ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΧΩΡΙΚΕΣ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ

4.1 Εισαγωγή

Στην ανάλυση χρονοσειρών θεωρείται ότι το εξεταζόμενο δείγμα είναι αποτέλεσμα από την πραγματοποίηση κάποιας στοχαστικής διαδικασίας (*stochastic process*). Κατ' αντίστοιχο τρόπο, στα χωρικά δεδομένα το δείγμα προέρχεται από κάποια χωρική στοχαστική διαδικασία (*spatial stochastic process*). Όμως, οι χωρικές διαδικασίες είναι πιο σύνθετες από τις διαδικασίες των χρονοσειρών διότι η εξάρτηση στο χώρο ορίζεται προς πολλές κατευθύνσεις και ο δείκτης της διαδικασίας αποτελείται από γεωγραφικές συντεταγμένες. Οι επόμενοι ορισμοί προέρχονται από τους Schabenberger και Gotway (2005).

Με τον όρο χωρική στοχαστική διαδικασία εννοείται ένα διατεταγμένο σύνολο τυχαίων μεταβλητών που διατάσσονται σύμφωνα με τα στοιχεία του συνόλου $D \subset \mathrm{R}^d$ που περιλαμβάνει τις χωρικές συντεταγμένες $\mathbf{s} = [s_1, s_2, \ldots, s_d]'$, δηλαδή $\left\{Z(\mathbf{s}) : \mathbf{s} \in D \subset \mathrm{R}^d\right\}$. Όταν η διάσταση του d στο σύνολο των δεικτών είναι μεγαλύτερη του 1 τότε η στοχαστική διαδικασία ονομάζεται τυχαίο πεδίο (*random field*). Στην ανάλυση χωρικών δεδομένων συνήθως ισχύει ότι d = 2 διότι γίνεται αναφορά σε γεωγραφικές συντεταγμένες στο επίπεδο. Οι δείκτες στο σύνολο d μπορεί να είναι συνεχείς όταν αναφέρονται σε γεωγραφικές συντεταγμένες σημείων στο χώρο ή διακριτοί όταν αναφέρονται στις συντεταγμένες επάνω σε ένα ομαλό πλέγμα (*regular grid*) ή σε αύξοντες αριθμούς περιοχών (Arbia, 2006). Ως στοχαστική διαδικασία, η $Z(\mathbf{s})$ θα μπορούσε να ερμηνευθεί σαν η τιμή ενός χαρακτηριστικού Z στο σημείο του χώρου $\mathbf{s}$ που προέρχεται από την εκτέλεση ενός τυχαίου πειράματος. Δηλαδή, η $Z(\mathbf{s})$ είναι στην πραγματικότητα μια τυχαία συνάρτηση.

Όπως για κάθε στοχαστική διαδικασία έτσι και στις χωρικές διαδικασίες ορίζεται η έννοια της στασιμότητας. Η στασιμότητα διακρίνεται στην αυστηρή στασιμότητα και στην ασθενή στασιμότητα. Ειδικότερα, ένα τυχαίο πεδίο $\left\{Z(\mathbf{s}) : \mathbf{s} \in D \subset \mathrm{R}^d\right\}$ θα ονομάζεται αυστηρά στάσιμο (*strict stationary*) όταν για τη χωρική κατανομή του ισχύει:

$$\mathrm{P}\left(Z\left(\mathbf{s}_1\right)<z_1, Z\left(\mathbf{s}_2\right)<z_2,\ldots,Z\left(\mathbf{s}_k\right)<z_k\right)=$$
$$\mathrm{P}\left(Z\left(\mathbf{s}_1+\mathbf{h}\right)<z_1, Z\left(\mathbf{s}_2+\mathbf{h}\right)<z_2,\ldots,Z\left(\mathbf{s}_k+\mathbf{h}\right)<z_k\right),\quad \forall\, k \text{ και } \forall\, \mathbf{h}\in D$$

που σημαίνει ότι η χωρική κατανομή παραμένει ίδια σε κάθε μετατόπιση των χωρικών συντεταγμένων. Επειδή στο χώρο η σχέση εξάρτησης είναι προς πολλές κατευθύνσεις τυπικά για να είναι αυστηρά στάσιμο το πεδίο θα πρέπει να ισχύει και η υπόθεση της ισοτροπίας (*isotropy*). Η υπόθεση αυτή συνεπάγεται ότι η χωρική κατανομή δεν μεταβάλλεται όταν αλλάζει η κατεύθυνση όπως, παραδείγματος χάριν, όταν πραγματοποιείται περιστροφή των συντεταγμένων. Η αυστηρή στασιμότητα σπάνια συναντάται στις πρακτικές εφαρμογές και είναι δύσκολο να ελεγχθεί οπότε συνήθως θεωρείται η ασθενής στασιμότητα που αναφέρεται μόνο στις δύο πρώτες ροπές της κατανομής.

Το τυχαίο πεδίο θα ονομάζεται ασθενώς στάσιμο (*weak stationary*) ή στάσιμο β τάξης (*second order stationary*) όταν ισχύει:

$$\mathrm{E}\left[Z\left(\mathbf{s}\right)\right]=\mu,\quad \forall\, \mathbf{s}\in D$$

$$\mathrm{Var}\left[Z\left(\mathbf{s}\right)\right]=\sigma^2,\quad \forall\, \mathbf{s}\in D$$

$$\mathrm{Cov}\left[Z\left(\mathbf{s}\right),\ Z\left(\mathbf{s}+\mathbf{h}\right)\right]=C\left(\mathbf{h}\right),\quad \forall\, \mathbf{s},\mathbf{h}\in D$$

Επομένως, εφόσον ισχύει η ασθενής στασιμότητα η χωρική διαδικασία θα έχει σταθερή μέση τιμή, σταθερή διακύμανση και συνδιακύμανση για κάθε σημείο στο χώρο που εξαρτάται μόνο από την απόστασή τους και όχι από τις γεωγραφικές συντεταγμένες καθ’ αυτές. Αντίστοιχα, απαραίτητη είναι η υπόθεση της ισοτροπίας για τις ροπές που δεν θα πρέπει να εξαρτώνται από την κατεύθυνση στο χώρο.

Στη συνέχεια παρουσιάζονται συνοπτικά οι πιο βασικές χωρικές στοχαστικές διαδικασίες που συναντιούνται συχνότερα στη χωρική οικονομετρία και που θα χρησιμοποιηθούν στην ανάλυση των επόμενων κεφαλαίων. Οι διαδικασίες αυτές είναι η χωρική διαδικασία λευκού θόρυβου (*Spatial White Noise*), η χωρική αυτοπαλίνδρομη διαδικασία πρώτης τάξης (*Spatial Autoregressive Process*–SAR(1)) και η χωρική διαδικασία κινητού μέσου πρώτης τάξης (*Spatial Moving Average Process*–SMA(1)).

4.2 Η χωρική διαδικασία λευκού θορύβου

Η χωρική διαδικασία λευκού θορύβου (*Spatial White Noise*) αποτελεί επέκταση της γνωστής διαδικασίας λευκού θορύβου στις δύο διαστάσεις (Arbia, 2006). Ειδικότερα, ένα τυχαίο πεδίο $\{\varepsilon(\mathbf{s}) : \mathbf{s} \in D\}$ ονομάζεται χωρική διαδικασία λευκού θορύβου αν ισχύουν:

$$\mathrm{E}\left[\varepsilon(\mathbf{s})\right] = 0, \quad \forall\ \mathbf{s} \in D$$

και

$$\mathrm{Cov}\left[\varepsilon(\mathbf{s}_i),\ \varepsilon(\mathbf{s}_j)\right] = \begin{cases} \sigma^2 & \text{για } i = j \\ 0 & \text{για } i \neq j \end{cases}$$

δηλαδή, αν έχει μέση τιμή μηδέν, σταθερή διακύμανση και μηδενικές συνδιακυμάνσεις.

4.3 Η χωρική αυτοπαλίνδρομη διαδικασία πρώτης τάξης

Η χωρική αυτοπαλίνδρομη διαδικασία πρώτης τάξης (*Spatial Autoregressive Process*– SAR(1)) αποτελεί επέκταση της γνωστής από την ανάλυση χρονοσειρών αυτοπαλίνδρομης διαδικασίας AR(1) στις δύο διαστάσεις. Όπως δίνεται στον Arbia (2006), ένα τυχαίο πεδίο $\{Y(\mathbf{s}) : \mathbf{s} \in D\}$ θα ονομάζεται χωρική αυτοπαλίνδρομη διαδικασία πρώτης τάξης εάν παράγεται από το υπόδειγμα:

$$Y(\mathbf{s}_i) - \mu_i = \sum_{i \neq j} \rho_{ij}\left[Y(\mathbf{s}_i) - \mu_j\right] + \varepsilon(\mathbf{s}_i)$$

όπου $\rho_{ij} = \rho w_{ij}$ και $\varepsilon(\mathbf{s}_i)$ είναι μια χωρική διαδικασία λευκού θορύβου. Η διαδικασία αυτή αρχικά παρουσιάστηκε από τον Whittle (1954) και πολλές φορές συναντάται στη βιβλιογραφία και με την ονομασία χωρική ταυτόχρονη αυτοπαλίνδρομη διαδικασία (*Spatial Simultaneous Autoregressive Process*) διότι σε κάθε σημείο του χώρου πραγματοποιούνται ταυτόχρονα πολλές αυτοπαλινδρομήσεις. Συνήθως, στις εργασίες της χωρικής οικονομετρίας η διαδικασία αυτή γράφεται πιο απλά ως:

$$y_i = \rho \sum_{j=1}^{n} w_{ij} y_j + \varepsilon_i$$

όπου έχει γίνει η υπόθεση ότι η μέση τιμή ισούται με μηδέν ή ότι οι παρατηρήσεις εκφράζονται σε αποκλίσεις από το μέσο. Με τον τρόπο αυτό γραφής της διαδικασίας είναι φανερό ότι στη δεξιά πλευρά της ισότητας εμφανίζεται η χωρική υστέρηση της μεταβλητής και αποκαλύπτεται η ομοιότητα της διαδικασίας με την αντίστοιχη της ανάλυσης χρονοσειρών. Δηλαδή, η τιμή της μεταβλητής y σε μια περιοχή i σχηματίζεται ως το γινόμενο ενός σταθμικού μέσου όρου των τιμών της στις γειτονικές περιοχές, όπως αυτές καθορίζονται από το κριτήριο γειτονίας που έχει εφαρμοστεί, επί την τιμή του αυτοπαλίνδρομου όρου ρ συν το τυχαίο σφάλμα. Με τη βοήθεια της άλγεβρας μητρών (LeSage και Pace, 2009) η χωρική αυτοπαλίνδρομη διαδικασία γράφεται ως:

$$\mathbf{y} = \alpha\mathbf{1} + \rho\mathbf{W}\mathbf{y} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

όπου $\mathbf{y}$ είναι το ($n \times 1$) διάνυσμα των παρατηρήσεων της διαδικασίας στα n σημεία του χώρου, α και $\mathbf{1}$ μια παράμετρος και ένα ($n \times 1$) διάνυσμα από μονάδες που περιλαμβάνονται όταν η διαδικασία έχει μη μηδενική μέση τιμή, $\mathbf{W}$ είναι η ($n \times n$) μήτρα χωρικών σταθμίσεων, ρ είναι ο χωρικά αυτοπαλίνδρομος συντελεστής και $\boldsymbol{\varepsilon}$ ένα ($n \times 1$) διάνυσμα με τιμές λευκού θορύβου.

Για λόγους απλοποίησης ας γίνει η υπόθεση ότι η μεταβλητή y έχει μέση τιμή μηδέν οπότε η διαδικασία γράφεται ως:

$$\mathbf{y} = \rho\mathbf{W}\mathbf{y} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

Ισοδύναμα προκύπτει:

$$\mathbf{y} = \rho\mathbf{W}\mathbf{y} + \boldsymbol{\varepsilon} \;\Rightarrow\; \mathbf{y} - \rho\mathbf{W}\mathbf{y} = \boldsymbol{\varepsilon} \;\Rightarrow\; (\mathbf{I} - \rho\mathbf{W})\mathbf{y} = \boldsymbol{\varepsilon}$$

και τελικά

$$\mathbf{y} = (\mathbf{I} - \rho\mathbf{W})^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}$$

Ωστόσο, εάν $|\rho| < 1$ η αντίστροφη μήτρα $(\mathbf{I} - \rho\mathbf{W})^{-1}$ γράφεται ως σειρά απείρων όρων, δηλαδή:

$$(\mathbf{I} - \rho\mathbf{W})^{-1} = \frac{1}{\mathbf{I} - \rho\mathbf{W}} = \mathbf{I} + \rho\mathbf{W} + \rho^2\mathbf{W}^2 + \rho^3\mathbf{W}^3 + \ldots$$

Επομένως:

$$\mathbf{y} = (\mathbf{I} - \rho\mathbf{W})^{-1}\boldsymbol{\varepsilon} \;\Rightarrow\; \mathbf{y} = \left(\mathbf{I} + \rho\mathbf{W} + \rho^2\mathbf{W}^2 + \rho^3\mathbf{W}^3 + \ldots\right)\boldsymbol{\varepsilon}$$

και τελικά:

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{\varepsilon} + \rho\mathbf{W}\boldsymbol{\varepsilon} + \rho^2\mathbf{W}^2\boldsymbol{\varepsilon} + \rho^3\mathbf{W}^3\boldsymbol{\varepsilon} + \ldots$$

Η μήτρα $\mathbf{W}^2$ θα αντανακλά τους γείτονες δεύτερης τάξης (προσοχή, δεν είναι η σωστή μήτρα γειτόνων δεύτερης τάξης όπως έχει παρουσιαστεί αναλυτικά σε προηγούμενο κεφάλαιο).

Στην κύρια διαγώνιο θα έχει θετικά (μη μηδενικά) στοιχεία για κάθε παρατήρηση που έχει έναν τουλάχιστον γείτονα. Κατά συνέπεια, σύμφωνα με τους LeSage και Pace (2009), οι χωρικές υστερήσεις ανωτέρων τάξεων οδηγούν σε συνδετική σχέση για την i παρατήρηση έτσι ώστε παρατηρήσεις από το διάνυσμα $\boldsymbol{\varepsilon}$ να επιστρέφουν πίσω στην i παρατήρηση. Επειδή $|\rho|<1$ η επίδραση των διαταρακτικών όρων $\boldsymbol{\varepsilon}$ από τους γείτονες μεγαλύτερων τάξεων είναι μικρότερη από την επίδραση από τους γείτονες μικρότερων τάξεων. Δηλαδή,

$$|\rho|<1 \;\Rightarrow\; \rho^k \downarrow \;\text{ όταν }\; k\uparrow$$

που σημαίνει ότι η επίδραση θα μειώνεται γεωμετρικά καθώς αυξάνεται η τάξη των γειτόνων.

Η χωρική αυτοπαλίνδρομη διαδικασία πρώτης τάξης έχει μέση τιμή:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[\mathbf{y}] &= \mathrm{E}\left[\boldsymbol{\varepsilon}+\rho\mathbf{W}\boldsymbol{\varepsilon}+\rho^2\mathbf{W}^2\boldsymbol{\varepsilon}+\rho^3\mathbf{W}^3\boldsymbol{\varepsilon}+\ldots\right]\\ &= \mathrm{E}[\boldsymbol{\varepsilon}]+\rho\mathbf{W}\mathrm{E}[\boldsymbol{\varepsilon}]+\rho^2\mathbf{W}^2\mathrm{E}[\boldsymbol{\varepsilon}]+\rho^3\mathbf{W}^3\mathrm{E}[\boldsymbol{\varepsilon}]+\ldots\\ &= \mathbf{0}+\mathbf{0}+\mathbf{0}+\mathbf{0}+\ldots=\mathbf{0}\end{aligned}$$

Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται για την περίπτωση που η διαδικασία έχει μέση τιμή διαφορετική του μηδενός ότι αυτή θα δίνεται από τη σχέση:

$$\mathrm{E}[\mathbf{y}]=\frac{1}{1-\rho}\mathbf{1}\alpha$$

Η εξάρτηση κάθε παρατήρησης y_i με τους διαταρακτικούς όρους των γειτόνων της πρώτης τάξης αλλά και μεγαλύτερων τάξεων περιπλέκει τη δομή της μήτρας διακυμάνσεων – συνδιακυμάνσεων της $\mathbf{y}$ για την οποία (γίνεται και πάλι η υπόθεση για λόγους απλοποίησης ότι η μεταβλητή y έχει μέση τιμή μηδέν) θα ισχύει:

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}[\mathbf{y},\mathbf{y}] = \mathrm{E}\left[\mathbf{y}\mathbf{y}'\right] &= \mathrm{E}\left[(\mathbf{I}-\rho\mathbf{W})^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}\left((\mathbf{I}-\rho\mathbf{W})^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}\right)'\right]\\ &= \mathrm{E}\left[(\mathbf{I}-\rho\mathbf{W})^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}'\left((\mathbf{I}-\rho\mathbf{W})^{-1}\right)'\right]\\ &= (\mathbf{I}-\rho\mathbf{W})^{-1}\mathrm{E}[\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}']\left((\mathbf{I}-\rho\mathbf{W})^{-1}\right)'\\ &= (\mathbf{I}-\rho\mathbf{W})^{-1}\sigma^2\left((\mathbf{I}-\rho\mathbf{W})^{-1}\right)'\\ &= \sigma^2(\mathbf{I}-\rho\mathbf{W})^{-1}(\mathbf{I}-\rho\mathbf{W}')^{-1}\end{aligned}$$

Από τη δομή της μήτρας διακυμάνσεων – συνδιακυμάνσεων της $\mathbf{y}$ μπορεί να διαπιστωθεί ότι οι διαταράξεις (*shocks*) σε μια περιοχή θα επηρεάζουν όλες τις άλλες περιοχές μέσω του χωρικού πολλαπλασιαστή $(\mathbf{I}-\rho\mathbf{W})^{-1}$. Δηλαδή, όλες οι παρατηρήσεις (περιοχές) συσχετίζονται μεταξύ τους ενώ ταυτόχρονα η διακύμανσή τους δεν είναι σταθερή καθώς τα διαγώνια στοιχεία της μήτρας διακυμάνσεων – συνδιακυμάνσεων δεν θα είναι σταθερά.

Στο σημείο αυτό πρέπει να αναφερθεί ότι σε αντίθεση με την αντίστοιχη διαδικασία στην ανάλυση χρονοσειρών το εύρος τιμών του ρ δεν περιορίζεται αναγκαία στο διάστημα (-1, 1). Συγκεκριμένα, για να είναι καλά ορισμένη η χωρική αυτοπαλίνδρομη διαδικασία πρώτης τάξης θα πρέπει η μήτρα $\left(\mathbf{I}-\rho\mathbf{W}\right)$ να είναι μη ιδιάζων (*non – singular*). Ο Ord (1975) έχει δείξει ότι για τις τιμές του ρ πρέπει να ισχύει $\frac{1}{\omega_{\min}} < \rho < \frac{1}{\omega_{\max}}$, όπου $\omega_{\min}$ και $\omega_{\max}$ είναι η μικρότερη και η μεγαλύτερη ιδιοτιμή της μήτρας χωρικών σταθμίσεων $\mathbf{W}$ εφόσον όλες οι ιδιοτιμές της είναι πραγματικές. Όμως, σε μια τυποποιημένη κατά γραμμή μήτρα χωρικών σταθμίσεων η μεγαλύτερη ιδιοτιμή της είναι πάντα +1 κάτι που εξασφαλίζει ότι $\rho < +1$ ενώ για το κάτω όριο δεν υπάρχει κάποια συγκεκριμένη τιμή που συνήθως είναι μικρότερο του -1.

4.4 Η χωρική διαδικασία κινητού μέσου πρώτης τάξης

Ο Arbia (2006) ορίζει ένα τυχαίο πεδίο $\left\{Y\left(\mathbf{s}\right) : \mathbf{s}\in D\right\}$ ως χωρική διαδικασία κινητού μέσου πρώτης τάξης (*Spatial Moving Average Process*–SMA(1)) εάν παράγεται από το υπόδειγμα:

$$Y\left(\mathbf{s}_i\right) = \mu_i + \sum_{i\neq j}\lambda_{ij}\varepsilon\left(\mathbf{s}_j\right) + \varepsilon\left(\mathbf{s}_i\right)$$

όπου $\lambda_{ij} = \lambda w_{ij}$ και $\varepsilon\left(\mathbf{s}_i\right)$ είναι μια χωρική διαδικασία λευκού θορύβου. Η διαδικασία αυτή παρουσιάστηκε αρχικά από τον Haining (1978) και μπορεί να θεωρηθεί ως επέκταση στις δύο διαστάσεις της διαδικασίας κινητού μέσου MA(1) της ανάλυσης χρονοσειρών. Η διαδικασία αυτή μπορεί να γραφεί πιο απλά ως:

$$y_i = \lambda\sum_{j=1}^{n} w_{ij}\varepsilon_j + \varepsilon_i$$

Επομένως, η τιμή της μεταβλητής *y* σε μια περιοχή *i* σχηματίζεται ως το γινόμενο ενός σταθμικού μέσου όρου των τιμών των σφαλμάτων στις γειτονικές περιοχές, όπως αυτές καθορίζονται από το κριτήριο γειτονίας που έχει εφαρμοστεί, επί την τιμή του όρου κινητού μέσου λ συν το τυχαίο σφάλμα.

Χρησιμοποιώντας μήτρες η χωρική διαδικασία κινητού μέσου πρώτης τάξης γράφεται ως:

$$\mathbf{y} = \lambda \mathbf{W}\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

όπου $\mathbf{y}$ είναι το ($n \times 1$) διάνυσμα των παρατηρήσεων, λ είναι ο συντελεστής χωρικού κινητού μέσου, $\mathbf{W}$ η ($n \times n$) μήτρα χωρικών σταθμίσεων και $\boldsymbol{\varepsilon}$ το ($n \times 1$) διάνυσμα των τιμών του λευκού θορύβου.

Η χωρική διαδικασία κινητού μέσου πρώτης τάξης έχει μέση τιμή:

$$\mathrm{E}[\mathbf{y}] = \mathrm{E}[\lambda \mathbf{W}\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}] = \lambda \mathbf{W}\mathrm{E}[\boldsymbol{\varepsilon}] + \mathrm{E}[\boldsymbol{\varepsilon}] = \mathbf{0}$$

Επειδή η διαδικασία γράφεται ισοδύναμα:

$$\mathbf{y} = \lambda \mathbf{W}\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y} = (\lambda \mathbf{W} + \mathbf{I})\boldsymbol{\varepsilon}$$

η μήτρα διακυμάνσεων – συνδιακυμάνσεων θα είναι:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}[\mathbf{y},\mathbf{y}] = \mathrm{E}\left[\mathbf{y}\mathbf{y}'\right] &= \mathrm{E}\left[(\lambda \mathbf{W} + \mathbf{I})\boldsymbol{\varepsilon}\left((\lambda \mathbf{W} + \mathbf{I})\boldsymbol{\varepsilon}\right)'\right] \\
&= \mathrm{E}\left[(\lambda \mathbf{W} + \mathbf{I})\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}'(\lambda \mathbf{W} + \mathbf{I})'\right] \\
&= \sigma^2 (\lambda \mathbf{W} + \mathbf{I})(\lambda \mathbf{W}' + \mathbf{I}) \\
&= \sigma^2 \left[\lambda \mathbf{W}\lambda \mathbf{W}' + \lambda \mathbf{W} + \lambda \mathbf{W}' + \mathbf{I}\right] \\
&= \sigma^2 \left[\mathbf{I} + \lambda(\mathbf{W} + \mathbf{W}') + \lambda^2 \mathbf{W}\mathbf{W}'\right]
\end{aligned}$$

Όπως διαπιστώνεται από την προηγούμενη μήτρα διακυμάνσεων – συνδιακυμάνσεων η αλληλεπίδραση μεταξύ των περιοχών στη χωρική διαδικασία κινητού μέσου πρώτης τάξης είναι πιο ασθενής σε σχέση με τη χωρική αυτοπαλίνδρομη διαδικασία πρώτης τάξης. Ειδικότερα, εμφανίζεται τοπική αλληλεπίδραση μεταξύ των περιοχών καθώς κάθε παρατήρηση (περιοχή) συσχετίζεται μόνο με τους πρώτους και τους δεύτερους γείτονές της μέσω των μητρών $\mathbf{W} + \mathbf{W}'$ και $\mathbf{W}\mathbf{W}'$ αντίστοιχα. Χωρικός πολλαπλασιαστής που να επιφέρει συσχέτιση μεταξύ όλων των περιοχών εδώ απουσιάζει. Επιπρόσθετα, τα διαγώνια στοιχεία της μήτρας διακυμάνσεων – συνδιακυμάνσεων δεν θα είναι σταθερά κάτι που συνεπάγεται ότι η $\mathbf{y}$ δεν θα έχει σταθερή διακύμανση.

Για να είναι σωστά ορισμένη η χωρική διαδικασία κινητού μέσου πρώτης τάξης θα πρέπει η μήτρα $(\mathbf{I} + \lambda \mathbf{W})$ να είναι μη ιδιάζων. Αποδεικνύεται (Ord, 1975) ότι για να ισχύει αυτό θα πρέπει να ικανοποιείται η συνθήκη $\frac{1}{\omega_{\min}} < -\lambda < \frac{1}{\omega_{\max}}$ όπου $\omega_{\min}$ και $\omega_{\max}$ είναι και πάλι η μικρότερη και η μεγαλύτερη ιδιοτιμή της μήτρας χωρικών σταθμίσεων $\mathbf{W}$.

4.5 Χωρικές διαδικασίες ανώτερων τάξεων

Όπως ισχύει και στην ανάλυση χρονοσειρών έτσι και στις χωρικές διαδικασίες μπορούν να οριστούν διαδικασίες ανώτερων τάξεων που να συνδυάζουν χωρικές υστερήσεις στις τιμές της μεταβλητής και στις τιμές του διαταρακτικού όρου ανώτερων τάξεων. Πιο αναλυτικά, η χωρική αυτοπαλίνδρομη διαδικασία *p* τάξης (*Spatial Autoregressive Process of order p*–SAR(*p*)) ορίζεται ως εξής:

$$\mathbf{y} = \rho_1 \mathbf{W}^{(1)}\mathbf{y} + \rho_2 \mathbf{W}^{(2)}\mathbf{y} + \ldots + \rho_p \mathbf{W}^{(p)}\mathbf{y} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

Ανάλογα, η χωρική διαδικασία κινητού μέσου *q* τάξης (*Spatial Moving Average Process of oder q*–SMA(*q*)) θα είναι:

$$\mathbf{y} = \lambda_1 \mathbf{W}^{(1)}\boldsymbol{\varepsilon} + \lambda_2 \mathbf{W}^{(2)}\boldsymbol{\varepsilon} + \ldots + \lambda_q \mathbf{W}^{(q)}\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

Η χωρική αυτοπαλίνδρομη κινητού μέσου διαδικασία τάξεων *p* και *q* (*Spatial Autoregressive Moving Average Process of orders p,q*–SARMA(*p*,*q*)) ορίζεται ως εξής:

$$\mathbf{y} = \rho_1 \mathbf{W}^{(1)}\mathbf{y} + \rho_2 \mathbf{W}^{(2)}\mathbf{y} + \ldots + \rho_p \mathbf{W}^{(p)}\mathbf{y} + \lambda_1 \mathbf{W}^{(1)}\boldsymbol{\varepsilon} + \lambda_2 \mathbf{W}^{(2)}\boldsymbol{\varepsilon} + \ldots + \lambda_q \mathbf{W}^{(q)}\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

Στις προηγούμενες διαδικασίες οι μήτρες $\mathbf{W}^{(1)}, \mathbf{W}^{(2)}, \ldots, \mathbf{W}^{(p)}, \mathbf{W}^{(q)}$ αποτελούν μήτρες χωρικής γειτονίας ανώτερων τάξεων. Σε όλες τις διαδικασίες θα πρέπει να ισχύουν και οι αντίστοιχες συνθήκες ομαλότητας ώστε να ορίζονται σωστά. Επειδή η ερμηνεία των διαδικασιών αυτών είναι περίπλοκη και οι μήτρες διακυμάνσεων – συνδιακυμάνσεων αρκετά σύνθετες δεν χρησιμοποιούνται συχνά στις εμπειρικές εφαρμογές. Για το λόγο αυτό, οι διαδικασίες αυτές δεν θα αποτελέσουν αντικείμενο περεταίρω συζήτησης σε αυτά τα μαθήματα.