rho')^k} \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)\Big(\frac{\rho''}{\rho'}\Big)^{n-k}. \end{aligned}$$

Παραγωγίζοντας k φορές τη σχέση $\sum_{n=0}^{+\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$, βρίσκουμε ότι ισχύει

$$\sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)t^{n-k} = \frac{k!}{(1-t)^{k+1}} \qquad \text{για } |t| < 1$$

και άρα έχουμε

$$|f^{(k)}(x)| \leq M' \frac{1}{(\rho')^k} \frac{k!}{(1-(\rho''/\rho'))^{k+1}} = \frac{M'}{\rho'-\rho''} \frac{k!}{(\rho'-\rho'')^k}.$$

Άρα με $J = (\xi - \rho'', \xi + \rho'')$, $M = \frac{M'}{\rho'-\rho''}$ και $\rho = \rho' - \rho''$ ισχύει $|f^{(k)}(x)| \leq M\frac{k!}{\rho^k}$ για κάθε $x \in J$ και κάθε $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$.

Το δεύτερο ερώτημα. Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα I και έστω ότι ισχύει $f^{(n)}(x) \geq 0$ για κάθε $x \in I$ και κάθε $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$.
Θεωρούμε τυχόντα $\xi \in I$.
Παίρνουμε $r > 0$ ώστε να είναι $[\xi - r, \xi + r] \subseteq I$ και θέτουμε $x_0 = \xi + r$. Κατόπιν παίρνουμε $r' > 0$ με $r' < r$ και εφαρμόζουμε το θεώρημα 5.1 με υπόλοιπο Lagrange:

$$f(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(x_0 - x)^k + \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}(x_0 - x)^{n+1},$$

όπου ο ζ είναι ανάμεσα στους x, x_0 και ο x ανήκει στο $(\xi - r', \xi + r')$.
Επειδή $\frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}(x_0 - x)^{n+1} \geq 0$, συνεπάγεται

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(x_0 - x)^k \leq f(x_0).$$

Αυτό ισχύει για κάθε n και, επειδή η σειρά $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(x_0 - x)^k$ έχει μη-αρνητικούς όρους, συνεπάγεται

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x_0 - x)^n \leq f(x_0).$$

Επομένως, ισχύει $\frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x_0 - x)^n \leq f(x_0)$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$ και κάθε $x \in (\xi - r', \xi + r')$.
Για κάθε $x \in (\xi - r', \xi + r')$ έχουμε $|x_0 - x| \geq r - r'$ και άρα ισχύει

$$|f^{(n)}(x)| \leq M\frac{n!}{\rho^n} \qquad \text{για κάθε } n \in \mathbb{Z}, n \geq 0,$$

με $J = (\xi - r', \xi + r')$ και $M = f(x_0)$, $\rho = r - r'$.
Τώρα, από το αποτέλεσμα του πρώτου ερωτήματος έχουμε ότι η f είναι πραγματική-αναλυτική στο I.

Το τρίτο ερώτημα. Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα I και έστω ότι ισχύει $(-1)^n f^{(n)}(x) \geq 0$ για κάθε $x \in I$ και κάθε $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$.
θεωρούμε το διάστημα $I^* = \{x \,|\, -x \in I\}$, δηλαδή το συμμετρικό του I ως προς τον 0, και εφαρμόζουμε το αποτέλεσμα του δεύτερου ερωτήματος στη συνάρτηση $g : I^* \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = f(-x)$ για κάθε $x \in I^*$.
Ισχύει $g^{(n)}(x) = (-1)^n f^{(n)}(-x) \geq 0$ για κάθε $x \in I$ και κάθε $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$. Σύμφωνα με το αποτέλεσμα του δεύτερου ερωτήματος, η g είναι πραγματική-αναλυτική στο I^* και τώρα αποδεικνύεται εύκολα ότι η f είναι πραγματική-αναλυτική στο I. Κάντε το εσείς.

Άσκηση 10.3.10. [α] *Έστω μ και $\nu \neq 0$ και $k \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις $\frac{x-\mu}{((x-\mu)^2+\nu^2)^k}$ και $\frac{1}{((x-\mu)^2+\nu^2)^k}$ αναπαρίστανται σε κάποιο ανοικτό διάστημα που περιέχει τον 0 από τις σειρές Taylor τους στον 0 και βρείτε τις ακτίνες σύγκλισης αυτών των σειρών Taylor.*
[β] *Αποδείξτε ότι κάθε ρητή συνάρτηση αναπαρίσταται από τη σειρά Taylor της σε κάθε σημείο στο πεδίο ορισμού της και βρείτε την αντίστοιχη ακτίνα σύγκλισης.*

Λύση: [α] Η πολυωνυμική συνάρτηση $(x-\mu)^2 + \nu^2$ έχει δύο συζυγείς μιγαδικές ρίζες: τις $z = \mu + i\nu$, $w = \mu - i\nu$. Οπότε γράφουμε $(x-\mu)^2 + \nu^2 = (x-z)(x-w)$ και χωρίζουμε σε απλούς λόγους:

$$\frac{1}{(x-\mu)^2+\nu^2} = \frac{1}{z-w}\,\frac{1}{x-z} - \frac{1}{z-w}\,\frac{1}{x-w} = -\frac{1}{2i\nu z}\,\frac{1}{1-(x/z)} + \frac{1}{2i\nu w}\,\frac{1}{1-(x/w)}.$$

Τώρα θα χρησιμοποιήσουμε γεωμετρικές σειρές με μιγαδικούς αριθμούς τελείως τυπικά, δηλαδή χωρίς να μας ενδιαφέρει η σύγκλιση ή απόκλιση των σειρών αυτών, με στόχο να δούμε που θα καταλήξουμε.
Έχουμε, λοιπόν,

$$\frac{1}{(x-\mu)^2+\nu^2} = -\frac{1}{2i\nu z}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{z}\right)^n + \frac{1}{2i\nu w}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{w}\right)^n = \frac{1}{2i\nu}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{w^{n+1}} - \frac{1}{z^{n+1}}\right)x^n.$$

Τώρα γράφουμε $\mu = r\cos\theta$, $\nu = r\sin\theta$ με $r = \sqrt{\mu^2+\nu^2} > 0$ και $\theta \in [0, 2\pi)$ και έχουμε ότι $\theta \neq 0$ και $\theta \neq \pi$ (επειδή $\nu \neq 0$). Συνεπάγεται ότι $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ και $w = r(\cos\theta - i\sin\theta)$ και άρα

$$\frac{1}{w^{n+1}} - \frac{1}{z^{n+1}} = \frac{2i\sin((n+1)\theta)}{r^{n+1}}.$$

Επομένως,

$$\frac{1}{(x-\mu)^2+\nu^2} = \frac{1}{2i\nu}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2i\sin((n+1)\theta)}{r^{n+1}}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin((n+1)\theta)}{r^{n+2}\sin\theta}x^n.$$

Σ' αυτήν την ισότητα φθάσαμε χωρίς να έχουμε αιτιολογήσει τα διάφορα βήματα και, επομένως, ενδέχεται να μην είναι σωστή. Ακριβώς τώρα θα αποδείξουμε αυστηρά αυτήν την ισότητα.
Η τελευταία δυναμοσειρά συγκλίνει απολύτως για κάθε $x \in (-r, r)$ και είναι εύκολο να δούμε ότι αποκλίνει όταν $x = \pm r$. Πράγματι, για $x = \pm r$ η σειρά γίνεται $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin((n+1)\theta)}{r^2\sin\theta}(\pm 1)^n$ και, αν συγκλίνει, συνεπάγεται ότι $\sin((n+1)\theta) \to 0$. Τότε, όμως, ισχύει και $\sin(n\theta) \to 0$. Από την $\sin((n+1)\theta) \to 0$ συνεπάγεται $\sin(n\theta)\cos\theta + \cos(n\theta)\sin\theta \to 0$. Επειδή $\sin(n\theta) \to 0$, από την τελευταία σχέση έχουμε ότι $\cos(n\theta)\sin\theta \to 0$ και, επειδή $\sin\theta \neq 0$, παίρνουμε ότι $\cos(n\theta) \to 0$. Τέλος, με τις $\sin(n\theta) \to 0$ και $\cos(n\theta) \to 0$ καταλήγουμε σε άτοπο, αφού $(\sin(n\theta))^2 + (\cos(n\theta))^2 = 1$.
Άρα η ακτίνα σύγκλισης της $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin((n+1)\theta)}{r^{n+2}\sin\theta}x^n$ είναι ίση με r και το διάστημα σύγκλισής της είναι το $(-r, r)$.
Τώρα, αν πολλαπλασιάσουμε την παράσταση

$$(x-\mu)^2 + \nu^2 = x^2 - 2\mu x + \mu^2 + \nu^2 = x^2 - 2x\cos\theta + r^2$$

με την δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin((n+1)\theta)}{r^{n+2}\sin\theta} x^n$ και κάνουμε τις πράξεις θα βρούμε ότι το γινόμενο είναι ίσο με 1 για κάθε $x \in (-r, r)$. Άρα ισχύει

$$\frac{1}{(x-\mu)^2+\nu^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin((n+1)\theta)}{r^{n+2}\sin\theta} x^n \qquad \text{για κάθε } x \in (-r, r). \tag{14.289}$$

Πολλαπλασιάζουμε τη σχέση αυτή με τον $x - \mu = x - r\cos\theta$ και έχουμε ότι για κάθε $x \in (-r, r)$ ισχύει

$$\begin{aligned}\frac{x-\mu}{(x-\mu)^2+\nu^2} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin((n+1)\theta)}{r^{n+2}\sin\theta} x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin((n+1)\theta)\cos\theta}{r^{n+1}\sin\theta} x^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{r^{n+1}\sin\theta} x^n - \frac{\cos\theta}{r} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin((n+1)\theta)\cos\theta}{r^{n+1}\sin\theta} x^n \\ &= -\frac{\cos\theta}{r} + \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{\sin(n\theta)}{r^{n+1}\sin\theta} - \frac{\sin((n+1)\theta)\cos\theta}{r^{n+1}\sin\theta}\Big) x^n \\ &= -\frac{\cos\theta}{r} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos((n+1)\theta)}{r^{n+1}} x^n \\ &= -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos((n+1)\theta)}{r^{n+1}} x^n.\end{aligned}$$

Ακριβώς όπως αποδείξαμε ότι το διάστημα σύγκλισης της $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin((n+1)\theta)}{r^{n+2}\sin\theta} x^n$ είναι το $(-r, r)$, αποδεικνύεται ότι και η $-\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos((n+1)\theta)}{r^{n+1}} x^n$ έχει διάστημα σύγκλισης το $(-r, r)$. Έχουμε, λοιπόν, ότι αυτή η δυναμοσειρά στο διάστημα σύγκλισής της αναπαριστά την $\frac{x-\mu}{(x-\mu)^2+\nu^2}$. Δηλαδή, ισχύει

$$\frac{x-\mu}{(x-\mu)^2+\nu^2} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos((n+1)\theta)}{r^{n+1}} x^n \qquad \text{για κάθε } x \in (-r, r). \tag{14.290}$$

Τώρα μπορούμε να συνεχίσουμε με επαγωγή.
Έστω ότι ισχύει

$$\frac{1}{((x-\mu)^2+\nu^2)^k} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \quad \frac{x-\mu}{((x-\mu)^2+\nu^2)^k} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \qquad \text{για κάθε } x \in (-r, r) \tag{14.291}$$

και ότι το διάστημα σύγκλισης και των δύο δυναμοσειρών είναι το $(-r, r)$.
Παραγωγίζοντας την πρώτη από τις σχέσεις (14.291), βρίσκουμε ότι ισχύει

$$\frac{x-\mu}{((x-\mu)^2+\nu^2)^{k+1}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \qquad \text{για κάθε } x \in (-r, r).$$

Η δυναμοσειρά στην δεξιά μεριά αυτής της σχέσης προέρχεται από την $\sum_{n=0} a_n x^n$ με παραγώγιση, οπότε οι δύο δυναμοσειρές έχουν το ίδιο διάστημα σύγκλισης $(-r, r)$.
Κατόπιν, πάλι από τις σχέσεις (14.291) έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{2k\nu^2}{((x-\mu)^2+\nu^2)^{k+1}} &= \frac{2k-1}{((x-\mu)^2+\nu^2)^k} + \frac{d}{dx}\frac{x-\mu}{((x-\mu)^2+\nu^2)^k} \\ &= (2k-1)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) b_{n+1} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} ((2k-1)a_n + (n+1)b_{n+1}) x^n \qquad \text{για κάθε } x \in (-r, r)\end{aligned}$$

και άρα ισχύει

$$\frac{1}{((x-\mu)^2+\nu^2)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \qquad \text{για κάθε } x \in (-r, r), \tag{14.292}$$

όπου $c_n = \frac{(2k-1)a_n + (n+1)b_{n+1}}{2k\nu^2}$ για κάθε $n \geq 0$.
Τώρα, το διάστημα σύγκλισης της $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ είναι *τουλάχιστον* το $(-r, r)$.
Έστω ότι το διάστημα σύγκλισης της $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ είναι το I, οπότε $(-r, r) \subseteq I$. Τότε πολλαπλασιάζουμε την $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ με τον $(x-\mu)^2 + \nu^2$ και βρίσκουμε μια δυναμοσειρά

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^* x^n = ((x-\mu)^2 + \nu^2) \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \qquad \text{για κάθε } x \in I. \tag{14.293}$$

Επειδή $(-r, r) \subseteq I$, από την (14.292), από την (14.293) και από την πρώτη από τις σχέσεις (14.291) συνεπάγεται ότι ισχύει

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^* x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \qquad \text{για κάθε } x \in (-r, r).$$

Επομένως, οι δύο δυναμοσειρές ταυτίζονται, οπότε έχουν το ίδιο διάστημα σύγκλισης και άρα $I = (-r, r)$.
Το τελικό συμπέρασμα είναι ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}$ οι συναρτήσεις $\frac{x-\mu}{((x-\mu)^2+\nu^2)^k}$ και $\frac{1}{((x-\mu)^2+\nu^2)^k}$ αναπαρίστανται στο ίδιο διάστημα $(-r, r)$ από τις σειρές Taylor τους στον 0 και ότι αυτές οι σειρές Taylor έχουν το ίδιο διάστημα σύγκλισης $(-r, r)$, όπου $r = \sqrt{\mu^2 + \nu^2}$.
[β] Έστω $\alpha \neq 0$. Τότε, χρησιμοποιώντας τη γεωμετρική σειρά, έχουμε

$$\frac{1}{x-\alpha} = -\frac{1}{\alpha}\frac{1}{1-(x/\alpha)} = -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{\alpha^{n+1}}x^n \qquad \text{για κάθε } x \in (-|\alpha|, |\alpha|).$$

Παραγωγίζοντας, βρίσκουμε τις ανάλογες σειρές Taylor των συναρτήσεων $\frac{1}{(x-\alpha)^k}$ για κάθε $k \geq 1$. Όλες έχουν διάστημα σύγκλισης το $(-|\alpha|, |\alpha|)$.
Τα υπόλοιπα μπορείτε να τα συμπληρώσετε εσείς με την εξής *υπόδειξη*. Χρησιμοποιήστε την ανάλυση μιας ρητής συνάρτησης σε απλούς λόγους όπως περιγράφεται στο τρίτο βήμα του υπολογισμού του αορίστου ολοκληρώματος μιας ρητής συνάρτησης στην υποενότητα 7.3.3. Θεωρήστε πρώτα την περίπτωση που το σημείο (στο πεδίο ορισμού της ρητής συνάρτησης) που μας ενδιαφέρει είναι ο 0 και χρησιμοποιήστε τα προηγούμενα αποτελέσματα αυτής της άσκησης. Κατόπιν θεωρήστε τη γενική περίπτωση που το σημείο (στο πεδίο ορισμού της ρητής συνάρτησης) που μας ενδιαφέρει δεν είναι ο 0, κάνοντας μια απλή "μεταφορά".

Άσκηση 10.4.5. *Έστω οποιοιδήποτε a, b όχι και οι δύο ίσοι με 0. Αποδείξτε ότι υπάρχουν αριθμοί $p > 0$ και q ώστε να ισχύει $a\cos x + b\sin x = p\cos(x-q)$ για κάθε x.*
Υπόδειξη: $a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\big(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\big)$.

14.11 Κεφάλαιο 11.

Άσκηση 11.1.1. [α] *Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ορίζουμε δύο συναρτήσεις d με τους τύπους $d(x,y) = (x-y)^2$ και $d(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$. Ποιές από αυτές τις d είναι μετρικές στο $\mathbb{R}$;*
Λύση: Η πρώτη συνάρτηση. Αρκεί να ελέγξουμε τις τέσσερις ιδιότητες μιας μετρικής.
Προφανώς, ισχύει $d(x,y) \geq 0$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.
Προφανώς, ισχύει $d(x,y) = 0$ αν και μόνο αν $x = y$.
Προφανώς, ισχύει $d(x,y) = d(y,x)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.
Οπότε απομένει να ελέγξουμε ότι για κάθε $x, y, z \in \mathbb{R}$ ισχύει η τριγωνική ανισότητα:

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y). \tag{14.294}$$

Η (14.294) γράφεται ισοδύναμα $(x-y)^2 \leq (x-z)^2 + (z-y)^2$ κι αυτή ισοδυναμεί με την $(z-x)(z-y) \geq 0$. Όμως, εύκολα βρίσκουμε τιμές των x, y, z για τις οποίες δεν ισχύει η τελευταία σχέση.
Άρα η d δεν είναι μετρική στο $\mathbb{R}$.
Η δεύτερη συνάρτηση. Και αυτή η συνάρτηση d ικανοποιεί τις τρεις πρώτες ιδιότητες μιας μετρικής. Η τριγωνική ανισότητα (14.294) γράφεται

$$\frac{|x-y|}{1+|x-y|} \leq \frac{|x-z|}{1+|x-z|} + \frac{|z-y|}{1+|z-y|}. \tag{14.295}$$

Προσπαθώντας να αποδείξουμε την (14.295), παρατηρούμε ότι ισχύει $|x-y| \leq |x-z| + |z-y|$ και σκεφτόμαστε μήπως ισχύει

$$\frac{|x-y|}{1+|x-y|} \leq \frac{|x-z|+|z-y|}{1+|x-z|+|z-y|}. \tag{14.296}$$

Μπορούμε να θέσουμε $u = |x-y|$ και $v = |x-z| + |z-y|$, οπότε έχουμε να αποδείξουμε ότι

$$0 \leq u \leq v \quad \Rightarrow \quad \frac{u}{1+u} \leq \frac{v}{1+v}.$$

Αυτό το τελευταίο, όμως, ισχύει και αποδεικνύεται αμέσως με λίγες πράξεις.
Τώρα, η (14.295) προκύπτει αμέσως από την (14.296):

$$\tfrac{|x-y|}{1+|x-y|} \le \tfrac{|x-z|+|z-y|}{1+|x-z|+|z-y|} \le \tfrac{|x-z|}{1+|x-z|+|z-y|} + \tfrac{|z-y|}{1+|x-z|+|z-y|} \le \tfrac{|x-z|}{1+|x-z|} + \tfrac{|z-y|}{1+|z-y|}.$$

Άρα η d είναι μετρική στο $\mathbb{R}$.

Άσκηση 11.1.4. *Θεωρούμε το σύνολο $C([a,b])$ όλων των συνεχών συναρτήσεων $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Δηλαδή, $C([a.b]) = \{f \mid$ η $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής$\}$.*
Για κάθε $f \in C([a,b])$ ορίζουμε την p-νόρμα της f στον $C([a,b])$ με τον τύπο

$$\|f\|_p = \begin{cases} \big(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\big)^{1/p}, & \text{αν } 1 \le p < +\infty \\ \max\{|f(x)| \mid x \in [a,b]\}, & \text{αν } p = +\infty \end{cases}$$

Παρατηρήστε ότι $\|f\|_\infty = \|f\|_{[a,b]}$.
Επίσης, για κάθε $f, g \in C([a,b])$ ορίζουμε $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$.
Αν $1 < p, q < +\infty$ και $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, αποδείξτε ότι ισχύει $|\langle f, g\rangle| \le \|f\|_p \|g\|_q$ για κάθε $f, g \in C([a,b])$. Αποδείξτε ότι το ίδιο ισχύει για τα ζεύγη $p = 1, q = +\infty$ και $p = +\infty, q = 1$.
Αποδείξτε ότι η p-νόρμα ικανοποιεί την τριγωνική ανισότητα.
Ορίζουμε την $d_p : C([a,b]) \times C([a,b]) \to \mathbb{R}$ με τύπο $d_p(f,g) = \|f-g\|_p$ για κάθε $f, g \in C([a,b])$. Αποδείξτε ότι η d_p είναι μετρική στον $C([a,b])$. Η d_p ονομάζεται p-μετρική και η απόσταση $d_p(f,g)$ ονομάζεται p-απόσταση των f, g.

Λύση: Το πρώτο ερώτημα. Χρησιμοποιούμε την ανισότητα του Hölder στην άσκηση 6.4.18:

$$\begin{aligned} |\langle f, g\rangle| &= \big|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\big| \le \int_a^b |f(x)||g(x)|\,dx \\ &\le \big(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\big)^{1/p}\big(\int_a^b |g(x)|^q\,dx\big)^{1/q} = \|f\|_p\|g\|_q. \end{aligned}$$

Η περίπτωση $p = 1, q = +\infty$ είναι απλή:

$$|\langle f, g\rangle| = \big|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\big| \le \int_a^b |f(x)||g(x)|\,dx \le \int_a^b |f(x)|\,dx\|g\|_{[a,b]} = \|f\|_1\|g\|_\infty.$$

Το δεύτερο ερώτημα. Αν $1 < p < +\infty$, η τριγωνική ανισότητα προκύπτει από την ανισότητα του Minkowski στην άσκηση 6.4.18:

$$\begin{aligned} \|f+g\|_p &= \big(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\,dx\big)^{1/p} \le \big(\int_a^b (|f(x)|+|g(x)|)^p\,dx\big)^{1/p} \\ &\le \big(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\big)^{1/p} + \big(\int_a^b |g(x)|^p\,dx\big)^{1/p} = \|f\|_p + \|g\|_p. \end{aligned}$$

Αν $p = 1$, η απόδειξη είναι πολύ απλούστερη:

$$\begin{aligned} \|f+g\|_1 &= \int_a^b |f(x)+g(x)|\,dx \le \int_a^b (|f(x)|+|g(x)|)\,dx \\ &= \int_a^b |f(x)|\,dx + \int_a^b |g(x)|\,dx = \|f\|_1 + \|g\|_1. \end{aligned}$$

Και, αν $p = +\infty$, τότε το αποτέλεσμα βρίσκεται στην πρόταση 9.2[β].
Το τρίτο ερώτημα. Το ότι η d_p είναι μετρική στον $C([a,b])$ κάντε το εσείς. Για την τριγωνική ανισότητα χρησιμοποιήστε την τριγωνική ανισότητα της p-νόρμας όπως φαίνεται αμέσως μετά από την πρόταση 9.2 ή στην απόδειξη της πρότασης 11.1 ή στο παράδειγμα 11.1.4.

Άσκηση 11.1.6. *Έστω μετρικός χώρος (X,d) και μη-κενό $W \subseteq X$. Θεωρούμε τον περιορισμό της συνάρτησης $d : X \times X \to \mathbb{R}$ στο $W \times W$. Δηλαδή, για κάθε $x, y \in W$ η τιμή $d(x,y)$ του περιορισμού $d : W \times W \to \mathbb{R}$ είναι ίδια με την τιμή $d(x,y)$ της $d : X \times X \to \mathbb{R}$.*
Αποδείξτε ότι η $d : W \times W \to \mathbb{R}$ είναι μετρική στο W.
Η μετρική $d : W \times W \to \mathbb{R}$ ονομάζεται μετρική υπόχωρου στο W και ο μετρικός χώρος (W,d)

ονομάζεται μετρικός υπόχωρος του (X, d).

Λύση: Αποδεικνύουμε τις τέσσερις ιδιότητες μιας μετρικής.
(i) Για κάθε $x, y \in W$ ισχύει $x, y \in X$ και άρα ισχύει $d(x, y) \geq 0$.
(ii) Για κάθε $x, y \in W$ ισχύει $x, y \in X$ και άρα ισχύει: $d(x, y) = 0$ αν και μόνο αν $x = y$.
(iii) Για κάθε $x, y \in W$ ισχύει $x, y \in X$ και άρα ισχύει $d(x, y) = d(y, x)$.
(iv) Για κάθε $x, y, z \in W$ ισχύει $x, y, z \in X$ και άρα ισχύει $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Άσκηση 11.2.1. *Αποδείξτε ότι κάθε μη-κενό ανοικτό υποσύνολο του* $\mathbb{R}$ *περιέχει και ρητούς και άρρητους αριθμούς. Βρείτε ένα απλό κλειστό υποσύνολο του* $\mathbb{R}$ *το οποίο να περιέχει μόνο ρητούς αριθμούς και ένα άλλο το οποίο να περιέχει μόνο άρρητους αριθμούς.*

Λύση: Έστω $A \neq \emptyset$ ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Θεωρούμε οποιονδήποτε $a \in A$ και κάποιον $r > 0$ ώστε $(a - r, a + r) \subseteq A$. Λόγω της πυκνότητας του $\mathbb{Q}$ και του $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ στο $\mathbb{R}$, υπάρχουν $y \in \mathbb{Q}$ και $z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ώστε $a - r < y < a + r$ και $a - r < z < a + r$. Συνεπάγεται ότι $y, z \in A$. Αν ο y είναι ρητός, τότε το $\{y\}$ είναι κλειστό και δεν περιέχει άρρητο. Ομοίως, αν ο z είναι άρρητος, τότε το $\{z\}$ είναι κλειστό και δεν περιέχει ρητό.

Άσκηση 11.2.2. *Ποιά από τα παρακάτω είναι ανοικτά ή κλειστά υποσύνολα του* $\mathbb{R}$*; Το* $\mathbb{N}$*, το* $\mathbb{Q}$ *και το* $\mathbb{R} \setminus \{1/n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$.
Βρείτε το εσωτερικό, την κλειστότητα και το σύνορο καθενός από αυτά τα σύνολα.

Λύση: Το σύνολο $\mathbb{N}$. Αν πάρουμε οποιονδήποτε $n \in \mathbb{N}$, παρατηρούμε ότι καμία περιοχή του n, δηλαδή κανένα διάστημα $(n-r, n+r)$ δεν περιέχεται στο $\mathbb{N}$ και, επομένως, ο n δεν είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{N}$. Άρα $\mathbb{N}^\circ = \emptyset$.
Αν πάρουμε οποιονδήποτε $x \notin \mathbb{N}$, τότε ο x δεν είναι οριακό σημείο του $\mathbb{N}$. Πράγματι, αν $x < 1$, τότε, παίρνοντας $r = 1 - x$ (δηλαδή την απόσταση του x από τον 1), η περιοχή $(x - r, x + r) = (2x - 1, 1)$ δεν περιέχει κανένα σημείο του $\mathbb{N}$. Επίσης, αν ο x ανήκει σε οποιοδήποτε διάστημα $(n, n + 1)$ με $n \in \mathbb{N}$, τότε, παίρνοντας $r = \min\{x - n, n + 1 - x\}$ (δηλαδή την μικρότερη από τις αποστάσεις του x από τους $n, n + 1$), η περιοχή $(x - r, x + r)$ δεν περιέχει κανένα σημείο του $\mathbb{N}$. Άρα τα μόνα οριακά σημεία του $\mathbb{N}$ είναι τα σημεία του $\mathbb{N}$. Άρα $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N}$.
Κάθε $x \notin \mathbb{N}$ δεν είναι συνοριακό σημείο του $\mathbb{N}$, διότι, όπως είδαμε προηγουμένως, υπάρχει περιοχή του x χωρίς κανένα σημείο του $\mathbb{N}$. Αντιθέτως, κάθε $n \in \mathbb{N}$ είναι συνοριακό σημείο του $\mathbb{N}$, διότι κάθε $(n - r, n + r)$ προφανώς περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο από το συμπλήρωμα του $\mathbb{N}$ και ένα τουλάχιστον σημείο του $\mathbb{N}$, το ίδιο το n, οπότε $\partial\mathbb{N} = \mathbb{N}$.
Το $\mathbb{N}$ δεν είναι ανοικτό διότι δεν αποτελείται μόνο από τα εσωτερικά σημεία του. Μάλιστα, είναι "ακραία" μη-ανοικτό αφού κανένα σημείο του δεν είναι εσωτερικό σημείο του. Επίσης, μπορούμε να πούμε ότι το $\mathbb{N}$ δεν είναι ανοικτό διότι περιέχει κάποια από (και, μάλιστα, όλα) τα συνοριακά σημεία του (δηλαδή, $\partial\mathbb{N} \cap \mathbb{N} \neq \emptyset$). Μπορούμε, ακόμη, να πούμε ότι το $\mathbb{N}$ δεν είναι ανοικτό διότι $\mathbb{N}^\circ \neq \mathbb{N}$.
Τέλος, το $\mathbb{N}$ είναι κλειστό διότι περιέχει όλα τα οριακά σημεία του. Μπορούμε, επίσης, να πούμε ότι το $\mathbb{N}$ είναι κλειστό διότι $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N}$ ή διότι περιέχει όλα τα συνοριακά σημεία του (δηλαδή, $\partial\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}$).

Το σύνολο $\mathbb{Q}$. Αν πάρουμε οποιονδήποτε $x \in \mathbb{Q}$, παρατηρούμε ότι καμία περιοχή του x, δηλαδή, κανένα διάστημα $(x - r, x + r)$ δεν περιέχεται στο $\mathbb{Q}$. Πράγματι, γνωρίζουμε ότι κάθε ανοικτό διάστημα περιέχει τουλάχιστον έναν άρρητο αριθμό. Επομένως, ο x δεν είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{Q}$. Άρα $\mathbb{Q}^\circ = \emptyset$.
Κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι οριακό σημείο του $\mathbb{Q}$, διότι κάθε περιοχή $(x - r, x + r)$ περιέχει τουλάχιστον έναν ρητό αριθμό. Άρα $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.
Κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι συνοριακό σημείο του $\mathbb{Q}$, διότι κάθε $(x - r, x + r)$ περιέχει τουλάχιστον έναν ρητό και έναν άρρητο. Άρα $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$.
Το $\mathbb{Q}$ δεν είναι ανοικτό διότι δεν αποτελείται μόνο από τα εσωτερικά σημεία του. Μάλιστα, όπως και το $\mathbb{N}$, είναι "ακραία" μη-ανοικτό αφού κανένα σημείο του δεν είναι εσωτερικό σημείο του. Ακόμη, μπορούμε να πούμε ότι το $\mathbb{Q}$ δεν είναι ανοικτό διότι περιέχει κάποια από τα συνοριακά σημεία του (δηλαδή, $\partial\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$). Επίσης, μπορούμε να πούμε ότι το $\mathbb{Q}$ δεν είναι ανοικτό διότι

$\mathbb{Q}^\circ \neq \mathbb{Q}$.
Τέλος, το $\mathbb{Q}$ δεν είναι κλειστό διότι δεν περιέχει όλα τα οριακά σημεία του. Μπορούμε, επίσης, να πούμε ότι το $\mathbb{Q}$ δεν είναι κλειστό διότι $\overline{\mathbb{Q}} \neq \mathbb{Q}$ ή διότι δεν περιέχει όλα τα συνοριακά σημεία του (δηλαδή, $\partial\mathbb{Q} \not\subseteq \mathbb{Q}$).
Το σύνολο $A = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$. Μπορούμε να γράψουμε

$$A = \mathbb{R} \setminus \big\{\tfrac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\big\} = (-\infty, 0] \cup \textstyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} \big(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\big) \cup (1, +\infty).$$

Κάθε $x < 0$ είναι εσωτερικό σημείο του A διότι, παίρνοντας $r = -x$ (δηλαδή, την απόσταση του x από τον 0), η περιοχή $(x - r, x + r) = (2x, 0)$ περιέχεται στο A. Ομοίως, κάθε $x > 1$ είναι εσωτερικό σημείο του A διότι, παίρνοντας $r = x - 1$ (δηλαδή, την απόσταση του x από τον 1), η περιοχή $(x - r, x + r) = (1, 2x - 1)$ περιέχεται στο A. Επίσης, αν πάρουμε οποιονδήποτε x σε οποιοδήποτε από τα διαστήματα $(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$, τότε ο x είναι εσωτερικό σημείο του A, διότι, παίρνοντας $r = \min\{x - \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} - x\}$ (δηλαδή, την μικρότερη από τις αποστάσεις του x από τους $\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}$), η περιοχή $(x - r, x + r)$ περιέχεται στο διάστημα $(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$ και, επομένως, περιέχεται και στο A. Όμως, ο 0 δεν είναι εσωτερικό σημείο του A διότι καμία περιοχή $(-r, r)$ δεν περιέχεται στο σύνολο, αφού για αρκετά μεγάλους n ισχύει $\frac{1}{n} \in (-r, r)$.
Άρα $A^\circ = \mathbb{R} \setminus \big(\{0\} \cup \{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}\big)$.
Κάθε σημείο του ίδιου του A είναι οριακό σημείο του. Αν, τώρα, θεωρήσουμε οποιονδήποτε $\frac{1}{m}$ με $m \in \mathbb{N}$, τότε είναι προφανές ότι κάθε περιοχή $(\frac{1}{m} - r, \frac{1}{m} + r)$ περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο του A. Άρα κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι οριακό σημείο του A και, επομένως, $\overline{A} = \mathbb{R}$.
Κάθε $x < 0$, κάθε $x > 1$ και κάθε x σε οποιοδήποτε διάστημα $(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$ με $n \in \mathbb{N}$ δεν είναι συνοριακό σημείο του A, διότι, όπως είδαμε προηγουμένως, υπάρχει περιοχή του x η οποία περιέχεται στο A και, επομένως, δεν περιέχει κανένα σημείο του A^c. Αντιθέτως, κάθε $\frac{1}{m}$ με $m \in \mathbb{N}$ είναι συνοριακό σημείο του A, διότι κάθε περιοχή $(\frac{1}{m} - r, \frac{1}{m} + r)$ περιέχει προφανώς τουλάχιστον ένα σημείο του συνόλου και τουλάχιστον ένα σημείο του συμπληρώματός του, τον ίδιο τον $\frac{1}{m}$.
Τέλος, ο 0 είναι συνοριακό σημείο του A διότι κάθε $(-r, r)$ περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο του συνόλου, τον ίδιο τον 0, και τουλάχιστον ένα σημείο του συμπληρώματός του, δηλαδή, κάποιον $\frac{1}{n}$ για αρκετά μεγάλο $n \in \mathbb{N}$. Άρα $\partial A = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$.
Το A δεν είναι ανοικτό διότι δεν αποτελείται μόνο από τα εσωτερικά σημεία του. Μάλιστα, ο 0 είναι το μοναδικό σημείο του A που δεν είναι εσωτερικό σημείο του. Επίσης, μπορούμε να πούμε ότι το A δεν είναι ανοικτό διότι περιέχει κάποια από τα συνοριακά σημεία του (δηλαδή, $\partial A \cap A \neq \emptyset$). Μάλιστα, ο 0 είναι το μοναδικό συνοριακό σημείο του A που περιέχεται στο A. Μπορούμε, ακόμη,να πούμε ότι το A δεν είναι ανοικτό διότι $A^\circ \neq A$.
Το A δεν είναι κλειστό διότι δεν περιέχει όλα τα οριακά σημεία του ή διότι $\overline{A} \neq A$. Επίσης, το A δεν είναι κλειστό διότι δεν περιέχει όλα τα συνοριακά σημεία του (δηλαδή, $\partial A \not\subseteq A$).

Άσκηση 11.2.3. *Ποιά από τα* $\{(x_1, 0) \,|\, a \leq x_1 \leq b\}$, $\{(x_1, 0) \,|\, a < x_1 < b\}$, $\{(x_1, x_2) \,|\, x_1 x_2 \leq 1\}$ *είναι ανοικτά ή κλειστά υποσύνολα του* $\mathbb{R}^2$*;*

Βρείτε το εσωτερικό, την κλειστότητα και το σύνορο καθενός από αυτά τα σύνολα.

Λύση: Το $A = \{(x_1, 0) \,|\, a \leq x_1 \leq b\}$. Το A είναι το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα $(a, 0)$, $(b, 0)$. Είναι εύκολο να δούμε σε ένα σχήμα ότι κάθε σημείο εκτός του A έχει μια κατάλληλη περιοχή του, έναν μικρό δίσκο με κέντρο το σημείο, η οποία δεν τέμνει το A. Αυτό σημαίνει ένα πράγμα με δύο διαφορετικές διατυπώσεις. Η πρώτη διατύπωση είναι: κάθε σημείο εκτός του A δεν είναι οριακό σημείο του A και άρα το A περιέχει όλα τα οριακά σημεία του και άρα το A είναι κλειστό. Και η δεύτερη διατύπωση είναι: κάθε σημείο του A^c είναι εσωτερικό σημείο του A^c και άρα το A^c είναι ανοικτό και άρα το A είναι κλειστό.
Επειδή το A είναι κλειστό, έχουμε ότι $\overline{A} = A$.
Από την άλλη μεριά, το A δεν είναι ανοικτό. Διότι αν πάρουμε ένα οποιοδήποτε σημείο του A, αυτό δεν είναι εσωτερικό σημείο του A. Για να είναι το σημείο εσωτερικό του A πρέπει να υπάρχει μια κατάλληλη περιοχή του σημείου ολόκληρη μέσα στο A. Όμως, το A δεν είναι "παχύ" ώστε να περιέχει ολόκληρον δίσκο. Βλέπουμε, λοιπόν, ότι το A όχι μόνο δεν είναι ανοικτό αλλά ότι δεν

έχει κανένα εσωτερικό σημείο. Δηλαδή, $A^\circ = \emptyset$.
Όπως είδαμε στην αρχή, κάθε σημείο εκτός του A έχει μια κατάλληλη περιοχή του η οποία δεν τέμνει το A. Δηλαδή, κάθε σημείο εκτός του A δεν είναι συνοριακό σημείο του. Επίσης, αν πάρουμε οποιοδήποτε σημείο του A, τότε κάθε περιοχή του τέμνει και το A (στο ίδιο το σημείο, τουλάχιστον) αλλά και το A^c, αφού, όπως είπαμε κανένας δίσκος δεν περιέχεται στο A. Άρα $\partial A = A$.

Το $A = \{(x_1, 0) \,|\, a < x_1 < b\}$. Το A είναι το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα $(a, 0)$, $(b, 0)$, αλλά χωρίς τα άκρα του.
Το A δεν είναι ανοικτό για τον ίδιο λόγο που το προηγούμενο σύνολο A δεν είναι ανοικτό: κανένα σημείο του A δεν είναι εσωτερικό σημείο του. Δηλαδή, $A^\circ = \emptyset$.
Το A δεν είναι ούτε κλειστό: υπάρχει οριακό σημείο του A που δεν ανήκει στο A. Ένα τέτοιο σημείο είναι το άκρο $(b, 0)$. Πράγματι, κάθε περιοχή του σημείου αυτού, δηλαδή κάθε δίσκος με κέντρο αυτό το σημείο, τέμνει το A. Η τομή αποτελείται από ένα ευθύγραμμο τμήμα αριστερά του $(b, 0)$. Ένα ακόμη οριακό σημείο του A που δεν ανήκει στο A είναι το άλλο άκρο, το $(a, 0)$.
Τέλος, κανένα σημείο εκτός των σημείων του A και εκτός των άκρων $(a, 0)$, $(b, 0)$ δεν είναι οριακό σημείο του A. Πράγματι, όπως έχουμε ήδη πει, κάθε τέτοιο σημείο έχει μια κατάλληλη περιοχή του η οποία δεν τέμνει το A. Άρα $\overline{A} = \{(x_1, 0) \,|\, a \le x_1 \le b\}$.
Τέλος, βάσει όσων έχουμε πει, $\partial A = \{(x_1, 0) \,|\, a \le x_1 \le b\}$.

Το $A = \{(x_1, x_2) \,|\, x_1 x_2 \le 1\}$. Το σύνολο A αποτελείται από τις δύο υπερβολές με κοινή εξίσωση $x_1 x_2 = 1$. Η μία βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο και η άλλη στο τρίτο τεταρτημόριο. Επίσης, το A περιέχει και τα σημεία του επιπέδου που βρίσκονται ανάμεσα στις δύο υπερβολές (εκτός των άλλων περιλαμβάνονται και τα σημεία του δεύτερου και του τέταρτου τεταρτημορίου). Με ένα απλό σχήμα μπορεί κάποιος να δει τα ακόλουθα.
Τα εσωτερικά σημεία του A είναι τα (x_1, x_2) με $x_1 x_2 < 1$. Τα συνοριακά σημεία του A είναι τα σημεία των δύο υπερβολών, δηλαδή τα (x_1, x_2) με $x_1 x_2 = 1$. Τα εξωτερικά σημεία του A είναι τα (x_1, x_2) με $x_1 x_2 > 1$. Δηλαδή, $A^\circ = \{(x_1, x_2) \,|\, x_1 x_2 < 1\}$, $\overline{A} = \{(x_1, x_2) \,|\, x_1 x_2 \le 1\} = A$ και $\partial A = \{(x_1, x_2) \,|\, x_1 x_2 = 1\}$.
Το A δεν είναι ανοικτό, αφού $A^\circ \neq A$. Το A είναι κλειστό διότι $\overline{A} = A$.

Άσκηση 11.2.6. *Αν το A είναι μη-κενό, άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, αποδείξτε ότι* $\sup A \in \overline{A}$.

Λύση: Η ύπαρξη του $u = \sup A$ στο $\mathbb{R}$ εξασφαλίζεται από την ιδιότητα supremum. Αν πάρουμε τυχόντα $r > 0$, υπάρχει τουλάχιστον ένα στοιχείο του A στο διάστημα $(u - r, u]$. Σε αντίθετη περίπτωση, ο $u - r$ θα ήταν άνω φράγμα του A. Άρα κάθε περιοχή $(u - r, u + r)$ περιέχει ένα τουλάχιστον στοιχείο του A και, επομένως, ο u είναι οριακό σημείο του A.

Άσκηση 11.2.8. [α] *Θεωρήστε το κλειστό διάστημα $I_0 = [0, 1]$. Πάρτε το υποσύνολό του $I_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. Δηλαδή, κρατήστε τα δύο ακριανά κλειστά διαστήματα μήκους, το καθένα, το $\frac{1}{3}$ του μήκους του αρχικού I_0. Κάντε το ίδιο σε καθένα από τα δύο υποδιαστήματα του I_1. Δηλαδή, πάρτε $I_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$. Συνεχίστε επαγωγικά, δημιουργώντας τα $I_3, I_4, \ldots$. Αν, δηλαδή, έχετε φτιάξει το I_n ως ένωση κλειστών διαστημάτων, τότε καθένα από αυτά τα διαστήματα θα γεννήσει δύο νέα κλειστά διαστήματα: τα δύο ακριανά του με μήκος, το καθένα, το $\frac{1}{3}$ του μήκους του. Ορίζουμε $C = \bigcap_{n=1}^{+\infty} I_n$. Το C ονομάζεται σύνολο του Cantor.*
Από πόσα κλειστά διαστήματα αποτελείται κάθε I_n και ποιό είναι το συνολικό μήκος αυτών των διαστημάτων;
Αποδείξτε ότι το C είναι κλειστό.
Αποδείξτε ότι το C δεν περιέχει κανένα ανοικτό διάστημα και, επομένως, ότι $C^\circ = \emptyset$.
Αποδείξτε ότι το C είναι υπεραριθμήσιμο.

Λύση: Το πρώτο ερώτημα. Είναι σαφές ότι το I_n αποτελείται από 2^n κλειστά διαστήματα καθένα από τα οποία έχει μήκος $\frac{1}{3^n}$. Άρα το συνολικό μήκος των διαστημάτων του I_n είναι ίσο με $2^n \frac{1}{3^n} = (\frac{2}{3})^n$.
Το δεύτερο ερώτημα. Κάθε I_n είναι η ένωση πεπερασμένου πλήθους κλειστών διαστημάτων, δηλαδή κλειστών συνόλων. Άρα κάθε I_n είναι κλειστό. Τώρα, το C είναι κλειστό ως τομή κλειστών

συνόλων.

Το τρίτο ερώτημα. Έστω ότι υπάρχει διάστημα $(a, b) \subseteq C$. Συνεπάγεται $(a, b) \subseteq I_n$ για κάθε n. Συγκρίνοντας μήκη, έχουμε ότι ισχύει $b - a \leq (\frac{2}{3})^n$ για κάθε n. Αυτό είναι άτοπο διότι $(\frac{2}{3})^n \to 0$.

Το τέταρτο ερώτημα. Έστω ότι το C είναι αριθμήσιμο, οπότε το C γράφεται $C = \{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$. Ο x_1 ανήκει στο C και άρα ανήκει στο I_1. Το I_1 αποτελείται από δύο ξένα κλειστά διαστήματα και άρα ο x_1 ανήκει σε ακριβώς ένα από αυτά. Συμβολίζουμε I_1^* εκείνο από τα δύο αυτά κλειστά διαστήματα που *δεν* περιέχει τον x_1. Τώρα, ο x_2 ανήκει στο C και άρα ανήκει στο I_2. Το I_2 αποτελείται από τέσσερα ξένα κλειστά διαστήματα δύο από τα οποία αποτελούν το I_1^* και άρα ο x_2 ανήκει σε το πολύ ένα από αυτά. Συμβολίζουμε I_2^* ένα από τα δύο αυτά κλειστά διαστήματα που περιέχεται στο I_1^* και *δεν* περιέχει τον x_1. Συνεχίζουμε επ' άπειρον. Έτσι δημιουργούμε μια ακολουθία κλειστών διαστημάτων (I_n^*) με τις εξής ιδιότητες: (i) $x_n \notin I_n^*$ για κάθε n, (ii) $I_{n+1}^* \subseteq I_n^*$ για κάθε n και (iii) $I_n^* \subseteq I_n$ για κάθε n.
Από το θεώρημα των εγκιβωτισμένων διαστημάτων και την (ii) συνεπάγεται ότι υπάρχει x ο οποίος ανήκει σε κάθε I_n^*. Από την (iii) συνεπάγεται ότι ο x ανήκει σε κάθε I_n και άρα ο x ανήκει στο C. Επειδή ο x ανήκει σε κάθε I_n^*, συνεπάγεται, λόγω της (i), ότι $x \neq x_n$ για κάθε n και, επομένως, $x \notin C$. Καταλήγουμε σε άτοπο (αφού $x \in C$) και άρα το C δεν είναι αριθμήσιμο.

Άσκηση 11.2.9. *Έστω μετρικός χώρος (X, d). Αποδείξτε ότι $\bigcup_{r>0} N_x(r) = X$ και $\bigcap_{r>0} N_x(r) = \{x\}$ για κάθε $x \in X$.*

Λύση: Το $N_x(r)$ είναι, για κάθε $r > 0$, υποσύνολο του X. Άρα, η ένωση $\bigcup_{r>0} N_x(r)$ είναι κι αυτή υποσύνολο του X. Αντιστρόφως, έστω τυχόν $y \in X$. Τότε υπάρχει κάποιος $r > 0$ ώστε να ισχύει $y \in N_x(r)$ ή, ισοδύναμα, $d(y, x) < r$. Πράγματι, αρκεί να επιλέξουμε οποιοδήποτε r μεγαλύτερο από τον αριθμό $d(y, x)$. Άρα το y ανήκει στην ένωση $\bigcup_{r>0} N_x(r)$ και, επομένως, $X \subseteq \bigcup_{r>0} N_x(r)$.
Το x ανήκει στο $N_x(r)$ για κάθε $r > 0$, οπότε $\{x\} \subseteq \bigcap_{r>0} N_x(r)$. Τώρα, έστω τυχόν $y \in \bigcap_{r>0} N_x(r)$. Αυτό σημαίνει ότι $y \in N_x(r)$ ή, ισοδύναμα, $d(y, x) < r$ για κάθε $r > 0$. Συνεπάγεται ότι $d(y, x) = 0$, δηλαδή $y = x$. Άρα $\bigcap_{r>0} N_x(r) \subseteq \{x\}$.

Άσκηση 11.2.11. *Έστω μετρικός χώρος (X, d), $x \in X$ και $r > 0$. Αποδείξτε ότι $\overline{N_x(r)} \subseteq \overline{N}_x(r)$. Στο $\mathbb{R}^d$ αποδείξτε ότι $\overline{N_{\mathrm{x}}(r)} = \overline{N}_{\mathrm{x}}(r)$.*
Ισχύει πάντοτε ότι $\overline{N_x(r)} = \overline{N}_x(r)$; Θεωρήστε, για παράδειγμα, μη-κενό σύνολο X με την διακριτή μετρική d_δ και συγκρίνατε τα $\overline{N_x(1)}$ και $\overline{N}_x(1)$.

Λύση: Το πρώτο ερώτημα. Έστω $y \notin \overline{N}_x(r)$. Δηλαδή, $d(y, x) > r$.
Θεωρούμε τον $s = d(y, x) - r > 0$ και την περιοχή $N_y(s)$. Τότε για κάθε $z \in N_y(s)$ ισχύει $d(z, y) < s$ και άρα $d(z, x) \geq d(y, x) - d(y, z) > d(y, x) - s = r$ και άρα $z \notin \overline{N_x(r)}$. Επομένως, $N_y(s) \cap N_x(r) = \emptyset$, οπότε το y δεν είναι οριακό σημείο της $N_x(r)$. Άρα $y \notin \overline{N_x(r)}$.
Συμπεραίνουμε ότι $\overline{N_x(r)} \subseteq \overline{N}_x(r)$.
Το δεύτερο ερώτημα. Έστω $\mathrm{y} \in \overline{N}_{\mathrm{x}}(r)$. Δηλαδή, $\|\mathrm{y} - \mathrm{x}\|_2 \leq r$.
Έστω τυχών $s > 0$. Παίρνουμε t έτσι ώστε να είναι $0 < t < 1$ και $(1 - t)\|\mathrm{y} - \mathrm{x}\|_2 < s$ και θεωρούμε το $\mathrm{z} = (1 - t)\mathrm{x} + t\mathrm{y}$.
Τότε έχουμε $\|\mathrm{z} - \mathrm{x}\|_2 = t\|\mathrm{y} - \mathrm{x}\|_2 \leq tr < r$ και άρα $\mathrm{z} \in N_{\mathrm{x}}(r)$. Επίσης, $\|\mathrm{z} - \mathrm{y}\|_2 = (1 - t)\|\mathrm{y} - \mathrm{x}\|_2 < s$ και άρα $\mathrm{z} \in N_{\mathrm{y}}(s)$.
Άρα για κάθε $s > 0$ ισχύει $N_{\mathrm{y}}(s) \cap N_{\mathrm{x}}(r) \neq \emptyset$, οπότε το y είναι οριακό σημείο της $N_{\mathrm{x}}(r)$ και άρα $\mathrm{y} \in \overline{N_x(r)}$.
Επομένως, $\overline{N}_{\mathrm{x}}(r) \subseteq \overline{N_x(r)}$.
Μαζί με τον γενικό εγκλεισμό $\overline{N_{\mathrm{x}}(r)} \subseteq \overline{N}_{\mathrm{x}}(r)$ που έχουμε από το πρώτο ερώτημα, παίρνουμε το ζητούμενο.
Το τρίτο ερώτημα. Με την διακριτή μετρική έχουμε

$$N_x(1) = \{y \in X \,|\, d_\delta(y, x) < 1\} = \{y \in X \,|\, d_\delta(y, x) = 0\} = \{x\}.$$

Επειδή κάθε μονοσύνολο είναι κλειστό, συνεπάγεται ότι $\overline{N_x(1)} = \{x\}$.
Επίσης, $\overline{N}_x(1) = \{y \in X \mid d_\delta(y,x) \leq 1\} = X$.
Άρα, αν το X έχει τουλάχιστον δύο στοιχεία, τότε $\overline{N_x(1)} \subsetneq \overline{N}_x(1)$.

Άσκηση 11.2.12. *Έστω μετρικός χώρος (X,d) και A ανοικτό και B κλειστό υποσύνολο του X. Αποδείξτε ότι το $A \setminus B$ είναι ανοικτό και το $B \setminus A$ είναι κλειστό.*

Λύση: Γράφουμε $A \setminus B = A \cap B^c$ και $B \setminus A = B \cap A^c$.
Από την πρώτη σχέση και από το ότι το B^c είναι ανοικτό συνεπάγεται ότι το $A \setminus B$ είναι ανοικτό.
Από την δεύτερη σχέση και από το ότι το A^c είναι κλειστό συνεπάγεται ότι το $B \setminus A$ είναι κλειστό.

Άσκηση 11.2.13. *Έστω μετρικός χώρος (X,d) και $A \subseteq X$. Αποδείξτε ότι $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$ και $\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ$.*

Λύση: Το x ανήκει στο $\overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$ αν και μόνο αν το x είναι οριακό σημείο του A και του $X \setminus A$ αν και μόνο αν κάθε περιοχή του x τέμνει το A και το $X \setminus A$ αν και μόνο αν το x είναι συνοριακό σημείο του A αν και μόνο αν το x ανήκει στο ∂A.
Το x ανήκει στο $\overline{A} \setminus A^\circ$ αν και μόνο αν το x είναι οριακό σημείο αλλά όχι εσωτερικό σημείο του A αν και μόνο αν το x δεν είναι εξωτερικό σημείο ούτε εσωτερικό σημείο του A αν και μόνο αν το x είναι συνοριακό σημείο του A αν και μόνο αν το x ανήκει στο ∂A.

Άσκηση 11.2.14. *Έστω μετρικός χώρος (X,d) και $A, B, A_1, \ldots, A_n \subseteq X$.*
[α] *Αν $A \subseteq B$, αποδείξτε ότι $A^\circ \subseteq B^\circ$ και $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.*
[β] *Αποδείξτε ότι $(A^\circ)^\circ = A^\circ$ και $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$.*
[γ] *Αποδείξτε ότι $(A_1 \cap \cdots \cap A_n)^\circ = {A_1}^\circ \cap \cdots \cap {A_n}^\circ$ και $\overline{A_1 \cup \cdots \cup A_n} = \overline{A_1} \cup \cdots \cup \overline{A_n}$.*

Λύση: [α] (i) *Πρώτος τρόπος.* Το A° είναι ανοικτό και περιέχεται στο A. Επειδή $A \subseteq B$, το A° είναι ανοικτό σύνολο και περιέχεται στο B. Επειδή το B° είναι το μεγαλύτερο ανοικτό σύνολο το οποίο περιέχεται στο B, συνεπάγεται ότι $A^\circ \subseteq B^\circ$.
Δεύτερος τρόπος. Έστω $x \in A^\circ$. Τότε το x είναι εσωτερικό σημείο του A, οπότε υπάρχει $r > 0$ ώστε $N_x(r) \subseteq A$. Επειδή $A \subseteq B$, συνεπάγεται $N_x(r) \subseteq B$, οπότε το x είναι εσωτερικό σημείο του B και άρα $x \in B^\circ$.
Άρα $A^\circ \subseteq B^\circ$.

(ii) *Πρώτος τρόπος.* Το $\overline{B}$ είναι κλειστό και περιέχει το B. Επειδή $A \subseteq B$, το $\overline{B}$ είναι κλειστό και περιέχει το A. Επειδή το $\overline{A}$ είναι το μικρότερο κλειστό σύνολο το οποίο περιέχει το A, συνεπάγεται ότι $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.
Δεύτερος τρόπος. Έστω $x \in \overline{A}$. Τότε το x είναι οριακό σημείο του A, οπότε για κάθε $r > 0$ η περιοχή $N_x(r)$ τέμνει το A. Επειδή $A \subseteq B$, συνεπάγεται ότι για κάθε $r > 0$ η περιοχή $N_x(r)$ τέμνει και το B και άρα το x είναι οριακό σημείο του B, οπότε $x \in \overline{B}$.
Άρα $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

[β] Το A° είναι ανοικτό, οπότε ταυτίζεται με το εσωτερικό του.
Επίσης, το $\overline{A}$ είναι κλειστό και, επομένως, ταυτίζεται με την κλειστότητά του.

[γ] Έχουμε ότι $A_1 \cap \cdots \cap A_n \subseteq A_k$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$, οπότε, από το αποτέλεσμα του [α] συνεπάγεται ότι $(A_1 \cap \cdots \cap A_n)^\circ \subseteq {A_k}^\circ$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$. Άρα $(A_1 \cap \cdots \cap A_n)^\circ \subseteq {A_1}^\circ \cap \cdots \cap {A_n}^\circ$.
Καθένα από τα ${A_1}^\circ, \ldots, {A_n}^\circ$ είναι ανοικτό, οπότε και το ${A_1}^\circ \cap \cdots \cap {A_n}^\circ$ είναι ανοικτό. Επίσης, για κάθε $k = 1, \ldots, n$ ισχύει ${A_k}^\circ \subseteq A_k$ και, επομένως, ${A_1}^\circ \cap \cdots \cap {A_n}^\circ \subseteq A_1 \cap \cdots \cap A_n$. Επειδή το $(A_1 \cap \cdots \cap A_n)^\circ$ είναι το μεγαλύτερο ανοικτό υποσύνολο του $A_1 \cap \cdots \cap A_n$, συνεπάγεται ότι ${A_1}^\circ \cap \cdots \cap {A_n}^\circ \subseteq (A_1 \cap \cdots \cap A_n)^\circ$.
Άρα $(A_1 \cap \cdots \cap A_n)^\circ = {A_1}^\circ \cap \cdots \cap {A_n}^\circ$.
Ισχύει $A_k \subseteq A_1 \cup \cdots \cup A_n$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$, οπότε, από το αποτέλεσμα του [α] συνεπάγεται ότι $\overline{A_k} \subseteq \overline{A_1 \cup \cdots \cup A_n}$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$. Άρα $\overline{A_1} \cup \cdots \cup \overline{A_n} \subseteq \overline{A_1 \cup \cdots \cup A_n}$.
Καθένα από τα $\overline{A_1}, \ldots, \overline{A_n}$ είναι κλειστό, οπότε και το $\overline{A_1} \cup \cdots \cup \overline{A_n}$ είναι κλειστό. Επίσης, για κάθε $k = 1, \ldots, n$ ισχύει $A_k \subseteq \overline{A_k}$ και, επομένως, $A_1 \cup \cdots \cup A_n \subseteq \overline{A_1} \cup \cdots \cup \overline{A_n}$. Επειδή

το $\overline{A_1 \cup \cdots \cup A_n}$ είναι το μικρότερο κλειστό υπερσύνολο του $A_1 \cup \cdots \cup A_n$, συνεπάγεται ότι $\overline{A_1 \cup \cdots \cup A_n} \subseteq \overline{A_1} \cup \cdots \cup \overline{A_n}$.
Άρα $\overline{A_1 \cup \cdots \cup A_n} = \overline{A_1} \cup \cdots \cup \overline{A_n}$.

Άσκηση 11.2.17. *Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $A, B \subseteq X$.*
Αν $A^\circ = B^\circ = \emptyset$ και το A είναι κλειστό, αποδείξτε ότι $(A \cup B)^\circ = \emptyset$.
Βρείτε υποσύνολα A και B του $\mathbb{R}$ ώστε $A^\circ = B^\circ = \emptyset$ και $(A \cup B)^\circ = \mathbb{R}$.

Λύση: Το πρώτο ερώτημα. Έστω $x \in (A \cup B)^\circ$. Τότε υπάρχει $r > 0$ ώστε $N_x(r) \subseteq A \cup B$.
Δεν είναι δυνατόν να ισχύει $N_x(r) \subseteq A$, αφού $A^\circ = \emptyset$. Άρα υπάρχει $y \in N_x(r)$ ώστε $y \in B \setminus A$.
Επειδή το A είναι κλειστό και $y \notin A$, υπάρχει $s' > 0$ ώστε $N_y(s') \cap A = \emptyset$. Επειδή το $N_x(r)$ είναι ανοικτό και $y \in N_x(r)$, υπάρχει $s'' > 0$ ώστε $N_y(s'') \subseteq N_x(r)$.
Τώρα, θεωρούμε τον $s = \min\{s', s''\} > 0$. Τότε έχουμε $N_y(s) \subseteq N_y(s')$ και άρα $N_y(s) \cap A = \emptyset$.
Επίσης, $N_y(s) \subseteq N_y(s'')$ και άρα $N_y(s) \subseteq N_x(r)$ και άρα $N_y(s) \subseteq A \cup B$.
Από τις σχέσεις $N_y(s) \cap A = \emptyset$ και $N_y(s) \subseteq A \cup B$ συνεπάγεται $N_y(s) \subseteq B$. Αυτό είναι άτοπο, διότι $B^\circ = \emptyset$.
Το δεύτερο ερώτημα. Θεωρήστε τα $A = \mathbb{Q}$ και $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Άσκηση 11.2.19. *Έστω μετρικός χώρος (X, d), μη-κενό $A \subseteq X$ και $x \in X$. Ορίζουμε την απόσταση του x από το A με τον τύπο $d(x, A) = \inf\{d(x, y) \,|\, y \in A\}$.*
Αποδείξτε ότι $d(x, A) = 0$ αν και μόνο αν $x \in \overline{A}$.

Λύση: Έστω $d(x, A) = 0$. Τότε για κάθε $r > 0$ υπάρχει $y \in A$ ώστε $d(y, x) < r$ και άρα $y \in N_x(r)$. Άρα κάθε περιοχή του x τέμνει το A, οπότε $x \in \overline{A}$.
Αντιστρόφως, έστω $x \in \overline{A}$. Τότε για κάθε $r > 0$ υπάρχει $y \in A$ ώστε $y \in N_x(r)$ και άρα $d(y, x) < r$. Επομένως, $d(x, A) \leq 0$ και, επειδή ο 0 είναι κάτω φράγμα του $\{d(x, y) \,|\, y \in A\}$, συνεπάγεται ότι $d(x, A) = 0$.

Άσκηση 11.2.20. *Έστω μετρικός χώρος (X, d), μη-κενό $A \subseteq X$ και $r > 0$. Ορίζουμε την r-περιοχή του A να είναι το σύνολο*

$$N_A(r) = \{x \in X \,|\, \textit{υπάρχει } y \in A \textit{ ώστε } d(y, x) < r\} = \{x \in X \,|\, N_x(r) \cap A \neq \emptyset\}.$$

Αποδείξτε ότι $N_A(r) = \bigcup_{x \in A} N_x(r)$.
Για παράδειγμα, στο $\mathbb{R}$ ποιά είναι τα $N_A(r)$ για κάθε $r > 0$ και για καθένα A από τα: $\{1\}$, $[0, 1]$, $(0, 1)$, $\{0, 1\}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$;
Αποδείξτε ότι το $N_A(r)$ είναι ανοικτό και $A \subseteq N_A(r)$.
Αν το A είναι κλειστό, αποδείξτε ότι $A = \bigcap_{n=1}^{+\infty} N_A(\frac{1}{n})$. Συμπεράνατε ότι κάθε μη-κενό κλειστό σύνολο είναι τομή αριθμήσιμης συλλογής ανοικτών συνόλων.

Λύση: Το πρώτο ερώτημα. Έχουμε

$$\begin{aligned} N_A(r) &= \{x \in X \,|\, \text{υπάρχει } y \in A \text{ ώστε } d(y, x) < r\} \\ &= \{x \in X \,|\, \text{υπάρχει } y \in A \text{ ώστε } x \in N_y(r)\} = \textstyle\bigcup_{y \in A} N_y(r). \end{aligned}$$

Το δεύτερο ερώτημα. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι

$$N_{\{1\}}(r) = (1 - r, 1 + r), \qquad N_{[0,1]}(r) = N_{(0,1)}(r) = (-r, 1 + r).$$

Επίσης,

$$N_{\{0,1\}}(r) = \begin{cases} (-r, r) \cup (1 - r, 1 + r), & \text{αν } r \leq \frac{1}{2} \\ (-r, 1 + r), & \text{αν } r > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ομοίως,

$$N_{\mathbb{N}}(r) = \begin{cases} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (n - r, n + r), & \text{αν } r \leq \frac{1}{2} \\ (1 - r, +\infty), & \text{αν } r > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Τέλος,

$$N_{\mathbb{Q}}(r) = \mathbb{R},$$

αφού για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει τουλάχιστον ένας ρητός στο $(x-r, x+r)$.

Το τρίτο ερώτημα. Από το αποτέλεσμα του πρώτου ερωτήματος συνεπάγεται ότι το $N_A(r)$ είναι ένωση ανοικτών συνόλων και, επομένως, είναι ανοικτό.
Από το ίδιο αποτέλεσμα βλέπουμε ότι για κάθε $y \in A$, επειδή $y \in N_y(r)$, ισχύει $y \in N_A(r)$. Άρα $A \subseteq N_A(r)$.

Το τέταρτο ερώτημα. Έστω A κλειστό.
Η σχέση $A \subseteq \bigcap_{n=1}^{+\infty} N_A(\frac{1}{n})$ είναι προφανής, αφού, σύμφωνα με το αποτέλεσμα του τρίτου ερωτήματος, ισχύει $A \subseteq N_A(\frac{1}{n})$ για κάθε n.
Τώρα, έστω τυχόν $x \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} N_A(\frac{1}{n})$.
Αν $x \in X \setminus A$, υπάρχει $r > 0$ ώστε $N_x(r) \subseteq X \setminus A$, αφού το $X \setminus A$ είναι ανοικτό. Παίρνουμε έναν n αρκετά μεγάλο ώστε $\frac{1}{n} \leq r$. Τότε, $N_x(\frac{1}{n}) \subseteq N_x(r)$, οπότε $N_x(\frac{1}{n}) \cap A = \emptyset$ και, επομένως, $x \notin N_A(\frac{1}{n})$. Καταλήγουμε σε αντίφαση, οπότε $x \in A$.
Άρα $\bigcap_{n=1}^{+\infty} N_A(\frac{1}{n}) \subseteq A$.

Άσκηση 11.2.22. *Θεωρήστε τον μετρικό χώρο $B\big([0,1]\big)$ με την ομοιόμορφη μετρική και το στοιχείο $f \in B\big([0,1]\big)$ με τύπο $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } 0 \leq x \leq 1/3 \\ 1, & \text{αν } 1/3 < x \leq 1 \end{cases}$ Αποδείξτε ότι όλα τα στοιχεία της περιοχής του f με ακτίνα $r \leq \frac{1}{2}$ είναι συναρτήσεις στο $[0,1]$ οι οποίες δεν είναι συνεχείς στον $\frac{1}{3}$. Αποδείξτε, όμως, ότι η περιοχή του f με ακτίνα $r > \frac{1}{2}$ περιέχει τουλάχιστον ένα στοιχείο το οποίο είναι συνάρτηση συνεχής στο $[0,1]$.*

Λύση: Έστω $r \leq \frac{1}{2}$ και ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $g \in B\big([0,1]\big)$ η οποία ανήκει στην $N_f(r)$ και η οποία είναι συνεχής στον $\frac{1}{3}$. Δηλαδή,

$$\sup\{|g(x) - f(x)| \,|\, x \in [0,1]\} < r \leq \tfrac{1}{2} \qquad \text{και} \qquad \lim_{x \to \frac{1}{3}} g(x) = g(\tfrac{1}{3}).$$

Θέτουμε $m = \sup\{|g(x) - f(x)| \,|\, x \in [0,1]\}$, οπότε $m < \frac{1}{2}$.
Τότε ισχύει $|g(x)| \leq m$ για κάθε $x \in [0, \frac{1}{3}]$ και $|g(x) - 1| \leq m$ για κάθε $x \in (\frac{1}{3}, 1]$.
Ειδικώτερα, ισχύει

$$g(x) \leq m \quad \text{για κάθε } x \in \big[0, \tfrac{1}{3}\big] \qquad \text{και} \qquad 1 - m \leq g(x) \quad \text{για κάθε } x \in \big(\tfrac{1}{3}, 1\big].$$

Άρα,

$$g(\tfrac{1}{3}) = \lim_{x \to \frac{1}{3}-} g(x) \leq m \qquad \text{και} \qquad g(\tfrac{1}{3}) = \lim_{x \to \frac{1}{3}+} g(x) \geq 1 - m.$$

Συνεπάγεται ότι $1 - m \leq m$, το οποίο είναι άτοπο, διότι $m < \frac{1}{2}$.
Τώρα, έστω $\frac{1}{2} < r$. Πρέπει να βρούμε κάποια $g \in B\big([0,1]\big)$ η οποία ανήκει στην $N_f(r)$ ή, ισοδύναμα, για την οποία ισχύει $\sup\{|g(x) - f(x)| \,|\, x \in [0,1]\} < r$ και η οποία είναι συνεχής στον $\frac{1}{3}$. Αρκεί να βρούμε κάποια $g \in B\big([0,1]\big)$ για την οποία ισχύει $\sup\{|g(x) - f(x)| \,|\, x \in [0,1]\} = \frac{1}{2}$ και η οποία είναι συνεχής στον $\frac{1}{3}$. Παρατηρούμε ότι η σταθερή συνάρτηση με τύπο $g(x) = \frac{1}{2}$ ικανοποιεί αυτές τις συνθήκες.

Άσκηση 11.2.23. *Ένα μη-κενό υποσύνολο A του $\mathbb{R}^d$ χαρακτηρίζεται κυρτό, αν για κάθε $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in A$ και κάθε $t \in (0,1)$ ισχύει $t\mathrm{x} + (1-t)\mathrm{y} \in A$.*
Αν A είναι κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$, αποδείξτε ότι τα A° (στην περίπτωση που είναι μη-κενό) και $\overline{A}$ είναι κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$.

Λύση: Έστω ότι το A είναι κυρτό και $A^\circ \neq \emptyset$. Θεωρούμε τυχόντα $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in A^\circ$ και $t \in (0,1)$ και θα αποδείξουμε ότι $\mathrm{z} = t\mathrm{x} + (1-t)\mathrm{y} \in A^\circ$.
Έχουμε ότι υπάρχουν $r', r'' > 0$ ώστε $N_{\mathrm{x}}(r') \subseteq A$ και $N_{\mathrm{y}}(r'') \subseteq A$. Παίρνουμε τον $r = \min\{r', r''\} > 0$ και τότε $N_{\mathrm{x}}(r) \subseteq A$ και $N_{\mathrm{y}}(r) \subseteq A$. Θα αποδείξουμε ότι $N_{\mathrm{z}}(r) \subseteq A$ και

άρα $\mathrm{z} \in A^{\circ}$.
Πράγματι, έστω $\mathrm{z}' \in N_{\mathrm{z}}(r)$, οπότε $\|\mathrm{z}'-\mathrm{z}\|_2 < r$. Ορίζουμε $\mathrm{x}' = \mathrm{x}+(\mathrm{z}'-\mathrm{z})$ και $\mathrm{y}' = \mathrm{y}+(\mathrm{z}'-\mathrm{z})$. Τότε είναι $\|\mathrm{x}'-\mathrm{x}\|_2 = \|\mathrm{z}'-\mathrm{z}\|_2 < r$ και $\|\mathrm{y}'-\mathrm{y}\|_2 = \|\mathrm{z}'-\mathrm{z}\|_2 < r$ και, επομένως, $\mathrm{x}' \in N_{\mathrm{x}}(r)$ και $\mathrm{y}' \in N_{\mathrm{y}}(r)$ και άρα $\mathrm{x}', \mathrm{y}' \in A$. Τώρα, είναι $\mathrm{z}' = t\mathrm{x}' + (1-t)\mathrm{y}'$ και, επειδή το A είναι κυρτό, συνεπάγεται $\mathrm{z}' \in A$. Άρα $N_{\mathrm{z}}(r) \subseteq A$.
Επειδή το A είναι μη-κενό και $A \subseteq \overline{A}$, συνεπάγεται ότι και το $\overline{A}$ είναι μη-κενό. Θεωρούμε τυχόντα $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \overline{A}$ και $t \in (0,1)$ και θα αποδείξουμε ότι $\mathrm{z} = t\mathrm{x} + (1-t)\mathrm{y} \in \overline{A}$.
Έστω τυχών $r > 0$. Τότε υπάρχουν $\mathrm{x}', \mathrm{y}' \in A$ με $\|\mathrm{x}'-\mathrm{x}\|_2 < r$ και $\|\mathrm{y}'-\mathrm{y}\|_2 < r$. Ορίζουμε $\mathrm{z}' = t\mathrm{x}' + (1-t)\mathrm{y}'$ και τότε είναι $\|\mathrm{z}'-\mathrm{z}\|_2 \leq t\|\mathrm{x}'-\mathrm{x}\|_2 + (1-t)\|\mathrm{y}'-\mathrm{y}\|_2 < tr + (1-t)r = r$ και, επειδή το A είναι κυρτό, $\mathrm{z}' \in A$.
Άρα για κάθε $r > 0$ υπάρχει $\mathrm{z}' \in A$ με $\|\mathrm{z}'-\mathrm{z}\|_2 < r$, οπότε $\mathrm{z} \in \overline{A}$.

Άσκηση 11.2.24. [α] *Έστω μετρικός χώρος (X,d) και $A \subseteq X$. Το A χαρακτηρίζεται πυκνό, αν $\overline{A} = X$.*

Αποδείξτε ότι το A είναι πυκνό και μόνον αν κάθε περιοχή $N_x(r)$ καθενός $x \in X$ περιέχει τουλάχιστον ένα στοιχείο του A.

Είναι το $\mathbb{Q}^d$ πυκνό στο $\mathbb{R}^d$;

Βρείτε τα πυκνά υποσύνολα του μη-κενού X με τη διακριτή μετρική d_δ.

[β] *Ένας μετρικός χώρος (X,d) χαρακτηρίζεται διαχωρίσιμος αν υπάρχει αριθμήσιμο, πυκνό υποσύνολο του X.*

Είναι ο $\mathbb{R}^d$ διαχωρίσιμος;

Αν το μη-κενό X είναι εφοδιασμένο με τη διακριτή μετρική d_δ, αποδείξτε ότι το X είναι διαχωρίσιμο αν και μόνον αν είναι αριθμήσιμο.

[γ] *Έστω διαχωρίσιμος μετρικός χώρος (X,d) και $A \subseteq X$ και $x \in X$. Το x χαρακτηρίζεται σημείο συμπύκνωσης του A, αν για κάθε $r > 0$ η περιοχή $N_x(r)$ περιέχει υπεραριθμήσιμου πλήθους στοιχεία του A.*

Αν το A είναι αριθμήσιμο, αποδείξτε ότι το A δεν έχει κανένα σημείο συμπύκνωσης.

Αν το A είναι υπεραριθμήσιμο και P είναι το σύνολο όλων των σημείων συμπύκνωσης του A, αποδείξτε ότι το P είναι μη-κενό, ότι $P' = P$ και ότι το $A \setminus P$ είναι αριθμήσιμο.

[δ] *Έστω μετρικός χώρος (X,d) και $P \subseteq X$. Το P χαρακτηρίζεται τέλειο, αν $P' = P$.*

Βρείτε μερικά απλά παραδείγματα τέλειων υποσυνόλων του $\mathbb{R}$.

Αν ο (X,d) είναι διαχωρίσιμος και το $A \subseteq X$ είναι κλειστό, αποδείξτε ότι υπάρχει κάποιο τέλειο σύνολο P και κάποιο αριθμήσιμο σύνολο Z ώστε $A = P \cup Z$ και $P \cap Z = \emptyset$.

Λύση: [α] *Το πρώτο ερώτημα.* Βάσει του ορισμού, το A είναι πυκνό αν και μόνο αν κάθε $x \in X$ είναι οριακό σημείο του A αν και μόνο αν κάθε περιοχή $N_x(r)$ καθενός $x \in X$ περιέχει τουλάχιστον ένα στοιχείο του A.

Το δεύτερο ερώτημα. Έστω τυχόν $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ και τυχών $r > 0$. Τότε για κάθε $k = 1, \ldots, d$ υπάρχει $y_k \in \mathbb{Q}$ ώστε $|y_k - x_k| < \frac{r}{\sqrt{d}}$. Συνεπάγεται ότι $\mathrm{y} = (y_1, \ldots, y_d) \in \mathbb{Q}^d$ και

$$\|\mathrm{y}-\mathrm{x}\|_2 = \big((y_1-x_1)^2 + \cdots + (y_d-x_d)^2\big)^{1/2} < \big((r/\sqrt{d})^2 + \cdots + (r/\sqrt{d})^2\big)^{1/2} = r.$$

Άρα κάθε $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^d$ είναι οριακό σημείο του $\mathbb{Q}^d$, οπότε το $\mathbb{Q}^d$ είναι πυκνό στο $\mathbb{R}^d$.

Το τρίτο ερώτημα. Έχουμε δει ότι με την διακριτή μετρική ισχύει $\overline{A} = A$ για κάθε $A \subseteq X$. Άρα το A είναι πυκνό αν και μόνο αν $A = X$, οπότε το μόνο πυκνό υποσύνολο του X είναι το ίδιο το X.

[β] *Το πρώτο ερώτημα.* Το $\mathbb{Q}^d$ είναι αριθμήσιμο και πυκνό στο $\mathbb{R}^d$. Άρα ο $\mathbb{R}^d$ είναι διαχωρίσιμος.

Το δεύτερο ερώτημα. Είδαμε στο [α] ότι το μόνο πυκνό υποσύνολο του X είναι το X. Άρα το X είναι διαχωρίσιμο αν και μόνο αν είναι αριθμήσιμο.

[γ] *Το πρώτο ερώτημα.* Αν κάποιο x είναι σημείο συμπύκνωσης του A, τότε κάθε περιοχή του x περιέχει υπεραριθμήσιμου πλήθους στοιχεία του A. Αυτό είναι αδύνατο αφού το A είναι αριθμήσιμο.

Το δεύτερο ερώτημα. Έστω M ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του X.
Έστω ότι το P είναι κενό. Τότε κάθε $x \in X$ δεν είναι σημείο συμπύκνωσης του A. Άρα για κάθε $x \in X$ υπάρχει $r_x > 0$ ώστε η περιοχή $N_x(r_x)$ να περιέχει αριθμήσιμου πλήθους στοιχεία του A. Από το αποτέλεσμα του [α] συνεπάγεται ότι η $N_x(\frac{r_x}{4})$ περιέχει τουλάχιστον ένα $y \in M$. Επιλέγουμε ένα τέτοιο y και έναν οποιονδήποτε ρητό r με $\frac{r_x}{4} < r < \frac{3r_x}{4}$ και έχουμε ότι $x \in N_y(r)$ και $N_y(r) \subseteq N_x(r_x)$. Τότε η $N_y(r)$ περιέχει αριθμήσιμου πλήθους στοιχεία του A. Συγκεντρώνουμε όλα τα y που έχουμε επιλέξει και σχηματίζουμε το σύνολο $N \subseteq M$. Επίσης, συγκεντρώνουμε όλους τους ρητούς r που έχουμε επιλέξει και σχηματίζουμε το σύνολο $T \subseteq \mathbb{Q}$. Επειδή κάθε $x \in X$ ανήκει σε κάποια περιοχή $N_y(r)$ για κάποιο $y \in N$ και κάποιον $r \in T$, έχουμε ότι $X \subseteq \bigcup\{N_y(r) \,|\, y \in N, r \in T\}$ και άρα

$$A = X \cap A \subseteq \bigcup\{N_y(r) \cap A \,|\, y \in N, r \in T\}.$$

Συμπεραίνουμε ότι το A είναι αριθμήσιμο, αφού περιέχεται σε μια αριθμήσιμη ένωση αριθμήσιμων συνόλων. Αυτό είναι άτοπο διότι το A είναι υπεραριθμήσιμο.
Άρα το P είναι μη-κενό.
Τώρα, έστω $x \in P'$. Τότε το x είναι σημείο συσσώρευσης του P και, ειδικότερα, οριακό σημείο του P. Τότε για κάθε $r > 0$ υπάρχει $y \in N_x(r)$ ώστε $y \in P$. Παίρνουμε $s > 0$ ώστε $N_y(s) \subseteq N_x(r)$ και έχουμε ότι η $N_y(s)$ και άρα και η $N_x(r)$ περιέχει υπεραριθμήσιμου πλήθους στοιχεία του A. Άρα το x είναι σημείο συμπύκνωσης του A, οπότε $x \in P$. Άρα $P' \subseteq P$.
Κατόπιν, έστω $x \in P$. Υποθέτουμε ότι $x \notin P'$, δηλαδή ότι το x είναι μεμονωμένο στοιχείο του P, οπότε υπάρχει $r > 0$ ώστε η $N_x(r)$ να μην περιέχει άλλο στοιχείο του P εκτός του x. Θεωρούμε τα σύνολα

$$S_n = \{y \in X \,|\, \tfrac{r}{2^{n+1}} \leq d(y,x) \leq \tfrac{r}{2^n}\} \qquad \text{για } n \in \mathbb{N}.$$

Τότε

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} S_n \subseteq N_x(r) \setminus \{x\} \qquad \text{και} \qquad N_x(\tfrac{r}{2}) \setminus \{x\} \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} S_n.$$

Από την πρώτη σχέση συνεπάγεται ότι κάθε S_n δεν περιέχει κανένα στοιχείο του P.
Επίσης, από τη δεύτερη σχέση συνεπάγεται ότι το $\bigcup_{n=1}^{+\infty} S_n$ περιέχει υπεραριθμήσιμου πλήθους στοιχεία του A και, επομένως, υπάρχει n ώστε το $S_n \cap A$ να είναι υπεραριθμήσιμο. Όμως, στην προηγούμενη παράγραφο αποδείξαμε ότι κάθε υπεραριθμήσιμο σύνολο έχει τουλάχιστον ένα σημείο συμπύκνωσης. Συνεπάγεται ότι το $S_n \cap A$ έχει τουλάχιστον ένα σημείο συμπύκνωσης, έστω z. Τότε το z είναι σημείο συμπύκνωσης του A, δηλαδή $z \in P$. Επίσης, το z είναι σημείο συμπύκνωσης και άρα οριακό σημείο του S_n. Επειδή το S_n είναι κλειστό, ισχύει $z \in S_n$.
Καταλήγουμε σε άτοπο και άρα $x \in P'$. Άρα $P \subseteq P'$.
Από τις $P' \subseteq P$ και $P \subseteq P'$ συνεπάγεται ότι $P' = P$.
Η απόδειξη του ότι το $A \setminus P$ είναι αριθμήσιμο είναι παρόμοια. Κάντε την εσείς με την εξής *υπόδειξη*. Υποθέστε ότι το $A \setminus P$ είναι υπεραριθμήσιμο, θεωρήστε τα σύνολα

$$T_n = \{y \in X \,|\, d(y,x) \geq \tfrac{1}{n} \text{ για κάθε } x \in P\} \qquad \text{για } n \in \mathbb{N},$$

αποδείξτε, χρησιμοποιώντας ότι το P είναι κλειστό (γιατί;), ότι $X \setminus P = \bigcup_{n=1}^{+\infty} T_n$, αποδείξτε ότι κάποιο $A \cap T_n$ είναι υπεραριθμήσιμο και, τέλος, αποδείξτε ότι το αντίστοιχο T_n περιέχει κάποιο στοιχείο του P και καταλήξτε σε άτοπο.

[δ] *Το πρώτο ερώτημα.* Κάθε κλειστό διάστημα $[a,b]$ είναι τέλειο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Επίσης, το σύνολο του Cantor στην άσκηση 11.2.8 είναι τέλειο υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Το δεύτερο ερώτημα. Αν το A είναι αριθμήσιμο, τότε παίρνουμε $P = \emptyset$ και $Z = A$ και έχουμε το ζητούμενο.
Αν το A είναι υπεραριθμήσιμο, θεωρούμε το σύνολο P των σημείων συμπύκνωσης του A και θέτουμε $Z = A \setminus P$. Κάθε $x \in P$ είναι οριακό σημείο του A και, επειδή το A είναι κλειστό, ισχύει $x \in A$. Άρα $P \subseteq A$. Τα υπόλοιπα είναι άμεση συνέπεια των αποτελεσμάτων του [γ].

Άσκηση 11.2.25. [α] *Έστω μη-κενό σύνολο X και μετρικές d_1 και d_2 στο X. Λέμε ότι οι δύο μετρικές* *είναι ισοδύναμες αν κάθε $A \subseteq X$ το οποίο είναι ανοικτό στον (X, d_1) είναι ανοικτό και στον (X, d_2) και, αντιστρόφως, κάθε $A \subseteq X$ το οποίο είναι ανοικτό στον (X, d_2) είναι ανοικτό και στον (X, d_1).*

Αποδείξτε ότι οι d_1 και d_2 είναι ισοδύναμες αν και μόνον αν κάθε $A \subseteq X$ το οποίο είναι κλειστό στον (X, d_1) είναι κλειστό και στον (X, d_2) και, αντιστρόφως, κάθε $A \subseteq X$ το οποίο είναι κλειστό στον (X, d_2) είναι κλειστό και στον (X, d_1).

Συμβολίζουμε $N_x^{d_1}(r)$ και $N_x^{d_2}(r)$ τις περιοχές του $x \in X$ στους μετρικούς χώρους (X, d_1) και (X, d_2), αντιστοίχως. Αποδείξτε ότι τα παρακάτω (i), (ii) είναι ισοδύναμα.

(i) Οι d_1 και d_2 είναι ισοδύναμες.

(ii) Για κάθε $x \in X$ και κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $N_x^{d_1}(\delta) \subseteq N_x^{d_2}(\epsilon)$ και, αντιστρόφως, για κάθε $x \in X$ και κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $N_x^{d_2}(\delta) \subseteq N_x^{d_1}(\epsilon)$.

[β] *Έστω μετρικός χώρος (X, d). Ορίζουμε $d' : X \times X \to \mathbb{R}$ με τον τύπο $d'(x, y) = \frac{d(x,y)}{d(x,y)+1}$ για κάθε $x, y \in X$.*

Αποδείξτε ότι η d' είναι φραγμένη μετρική στο X ισοδύναμη με την d.

[γ] *Δείτε την άσκηση 11.1.3. Αποδείξτε ότι για κάθε $p_1, p_2 \in [1, +\infty]$ η p_1-μετρική και p_2-μετρική στον $\mathbb{R}^d$ είναι ισοδύναμες.*

Λύση: [α] *Το πρώτο ερώτημα.* Έστω ότι οι d_1 και d_2 είναι ισοδύναμες. Αν το A είναι κλειστό στον (X, d_1), τότε το $X \setminus A$ είναι ανοικτό στον (X, d_1), οπότε το $X \setminus A$ είναι ανοικτό στον (X, d_2) και άρα το A είναι κλειστό στον (X, d_2). Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι, αν το $A \subseteq X$ είναι κλειστό στον (X, d_2), τότε είναι κλειστό και στον (X, d_1).
Αποδείξτε εσείς με τον ίδιο τρόπο και το αντίστροφο: αν κάθε $A \subseteq X$ το οποίο είναι κλειστό στον (X, d_1) είναι κλειστό και στον (X, d_2) και, αντιστρόφως, κάθε $A \subseteq X$ το οποίο είναι κλειστό στον (X, d_2) είναι κλειστό και στον (X, d_1), τότε οι d_1 και d_2 είναι ισοδύναμες.

Το δεύτερο ερώτημα. Έστω ότι οι d_1 και d_2 είναι ισοδύναμες.
Θεωρούμε τυχόν $x \in X$ και τυχόντα $\epsilon > 0$. Τότε η περιοχή $N_x^{d_2}(\epsilon)$ είναι ανοικτό σύνολο στον (X, d_2) και άρα είναι ανοικτό σύνολο και στον (X, d_1). Επειδή $x \in N_x^{d_2}(\epsilon)$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $N_x^{d_1}(\delta) \subseteq N_x^{d_2}(\epsilon)$. Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $N_x^{d_2}(\delta) \subseteq N_x^{d_1}(\epsilon)$.
Αντιστρόφως, έστω ότι ισχύει το (ii). Έστω ανοικτό A στον (X, d_1). Παίρνουμε τυχόν $x \in A$. Τότε υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε $N_x^{d_1}(\epsilon) \subseteq A$ και άρα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $N_x^{d_2}(\delta) \subseteq N_x^{d_1}(\epsilon)$, οπότε $N_x^{d_2}(\delta) \subseteq A$. Άρα το A είναι ανοικτό στον (X, d_2). Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι, αν το A είναι ανοικτό στον (X, d_2), τότε είναι ανοικτό και στον (X, d_1).

[β] Πρώτον, η d' είναι φραγμένη διότι ισχύει $d'(x, y) \leq 1$ για κάθε $x, y \in X$.
Κατόπιν, η d' είναι μετρική στο X διότι οι ιδιότητες (i), (ii), (iii) αποδεικνύονται πολύ απλά βάσει των ιδιοτήτων της μετρικής d και η τριγωνική ανισότητα αποδεικνύεται βάσει της τριγωνικής ανισότητας της d όπως στην άσκηση 11.1.1.
Η ισοδυναμία των d και d' βασίζεται στο αποτέλεσμα του [α].
Έστω $\epsilon > 0$. Παίρνουμε $\delta = \epsilon$ και έχουμε ότι, αν $y \in N_x^d(\delta)$, τότε

$$d'(x, y) = \frac{d(x,y)}{d(x,y)+1} \leq d(x, y) < \delta = \epsilon$$

και άρα $y \in N_x^{d'}(\epsilon)$. Άρα $N_x^d(\delta) \subseteq N_x^{d'}(\epsilon)$.
Επίσης, παίρνουμε $\delta = \min\{\frac{\epsilon}{2}, \frac{1}{2}\}$ και έχουμε ότι, αν $y \in N_x^{d'}(\delta)$, τότε $d'(x, y) < \delta$ και άρα

$$d(x, y) = \frac{d'(x,y)}{1-d'(x,y)} \leq 2d'(x, y) < 2\delta \leq \epsilon$$

και άρα $y \in N_x^d(\epsilon)$. Άρα $N_x^{d'}(\delta) \subseteq N_x^d(\epsilon)$.
Άρα οι d και d' είναι ισοδύναμες.

[γ] Κάντε το εσείς ακολουθώντας την εξής *υπόδειξη*. Αποδείξτε ότι αν $1 \leq p_1 < p_2 \leq +\infty$, τότε ισχύει

$$\|\mathrm{x}\|_{p_2} \leq \|\mathrm{x}\|_{p_1} \leq d^{(1/p_1)-(1/p_2)}\|\mathrm{x}\|_{p_2} \qquad \text{για κάθε } \mathrm{x} \in \mathbb{R}^d.$$

Βασιστείτε, επίσης, στο αποτέλεσμα του [α], όπως στην απόδειξη του [β].

Άσκηση 11.2.26. *Δείτε την άσκηση 11.1.6. Έστω μετρικός χώρος (X, d) και μη-κενό $W \subseteq X$.*
[α] Αν $x \in W$ και $N_x^X(r)$ είναι η r-περιοχή του x στον μετρικό χώρο (X, d) και $N_x^W(r)$ είναι η r-περιοχή του x στον μετρικό υπόχωρο (W, d), αποδείξτε ότι $N_x^W(r) = N_x^X(r) \cap W$.
[β] Θεωρήστε το $A = (0, 1]$ ως υποσύνολο του υπόχωρου $W = (0, 1]$ του Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι $A^0 = (0, 1]$, $\overline{A} = (0, 1]$ και $\partial A = \emptyset$.
[γ] Έστω $A \subseteq W$. Αποδείξτε ότι το A είναι ανοικτό υποσύνολο του (W, d) αν και μόνο αν υπάρχει ανοικτό υποσύνολο B του (X, d) ώστε $A = B \cap W$.
[δ] Έστω $A \subseteq W$. Αν $A^{\circ,X}$ είναι το εσωτερικό του A ως υποσύνολο του (X, d) και $A^{\circ,W}$ είναι το εσωτερικό του A ως υποσύνολο του (W, d), αποδείξτε ότι $A^{\circ,X} \subseteq A^{\circ,W}$.
[ε] Έστω $A \subseteq W$. Αν $\overline{A}^X$ είναι η κλειστότητα του A ως υποσύνολο του (X, d) και $\overline{A}^W$ είναι η κλειστότητα του A ως υποσύνολο του (W, d), αποδείξτε ότι $\overline{A}^W = \overline{A}^X \cap W$.

Λύση: [α] Είναι

$$N_x^W(r) = \{y \in W \mid d(y, x) < r\} = \{y \in X \mid d(y, x) < r\} \cap W = N_x^X(r) \cap W.$$

[β] Γνωρίζουμε ότι σε κάθε μετρικό χώρο (X, d) το σύνολο X είναι ανοικτό και κλειστό. Στην περίπτωσή μας ο μετρικός χώρος είναι το σύνολο $A = W = (0, 1]$ εφοδιασμένο με την Ευκλείδεια μετρική του $\mathbb{R}$. Άρα το A είναι ανοικτό και κλειστό, οπότε $A^0 = A = (0, 1]$ και $\overline{A} = A = (0, 1]$. Γνωρίζουμε ότι τα συνοριακά σημεία του A είναι τα οριακά σημεία του A που δεν είναι εσωτερικά σημεία του. Είδαμε, όμως, ότι κάθε οριακό σημείο του A ανήκει στο A και ότι κάθε σημείο του A είναι εσωτερικό σημείο του. Άρα $\partial A = \emptyset$.
[γ] Έστω $A \subseteq W$ και έστω ότι υπάρχει ανοικτό υποσύνολο B του (X, d) ώστε $A = B \cap W$. Παίρνουμε τυχόν $x \in A$ και τότε $x \in B$. Επειδή το B είναι ανοικτό στον (X, d), υπάρχει $r > 0$ ώστε $N_x^X(r) \subseteq B$. Συνεπάγεται $N_x^W(r) = N_x^X(r) \cap W \subseteq B \cap W = A$. Άρα κάθε $x \in A$ είναι εσωτερικό σημείο του A στον (W, d) και, επομένως, το A είναι ανοικτό στον (W, d).
Αντιστρόφως, έστω $A \subseteq W$ και έστω ότι το A είναι ανοικτό υποσύνολο του (W, d). Τότε για κάθε $x \in A$ υπάρχει $r_x > 0$ ώστε $N_x^W(r_x) \subseteq A$. Συνεπάγεται ότι $A = \bigcup_{x \in A} N_x^W(r_x)$ και θεωρούμε το $B = \bigcup_{x \in A} N_x^X(r_x)$. Το B είναι ανοικτό στον (X, d) ως ένωση ανοικτών συνόλων στον (X, d). Τέλος, έχουμε ότι

$$B \cap W = \textstyle\bigcup_{x \in A}(N_x^X(r_x) \cap W) = \bigcup_{x \in A} N_x^W(r_x) = A.$$

[δ] Έστω $A \subseteq W$ και έστω $x \in A^{\circ,X}$. Τότε υπάρχει $r > 0$ ώστε $N_x^X(r) \subseteq A$. Συνεπάγεται ότι $N_x^W(r) = N_x^X(r) \cap W \subseteq A \cap W = A$ και, επομένως, $x \in A^{\circ,W}$. Άρα $A^{\circ,X} \subseteq A^{\circ,X}$.
[ε] Έστω $A \subseteq W$.
Έστω $x \in \overline{A}^W$. Τότε, πρώτον, $x \in W$. Κατόπιν, για κάθε $r > 0$ η περιοχή $N_x^W(r)$ τέμνει το A. Επειδή $N_x^W(r) \subseteq N_x^X(r)$, συνεπάγεται ότι η $N_x^X(r)$ τέμνει το A. Άρα $x \in \overline{A}^X$. Επομένως, $x \in \overline{A}^X \cap W$ και άρα $\overline{A}^W \subseteq \overline{A}^X \cap W$.
Αντιστρόφως, έστω $x \in \overline{A}^X \cap W$. Τότε $x \in W$. Επίσης, για κάθε $r > 0$ η $N_x^X(r)$ τέμνει το A. Επομένως, η $N_x^W(r) = N_x^X(r) \cap W$ τέμνει το A (αφού η τομή της $N_x^X(r)$ με το A είναι υποσύνολο του A και άρα του W). Άρα $x \in \overline{A}^W$ και, επομένως, $\overline{A}^X \cap W \subseteq \overline{A}^W$.
Από τις $\overline{A}^W \subseteq \overline{A}^X \cap W$ και $\overline{A}^X \cap W \subseteq \overline{A}^W$ συνεπάγεται η $\overline{A}^W = \overline{A}^X \cap W$.

Άσκηση 11.3.3. *Αποδείξτε ότι κάθε συνάρτηση f ορισμένη σε οποιοδήποτε υποσύνολο A μετρικού χώρου (X, d_δ), όπου d_δ είναι η διακριτή μετρική, είναι συνεχής στο A.*

Υπόδειξη: Αποδείξτε τη συνέχεια είτε με τον ορισμό, χρησιμοποιώντας έναν $\delta \leq 1$, είτε με το θεώρημα 11.2, χρησιμοποιώντας το ότι κάθε υποσύνολο του X είναι ανοικτό στον (X, d_δ).

Άσκηση 11.3.4. *Έστω μετρικοί χώροι (X, d) και (Y, ρ), $B \subseteq A \subseteq X$ ώστε $A \subseteq \overline{B}$, $y_0 \in Y$ και $f : A \to Y$ συνεχής στο A. Αν $f(x) = y_0$ για κάθε $x \in B$, αποδείξτε ότι $f(x) = y_0$ για κάθε $x \in A$.*

Υπόδειξη: Πάρτε τυχόν $x \in A$. Το x είναι οριακό σημείο του B και αποδείξτε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $x' \in B$ ώστε $\rho(f(x), f(x')) < \epsilon$, οπότε $\rho(f(x), y_0) < \epsilon$.

Άσκηση 11.3.5. *Αποδείξτε ότι το* $\{x \in \mathbb{R} \,|\, 2 < x^3 - x < 4\}$ *είναι ανοικτό υποσύνολο του* $\mathbb{R}$. *Είναι το* $\{x \in [0,1] \,|\, \frac{1}{4} < x^2 < 4\}$ *ανοικτό υποσύνολο του* $\mathbb{R}$*;*
Αποδείξτε ότι το $\{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \,|\, e^{-\|\mathrm{x}\|_2} + \sin \|\mathrm{x}\|_2 > 0\}$ *είναι ανοικτό υποσύνολο του* $\mathbb{R}^2$.

Λύση: Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^3 - x - 2$ και τότε:

$$\{x \in \mathbb{R} \,|\, 2 < x^3 - x\} = \{x \,|\, f(x) > 0\} = \{x \,|\, f(x) \in (0, +\infty)\} = f^{-1}\big((0, +\infty)\big).$$

Η f είναι πολυωνυμική και άρα είναι συνεχής. Το πεδίο ορισμού της είναι το $\mathbb{R}$ και αυτό είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Επειδή το $(0, +\infty)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του πεδίου τιμών $\mathbb{R}$, συνεπάγεται ότι το $f^{-1}\big((0, +\infty)\big)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.
Θεωρώντας τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^3 - x - 4$, μπορούμε να αποδείξουμε με τον ίδιο τρόπο ότι το $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x^3 - x < 4\}$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.
Άρα το

$$\{x \in \mathbb{R} \,|\, 2 < x^3 - x < 4\} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 2 < x^3 - x\} \cap \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^3 - x < 4\}$$

είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.
Έχουμε ότι $\{x \in [0,1] \,|\, \frac{1}{4} < x^2 < 4\} = (\frac{1}{2}, 1]$ και το σύνολο αυτό δεν είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.
Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(\mathrm{x}) = f(x_1, x_2) = e^{-\|\mathrm{x}\|_2} + \sin \|\mathrm{x}\|_2 = e^{-{x_1}^2 - {x_2}^2} + \sin \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2}$$

και τότε:

$$\begin{aligned}\{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \,|\, e^{-\|\mathrm{x}\|_2} + \sin \|\mathrm{x}\|_2 > 0\} &= \{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \,|\, f(\mathrm{x}) > 0\} \\ &= \{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \,|\, f(\mathrm{x}) \in (0, +\infty)\} = f^{-1}\big((0, +\infty)\big) \cap (R^2 \setminus \{0\}).\end{aligned}$$

Η f είναι συνεχής. Το πεδίο ορισμού της είναι το $\mathbb{R}^2$, το οποίο είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Το $(0, +\infty)$ είναι κλειστό υποσύνολο του πεδίου τιμών $\mathbb{R}$ και άρα το $f^{-1}\big((0, +\infty)\big)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Επίσης, το $R^2 \setminus \{0\}$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ (διότι το $\{0\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$). Άρα το $f^{-1}\big((0, +\infty)\big) \cap (R^2 \setminus \{0\})$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$.

Άσκηση 11.3.6. *Έστω μετρικοί χώροι* (X, d) *και* (Y, ρ) *και* $f : X \to Y$. *Αποδείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*
(i) *Η* f *είναι συνεχής στο* X.
(ii) $f^{-1}(B^\circ) \subseteq \big(f^{-1}(B)\big)^\circ$ *για κάθε* $B \subseteq Y$.

Λύση: Έστω ότι η $f : X \to Y$ είναι συνεχής στο X και έστω $B \subseteq Y$.
Παίρνουμε τυχόν $x \in f^{-1}(B^\circ)$. Τότε $f(x) \in B^\circ$, οπότε υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε $N_{f(x)}(\epsilon) \subseteq B$. Επομένως, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x' \in X$ με $d(x', x) < \delta$ να ισχύει $\rho(f(x'), f(x)) < \epsilon$ και άρα $f(x') \in N_{f(x)}(\epsilon)$ και άρα $f(x') \in B$ και άρα $x' \in f^{-1}(B)$. Έχουμε, λοιπόν, ότι $N_x(\delta) \subseteq f^{-1}(B)$ και άρα $x \in \big(f^{-1}(B)\big)^\circ$.
Άρα $f^{-1}(B^\circ) \subseteq \big(f^{-1}(B)\big)^\circ$.
Αντιστρόφως, έστω $f^{-1}(B^\circ) \subseteq \big(f^{-1}(B)\big)^\circ$ για κάθε $B \subseteq Y$.
Θεωρούμε τυχόν $x \in X$ και τυχόντα $\epsilon > 0$. Τότε η περιοχή $N_{f(x)}(\epsilon)$ είναι ανοικτό σύνολο στον (Y, ρ), οπότε ταυτίζεται με το εσωτερικό της. Παίρνουμε $B = N_{f(x)}(\epsilon)$ και έχουμε $B^\circ = B$ και άρα $f^{-1}(B) \subseteq \big(f^{-1}(B)\big)^\circ$. Λόγω του αντίστροφου εγκλεισμού, έχουμε, φυσικά, ότι $f^{-1}(B) = \big(f^{-1}(B)\big)^\circ$, οπότε το $f^{-1}(B)$ είναι ανοικτό σύνολο στον (X, d). Επειδή $f(x) \in N_{f(x)}(\epsilon) = B$, συνεπάγεται $x \in f^{-1}(B)$ και, επειδή το $f^{-1}(B)$ είναι ανοικτό σύνολο στον (X, d), υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $N_x(\delta) \subseteq f^{-1}(B)$. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $x' \in X$ με $d(x', x) < \delta$ ισχύει $x' \in f^{-1}(B)$

και άρα $f(x') \in B$ και άρα $\rho(f(x'), f(x)) < \epsilon$. Επομένως, η f είναι συνεχής στο x.
Άρα η f είναι συνεχής στο X.

Άσκηση 11.3.8. [α] *Έστω μετρικός χώρος (X, d), μη-κενό $A \subseteq X$ και η συνάρτηση $d(\cdot\,, A) : X \to \mathbb{R}$ που ορίσθηκε στην άσκηση 11.2.19. Αποδείξτε ότι ισχύει $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$ για κάθε $x, y \in X$ και ότι η $d(\cdot\,, A) : X \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής.*
[β] *Έστω μετρικός χώρος (X, d) και μη-κενά κλειστά υποσύνολα A και B του X με $A \cap B = \emptyset$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{d(x,A)}{d(x,A)+d(x,B)}$ για κάθε $x \in X$.*
Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής.
Αποδείξτε ότι ισχύει $f(x) = 1$ αν και μόνο αν $x \in B$ καθώς και ότι ισχύει $f(x) = 0$ αν και μόνο αν $x \in A$.

Λύση: [α] Για κάθε $a \in A$ ισχύει

$$d(x, A) \leq d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$$

και άρα $d(x, A) - d(x, y) \leq d(y, a)$. Αυτό σημαίνει ότι ο $d(x, A) - d(x, y)$ είναι κάτω φράγμα του $\{d(y, a) \,|\, a \in A\}$. Άρα $d(x, A) - d(x, y) \leq d(y, A)$ και, επομένως, $d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$.
Αλλάζοντας τις θέσεις των x, y, παίρνουμε $d(y, A) - d(x, A) \leq d(x, y)$.
Συμπεραίνουμε ότι $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$.
Τώρα, μπορείτε εσείς να δείτε εύκολα ότι η $d(x, A)$ είναι συνεχής στο X.
[β] Επειδή τα A, B είναι κλειστά, από το αποτέλεσμα της άσκησης 11.2.19 συνεπάγεται ότι ισχύει $d(x, A) = 0$ αν και μόνο αν $x \in A$ και ότι ισχύει $d(x, B) = 0$ αν και μόνο αν $x \in B$. Άρα, αφού $A \cap B = \emptyset$, η $f(x) = \frac{d(x,A)}{d(x,A)+d(x,B)}$ είναι ορισμένη για κάθε $x \in X$ και είναι συνεχής στο X. Τα υπόλοιπα είναι εύκολα.

Άσκηση 11.4.2. *Έστω ότι $x_n \to x$ και $y_n \to y$ στον (X, d). Αποδείξτε ότι $d(x_n, y_n) \to d(x, y)$ στο $\mathbb{R}$.*

Λύση: Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε $d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x) + d(x, y) + d(y, y_n)$. Άρα,

$$d(x_n, y_n) - d(x, y) \leq d(x_n, x) + d(y_n, y).$$

Ομοίως, $d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y)$ και, επομένως,

$$d(x, y) - d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x) + d(y_n, y).$$

Από τις δύο αυτές ανισότητες συνεπάγεται ότι

$$|d(x_n, y_n) - d(x, y)| \leq d(x_n, x) + d(y_n, y).$$

Τέλος, επειδή $d(x_n, x) \to 0$ και $d(y_n, y) \to 0$, συμπεραίνουμε ότι $|d(x_n, y_n) - d(x, y)| \to 0$, οπότε $d(x_n, y_n) \to d(x, y)$.

Άσκηση 11.4.6. *Χρησιμοποιώντας ακολουθίες, αποδείξτε ότι κάθε κλειστή μπάλα και κάθε κλειστός ημιχώρος είναι κλειστά υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$.*

Λύση: Θεωρούμε τυχούσα κλειστή μπάλα $\overline{N}_{\mathrm{x}}(r)$ στο $\mathbb{R}^d$.
Έστω οποιαδήποτε ακολουθία (y_n) στην $\overline{N}_{\mathrm{x}}(r)$ ώστε $\mathrm{y}_n \to \mathrm{y}$. Αν $\mathrm{y}_n = (y_{n,1}, \ldots, y_{n,d})$ για κάθε n και $\mathrm{y} = (y_1, \ldots, y_d)$, τότε συνεπάγεται ότι $y_{n,k} \to y_k$ για κάθε $k = 1, \ldots, d$.
Το ότι ισχύει $\mathrm{y}_n \in \overline{N}_{\mathrm{x}}(r)$ για κάθε n σημαίνει ότι ισχύει

$$(y_{n,1} - x_1)^2 + \cdots + (y_{n,d} - x_d)^2 \leq r^2 \qquad \text{για κάθε } n,$$

όπου $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_d)$. Συνεπάγεται

$$(y_1 - x_1)^2 + \cdots + (y_d - x_d)^2 \leq r^2$$

και άρα $\mathrm{y} \in \overline{N}_{\mathrm{x}}(r)$.
Άρα η $\overline{N}_{\mathrm{x}}(r)$ είναι κλειστή στο $\mathbb{R}^d$.
Θεωρούμε τυχόντα κλειστό ημίχωρο $A = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^d \,|\, \langle \mathrm{x}, \mathrm{a} \rangle \leq a\}$.
Έστω ακολουθία (y_n) στο A ώστε $\mathrm{y}_n \to \mathrm{y}$. Αν $\mathrm{y}_n = (y_{n,1}, \ldots, y_{n,d})$ για κάθε n και $\mathrm{y} = (y_1, \ldots, y_d)$, τότε συνεπάγεται ότι $y_{n,k} \to y_k$ για κάθε $k = 1, \ldots, d$.
Το ότι ισχύει $\mathrm{y}_n \in A$ για κάθε n σημαίνει ότι ισχύει

$$a_1 y_{n,1} + \cdots + a_d y_{n,d} \leq a \qquad \text{για κάθε } n,$$

όπου $\mathrm{a} = (a_1, \ldots, a_d)$. Συνεπάγεται

$$a_1 y_1 + \cdots + a_d y_d \leq a$$

και άρα $\mathrm{y} \in A$.
Άρα το A είναι κλειστό στο $\mathbb{R}^d$.

Άσκηση 11.4.8. *Θεωρήστε τον χώρο $(BC([a,b]), d_A)$ των φραγμένων και συνεχών συναρτήσεων στο διάστημα $[a,b]$ με την ομοιόμορφη μετρική και την συνάρτηση $I : BC([a,b]) \to \mathbb{R}$ με τύπο $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$ για κάθε $f \in BC([a,b])$. Αποδείξτε ότι η I είναι συνεχής.*

Λύση: Θεωρούμε οποιαδήποτε ακολουθία (f_n) στο σύνολο $BC([a,b])$ έτσι ώστε η (f_n) να συγκλίνει στο στοιχείο f του $BC([a,b])$. Αυτό σημαίνει ότι η ακολουθία συναρτήσεων (f_n) συγκλίνει στη συνάρτηση f ομοιόμορφα στο $[a,b]$. Συνεπάγεται $\int_a^b f_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx$ και άρα $I(f_n) \to I(f)$. Δηλαδή, η ακολουθία $(I(f_n))$ στο $\mathbb{R}$ συγκλίνει στο στοιχείο $I(f)$ του $\mathbb{R}$.
Άρα η συνάρτηση $I : BC([a,b]) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής.

Άσκηση 11.4.9. *Έστω μετρικός χώρος (X,d) και ακολουθία (x_n) στο X. Αποδείξτε ότι το σύνολο των υποακολουθιακών ορίων της (x_n) στο X είναι κλειστό.*

Υπόδειξη: Κατ'αρχάς, αποδείξτε ότι το $x \in X$ είναι υποακολουθιακό όριο της (x_n) αν και μόνο αν κάθε περιοχή $N_x(r)$ περιέχει άπειρους όρους της (x_n). Χρησιμοποιήστε αυτό που αποδείξατε για τα παρακάτω. Συμβολίστε A το σύνολο των υποακολουθιακών ορίων της (x_n). Θεωρήστε ακολουθία (y_n) στο A (δηλαδή, κάθε y_n είναι υποακολουθιακό όριο της (x_n)) και έστω $y_n \to y$. Αποδείξτε ότι το y είναι υποακολουθιακό όριο της (x_n).

Άσκηση 11.5.1. *Έστω μετρικός χώρος (X,d) και $A \subseteq X$. Το A χαρακτηρίζεται πουθενά πυκνό αν το $\overline{A}$ δεν έχει κανένα εσωτερικό σημείο.*
Αποδείξτε ότι, αν ο X είναι πλήρης και αν για κάθε n το F_n είναι κλειστό και πουθενά πυκνό υποσύνολο του X, τότε η ένωση $\bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n$ δεν έχει κανένα εσωτερικό σημείο.

Υπόδειξη: Θεωρήστε τα σύνολα $U_n = X \setminus F_n$ και χρησιμοποιήστε το θεώρημα του Baire.

Άσκηση 11.5.2. *Αποδείξτε την αρχή ομοιόμορφου φράγματος. Έστω πλήρης μετρικός χώρος (X,d) και συλλογή $\mathcal{F}$ συνεχών συναρτήσεων $f : X \to \mathbb{R}$ έτσι ώστε για κάθε $x \in X$ να υπάρχει αριθμός M_x ώστε να ισχύει $|f(x)| \leq M_x$ για κάθε $f \in \mathcal{F}$. Τότε υπάρχει μη-κενό ανοικτό σύνολο $U \subseteq X$ και αριθμός M ώστε να ισχύει $|f(x)| \leq M$ για κάθε $f \in \mathcal{F}$ και κάθε $x \in U$.*

Υπόδειξη: Θεωρήστε το σύνολο $U_n = \{x \in X \,|\, |f(x)| > n$ για τουλάχιστον μία $f \in \mathcal{F}\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι κάθε U_n είναι ανοικτό στον (X,d) και ότι $\bigcap_{n=1}^{+\infty} U_n = \emptyset$. Κατόπιν, χρησιμοποιήστε το θεώρημα του Baire.

Άσκηση 11.5.3. *Δείτε τις ασκήσεις 11.1.4 και 11.1.5.*
Αν $1 \leq p \leq +\infty$, αποδείξτε ότι ο μετρικός χώρος (l_p, d_p) είναι πλήρης.
Αν $1 \leq p < +\infty$, αποδείξτε ότι ο μετρικός χώρος $\big(C([a,b]), d_p\big)$ δεν είναι πλήρης.

Λύση: Το πρώτο ερώτημα. Έστω ακολουθία Cauchy (x_n) στον μετρικό χώρο (l_p, d_p) και έστω $\mathrm{x}_n = (x_{n,k})$ για κάθε n. Τότε για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$|x_{n,k} - x_{m,k}| \leq \|\mathrm{x}_n - \mathrm{x}_m\|_p = d_p(\mathrm{x}_n, \mathrm{x}_m) \qquad \text{για κάθε } n, m$$

και άρα $|x_{n,k} - x_{m,k}| \to 0$ όταν $n, m \to +\infty$.
Άρα για κάθε $k \in \mathbb{N}$ η ακολουθία $(x_{n,k})$ είναι ακολουθία Cauchy στο $\mathbb{R}$. Επειδή το $\mathbb{R}$ είναι πλήρης μετρικός χώρος, υπάρχει $x_k \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $x_{n,k} \to x_k$ όταν $n \to +\infty$.
Έτσι σχηματίζεται η ακολουθία $\mathrm{x} = (x_k)$.
Τώρα, υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $\|\mathrm{x}_n - \mathrm{x}_m\|_p < 1$ για κάθε $n, m \geq n_0$. Ειδικώτερα, για $m = n_0$, έχουμε ότι ισχύει

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |x_{n,k} - x_{n_0,k}|^p < 1 \qquad \text{για κάθε } n \geq n_0.$$

Άρα για κάθε $K \in \mathbb{N}$ ισχύει $\sum_{k=1}^{K} |x_{n,k} - x_{n_0,k}|^p < 1$ για κάθε $n \geq n_0$. Παίρνοντας το όριο καθώς $n \to +\infty$, βρίσκουμε ότι για κάθε K ισχύει $\sum_{k=1}^{K} |x_k - x_{n_0,k}|^p \leq 1$. Παίρνοντας το όριο καθώς $K \to +\infty$, βρίσκουμε ότι ισχύει $\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k - x_{n_0,k}|^p \leq 1$.
Από το ότι $\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k - x_{n_0,k}|^p < +\infty$, το ότι $\sum_{k=1}^{+\infty} |x_{n_0,k}|^p < +\infty$ και από την ανισότητα του Minkowski στην άσκηση 8.3.23 συνεπάγεται ότι $\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k|^p < +\infty$, δηλαδή $\mathrm{x} \in l_p$.
Τώρα, έστω τυχών $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει n_0 (όχι ο ίδιος με τον προηγούμενο n_0) ώστε να ισχύει $\|\mathrm{x}_n - \mathrm{x}_m\|_p < \frac{\epsilon}{2}$ για κάθε $n, m \geq n_0$. Δηλαδή, ισχύει

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |x_{n,k} - x_{m,k}|^p < \left(\tfrac{\epsilon}{2}\right)^p \qquad \text{για κάθε } n, m \geq n_0.$$

Άρα για κάθε $K \in \mathbb{N}$ ισχύει $\sum_{k=1}^{K} |x_{n,k} - x_{m,k}|^p < (\frac{\epsilon}{2})^p$ για κάθε $n, m \geq n_0$. Παίρνοντας το όριο καθώς $m \to +\infty$ βρίσκουμε ότι για κάθε K ισχύει $\sum_{k=1}^{K} |x_{n,k} - x_k|^p \leq (\frac{\epsilon}{2})^p$ για κάθε $n \geq n_0$.
Άρα ισχύει

$$\|\mathrm{x}_n - \mathrm{x}\|_p{}^p = \sum_{k=1}^{+\infty} |x_{n,k} - x_k|^p \leq \left(\tfrac{\epsilon}{2}\right)^p < \epsilon^p \qquad \text{για κάθε } n \geq n_0.$$

Επομένως, $\mathrm{x}_n \to \mathrm{x}$ στον μετρικό χώρο (l_p, d_p).
Στα προηγούμενα υποθέσαμε σιωπηρά ότι $1 \leq p < +\infty$. Κάντε εσείς την περίπτωση $p = +\infty$.
Το δεύτερο ερώτημα. Θεωρούμε $\xi = \frac{a+b}{2}$ και την ακολουθία (f_n), όπου η f_n είναι συνεχής στο $[a, b]$ και ισχύει $f_n(x) = 0$ στο διάστημα $[a, \xi - \frac{b-a}{2n}]$ και $f_n(x) = 1$ στο $[\xi + \frac{b-a}{2n}, b]$ και όπου η f_n είναι αφφινική στο $[\xi - \frac{b-a}{2n}, \xi + \frac{b-a}{2n}]$.
Έστω ότι $f_n \to f$ στον μετρικό χώρο $\big(C([a, b]), d_p\big)$ και, επομένως, η f είναι συνεχής στό $[a, b]$.
Παίρνουμε τυχόντα a' με $a \leq a' < \xi$. Τότε ισχύει τελικά $a' \leq \xi - \frac{b-a}{2n} < \xi$, οπότε υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $f_n(x) = 0$ για κάθε x στο $[a, a']$ και, επομένως, ισχύει

$$\int_a^{a'} |f_n(x) - f(x)|^p\, dx = \int_a^{a'} |f(x)|^p\, dx \qquad \text{για κάθε } n \geq n_0. \tag{14.297}$$

Τώρα, το $d_p(f_n, f) \to 0$ σημαίνει ότι $\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^p\, dx \to 0$ και άρα

$$\int_a^{a'} |f_n(x) - f(x)|^p\, dx \to 0.$$

Επομένως, από την (14.297) συνεπάγεται ότι $\int_a^{a'} |f(x)|^p\, dx = 0$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[a, a']$ συνεπάγεται ότι ισχύει $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, a']$. Τέλος, επειδή αυτό ισχύει για κάθε a' με $a \leq a' < \xi$, συμπεραίνουμε ότι ισχύει $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, \xi)$.
Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται (κάντε το εσείς) ότι ισχύει $f(x) = 1$ για κάθε $x \in (\xi, b]$.
Άρα δεν είναι δυνατό να είναι η f συνεχής στο $[a, b]$ και καταλήγουμε σε άτοπο.

Άσκηση 11.5.4. *Έστω μετρικός χώρος (X, d). Αν για κάθε ακολουθία $F_1, F_2, \ldots$ μη-κενών κλειστών υποσυνόλων του X, για την οποία ισχύει $F_{n+1} \subseteq F_n$ για κάθε n και $\mathrm{diam}\, F_n \to 0$, η τομή $\bigcap_{n=1}^{+\infty} F_n$ είναι μη-κενή, αποδείξτε ότι ο μετρικός χώρος είναι πλήρης.*

Υπόδειξη: Θεωρήστε οποιαδήποτε ακολουθία Cauchy (x_n) στον μετρικό χώρο (X, d) και τα σύνολα $F_n = \overline{\{x_k \,|\, k \geq n\}}$. Αποδείξτε ότι ισχύει $F_{n+1} \subseteq F_n$ για κάθε n και ότι $\mathrm{diam}\, F_n \to 0$. Βάσει της υπόθεσης, υπάρχει $x \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} F_n$. Αποδείξτε ότι $x_n \to x$.

Άσκηση 11.5.5. *Έστω μετρικός χώρος (X, d) και πλήρες $A \subseteq X$. Αν $0 \leq M < 1$ και για την*

$f : A \to A$ ισχύει $d(f(x), f(y)) \le Md(x, y)$ για κάθε $x, y \in A$, αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο A και ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in A$ ώστε $f(\xi) = \xi$.

Υπόδειξη: Πάρτε οποιοδήποτε $x \in X$ και θεωρήστε την ακολουθία (x_n) που ορίζεται ώστε να ικανοποιεί την $x_1 = x$ και τον αναδρομικό τύπο $x_{n+1} = f(x_n)$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι ισχύει $d(x_{n+1}, x_{n+2}) \le Md(x_n, x_{n+1})$ για κάθε n. Κατόπιν, αποδείξτε ότι η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy. Δείτε και την άσκηση 2.6.4[β]. Θέσατε $\xi = \lim_{n\to+\infty} x_n$ και αποδείξτε ότι $f(\xi) = \xi$. Για τη μοναδικότητα του ξ, δείτε ότι, αν $f(\xi') = \xi'$ και $f(\xi'') = \xi''$, τότε $d(\xi', \xi'') \le Md(\xi', \xi'')$.

Άσκηση 11.6.1. *Αποδείξτε ότι το $A = \{(x_1, x_2) \,|\, x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_1 + x_2 \le 1\}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ και ότι το $B = \{(x_1, x_2, x_3) \,|\, {x_1}^2 + {x_2}^2 \le x_3 \le 1\}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$.*

Λύση: Το A είναι ένα κλειστό τρίγωνο στο επίπεδο με κορυφές τα σημεία $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ και είναι τομή τριών κλειστών ημιεπιπέδων:

$$A = \{(x_1, x_2) \,|\, x_1 \ge 0\} \cap \{(x_1, x_2) \,|\, x_2 \ge 0\} \cap \{(x_1, x_2) \,|\, x_1 + x_2 \le 1\}.$$

Αν θέσουμε $\mathrm{x} = (x_1, x_2)$, τότε τα τρία κλειστά ημιεπίπεδα περιγράφονται με τις αντίστοιχες ανισότητες

$$\langle \mathrm{x}, \mathrm{e}_1\rangle \ge 0, \qquad \langle \mathrm{x}, \mathrm{e}_2\rangle \ge 0, \qquad \langle \mathrm{x}, \mathrm{k}\rangle \le 1,$$

όπου $\mathrm{e}_1 = (1, 0)$, $\mathrm{e}_2 = (0, 1)$, $\mathrm{k} = (1, 1)$.
Γνωρίζουμε ότι κάθε κλειστό ημιεπίπεδο στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^2$ είναι κλειστό σύνολο. Άρα το A, ως τομή κλειστών συνόλων, είναι κλειστό.
Από την άλλη μεριά, το A είναι φραγμένο σύνολο. Πράγματι, για κάθε $(x_1, x_2) \in A$ έχουμε $0 \le x_1 \le 1$ και $0 \le x_2 \le 1$, οπότε το A είναι υποσύνολο του ορθογωνίου παραλληλογράμμου $[0, 1] \times [0, 1]$.
Άρα το A είναι κλειστό και φραγμένο, οπότε είναι συμπαγές.
Για το B έχουμε το εξής:

$$B = \{(x_1, x_2, x_3) \,|\, {x_1}^2 + {x_2}^2 \le x_3\} \cap \{(x_1, x_2, x_3) \,|\, x_3 \le 1\}.$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(\mathrm{x}) = f(x_1, x_2, x_3) = {x_1}^2 + {x_2}^2 - x_3$ και τότε:

$$\{(x_1, x_2, x_3) \,|\, {x_1}^2 + {x_2}^2 \le x_3\} = \{\mathrm{x} \,|\, f(\mathrm{x}) \le 0\} = \{\mathrm{x} \,|\, f(\mathrm{x}) \in (-\infty, 0]\} = f^{-1}\big((-\infty, 0]\big).$$

Η f είναι πολυωνυμική και άρα είναι συνεχής. Το πεδίο ορισμού της είναι το $\mathbb{R}^3$ και αυτό είναι κλειστό υποσύνολο του Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^3$. Επειδή το $(-\infty, 0]$ είναι κλειστό υποσύνολο του Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}$, συνεπάγεται ότι το $f^{-1}\big((-\infty, 0]\big)$ είναι κλειστό υποσύνολο του Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^3$.
Κατόπιν θεωρούμε την συνάρτηση $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(\mathrm{x}) = g(x_1, x_2, x_3) = x_3$ και τότε:

$$\{(x_1, x_2, x_3) \,|\, x_3 \le 1\} = \{\mathrm{x} \,|\, g(\mathrm{x}) \le 1\} = \{\mathrm{x} \,|\, g(\mathrm{x}) \in (-\infty, 1]\} = g^{-1}\big((-\infty, 1]\big).$$

Ακριβώς όπως στην προηγούμενη περίπτωση, βλέπουμε ότι το $g^{-1}\big((-\infty, 1]\big)$ είναι κλειστό υποσύνολο του Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^3$.
Άρα το B είναι τομή κλειστών, οπότε είναι κλειστό.
Τέλος, βλέπουμε εύκολα ότι το B είναι φραγμένο. Για κάθε $(x_1, x_2, x_3) \in B$ ισχύει $|x_1| \le 1$, $|x_2| \le 1$, $0 \le x_3 \le 1$. Άρα το B είναι υποσύνολο του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου $[-1, 1] \times [-1, 1] \times [0, 1]$, οπότε είναι φραγμένο.
Άρα το B είναι κλειστό και φραγμένο, οπότε είναι συμπαγές.

Άσκηση 11.6.6. [α] *Θεωρήστε το υποσύνολο $A = \{(x_1, x_2) \,|\, {x_1}^2 + {x_2}^2 \le 1\}$ του $\mathbb{R}^2$. Έχει η συνάρτηση $f(x_1, x_2) = e^{x_1+x_2}$ μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο A;*

Λύση: Το A ταυτίζεται με την κλειστή περιοχή $\overline{N}_0(1)$ στο $\mathbb{R}^2$ και άρα είναι συμπαγές. Η f είναι συνεχής πραγματική συνάρτηση στο A και, επομένως, έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο A.

Άσκηση 11.6.7. *Έστω $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ με $f(\mathrm{x}) \to 0$ καθώς $\|\mathrm{x}\|_2 \to +\infty$. Αυτό σημαίνει, εξ ορισμού, ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $R > 0$ ώστε να ισχύει $|f(\mathrm{x})| < \epsilon$ για κάθε $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^d$ με $\|\mathrm{x}\|_2 > R$.*
Αν υπάρχει $\mathrm{x}_0 \in \mathbb{R}^d$ ώστε $f(\mathrm{x}_0) \geq 0$, αποδείξτε ότι η f έχει μέγιστη τιμή.
Αν υπάρχει $\mathrm{x}_0 \in \mathbb{R}^d$ ώστε $f(\mathrm{x}_0) \leq 0$, αποδείξτε ότι η f έχει ελάχιστη τιμή.
Αποδείξτε ότι η $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x_1, x_2) = x_1 e^{-({x_1}^2 + {x_2}^2)}$ έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή και υπολογίστε τις τιμές αυτές.

Λύση: Το πρώτο ερώτημα. Το σύνολο τιμών $\{f(\mathrm{x}) \,|\, \mathrm{x} \in \mathbb{R}^d\}$ είναι μη-κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, οπότε έχει supremum. Θεωρούμε το $u = \sup\{f(\mathrm{x}) \,|\, \mathrm{x} \in \mathbb{R}^d\}$ το οποίο είναι αριθμός ή $+\infty$.
Επειδή ο 0 ανήκει στο σύνολο τιμών της f, ισχύει $u \geq 0$.
Αν $u = 0$, τότε ο 0 είναι η μέγιστη τιμή της f (στο σημείο x_0).
Τώρα, έστω $u > 0$. Τότε υπάρχει x_1 ώστε $0 < f(\mathrm{x}_1) \leq u$. Κατόπιν, υπάρχει $R > 0$ ώστε να ισχύει $|f(\mathrm{x})| < f(\mathrm{x}_1)$ για κάθε $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^d$ με $\|\mathrm{x}\|_2 > R$.
Είναι σαφές ότι ισχύει $\|\mathrm{x}_1\|_2 \leq R$, δηλαδή $\mathrm{x}_1 \in \overline{N}_0(R)$. Η κλειστή περιοχή $\overline{N}_0(R)$ είναι συμπαγές σύνολο και η f είναι συνεχής σ' αυτό. Άρα η f έχει μέγιστη τιμή στην $\overline{N}_0(R)$. Έστω $M = f(\xi)$ η μέγιστη τιμή της f στην $\overline{N}_0(R)$, όπου $\xi \in \overline{N}_0(R)$.
Επειδή $\mathrm{x}_1 \in \overline{N}_0(R)$, συνεπάγεται $f(\mathrm{x}_1) \leq f(\xi) = M$.
Τώρα, έχουμε $f(\mathrm{x}) < f(\mathrm{x}_1) \leq f(\xi) = M$ για $\|\mathrm{x}\|_2 > R$ και $f(\mathrm{x}) \leq f(\xi) = M$ για $\|\mathrm{x}\|_2 \leq R$. Άρα ο $M = f(\xi)$ είναι η μέγιστη τιμή της f στο $\mathbb{R}^d$.

Το δεύτερο ερώτημα. Η απόδειξη είναι ίδια με την προηγούμενη.

Το τρίτο ερώτημα. Βάσει των αποτελεσμάτων των [β] και [γ], αρκεί να αποδείξουμε ότι $f(\mathrm{x}) \to 0$ καθώς $\|\mathrm{x}\|_2 \to +\infty$. Αυτό γίνεται ως εξής:

$$|f(\mathrm{x})| = |f(x_1, x_2)| = |x_1| e^{-({x_1}^2 + {x_2}^2)} \leq \|\mathrm{x}\|_2 e^{-{\|\mathrm{x}\|_2}^2}$$

και, επειδή $\|\mathrm{x}\|_2 e^{-{\|\mathrm{x}\|_2}^2} \to 0$ όταν $\|\mathrm{x}\|_2 \to +\infty$, έχουμε το ζητούμενο.
Για να βρούμε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f, βρίσουμε τα κρίσιμα σημεία της. Αν το $\mathrm{x} = (x_1, x_2)$ είναι κρίσιμο σημείο της f, τότε

$$\tfrac{\partial f}{\partial x_1}(\mathrm{x}) = 0 \qquad \text{και} \qquad \tfrac{\partial f}{\partial x_2}(\mathrm{x}) = 0,$$

οπότε

$$e^{-({x_1}^2 + {x_2}^2)} - 2{x_1}^2 e^{-({x_1}^2 + {x_2}^2)} = 0 \qquad \text{και} \qquad -2x_1 x_2 e^{-({x_1}^2 + {x_2}^2)} = 0$$

και άρα $\mathrm{x} = (\pm 2^{-1/2}, 0)$. Επομένως, η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της f είναι, αντιστοίχως, η $f(2^{-1/2}, 0) = (2e)^{-1/2}$ και η $f(-2^{-1/2}, 0) = -(2e)^{-1/2}$.

Άσκηση 11.6.9. *Έστω μετρικός χώρος (X, d), ακολουθία (x_n) στο X, $x \in X$ ώστε να ισχύει $x_n \neq x$ για κάθε n και $x_n \to x$. Αποδείξτε ότι το $\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ δεν είναι συμπαγές ενώ το $\{x\} \cup \{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ είναι συμπαγές.*

Λύση: Το $\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ δεν είναι συμπαγές διότι δεν είναι κλειστό. Πράγματι, το x είναι οριακό σημείο του συνόλου (αφού είναι όριο της ακολουθίας (x_n) η οποία περιέχεται στο σύνολο) αλλά το x δεν είναι στοιχείο του συνόλου.
Τώρα θεωρούμε τυχούσα ανοικτή κάλυψη του $\{x\} \cup \{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$, δηλαδή, οποιαδήποτε συλλογή ανοικτών υποσυνόλων του (X, d) η ένωση των οποίων περιέχει το $\{x\} \cup \{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$.
Τότε υπάρχει κάποιο U_0 της συλλογής αυτής ώστε $x \in U_0$. Επειδή το U_0 είναι ανοικτό, υπάρχει $r > 0$ ώστε $N_x(r) \subseteq U_0$. Επειδή $x_n \to x$, υπάρχει n_0 ώστε $x_n \in N_x(r)$ για κάθε $n \geq n_0$.
Για κάθε $k = 1, \ldots, n_0 - 1$ υπάρχει αντίστοιχο U_k της συλλογής ώστε $x_k \in U_k$.
Θεωρούμε, τώρα, τα σύνολα $U_0, U_1, \ldots, U_{n_0 - 1}$ της συλλογής και παρατηρούμε ότι η ένωσή τους περιέχει το $\{x\} \cup \{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$.
Άρα, το σύνολο $\{x\} \cup \{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του (X, d).

Άσκηση 11.6.10. *Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $M_1, \ldots, M_n \subseteq X$.*

Αν τα $M_1, \dots, M_n$ είναι συμπαγή, αποδείξτε ότι το $M_1 \cup \cdots \cup M_n$ είναι συμπαγές.
Βρείτε συμπαγή υποσύνολα $M_1, M_2, \dots$ του $\mathbb{R}$ ώστε το $\bigcup_{n=1}^{+\infty} M_n$ να μην είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Λύση: Το πρώτο ερώτημα. Έστω τυχούσα ανοικτή κάλυψη Σ του $M = M_1 \cup \cdots \cup M_n$. Τότε η Σ είναι κάλυψη καθενός από τα $M_1, \dots, M_n$. Άρα για κάθε $k = 1, \dots, n$ υπάρχει κάποια αντίστοιχη πεπερασμένη κάλυψη Σ_k' του M_k η οποία είναι μικρότερη ή ίση της Σ. Τότε η $\Sigma' = \Sigma_1' \cup \cdots \cup \Sigma_n'$ είναι πεπερασμένη κάλυψη του M μικρότερη ή ίση της Σ.
Το δεύτερο ερώτημα. Θεωρήστε $M_n = [-n, n]$ για κάθε n ή $M_n = [\frac{1}{n}, 1]$ για κάθε n.

Άσκηση 11.6.16. *Έστω μετρικός χώρος (X, d) και μη-κενό $M \subseteq X$. Αποδείξτε ότι $\operatorname{diam} M = \operatorname{diam} \overline{M}$.*

Υπόδειξη: Αποδείξτε, γενικά, ότι, αν $M \subseteq N \subseteq X$, τότε $\operatorname{diam} M \leq \operatorname{diam} N$. Βασιστείτε στο ότι $\{d(x,y) \,|\, x, y \in M\} \subseteq \{d(x,y) \,|\, x, y \in N\}$. Συμπεράνατε ότι $\operatorname{diam} M \leq \operatorname{diam} \overline{M}$.
Αιτιολογήστε το ότι υπάρχουν ακολουθίες (x_n) και (y_n) στο $\overline{M}$ ώστε $d(x_n, y_n) \to \operatorname{diam} \overline{M}$. Αιτιολογήστε το ότι για κάθε n υπάρχουν $x_n', y_n' \in M$ ώστε $d(x_n', x_n) < \frac{1}{n}$ και $d(y_n', y_n) < \frac{1}{n}$. Χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα αποδείξτε ότι $d(x_n', y_n') \to \operatorname{diam} \overline{M}$. Επειδή ισχύει $d(x_n', y_n') \leq \operatorname{diam} M$ για κάθε n, συμπεράνατε ότι $\operatorname{diam} \overline{M} \leq \operatorname{diam} M$.

Άσκηση 11.6.17. *Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $A, B \subseteq X$. Αν το A είναι συμπαγές και το B κλειστό, αποδείξτε ότι το $A \cap B$ είναι συμπαγές.*

Λύση: Το A είναι κλειστό, οπότε και το $A \cap B$ είναι κλειστό. Από το ότι το $A \cap B$ είναι κλειστό, το ότι το A είναι συμπαγές και το ότι $A \cap B \subseteq A$ συνεπάγεται ότι το $A \cap B$ είναι συμπαγές.

Άσκηση 11.6.18. *Έστω μετρικός χώρος (X, d), μη-κενό συμπαγές $M \subseteq X$ και $x_0 \in X$. Αποδείξτε ότι υπάρχει κάποιο $x' \in M$ ώστε $d(x_0, x') = \inf\{d(x_0, x) \,|\, x \in M\}$.*

Λύση: Το σύνολο
$$A = \{d(x_0, x) \,|\, x \in M\}$$
είναι μη-κενό και κάτω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με κάτω φράγμα τον 0. Άρα υπάρχει το infimum του A και είναι αριθμός ≥ 0. Θέτουμε $l = \inf A$.
Γνωρίζουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει στοιχείο του A ανάμεσα στα l και $l + \frac{1}{n}$. Δηλαδή υπάρχει $x_n \in M$ ώστε
$$l \leq d(x_0, x_n) < l + \tfrac{1}{n}.$$
Έτσι δημιουργείται ακολουθία (x_n) στο M και, επειδή το M είναι συμπαγές, υπάρχει υποακολουθία της (x_n) που συγκλίνει σε στοιχείο του M. Δηλαδή, υπάρχει (x_{n_k}) ώστε
$$x_{n_k} \to x' \qquad \text{όταν } k \to +\infty$$
για κάποιο $x' \in M$.
Από τις σχέσεις
$$l \leq d(x_0, x_{n_k}) < l + \tfrac{1}{n_k}$$
συνεπάγεται ότι
$$d(x_0, x_{n_k}) \to l \qquad \text{όταν } k \to +\infty. \tag{14.298}$$
Όμως, από την τριγωνική ανισότητα έχουμε
$$-d(x_{n_k}, x') \leq d(x_0, x_{n_k}) - d(x_0, x') \leq d(x_{n_k}, x')$$
και, επειδή $d(x_{n_k}, x') \to 0$, συνεπάγεται
$$d(x_0, x_{n_k}) \to d(x_0, x') \qquad \text{όταν } k \to +\infty. \tag{14.299}$$
Από τις (14.298) και (14.299) προκύπτει το $d(x_0, x') = l$.

Άσκηση 11.6.20. *Έστω φραγμένο υποσύνολο M του $\mathbb{R}^d$. Αποδείξτε ότι το $\overline{M}$ είναι συμπαγές.*

Λύση: Το $\overline{M}$ είναι κλειστό, οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι φραγμένο σύνολο.
Επειδή το M είναι φραγμένο, υπάρχει κάποια κλειστή μπάλα $\overline{N}_0(r)$ κέντρου $0 = (0, \ldots, 0)$ και ακτίνας r η οποία περιέχει το M. Η μπάλα αυτή είναι κλειστό σύνολο και το $\overline{M}$ είναι το μικρότερο κλειστό υπερσύνολο του M, οπότε $\overline{M} \subseteq \overline{N}_0(r)$. Άρα, πράγματι, το $\overline{M}$ είναι φραγμένο.

Άσκηση 11.6.22. *Έστω μετρικοί χώροι (X, d) και (Y, ρ), $M \subseteq X$, $N \subseteq Y$ και $f : M \to N$ η οποία είναι ένα-προς-ένα και επί. Αν η f είναι συνεχής στο M και το M είναι συμπαγές, αποδείξτε ότι η αντίστροφη $f^{-1} : N \to M$ είναι συνεχής στο N.*

Λύση: Χάριν απλότητας, γράφουμε $g = f^{-1} : N \to M$.
Θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα 11.2. Έστω τυχόν κλειστό $F \subseteq X$. Το $F \cap M$ είναι κλειστό υποσύνολο του M και, επειδή το M είναι συμπαγές, το $F \cap M$ είναι συμπαγές. Επειδή η f είναι συνεχής στο M, συνεπάγεται ότι το $f(F \cap M)$ είναι συμπαγές. Με άλλα λόγια, το $g^{-1}(F \cap M)$ είναι συμπαγές και άρα κλειστό. Άρα το

$$g^{-1}(F \cap M) = g^{-1}(F) \cap g^{-1}(M) = g^{-1}(F) \cap N = g^{-1}(F)$$

είναι κλειστό.
Αποδείξαμε ότι για κάθε κλειστό $F \subseteq X$ το $g^{-1}(F) \subseteq N$ είναι κλειστό. Άρα η $f^{-1} = g$ είναι συνεχής στο N.

Άσκηση 11.6.23. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $f : A \to \mathbb{R}$. Το $G_f = \{(x, f(x)) \,|\, x \in A\} \subseteq \mathbb{R}^2$ ονομάζεται γράφημα της f.*

Έστω ότι η f είναι φραγμένη. Αποδείξτε ότι, αν το G_f είναι κλειστό, τότε η f είναι συνεχής.

Έστω ότι το A είναι κλειστό. Αποδείξτε ότι, αν η f είναι συνεχής, τότε το G_f είναι κλειστό.

Λύση: Το πρώτο ερώτημα. Έστω ότι η f είναι φραγμένη και ότι το G_f είναι κλειστό.
Έστω ακολουθία (x_n) στο A και $x_n \to x$ με $x \in A$.
Υποθέτουμε ότι $f(x_n) \not\to f(x)$. Τότε υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x_n) - f(x)| \geq \epsilon$ για άπειρους n. Επειδή η f είναι φραγμένη, η ακολουθία $(f(x_n))$ είναι φραγμένη και άρα υπάρχει υποακολουθία (x_{n_k}) της (x_n) ώστε να ισχύει $|f(x_{n_k}) - f(x)| \geq \epsilon$ για κάθε k και ώστε $f(x_{n_k}) \to y$ για κάποιον y.
Τότε $|y - f(x)| \geq \epsilon$ και άρα $f(x) \neq y$. Επίσης, $(x_{n_k}, f(x_{n_k})) \to (x, y)$ και, επειδή ισχύει $(x_{n_k}, f(x_{n_k})) \in G_f$ για κάθε k και το G_f είναι κλειστό, συνεπάγεται ότι $(x, y) \in G_f$. Άρα $y = f(x)$ και καταλήγουμε σε άτοπο.
Άρα για κάθε (x_n) στο A ώστε $x_n \to x$ με $x \in A$ συνεπάγεται ότι $f(x_n) \to f(x)$ και άρα η f είναι συνεχής.
Το δεύτερο ερώτημα. Έστω ότι το A είναι κλειστό και ότι η f είναι συνεχής.
Έστω τυχούσα ακολουθία $\big((x_n, y_n)\big)$ στο G_f ώστε $(x_n, y_n) \to (x, y)$ στο $\mathbb{R}^2$. Τότε ισχύει $x_n \to x$ και $y_n \to y$. Επειδή το A είναι κλειστό και η (x_n) είναι στο A, συνεπάγεται ότι $x \in A$. Επίσης, ισχύει $y_n = f(x_n)$ για κάθε n και, επειδή η f είναι συνεχής και $x_n \to x$, έχουμε ότι $y_n = f(x_n) \to f(x)$. Άρα $y = f(x)$ και, επομένως, $(x, y) \in G_f$.
Άρα το G_f είναι κλειστό.

Άσκηση 11.6.26. *Έστω μετρικοί χώροι (X, d) και (Y, ρ), $A \subseteq X$ και $f : A \to Y$ και έστω ότι ο (Y, ρ) είναι πλήρης. Αποδείξτε ότι τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

(i) Υπάρχει ομοιόμορφα συνεχής επέκταση της f στο $\overline{A}$, δηλαδή συνάρτηση $F : \overline{A} \to Y$ ομοιόμορφα συνεχής στο $\overline{A}$ ώστε να ισχύει $F(x) = f(x)$ για κάθε $x \in A$.

(ii) Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A.

Λύση: Έστω ότι υπάρχει συνάρτηση $F : \overline{A} \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής στο $\overline{A}$ ώστε να ισχύει $F(x) = f(x)$ για κάθε $x \in A$.
Βάσει του αποτελέσματος της άσκησης 11.6.24, η F είναι ομοιόμορφα συνεχής στο υποσύνολο A. Αλλά η f ταυτίζεται με την F στο A, οπότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A.

Αντιστρόφως, έστω ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A.
Έστω τυχόν $x \in \overline{A}$. Τότε υπάρχει (x_n) στο A ώστε $x_n \to x$. Θεωρούμε μια οποιαδήποτε τέτοια (x_n) και την αντίστοιχη $(f(x_n))$. Επειδή η (x_n) συγκλίνει, είναι ακολουθία Cauchy, και, επειδή η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, η $(f(x_n))$ είναι κι αυτή ακολουθία Cauchy (γιατί;). Ο (Y, ρ) είναι πλήρης και άρα η $(f(x_n))$ συγκλίνει. Έστω $y \in Y$ το όριο της $(f(x_n))$.
Θεωρούμε μια οποιαδήποτε άλλη ακολουθία $(x_n{}')$ στο A ώστε $x_n{}' \to x$. Τότε η μικτή ακολουθία $(x_1, x_1{}', x_2, x_2{}', x_3, x_3{}', \dots)$ συγκλίνει στο x, οπότε, σύμφωνα με αυτό που αποδείξαμε, η $(f(x_1), f(x_1{}'), f(x_2), f(x_2{}'), f(x_3), f(x_3{}'), \dots)$ συγκλίνει. Το όριο αυτής της ακολουθίας είναι το ίδιο με της υποακολουθίας $(f(x_n))$, δηλαδή ίσο με y. Άρα και το όριο της άλλης υποακολουθίας $(f(x_n{}'))$ είναι y.
Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι υπάρχει $y \in Y$ έτσι ώστε για κάθε (x_n) στο A με $x_n \to x$ να ισχύει $f(x_n) \to y$. Μπορούμε, τώρα, να ορίσουμε $F(x) = y$.
Αν εξ αρχής $x \in A$, τότε μια από τις (x_n) στο A με $x_n \to x$ είναι η σταθερή ακολουθία με $x_n = x$ για κάθε n και τότε η $(f(x_n))$ είναι η σταθερή ακολουθία με $f(x_n) = f(x)$ για κάθε n, οπότε $f(x_n) \to f(x)$. Άρα στην περίπτωση $x \in A$, οπότε η τιμή $f(x)$ είναι ήδη ορισμένη, έχουμε $F(x) = f(x)$.
Έχουμε, λοιπόν, ορίσει συνάρτηση $F : \overline{A} \to Y$ για την οποία ισχύει $F(x) = f(x)$ για κάθε $x \in A$, οπότε η F είναι επέκταση της f από το A στο $\overline{A}$.
Τώρα, έστω $\epsilon > 0$. Επειδή η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει

$$\rho(f(x'), f(x'')) < \tfrac{\epsilon}{2} \qquad \text{για κάθε } x', x'' \in A \text{ με } d(x', x'') < \delta.$$

Έστω $x', x'' \in \overline{A}$ με $d(x', x'') < \delta$. Παίρνουμε $(x_n{}')$, $(x_n{}'')$ στο A με $x_n{}' \to x'$ και $x_n{}'' \to x''$. Τότε ισχύει τελικά

$$d(x_n{}', x_n{}'') \leq d(x_n{}', x') + d(x', x'') + d(x'', x_n{}'') < \delta$$

και άρα ισχύει τελικά $\rho(f(x_n{}'), f(x_n{}'')) < \frac{\epsilon}{2}$. Επειδή $f(x_n{}') \to F(x')$ και $f(x_n{}'') \to F(x'')$, από το αποτέλεσμα της άσκησης 11.4.2 συνεπάγεται $\rho(F(x'), F(x'')) \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$.
Άρα για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $\rho(F(x'), F(x'')) < \epsilon$ για κάθε $x', x'' \in \overline{A}$ με $d(x', x'') < \delta$. Άρα η F είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\overline{A}$.

Άσκηση 11.6.27. *Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $M \subseteq X$. Αν το M είναι συμπαγές, αποδείξτε ότι υπάρχει αριθμήσιμο $A \subseteq M$ ώστε $M = \overline{A}$.*

Υπόδειξη: Θεωρήστε τις περιοχές $N_x(\frac{1}{n})$ για κάθε $x \in M$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$. Η συλλογή $\Sigma_n = \{N_x(\frac{1}{n}) \,|\, x \in M\}$ αποτελεί ανοικτή κάλυψη του M. Θεωρήστε πεπερασμένη ανοικτή κάλυψη $\Sigma_n{}'$ του M η οποία είναι μικρότερη ή ίση της Σ_n. Κατόπιν, θεωρήστε το σύνολο A_n των κέντρων των περιοχών που ανήκουν στην $\Sigma_n{}'$ και το $A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$.

Άσκηση 11.6.28. *Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $M \subseteq X$.*
Το M χαρακτηρίζεται ολικά φραγμένο αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχουν πεπερασμένου πλήθους σημεία του M ώστε κάθε άλλο σημείο του M να έχει απόσταση μικρότερη από ϵ από τουλάχιστον ένα από αυτά ή, ισοδύναμα, αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχουν πεπερασμένου πλήθους ανοικτές περιοχές με κέντρα στο M και ακτίνας ϵ οι οποίες να καλύπτουν το M.
Αποδείξτε ότι το M είναι συμπαγές αν και μόνο αν είναι πλήρες και ολικά φραγμένο.

Λύση: Έστω ότι το M είναι συμπαγές.
Θεωρούμε τυχούσα ακολουθία Cauchy (x_n) στο M. Τότε υπάρχει υποακολουθία (x_{n_k}) η οποία συγκλίνει σε κάποιο $x \in M$. Προσαρμόζοντας την απόδειξη του κριτηρίου του Cauchy στην ενότητα 2.6, αντικαθιστώντας τις απόλυτες τιμές των διαφορών $|x - y|$ με τις αποστάσεις $d(x, y)$, εύκολα αποδεικνύεται ότι $x_n \to x$. Άρα το M είναι πλήρες.
Τέλος, έστω $\epsilon > 0$. Τότε οι περιοχές $N_x(\epsilon)$ με $x \in M$ αποτελούν ανοικτή κάλυψη του M. Άρα υπάρχουν $x_1, \dots, x_n \in M$ ώστε οι $N_{x_1}(\epsilon), \dots, N_{x_n}(\epsilon)$ να αποτελούν κάλυψη του M. Τότε κάθε σημείο του M έχει απόσταση μικρότερη από ϵ από τουλάχιστον ένα από τα $x_1, \dots, x_n$. Άρα το

M είναι ολικά φραγμένο.
Αντιστρόφως, έστω ότι το M είναι πλήρες και ολικά φραγμένο.
Θεωρούμε τυχούσα ακολουθία (x_n) στο M. Επειδή το M είναι ολικά φραγμένο, υπάρχουν πεπερασμένου πλήθους ανοικτές περιοχές με κέντρα στο M και ακτίνας $\frac{1}{2}$ οι οποίες καλύπτουν το M. Τότε σε κάποια από αυτές τις περιοχές περιέχονται άπειροι όροι της (x_n) και οι αποστάσεις ανάμεσα σε οποιουσδήποτε δύο από αυτούς τους όρους είναι όλες < 1. Επιλέγουμε έναν από αυτούς τους όρους, έστω x_{n_1}. Κατόπιν, υπάρχουν πεπερασμένου πλήθους ανοικτές περιοχές με κέντρα στο M και ακτίνας $\frac{1}{4}$ οι οποίες καλύπτουν το M. Τότε σε κάποια από αυτές τις περιοχές περιέχονται άπειροι από τους προηγούμενους άπειρους όρους της (x_n) και οι αποστάσεις ανάμεσα σε οποιουσδήποτε δύο από αυτούς τους όρους είναι όλες $< \frac{1}{2}$. Επιλέγουμε έναν από αυτούς τους όρους, έστω x_{n_2}, με $n_2 > n_1$. Κατόπιν, υπάρχουν πεπερασμένου πλήθους ανοικτές περιοχές με κέντρα στο M και ακτίνας $\frac{1}{6}$ οι οποίες καλύπτουν το M. Τότε σε κάποια από αυτές τις περιοχές περιέχονται άπειροι από τους προηγούμενους άπειρους όρους της (x_n) και οι αποστάσεις ανάμεσα σε οποιουσδήποτε δύο από αυτούς τους όρους είναι όλες $< \frac{1}{3}$. Επιλέγουμε έναν από αυτούς τους όρους, έστω x_{n_3}, με $n_3 > n_2$. Συνεχίζουμε έτσι επ' άπειρον.
Είναι φανερό ότι έτσι σχηματίζεται μια υποακολουθία (x_{n_k}) με την εξής ιδιότητα: οι αποστάσεις ανάμεσα σε οποιουσδήποτε δύο όρους της είναι < 1, οι αποστάσεις ανάμεσα σε οποιουσδήποτε δύο όρους της από τον x_{n_2} και πέρα είναι $< \frac{1}{2}$, οι αποστάσεις ανάμεσα σε οποιουσδήποτε δύο όρους της από τον x_{n_3} και πέρα είναι $< \frac{1}{3}$ και ούτω καθ' εξής. Γενικότερα, οι αποστάσεις ανάμεσα σε οποιουσδήποτε δύο όρους της από τον x_{n_k} και πέρα είναι $< \frac{1}{k}$. Αυτό σημαίνει ότι η (x_{n_k}) είναι ακολουθία Cauchy και, επειδή το M είναι πλήρες, η (x_{n_k}) συγκλίνει σε στοιχείο του M.
Άρα κάθε ακολουθία στο M έχει υποακολουθία η οποία συγκλίνει σε στοιχείο του M και, επομένως, το M είναι συμπαγές.

Άσκηση 11.6.29. *Δείτε τις ασκήσεις 11.1.6 και 11.2.26. Έστω μετρικός χώρος (X, d) και μη-κενό $M \subseteq X$. Αποδείξτε ότι το M είναι συμπαγές υποσύνολο του (X, d) αν και μόνο αν το M είναι συμπαγές υποσύνολο του (M, d).*

Λύση: Έστω ότι το M είναι συμπαγές υποσύνολο του (X, d).
Θεωρούμε οποιαδήποτε ανοικτή κάλυψη Σ_M του M η οποία αποτελείται από υποσύνολα του M που είναι ανοικτά στον (M, d). Τότε για κάθε $A \in \Sigma_M$ υπάρχει κάποιο υποσύνολο B του X που είναι ανοικτό στον (X, d) έτσι ώστε να είναι $A = B \cap M$. Τώρα θεωρούμε τη συλλογή Σ_X η οποία αποτελείται από όλα τα B που προκύπτουν από τα διάφορα $A \in \Sigma_M$. Επειδή $A \subseteq B$ για κάθε $A \in \Sigma_M$, συνεπάγεται

$$M \subseteq \bigcup\{A \,|\, A \in \Sigma_M\} \subseteq \bigcup\{B \,|\, B \in \Sigma_X\}.$$

Άρα η Σ_X είναι ανοικτή κάλυψη του M η οποία αποτελείται από υποσύνολα του X που είναι ανοικτά στον (X, d). Επειδή το M είναι συμπαγές υποσύνολο του (X, d), υπάρχει πεπερασμένη κάλυψη $\Sigma_X{}'$ του M μικρότερη ή ίση της Σ_X. Κάθε $B \in \Sigma_X{}'$ προέρχεται από κάποιο $A \in \Sigma_M$ και αυτά τα A σχηματίζουν μια πεπερασμένη συλλογή $\Sigma_M{}'$. Τώρα, έχουμε

$$M \subseteq \bigcup\{B \,|\, B \in \Sigma_X{}'\} = \bigcup\{B \,|\, B \in \Sigma_X{}'\} \cap M = \bigcup\{B \cap M \,|\, B \in \Sigma_X{}'\} = \bigcup\{A \,|\, A \in \Sigma_M{}'\}.$$

Άρα η συλλογή $\Sigma_M{}'$ είναι πεπερασμένη ανοικτή κάλυψη του M μικρότερη ή ίση της Σ_M.
Άρα το M είναι συμπαγές στον (M, d).
Το αντίστροφο μπορεί να αποδειχθεί με παρόμοιο τρόπο από εσάς.

Άσκηση 11.6.30. [α] *Έστω συναρτήσεις $x, y : [a, b] \to \mathbb{R}$ και $f : K \to \mathbb{R}$ όπου οι x, y είναι ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$, η f είναι συνεχής στο συμπαγές $K \subseteq \mathbb{R}^2$ και ισχύει $(x(t), y(t)) \in K$ για κάθε $t \in [a, b]$.*
Αποδείξτε ότι η $f \circ (x, y) : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε διαμέριση $\Delta = \{a = t_0, \ldots, t_n = b\}$ του $[a, b]$ με $w(\Delta) < \delta$ και κάθε δύο επιλογές $\Xi' = \{\xi_1{}', \ldots, \xi_n{}'\}$ και $\Xi'' = \{\xi_1{}'', \ldots, \xi_n{}''\}$ ενδιάμεσων σημείων για την Δ ισχύει $\big|\sum_{k=1}^{n} f(x(\xi_k{}'), y(\xi_k{}''))(t_k - t_{k-1}) - \int_a^b f(x(t), y(t))\, dt\big| < \epsilon$.

[β] *Δείτε την άσκηση 6.5.6 και αποδείξτε ότι, αν μια καμπύλη Γ έχει παραμετρικές εξισώσεις $x = x(t)$ και $y = y(t)$ στο διάστημα $[a,b]$ με παραγώγους ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$, τότε $l(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt$.*

Λύση: [α] Ακολουθούμε σχετικά πιστά τη λύση της άσκησης 6.4.27[α].
Έστω τυχών $\epsilon > 0$.
Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο K, οπότε υπάρχει $\delta' > 0$ ώστε να ισχύει

$$|f(\mathrm{z}')-f(\mathrm{z}'')| < \tfrac{\epsilon}{4(b-a)} \qquad \text{για κάθε } \mathrm{z}',\mathrm{z}'' \in K \text{ με } \|\mathrm{z}'-\mathrm{z}''\|_2 < \delta'. \tag{14.300}$$

Επίσης, η f είναι φραγμένη στο K, οπότε υπάρχει $M > 0$ ώστε να ισχύει

$$|f(\mathrm{z})| \le M \qquad \text{για κάθε } \mathrm{z} \in K. \tag{14.301}$$

Έστω $\delta = \min\{\delta', \frac{\epsilon}{8\sqrt{2}\,M}\}$.
Τότε υπάρχει διαμέριση $\Delta = \{a = t_0, \dots, t_n = b\}$ του $[a,b]$ ώστε

$$\overline{\Sigma}(x;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(x;a,b;\Delta) < \delta^2, \qquad \overline{\Sigma}(y;a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}(y;a,b;\Delta) < \delta^2. \tag{14.302}$$

Έστω $u_k{}', l_k{}'$ οι γνωστές ποσότητες για τη συνάρτηση x στο $[t_{k-1},t_k]$ και $u_k{}'', l_k{}''$ οι αντίστοιχες ποσότητες για την y καθώς και u_k, l_k οι αντίστοιχες ποσότητες για την $f\circ(x,y)$.
Χωρίζουμε τους $k = 1, \dots, n$ σε δύο κατηγορίες. Το A έχει ως στοιχεία του τους k με την ιδιότητα $\big((u_k{}'-l_k{}')^2+(u_k{}''-l_k{}'')^2\big)^{1/2} < \delta$ και το B έχει ως στοιχεία του τους υπόλοιπους k, δηλαδή αυτούς με την ιδιότητα $\big((u_k{}'-l_k{}')^2+(u_k{}''-l_k{}'')^2\big)^{1/2} \ge \delta$.
Αν $k \in A$, τότε για κάθε $t',t'' \in [t_{k-1},t_k]$ ισχύει $l_k{}'-u_k{}' \le x(t')-x(t'') \le u_k{}'-l_k{}'$ και, επομένως, $|x(t')-x(t'')| \le u_k{}'-l_k{}'$ και, ομοίως, $|y(t')-y(t'')| \le u_k{}''-l_k{}''$ και άρα ισχύει $\big((x(t')-x(t''))^2+(y(t')-y(t''))^2\big)^{1/2} < \delta \le \delta'$, οπότε από την (14.300) συνεπάγεται

$$|f(x(t'),y(t'))-f(x(t''),y(t''))| < \tfrac{\epsilon}{4(b-a)}.$$

Άρα (δείτε την παρατήρηση 3 πριν από το λήμμα 6.2)

$$u_k - l_k \le \tfrac{\epsilon}{4(b-a)} \qquad \text{αν } k \in A. \tag{14.303}$$

Αν $k \in B$, τότε από την (14.301) συνεπάγεται ότι ισχύει $|f(x(t'),y(t'))-f(x(t''),y(t''))| \le |f(x(t'),y(t'))|+|f(x(t''),y(t''))| \le 2M$ για κάθε $t',t'' \in [t_{k-1},t_k]$, οπότε, όπως πριν, συνεπάγεται

$$u_k - l_k \le 2M \qquad \text{αν } k \in B. \tag{14.304}$$

Αν $k \in B$, τότε είτε $u_k{}'-l_k{}' \ge \frac{\delta}{\sqrt{2}}$ είτε $u_k{}''-l_k{}'' \ge \frac{\delta}{\sqrt{2}}$, οπότε από την (14.302) συνεπάγεται είτε

$$\delta^2 > \textstyle\sum_{k\in B}(u_k{}'-l_k{}')(t_k-t_{k-1}) \ge \frac{\delta}{\sqrt{2}}\sum_{k\in B}(t_k-t_{k-1})$$

είτε

$$\delta^2 > \textstyle\sum_{k\in B}(u_k{}''-l_k{}'')(t_k-t_{k-1}) \ge \frac{\delta}{\sqrt{2}}\sum_{k\in B}(t_k-t_{k-1})$$

οπότε σε κάθε περίπτωση ισχύει

$$\textstyle\sum_{k\in B}(t_k-t_{k-1}) < \sqrt{2}\delta \qquad \text{αν } k \in B. \tag{14.305}$$

Από τις (14.303), (14.304), (14.305) συνεπάγεται

$$\begin{aligned}\overline{\Sigma}((f\circ(x,y));a,b;\Delta) - \underline{\Sigma}((f\circ(x,y));a,b;\Delta) &= \textstyle\sum_{k=1}^n(u_k-l_k)(t_k-t_{k-1})\\ &= \textstyle\sum_{k\in A}(u_k-l_k)(t_k-t_{k-1}) + \sum_{k\in B}(u_k-l_k)(t_k-t_{k-1})\\ &\le \tfrac{\epsilon}{4(b-a)}\textstyle\sum_{k\in A}(t_k-t_{k-1}) + 2M\sum_{k\in B}(t_k-t_{k-1})\\ &\le \tfrac{\epsilon}{4(b-a)}(b-a) + 2\sqrt{2}\,M\delta \le \tfrac{\epsilon}{4}+\tfrac{\epsilon}{4} < \epsilon.\end{aligned}$$

Άρα η $f\circ(x,y)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.
Τώρα, για το δεύτερο μέρος θα επαναλάβουμε τα προηγούμενα, αλλά με κάποιες αλλαγές. Πρώτα, όμως, να πούμε ότι, επειδή η $f\circ(x,y)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, για κάθε $\epsilon>0$ υπάρχει $\delta''>0$ ώστε για κάθε διαμέριση $\Delta=\{a=t_0,\,\dots\,,t_n=b\}$ του $[a,b]$ με $w(\Delta)<\delta''$ και κάθε επιλογή $\Xi=\{\xi_1,\,\dots\,,\xi_n\}$ ενδιάμεσων σημείων για την Δ ισχύει

$$\big|\textstyle\sum_{k=1}^n f(x(\xi_k),y(\xi_k))(t_k-t_{k-1})-\int_a^b f\circ(x,y)\big|<\frac{\epsilon}{2}. \tag{14.306}$$

Θεωρούμε πάλι τις (14.300) και (14.301) και επιλέγουμε $\delta_1=\min\{\delta',\frac{\epsilon}{8M}\}$.
Επειδή η y είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, υπάρχει $\delta_2>0$ ώστε για κάθε διαμέριση Δ του $[a,b]$ με $w(\Delta)<\delta_2$ και για κάθε επιλογή Ξ ενδιάμεσων σημείων για την Δ ισχύει

$$\big|\Sigma(y;a,b;\Delta;\Xi)-\textstyle\int_a^b y\big|<\frac{{\delta_1}^2}{4}.$$

Άρα για κάθε δύο επιλογές Ξ',Ξ'' ενδιάμεσων σημείων για την Δ ισχύει

$$\big|\Sigma(y;a,b;\Delta;\Xi')-\textstyle\int_a^b y\big|<\frac{{\delta_1}^2}{4},\qquad \big|\Sigma(y;a,b;\Delta;\Xi'')-\textstyle\int_a^b y\big|<\frac{{\delta_1}^2}{4}$$

οπότε από την τριγωνική ανισότητα έχουμε

$$\big|\Sigma(y;a,b;\Delta;\Xi')-\Sigma(y;a,b;\Delta;\Xi'')\big|<\frac{{\delta_1}^2}{2}.$$

Χρησιμοποιούμε τα [β], [γ] του λήμματος 6.6 και βρίσκουμε εύκολα ότι

$$\overline{\Sigma}(y;a,b;\Delta)-\underline{\Sigma}(y;a,b;\Delta)\le\frac{{\delta_1}^2}{2}<{\delta_1}^2. \tag{14.307}$$

Η τελευταία σχέση ισχύει, όπως είδαμε, για κάθε Δ με $w(\Delta)<\delta_2$.
Παίρνουμε $\delta_3=\min\{\delta_1,\delta_2\}=\min\{\delta',\frac{\epsilon}{8M},\delta_2\}$.
Έστω οποιαδήποτε διαμέριση $\Delta=\{a=t_0,\,\dots\,,t_n=b\}$ του $[a,b]$ με $w(\Delta)<\delta_3$ και οποιεσδήποτε δύο επιλογές $\Xi'=\{{\xi_1}',\,\dots\,,{\xi_n}'\}$ και $\Xi''=\{{\xi_1}'',\,\dots\,,{\xi_n}''\}$ ενδιάμεσων σημείων για την Δ. Τότε είναι $w(\Delta)<\delta_2$ οπότε ισχύει η (14.307) και εργαζόμαστε με αυτήν όπως εργαστήκαμε με την (14.302). Χωρίζουμε πάλι τους $k=1,\,\dots\,,n$ σε δύο κατηγορίες A και B (περίπου, αλλά όχι ακριβώς, όπως πριν). Το A έχει ως στοιχεία του τους k με την ιδιότητα ${u_k}''-{l_k}''<\delta_1$ και το B έχει ως στοιχεία του τους υπόλοιπους k, δηλαδή αυτούς με την ιδιότητα ${u_k}''-{l_k}''\ge\delta_1$.
Αν $k\in A$, τότε είναι $|y({\xi_k}'')-y({\xi_k}')|\le{u_k}''-{l_k}''<\delta_1\le\delta'$ και άρα ισχύει $\|(x({\xi_k}'),y({\xi_k}'')-(x({\xi_k}'),y({\xi_k}'))\|_2<\delta'$, οπότε από την (14.300) συνεπάγεται

$$|f(x({\xi_k}'),y({\xi_k}'')-f(x({\xi_k}'),y({\xi_k}'))|<\frac{\epsilon}{4(b-a)}\qquad\text{αν } k\in A. \tag{14.308}$$

Από την (14.301) συνεπάγεται ότι ισχύει

$$|f(x({\xi_k}'),y({\xi_k}'')-f(x({\xi_k}'),y({\xi_k}'))|\le 2M\qquad\text{αν } k\in B. \tag{14.309}$$

Επίσης, αν $k\in B$, τότε ${u_k}''-{l_k}''\ge\delta_1$, οπότε από την (14.307) συνεπάγεται

$${\delta_1}^2>\textstyle\sum_{k\in B}({u_k}''-{l_k}'')(t_k-t_{k-1})\ge\delta_1\sum_{k\in B}(t_k-t_{k-1})$$

και άρα

$$\textstyle\sum_{k\in B}(t_k-t_{k-1})<\delta_1\qquad\text{αν } k\in B. \tag{14.310}$$

Από τις (14.308), (14.309), (14.310) συνεπάγεται

$$\begin{aligned}\big|\textstyle\sum_{k=1}^n & f(x({\xi_k}'),y({\xi_k}''))(t_k-t_{k-1})-\sum_{k=1}^n f(x({\xi_k}'),y({\xi_k}'))(t_k-t_{k-1})\big|\\ &=\big|\textstyle\sum_{k=1}^n\big(f(x({\xi_k}'),y({\xi_k}''))-f(x({\xi_k}'),y({\xi_k}'))\big)(t_k-t_{k-1})\big|\\ &\le\textstyle\sum_{k\in A}\big|f(x({\xi_k}'),y({\xi_k}''))-f(x({\xi_k}'),y({\xi_k}'))\big|(t_k-t_{k-1})\\ &\quad+\textstyle\sum_{k\in B}\big|f(x({\xi_k}'),y({\xi_k}''))-f(x({\xi_k}'),y({\xi_k}'))\big|(t_k-t_{k-1})\\ &\le\tfrac{\epsilon}{4(b-a)}\textstyle\sum_{k\in A}(t_k-t_{k-1})+2M\sum_{k\in B}(t_k-t_{k-1})\\ &\le\tfrac{\epsilon}{4(b-a)}(b-a)+2M\delta_1\le\tfrac{\epsilon}{4}+\tfrac{\epsilon}{4}=\tfrac{\epsilon}{2}.\end{aligned} \tag{14.311}$$

Τέλος, έστω $\delta=\min\{\delta'',\delta_3\}$ και οποιαδήποτε διαμέριση $\Delta=\{a=t_0,\ldots,t_n=b\}$ του $[a,b]$ με $w(\Delta)<\delta$ και οποιεσδήποτε δύο επιλογές $\Xi'=\{\xi_1{}',\ldots,\xi_n{}'\}$ και $\Xi''=\{\xi_1{}'',\ldots,\xi_n{}''\}$ ενδιάμεσων σημείων για την Δ. Τότε από την (14.311) και από την (14.306) για την Ξ', συνεπάγεται

$$\begin{aligned}&\big|\textstyle\sum_{k=1}^n f(x(\xi_k{}'),y(\xi_k{}''))(t_k-t_{k-1})-\int_a^b f\circ(x,y)\big|\\&\qquad=\big|\textstyle\sum_{k=1}^n f(x(\xi_k{}'),y(\xi_k{}''))(t_k-t_{k-1})-\sum_{k=1}^n f(x(\xi_k{}'),y(\xi_k{}'))(t_k-t_{k-1})\big|\\&\qquad\quad+\big|\textstyle\sum_{k=1}^n f(x(\xi_k{}'),y(\xi_k{}'))(t_k-t_{k-1})-\int_a^b f\circ(x,y)\big|\\&\qquad<\tfrac{\epsilon}{2}+\tfrac{\epsilon}{2}=\epsilon.\end{aligned}$$

Για να βοηθηθούμε στην διατύπωση της λύσης του [β], ας συμβολίσουμε

$$\Sigma(f\circ(x,y);a,b;\Delta;\Xi',\Xi'')=\textstyle\sum_{k=1}^n f(x(\xi_k{}'),y(\xi_k{}''))(t_k-t_{k-1}). \tag{14.312}$$

Τότε αυτό που μόλις αποδείξαμε διατυπώνεται ως εξής: για κάθε $\epsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$ ώστε για κάθε διαμέριση Δ του $[a,b]$ με $w(\Delta)<\delta$ και κάθε δύο επιλογές Ξ',Ξ'' ενδιάμεσων σημείων για την Δ ισχύει

$$\big|\Sigma(f\circ(x,y);a,b;\Delta;\Xi',\Xi'')-\textstyle\int_a^b f\circ(x,y)\big|<\epsilon.$$

Από αυτό προκύπτει άμεσα ότι για κάθε ακολουθία διαμερίσεων (Δ_n) του $[a,b]$ με $w(\Delta_n)\to 0$ και κάθε δύο αντίστοιχες ακολουθίες επιλογών $(\Xi_n{}')$, $(\Xi_n{}'')$ ενδιάμεσων σημείων ισχύει

$$\Sigma(f\circ(x,y);a,b;\Delta_n;\Xi_n{}',\Xi_n{}'')\to\textstyle\int_a^b f\circ(x,y). \tag{14.313}$$

[β] Η λύση είναι παραλλαγή της λύσης του δεύτερου ερωτήματος της άσκησης 6.5.6.
Κατ'αρχάς θα αποδείξουμε την εξής ανισότητα:

$$\sqrt{(x(b)-x(a))^2+(y(b)-y(a))^2}\le\textstyle\int_a^b\sqrt{(x')^2+(y')^2}. \tag{14.314}$$

Θεωρούμε μια οποιαδήποτε διαμέριση $\Delta=\{t_0=a,\ldots,t_n=b\}$ του $[a,b]$ και σχηματίζουμε την πολυγωνική γραμμή Γ_Δ στο xy-επίπεδο με διαδοχικές κορυφές τα σημεία $(x_k,y_k)=(x(t_k),y(t_k))$ για $k=0,\ldots,n$. Τότε είναι

$$\begin{aligned}\sqrt{(x(b)-x(a))^2+(y(b)-y(a))^2}&\le l(\Gamma_\Delta)\\&=\textstyle\sum_{k=1}^n\sqrt{(x(t_k)-x(t_{k-1}))^2+(y(t_k)-y(t_{k-1}))^2}.\end{aligned}$$

Τώρα, για κάθε k υπάρχουν $\xi_k{}',\xi_k{}''\in(t_{k-1},t_k)$ ώστε $x(t_k)-x(t_{k-1})=x'(\xi_k{}')(t_k-t_{k-1})$ και $y(t_k)-y(t_{k-1})=y'(\xi_k{}'')(t_k-t_{k-1})$ και άρα η τελευταία σχέση γράφεται

$$\sqrt{(x(b)-x(a))^2+(y(b)-y(a))^2}\le l(\Gamma_\Delta)=\textstyle\sum_{k=1}^n\sqrt{(x'(\xi_k{}'))^2+(y'(\xi_k{}''))^2}(t_k-t_{k-1}).$$

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι για κάθε διαμέριση Δ του $[a,b]$ υπάρχουν δύο επιλογές Ξ',Ξ'' ενδιάμεσων σημείων για την Δ ώστε να ισχύει η σχέση

$$\sqrt{(x(b)-x(a))^2+(y(b)-y(a))^2}\le l(\Gamma_\Delta)=\Sigma\big(\sqrt{(x')^2+(y')^2};a,b;\Delta;\Xi',\Xi''\big).$$

Τώρα παίρνουμε μια οποιαδήποτε ακολουθία (Δ_n) διαμερίσεων του $[a,b]$ με $w(\Delta_n)\to 0$ και τις αντίστοιχες ακολουθίες επιλογών $(\Xi_n{}')$ και $(\Xi_n{}'')$ ενδιάμεσων σημείων και έχουμε ότι για κάθε n ισχύει

$$\sqrt{(x(b)-x(a))^2+(y(b)-y(a))^2}\le l(\Gamma_{\Delta_n})=\Sigma\big(\sqrt{(x')^2+(y')^2};a,b;\Delta_n;\Xi_n{}',\Xi_n{}''\big).$$

Τώρα, εφαρμόζουμε το τελευταίο αποτέλεσμα του [α] στη συνάρτηση $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ και στις ολοκληρώσιμες συναρτήσεις x',y' (αντί των x,y) και έχουμε

$$l(\Gamma_{\Delta_n})=\Sigma\big(\sqrt{(x')^2+(y')^2};a,b;\Delta_n;\Xi_n{}',\Xi_n{}''\big)\to\textstyle\int_a^b\sqrt{(x')^2+(y')^2}. \tag{14.315}$$

Από τις δύο τελευταίες σχέσεις προκύπτει η (14.314).
Κατόπιν, θεωρούμε μια οποιαδήποτε διαμέριση $\Delta = \{x_0 = a, \ldots, x_n = b\}$ του $[a,b]$ και εφαρμόζουμε την (14.305) σε κάθε υποδιάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ και αθροίζουμε για $k = 1, \ldots, n$. Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} l(\Gamma_\Delta) &= \textstyle\sum_{k=1}^n \sqrt{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k-1}))^2} \\ &\le \textstyle\sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} \sqrt{(x')^2 + (y')^2} = \int_a^b \sqrt{(x')^2 + (y')^2}. \end{aligned}$$

Επειδή αυτό ισχύει για κάθε διαμέριση Δ του $[a,b]$, συνεπάγεται

$$l(\Gamma) \le \textstyle\int_a^b \sqrt{(x')^2 + (y')^2}. \tag{14.316}$$

Όμως, ξανακοιτώντας την (14.315), σκεφτόμαστε ότι ισχύει $l(\Gamma_{\Delta_n}) \le l(\Gamma)$ για κάθε n και άρα

$$\textstyle\int_a^b \sqrt{(x')^2 + (y')^2} \le l(\Gamma).$$

Από αυτήν την ανισότητα και την (14.316) συνεπάγεται ότι $l(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{(x')^2 + (y')^2}$.

Άσκηση 11.6.31. *Έστω μετρικός χώρος (X,d).*
[α] *Θεωρούμε το σύνολο $Z_b = \{A \,|\, A$ μη-κενό και φραγμένο υποσύνολο του $X\}$. Για κάθε $A, B \in Z_b$ ορίζουμε το $\widetilde{d}(A,B) = \inf\big\{\mu > 0 \,|\, A \subseteq \bigcup_{b\in B} N_b(\mu)$ και $B \subseteq \bigcup_{a\in A} N_a(\mu)\big\}$.*
Αποδείξτε ότι το σύνολο του οποίου το infimum ορίζει το $\widetilde{d}(A,B)$ είναι μη-κενό με κάτω φράγμα τον 0 και, επομένως, $0 \le \widetilde{d}(A,B) < +\infty$.
Αποδείξτε ότι η $\widetilde{d}$ είναι ψευδομετρική στο Z_b. Δηλαδή, ότι ικανοποιεί όλες τις ιδιότητες μιας μετρικής εκτός της (ii), η οποία αντικαθίσταται από την: για κάθε $A \in Z_b$ ισχύει $\widetilde{d}(A,A) = 0$.
Αποδείξτε ότι για κάθε $A, B \in Z_b$ ισχύει $\widetilde{d}(A,B) = 0$ αν και μόνο αν $\overline{A} = \overline{B}$.

Λύση: [α] Αν θεωρήσουμε οποιοδήποτε $x_0 \in X$, τότε, επειδή τα $A, B \in Z_b$ είναι φραγμένα, υπάρχει $R > 0$ ώστε $A, B \subseteq N_{x_0}(R)$. Τότε, για κάθε $a \in A$ και κάθε $b \in B$ ισχύει

$$d(a,b) \le d(a,x_0) + d(x_0,b) < R + R = 2R.$$

Συνεπάγεται ότι $A \subseteq N_b(2R)$ και $B \subseteq N_a(2R)$ και, επομένως, ο $2R$ ανήκει στο σύνολο το infimum του οποίου ορίζει το $\widetilde{d}(A,B)$ και άρα το σύνολο αυτό είναι μη-κενό. Επομένως, το infimum, δηλαδή το $\widetilde{d}(A,B)$, είναι αριθμός ή $-\infty$. Τώρα, κάθε μ στο σύνολο το infimum του οποίου ορίζει το $\widetilde{d}(A,B)$ είναι > 0 και άρα $\widetilde{d}(A,B) \ge 0$.
Οι ιδιότητες (i) και (iii) μιας μετρικής είναι προφανείς: ισχύει $\widetilde{d}(A,B) \ge 0$ και $\widetilde{d}(A,B) = \widetilde{d}(B,A)$ για κάθε $A, B \in Z_b$.
Τώρα, για κάθε $\mu > 0$ ισχύει $A \subseteq \bigcup_{a\in A} A_a(\mu)$, διότι κάθε $a \in A$ ανήκει στην $N_a(\mu)$. Άρα το σύνολο το infimum του οποίου ορίζει το $\widetilde{d}(A,B)$ περιέχει κάθε $\mu > 0$, οπότε $\widetilde{d}(A,A) = 0$.
Τέλος, έστω $A, B, C \in Z_b$. Έστω τυχών μ στο σύνολο το infimum του οποίου ορίζει το $\widetilde{d}(A,B)$ και τυχών ν στο σύνολο το infimum του οποίου ορίζει το $\widetilde{d}(B,C)$. Τότε έχουμε

$$A \subseteq \textstyle\bigcup_{b\in B} N_b(\mu), \quad B \subseteq \bigcup_{a\in A} N_a(\mu), \quad B \subseteq \bigcup_{c\in C} N_c(\nu), \quad C \subseteq \bigcup_{b\in B} N_b(\nu).$$

Έστω τυχόν $a \in A$. Τότε υπάρχει $b \in B$ ώστε $a \in N_b(\mu)$. Και τότε υπάρχει $c \in C$ ώστε $b \in N_c(\nu)$. Άρα

$$d(a,c) \le d(a,b) + d(b,c) < \mu + \nu$$

και, επομένως, $a \in N_c(\mu + \nu)$. Ομοίως, για κάθε $c \in C$ υπάρχει $a \in A$ ώστε $c \in N_a(\mu + \nu)$. Άρα ο $\mu + \nu$ ανήκει στο σύνολο το infimum του οποίου ορίζει το $\widetilde{d}(A,C)$. Συνεπάγεται ότι

$$\widetilde{d}(A,C) \le \mu + \nu.$$

Επειδή αυτό ισχύει για κάθε $\mu > \widetilde{d}(A,B)$ και για κάθε $\nu > \widetilde{d}(B,C)$, συνεπάγεται

$$\widetilde{d}(A,C) \leq \widetilde{d}(A,B) + \widetilde{d}(B,C).$$

Τέλος, έστω $\widetilde{d}(A,B) = 0$. Τότε για κάθε $\mu > 0$ ισχύει $A \subseteq \bigcup_{b\in B} N_b(\mu)$ και $B \subseteq \bigcup_{a\in A} N_a(\mu)$. Επομένως, αν $a \in A$, υπάρχει $b \in B$ ώστε $d(a,b) < \mu$. Συνεπάγεται ότι για κάθε $\mu > 0$ η $N_a(\mu)$ τέμνει το B και άρα $a \in \overline{B}$. Συνεπώς, $A \subseteq \overline{B}$. Επειδή το $\overline{B}$ είναι κλειστό, έχουμε ότι $\overline{A} \subseteq \overline{B}$. Ομοίως, έχουμε $\overline{B} \subseteq \overline{A}$ και άρα $\overline{A} = \overline{B}$.
Το αντίστροφο μπορείτε να το αποδείξετε εσείς με παρόμοιο τρόπο.

Άσκηση 11.6.32. *Για κάθε ανοικτό διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$ συμβολίζουμε $|I|$ το μήκος του I.*
[α] *Λέμε ότι ένα $A \subseteq \mathbb{R}$ έχει μηδενικό μέτρο αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει ακολουθία (I_n) ανοικτών διαστημάτων στο $\mathbb{R}$ ώστε $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} |I_n| < \epsilon$.*
Αποδείξτε ότι το κενό σύνολο καθώς και κάθε μονοσύνολο στο $\mathbb{R}$ έχει μηδενικό μέτρο.
Αν $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$ και το B έχει μηδενικό μέτρο, αποδείξτε ότι το A έχει μηδενικό μέτρο.
Αν κάθε $A_m \subseteq \mathbb{R}$ με $m \in \mathbb{N}$ έχει μηδενικό μέτρο, αποδείξτε ότι το $A = \bigcup_{m=1}^{+\infty} A_m$ έχει μηδενικό μέτρο.
Αποδείξτε ότι το $\mathbb{Q}$ έχει μηδενικό μέτρο.
Έστω συμπαγές $A \subseteq \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι το A έχει μηδενικό μέτρο αν και μόνο αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχουν ανοικτά διαστήματα $I_1, \ldots, I_n$ ώστε $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} I_k$ και $\sum_{k=1}^{n} |I_k| < \epsilon$.
Αποδείξτε ότι κάθε διάστημα A με μη-μηδενικό μήκος δεν έχει μηδενικό μέτρο.
[β] *Δείτε την άσκηση 4.1.16. Έστω φραγμένη $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.*
Για κάθε $\epsilon > 0$ ορίζουμε το σύνολο $A(\epsilon) = \{x \in [a,b] \,|\, \omega(f;x) \geq \epsilon\}$. Προφανώς, αν $0 < \epsilon_1 < \epsilon_2$, τότε ισχύει $A(\epsilon_2) \subseteq A(\epsilon_1)$.
Αποδείξτε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ το $A(\epsilon)$ είναι συμπαγές.
Έστω $A = \{x \in [a,b] \,|\, \text{ο } x \text{ είναι σημείο ασυνέχειας της } f\}$. Αποδείξτε ότι $A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A(\frac{1}{n})$.
Αν η f είναι ολοκληρώσιμη, αποδείξτε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ το $A(\epsilon)$ έχει μηδενικό μέτρο και, επομένως, ότι το A έχει μηδενικό μέτρο.
Αντιστρόφως, αν το A έχει μηδενικό μέτρο, αποδείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη.

Λύση: [α] *Πρώτο ερώτημα.* Για το κενό σύνολο θεωρούμε κενά διαστήματα I_n για κάθε n. Τότε η ένωση $\bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n$ είναι κενή και περιέχει το $\emptyset$. Επίσης, για κάθε $\epsilon > 0$, ισχύει $\sum_{n=1}^{+\infty} |I_n| = \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0 < \epsilon$. Άρα το $\emptyset$ έχει μηδενικό μέτρο.
Για τυχόντα a και για κάθε $\epsilon > 0$ θεωρούμε το $I_1 = (a - \frac{\epsilon}{4}, a + \frac{\epsilon}{4})$ και κενά διαστήματα I_n για κάθε $n \geq 2$. Τότε $\bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n = I_1 \supseteq \{a\}$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} |I_n| = |I_1| = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$. Άρα το $\{a\}$ έχει μηδενικό μέτρο.
Το δεύτερο ερώτημα. Έστω ότι το B έχει μηδενικό μέτρο και $A \subseteq B$. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει ακολουθία (I_n) ανοικτών διαστημάτων ώστε $B \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} |I_n| < \epsilon$. Άρα υπάρχει ακολουθία (I_n) ανοικτών διαστημάτων ώστε $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} |I_n| < \epsilon$. Επομένως, το A έχει μηδενικό μέτρο.
Το τρίτο ερώτημα. Έστω $\epsilon > 0$. Επειδή το A_m έχει μηδενικό μέτρο, υπάρχει ακολουθία $(I_{m,n})$ ανοικτών διαστημάτων ώστε $A_m \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_{m,n}$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} |I_{m,n}| < \frac{\epsilon}{2^m}$. Τώρα, θεωρούμε τη συλλογή όλων των διαστημάτων $I_{m,n}$ με $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Αυτή η συλλογή είναι αριθμήσιμη και άρα αποτελεί μια ακολουθία ανοικτών διαστημάτων και έχουμε ότι

$$A = \bigcup_{m=1}^{+\infty} A_m \subseteq \bigcup_{m=1}^{+\infty} \big(\bigcup_{n=1}^{+\infty} I_{m,n} \big) = \bigcup_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} I_{m,n}$$

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} |I_{m,n}| = \sum_{m=1}^{+\infty} \big(\sum_{n=1}^{+\infty} |I_{m,n}| \big) < \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\epsilon}{2^m} = \epsilon.$$

Άρα το A έχει μηδενικό μέτρο.
Το τέταρτο ερώτημα. Το $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο και μπορούμε να το γράψουμε ως $\mathbb{Q} = \{x_m \,|\, m \in \mathbb{N}\}$. Επειδή κάθε $\{x_m\}$ έχει μηδενικό μέτρο και $\mathbb{Q} = \bigcup_{m=1}^{+\infty} \{x_m\}$, από το αποτέλεσμα του τρίτου

ερωτήματος έχουμε ότι το $\mathbb{Q}$ έχει μηδενικό μέτρο.

Το πέμπτο ερώτημα. Έστω συμπαγές $A \subseteq \mathbb{R}$.

Έστω ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχουν ανοικτά διαστήματα $I_1, \dots, I_n$ ώστε $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} I_k$ και $\sum_{k=1}^{n} |I_k| < \epsilon$. Παίρνουμε τυχόντα $\epsilon > 0$ και τα αντίστοιχα $I_1, \dots, I_n$ της υπόθεσης. Θεωρούμε κενά διαστήματα I_k για $k > n$ και τότε έχουμε $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} I_k = \bigcup_{k=1}^{+\infty} I_k$ και $\sum_{k=1}^{+\infty} |I_k| = \sum_{k=1}^{n} |I_k| < \epsilon$. Άρα το A έχει μηδενικό μέτρο.

Αντιστρόφως, έστω ότι το A έχει μηδενικό μέτρο. Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει ακολουθία (I_n) ανοικτών διαστημάτων ώστε $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} |I_n| < \epsilon$. Επειδή το A είναι συμπαγές, υπάρχει n ώστε $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} I_k$. Επιπλέον, $\sum_{k=1}^{n} |I_k| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |I_n| < \epsilon$.

Το έκτο ερώτημα. Έστω διάστημα $[a, b]$ με $b - a > 0$ και έστω ότι το $[a, b]$ έχει μηδενικό μέτρο. Επειδή το $[a, b]$ είναι συμπαγές, από το αποτέλεσμα του πέμπτου ερωτήματος συνεπάγεται ότι για $\epsilon = b - a$ υπάρχουν ανοικτά διαστήματα $I_1, \dots, I_n$ ώστε $[a, b] \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} I_k$ και $\sum_{k=1}^{n} |I_k| < b - a$. Αλλάζουμε την αρίθμηση *κάποιων* από τα $I_1, \dots, I_n$ ως εξής. Ονομάζουμε $I_1 = (a_1, b_1)$ το διάστημα που περιέχει τον a. Αν $b < b_1$, τότε σταματάμε. Αν $b_1 \leq b$, τότε ονομάζουμε $I_2 = (a_2, b_2)$ το διάστημα που περιέχει τον b_1. Αν $b < b_2$, τότε σταματάμε. Αν $b_2 \leq b$, τότε ονομάζουμε $I_3 = (a_3, b_3)$ το διάστημα που περιέχει τον b_2. Συνεχίζουμε μέχρι που να βρεθεί διάστημα $I_m = (a_m, b_m)$ ώστε $b < b_m$. Είναι, τότε, σαφές ότι για τα $I_1, \dots, I_m$ έχουμε ότι $[a, b] \subseteq \bigcup_{k=1}^{m} I_k$ και

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{k=1}^{n} |I_k| \geq \sum_{k=1}^{m} |I_k| &= (b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) + \cdots + (b_{m-1} - a_{m-1}) + (b_m - a_m) \\ &= -a_1 + (b_1 - a_2) + \cdots + (b_{m-1} - a_m) + b_m \geq b_m - a_1 > b - a\end{aligned}$$

και καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα το $[a, b]$ δεν έχει μηδενικό μέτρο.

Τώρα, έστω οποιοδήποτε διάστημα I με θετικό μήκος. Μπορούμε να βρούμε διάστημα $[a, b] \subseteq I$ με $b - a > 0$ και, επειδή το $[a, b]$ δεν έχει μηδενικό μήκος, από το αποτέλεσμα του δεύτερου ερωτήματος συνεπάγεται ότι και το I δεν έχει μηδενικό μήκος.

[β] *Το πρώτο ερώτημα.* Το $A(\epsilon)$ περιέχεται στο $[a, b]$, οπότε είναι φραγμένο. Άρα αρκεί να αποδείξουμε ότι το $A(\epsilon)$ είναι κλειστό.

Έστω οριακό σημείο ξ του $A(\epsilon)$. Αν $\xi \notin [a, b]$, τότε ο ξ είναι εξωτερικό σημείο του $[a, b]$ και άρα και του $A(\epsilon)$. Επομένως, $\xi \in [a, b]$.

Θεωρούμε τυχόντα $\delta > 0$ και τότε υπάρχει $x \in A(\epsilon)$ ώστε $|x - \xi| < \delta$. Επειδή $x \in A(\epsilon)$, για κάθε $\epsilon_1 > 0$ με $\epsilon_1 < \epsilon$ υπάρχουν $x', x'' \in [a, b]$ ώστε $|x' - x| < \delta - |x - \xi|$ και $|x'' - x| < \delta - |x - \xi|$ και ώστε $|f(x') - f(x'')| > \epsilon_1$. Τότε έχουμε $|x' - \xi| < \delta$ και $|x'' - \xi| < \delta$ και $|f(x') - f(x'')| > \epsilon_1$. Επειδή ο δ είναι τυχών, συνεπάγεται ότι $\omega(f; \xi) \geq \epsilon_1$. Τέλος, επειδή αυτό ισχύει για κάθε $\epsilon_1 > 0$ με $\epsilon_1 < \epsilon$, συνεπάγεται ότι $\omega(f; \xi) \geq \epsilon$ και άρα $\xi \in A(\epsilon)$.

Άρα το $A(\epsilon)$ είναι κλειστό.

Το δεύτερο ερώτημα. Γνωρίζουμε ότι ο $x \in [a, b]$ είναι σημείο συνέχειας της f αν και μόνο αν $\omega(f; x) = 0$. Επομένως, $A = \{x \in [a, b] \,|\, \omega(f; x) > 0\}$.

Αν $x \in A$, τότε $\omega(f; x) > 0$, οπότε υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n} \leq \omega(f; x)$ και, επομένως, $x \in A(\frac{1}{n})$. Άρα $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} A(\frac{1}{n})$.

Αντιστρόφως, αν $x \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} A(\frac{1}{n})$, τότε υπάρχει n ώστε $\omega(f; x) \geq \frac{1}{n}$ και άρα $\omega(f; x) > 0$. Επομένως, $x \in A$ και άρα $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A(\frac{1}{n}) \subseteq A$.

Το τρίτο ερώτημα. Έστω ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και έστω $\epsilon > 0$.

Θεωρούμε τυχόντα $\delta > 0$ και έχουμε ότι υπάρχει διαμέριση $\Delta = \{a = x_0, \dots, x_n = b\}$ του $[a, b]$ ώστε να ισχύει

$$\textstyle\sum_{k=1}^{n} (u_k - l_k)(x_k - x_{k-1}) = \overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) < \frac{\delta\epsilon}{2}, \tag{14.317}$$

όπου $u_k = \sup\{f(x) \,|\, x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$ και $l_k = \inf\{f(x) \,|\, x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$ για $k = 1, \dots, n$.

Τώρα, χωρίζουμε τους δείκτες $k = 1, \dots, n$ σε δύο κατηγορίες. Ορίζουμε M το σύνολο των k για τους οποίους ισχύει $u_k - l_k \geq \epsilon$ και N το σύνολο των k για τους οποίους ισχύει $u_k - l_k < \epsilon$. Αν $k \in N$, τότε είναι εύκολο να αποδείξουμε (πώς;) ότι για κάθε $x \in (x_{k-1}, x_k)$ ισχύει $\omega(f; x) \leq$

$u_k - l_k < \epsilon$. Άρα το $A(\epsilon)$ περιέχεται στην ένωση $\bigcup_{k\in M}[x_{k-1}, x_k]$ και άρα

$$A(\epsilon) \subseteq \bigcup_{k\in M}(x_{k-1}', x_k'), \tag{14.318}$$

όπου κάθε (x_{k-1}', x_k') είναι ένα ανοικτό διάστημα το οποίο περιέχει το αντίστοιχο κλειστό διάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ και έχει *διπλάσιο* μήκος.
Τώρα, από την (14.317) συνεπάγεται ότι

$$\epsilon \sum_{k\in M}(x_k - x_{k-1}) \le \sum_{k\in M}(u_k - l_k)(x_k - x_{k-1}) \le \sum_{k=1}^{n}(u_k - l_k)(x_k - x_{k-1}) < \tfrac{\delta\epsilon}{2}$$

και άρα

$$\sum_{k\in M}(x_k' - x_{k-1}') = 2\sum_{k\in M}(x_k - x_{k-1}) < 2\,\tfrac{\delta\epsilon}{2\epsilon} = \delta.$$

Άρα για κάθε $\delta > 0$ το $A(\epsilon)$ περιέχεται στην ένωση ανοικτών διαστημάτων - λόγω της (14.318) - με συνολικό μήκος $< \delta$ και, επομένως, το $A(\epsilon)$ έχει μηδενικό μήκος.
Τώρα, επειδή για κάθε n το $A(\frac{1}{n})$ έχει μηδενικό μήκος, από τα αποτελέσματα του [α] συνεπάγεται ότι το $A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A(\frac{1}{n})$ έχει μηδενικό μέτρο.
Το τέταρτο ερώτημα. Έστω ότι το A έχει μηδενικό μέτρο και έστω τυχών $\epsilon > 0$.
Επειδή η f είναι φραγμένη, υπάρχει $M > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x)| \le M$ για κάθε $x \in [a, b]$.
Θεωρούμε τον $\epsilon' = \frac{\epsilon}{4(b-a)} > 0$.
Επειδή $A(\epsilon') \subseteq A$, το $A(\epsilon')$ έχει μηδενικό μέτρο και επειδή είναι και συμπαγές, υπάρχουν ανοικτά διαστήματα $I_1, \ldots, I_m$ ώστε $A(\epsilon') \subseteq \bigcup_{k=1}^{m} I_k$ και $\sum_{k=1}^{m}|I_k| < \frac{\epsilon}{4M}$.
Καταγράφοντας τα άκρα των $I_1, \ldots, I_m$ και διατάσσοντάς τα, βλέπουμε ότι υπάρχουν ξένα ανά δύο διαστήματα $(y_1, z_1), \ldots, (y_p, z_p)$ ώστε $A(\epsilon') \subseteq \bigcup_{j=1}^{p}(y_j, z_j)$ και $\sum_{j=1}^{p}(z_j - y_j) < \frac{\epsilon}{4M}$.
Μπορούμε, επίσης, να υποθέσουμε ότι (i) καθένα από τα (y_j, z_j) βρίσκεται δεξιά όσων από τα (y_j, z_j) έχουν μικρότερο δείκτη από τον δείκτη του, (ii) τα διαστήματα (y_j, z_j) δεν έχουν κοινά άκρα (ενώνοντας δύο οποιαδήποτε διαδοχικά από αυτά) και (iii) αν $y_1 \le a$, τότε αντικαθιστούμε το (y_1, z_1) με το $[a, z_1)$ και, αν $b \le z_p$, τότε αντικαθιστούμε το (y_p, z_p) με το $(y_p, b]$.
Τώρα, αν αφαιρέσουμε από το $[a, b]$ τα προηγούμενα διαστήματα, δημιουργούνται κάποια συμπληρωματικά κλειστά διαστήματα, τα οποία ονομάζουμε $[\xi_1, \eta_1], \ldots, [\xi_q, \eta_q]$.
Για κάθε $x \in \bigcup_{i=1}^{q}[\xi_i, \eta_i]$ ισχύει $\omega(f; x) < \epsilon'$. Άρα για κάθε $x \in \bigcup_{i=1}^{q}[\xi_i, \eta_i]$ υπάρχει κάποια ανοικτή περιοχή του x ώστε να ισχύει $f(x') - f(x'') < \epsilon'$ για κάθε x', x'' στην περιοχή αυτή. Αυτές οι περιοχές των διαφόρων $x \in \bigcup_{i=1}^{q}[\xi_i, \eta_i]$ αποτελούν ανοικτή κάλυψη του συμπαγούς $\bigcup_{i=1}^{q}[\xi_i, \eta_i]$ και άρα υπάρχουν πεπερασμένου πλήθους τέτοιες περιοχές οι οποίες καλύπτουν το $\bigcup_{i=1}^{q}[\xi_i, \eta_i]$.
Τώρα, καταγράφοντας τα άκρα αυτών των περιοχών και διατάσσοντάς τα, βλέπουμε ότι μπορούμε να χωρίσουμε κάθε $[\xi_i, \eta_i]$ σε μικρότερα κλειστά διαστήματα ώστε να ισχύει $f(x') - f(x'') < \epsilon'$ για κάθε x', x'' σε καθένα από αυτά.
Από όλα τα προηγούμενα συμπεραίνουμε ότι υπάρχει μια διαμέριση $\Delta = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$ του $[a, b]$ έτσι ώστε οι $k = 1, \ldots, n$ να χωρίζονται σε δύο κατηγορίες. Η πρώτη κατηγορία M αποτελείται από τους k για τους οποίους ισχύει $f(x') - f(x'') < \epsilon'$ για κάθε x', x'' στο $[x_{k-1}, x_k]$. Αυτό συνεπάγεται ότι ισχύει $u_k - l_k \le \epsilon'$ για κάθε $k \in M$. Η δεύτερη κατηγορία N αποτελείται από τους υπόλοιπους k και γι' αυτήν την κατηγορία ισχύει $\sum_{k\in N}(x_k - x_{k-1}) < \frac{\epsilon}{4M}$. Φυσικά, ισχύει $u_k - l_k \le 2M$ για κάθε $k \in N$.
Τώρα, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\overline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) - \underline{\Sigma}(f; a, b; \Delta) &= \sum_{k\in M}(u_k - l_k)(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k\in N}(u_k - l_k)(x_k - x_{k-1})\\ &\le \epsilon' \sum_{k\in M}(x_k - x_{k-1}) + 2M\sum_{k\in N}(x_k - x_{k-1})\\ &\le \tfrac{\epsilon}{4(b-a)}(b-a) + 2M\tfrac{\epsilon}{4M} < \epsilon.\end{aligned}$$

Άρα η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.

Άσκηση 11.7.1. *Βρείτε ποιά από τα παρακάτω υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$ είναι συνεκτικά και βρείτε τις συνεκτικές συνιστώσες τους.* $\{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\mathrm{x} - (0, 1)\|_2 \neq 2\}$, $\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$.

Λύση: Το $A = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^2 \,|\, \|\mathrm{x} - (0,1)\|_2 \neq 2\}$ είναι η ένωση του ανοικτού δίσκου $B = N_{\mathrm{x}_0}(2)$, όπου $\mathrm{x}_0 = (0,1)$, και του $C = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^2 \,|\, \|\mathrm{x} - \mathrm{x}_0\|_2 > 2\}$. Τα B, C είναι κατά καμπύλες συνεκτικά και άρα συνεκτικά. Για κάθε οριακό σημείο x του B ισχύει $\|\mathrm{x} - \mathrm{x}_0\|_2 \leq 2$ και για κάθε οριακό σημείο x του C ισχύει $\|\mathrm{x} - \mathrm{x}_0\|_2 \geq 2$. Επομένως, κανένα από τα B, C δεν περιέχει οριακό σημείο του άλλου και άρα τα B, C αποτελούν διάσπαση του A.
Τώρα, έστω K οποιοδήποτε συνεκτικό υποσύνολο του A. Συνεπάγεται ότι $K \subseteq B$ ή $K \subseteq C$, οπότε δεν υπάρχει συνεκτικό υποσύνολο του A γνησίως μεγαλύτερο του B ή του C. Άρα το A δεν είναι συνεκτικό και τα B, C είναι οι συνεκτικές συνιστώσες του.

Έστω τυχόν $\mathrm{a} \in A = \{(x,y) \,|\, x, y \in \mathbb{Q}\}$. Το μονοσύνολο $\{\mathrm{a}\}$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του A. Τώρα, έστω τυχόν $C \subseteq A$ με $\mathrm{a} \in C$ και ας υποθέσουμε ότι το C δεν ταυτίζεται με το $\{\mathrm{a}\}$, δηλαδή ότι υπάρχει $\mathrm{b} \in C$ με $\mathrm{a} \neq \mathrm{b}$. Έστω $\mathrm{a} = (x,y)$ και $\mathrm{b} = (u,v)$ και τότε είναι $x \neq u$ ή $y \neq v$. Αν $x \neq u$, επιλέγουμε έναν άρρητο p ανάμεσα στους x, u και βλέπουμε εύκολα ότι τα σύνολα $\{(r,s) \in A \,|\, r < p\}$ και $\{(r,s) \in A \,|\, p < r\}$ αποτελούν διάσπαση του A. Πράγματι, το πρώτο σύνολο περιέχεται στο ανοικτό ημιεπίπεδο $\{(r,s) \,|\, r < p\}$ και το δεύτερο σύνολο περιέχεται στο ανοικτό ημιεπίπεδο $\{(r,s) \,|\, p < r\}$ και, επομένως, κανένα από τα δύο σύνολα δεν περιέχει οριακό σημείο του άλλου. Επίσης, και τα δύο σύνολα είναι μη-κενά αφού το ένα περιέχει το a και το άλλο περιέχει το b. Τέλος, το A ισούται με την ένωση των δύο συνόλων, αφού κάθε σημείο που δεν ανήκει σ' αυτήν την ένωση είναι της μορφής (p,s) και ο p είναι άρρητος.
Επειδή, λοιπόν, υπάρχει διάσπαση του C, το C δεν είναι συνεκτικό. Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι το C δεν είναι συνεκτικό αν $y \neq v$.
Άρα δεν υπάρχει συνεκτικό υποσύνολο του A γνησίως μεγαλύτερο του $\{\mathrm{a}\}$, οπότε το $\{\mathrm{a}\}$ είναι συνεκτική συνιστώσα του A. Δηλαδή, κάθε μονοσύνολο μέσα στο A είναι συνεκτική συνιστώσα του.

Άσκηση 11.7.2. *Αποδείξτε ότι είναι συνεκτικά τα σύνολα* $\{(x, \sin\frac{1}{x}) \,|\, 0 < x \leq 1\}$, $\{(x, \sin\frac{1}{x}) \,|\, 0 < x \leq 1\} \cup [(0,-1),(0,1)]$ *στο* $\mathbb{R}^2$.

Λύση: Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : (0,1] \to \mathbb{R}^2$ με τύπο $f(x) = (x, \sin\frac{1}{x})$. Η f είναι συνεχής στο $(0,1]$ και το $(0,1]$ είναι συνεκτικό, οπότε το $A = f((0,1]) = \{(x, \sin\frac{1}{x}) \,|\, 0 < x \leq 1\}$ είναι συνεκτικό.
Κάθε σημείο του ευθυγράμμου τμήματος $[(0,-1),(0,1)]$ είναι οριακό σημείο του A.
Πράγματι, έστω $y \in [-1,1]$. Τότε υπάρχει $\xi \geq 0$ ώστε $\sin\xi = y$ και θεωρούμε την ακολουθία (x_n) με $x_n = \frac{1}{\xi + 2n\pi}$ για κάθε n. Τότε ισχύει $0 < x_n \leq 1$ για κάθε n, η ακολουθία $(x_n, \sin\frac{1}{x_n})$ βρίσκεται στο A και $(x_n, \sin\frac{1}{x_n}) = (x_n, y) \to (0,y)$. Άρα το $(0,y)$, δηλαδή το τυχόν στοιχείο του $[(0,-1),(0,1)]$, είναι οριακό σημείο του A.
Επομένως, για το $B = \{(x, \sin\frac{1}{x}) \,|\, 0 < x \leq 1\} \cup [(0,-1),(0,1)]$ ισχύει $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$. Άρα το B είναι συνεκτικό.

Άσκηση 11.7.3. *Έστω $d \geq 2$, ανοικτό και συνεκτικό σύνολο $U \subseteq \mathbb{R}^d$ και $a_1, \ldots, a_n \in U$. Αποδείξτε ότι το $U \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$ είναι ανοικτό και συνεκτικό. Τί από αυτά ισχύει αν $d = 1$;*

Υπόδειξη: Για το "ανοικτό" δείτε την άσκηση 11.2.12. Για το "συνεκτικό" χρησιμοποιήστε ότι το U είναι κατά καμπύλες συνεκτικό και αποδείξτε ότι και το $U \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$ είναι κατά καμπύλες συνεκτικό.

Άσκηση 11.7.4. *Έστω υπερεπίπεδο L στον $\mathbb{R}^d$ και οι δύο ανοικτοί ημιχώροι του $\mathbb{R}^d$ που ορίζονται από το L. Αν μια καμπύλη γ στον $\mathbb{R}^d$ συνδέει ένα σημείο στον ένα ανοικτό ημιχώρο και ένα σημείο στον άλλο ανοικτό ημιχώρο, αποδείξτε ότι η τροχιά της γ τέμνει το L.*

Λύση: Έστω B και C οι δύο ανοικτοί ημιχώροι που ορίζονται από το L. Οι B και C αποτελούν διάσπαση του $B \cup C$. Η τροχιά της γ είναι συνεκτικό σύνολο και, αν περιέχεται στο $B \cup C$, τότε περιέχεται είτε στο B είτε στο C.

Άσκηση 11.7.5. *Δείτε την άσκηση 11.2.8 και αποδείξτε ότι κάθε συνεκτική συνιστώσα του συνόλου C του Cantor είναι μονοσύνολο.*

Λύση: Αν μια συνεκτική συνιστώσα του C δεν είναι μονοσύνολο, τότε (ως συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}$) είναι διάστημα θετικού μήκους. Αυτό είναι αδύνατο, αφού το C δεν περιέχει κανένα διάστημα θετικού μήκους.

Άσκηση 11.7.6. *Έστω μετρικός χώρος (X, d) και έστω ότι κάθε $A_n \subseteq X$ είναι συνεκτικό σύνολο και $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι η ένωση $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ είναι συνεκτική.*

Υπόδειξη: Θεωρήστε τα σύνολα $B_n = A_1 \cup \cdots \cup A_n$ και αποδείξτε με επαγωγή ότι κάθε B_n είναι συνεκτικό και παρατηρήστε ότι $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n$.

Άσκηση 11.7.7. *Βρείτε απλό παράδειγμα δύο συνεκτικών συνόλων στο $\mathbb{R}^2$ των οποίων η τομή δεν είναι συνεκτική.*

Υπόδειξη: Δείτε τα $A = \{(x, \sqrt{1-x^2}) \,|\, x \in [-1,1]\}$ και $B = \{(x, -\sqrt{1-x^2}) \,|\, x \in [-1,1]\}$.

Άσκηση 11.7.8. *Βρείτε απλό παράδειγμα συνεκτικού συνόλου A στον $\mathbb{R}^2$ ώστε το ∂A να μην είναι συνεκτικό.*
Βρείτε απλό παράδειγμα συνεκτικού συνόλου A στον $\mathbb{R}^2$ ώστε το A° να μην είναι συνεκτικό.

Υπόδειξη: Δείτε τα $A = \{\mathrm{x} \,|\, 1 \leq \|\mathrm{x}\|_2 \leq 2\}$ και $A = \{\mathrm{x} \,|\, \|\mathrm{x}\|_2 \leq 1$ ή $\|\mathrm{x}-\mathrm{a}\|_2 \leq 1\}$ με $\mathrm{a} = (2, 0)$.

Άσκηση 11.7.9. *Έστω υποσύνολο $B \subseteq \mathbb{R}^d$. Αν το B είναι ανοικτό και, ταυτόχρονα, κλειστό, αποδείξτε ότι είτε $B = \emptyset$ είτε $B = \mathbb{R}^d$.*

Υπόδειξη: Αν $B \neq \emptyset$ και $B \neq \mathbb{R}^d$ και το B είναι ανοικτό και κλειστό, τότε τα B και $\mathbb{R}^d \setminus B$ αποτελούν διάσπαση του $\mathbb{R}^d$.

Άσκηση 11.7.11. *Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $A \subseteq X$.*
Αν το A είναι ανοικτό, αποδείξτε ότι το A είναι συνεκτικό αν και μόνο αν δεν υπάρχουν B, C ανοικτά ώστε $B \cup C = A$, $B \cap C = \emptyset$, $B, C \neq \emptyset$.

Λύση: Έστω ότι το A είναι ανοικτό.
Υποθέτουμε ότι υπάρχουν B, C ανοικτά ώστε $B \cup C = A$, $B \cap C = \emptyset$, $B, C \neq \emptyset$. Τότε κάθε σημείο του B είναι εσωτερικό σημείο του B και άρα είναι εξωτερικό σημείο του C και άρα δεν είναι οριακό σημείο του C. Ομοίως, κάθε σημείο του C δεν είναι οριακό σημείο του B. Επομένως, τα B, C αποτελούν διάσπαση του A.
Αντιστρόφως, έστω ότι τα B, C αποτελούν διάσπαση του A. Δηλαδή, ισχύει $B \cup C = A$, $B \cap C = \emptyset$, $B, C \neq \emptyset$ και κανένα από τα B, C δεν περιέχει οριακό σημείο του άλλου. Τώρα, έστω $b \in B$. Το b δεν είναι οριακό σημείο του C, οπότε υπάρχει περιοχή $N_b(r')$ του b η οποία δεν τέμνει το C. Επειδή το A είναι ανοικτό και $b \in A$, υπάρχει περιοχή $N_b(r'')$ η οποία περιέχεται στο A. Αν πάρουμε $r = \min\{r', r''\}$, τότε η $N_b(r)$ περιέχεται στο A και δεν τέμνει το C και, επομένως, περιέχεται στο B. Άρα κάθε $b \in B$ είναι εσωτερικό σημείο του B, οπότε το B είναι ανοικτό. Ομοίως, και το C είναι ανοικτό.

Άσκηση 11.7.12. *Έστω ανοικτό σύνολο $U \subseteq \mathbb{R}^d$. Αποδείξτε ότι το πλήθος των συνεκτικών συνιστωσών του U είναι αριθμήσιμο (δηλαδή είτε πεπερασμένο είτε άπειρο αριθμήσιμο).*

Λύση: Ένα από τα αποτελέσματα της άσκησης 11.2.24[α,β] λέει ότι ο $\mathbb{R}^d$ είναι διαχωρίσιμος, δηλαδή ότι υπάρχει αριθμήσιμο $A \subseteq \mathbb{R}^d$ ώστε $\overline{A} = \mathbb{R}^d$. Επειδή το U είναι ανοικτό, κάθε συνεκτική συνιστώσα C του U είναι ανοικτή. Θεωρούμε οποιοδήποτε $x \in C$ και τότε υπάρχει ανοικτή περιοχή $N_x(r)$ η οποία περιέχεται στην συνιστώσα C. Επειδή το A είναι πυκνό, υπάρχει $a \in A$ στην $N_x(r)$ και άρα $a \in C$.
Έχουμε, λοιπόν, ότι για κάθε συνιστώσα C του U υπάρχει $a \in A$ με $a \in C$. Σε διαφορετικές συνιστώσες C του U αντιστοιχούν διαφορετικά $a \in C$, αφού διαφορετικές συνιστώσες είναι ξένες. Επομένως, υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία ανάμεσα στο σύνολο των συνεκτικών συνιστωσών του U και στο σύνολο των αντίστοιχων $a \in A$, δηλαδή σε ένα υποσύνολο A' του A. Το A' είναι αριθμήσιμο και άρα το σύνολο των συνεκτικών συνιστωσών του U είναι αριθμήσιμο.

Άσκηση 11.7.13. *Έστω μετρικός χώρος (X, d) και $A \subseteq X$. Αποδείξτε ότι το A είναι συνεκτικό* *αν και μόνο αν οι μόνες συναρτήσεις $f : A \to \{0,1\}$ που είναι συνεχείς στο A είναι οι σταθερές συναρτήσεις.*

Υπόδειξη: Έστω B, C μια διάσπαση του A. Θεωρήστε την $f : A \to \{0,1\}$ έτσι ώστε να ισχύει $f(x) = 0$ για $x \in B$ και $f(x) = 1$ για $x \in C$ και αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο A αλλά μη-σταθερή. Για το αντίστροφο, έστω μη-σταθερή $f : A \to \{0,1\}$ η οποία είναι συνεχής στο A. Αποδείξτε ότι τα $f^{-1}(\{0\})$ και $f^{-1}(\{1\})$ αποτελούν διάσπαση του A.

Άσκηση 11.7.15. *Έστω μετρικός χώρος (X,d). Ο (X,d) χαρακτηρίζεται τοπικά συνεκτικός αν για κάθε $x \in X$ και κάθε $r > 0$ υπάρχει ανοικτό και συνεκτικό U ώστε $x \in U \subseteq N_x(r)$.*

Αποδείξτε ότι ο (X,d) είναι τοπικά συνεκτικός αν και μόνο αν για κάθε ανοικτό $A \subseteq X$ όλες οι συνεκτικές συνιστώσες του A είναι ανοικτές.

Λύση: Έστω ότι για κάθε ανοικτό $A \subseteq X$ όλες οι συνεκτικές συνιστώσες του A είναι ανοικτές. Για κάθε $x \in X$ και κάθε $r > 0$ η περιοχή $N_x(r)$ είναι ανοικτό σύνολο και άρα, αν U είναι η συνεκτική συνιστώσα της $N_x(r)$ η οποία περιέχει το x, τότε το U είναι ανοικτό και συνεκτικό και ισχύει $x \in U \subseteq N_x(r)$.
Αντιστρόφως, έστω ότι ο (X,d) είναι τοπικά συνεκτικός. Θεωρούμε ανοικτό $A \subseteq X$ και έστω C οποιαδήποτε συνεκτική συνιστώσα του A. Παίρνουμε τυχόν $x \in C$ και, επειδή $x \in A$, υπάρχει $N_x(r) \subseteq A$. Τότε υπάρχει ανοικτό και συνεκτικό U ώστε $x \in U \subseteq N_x(r)$. Τώρα, το U είναι συνεκτικό υποσύνολο του A και, επειδή τέμνει την συνεκτική συνιστώσα C του A (αφού $x \in U \cap C$), ισχύει $U \subseteq C$. Άρα το x είναι εσωτερικό σημείο του C. Επομένως, το C είναι ανοικτό.

Άσκηση 11.7.17. *Δείτε τις ασκήσεις 11.1.6 και 11.2.26. Έστω μετρικός χώρος (X,d) και μη-κενό $A \subseteq X$. Αποδείξτε ότι το A είναι συνεκτικό υποσύνολο του (X,d) αν και μόνο αν το A είναι συνεκτικό υποσύνολο του (A,d).*

Λύση: Έστω ότι το A είναι συνεκτικό υποσύνολο του (A,d).
Υποθέτουμε ότι το A δεν είναι συνεκτικό υποσύνολο του (X,d), οπότε υπάρχουν B, C που αποτελούν διάσπαση του A στον (X,d). Δηλαδή, $A = B \cup C$, $B \cap C = \emptyset$, $B, C \neq \emptyset$ και κανένα από τα B, C δεν περιέχει οριακό σημείο στον (X,d) του άλλου.
Ας πάρουμε $b \in B$. Τότε υπάρχει περιοχή $N_b^X(r)$ του b στον (X,d) με $N_b^X(r) \cap C = \emptyset$. Τότε $N_b^X(r) \cap A = N_b^A(r)$ και άρα

$$N_b^A(r) \cap C = N_b^X(r) \cap A \cap C = N_b^X(r) \cap C = \emptyset.$$

Άρα υπάρχει περιοχή $N_b^A(r)$ του b στον (A,d) με $N_b^A(r) \cap C = \emptyset$, οπότε το b δεν είναι οριακό σημείο στον (A,d) του C. Ομοίως, κάθε $c \in C$ δεν είναι οριακό σημείο στον (A,d) του B.
Άρα τα B, C αποτελούν διάσπαση του A στον (A,d) και καταλήγουμε σε άτοπο.
Το αντίστροφο μπορείτε να το αποδείξετε εσείς με παρόμοιο τρόπο.

14.12 Κεφάλαιο 12.

Άσκηση 12.1.1. *Ποιά από τα $\int_1^3 \frac{1}{x}\,dx$, $\int_1^3 \frac{2}{x-2}\,dx$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ είναι γενικευμένα ολοκληρώματα;*

Λύση: Το $\int_1^3 \frac{1}{x}\,dx$ δεν είναι γενικευμένο ολοκλήρωμα διότι η $\frac{1}{x}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[1,3]$.

Το $\int_1^3 \frac{2}{x-2}\,dx$ είναι γενικευμένο ολοκλήρωμα διότι η $\frac{2}{x-2}$ δεν είναι φραγμένη στο $[1,3]$ και, μάλιστα, δεν ορίζεται στον 2, ενώ η συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη στο $[1,c]$ για κάθε $c \in [1,2)$ και στο $[c,3]$ για κάθε $c \in (2,3]$. Το ολοκλήρωμα χωρίζεται σε δύο απλούστερα γενικευμένα ολοκληρώματα, τα $\int_1^2 \frac{2}{x-2}\,dx = \int_1^{\to 2} \frac{2}{x-2}\,dx$ και $\int_2^3 \frac{2}{x-2}\,dx = \int_{2\leftarrow}^3 \frac{2}{x-2}\,dx$.
Το $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int_1^{\to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ είναι γενικευμένο ολοκλήρωμα διότι το $[1,+\infty)$ δεν είναι φραγμένο και διότι η $\frac{1}{\sqrt{x}}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[1,c]$ για κάθε $c \geq 1$.

Το $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ είναι γενικευμένο ολοκλήρωμα διότι η $\frac{1}{x}$ δεν είναι φραγμένη στο $(-\infty,+\infty)$ και, μάλιστα, δεν ορίζεται στον 0 αλλά και διότι το $(-\infty,+\infty)$ δεν είναι φραγμένο, ενώ η $\frac{1}{x}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[c',c'']$ για κάθε c',c'' με $-\infty < c' \leq c'' < 0$ και στο $[c',c'']$ κάθε c',c'' με $0 < c' \leq c'' < +\infty$. Το ολοκλήρωμα χωρίζεται σε τέσσερα απλούστερα γενικευμένα ολοκληρώματα, το $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x}\,dx = \int_{-\infty\leftarrow}^{-1} \frac{1}{x}\,dx$, το $\int_{-1}^{0} \frac{1}{x}\,dx = \int_{-1}^{\to 0} \frac{1}{x}\,dx$, το $\int_{0}^{1} \frac{1}{x}\,dx = \int_{0\leftarrow}^{1} \frac{1}{x}\,dx$ και το $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \int_{1}^{\to+\infty} \frac{1}{x}\,dx$.

Άσκηση 12.1.2. *Είναι σαφές ότι το $\int_1^5 \frac{\log x}{x-1}\,dx$ είναι γενικευμένο ολοκλήρωμα. Πώς πρέπει να χειριστούμε την ολοκληρωτέα συνάρτηση ώστε αυτό να μπορεί να θεωρηθεί (απλό) ολοκλήρωμα;*

Λύση: Η $\frac{\log x}{x-1}$ δεν ορίζεται στον 1. Αν ορίσουμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\log x}{x-1}, & \text{αν } 1 < x \leq 5 \\ 1, & \text{αν } x = 1 \end{cases}$$

βλέπουμε ότι η f είναι συνεχής, και άρα ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[1,5]$, και ταυτίζεται με την $\frac{\log x}{x-1}$ στο $(1,5]$.
Από την πρόταση 12.2 συνεπάγεται ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^5 \frac{\log x}{x-1}\,dx = \int_{1\leftarrow}^5 \frac{\log x}{x-1}\,dx$ ισούται με το (απλό) ολοκλήρωμα $\int_1^5 f(x)\,dx$.

Άσκηση 12.1.3. *Μπορεί να θεωρηθεί το $\int_0^1 \frac{1}{\sin(1/x)}\,dx$ γενικευμένο ολοκλήρωμα;*

Λύση: Στο διάστημα $[0,1]$ η $\frac{1}{\sin(1/x)}$ δεν ορίζεται στον 0 αλλά και στα *άπειρα* σημεία $\frac{1}{n\pi}$ για $n \in \mathbb{N}$. Άρα το $\int_0^1 \frac{1}{\sin(1/x)}\,dx$ δεν είναι γενικευμένο ολοκλήρωμα.

Άσκηση 12.1.4. *Βρείτε τα $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2(x^2+1)} dx$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)}\,dx$.*

Λύση: Το πρώτο ολοκλήρωμα. Γράφουμε $\frac{1}{x^2(x^2+1)} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1}$ και τότε έχουμε

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2(x^2+1)}\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx - \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx.$$

Επειδή

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{c\to+\infty} \int_1^c \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{c\to+\infty} \left(1-\frac{1}{c}\right) = 1$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{c\to+\infty} \int_1^c \frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{c\to+\infty} (\arctan c - \arctan 1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4},$$

είναι $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2(x^2+1)}\,dx = 1 - \frac{\pi}{4}$.
Το δεύτερο ολοκλήρωμα. Τώρα είναι $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$, αλλά δεν μπορούμε να κάνουμε ό,τι κάναμε με το πρώτο ολοκλήρωμα διότι

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{c\to+\infty} \int_1^c \frac{1}{x}\,dx = \lim_{c\to+\infty} \log c = +\infty$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x+1}\,dx = \lim_{c\to+\infty} \int_1^c \frac{1}{x+1}\,dx = \lim_{c\to+\infty} (\log(c+1) - \log 2) = +\infty,$$

οπότε η διαφορά $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx - \int_1^{+\infty} \frac{1}{x+1}\,dx$ αποτελεί απροσδιόριστη μορφή.
Θα κάνουμε κάτι άλλο. Είναι

$$\int_1^c \frac{1}{x}\,dx = \log c, \qquad \int_1^c \frac{1}{x+1}\,dx = \log(c+1) - \log 2$$

και άρα

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)}\,dx &= \lim_{c\to+\infty} \int_1^c \frac{1}{x(x+1)}\,dx = \lim_{c\to+\infty} \left(\int_1^c \frac{1}{x}\,dx - \int_1^c \frac{1}{x+1}\,dx\right) \\ &= \lim_{c\to+\infty} (\log c - \log(c+1) + \log 2) = \lim_{c\to+\infty} \left(\log \frac{c}{c+1} + \log 2\right) = \log 2. \end{aligned}$$

Άσκηση 12.1.6. *Αποδείξτε ότι $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx = n!$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$.*

Υπόδειξη: Δείτε το αποτέλεσμα της άσκησης 7.2.1(v).

Άσκηση 12.1.7. *Αποδείξτε ότι* $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x\cos\theta+1}\,dx = \frac{\theta}{\sin\theta}$ *για κάθε* $\theta \in (0,\pi)$.

Υπόδειξη: Γράψτε $x^2 + 2x\cos\theta + 1 = (x+\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2$.

Άσκηση 12.1.9. *Αποδείξτε ότι* $\int_0^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(1+x)^{n+m}}\,dx = \frac{(n-1)!(m-1)!}{(n+m-1)!}$ *για κάθε* $n, m \in \mathbb{N}$.

Υπόδειξη: Εφαρμόστε διαδοχικές ολοκληρώσεις κατά μέρη για να απαλείψετε το x^{n-1}.

Άσκηση 12.1.11. *Μελετήστε ως προς τη σύγκλιση το* $\int_0^{+\infty}(-1)^{[x]}\,dx$.

Λύση: Για $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\int_0^n(-1)^{[x]}\,dx &= \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k (-1)^{[x]}\,dx = \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k (-1)^{k-1}\,dx\\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} = \begin{cases}1, & \text{αν ο } n \text{ είναι περιττός}\\ 0, & \text{αν ο } k \text{ είναι άρτιος}\end{cases}\end{aligned}$$

Άρα το $\lim_{c\to+\infty}\int_0^c(-1)^{[x]}\,dx$ δεν υπάρχει.

Άσκηση 12.1.12. *Έστω* f *ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του* $(0,+\infty)$ *και* $0 < A \leq B < +\infty$.
[α] *Ορίζουμε την* $g(x) = \frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt$ *για* $0 < x < +\infty$ *και έστω ότι το* $L = \lim_{x\to+\infty} g(x)$ *υπάρχει και είναι αριθμός. Αποδείξτε ότι:*
(i) $\int_A^B \frac{f(x)}{x}\,dx = g(B) - g(A) + \int_A^B \frac{g(x)}{x}\,dx$.
(ii) $\lim_{T\to+\infty}\int_{AT}^{BT}\frac{f(x)}{x}\,dx = L\log\frac{B}{A}$.
(iii) $\int_1^{+\infty}\frac{f(Ax)-f(Bx)}{x}\,dx = -L\log\frac{B}{A} + \int_A^B \frac{f(x)}{x}\,dx$.

Λύση: (i) Έχουμε

$$\begin{aligned}\int_A^B \frac{g(x)}{x}\,dx &= \int_A^B \frac{1}{x^2}\,xg(x)\,dx = -\int_A^B \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)xg(x)\,dx\\ &= -g(B) + g(A) + \int_A^B \frac{1}{x}\frac{d}{dx}(xg(x))\,dx = -g(B) + g(A) + \int_A^B \frac{f(x)}{x}\,dx.\end{aligned}$$

(ii) Έστω $\epsilon > 0$. Γράφουμε για απλότητα $\kappa = \log\frac{B}{A} > 0$ και έχουμε ότι υπάρχει $N' > 0$ ώστε να ισχύει $|g(x) - L| < \frac{\epsilon}{2\kappa}$ για κάθε $x > N'$.
Παίρνουμε $N = \frac{N'}{A} > 0$ και τότε για κάθε $T > N$ έχουμε ότι ισχύει $|g(x) - L| < \frac{\epsilon}{2\kappa}$ για κάθε $x \geq AT$, οπότε

$$\left|\int_{AT}^{BT}\frac{g(x)}{x}\,dx - L\log\frac{B}{A}\right| = \left|\int_{AT}^{BT}\frac{g(x)-L}{x}\,dx\right| \leq \int_{AT}^{BT}\frac{|g(x)-L|}{x}\,dx \leq \frac{\epsilon}{2\kappa}\int_{AT}^{BT}\frac{1}{x}\,dx = \frac{\epsilon}{2\kappa}\kappa < \epsilon.$$

Άρα $\lim_{T\to+\infty}\int_{AT}^{BT}\frac{g(x)}{x}\,dx = L\log\frac{B}{A}$, οπότε από το αποτέλεσμα του (i) συνεπάγεται

$$\lim_{T\to+\infty}\int_{AT}^{BT}\frac{f(x)}{x}\,dx = \lim_{T\to+\infty}\left(g(BT) - g(AT) + \int_{AT}^{BT}\frac{g(x)}{x}\,dx\right) = L\log\frac{B}{A}.$$

(iii) Τέλος, έχουμε

$$\begin{aligned}\int_1^T \frac{f(Ax)-f(Bx)}{x}\,dx &= \int_1^T \frac{f(Ax)}{x}\,dx - \int_1^T \frac{f(Bx)}{x}\,dx = \int_A^{AT}\frac{f(x)}{x}\,dx - \int_B^{BT}\frac{f(x)}{x}\,dx\\ &= -\int_{AT}^{BT}\frac{f(x)}{x}\,dx + \int_A^B \frac{f(x)}{x}\,dx.\end{aligned}$$

Το συμπέρασμα είναι συνέπεια του αποτελέσματος του (ii).

Άσκηση 12.2.1. *Αποδείξτε ότι* $\int_1^{+\infty}(\sin\frac{1}{x})^2\,dx \leq 1$ *και* $\int_0^{+\infty}\frac{(\sin x)^2}{x^2}\,dx \leq 2$.

Υπόδειξη: Για το πρώτο ολοκλήρωμα χρησιμοποιήστε την ανισότητα $|\sin\frac{1}{x}| \leq \frac{1}{x}$ στο $[1,+\infty)$. Για το δεύτερο ολοκλήρωμα χρησιμοποιήστε την ανισότητα $|\sin x| \leq x$ στο $[0,1]$ και την ανισότητα $|\sin x| \leq 1$ στο $[1,+\infty)$

Άσκηση 12.2.2. *Αποδείξτε ότι το* $\int_0^1 \frac{1}{x^p(1-x)^q}\,dx$ *συγκλίνει αν και μόνο αν* $p,q<1$.

Υπόδειξη: Στο $(0,\frac{1}{2}]$ ισχύει $\frac{1}{2}\leq 1-x\leq 1$ και στο $[\frac{1}{2},1)$ ισχύει $\frac{1}{2}\leq x\leq 1$.

Άσκηση 12.2.4. *Αποδείξτε ότι τα* $\int_0^{+\infty} e^{-(x+x^{-1})}\,dx$, $\int_1^{+\infty}\frac{\log x}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx$ *συγκλίνουν.*

Υπόδειξη: Για το πρώτο ολοκλήρωμα δείτε ότι $\lim_{x\to 0+} e^{-(x+x^{-1})}=0$, οπότε η $e^{-(x+x^{-1})}$ μπορεί να θεωρηθεί συνεχής με τιμή 0 στον 0. Επίσης, ισχύει $0\leq e^{-(x+x^{-1})}\leq e^{-x}$ στο $(0,+\infty)$.
Για το δεύτερο ολοκλήρωμα δείτε ότι $\lim_{x\to 1+}\frac{\log x}{x\sqrt{x^2-1}}=0$ και ότι ισχύει $0\leq \frac{\log x}{x\sqrt{x^2-1}}\leq \frac{\log x}{x^{3/2}}$ στο $[2,+\infty)$.

Άσκηση 12.2.7. *Αποδείξτε ότι το* $\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+x^4(\sin x)^2}\,dx$ *συγκλίνει.*

Υπόδειξη: Παρατηρήστε ότι για κάθε $n\in\mathbb{N}$ ισχύει

$$\begin{aligned}\int_{n\pi-(\pi/2)}^{n\pi+(\pi/2)}\frac{1}{1+x^4(\sin x)^2}\,dx &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1}{1+(x+n\pi)^4(\sin x)^2}\,dx \leq \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1}{1+n^4\pi^4(\sin x)^2}\,dx\\ &\leq \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1}{1+4\pi^2n^4x^2}\,dx = 2\int_0^{\pi/2}\frac{1}{1+4\pi^2n^4x^2}\,dx\\ &= \frac{1}{\pi n^2}\int_0^{\pi^2n^2}\frac{1}{1+t^2}\,dt \leq \frac{1}{\pi n^2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{2n^2}.\end{aligned}$$

Άσκηση 12.2.8. *Εδώ εξετάζουμε μια διαφορά ανάμεσα σε γεν. ολοκληρώματα και σε σειρές.*
Βρείτε $f:[1,+\infty)\to[0,+\infty)$ *ώστε το* $\int_1^{+\infty}f(x)\,dx$ *να συγκλίνει και το* $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ *να μην υπάρχει.*
Έστω $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$. *Αν υπάρχει το* $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ *και συγκλίνει το* $\int_1^{+\infty}f(x)\,dx$, *αποδείξτε ότι* $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$.

Υπόδειξη: Το πρώτο ερώτημα. Δείτε το δεύτερο γεν. ολοκλήρωμα της άσκησης 12.2.7. Κατασκευάστε και μια δική σας συνάρτηση.
Το δεύτερο ερώτημα. Υποθέστε ότι $\lim_{x\to+\infty}f(x)>0$ και άρα ότι υπάρχει $a>0$ και $N>1$ ώστε να ισχύει $f(x)>a$ για κάθε $x>N$.

Άσκηση 12.2.9. *Έστω* $f,g:[a,+\infty)\to[0,+\infty)$ *συνεχείς στο* $[a,+\infty)$ *και* $p,q>1$ *με* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.
[α] *Αν* $\int_a^{+\infty}(f(x))^p\,dx<+\infty$ *και* $\int_a^{+\infty}(g(x))^q\,dx<+\infty$, *αποδείξτε την ανισότητα του Hölder για γεν. ολοκληρώματα:*

$$\int_a^{+\infty}f(x)g(x)\,dx\leq\Big(\int_a^{+\infty}(f(x))^p\,dx\Big)^{1/p}\Big(\int_a^{+\infty}(g(x))^q\,dx\Big)^{1/q}.$$

Ειδική περίπτωση είναι η ανισότητα των Schwarz, Buniakowsky για γεν. ολοκληρώματα:

$$\int_a^{+\infty}f(x)g(x)\,dx\leq\Big(\int_a^{+\infty}(f(x))^2\,dx\Big)^{1/2}\Big(\int_a^{+\infty}(g(x))^2\,dx\Big)^{1/2}.$$

Αποδείξτε ότι η ανισότητα του Hölder ισχύει ως ισότητα αν και μόνο αν υπάρχουν $s,t\geq 0$ *όχι και οι δύο ίσοι με* 0 *ώστε να ισχύει* $s(f(x))^p=t(g(x))^q$ *για κάθε* $x\in[a,+\infty)$.
[β] *Αν* $\int_a^{+\infty}(f(x))^p dx<+\infty$, $\int_a^{+\infty}(g(x))^p dx<+\infty$, *αποδείξτε την ανισότητα του Minkowski για γεν. ολοκληρώματα:*

$$\Big(\int_a^{+\infty}(f(x)+g(x))^p\,dx\Big)^{1/p}\leq\Big(\int_a^{+\infty}(f(x))^p\,dx\Big)^{1/p}+\Big(\int_a^{+\infty}(g(x))^p\,dx\Big)^{1/p}.$$

Αποδείξτε ότι η ανισότητα του Minkowski ισχύει ως ισότητα αν και μόνο αν υπάρχουν $s,t\geq 0$ *όχι και οι δύο ίσοι με* 0 *ώστε να ισχύει* $sf(x)=tg(x)$ *για κάθε* $x\in[a,+\infty)$.

Υπόδειξη: Εφαρμόστε το αποτέλεσμα της άσκησης 6.4.18. Για το τελευταίο ερώτημα πρέπει να προσαρμόσετε το αντίστοιχο μέρος της λύσης της άσκησης 6.4.18.

Άσκηση 12.3.1. *Έστω* $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ *με τύπο* $f(x)=\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ *αν* $x\in[n-1,n)$ *για κάποιον* $n\in\mathbb{N}$. *Αποδείξτε ότι το* $\int_0^{+\infty}f(x)\,dx$ *συγκλίνει υπό συνθήκη.*

Λύση: Για κάθε $c \geq 1$ ισχύει

$$\int_0^c |f(x)|\,dx = \int_0^{[c]} |f(x)|\,dx + \int_{[c]}^c |f(x)|\,dx = \sum_{k=1}^{[c]} \frac{1}{k} + \int_{[c]}^c \frac{1}{[c]+1}\,dx = \sum_{k=1}^{[c]} \frac{1}{k} + \frac{c-[c]}{[c]+1}.$$

Αν $c \to +\infty$, τότε $[c] \to +\infty$ και, επειδή $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty$, ο πρώτος όρος του τελευταίου αθροίσματος αποκλίνει στο $+\infty$. Τέλος, επειδή $\frac{c-[c]}{[c]+1} \to 0$ (αφού $0 \leq c-[c] < 1$), έχουμε ότι $\int_0^{+\infty} |f(x)|\,dx = +\infty$.
Ομοίως,

$$\int_0^c f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{[c]} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \int_{[c]}^c \frac{(-1)^{[c]}}{[c]+1}\,dx = \sum_{k=1}^{[c]} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \frac{(-1)^{[c]}(c-[c])}{[c]+1}.$$

Τώρα, επειδή η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ συγκλίνει, ο πρώτος όρος του τελευταίου αθροίσματος συγκλίνει όταν $c \to +\infty$ και, επίσης, $\frac{(-1)^{[c]}(c-[c])}{[c]+1} \to 0$. Άρα το $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει.

Άσκηση 12.3.2. *Αποδείξτε ότι το $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx$ συγκλίνει απολύτως.*

Υπόδειξη: Ισχύει $|\frac{\cos x}{1+x^2}| \leq \frac{1}{1+x^2}$ για κάθε x.

Άσκηση 12.3.3. *Αποδείξτε ότι, αν $p > 1$, το $\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}\,dx$ συγκλίνει απολύτως ενώ, αν $0 < p \leq 1$, το ίδιο γεν. ολοκλήρωμα συγκλίνει υπό συνθήκη.*

Λύση: Αν $p > 0$, τότε

$$\int_\pi^{+\infty} |\tfrac{\sin x}{x^p}|\,dx \leq \int_\pi^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx \begin{cases} < +\infty, & \text{αν } p > 1 \\ = +\infty, & \text{αν } 0 < p \leq 1 \end{cases}.$$

Αν $p > 0$, τότε

$$\int_\pi^c \frac{\sin x}{x^p}\,dx = -\int_\pi^c \frac{\cos' x}{x^p}\,dx = -\frac{\cos c}{c^p} - \frac{1}{\pi^p} - p\int_\pi^c \frac{\cos x}{x^{p+1}}\,dx.$$

Τώρα, έχουμε ότι $\lim_{c\to+\infty} \frac{\cos c}{c^p} = 0$. Επίσης, το γεν. ολοκλήρωμα $\int_\pi^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{p+1}}\,dx$ συγκλίνει, αφού συγκλίνει απολύτως:

$$\int_\pi^{+\infty} |\tfrac{\cos x}{x^{p+1}}|\,dx \leq \int_\pi^{+\infty} \frac{1}{x^{p+1}}\,dx < +\infty.$$

Άρα το $\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}\,dx$ συγκλίνει.
Το ότι το $\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}\,dx$ συγκλίνει αν $p > 0$ αποδεικνύεται και με άλλον τρόπο: η συνάρτηση $\frac{1}{x^p}$ είναι φθίνουσα στο $[\pi, +\infty)$ και έχει όριο ίσο με 0 στο $+\infty$ και, επίσης, η συνάρτηση $\int_\pi^x \sin t\,dt = \cos\pi - \cos x$ είναι φραγμένη στο $[\pi, +\infty)$.

Άσκηση 12.3.4. *Αποδείξτε ότι τα $\int_1^{+\infty} \frac{x\sin x}{1+x+x^2}\,dx$, $\int_1^{+\infty} \frac{x\cos(x^2)}{1+\log x}\,dx$ συγκλίνουν υπό συνθήκη.*

Υπόδειξη: Για το πρώτο ολοκλήρωμα δείτε ότι η $\frac{x}{1+x+x^2}$ είναι φθίνουσα στο $[1, +\infty)$ και τείνει στον 0 στο $+\infty$ και ότι η $\int_1^x \sin t\,dt$ είναι φραγμένη στο $[1, +\infty)$.
Για το δεύτερο ολοκλήρωμα δείτε ότι η $\int_1^x t\cos(t^2)\,dt$ είναι φραγμένη στο $[1, +\infty)$.

Άσκηση 12.3.5. *Έστω ρητή συνάρτηση $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, όπου τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ δεν έχουν κοινούς διαιρέτες.*
Αποδείξτε ότι το $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,dx$ συγκλίνει αν και μόνο αν το $Q(x)$ δεν έχει καμία πραγματική ρίζα και $\deg Q(x) \geq \deg P(x) + 2$.

Λύση: Το πρώτο ερώτημα. Έστω ότι το $Q(x)$ δεν έχει καμία πραγματική ρίζα και $\deg Q(x) \geq \deg P(x) + 2$.
Τότε η $R(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και τα $\lim_{x\to\pm\infty}(x^2+1)R(x)$ υπάρχουν και είναι αριθμοί. Άρα η συνάρτηση $(x^2+1)R(x)$ είναι φραγμένη στο $\mathbb{R}$, οπότε υπάρχει $M \geq 0$ ώστε να ισχύει $|R(x)| \leq \frac{M}{x^2+1}$ για κάθε x και άρα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |R(x)|\,dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{M}{x^2+1}\,dx < +\infty.$$

Επομένως, το $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,dx$ συγκλίνει (απολύτως).
Αντιστρόφως, έστω ότι το $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,dx$ συγκλίνει.
Αν το $Q(x)$ έχει κάποια πραγματική ρίζα x_0 με πολλαπλότητα $k \geq 1$, τότε το $P(x)$ δεν έχει την ίδια ρίζα, οπότε $P(x_0) \neq 0$, και, επίσης, έχουμε $Q(x) = (x - x_0)^k Q_1(x)$, όπου $Q_1(x)$ είναι πολυώνυμο με $Q_1(x_0) \neq 0$. Αν $\frac{P(x_0)}{Q_1(x_0)} > 0$, τότε συνεπάγεται ότι

$$\lim_{x \to x_0+}(x - x_0)^k R(x) = \frac{P(x_0)}{Q_1(x_0)} > 0,$$

οπότε υπάρχουν $m > 0$ και $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $R(x) \geq \frac{m}{(x-x_0)^k}$ για κάθε $x \in (x_0, x_0 + \delta]$. Επομένως,

$$\int_{x_0}^{x_0+\delta} R(x)\,dx \geq \int_{x_0}^{x_0+\delta} \frac{m}{(x-x_0)^k}\,dx = +\infty.$$

Άρα το $Q(x)$ δεν έχει καμία πραγματική ρίζα. Το ίδιο συμπέρασμα βρίσκουμε αν $\frac{P(x_0)}{Q_1(x_0)} < 0$.
Αν $\deg Q(x) \leq \deg P(x) + 1$, τότε το $\lim_{x\to+\infty} xR(x)$ υπάρχει και είναι $\neq 0$. Αν αυτό το όριο είναι > 0, τότε υπάρχουν $m > 0$ και $N > 0$ ώστε να ισχύει $R(x) \geq \frac{m}{x}$ για κάθε $x \geq N$. Συνεπάγεται

$$\int_N^{+\infty} R(x)\,dx \geq \int_N^{+\infty} \frac{m}{x}\,dx = +\infty.$$

Άρα $\deg Q(x) \geq \deg P(x) + 2$. Το ίδιο αποτέλεσμα προκύπτει αν $\lim_{x\to+\infty} xR(x) < 0$.

Άσκηση 12.3.6. *Δείτε την άσκηση 7.3.16.*
Έστω ότι η $\phi : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ έχει μονότονη παράγωγο και συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $[a, +\infty)$ και ότι $\lim_{x\to+\infty} \phi'(x) = +\infty$. Αποδείξτε ότι το $\int_a^{+\infty} \sin(\phi(x))\,dx$ συγκλίνει.

Λύση: Επειδή $\lim_{x\to+\infty} \phi'(x) = +\infty$, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $N > a$ ώστε να ισχύει $\phi'(x) > \frac{8}{\epsilon}$ για κάθε $x > N$. Τότε, σύμφωνα με το αποτέλεσμα της άσκησης 7.3.16, για κάθε x', x'' με $N < x' < x''$ ισχύει

$$\Big|\int_{x'}^{x''} \sin(\phi(x))\,dx\Big| \leq \frac{4}{8/\epsilon} < \epsilon.$$

Από το κριτήριο του Cauchy συνεπάγεται ότι το $\int_a^{+\infty} \sin(\phi(x))\,dx$ συγκλίνει.
Ακόμη πιο απλά, μπορούμε να πάρουμε κάποιον $b > a$ ώστε να ισχύει $\phi'(x) > 0$ για κάθε x στο $[b, +\infty)$ και να γράψουμε

$$\int_a^{+\infty} \sin(\phi(x))\,dx = \int_a^b \sin(\phi(x))\,dx + \int_b^{+\infty} \frac{\phi'(x)\sin(\phi(x))}{\phi'(x)}\,dx.$$

Τώρα, το $\int_b^{+\infty} \frac{\phi'(x)\sin(\phi(x))}{\phi'(x)}\,dx$ συγκλίνει διότι η $\frac{1}{\phi'(x)}$ είναι φθίνουσα στο $[b, +\infty)$ και τείνει στον 0 στο $+\infty$ και η $\int_b^x \phi'(x)\sin(\phi(x))\,dx = \cos(\phi(b)) - \cos(\phi(x))$ είναι φραγμένη στο $[b, +\infty)$.

Άσκηση 12.3.8. [β] *Έστω $f, f_n : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ για κάθε n και $g : [a, +\infty) \to [0, +\infty)$. Υποθέτουμε ότι ισχύει $|f_n(x)| \leq g(x)$ για κάθε $x \in [a, +\infty)$, ότι για κάθε $c > a$ η (f_n) συγκλίνει στην f ομοιόμορφα στο $[a, c]$ και ότι το $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ συγκλίνει. Αποδείξτε ότι το $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει και ότι $\int_a^{+\infty} f_n(x)\,dx \to \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$.*

Λύση: Έστω $x \geq a$. Θεωρούμε c ώστε $x \in [a, c]$ (πχ τον $c = x$) και τότε, επειδή η (f_n) συγκλίνει στην f ομοιόμορφα στο $[a, c]$, έχουμε ότι $f_n(x) \to f(x)$. Τώρα, από την σχέση $|f_n(x)| \leq g(x)$ συνεπάγεται $|f(x)| \leq g(x)$. Έχουμε, λοιπόν, ότι ισχύει $|f(x)| \leq g(x)$ για κάθε $x \in [a, +\infty)$ και άρα

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx \leq \int_a^{+\infty} g(x)\,dx < +\infty.$$

Επομένως, το $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει (απολύτως).
Επειδή $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx < +\infty$, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $N \geq a$ ώστε

$$\int_N^{+\infty} g(x)\,dx < \frac{\epsilon}{4}. \tag{14.319}$$

Επειδή η (f_n) συγκλίνει στην f ομοιόμορφα στο $[a,N]$, έχουμε ότι $\int_a^N f_n(x)\,dx \to \int_a^N f(x)\,dx$ και άρα υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει

$$\left|\int_a^N f_n(x)\,dx - \int_a^N f(x)\,dx\right| < \tfrac{\epsilon}{2} \qquad \text{για κάθε } n \geq n_0. \tag{14.320}$$

Από τις (14.319) και (14.320) συνεπάγεται

$$\begin{aligned}\left|\int_a^{+\infty} f_n(x)\,dx - \int_a^{+\infty} f(x)\,dx\right| &\leq \left|\int_a^N f_n(x)\,dx - \int_a^N f(x)\,dx\right| \\ &\quad + \left|\int_N^{+\infty} f_n(x)\,dx\right| + \left|\int_N^{+\infty} f(x)\,dx\right| \\ &< \tfrac{\epsilon}{2} + \int_N^{+\infty} |f_n(x)|\,dx + \int_N^{+\infty} |f(x)|\,dx \\ &\leq \tfrac{\epsilon}{2} + \int_N^{+\infty} g(x)\,dx + \int_N^{+\infty} g(x)\,dx \\ &< \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{4} + \tfrac{\epsilon}{4} = \epsilon \qquad \text{για κάθε } n \geq n_0.\end{aligned}$$

Άρα $\int_a^{+\infty} f_n(x)\,dx \to \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Άσκηση 12.3.9. *Έστω ότι η $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[0,1]$, ότι $f(0)=0$ και ότι η f είναι παραγωγίσιμη στον 0. Αποδείξτε ότι το $\int_0^1 f(x)x^{-\frac{3}{2}}\,dx$ συγκλίνει απολύτως.*

Υπόδειξη: Μελετήστε το όριο $\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)}{x}$ και αποδείξτε ότι ισχύει $|f(x)|\leq Mx$ στο $(0,1]$ για κάποιον $M\geq 0$. Συγκρίνατε με το γεν. ολοκλήρωμα $\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}\,dx$.

Άσκηση 12.3.10. *Για ποιές τιμές του p το $\int_0^{+\infty}\frac{\sin(\sqrt{x})}{x+p^2x^2}\,dx$ συγκλίνει είτε απολύτως είτε υπό συνθήκη;*

Λύση: Το ολοκλήρωμα είναι γενικευμένο διότι, αφ' ενός το διάστημα $[0,+\infty)$ δεν είναι φραγμένο, αφ' ετέρου το όριο της συνάρτησης είναι $+\infty$ στον 0:

$$\lim_{x\to 0+}\tfrac{\sin(\sqrt{x})}{x+p^2x^2} = \lim_{x\to 0+}\tfrac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,\tfrac{\sqrt{x}}{x}\,\tfrac{1}{1+p^2x} = +\infty.$$

Επιλέγουμε έναν οποιονδήποτε θετικό αριθμό, πχ τον 1, και ελέγχουμε πρώτα το $\int_0^1\frac{|\sin(\sqrt{x})|}{x+p^2x^2}\,dx$. Έχουμε

$$\int_0^1\tfrac{|\sin(\sqrt{x})|}{x+p^2x^2}\,dx \leq \int_0^1\tfrac{\sqrt{x}}{x}\,dx = \int_0^1\tfrac{1}{\sqrt{x}}\,dx < +\infty.$$

Για το $\int_1^{+\infty}\frac{|\sin(\sqrt{x})|}{x+p^2x^2}\,dx$ διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.
Αν $p=0$, τότε, με αλλαγή μεταβλητής $x=t^2$, παίρνουμε

$$\int_1^N\tfrac{|\sin(\sqrt{x})|}{x}\,dx = 2\int_1^{\sqrt{N}}\tfrac{|\sin t|}{t}\,dt \to +\infty$$

όταν $N\to+\infty$, διότι γνωρίζουμε ότι $\int_1^{+\infty}\frac{|\sin t|}{t}\,dt = +\infty$.
Άρα

$$\int_1^{+\infty}\tfrac{|\sin(\sqrt{x})|}{x}\,dx = +\infty$$

και, επομένως, το ολοκλήρωμα δεν συγκλίνει απολύτως αν $p=0$.
Αν $p\neq 0$, τότε

$$\int_1^{+\infty}\tfrac{|\sin(\sqrt{x})|}{x+p^2x^2}\,dx \leq \int_1^{+\infty}\tfrac{1}{p^2x^2}\,dx = \tfrac{1}{p^2}\int_1^{+\infty}\tfrac{1}{x^2}\,dx < +\infty,$$

οπότε το ολοκλήρωμα συγκλίνει απολύτως όταν $p\neq 0$.
Άρα το αρχικό ολοκλήρωμα συγκλίνει απολύτως αν $p\neq 0$ και δεν συγκλίνει απολύτως αν $p=0$.
Η μόνη τιμή του p για την οποία το ολοκλήρωμα μπορεί να συγκλίνει υπό συνθήκη είναι η $p=0$.
Κάνοντας την ίδια αλλαγή μεταβλητής έχουμε

$$\int_1^N\tfrac{\sin(\sqrt{x})}{x}\,dx = 2\int_1^{\sqrt{N}}\tfrac{\sin t}{t}\,dt$$

το οποίο συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό όταν $N \to +\infty$, διότι το $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$ συγκλίνει.
Άρα το $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\sqrt{x})}{x}\, dx$ συγκλίνει και, επομένως, το αρχικό ολοκλήρωμα συγκλίνει υπό συνθήκη.

Άσκηση 12.3.11. *Αποδείξτε ότι το* $\int_1^{+\infty} \frac{x-[x]-(1/2)}{x^p}\, dx$ *συγκλίνει για κάθε* $p > 0$.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το τελευταίο αποτέλεσμα της άσκησης 6.4.10 και το ότι, αν $p > 0$, τότε η $\frac{1}{x^p}$ είναι φθίνουσα στο $[1, +\infty)$ με όριο ίσο με 0 στο $+\infty$.

Άσκηση 12.3.13. *Έστω* $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ *συνεχείς στο* $[a, +\infty)$ *και* $p, q > 1$ *με* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
[α] Αν $\int_a^{+\infty} |f(x)|^p\, dx < +\infty$ *και* $\int_a^{+\infty} |g(x)|^q\, dx < +\infty$, *αποδείξτε ότι το* $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\, dx$ *συγκλίνει απολύτως και ότι ισχύει η ανισότητα του Hölder για γενικευμένα ολοκληρώματα:*

$$\Big| \int_a^{+\infty} f(x)g(x)\, dx\Big| \leq \Big(\int_a^{+\infty} |f(x)|^p\, dx\Big)^{1/p} \Big(\int_a^{+\infty} |g(x)|^q\, dx\Big)^{1/q}.$$

Ειδική περίπτωση είναι η ανισότητα των Schwarz, Buniakowsky:

$$\Big| \int_a^{+\infty} f(x)g(x)\, dx\Big| \leq \Big(\int_a^{+\infty} |f(x)|^2\, dx\Big)^{1/2} \Big(\int_a^{+\infty} |g(x)|^2\, dx\Big)^{1/2}.$$

Αποδείξτε ότι η ανισότητα του Hölder ισχύει ως ισότητα αν και μόνο αν υπάρχουν $s, t \geq 0$ *όχι και οι δύο ίσοι με* 0 *ώστε να ισχύει* $s|f(x)|^p = t|g(x)|^q$ *για κάθε* $x \in [a, +\infty)$ *και είτε* $f(x)g(x) \geq 0$ *για κάθε* $x \in [a, +\infty)$ *είτε* $f(x)g(x) \leq 0$ *για κάθε* $x \in [a, +\infty)$.
[β] *Αν* $\int_a^{+\infty} |f(x)|^p dx < +\infty$, $\int_a^{+\infty} |g(x)|^p dx < +\infty$, *αποδείξτε την ανισότητα του Minkowski για γενικευμένα ολοκληρώματα:*

$$\Big(\int_a^{+\infty} |f(x) + g(x)|^p\, dx\Big)^{1/p} \leq \Big(\int_a^{+\infty} |f(x)|^p\, dx\Big)^{1/p} + \Big(\int_a^{+\infty} |g(x)|^p\, dx\Big)^{1/p}.$$

Αποδείξτε ότι η ανισότητα του Minkowski ισχύει ως ισότητα αν και μόνο αν υπάρχουν $s, t \geq 0$ *όχι και οι δύο ίσοι με* 0 *ώστε να ισχύει* $s|f(x)| = t|g(x)|$ *για κάθε* $x \in [a, +\infty)$ *και είτε* $f(x)g(x) \geq 0$ *για κάθε* $x \in [a, +\infty)$ *είτε* $f(x)g(x) \leq 0$ *για κάθε* $x \in [a, +\infty)$.

Υπόδειξη: Άσκηση 12.2.9.

Άσκηση 12.3.14. *Έστω* $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ *και* $w : [a, +\infty) \to (0, +\infty)$ *ώστε* $\int_a^{+\infty} w(x)\, dx = 1$ *και ώστε να έχει τιμή το* $\int_a^{+\infty} f(x)w(x)\, dx$. *Συμβολίζουμε* $E_w(f; a, +\infty) = \int_a^{+\infty} f(x)w(x)\, dx$.
Αποδείξτε την εξής γενικευμένη ανισότητα του Jensen. Έστω $f : [a, +\infty) \to (c, d)$ *συνεχής στο* $[a, +\infty)$ *και* $g : (c, d) \to \mathbb{R}$ *κυρτή στο* (c, d). *Έστω, επίσης,* $w : [a, +\infty) \to (0, +\infty)$ *συνεχής στο* $[a, +\infty)$ *ώστε* $\int_a^{+\infty} w(x)\, dx = 1$. *Αν το* $E_w(f; a, +\infty) = \int_a^{+\infty} f(x)w(x)\, dx$ *είναι αριθμός, αποδείξτε ότι* $g\big(E_w(f; a, +\infty)\big) \leq E_w(g \circ f; a, +\infty)$ *ή, ισοδύναμα,*

$$g\Big(\int_a^{+\infty} f(x)w(x)\, dx\Big) \leq \int_a^{+\infty} g(f(x))w(x)\, dx.$$

Αν η g *είναι κοίλη στο* (c, d), *τότε ισχύει η αντίστροφη της ανισότητας αυτής.*
Αν η g *είναι, επιπλέον, γνησίως κυρτή (κοίλη) στο* (c, d), *αποδείξτε ότι η ανισότητα Jensen ισχύει ως ισότητα αν και μόνο αν η* f *είναι σταθερή στο* $[a, +\infty)$.

Λύση: Προσαρμόστε τη λύση της άσκησης 6.4.19.

Άσκηση 12.4.1. *Θεωρήστε το* $\int_0^{+\infty} e^{-y^2} \cos(2xy)\, dy$ *με παράμετρο* x.
Αποδείξτε ότι το γεν. ολοκλήρωμα συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $g(x)$ *ομοιόμορφα στο* $\mathbb{R}$. *Δηλαδή,* $\int_0^{+\infty} e^{-y^2} \cos(2xy)\, dy \overset{\text{ομ}}{=} g(x)$ *στο* $\mathbb{R}$.
Αποδείξτε ότι η $g(x)$ *είναι παραγωγίσιμη στο* $\mathbb{R}$ *και ότι ισχύει* $g'(x) + 2xg(x) = 0$ *για κάθε* x. *Κατόπιν, αποδείξτε ότι ισχύει* $g(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-x^2}$ *για κάθε* x.

Λύση: Το πρώτο ερώτημα. Ισχύει $|e^{-y^2} \cos(2xy)| \leq e^{-y^2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επειδή η συνάρτηση e^{-y^2} δεν εξαρτάται από τον x και $\int_0^{+\infty} e^{-y^2}\, dy < +\infty$, συνεπάγεται από το θεώρημα 12.7 ότι το γεν. ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} e^{-y^2} \cos(2xy)\, dy$ συγκλίνει σε μια συνάρτηση $g(x)$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

Το δεύτερο ερώτημα. Τώρα έχουμε

$$\big|\tfrac{\partial}{\partial x}(e^{-y^2}\cos(2xy))\big| = 2ye^{-y^2}|\sin(2xy)| \leq 2ye^{-y^2} \qquad \text{για κάθε } y \in [0,+\infty) \text{ και κάθε } x$$

και

$$\int_0^{+\infty} 2ye^{-y^2}\,dy = -\int_0^{+\infty} \tfrac{d}{dy}e^{-y^2}\,dy = 1 - \lim_{y\to+\infty} e^{-y^2} = 1.$$

Άρα το γεν. ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x}(e^{-y^2}\cos(2xy))\,dy$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $h(x)$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.
Τώρα, από το θεώρημα 12.6 συνεπάγεται ότι

$$g'(x) = h(x) = \int_0^{+\infty} \tfrac{\partial}{\partial x}(e^{-y^2}\cos(2xy))\,dy = -2\int_0^{+\infty} ye^{-y^2}\sin(2xy)\,dy \qquad \text{για κάθε } x$$

και άρα

$$\begin{aligned} g'(x) &= \int_0^{+\infty} \tfrac{d}{dy}e^{-y^2}\sin(2xy)\,dy = \lim_{y\to+\infty} e^{-y^2}\sin(2xy) - \int_0^{+\infty} e^{-y^2}\tfrac{d}{dy}\sin(2xy)\,dy \\ &= -2x\int_0^{+\infty} e^{-y^2}\cos(2xy)\,dy = -2xg(x) \qquad \text{για κάθε } x. \end{aligned}$$

Επομένως, η συνάρτηση $g(x)$ ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση $g'(x)+2xg(x)=0$ για κάθε x. Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση με τον παράγοντα e^{x^2}, βρίσκουμε ότι ισχύει $\frac{d}{dx}(e^{x^2}g(x)) = 0$ για κάθε x, οπότε υπάρχει σταθερά c ώστε να ισχύει $e^{x^2}g(x) = c$ για κάθε x. Με $x=0$ έχουμε ότι

$$c = g(0) = \int_0^{+\infty} e^{-y^2}\,dy = \tfrac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Άρα ισχύει $g(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-x^2}$ για κάθε x.

Άσκηση 12.4.3. *Με βάση το $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$, αποδείξτε ότι $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x\cos x}{x}\,dx = \frac{\pi}{4}$.*

Υπόδειξη: Ισχύει $\sin(2x) = 2\sin x\cos x$ για κάθε x. Κάντε αλλαγή μεταβλητής.

Άσκηση 12.4.4. *Θεωρήστε το $\int_0^{+\infty} \frac{1}{y^2+1}\frac{\sin(xy)}{y}\,dy$ με παράμετρο $x \geq 0$.*
Αποδείξτε ότι το γεν. ολοκλήρωμα συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $g(x)$ κατά σημείο στο $[0,+\infty)$. Δηλαδή, $\int_0^{+\infty} \frac{1}{y^2+1}\frac{\sin(xy)}{y}\,dy \overset{\kappa.\sigma.}{=} g(x)$ στο $[0,+\infty)$.
Αποδείξτε ότι, για κάθε $a>0$, το γεν. ολοκλήρωμα συγκλίνει στην $g(x)$ ομοιόμορφα στο $[0,a]$. Δηλαδή, $\int_0^{+\infty} \frac{1}{y^2+1}\frac{\sin(xy)}{y}\,dy \overset{o\mu}{=} g(x)$ στο $[0,a]$ για κάθε $a>0$.
Αποδείξτε ότι η $g(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$.

Λύση: Το πρώτο ερώτημα. Για κάθε $x \geq 0$ ισχύει

$$\int_0^{+\infty} \big|\tfrac{1}{y^2+1}\tfrac{\sin(xy)}{y}\big|\,dy \leq x\int_0^{+\infty} \tfrac{1}{y^2+1}\,dy < +\infty.$$

Άρα το $\int_0^{+\infty} \frac{1}{y^2+1}\frac{\sin(xy)}{y}\,dy$ συγκλίνει (απολύτως) για κάθε $x \geq 0$ και ορίζει συνάρτηση στο $[0,+\infty)$ με τύπο

$$g(x) = \int_0^{+\infty} \tfrac{1}{y^2+1}\tfrac{\sin(xy)}{y}\,dy \qquad \text{για κάθε } x \in [0,+\infty).$$

Το δεύτερο ερώτημα. Έστω τυχών $a>0$. Για κάθε $x \in [0,a]$ ισχύει $|\frac{1}{y^2+1}\frac{\sin(xy)}{y}| \leq \frac{x}{y^2+1} \leq \frac{a}{y^2+1}$ για κάθε $y \in [0,+\infty)$. Επειδή $\int_0^{+\infty} \frac{a}{y^2+1}\,dy < +\infty$, συνεπάγεται ότι το $\int_0^{+\infty} \frac{1}{y^2+1}\frac{\sin(xy)}{y}\,dy$ συγκλίνει στην $g(x)$ ομοιόμορφα στο $[0,a]$.
Το τρίτο ερώτημα. Για κάθε $x \in [0,+\infty)$ ισχύει

$$\big|\tfrac{\partial}{\partial x}\big(\tfrac{1}{y^2+1}\tfrac{\sin(xy)}{y}\big)\big| = \tfrac{1}{y^2+1}|\cos(xy)| \leq \tfrac{1}{y^2+1} \qquad \text{για κάθε } y \in (0,+\infty).$$

Επειδή $\int_0^{+\infty} \frac{1}{y^2+1}\, dy < +\infty$, συνεπάγεται ότι το $\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x}\big(\frac{1}{y^2+1}\frac{\sin(xy)}{y}\big)\, dy$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $h(x)$ ομοιόμορφα στο $[0,+\infty)$, ότι η $g(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ και ότι ισχύει $g'(x) = h(x)$ για κάθε $x \in [0,+\infty)$. Δηλαδή, ισχύει

$$g'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x}\big(\frac{1}{y^2+1}\frac{\sin(xy)}{y}\big)\, dy = \int_0^{+\infty} \frac{1}{y^2+1}\cos(xy)\, dy \qquad \text{για κάθε } x \in [0,+\infty).$$

Άσκηση 12.4.5. *Έστω $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ φραγμένη στο $[0,+\infty)$ με $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$. Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-y} f(xy)\, dy = l$.*

Λύση: Επειδή η f είναι φραγμένη, υπάρχει $M > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x)-l| \leq M$ για κάθε $x \geq 0$.
Έστω τυχών $\epsilon > 0$.
Επειδή $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$, υπάρχει $N > 0$ ώστε να ισχύει

$$|f(x) - l| < \tfrac{\epsilon}{2} \qquad \text{για κάθε } x > N. \tag{14.321}$$

Ακόμη, είναι

$$\int_0^{+\infty} e^{-y}\, dy = 1. \tag{14.322}$$

Τώρα, από τις (14.321) και (14.322) συνεπάγεται ότι για $x > \frac{2MN}{\epsilon}$ ισχύει

$$\begin{aligned}
\big|\int_0^{+\infty} e^{-y} f(xy)\, dy - l\big| &\leq \int_0^{+\infty} e^{-y}|f(xy) - l|\, dy = \tfrac{1}{x}\int_0^{+\infty} e^{-y/x}|f(y) - l|\, dy \\
&= \tfrac{1}{x}\int_0^{N} e^{-y/x}|f(y) - l|\, dy + \tfrac{1}{x}\int_N^{+\infty} e^{-y/x}|f(y) - l|\, dy \\
&\leq \tfrac{M}{x}\int_0^{N} e^{-y/x}\, dy + \tfrac{\epsilon}{2x}\int_N^{+\infty} e^{-y/x}\, dy \\
&\leq M(1 - e^{-N/x}) + \tfrac{\epsilon}{2x}\int_0^{+\infty} e^{-y/x}\, dy \\
&= \tfrac{MN}{x} + \tfrac{\epsilon}{2} < \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Άρα $\lim_{x\to+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-y} f(xy)\, dy = l$.

Άσκηση 12.4.7. *Αποδείξτε ότι το $\int_2^{+\infty} \frac{\cos y}{y+\sin x}\, dy$ με παράμετρο x συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.*

Λύση: Γράφουμε

$$\int_2^{y} \frac{\cos t}{t+\sin x}\, dt = \int_2^{y} \frac{\sin' t}{t+\sin x}\, dt = \frac{\sin y}{y+\sin x} - \frac{\sin 2}{2+\sin x} + \int_2^{y} \frac{\sin t}{(t+\sin x)^2}\, dt. \tag{14.323}$$

Τώρα, ισχύει $\big|\frac{\sin t}{(t+\sin x)^2}\big| \leq \frac{1}{(t-1)^2}$ για κάθε $t \in [2,+\infty)$ και κάθε x. Η συνάρτηση $\frac{1}{(t-1)^2}$ δεν εξαρτάται από τον x και

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{(t-1)^2}\, dt < +\infty.$$

Άρα το $\int_2^{+\infty} \frac{\sin y}{(y+\sin x)^2}\, dy$ ως συνάρτηση του x συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $g(x)$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.
Επίσης, η $\frac{\sin y}{y+\sin x} - \frac{\sin 2}{2+\sin x}$ ως συνάρτηση του x συγκλίνει (όταν $y \to +\infty$) στην $-\frac{\sin 2}{2+\sin x}$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$. Πράγματι, ισχύει

$$\big|\big(\frac{\sin y}{y+\sin x} - \frac{\sin 2}{2+\sin x}\big) + \frac{\sin 2}{2+\sin x}\big| \leq \frac{1}{y+\sin x} \leq \frac{1}{y-1} \qquad \text{για κάθε } x$$

και $\frac{1}{y-1} \to 0$ όταν $y \to +\infty$.
Επομένως, από την (14.323) συνεπάγεται ότι το $\int_2^{+\infty} \frac{\cos y}{y+\sin x}\, dy$ ως συνάρτηση του x συγκλίνει στη συνάρτηση $-\frac{\sin 2}{2+\sin x} + g(x)$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

Άσκηση 12.4.8. [α] *Έστω η $f : [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{y^2}, & \text{αν } 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ -\frac{1}{x^2}, & \text{αν } 0 \leq y < x \leq 1 \end{cases}$*
Αποδείξτε ότι $\int_0^1 \big(\int_0^1 f(x,y)\, dy\big)\, dx \neq \int_0^1 \big(\int_0^1 f(x,y)\, dx\big)\, dy$.

[β] *Έστω* $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ *συνεχής στο* $[a,b]\times[c,d]$. *Γνωρίζουμε ότι η* $\int_c^d f(x,y)\,dy$ *είναι, ως συνάρτηση του* x, *συνεχής στο* $[a,b]$. *Άρα ορίζεται το* $\int_a^b \big(\int_c^d f(x,y)\,dy\big)\,dx$. *"Συμμετρικά", η* $\int_a^b f(x,y)\,dx$ *είναι, ως συνάρτηση του* y, *συνεχής στο* $[c,d]$. *Άρα ορίζεται το* $\int_c^d \big(\int_a^b f(x,y)\,dx\big)\,dy$. *Αποδείξτε ότι*

$$\int_a^b \big(\int_c^d f(x,y)\,dy\big)\,dx=\int_c^d \big(\int_a^b f(x,y)\,dx\big)\,dy.$$

[γ] *Έστω* $f:[a,b]\times[c,+\infty)\to\mathbb{R}$ *συνεχής στο* $[a,b]\times[c,+\infty)$ *και έστω ότι το* $\int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy$ *συγκλίνει ομοιόμορφα στο* $[a,b]$. *Γνωρίζουμε ότι η* $\int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy$ *είναι, ως συνάρτηση του* x, *συνεχής στο* $[a,b]$. *Άρα ορίζεται το* $\int_a^b \big(\int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy\big)\,dx$. *"Συμμετρικά", η* $\int_a^b f(x,y)\,dx$ *είναι, ως συνάρτηση του* y, *συνεχής στο* $[c,+\infty)$. *Αποδείξτε ότι το* $\int_c^{+\infty} \big(\int_a^b f(x,y)\,dx\big)\,dy$ *συγκλίνει και ότι*

$$\int_a^b \big(\int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy\big)\,dx=\int_c^{+\infty} \big(\int_a^b f(x,y)\,dx\big)\,dy.$$

[δ] *Αν* $0<a<b$, *αποδείξτε ότι* $\int_a^b \big(\int_0^{+\infty} e^{-xy}\,dy\big)\,dx=\int_0^{+\infty} \big(\int_a^b e^{-xy}\,dx\big)\,dy$.
Υπολογίστε το $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ay}-e^{-by}}{y}\,dy$.

Λύση: [α] Είναι

$$\begin{aligned}\int_0^1 \big(\int_0^1 f(x,y)\,dy\big)\,dx&=\int_0^1 \big(\int_0^x f(x,y)\,dy+\int_x^1 f(x,y)\,dy\big)\,dx\\&=\int_0^1 \big(-\tfrac{1}{x^2}x+\int_x^1 \tfrac{1}{y^2}\,dy\big)\,dx=\int_0^1 \big(-\tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{x}-1\big)\,dx=-1.\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\int_0^1 \big(\int_0^1 f(x,y)\,dx\big)\,dy&=\int_0^1 \big(\int_0^y f(x,y)\,dx+\int_y^1 f(x,y)\,dx\big)\,dy\\&=\int_0^1 \big(\tfrac{1}{y^2}y-\int_y^1 \tfrac{1}{x^2}\,dx\big)\,dy=\int_0^1 \big(\tfrac{1}{y}-\tfrac{1}{y}+1\big)\,dx=1.\end{aligned}$$

[β] Έστω $\epsilon>0$. Η f είναι συνεχής και, επομένως, ομοιόμορφα συνεχής στο $[a,b]\times[c,d]$, οπότε υπάρχει $\delta>0$ ώστε να ισχύει

$$\big|f(x',y')-f(x'',y'')\big|<\tfrac{\epsilon}{4(b-a+1)(d-c+1)} \tag{14.324}$$

για κάθε $(x',y'),(x'',y'')\in[a,b]\times[c,d]$ με $|(x',y')-(x'',y'')|<\delta$.
Θεωρούμε διαμέριση $\{a=x_0,\dots,x_n=b\}$ του $[a,b]$ και διαμέριση $\{c=y_0,\dots,y_m=d\}$ του $[c,d]$ ώστε κάθε υποδιάστημα και των δύο διαμερίσεων να έχει μήκος $<\frac{\delta}{\sqrt{2}}$. Τότε, αν πάρουμε δύο σημεία $(x',y'),(x'',y'')$ στο ίδιο ορθογώνιο $[x_{k-1},x_k]\times[y_{l-1},y_l]$ αυτά έχουν απόσταση $<\delta$ το ένα από το άλλο, οπότε ισχύει η (14.324).
Τώρα, για κάθε $x\in[a,b]$ έχουμε

$$\begin{aligned}&\big|\int_c^d f(x,y)\,dy-\textstyle\sum_{l=1}^m f(x,y_l)(y_l-y_{l-1})\big|\\&\qquad=\big|\textstyle\sum_{l=1}^m\int_{y_{l-1}}^{y_l} f(x,y)\,dy-\sum_{l=1}^m f(x,y_l)(y_l-y_{l-1})\big|\\&\qquad=\big|\textstyle\sum_{l=1}^m\big(\int_{y_{l-1}}^{y_l} f(x,y)\,dy-f(x,y_l)(y_l-y_{l-1})\big)\big|\\&\qquad=\big|\textstyle\sum_{l=1}^m\int_{y_{l-1}}^{y_l}(f(x,y)-f(x,y_l))\,dy\big|\\&\qquad\le\textstyle\sum_{l=1}^m\int_{y_{l-1}}^{y_l}|f(x,y)-f(x,y_l)|\,dy\\&\qquad\le\textstyle\sum_{l=1}^m\frac{\epsilon}{4(b-a+1)(d-c+1)}(y_l-y_{l-1})=\frac{\epsilon(d-c)}{4(b-a+1)(d-c+1)}<\frac{\epsilon}{4(b-a+1)}.\end{aligned}$$

Από αυτήν την ανισότητα συνεπάγεται

$$\begin{aligned}&\big|\int_a^b\big(\int_c^d f(x,y)\,dy\big)\,dx-\textstyle\sum_{l=1}^m\int_a^b f(x,y_l)\,dx(y_l-y_{l-1})\big|\\&\qquad=\big|\int_a^b\big(\int_c^d f(x,y)\,dy\big)\,dx-\int_a^b\big(\textstyle\sum_{l=1}^m f(x,y_l)(y_l-y_{l-1})\big)\,dx\big|\\&\qquad\le\int_a^b\big|\int_c^d f(x,y)\,dy-\textstyle\sum_{l=1}^m\int_a^b f(x,y_l)(y_l-y_{l-1})\big|\,dx\\&\qquad\le\tfrac{\epsilon(b-a)}{4(b-a+1)}<\tfrac{\epsilon}{4}.\end{aligned} \tag{14.325}$$

Κατόπιν, για κάθε $l = 1, \dots, m$ έχουμε

$$\begin{aligned}
&\big| \int_a^b f(x,y_l)\,dx - \sum_{k=1}^n f(x_k,y_l)(x_k - x_{k-1})\big| \\
&\qquad = \big| \sum_{k=1}^n \int_{xk-1}^{x_k} f(x,y_l)\,dx - \sum_{k=1}^n f(x_k,y_l)(x_k - x_{k-1})\big| \\
&\qquad = \big| \sum_{k=1}^n \int_{xk-1}^{x_k} (f(x,y_l) - f(x_k,y_l))\,dx\big| \\
&\qquad \le \sum_{k=1}^n \int_{xk-1}^{x_k} |f(x,y_l) - f(x_k,y_l)|\,dx \\
&\qquad \le \sum_{k=1}^n \tfrac{\epsilon}{4(b-a+1)(d-c+1)}(x_k - x_{k-1}) \\
&\qquad = \tfrac{\epsilon(b-a)}{4(b-a+1)(d-c+1)} < \tfrac{\epsilon}{4(d-c+1)}.
\end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζουμε την τελευταία ανισότητα με $y_l - y_{l-1}$ και προσθέτουμε για $l = 1, \dots, m$ και βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned}
&\big| \sum_{l=1}^m \int_a^b f(x,y_l)\,dx(y_l - y_{l-1}) - \sum_{l=1}^m \big(\sum_{k=1}^n f(x_k,y_l)(x_k - x_{k-1})\big)(y_l - y_{l-1})\big| \\
&\qquad \le \sum_{l=1}^m \big| \int_a^b f(x,y_l)\,dx - \sum_{k=1}^n f(x_k,y_l)(x_k - x_{k-1})\big|(y_l - y_{l-1}) \\
&\qquad < \sum_{l=1}^m \tfrac{\epsilon}{4(d-c+1)}(y_l - y_{l-1}) = \tfrac{\epsilon(d-c)}{4(d-c+1)} < \tfrac{\epsilon}{4}.
\end{aligned} \tag{14.326}$$

Από τις (14.325) και (14.326) συνεπάγεται

$$\big| \int_a^b \big(\int_c^d f(x,y)\,dy\big)\,dx - \sum_{l=1}^m \big(\sum_{k=1}^n f(x_k,y_l)(x_k - x_{k-1})\big)(y_l - y_{l-1})\big| < \tfrac{\epsilon}{2}. \tag{14.327}$$

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι

$$\big| \int_c^d \big(\int_a^b f(x,y)\,dx\big)\,dy - \sum_{k=1}^n \big(\sum_{l=1}^m f(x_k,y_l)(y_l - y_{l-1})\big)(x_k - x_{k-1})\big| < \tfrac{\epsilon}{2}. \tag{14.328}$$

Επειδή τα δύο διπλά αθροίσματα που εμφανίζονται στις (14.327) και (14.328) είναι ίσα, έχουμε

$$\big| \int_a^b \big(\int_c^d f(x,y)\,dy\big)\,dx - \int_c^d \big(\int_a^b f(x,y)\,dx\big)\,dy\big| < \epsilon.$$

Αυτό ισχύει για κάθε $\epsilon > 0$, οπότε $\int_a^b \big(\int_c^d f(x,y)\,dy\big)\,dx = \int_c^d \big(\int_a^b f(x,y)\,dx\big)\,dy$.
[γ] Λόγω ομοιόμορφης σύγκλισης του $\int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy$ στο $[a,b]$, συνεπάγεται

$$\int_a^b \big(\int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy\big)dx = \int_a^b \big(\lim_{d\to+\infty} \int_c^d f(x,y)\,dy\big)dx = \lim_{d\to+\infty} \int_a^b \big(\int_c^d f(x,y)\,dy\big)\,dx.$$

Τώρα, από το αποτέλεσμα του [β] έχουμε

$$\int_a^b \big(\int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy\big)\,dx = \lim_{d\to+\infty} \int_c^d \big(\int_a^b f(x,y)\,dx\big)\,dy = \int_c^{+\infty} \big(\int_a^b f(x,y)\,dx\big)\,dy.$$

[δ] Επειδή ισχύει $|e^{-xy}| = e^{-xy} \le e^{-ay}$ για κάθε $y \in [0,+\infty)$ και κάθε $x \in [a,b]$ και επειδή $\int_0^{+\infty} e^{-ay}\,dy < +\infty$, συνεπάγεται ότι το $\int_0^{+\infty} e^{-xy}\,dy$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[a,b]$. Άρα από το αποτέλεσμα του [γ] έχουμε ότι

$$\int_a^b \big(\int_0^{+\infty} e^{-xy}\,dy\big)\,dx = \int_0^{+\infty} \big(\int_a^b e^{-xy}\,dx\big)\,dy.$$

Επειδή $\int_a^b e^{-xy}\,dx = \frac{e^{-ay}-e^{-by}}{y}$ και $\int_0^{+\infty} e^{-xy}\,dy = \frac{1}{x}$ συμπεραίνουμε ότι

$$\int_0^{+\infty} \tfrac{e^{-ay}-e^{-by}}{y}\,dy = \int_a^b \tfrac{1}{x}\,dx = \log\tfrac{b}{a}.$$

Άσκηση 12.4.9. [α] *Αποδείξτε ότι το* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x\sin y)\,dy$ *με παράμετρο* x *συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση* $g(x)$ *ομοιόμορφα στο* $\mathbb{R}$*, ότι η* $g(x)$ *είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο* $\mathbb{R}$ *και ότι είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης* $xz'' + z' + xz = 0$ *στο* $\mathbb{R}$.
[β] *Αποδείξτε ότι το* $\int_0^{+\infty} e^{-xy}\frac{1}{y+1}\,dy$ *με παράμετρο* x *συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση* $g(x)$ *κατά σημείο στο* $(0,+\infty)$ *και ομοιόμορφα στο* $[a,+\infty)$ *για κάθε* $a > 0$*. Τέλος, αποδείξτε ότι η* $g(x)$

είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ *και ότι είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης* $-xz'+xz=1$ *στο* $(0,+\infty)$.

Λύση: [α] Από το θεώρημα 12.4 έχουμε ότι

$$g'(x)=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin y\sin(x\sin y)\,dy,\qquad g''(x)=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin y)^2\cos(x\sin y)\,dy.$$

Τώρα, είναι

$$g'(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos' y\sin(x\sin y)\,dy=-x\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos y)^2\cos(x\sin y)\,dy$$

και

$$xg''(x)+xg(x)=x\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-(\sin y)^2)\cos(x\sin y)\,dy=x\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos y)^2\cos(x\sin y)\,dy.$$

Άρα ισχύει $xg''(x)+g'(x)+xg(x)=0$ για κάθε x.
[β] Για κάθε $x>0$ έχουμε

$$\int_0^{+\infty}|e^{-xy}\tfrac{1}{y+1}|\,dy=\int_0^{+\infty}e^{-xy}\tfrac{1}{y+1}\,dy\leq\int_0^{+\infty}e^{-xy}\,dy<+\infty$$

οπότε το $\int_0^{+\infty}e^{-xy}\frac{1}{y+1}\,dy$ συγκλίνει και ορίζει συνάρτηση με τύπο

$$g(x)=\int_0^{+\infty}e^{-xy}\tfrac{1}{y+1}\,dy\qquad\text{για } x\in(0,+\infty).$$

Αν $x\in[a,+\infty)$, τότε ισχύει $|e^{-xy}\frac{1}{y+1}|=e^{-xy}\frac{1}{y+1}\leq e^{-ay}$ για κάθε $y\in[0,+\infty)$ και, επειδή $\int_0^{+\infty}e^{-ay}\,dy<+\infty$, το $\int_0^{+\infty}e^{-xy}\frac{1}{y+1}\,dy$ συγκλίνει στην $g(x)$ ομοιόμορφα στο $[a,+\infty)$.
Επίσης, για $x\in[a,+\infty)$ έχουμε ότι $|\frac{\partial}{\partial x}(e^{-xy}\frac{1}{y+1})|=e^{-xy}\frac{y}{y+1}\leq e^{-ay}$ για κάθε $y\in[0,+\infty)$ και, όπως πριν, $\int_0^{+\infty}e^{-ay}\,dy<+\infty$. Άρα το $\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial x}(e^{-xy}\frac{1}{y+1})\,dy$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση $h(x)$ ομοιόμορφα στο $[a,+\infty)$.
Επομένως, η $g(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $[a,+\infty)$ και ισχύει

$$g'(x)=h(x)=\int_0^{+\infty}\tfrac{\partial}{\partial x}(e^{-xy}\tfrac{1}{y+1})\,dy=-\int_0^{+\infty}e^{-xy}\tfrac{y}{y+1}\,dy\qquad\text{για } x\in[a,+\infty).$$

Θεωρούμε, τώρα, τυχοντα $x_0>0$ και παίρνουμε a_0 ώστε $0<a_0<x_0$. Η $g(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $[a_0,+\infty)$ και άρα είναι παραγωγίσμη στον x_0 με $g'(x_0)=h(x_0)$. Άρα η $g(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει

$$g'(x)=-\int_0^{+\infty}e^{-xy}\tfrac{y}{y+1}\,dy\qquad\text{για } x\in(0,+\infty).$$

Τέλος, έχουμε ότι

$$-xg'(x)+xg(x)=\int_0^{+\infty}xe^{-xy}\big(\tfrac{y}{y+1}+\tfrac{1}{y+1}\big)\,dy=\int_0^{+\infty}xe^{-xy}\,dy=1\qquad\text{για } x\in(0,+\infty).$$

Άσκηση 12.4.11. *Θεωρήστε το* $\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\arctan(xt)\arctan(yt)}{t^2}\,dt$ *με δύο παραμέτρους* $x,y>0$.
Αποδείξτε ότι το γεν. ολοκλήρωμα συγκλίνει σε κάποια $g(x,y)$ *κατά σημείο στο* $(0,+\infty)\times(0,+\infty)$.
Αποδείξτε ότι η $g(x,y)$ *είναι παραγωγίσιμη και ως προς τις δύο μεταβλητές και ότι η μικτή παράγωγος της* g *είναι* $\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2t^2)(1+y^2t^2)}\,dt=\frac{1}{x+y}$ *για κάθε* $x,y>0$.
Αποδείξτε ότι ισχύει $g(x,y)=(x+y)\log(x+y)-x\log x-y\log y$ *για κάθε* $x,y>0$.

Υπόδειξη: Για την κατά σημείο σύγκλιση θεωρήστε τον $z=\max\{x,y\}>0$, χωρίστε το $(0,+\infty)$ σε $(0,\frac{1}{z}]$ και $[\frac{1}{z},+\infty)$ και χρησιμοποιήστε τις ανισότητες $\arctan(xt)\leq\arctan(zt)\leq zt$ και $\arctan(yt)\leq\arctan(zt)\leq zt$ για $0<t\leq\frac{1}{z}$ και $\arctan(xt)\leq\frac{\pi}{2}$ και $\arctan(yt)\leq\frac{\pi}{2}$ για $\frac{1}{z}\leq t<+\infty$.

Αποδείξτε ομοιόμορφες συγκλίσεις για $(x, y) \in [0, a] \times [0, a]$ για τυχόντα $a > 0$, χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα με $z = a$.

Άσκηση 12.4.12. *Έστω διάστημα I, $f, g : I \times [c, +\infty) \to \mathbb{R}$ και $F(x, y) = \int_c^y f(x, t)\, dt$ για κάθε $x \in I$ και $y \in [c, +\infty)$ και έστω ότι οι f, $\frac{\partial g}{\partial y}$ είναι συνεχείς στο $I \times [c, +\infty)$.*
[α] Αν για κάθε $x \in I$ η $g(x, y)$ είναι, ως συνάρτηση του y, φθίνουσα στο $[c, +\infty)$, αν ισχύει $\lim_{y\to+\infty} g(x, y) = 0$ ομοιόμορφα στο I και αν η F είναι φραγμένη στο $I \times [c, +\infty)$, αποδείξτε ότι το $\int_c^{+\infty} f(x, y)g(x, y)\, dy$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο I.
[β] Αν για κάθε $x \in I$ η $g(x, y)$ είναι, ως συνάρτηση του y, φθίνουσα στο $[c, +\infty)$, αν η $g(x, y)$ είναι κάτω φραγμένη στο $I \times [c, +\infty)$ και αν το $\int_c^{+\infty} f(x, y)\, dy$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο I, αποδείξτε ότι το $\int_c^{+\infty} f(x, y)g(x, y)\, dy$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο I.

Υπόδειξη: Προσαρμόστε την απόδειξη του θεωρήματος 12.2.

Άσκηση 12.5.1. *Αποδείξτε ότι $\int_0^1 (\log \frac{1}{y})^{x-1}\, dy = \Gamma(x)$ για κάθε $x > 0$.*

Υπόδειξη: Κάντε μια απλή αλλαγή μεταβλητής.

Άσκηση 12.5.2. *Στην απόδειξη της πρότασης 12.15 υπάρχει η ανισότητα $\Gamma''(x)\Gamma(x) \geq (\Gamma'(x))^2$ η οποία είναι ισοδύναμη με την κυρτότητα της $\log \Gamma(x)$. Αποδείξτε την ανισότητα αυτή με δεύτερο τρόπο χρησιμοποιώντας την ανισότητα των Schwarz, Buniakowsky της άσκησης 12.3.13.*

Υπόδειξη: Γράψτε $y^{x-1}(\log y)e^{-y} = y^{\frac{x-1}{2}} e^{-\frac{y}{2}}\, y^{\frac{x-1}{2}} (\log y)e^{-\frac{y}{2}}$.

Άσκηση 12.5.3. *Χρησιμοποιώντας το ολοκλήρωμα του Gauss, $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, και κάνοντας κατάλληλη αλλαγή μεταβλητής αποδείξτε ότι $\Gamma\big(\frac{1}{2}\big) = \sqrt{\pi}$. Αποδείξτε ότι $\Gamma\big(n + \frac{1}{2}\big) = \frac{(2n)!}{4^n n!}\sqrt{\pi}$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$.*

Υπόδειξη: Για το δεύτερο ερώτημα χρησιμοποιήστε την $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$ για $x > 0$.

Άσκηση 12.5.4. *Σε όλα τα επόμενα υποθέτουμε ότι $x > 1$.*
Αποδείξτε ότι, αν $a > 0$, τότε η $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-ny}y^{x-1}$ συγκλίνει, ως σειρά συναρτήσεων του y, ομοιόμορφα στη συνάρτηση $\frac{y^{x-1}}{e^y-1}$ στο $[a, +\infty)$.
Αποδείξτε ότι $\int_a^b \frac{y^{x-1}}{e^y-1}\, dy = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b e^{-ny}y^{x-1}\, dy \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-ny}y^{x-1}\, dy$, αν $0 < a < b < +\infty$. Να συμπεράνετε ότι $\int_0^{+\infty} \frac{y^{x-1}}{e^y-1}\, dy \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-ny}y^{x-1}\, dy$.
Αποδείξτε ότι για κάθε n ισχύει $\sum_{k=1}^{n} \int_0^{+\infty} e^{-ky}y^{x-1}\, dy \leq \int_0^{+\infty} \frac{y^{x-1}}{e^y-1}\, dy$. Να συμπεράνετε ότι $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-ny}y^{x-1}\, dy \leq \int_0^{+\infty} \frac{y^{x-1}}{e^y-1}\, dy$.
Από τα προηγούμενα συνεπάγεται ότι $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-ny}y^{x-1}\, dy = \int_0^{+\infty} \frac{y^{x-1}}{e^y-1}\, dy$ για κάθε $x > 1$.
Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ αποδείξτε ότι $\int_0^{+\infty} e^{-ny}y^{x-1}\, dy = \frac{\Gamma(x)}{n^x}$.
Συνέχεια των ασκήσεων 12.4.2, 12.3.7. Αποδείξτε ότι $\zeta(x)\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \frac{y^{x-1}}{e^y-1}\, dy$ για κάθε $x > 1$.

Υπόδειξη: Το πρώτο ερώτημα. Αν $n \geq \frac{x-1}{a}$, η $y^{x-1}e^{-ny}$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του y στο $[a, +\infty)$. Άρα, αν $n \geq \frac{x-1}{a}$, ισχύει

$$\Big| \sum_{k=1}^{n} e^{-ky}y^{x-1} - \frac{y^{x-1}}{e^y-1} \Big| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} e^{-ky}y^{x-1} = \frac{y^{x-1}e^{-ny}}{e^y-1} \leq \frac{a^{x-1}e^{-na}}{e^a-1}$$

για κάθε $y \in [a, +\infty)$.
Εναλλακτικά, μπορούμε να εφαρμόσουμε το κριτήριο του Weierstrass. Εύκολα βλέπουμε ότι η συνάρτηση (του y) $e^{-ny}y^{x-1}$ είναι αύξουσα στο $[0, \frac{x-1}{n}]$ και φθίνουσα στο $[\frac{x-1}{n}, +\infty)$. Άρα η $e^{-ny}y^{x-1}$ έχει μέγιστη τιμή στον $\frac{x-1}{n}$ και άρα ισχύει

$$|e^{-ny}y^{x-1}| \leq e^{-n\frac{x-1}{n}} \big(\tfrac{x-1}{n}\big)^{x-1} = e^{1-x}(x-1)^{x-1}\frac{1}{n^{x-1}} \qquad \text{για κάθε } n.$$

Όμως, η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{x-1}}$ αποκλίνει όταν $0<x\leq 1$ και δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε το κριτήριο του Weierstrass για ομοιόμορφη σύγκλιση στο $(0,+\infty)$. Τώρα, παρατηρούμε ότι, αν $n\geq\frac{x-1}{a}$, τότε η $e^{-ny}y^{x-1}$ έχει μέγιστη τιμή στο $[a,+\infty)$ στο σημείο a ίση με $e^{-na}a^{x-1}$. Παίρνουμε $n_0=[\frac{x-1}{a}]+1$ και τότε έχουμε $\sum_{n=n_0}^{+\infty}e^{-na}a^{x-1}<+\infty$. Άρα η $\sum_{n=n_0}^{+\infty}e^{-ny}y^{x-1}$ και, επομένως, και η $\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-ny}y^{x-1}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[a,+\infty)$.

Το τρίτο ερώτημα. $\sum_{k=1}^{n}e^{-ky}y^{x-1}\leq\frac{y^{x-1}}{e^y-1}$.

Άσκηση 12.5.5. *Αποδείξτε ότι* $\int_0^n y^{x-1}(1-\frac{y}{n})^n\,dy\to\Gamma(x)$ *για κάθε* $x>0$.

Λύση: Έστω $x>0$.
Ισχύει

$$y^{x-1}\big(1-\tfrac{y}{n}\big)^n\leq y^{x-1}e^{-\frac{y}{n}n}=y^{x-1}e^{-y}\qquad\text{για κάθε } y>0 \text{ και κάθε } n. \tag{14.329}$$

Τώρα, έστω τυχών $\epsilon>0$.
Επειδή $\int_0^{+\infty}y^{x-1}e^{-y}\,dy<+\infty$, υπάρχει $a>0$ ώστε να ισχύει

$$\int_a^{+\infty}y^{x-1}e^{-y}\,dy<\tfrac{\epsilon}{4}. \tag{14.330}$$

Έχουμε ότι $y^{x-1}\big(1-\frac{y}{n}\big)^n\to y^{x-1}e^{-y}$ ομοιόμορφα στο $[0,a]$. Πράγματι, για $n\geq 2a$ έχουμε ότι $\frac{y}{n}\leq\frac{1}{2}$ για κάθε $y\in[0,a]$ και άρα

$$\begin{aligned}\big|y^{x-1}\big(1-\tfrac{y}{n}\big)^n-y^{x-1}e^{-y}\big|&=y^{x-1}\big|e^{n\log(1-(y/n))}-e^{-y}\big|=y^{x-1}e^{-y}\big(1-e^{y+n\log(1-(y/n))}\big)\\&\leq y^{x-1}e^{-y}\big(1-e^{-y^2/n}\big)\leq y^{x-1}e^{-y}\tfrac{y^2}{n}\leq\tfrac{a^{x+1}}{n}\qquad\text{για } y\in[0,a].\end{aligned}$$

Από την ομοιόμορφη σύγκλιση στο $[0,a]$ συνεπάγεται ότι $\int_0^a y^{x-1}(1-\frac{y}{n})^n\,dy\to\int_0^a y^{x-1}e^{-y}\,dy$. Άρα υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει

$$\big|\int_0^a y^{x-1}(1-\tfrac{y}{n})^n\,dy-\int_0^a y^{x-1}e^{-y}\,dy\big|<\tfrac{\epsilon}{2}\qquad\text{για κάθε } n\geq n_0.$$

Από την τελευταία σχέση και από τις (14.329) και (14.330) συνεπάγεται

$$\begin{aligned}&\big|\int_0^{+\infty}y^{x-1}(1-\tfrac{y}{n})^n\,dy-\int_0^{+\infty}y^{x-1}e^{-y}\,dy\big|\\&\quad\leq\big|\int_0^a y^{x-1}(1-\tfrac{y}{n})^n\,dy-\int_0^a y^{x-1}e^{-y}\,dy\big|+\int_0^a y^{x-1}(1-\tfrac{y}{n})^n\,dy+\int_0^a y^{x-1}e^{-y}\,dy\\&\quad\leq\big|\int_0^a y^{x-1}(1-\tfrac{y}{n})^n\,dy-\int_0^a y^{x-1}e^{-y}\,dy\big|+\int_0^a y^{x-1}e^{-y}\,dy+\int_0^a y^{x-1}e^{-y}\,dy\\&\quad<\tfrac{\epsilon}{2}+\tfrac{\epsilon}{4}+\tfrac{\epsilon}{4}=\epsilon\qquad\text{για κάθε } n\geq n_0.\end{aligned}$$

Άρα $\int_0^n y^{x-1}(1-\frac{y}{n})^n\,dy\to\int_0^{+\infty}y^{x-1}e^{-y}\,dy=\Gamma(x)$.

Άσκηση 12.5.6. *Έστω* $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ *με τις εξής ιδιότητες:* (i) *ισχύει* $f(x)>0$ *για κάθε* $x\in(0,+\infty)$, (ii) $f(1)=1$, (iii) *ισχύει* $f(x+1)=xf(x)$ *για κάθε* $x\in(0,+\infty)$ *και* (iv) *η* $\log f$ *είναι κυρτή στο* $(0,+\infty)$.
Αποδείξτε ότι $\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}\to f(x)$ *για κάθε* $x\in(0,+\infty)$.
Συμπεράνατε ότι μια συνάρτηση f *με τις παραπάνω ιδιότητες είναι μοναδική και, επειδή η* Γ *έχει τις ιδιότητες αυτές, ισχύει* $f=\Gamma$ *και έχουμε αυτομάτως μια δεύτερη απόδειξη του τύπου του Gauss της άσκησης 12.5.5.*

Λύση: Έστω $0<x\leq 1$. Από τις (ii), (iii) είναι $f(n)=(n-1)!$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Αν $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, τότε $-1+n<n<x+n\leq 1+n$, οπότε από την (iv) είναι

$$\tfrac{(\log f)(-1+n)-(\log f)(n)}{-1}\leq\tfrac{(\log f)(x+n)-(\log f)(n)}{x}\leq\tfrac{(\log f)(1+n)-(\log f)(n)}{1}.$$

Μετά από πράξεις, $(n-1)^x(n-1)!\leq f(x+n)\leq n^x(n-1)!$, και από την (iii)

$$\tfrac{(n-1)^x(n-1)!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}\leq f(x)\leq\tfrac{n^x(n-1)!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}.$$

Άρα $\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} \to f(x)$ για κάθε $x \in (0,1]$. Από την (iii) εύκολα προκύπτει το ίδιο όριο για $x \in (1,2]$, μετά για $x \in (2,3]$ κ.τ.λ.

Άσκηση 12.5.7. *Αποδείξτε ότι ισχύει* $\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(n+x)}$ *για κάθε* $x > 0$*, όπου* $\gamma = \lim_{n\to+\infty}(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n)$ *είναι η σταθερά του Euler στις ασκήσεις 2.4.6, 6.4.11 και 7.3.20.*

Λύση: Πρώτος τρόπος. Έστω $0 < x \le 1$ και $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$. Επειδή $n < x + n \le 1 + n$ και η $\log\Gamma$ είναι κυρτή στο $(0 + \infty)$, είναι

$$\tfrac{(\log\Gamma)(n)-(\log\Gamma)(x+n)}{-x} \le (\log\Gamma)'(x+n) \le \tfrac{(\log\Gamma)(1+n)-(\log\Gamma)(x+n)}{1-x}.$$

Μετά από πράξεις,

$$\tfrac{1}{x}\log\tfrac{\Gamma(x+n)}{(n-1)!} \le \tfrac{\Gamma'(x+n)}{\Gamma(x+n)} \le \tfrac{1}{1-x}\log\tfrac{n!}{\Gamma(x+n)},$$

οπότε

$$\tfrac{1}{x}\log\tfrac{\Gamma(x)x(x+1)\cdots(x+n-1)}{(n-1)!} \le \tfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} + \tfrac{1}{x} + \tfrac{1}{x+1} + \cdots + \tfrac{1}{x+n-1} \le \tfrac{1}{1-x}\log\tfrac{n!}{\Gamma(x)x(x+1)\cdots(x+n-1)}$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Gauss της άσκησης 12.5.5, βρίσκουμε

$$\log n - (\tfrac{1}{x} + \tfrac{1}{x+1} + \cdots + \tfrac{1}{x+n}) \to \tfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$$

οπότε

$$(\log n - 1 - \tfrac{1}{2} - \cdots - \tfrac{1}{n}) - \tfrac{1}{x} + (1 - \tfrac{1}{x+1}) + (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{x+2}) + \cdots + (\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{x+n}) \to \tfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$$

οπότε

$$\tfrac{x}{x+1} + \tfrac{x}{2(x+2)} + \cdots + \tfrac{x}{n(x+n)} \to \tfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} + \gamma + \tfrac{1}{x}.$$

Άρα $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(n+x)} = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} + \gamma + \frac{1}{x}$. Αυτό επεκτείνεται εύκολα για $x \in (1,2]$, $x \in (2,3]$ κ.τ.λ.
Δεύτερος τρόπος. Παραγωγίστε τον τελευταίο τύπο της άσκησης 12.5.5 σύμφωνα με όσα γνωρίζουμε για σειρές συναρτήσεων.

Ευρετήριο