ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΧΩΡΙΚΗ ΓΕΙΤΟΝΙΑ

2.1 Εισαγωγή

Το πρώτο στάδιο σε κάθε ανάλυση χωρικών δεδομένων είναι ο καθορισμός της χωρικής γειτονίας μεταξύ των γεωγραφικών περιοχών που εμπλέκονται στην ανάλυση. Ο ορισμός της χωρικής γειτνίασης είναι απαραίτητος για να οριστεί η δομή της χωρικής εξάρτησης που ενσωματώνεται σε κάθε χωρικό οικονομετρικό υπόδειγμα και γίνεται από τον αναλυτή εξωγενώς. Ο τρόπος ορισμού της χωρικής εξάρτησης πολλές φορές επηρεάζει σημαντικά τα αποτελέσματα της ανάλυσης χωρίς να υπάρχει κάποιο συγκεκριμένο στατιστικό κριτήριο για την ορθότητα της επιλογής παρά μόνο η προηγούμενη εμπειρία του αναλυτή από παλιότερες αναλύσεις στην ίδια γεωγραφική περιοχή.

2.2 Χωρική γειτονία

Αυστηρά στατιστικά, η χωρική γειτονία ορίζεται σύμφωνα με την από κοινού και την υπό συνθήκη συναρτήσεις πυκνότητας του συνόλου των τυχαίων μεταβλητών που παρατηρούνται στην εξεταζόμενη γεωγραφική περιοχή. Σύμφωνα με τον Anselin (1988), όταν μια γεωγραφική περιοχή αποτελείται από n χωρικές μονάδες στις οποίες παρατηρείται μια τυχαία μεταβλητή y, τότε το σύνολο των γειτόνων **J** για την i μονάδα ορίζεται ως οι χωρικές μονάδες j για τις οποίες η y_j περιλαμβάνεται στη συνάρτηση πιθανότητας της y_i υπό συνθήκη το διάνυσμα **y** σε όλες τις άλλες περιοχές, δηλαδή όταν ισχύει ότι:

$$P\left[y_i \mid \mathbf{y}\right] = P\left[y_i \mid \mathbf{y}_{\mathrm{J}}\right]$$

όπου $\mathbf{y}$ είναι το $(n \times 1)$ διάνυσμα όλων των τιμών της y και $\mathbf{y}_{\mathrm{J}}$ είναι ένα διάνυσμα που αποτελείται από ένα υποσύνολο των παρατηρήσεων για την y_j για τις οποίες ισχύει ότι $j \in \mathbf{J}$. Κατά συνέπεια, η υπό συνθήκη κατανομή της y_i δεδομένων όλων των άλλων μεταβλητών είναι η ίδια με την υπό συνθήκη κατανομή δεδομένου του υποσυνόλου των γειτόνων. Ο ορισμός της γειτονίας δεν είναι εύκολο να γίνει με τις από κοινού και υπό συνθήκη συναρτήσεις κατανομής και για το λόγο αυτό ορίζεται με τη βοήθεια των ροπών που υπολογίζονται μέσω του διαθέσιμου δείγματος. Με βάση τις ροπές, οι γείτονες της χωρικής μονάδας *i* θα αποτελούνται από το σύνολο $j \in \mathbf{J}$ για το οποίο ισχύει ότι:

$$Cov\left(y_i, y_j\right) \neq 0, \quad \text{για } i \neq j$$

Όπως είναι φανερό, ο υπολογισμός των συνδιακυμάνσεων δεν είναι δυνατός, καθώς για κάθε χωρική μονάδα υπάρχει μόνο μία διαθέσιμή παρατήρηση και οι συνολικές συνδιακυμάνσεις που πρέπει να υπολογιστούν είναι $n \times (n-1)/2$. Δηλαδή, ακόμη και εάν χρησιμοποιούταν ολόκληρο το δείγμα όταν $n > 3$, οι συνδιακυμάνσεις είναι περισσότερες από τις υπάρχουσες παρατηρήσεις. Υπό προϋποθέσεις, το πρόβλημα θα μπορούσε να επιλυθεί στην περίπτωση που αναλύονταν δεδομένα πάνελ. Στην πράξη, αυτό που συνήθως γίνεται είναι ο καθορισμός της χωρικής γειτονίας με την εφαρμογή μίας μήτρας χωρικών σταθμίσεων (*spatial weights matrix*) που δηλώνει την αλληλεπίδραση ανάμεσα στις διαφορετικές χωρικές μονάδες.

2.3 Η μήτρα χωρικών σταθμίσεων

Μήτρα χωρικών σταθμίσεων (*spatial weights matrix*) είναι η ($n \times n$) θετικά ορισμένη και συμμετρική μήτρα $\mathbf{W}$:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} & \cdots & w_{1j} & \cdots & w_{1n} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} & \cdots & w_{2j} & \cdots & w_{2n} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} & \cdots & w_{3j} & \cdots & w_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots \\ w_{i1} & w_{i2} & w_{i3} & \cdots & w_{ij} & \cdots & w_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots \\ w_{n1} & w_{n2} & w_{n3} & \cdots & w_{nj} & \cdots & w_{nn} \end{bmatrix}$$

για την οποία το στοιχείο w_{ij} έχει μη μηδενική τιμή όταν οι χωρικές μονάδες *i* και *j* θεωρούνται γειτονικές και μηδενική τιμή όταν δεν γειτονεύουν. Η μήτρα αυτή καθορίζει την αλληλεπίδραση ανάμεσα στις *n* διαφορετικές χωρικές μονάδες. Επιπρόσθετα, θα ισχύει ότι $w_{ii} = 0$, δηλαδή η διαγώνιος της μήτρας θα αποτελείται από μηδενικές τιμές, έτσι ώστε να ισχύει $tr\left[\mathbf{W}\right] = 0$ εννοώντας ότι μια χωρική μονάδα δεν μπορεί να γειτονεύει με τον εαυτό της.

2.4 Κριτήρια χωρικής γειτονίας

Για να κατασκευαστεί μια μήτρα χωρικών σταθμίσεων επιλέγεται από τον ερευνητή κάποιο κριτήριο χωρικής γειτονίας και με την εφαρμογή του κριτηρίου εντοπίζονται για κάθε χωρική μονάδα όλες οι γειτονικές της μονάδες. Αρχικά με τη χρήση του κριτηρίου κατασκευάζεται μια μήτρα γειτονίας **B** που περιέχει μόνο μηδενικά και θετικά στοιχεία που δηλώνουν τις χωρικές μονάδες που θεωρούνται γειτονικές. Η μήτρα χωρικών σταθμίσεων προκύπτει με την τυποποίηση των στοιχείων της μήτρας χωρικής γειτονίας. Τα κριτήρια χωρικής γειτονίας αποτελούν ένα σημαντικό ερευνητικό τομέα στη χωρική ανάλυση και απασχολούν μεγάλο μέρος της βιβλιογραφίας. Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται συνοπτικά τα πιο συχνά χρησιμοποιούμενα κριτήρια χωρικής γειτονίας.

2.4.1 Ορισμός της γειτονίας με δυικό τρόπο

Στην αρχική της μορφή, η μήτρα χωρικών σταθμίσεων περιέχει τις τιμές ένα και μηδέν και αποτελεί μια μήτρα δυικής χωρικής γειτονίας (*binary contiguity matrix*) **B** με στοιχεία w'_{ij} που ορίζονται ως:

$$w'_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{εάν οι μονάδες } i \text{ και } j \text{ είναι γείτονες} \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Ο ορισμός της δυικής χωρικής γειτονίας μπορεί να βασίζεται στην ύπαρξη κοινών γεωγραφικών συνόρων ανάμεσα στις χωρικές μονάδες ή στις μεταξύ τους αποστάσεις.

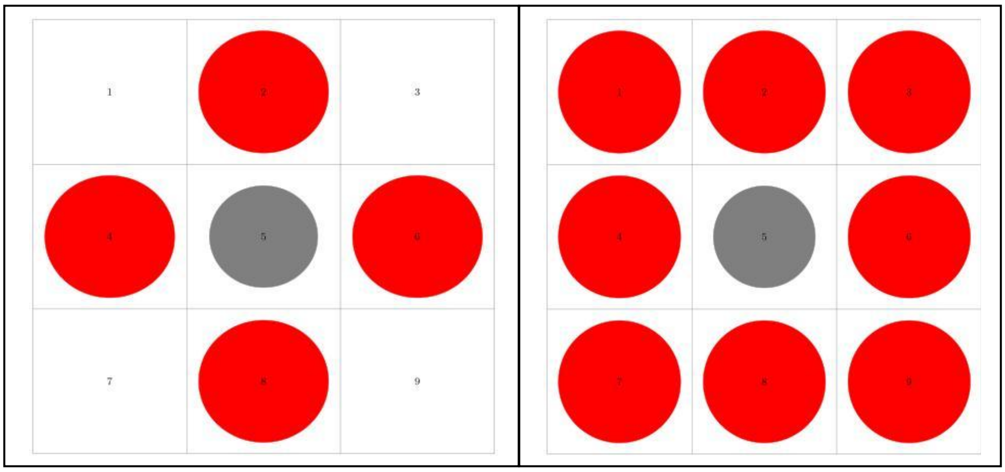
2.4.1.1 Ύπαρξη κοινών γεωγραφικών συνόρων

Ένα από τα πρώτα κριτήρια που έχουν προταθεί βασίζεται στην ύπαρξη κοινών φυσικών γεωγραφικών συνόρων μεταξύ των χωρικών μονάδων θεωρώντας ότι δύο περιοχές στο γεωγραφικό χάρτη είναι γείτονες εάν εφάπτονται τα σύνορά τους. Η προσέγγιση αυτή είναι ιδιαίτερα εύχρηστη όταν οι εξεταζόμενες χωρικές μονάδες αποτελούν στοιχεία ενός ομαλού πλέγματος (*regular grid*) και αντιγράφοντας τις κινήσεις των πιονιών επάνω σε μια σκακιέρα ορίζει τη γειτονία με δυικό τρόπο. Ειδικότερα, επάνω σε ένα ομαλό πλέγμα μπορεί να οριστεί το κριτήριο του πύργου (*rook contiguity*) σύμφωνα με το οποίο δύο περιοχές θα είναι γείτονες εάν έχουν κοινή ακμή (*common edge*) και το κριτήριο της βασίλισσας (*queen contiguity*) που ορίζει δύο περιοχές ως γείτονες εάν έχουν κοινή ακμή (*common edge*) ή κοινή κορυφή (*common vertex*). Με τον ίδιο τρόπο ορίζεται και το κριτήριο του αξιωματικού (*bishop* *contiguity*) όπου δύο περιοχές θα είναι γείτονες εάν έχουν κοινή κορυφή. Επειδή το κριτήριο αυτό σπάνια ανταποκρίνεται στις συνθήκες ενός χάρτη δεν χρησιμοποιείται συχνά και δεν θα γίνει αντικείμενο περεταίρω συζήτησης. Επομένως, σύμφωνα με το κριτήριο του πύργου θα ισχύει:

$$w'_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{εάν οι μονάδες } i \text{ και } j \text{ έχουν κοινή ακμή} \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Αντίστοιχα με το κριτήριο της βασίλισσας θα ισχύει:

$$w'_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{εάν οι μονάδες } i \text{ και } j \text{ έχουν κοινή ακμή ή κοινή κορυφή} \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$



Διάγραμμα 2.1
Γειτνίαση πύργου (αριστερά) και γειτνίαση βασίλισσας (δεξιά) σε ένα ομαλό τετραγωνικό πλέγμα εννέα χωρικών μονάδων

Στο Διάγραμμα 2.1 παρουσιάζονται για ένα ομαλό τετραγωνικό πλέγμα (*regular grid*) διαστάσεων 3x3 που αποτελείται από εννέα χωρικές μονάδες οι εφαρμογές των κριτηρίων του πύργου και της βασίλισσας. Όπως φαίνεται στο αριστερό πλέγμα του διαγράμματος, η μεσαία χωρική μονάδα θα έχει γείτονες, σύμφωνα με το κριτήριο του πύργου, τις χωρικές μονάδες 2, 4, 6 και 8, δηλαδή τις χωρικές μονάδες με τις οποίες έχει κοινή ακμή. Αντίστοιχα, στο αριστερό πλέγμα του διαγράμματος φαίνεται ότι με βάση το κριτήριο της βασίλισσας η μεσαία χωρική μονάδα θα έχει γείτονες τις χωρικές μονάδες με τις οποίες έχει κοινή ακμή ή κοινή κορυφή, δηλαδή τις μονάδες 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8 και 9. Κατά συνέπεια, διαπιστώνεται ότι σε ένα ομαλό πλέγμα κάθε μη ακραία χωρική μονάδα θα έχει τέσσερεις γείτονες όταν εφαρμόζεται το κριτήριο του πύργου και οκτώ γείτονες όταν εφαρμόζεται το κριτήριο της βασίλισσας. Αυτό δεν ισχύει για τις χωρικές μονάδες που βρίσκονται στις άκρες του πλέγματος κάτι που μπορεί να προκαλέσει κάποιου είδους μεροληψία ιδιαίτερα σε δείγματα που βασίζονται σε μικρό αριθμό χωρικών μονάδων. Για το λόγο αυτό, σε θεωρητικές εφαρμογές (κυρίως προσομοιώσεις) για να αντιμετωπιστούν οι πλευρικές επιδράσεις (*edge effects*) εφαρμόζεται η λεγόμενη διόρθωση τόρος (*torus correction*) με την οποία οι χωρικές μονάδες της πρώτης στήλης θεωρούνται ότι συνορεύουν με τις αντίστοιχες χωρικές μονάδες της τελευταίας στήλης και οι χωρικές μονάδες της πρώτης γραμμής με τις αντίστοιχες χωρικές μονάδες της τελευταίας γραμμή ώστε σε κάθε μονάδα του πλέγματος να υπάρχει σταθερός αριθμός γειτόνων.

Η μήτρα δυικής χωρικής γειτονίας **B** με την εφαρμογή του κριτηρίου του πύργου για το πλέγμα των εννέα χωρικών μονάδων προκύπτει βάζοντας στα στοιχεία του πίνακα που εκφράζουν τις χωρικές μονάδες με κοινή ακμή τη μονάδα και το μηδέν σε διαφορετική περίπτωση, δηλαδή:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Τυποποιώντας κατά γραμμή τα στοιχεία της προηγούμενης μήτρας υπολογίζεται η αντίστοιχη μήτρα χωρικών σταθμίσεων $\mathbf{W}$, που θα είναι:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0{,}00 & 0{,}50 & 0{,}00 & 0{,}50 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 \\ 0{,}33 & 0{,}00 & 0{,}33 & 0{,}00 & 0{,}33 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 \\ 0{,}00 & 0{,}50 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}50 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 \\ 0{,}33 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}33 & 0{,}00 & 0{,}33 & 0{,}00 & 0{,}00 \\ 0{,}00 & 0{,}25 & 0{,}00 & 0{,}25 & 0{,}00 & 0{,}25 & 0{,}00 & 0{,}25 & 0{,}00 \\ 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}33 & 0{,}00 & 0{,}33 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}33 \\ 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}50 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}50 & 0{,}00 \\ 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}33 & 0{,}00 & 0{,}33 & 0{,}00 & 0{,}33 \\ 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}50 & 0{,}00 & 0{,}50 & 0{,}00 \end{bmatrix}$$

Με παρόμοιο τρόπο παράγονται η μήτρα δυικής χωρικής γειτονίας και η μήτρα χωρικών σταθμίσεων με την εφαρμογή του κριτηρίου της βασίλισσας. Οι μήτρες αυτές είναι, αντίστοιχα:

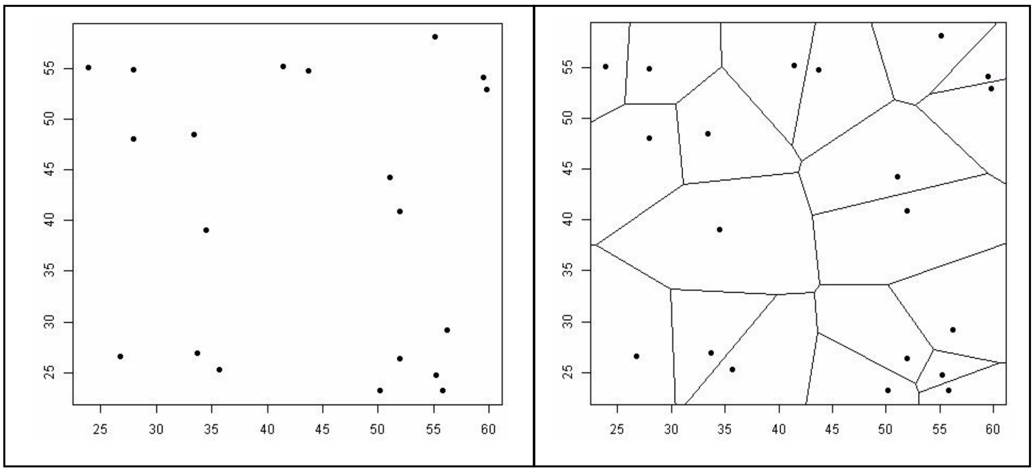
$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

και

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0{,}00 & 0{,}33 & 0{,}00 & 0{,}33 & 0{,}33 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 \\ 0{,}20 & 0{,}00 & 0{,}20 & 0{,}20 & 0{,}20 & 0{,}20 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 \\ 0{,}00 & 0{,}33 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}33 & 0{,}33 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 \\ 0{,}20 & 0{,}20 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}20 & 0{,}00 & 0{,}20 & 0{,}20 & 0{,}00 \\ 0{,}12 & 0{,}12 & 0{,}12 & 0{,}12 & 0{,}00 & 0{,}12 & 0{,}12 & 0{,}12 & 0{,}12 \\ 0{,}00 & 0{,}20 & 0{,}20 & 0{,}00 & 0{,}20 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}20 & 0{,}20 \\ 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}33 & 0{,}33 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}33 & 0{,}00 \\ 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}20 & 0{,}20 & 0{,}20 & 0{,}20 & 0{,}00 & 0{,}20 \\ 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}33 & 0{,}33 & 0{,}00 & 0{,}33 & 0{,}00 \end{bmatrix}$$

Όπως συμπεραίνεται, οι μήτρες που προκύπτουν από την εφαρμογή του κριτηρίου της βασίλισσας είναι πιο πυκνές σε σχέση με το κριτήριο του πύργου δηλώνοντας ότι η εξάρτηση μεταξύ των χωρικών μονάδων του πλέγματος είναι πιο έντονη. Τα κριτήρια του πύργου και της βασίλισσας πολλές φορές εφαρμόζονται με τον ίδιο τρόπο και στις πραγματικές γεωγραφικές περιοχές (πολύγωνα) ενός χάρτη. Η αξιοπιστία τους όμως εξαρτάται κάθε φορά από τις γεωγραφικές ιδιαιτερότητες της περιοχής που μελετάται. Πιο συγκεκριμένα, μπορεί να προκύψουν χωρικές μονάδες με πολύ μικρό αριθμό γειτόνων και άλλες με πολύ μεγάλο αριθμό γειτόνων. Σε περιπτώσεις που η γεωγραφική περιοχή περιλαμβάνει μονάδες χωρίς φυσικά σύνορα όπως, παραδείγματος χάριν, συμβαίνει με τα νησιά τότε αυτές οι μονάδες δεν θα έχουν κανένα γείτονα. Επίσης, εάν σε κάποιες περιοχές του χάρτη υπάρχουν πολλές χωρικές μονάδες με μικρή γεωγραφική έκταση η κάθε μία, όπως για παράδειγμα σε κάποια πυκνοκατοικημένη έκταση σαν το νομό Αττικής, τότε θα είναι αναμφίβολο εάν τα αποτελέσματα των κριτηρίων μπορούν να ανταποκριθούν στις πραγματικές σχέσεις εξάρτησης στην περιοχή.

Πολλές φορές ο ερευνητής μελετάει χωρικές μονάδες που αντιστοιχούν σε γεωγραφικά σημεία στο χώρο γνωρίζοντας μόνο τις γεωγραφικές τους συντεταγμένες χωρίς αυτά να ανήκουν σε συγκεκριμένα πολύγωνα. Στην περίπτωση αυτή, ο ορισμός της χωρικής γειτονίας με κριτήριο την ύπαρξη κοινών συνόρων δεν είναι δυνατό να γίνει. Μια λύση είναι να οριστούν αντιπροσωπευτικά πολύγωνα για κάθε σημείο μέσω μιας διαδικασίας που είναι γνωστή ως χωρική ψηφίδωση (*spatial tessellation*). Αποτέλεσμα της διαδικασίας αυτής που πραγματοποιείται με τη βοήθεια εξειδικευμένου λογισμικού είναι για κάθε σημείο να κατασκευάζεται ένα πολύγωνο έτσι ώστε όλα τα σημεία εντός του πολυγώνου να είναι πιο κοντά στο σημείο αναφοράς παρά σε οποιοδήποτε από τα άλλα σημεία. Τα πολύγωνα αυτά ονομάζονται πολύγωνα Thiessen ή πολύγωνα Voronoi και μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να περιγράψουν την περιοχή επίδρασης ενός σημείου σε ένα σύνολο σημείων. Παραδείγματα εφαρμογής πολυγώνων αυτής της μορφής είναι η μελέτη της επίδρασης μιας αγοράς στην επιστήμη του marketing και ο ορισμός των πιο καταλλήλων σταθμών ασθενοφόρων ή πυροσβεστικών οχημάτων. Αφού κατασκευαστούν τα αντιπροσωπευτικά πολύγωνα μπορούν να εφαρμοστούν τα κριτήρια του πύργου και της βασίλισσας για τον ορισμό της γειτονίας.



Διάγραμμα 2.2
Είκοσι γεωγραφικά σημεία (αριστερά) και τα αντιπροσωπευτικά τους πολύγωνα Thiessen (δεξιά)

Στο Διάγραμμα 2.2 απεικονίζονται είκοσι γεωγραφικά σημεία που έχουν παραχθεί τυχαία με γεωγραφικές συντεταγμένες που προέρχονται από ομοιόμορφη U(20, 60) κατανομή με τα αντιπροσωπευτικά τους πολύγωνα Thiessen. Εύκολα μπορεί να παρατηρηθεί ότι όλα τα (άπειρα) σημεία που βρίσκονται μέσα σε κάθε πολύγωνο είναι πιο κοντά στο σημείο αναφοράς του πολυγώνου από ότι στα σημεία αναφοράς των άλλων πολυγώνων.

2.4.1.2 Η Ευκλείδεια απόσταση

Ο ορισμός της χωρικής γειτονίας με κριτήριο την ύπαρξη κοινών γεωγραφικών συνόρων είναι άμεσα εφικτός και εύκολα ερμηνεύσιμος αλλά και περιοριστικός. Πιο ευέλικτοι τρόποι ορισμού της χωρικής γειτονίας επιτυγχάνονται με κριτήριο την απόσταση μεταξύ των χωρικών μονάδων. Οι αποστάσεις μεταξύ των διαφορετικών χωρικών μονάδων συνήθως μετριούνται με τη βοήθεια της Ευκλείδειας απόστασης. Για δυο σημεία i και j με συντεταγμένες (x_i, y_i) και (x_j, y_j) η Ευκλείδεια απόσταση $d_{i,j}$ μεταξύ τους δίνεται από τη σχέση:

$$d_{i,j} = \sqrt{\left(x_i - x_j\right)^2 + \left(y_i - y_j\right)^2}$$

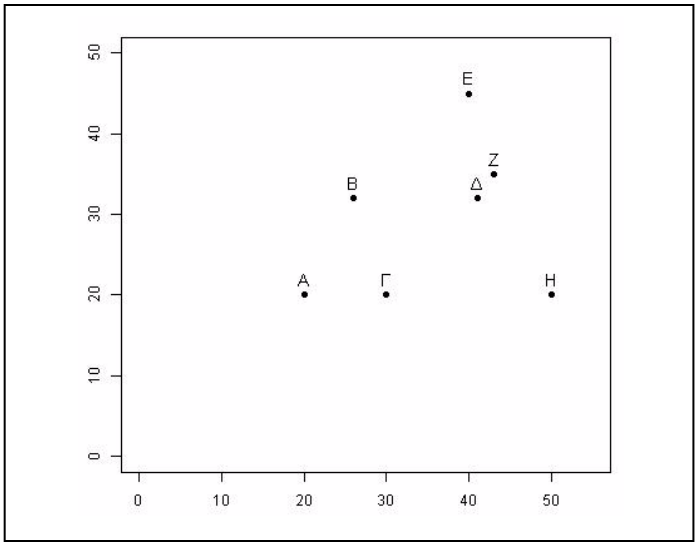
Πρέπει να αναφερθεί ότι για να έχει εγκυρότητα ο υπολογισμός της απόστασης με την προηγούμενη σχέση θα πρέπει οι συντεταγμένες των σημείων να καταγράφονται επάνω σε ένα επίπεδο. Όταν τα σημεία καταγράφονται με απλές γεωγραφικές συντεταγμένες δηλαδή με γεωγραφικό πλάτος (*latitude*) και γεωγραφικό μήκος (*longitude*) που αναφέρονται στις διαστάσεις της γης τότε θα πρέπει να προβληθούν στο επίπεδο με την εφαρμογή κάποιου προβολικού συστήματος (*projected system*). Διαφορετικά, η Ευκλείδεια απόσταση δεν αποτελεί σωστό μέτρο απόστασης καθώς ο υπολογισμός της αγνοεί την καμπυλότητα της γης.

Παράδειγμα 2.1

Έστω τα εφτά υποθετικά γεωγραφικά σημεία με τις αντίστοιχες συντεταμένες τους σε ένα επίπεδο:

Α (20, 20), Β (26, 32), Γ (30, 20), Δ (41, 32), Ε (40, 45), Ζ (43, 35) και Η (50, 20)

Τα σημεία αυτά απεικονίζονται στο Διάγραμμα 2.3. Για τα σημεία αυτά έχουν υπολογιστεί οι μεταξύ τους Ευκλείδειες αποστάσεις για όλους τους δυνατούς συνδυασμούς και παρουσιάζονται στον Πίνακα 2.1.



Διάγραμμα 2.3
Εφτά υποθετικά γεωγραφικά σημεία στο επίπεδο

Πίνακας 2.1
Οι Ευκλείδειες αποστάσεις μεταξύ των εφτά υποθετικών γεωγραφικών σημείων

	Α	**Β**	**Γ**	**Δ**	**Ε**	**Ζ**	**Η**	**Min**
Α	**0**	13,42	10	24,19	32,02	27,46	30	**10**
Β	13,42	**0**	12,65	15	19,10	17,26	26,83	**12,65**
Γ	10	12,65	**0**	16,28	26,93	19,85	20	**10**
Δ	24,19	15	16,28	**0**	13,04	3,61	15	**3,61**
Ε	32,02	19,10	26,93	13,04	**0**	10,44	26,93	**10,44**
Ζ	27,46	17,26	19,85	3,61	10,44	**0**	16,55	**3,61**
Η	30	26,83	20	15	26,93	16,55	**0**	**15**

Παραδείγματος χάριν, η Ευκλείδεια απόσταση μεταξύ των σημείων Α (20, 20) και Β (26, 32) είναι:

$$d_{\mathrm{A,B}} = \sqrt{(20-26)^2 + (20-32)^2} = \sqrt{(-6)^2 + (-12)^2} = \sqrt{36+144} = \sqrt{180} = 13,42$$

Η Ευκλείδεια απόσταση μεταξύ των σημείων Α (20, 20) και Ζ (43, 35) είναι:

$$d_{\mathrm{A,Z}} = \sqrt{(20-43)^2 + (20-35)^2} = \sqrt{(-23)^2 + (-15)^2} = \sqrt{529+225} = \sqrt{754} = 27,46$$

Με τον ίδιο τρόπο έχουν υπολογιστεί οι αποστάσεις μεταξύ όλων των σημείων του παραδείγματος. Αξίζουν να αναφερθούν πρώτον ότι η απόσταση ενός σημείου με τον εαυτό του είναι μηδενική, όπως είναι λογικό και δεύτερον ότι ο πίνακας είναι συμμετρικός καθώς η απόσταση είναι συμμετρική σχέση. Με βάση την Ευκλείδεια απόσταση μπορούν να οριστούν κριτήρια χωρικής γειτονίας.

2.4.1.3 Ζώνες απόστασης

Η χωρική γειτονία ορίζεται χρησιμοποιώντας μια ζώνη απόστασης (*distance band*) δηλαδή μια γεωγραφική απόσταση εντός της οποίας κάθε χωρική μονάδα *j* θεωρείται γείτονας της *i*. Συγκεκριμένα:

$$w'_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{εάν } d_{i,j} \leq \mathrm{d} \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

όπου με $d_{i,j}$ συμβολίζεται η απόσταση μεταξύ των μονάδων *i* και *j* και με d η απόσταση σύγκρισης (*critical distance band*) η οποία τίθεται εκ των προτέρων από τον ερευνητή. Το κριτήριο αυτό οδηγεί σε μήτρες γειτονίας συμμετρικές αλλά με μη σταθερό αριθμό γειτόνων. Για να αντιμετωπιστεί το πρόβλημα εμφάνισης μονάδων με απουσία γειτόνων, ο ερευνητής θα πρέπει να καθορίσει την απόσταση σύγκρισης d σε τέτοιο σημείο ώστε να εξασφαλίζεται ένας γείτονας τουλάχιστον σε κάθε μονάδα κάτι που όμως μπορεί να εμφανίσει χωρικές μονάδες με εξαιρετικά μεγάλο αριθμό γειτόνων.

Παράδειγμα 2.2

Ας θεωρηθούν πάλι τα εφτά υποθετικά γεωγραφικά σημεία στο Διάγραμμα 2.3 και έστω ότι ο ερευνητής ορίζει την απόσταση σύγκρισης d = 14. Κατά συνέπεια, το κριτήριο επιλογής των γειτόνων θα είναι:

$$w'_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{εάν } d_{i,j} \leq 14 \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Σύμφωνα με αυτήν την απόσταση σύγκρισης και τις Ευκλείδειες αποστάσεις στον Πίνακα 2.1 προκύπτουν οι εξής γείτονες για κάθε σημείο:

- Το σημείο Α έχει γείτονες τα σημεία Β και Γ
- Το σημείο Β έχει γείτονες τα σημεία Α και Γ
- Το σημείο Γ έχει γείτονες τα σημεία Α και Β
- Το σημείο Δ έχει γείτονες τα σημεία Ε και Ζ
- Το σημείο Ε έχει γείτονες τα σημεία Δ και Ζ

- Το σημείο Ζ έχει γείτονες τα σημεία Δ και Ε
- Το σημείο Η δεν έχει κανένα γείτονα!!

Επομένως, η μήτρα δυικής χωρικής γειτονίας θα είναι:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Διαπιστώνεται ότι με απόσταση σύγκρισης d = 14 το σημείο Γ δεν θα έχει κανένα γείτονα και θα είναι απομονωμένο. Μια χωρική μονάδα χωρίς γείτονες στη χωρική ανάλυση ονομάζεται νησί (i*sland*) και επηρεάζει τα αποτελέσματα που θα προκύψουν. Γενικά, νησιά στον ορισμό της μήτρας χωρικής γειτονίας συνήθως εμφανίζονται όταν τα σημεία των παρατηρήσεων είναι ανώμαλα διασκορπισμένα στο χώρο έτσι ώστε κάποια να είναι συγκεντρωμένα μαζί και κάποια απομακρυσμένα. Για να αποφευχθεί το πρόβλημα εμφάνισης νησιών η απόσταση σύγκρισης d θα πρέπει να επιλεχθεί με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε σημείο να έχει έναν τουλάχιστον γείτονα. Μια απόσταση σύγκρισης που οδηγεί σε έναν τουλάχιστον γείτονα για κάθε μονάδα είναι αυτή που αντιστοιχεί στη μέγιστη απόσταση από όλες τις αποστάσεις των κοντινών γειτόνων για κάθε σημείο. Η απόσταση κοντινού γείτονα ενός σημείου είναι η απόσταση από αυτό το σημείο προς τον κοντινότερό του γείτονα.

Στην τελευταία στήλη του Πίνακα 2.1 περιέχονται οι αποστάσεις κοντινών γειτόνων για τα εφτά σημεία του παραδείγματος. Η μέγιστη απόσταση από όλες τις αποστάσεις των κοντινών γειτόνων είναι d = 15. Επομένως το κριτήριο επιλογής των γειτόνων θα είναι:

$$w'_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{εάν } d_{i,j} \leq 15 \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Με βάση τη νέα απόσταση σύγκρισης προκύπτουν οι εξής γείτονες για κάθε σημείο:

- Το σημείο Α έχει γείτονες τα σημεία Β και Γ
- Το σημείο Β έχει γείτονες τα σημεία Α, Γ και Δ
- Το σημείο Γ έχει γείτονες τα σημεία Α, Β και Δ

- Το σημείο Δ έχει γείτονες τα σημεία Β, Ε, Ζ και Η
- Το σημείο Ε έχει γείτονες τα σημεία Δ και Ζ
- Το σημείο Ζ έχει γείτονες τα σημεία Δ και Ε
- Το σημείο Η έχει γείτονες το σημείο Δ

Η νέα μήτρα δυικής χωρικής γειτονίας θα είναι:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Η τυποποιημένη ανά γραμμή μήτρα χωρικών σταθμίσεων $\mathbf{W}$ είναι:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0,00 & 0,50 & 0,50 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,33 & 0,00 & 0,33 & 0,33 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,33 & 0,33 & 0,00 & 0,33 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,25 & 0,00 & 0,00 & 0,25 & 0,25 & 0,25 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,50 & 0,00 & 0,50 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,50 & 0,50 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 1 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \end{bmatrix}$$

Δύο σχόλια πρέπει να γίνουν όσον αφορά το κριτήριο ζώνης απόστασης:

1) Η δυική μήτρα χωρικής γειτονίας **B** που προκύπτει από την εφαρμογή του κριτηρίου ζώνης απόστασης είναι πάντα συμμετρική διότι η απόσταση έχει συμμετρική σχέση για δύο σημεία.
2) Συνήθως η εφαρμογή του κριτηρίου ζώνης απόστασης οδηγεί σε μήτρες χωρικής γειτονίας με πάρα πολύ μεγάλο αριθμό γειτόνων για κάποιες περιοχές επειδή η απόσταση σύγκρισης d καθορίζεται από τα σημεία που είναι πιο απομακρυσμένα ενώ κάποια άλλα είναι μαζί συγκεντρωμένα.

2.4.1.4 Το κριτήριο των *K* κοντινών γειτόνων

Το κριτήριο των *k* κοντινών γειτόνων θεωρεί για κάθε χωρική μονάδα ως γείτονες τις *k* μονάδες που βρίσκονται πιο κοντά σε αυτή ανεξάρτητα της θέσης τους και της απόστασής τους, δηλαδή:

$$w'_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{εάν η μονάδα } j \text{ είναι ένας απο τους } k \text{ κοντινούς γείτονες της } i \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Το αποτέλεσμα αυτού του κριτηρίου είναι όλες οι μονάδες να έχουν τον ίδιο αριθμό γειτόνων και να μην εμφανίζονται μονάδες χωρίς κανένα γείτονα αλλά οι μήτρες χωρικών γειτόνων που κατασκευάζονται μπορεί να είναι μη συμμετρικές.

Παράδειγμα 2.3

Για τα εφτά υποθετικά γεωγραφικά σημεία στο Διάγραμμα 2.3 και για $k = 4$ το κριτήριο επιλογής των γειτόνων θα είναι:

$$w'_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{εάν η μονάδα } j \text{ είναι ένας απο τους 4 κοντινούς γείτονες της } i \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Από τον Πίνακα 2.1 προκύπτουν οι εξής γείτονες για κάθε σημείο:

- Το σημείο Α έχει γείτονες τα σημεία Γ, Β, Δ και Ζ
- Το σημείο Β έχει γείτονες τα σημεία Γ, Α, Δ και Ζ
- Το σημείο Γ έχει γείτονες τα σημεία Α, Β, Δ και Ζ
- Το σημείο Δ έχει γείτονες τα σημεία Ζ, Ε, Β και Η
- Το σημείο Ε έχει γείτονες τα σημεία Ζ, Δ, Β και **Γ και Η** !!
- Το σημείο Ζ έχει γείτονες τα σημεία Δ, Ε, Η και Β
- Το σημείο Η έχει γείτονες τα σημεία Δ, Ζ, Γ και Β

Η μήτρα δυικής χωρικής γειτονίας θα είναι:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Η διαπίστωση που γίνεται από τη μήτρα χωρικής γειτονίας είναι ότι δεν είναι συμμετρική. Αυτό συμβαίνει διότι η σχέση κοντινών γειτόνων δεν είναι συμμετρική σχέση. Παραδείγματος χάριν, ο κοντινότερος γείτονας του σημείο Β είναι το Γ άλλα ο κοντινότερος γείτονας του Γ σημείου είναι το Α και όχι το Β. Επιπρόσθετα, το σημείο Ε δεν έχει τέσσερεις γείτονες αλλά πέντε. Αυτό οφείλεται στο γεγονός πως με την εφαρμογή του κριτηρίου για *k* = 4 εμφανίζεται δεσμός (*tie*) για το σημείο Ε διότι $d_{\mathrm{E,\Gamma}} = d_{\mathrm{E,H}} = 26,93$.

Συνοψίζοντας, για το κριτήριο των *k* κοντινών γειτόνων μπορούν να γίνουν τα εξής σχόλια:

1) Το κριτήριο των *k* κοντινών γειτόνων δεν οδηγεί ποτέ στην εμφάνιση νησιών στη μήτρα χωρικής γειτονίας.
2) Η μήτρα χωρικής γειτονίας που κατασκευάζεται δεν είναι υποχρεωτικά συμμετρική.
3) Σε σπάνιες περιπτώσεις εμφανίζονται δεσμοί (*ties*) που δεν μπορούν να διασπαστούν.
4) Όταν δεν προκύπτουν δεσμοί που είναι και η συνηθισμένη περίπτωση όλες οι χωρικές μονάδες θα έχουν τον ίδιο αριθμό *k* γειτόνων.

2.4.2 Ορισμός της γειτονίας με εφαρμογή συνάρτησης της απόστασης

Μια άλλη κατηγορία κριτηρίων χωρική γειτονίας ορίζει τις σταθμίσεις ως αποτέλεσμα κάποιας συνάρτησης της απόστασης μεταξύ των χωρικών μονάδων παρακάμπτοντας το στάδιο ορισμού της μήτρας δυικής χωρικής γειτονίας. Η συνάρτηση αυτή έχει τη μορφή:

$$w_{ij} = f\left(d_{i,j}, \theta\right)$$

όπου $d_{i,j}$ είναι η απόσταση μεταξύ των μονάδων *i* και *j* και *θ* είναι ένας συντελεστής που επιλέγεται από τον ερευνητή για να εκφράζει τη μείωση της εξάρτησης μεταξύ των μονάδων καθώς αυξάνεται η γεωγραφική απόσταση. Επιπρόσθετα, θα πρέπει να ισχύει ότι:

$$\frac{\partial w_{ij}}{\partial d_{i,j}} < 0$$

ώστε οι χωρικές μονάδες που είναι πιο απομακρυσμένες από την *i* μονάδα να λαμβάνουν μικρότερη στάθμιση από αυτές που βρίσκονται πιο κοντά σε αυτή αντανακλώντας σε κάποιο βαθμό τον πρώτο νόμο της γεωγραφίας του Tobler (1970). Οι προκύπτουσες μήτρες χωρικών σταθμίσεων μπορούν και σε αυτή την περίπτωση να τυποποιηθούν κατά γραμμή.

Για παράδειγμα, το w_{ij} στοιχείο της μήτρας χωρικών σταθμίσεων, όπως αναφέρουν οι Anselin και Bera (1998), μπορεί να είναι αποτέλεσμα εφαρμογής της συνάρτησης:

$$w_{ij} = \frac{1}{d_{i,j}^{\alpha}}$$

όπου $d_{i,j}$ είναι η απόσταση μεταξύ των μονάδων *i* και *j* και *α* ο συντελεστής που εκφράζει τη μείωση της εξάρτησης μεταξύ των μονάδων καθώς αυξάνεται η γεωγραφική απόσταση και που συνήθως λαμβάνει τις τιμές $\alpha = 1$ ή $\alpha = 2$. Επιπρόσθετα, γίνεται η υπόθεση ότι $w_{ii} = 0$ ώστε η κύρια διαγώνιος στη μήτρα **W** να έχει μηδενικές τιμές ενώ μερικές φορές τίθεται και μια απόσταση σύγκρισης d με την οποία $w_{ij} = 0$ για $d_{i,j} > \mathrm{d}$. Αξίζει να αναφερθεί ότι η αντίστροφη συνάρτηση με $\alpha = 2$ συχνά στη χωρική ανάλυση συναντιέται με την ονομασία υπόδειγμα βαρύτητας χωρικής αλληλεπίδρασης (*gravity model of spatial interaction*). Εύκολα μπορεί να διαπιστωθεί ότι:

- Όταν η απόσταση $d_{i,j}$ αυξάνεται θα μειώνεται η στάθμιση w_{ij}
- Όταν η απόσταση $d_{i,j}$ μειώνεται θα αυξάνεται η στάθμιση w_{ij}
- Όταν αυξάνεται ο συντελεστής *α* θα μειώνεται η επίδραση της απόστασης και κατά συνέπεια θα μειώνεται η στάθμιση w_{ij}

Μια άλλη συνάρτηση που θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί είναι η αντίστροφη εκθετική συνάρτηση που ορίζεται ως:

$$w_{ij} = e^{-\frac{d_{i,j}}{a}}$$

Για τον ορισμό της χωρικής γειτονίας μέσω της εφαρμογής συνάρτησης της απόστασης μεταξύ των χωρικών μονάδων πρέπει να σημειωθούν τα εξής:

1) Η μήτρα **W** που προκύπτει είναι συμμετρική
2) Η μήτρα **W** μπορεί να τυποποιηθεί ανά γραμμή
3) Οι τιμές w_{ij} της μήτρας **W** δεν εξαρτώνται μόνο από τις τιμές της παραμέτρου *α* αλλά και από τις μονάδες μέτρησης της απόστασης $d_{i,j}$. Επειδή οι τιμές w_{ij} έχουν αντίστροφη σχέση με την απόσταση $d_{i,j}$ η αλλαγή στις μονάδες μέτρησης της απόστασης θα τις επηρεάσει. Για παράδειγμα, όταν αυξάνεται η τιμή της απόστασης $d_{i,j}$ λόγω αλλαγής στις μονάδες μέτρησης οι τιμές w_{ij} θα πηγαίνουν πολύ κοντά στο μηδέν. Συνεπώς η αλλαγή της μονάδας μέτρησης της απόστασης από χιλιόμετρα σε μέτρα θα επηρεάσει τα αποτελέσματα.

Παράδειγμα 2.4

Για τα εφτά υποθετικά γεωγραφικά σημεία στο Διάγραμμα 2.3 και για $\alpha = 2$ η αντίστροφη συνάρτηση (υπόδειγμα βαρύτητας χωρικής αλληλεπίδρασης) είναι:

$$w_{ij} = \frac{1}{d_{i,j}^{2}}$$

Χρησιμοποιώντας τις αποστάσεις μεταξύ των σημείων που υπάρχουν στον Πίνακα 2.1 προκύπτει η επόμενη μήτρα χωρικών σταθμίσεων στη μη τυποποιημένη της μορφή:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & d_{\mathrm{A,B}}^{-2} & d_{\mathrm{A,\Gamma}}^{-2} & d_{\mathrm{A,\Delta}}^{-2} & d_{\mathrm{A,E}}^{-2} & d_{\mathrm{A,Z}}^{-2} & d_{\mathrm{A,H}}^{-2} \\ d_{\mathrm{B,A}}^{-2} & 0 & d_{\mathrm{A,\Gamma}}^{-2} & d_{\mathrm{A,\Delta}}^{-2} & d_{\mathrm{A,E}}^{-2} & d_{\mathrm{A,Z}}^{-2} & d_{\mathrm{A,H}}^{-2} \\ d_{\mathrm{\Gamma,A}}^{-2} & d_{\mathrm{\Gamma,B}}^{-2} & 0 & d_{\mathrm{\Gamma,\Delta}}^{-2} & d_{\mathrm{\Gamma,E}}^{-2} & d_{\mathrm{\Gamma,Z}}^{-2} & d_{\mathrm{\Gamma,H}}^{-2} \\ d_{\mathrm{\Delta,A}}^{-2} & d_{\mathrm{\Delta,B}}^{-2} & d_{\mathrm{\Delta,\Gamma}}^{-2} & 0 & d_{\mathrm{\Delta,E}}^{-2} & d_{\mathrm{\Delta,Z}}^{-2} & d_{\mathrm{\Delta,H}}^{-2} \\ d_{\mathrm{E,A}}^{-2} & d_{\mathrm{E,B}}^{-2} & d_{\mathrm{E,\Gamma}}^{-2} & d_{\mathrm{E,\Delta}}^{-2} & 0 & d_{\mathrm{E,Z}}^{-2} & d_{\mathrm{E,H}}^{-2} \\ d_{\mathrm{Z,A}}^{-2} & d_{\mathrm{Z,B}}^{-2} & d_{\mathrm{Z,\Gamma}}^{-2} & d_{\mathrm{Z,\Delta}}^{-2} & d_{\mathrm{Z,E}}^{-2} & 0 & d_{\mathrm{Z,H}}^{-2} \\ d_{\mathrm{H,A}}^{-2} & d_{\mathrm{H,B}}^{-2} & d_{\mathrm{H,\Gamma}}^{-2} & d_{\mathrm{H,\Delta}}^{-2} & d_{\mathrm{H,E}}^{-2} & d_{\mathrm{H,Z}}^{-2} & 0 \end{bmatrix}$$

Με αντικατάσταση των αποστάσεων η μήτρα γίνεται:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0,00 & 13,42^{-2} & 10^{-2} & 24,19^{-2} & 32,02^{-2} & 27,46^{-2} & 30^{-2} \\ 13,42^{-2} & 0,00 & 12,65^{-2} & 15^{-2} & 19,10^{-2} & 17,26^{-2} & 26,83^{-2} \\ 10^{-2} & 12,65^{-2} & 0,00 & 16,28^{-2} & 26,93^{-2} & 19,85^{-2} & 20^{-2} \\ 24,19^{-2} & 15^{-2} & 16,28^{-2} & 0,00 & 13,04^{-2} & 3,61^{-2} & 15^{-2} \\ 32,02^{-2} & 19,10^{-2} & 26,93^{-2} & 13,04^{-2} & 0,00 & 10,44^{-2} & 26,93^{-2} \\ 27,46^{-2} & 17,26^{-2} & 19,85^{-2} & 3,61^{-2} & 10,44^{-2} & 0,00 & 16,55^{-2} \\ 30^{-2} & 26,83^{-2} & 20^{-2} & 15^{-2} & 26,93^{-2} & 16,55^{-2} & 0,00 \end{bmatrix}$$

και τελικά:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0,000 & 0,006 & 0,010 & 0,002 & 0,001 & 0,001 & 0,001 \\ 0,006 & 0,000 & 0,006 & 0,004 & 0,003 & 0,003 & 0,001 \\ 0,010 & 0,006 & 0,000 & 0,004 & 0,001 & 0,003 & 0,003 \\ 0,002 & 0,004 & 0,004 & 0,000 & 0,006 & 0,077 & 0,004 \\ 0,001 & 0,003 & 0,001 & 0,006 & 0,000 & 0,009 & 0,001 \\ 0,001 & 0,003 & 0,003 & 0,077 & 0,009 & 0,000 & 0,004 \\ 0,001 & 0,001 & 0,003 & 0,004 & 0,001 & 0,004 & 0,000 \end{bmatrix}$$

Η τυποποιημένη ανά γραμμή μήτρα χωρικών σταθμίσεων θα είναι:

$$\mathbf{W}=\begin{bmatrix} 0,000 & 0,269 & 0,484 & 0,083 & 0,047 & 0,064 & 0,054 \\ 0,234 & 0,000 & 0,263 & 0,187 & 0,115 & 0,141 & 0,059 \\ 0,378 & 0,236 & 0,000 & 0,143 & 0,052 & 0,096 & 0,095 \\ 0,018 & 0,046 & 0,039 & 0,000 & 0,061 & 0,792 & 0,046 \\ 0,045 & 0,127 & 0,064 & 0,273 & 0,000 & 0,426 & 0,064 \\ 0,014 & 0,035 & 0,026 & 0,793 & 0,095 & 0,000 & 0,038 \\ 0,077 & 0,096 & 0,173 & 0,307 & 0,095 & 0,252 & 0,000 \end{bmatrix}$$

2.4.3 Γειτνίαση Απόστασης–Περιμέτρου

Οι Cliff και Ord (1981) έχουν προτείνει μια μήτρα χωρικής γειτονίας που συνδυάζει δυο δείκτες χωρικής αλληλεπίδρασης μεταξύ των χωρικών μονάδων. Ο ένας δείκτης βασίζεται στην απόσταση και ο άλλος στη σχετική σημαντικότητα των κοινών τους συνόρων. Πιο συγκεκριμένα, η μήτρα προκύπτει ως αποτέλεσμα εφαρμογής μιας συνάρτησης στάθμισης που συγκρίνει το σχετικό μήκος των κοινών συνόρων που μοιράζονται δύο μονάδες με την αντίστροφη απόστασή τους, δηλαδή:

$$w_{ij}=\frac{\beta_{i,j}^{b}}{d_{i,j}^{\alpha}}$$

όπου $\beta_{i,j}$ είναι η αναλογία των κοινών συνόρων της j με την i μονάδα ως προς τη συνολική περίμετρο των συνόρων της i, $d_{i,j}$ η απόσταση μεταξύ των μονάδων και α και b συντελεστές που ορίζονται από τον ερευνητή. Η επιλογή θετικών τιμών για τις δύο παραμέτρους έχει αποτέλεσμα να λαμβάνουν μεγαλύτερες σταθμίσεις οι μονάδες που έχουν μακρύτερα κοινά σύνορα. Επιπρόσθετα, γίνεται η υπόθεση ότι w_{ii} = 0 ώστε η κύρια διαγώνιος στη μήτρα **W** να έχει μηδενικές τιμές. Η μήτρα που προκύπτει δεν είναι αναγκαία συμμετρική.

2.4.4 Γειτνίαση με βάση κοινωνικά και οικονομικά κριτήρια

Η γειτονία δεν ορίζεται σύμφωνα με αυστηρά γεωγραφικά κριτήρια αλλά συγκρίνοντας κάποια κοινωνική ή οικονομική μεταβλητή, δηλαδή χρησιμοποιείται το μέτρο της κοινωνικο-οικονομικής απόστασης (*socio-economic distance*). Η κοινωνικο-οικονομική απόσταση θεωρείται ότι εκφράζει καλύτερα τις ιδιότητες αλληλεπίδρασης των χωρικών μονάδων από ότι η αυστηρά γεωγραφική γειτονία. Η κοινωνικο-οικονομική απόσταση ορίζεται ως:

$$d_{i,j} = |z_i - z_j|^{\alpha}$$

όπου z_i και z_j είναι οι τιμές μιας κοινωνικής ή οικονομικής μεταβλητής στις χωρικές μονάδες i και j και α παράμετρος που συνήθως λαμβάνει την τιμή $\alpha = 1$. Τα στοιχεία της μήτρας χωρικής γειτονίας **W** υπολογίζονται από τη σχέση:

$$w_{i,j} = \frac{1}{d_{i,j}} = \frac{1}{|z_i - z_j|^{\alpha}}$$

ενώ πολλές φορές ορίζεται και κάποιο κατώφλι σύγκρισης.

Ο ορισμός της χωρικής γειτονίας με κοινωνικές ή οικονομικές μεταβλητές αποτελεί έναν τομέα της χωρικής ανάλυσης που έχει λάβει ιδιαίτερη προσοχή τα τελευταία χρόνια και αρκετές φορές οδηγεί σε καινοτόμες μήτρες. Παραδείγματος χάριν, εφαρμόζοντας ως μεταβλητή σύγκρισης το κατά κεφαλήν εισόδημα μπορεί να προκύψει ότι η Ελλάδα γειτονεύει με την Ισπανία. Επισημαίνεται ότι οι μεταβλητές που θα χρησιμοποιηθούν για τον ορισμό της χωρικής γειτονίας θα πρέπει να είναι εξωγενείς. Αυτό σημαίνει ότι δεν θα πρέπει να υπάρχουν αλληλοεπιδράσεις μεταξύ των μεταβλητών που καθορίζουν τη γειτονία και των ερμηνευτικών μεταβλητών που περιλαμβάνονται σε ένα οικονομετρικό υπόδειγμα.

2.5 Μήτρες χωρικών σταθμίσεων και χωρικές υστερήσεις

Όπως έχει ήδη παρουσιαστεί στα παραδείγματα, η μήτρα χωρικών σταθμίσεων κατασκευάζεται τυποποιώντας τα στοιχεία κάθε γραμμής στη μήτρα χωρικής γειτονίας **B** ώστε να αθροίζουν στη μονάδα σύμφωνα με τη σχέση:

$$w_{ij} = \frac{w'_{ij}}{\sum_{j=1}^{n} w'_{ij}}$$

και να εξασφαλίζεται ότι κάθε στοιχείο στη μήτρα χωρικών σταθμίσεων θα λαμβάνει τιμές μεταξύ του μηδέν και του ένα. Συμπερασματικά μετά την τυποποίηση θα ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες για τα στοιχεία w_{ij} της μήτρας χωρικών σταθμίσεων:

1) $0 \le w_{ij} \le 1$, δηλαδή κάθε στοιχείο της μήτρας χωρικών σταθμίσεων θα έχει τιμές μεταξύ 0 και 1.
2) $\sum_{j=1}^{n} w_{ij} = 1$, δηλαδή το άθροισμα κάθε γραμμής στη μήτρα **W** θα ισούται με 1.

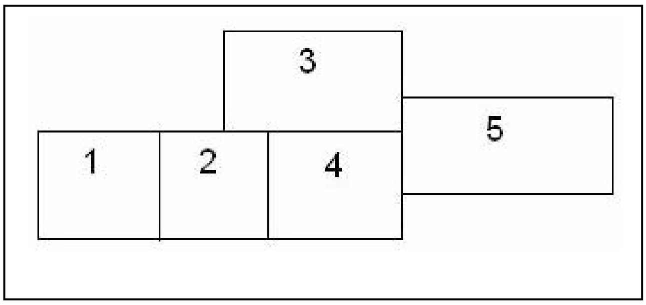
3) $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_{ij} = n$, δηλαδή το άθροισμα όλων των στοιχείων (σταθμίσεων) της μήτρας θα ισούται με το σύνολο του δείγματος – χωρικών μονάδων.

4) Η μήτρα χωρικών σταθμίσεων **W** δεν θα είναι πλέον συμμετρική μήτρα.

Με την τυποποίηση αυτή επιτυγχάνεται η χρησιμοποίηση της μήτρας χωρικών σταθμίσεων για τον υπολογισμό χωρικών υστερήσεων για τις τιμές μιας μεταβλητής. Η χωρική υστέρηση (*spatial lag*) συσχετίζει την τιμή μιας μεταβλητής σε μία συγκεκριμένη χωρική μονάδα με τις τιμές της στις γειτονικές της μονάδες. Ουσιαστικά για κάθε χωρική μονάδα αποτελεί ένα σταθμισμένο μέσο όρο των τιμών της μεταβλητής στις γειτονικές της χωρικές μονάδες με συντελεστές στάθμισης τα αντίστοιχα στοιχεία της μήτρας χωρικών σταθμίσεων. Ο υπολογισμός του ($n \times 1$) διανύσματος $\mathbf{Ly} = \mathbf{Wy}$ των χωρικών υστερήσεων για τη μεταβλητή $\mathbf{y}$ γίνεται πολλαπλασιάζοντας τη μήτρα χωρικών σταθμίσεων $\mathbf{W}$ με το διάνυσμα $\mathbf{y}$ της μεταβλητής. Από τη διαδικασία αυτή συμπεραίνεται ότι η χωρική υστέρηση της $\mathbf{y}$ στην *i* χωρική μονάδα θα δίνεται από το άθροισμα $Ly_i = \sum_{j=1}^{n} w_{ij} y_j$. Η χωρική υστέρηση θυμίζει τη γνωστή από την ανάλυση χρονοσειρών χρονική υστέρηση (*time lag*) και κατά κάποιον τρόπο επιτρέπει τη μετακίνηση μεταξύ των χωρικών μονάδων. Η ουσιαστική διαφορά που υπάρχει είναι ότι στις χρονοσειρές η κίνηση που μπορεί να γίνει είναι χρονικά μόνο προς τα πίσω ή προς τα εμπρός, ενώ στο χώρο οι κινήσεις είναι προς πολλές κατευθύνσεις.

Παράδειγμα 2.5

Στο Διάγραμμα 2.4 παρουσιάζονται πέντε υποθετικές χωρικές μονάδες και στον Πίνακα 2.2 οι τιμές μιας μεταβλητής *y* που έχουν καταγραφεί σε κάθε μια από αυτές.



Διάγραμμα 2.4
Πέντε υποθετικές χωρικές μονάδες

Πίνακας 2.2
Τιμές μεταβλητής *y*

Περιοχή i	y_i
1	5
2	6
3	16
4	14
5	14

Η μήτρα χωρικής γειτονίας για τις πέντε χωρικές μονάδες του Διαγράμματος 2.4 με εφαρμογή του κριτηρίου του πύργου είναι:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Η τυποποιημένη ανά γραμμή μήτρα χωρικών σταθμίσεων προκύπτει σύμφωνα με τη σχέση: $w_{ij} = w'_{ij} \Big/ \sum_{j=1}^{n} w'_{ij}$. Παραδείγματος χάριν, τα στοιχεία της δεύτερης γραμμής της μήτρας **B** διαιρούνται με το 3 διότι $\sum_{j=1}^{3} w'_{2j} = 1+0+1+1+0 = 3$. Ανάλογα, τα στοιχεία της πέμπτης γραμμής διαιρούνται με το 2 διότι $\sum_{j=1}^{3} w'_{5j} = 0+0+1+1+0 = 2$. Επομένως, η τυποποιημένη ανά γραμμή μήτρα χωρικών σταθμίσεων θα είναι:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0{,}000 & 1{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 \\ 0{,}333 & 0{,}000 & 0{,}333 & 0{,}333 & 0{,}000 \\ 0{,}000 & 0{,}333 & 0{,}000 & 0{,}333 & 0{,}333 \\ 0{,}000 & 0{,}333 & 0{,}333 & 0{,}000 & 0{,}333 \\ 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}500 & 0{,}500 & 0{,}000 \end{bmatrix}$$

Διαπιστώνεται ότι $0 \le w_{ij} \le 1$ και $\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5} w_{ij} = 5 = n$.

Το (5×1) διάνυσμα των τιμών της μεταβλητής y είναι:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 16 \\ 14 \\ 14 \end{bmatrix}$$

Ο υπολογισμός του (5×1) διανύσματος $\mathbf{Ly}$ των χωρικών υστερήσεων για τη μεταβλητή $\mathbf{y}$ προκύπτει ως εξής:

$$\mathbf{Ly} = \mathbf{Wy} = \begin{bmatrix} 0{,}000 & 1{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}000 \\ 0{,}333 & 0{,}000 & 0{,}333 & 0{,}333 & 0{,}000 \\ 0{,}000 & 0{,}333 & 0{,}000 & 0{,}333 & 0{,}333 \\ 0{,}000 & 0{,}333 & 0{,}333 & 0{,}000 & 0{,}333 \\ 0{,}000 & 0{,}000 & 0{,}500 & 0{,}500 & 0{,}000 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 16 \\ 14 \\ 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6{,}000 \\ 11{,}667 \\ 11{,}333 \\ 12{,}000 \\ 15{,}000 \end{bmatrix}$$

Πιο αναλυτικά, η χωρική υστέρηση της y στην 2 χωρική μονάδα θα δίνεται από το άθροισμα:

$$Ly_2 = \sum_{j=1}^{5} w_{2j} y_2 = 0{,}333 \cdot 5 + 0{,}333 \cdot 16 + 0{,}333 \cdot 14 = 11{,}667$$

Η χωρική υστέρηση της y στην 5 χωρική μονάδα θα δίνεται από το άθροισμα:

$$Ly_5 = \sum_{j=1}^{5} w_{5j} y_2 = 0{,}500 \cdot 16 + 0{,}500 \cdot 14 = 15$$

Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζονται οι χωρικές υστερήσεις και για τις υπόλοιπες χωρικές μονάδες.

2.6 Χωρική γειτονία ανώτερων τάξεων

Η έννοια της χωρικής γειτονίας μπορεί να επεκταθεί ορίζοντας χωρικές γειτονίες ανώτερων τάξεων όπως συμβαίνει στις χρονοσειρές όπου υπάρχουν χρονικές κινήσεις σε πολλές περιόδους. Ένας γείτονας ανώτερης τάξης ορίζεται ως ένας γείτονας πρώτης τάξης ενός γείτονα κατώτερης τάξης. Ειδικότερα, η χωρική μονάδα j είναι γείτονας k τάξης στη χωρική μονάδα i εάν:

1) Η j χωρική μονάδα είναι γείτονας πρώτης τάξης στη χωρική μονάδα h.
2) Οι χωρικές μονάδες h και i είναι γείτονες τάξης k-1.
3) Η χωρική μονάδα j δεν αποτελεί γείτονα κατώτερης τάξης στην i χωρική μονάδα.

Επομένως, γείτονας δεύτερης τάξης μιας χωρικής μονάδας θα μπορούσε να είναι κάθε γείτονας πρώτης τάξης σε μια άλλη χωρική μονάδα εφόσον δεν αποτελεί γείτονα πρώτης τάξης της συγκεκριμένης χωρικής μονάδας.

Σε αρκετές εμπειρικές εφαρμογές οι γείτονες δεύτερης τάξης υπολογίζονται υψώνοντας τη δυική μήτρα χωρικής γειτονίας πρώτης τάξης στο τετράγωνο και αντικαθιστώντας με μονάδες τα μη μηδενικά στοιχεία στη νέα μήτρα που προκύπτει. Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζονται και οι γείτονες ανώτερων τάξεων, δηλαδή η δυική μήτρα χωρικής γειτονίας υψώνεται στη δύναμη της τάξης που η γειτονία επιδιώκεται να υπολογιστεί. Εντούτοις, η μέθοδος αυτή έχει δεχτεί κριτικές και κρύβει αρκετούς κινδύνους καθώς δεν οδηγεί πάντα στους σωστούς γείτονες. Αυτό οφείλεται σύμφωνα με τον Blommestein (1985) στην εμφάνιση κυκλικών και πλεονάζων διαδρομών (*circular and redundant routes*) που επηρεάζουν τα αποτελέσματα όταν εκτιμώνται χωρικά υποδείγματα. Συγκεκριμένα, η μήτρα που προκύπτει υψώνοντας σε δύναμη τη δυική μήτρα **W** περιλαμβάνει γείτονες οι οποίοι περιλαμβάνονται μερικώς σε μήτρα γειτονίας κατώτερης τάξης.

Τα στοιχεία της μήτρας $\mathbf{W}^2$ δείχνουν τους τρόπους μετακίνησης μεταξύ των χωρικών μονάδων σε δύο βήματα. Πιο αναλυτικά:

1) Τα μη διαγώνια στοιχεία της μήτρας $\mathbf{W}^2$ δηλώνουν τους τρόπους που γίνεται η μετακίνηση από την *i* στη *j* χωρική μονάδα σε δύο βήματα.
2) Τα διαγώνια στοιχεία στη μήτρα $\mathbf{W}^2$ δηλώνουν τους τρόπους που μπορεί να γίνει η μετακίνηση από μια χωρική μονάδα πίσω στην ίδια χωρική μονάδα σε δύο βήματα.

Οι Anselin και Smirnov (1996) έχουν προτείνει την ακόλουθη αλγοριθμική διαδικασία για τη σωστή εύρεση της μήτρας χωρικής γειτονίας δεύτερης τάξης.

1) Αρχικά υπολογίζεται η μήτρα $\mathbf{W}^2$ υψώνοντας στο τετράγωνο τη δυική μήτρα **W**. Τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου στη μήτρα $\mathbf{W}^2$ αντικαθίστανται με μηδέν και τα υπόλοιπα μη μηδενικά στοιχεία με μονάδες. Η νέα μήτρα που προκύπτει συμβολίζεται $\mathbf{B}^{(2)}$.
2) Υπολογίζεται η μήτρα $\mathbf{E}^{(2)} = \mathbf{B}^{(2)} - \mathbf{W}$. Τα αρνητικά στοιχεία στη μήτρα $\mathbf{E}^{(2)}$ θέτονται ίσα με μηδέν και τα θετικά ίσα με μονάδες. Η νέα μήτρα που προκύπτει συμβολίζεται $\mathbf{W}^{(2)}$ και είναι η σωστή μήτρα χωρικής γειτονίας δεύτερης τάξης.

Ο αλγόριθμος συνεχίζει ορίζοντας μια μήτρα συσσώρευσης **A** με τον ίδιο τρόπο για τον υπολογισμό μητρών χωρικής γειτονίας ανωτέρων τάξεων:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A} + \mathbf{W}^{(2)} \quad \text{με αρχική συνθήκη} \quad \mathbf{A} = \mathbf{W}$$

Γενικά για τον υπολογισμό της μήτρας γειτονίας k τάξης η μήτρα συσσώρευσης θα είναι

$$\mathbf{A}^k = \sum_{p=1}^{k-1} \mathbf{W}^{(p)}$$

και θα συλλέγει όλα τα μη μηδενικά στοιχεία των μητρών γειτονίας μέχρι την k-1 τάξη. Συνοπτικά τα δύο βήματα του αλγορίθμου για τον υπολογισμό της μήτρας γειτονίας k τάξης θα είναι:

1) Ορίζεται η $\mathbf{B}^{(k)}$ δυική μήτρα που προκύπτει από την ύψωση στην k δύναμη της μήτρας $\mathbf{W}$ δηλαδή $\mathbf{W}^k$ αφού αντικαθιστούν τα στοιχεία στη κύρια διαγώνιο με μηδέν και τα υπόλοιπα μη μηδενικά στοιχεία με μονάδες.
2) Υπολογίζεται η μήτρα $\mathbf{E}^{(k)} = \mathbf{B}^{(k)} - \mathbf{A}^k$. Κρατώντας τα θετικά στοιχεία της μήτρας $\mathbf{E}^{(k)}$ κατασκευάζεται η μήτρα $\mathbf{W}^{(k)}$ η οποία θα είναι η σωστή (δυική) μήτρα γειτονίας k τάξης.

Για τους γείτονες ανώτερων τάξεων πρέπει να σημειωθούν τα εξής σχόλια:

1) Ο υπολογισμός γειτόνων μεγαλύτερης τάξης έχει νόημα μόνο όταν η γειτονία ορίζεται με δυικό τρόπο. Αυτό σημαίνει πως όταν η αρχική μήτρα $\mathbf{W}$ δεν είναι δυική αλλά έχει υπολογιστεί π.χ. ως εφαρμογή συνάρτησης της απόστασης οι γείτονες ανώτερης τάξης δεν μπορούν να προκύψουν με την προηγούμενη μεθοδολογία.
2) Η μήτρα χωρικής γειτονίας ανώτερης τάξης μπορεί να τυποποιηθεί ανά γραμμή. Κατά συνέπεια μπορούν να οριστούν και χωρικές υστερήσεις ανώτερων τάξεων ως εξής:

$$L^k y_i = \sum_{j=1}^{n} w_{ij}^{(k)} y_j \quad \text{ή} \quad \mathbf{L}^k \mathbf{y} = \mathbf{W}^{(k)} \mathbf{y}$$

3) Όταν έχει εφαρμοστεί συνάρτηση της απόστασης για τον ορισμό της χωρικής γειτονίας έχει νόημα μόνο η χωρική υστέρηση πρώτης τάξης.

Παράδειγμα 2.6

Θα υπολογιστεί η μήτρα χωρικής γειτονίας δεύτερης τάξης για τις πέντε υποθετικές χωρικές μονάδες που παρουσιάζονται στο Διάγραμμα 2.4.

Με βάση το κριτήριο του πύργου η αρχική δυική μήτρα γειτονίας πρώτης τάξης είναι:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Επισημαίνεται ότι εδώ διατηρείται ο συμβολισμός **W** για τη μη τυποποιημένη μήτρα δυικής χωρικής γειτονίας και όχι ο **B**. Η δυική μήτρα χωρικής γειτονίας πρώτης τάξης στο τετράγωνο είναι:

$$\mathbf{W}^2 = \mathbf{W}\cdot\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Υπενθυμίζεται ότι τα μη διαγώνια στοιχεία της μήτρας $\mathbf{W}^2$ δηλώνουν τους τρόπους που γίνεται η μετακίνηση από την *i* στη *j* χωρική μονάδα σε δύο βήματα. Παραδείγματος χάριν:

- Το στοιχείο $w_{12}^2 = 0$ δείχνει ότι δεν υπάρχει κανένας τρόπος που μπορεί να γίνει η μετακίνηση από την 1 στη 2 χωρική μονάδα σε δύο βήματα.
- Το στοιχείο $w_{13}^2 = 1$ δείχνει ότι υπάρχει ένας τρόπος που μπορεί να γίνει η μετακίνηση από την 1 στη 3 χωρική μονάδα σε δύο βήματα. Αυτός είναι: [1→2] και [2→3].
- Το στοιχείο $w_{25}^2 = 2$ δείχνει ότι υπάρχουν δύο τρόποι που μπορεί να γίνει η μετακίνηση από την 2 στη 5 χωρική μονάδα σε δύο βήματα. Αυτοί είναι: α) [2→3] και [3→5], β) [2→4] και [4→5].
- Το στοιχείο $w_{43}^2 = 2$ δείχνει ότι υπάρχουν δύο τρόποι που μπορεί να γίνει η μετακίνηση από την 4 στη 3 χωρική μονάδα σε δύο βήματα. Αυτοί είναι: α) [4→2] και [2→3], β) [4→5] και [5→3].

Επίσης, τα διαγώνια στοιχεία στη μήτρα $\mathbf{W}^2$ δηλώνουν τους τρόπους που μπορεί να γίνει η μετακίνηση από μια χωρική μονάδα πίσω στην ίδια χωρική μονάδα σε δύο βήματα. Παραδείγματος χάριν:

- Το στοιχείο $w_{11}^2 = 1$ δείχνει ότι υπάρχει ένας τρόπος που μπορεί να γίνει η μετακίνηση από την 1 χωρική μονάδα πίσω στην ίδια χωρική μονάδα σε δύο βήματα. Αυτός είναι: [1→2] και [2→1].
- Το στοιχείο $w_{22}^2 = 3$ δείχνει ότι υπάρχουν τρείς τρόποι που μπορεί να γίνει η μετακίνηση από την 2 χωρική μονάδα πίσω στην ίδια χωρική μονάδα σε δύο βήματα. Αυτοί είναι: α) [2→1] και [1→2], β) [2→4] και [4→2], γ) [2→3] και [3→2].

- Το στοιχείο $w_{55}^{2} = 2$ δείχνει ότι υπάρχουν δύο τρόποι που μπορεί να γίνει η μετακίνηση από την 5 χωρική μονάδα πίσω στην ίδια χωρική μονάδα σε δύο βήματα. Αυτοί είναι: α) [5→3] και [3→5], β) [5→4] και [4→5].

1) Στο πρώτο βήμα του αλγορίθμου υπολογίζεται η μήτρα $\mathbf{W}^2$ υψώνοντας στο τετράγωνο τη δυική μήτρα **W**. Η μήτρα αυτή (έχει ήδη υπολογιστεί) είναι η

$$\mathbf{W}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Στη μήτρα $\mathbf{W}^2$ αντικαθίστανται με μηδέν τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου και με μονάδες τα υπόλοιπα μη μηδενικά στοιχεία και προκύπτει η μήτρα $\mathbf{B}^{(2)}$, δηλαδή:

$$\mathbf{B}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2) Στο δεύτερο βήμα του αλγορίθμου υπολογίζεται η μήτρα $\mathbf{E}^{(2)} = \mathbf{B}^{(2)} - \mathbf{W}$ ως εξής:

$$\mathbf{E}^{(2)} = \mathbf{B}^{(2)} - \mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ οπότε}$$

$$\mathbf{E}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Αφού τεθούν τα αρνητικά στοιχεία στη μήτρα $\mathbf{E}^{(2)}$ ίσα με μηδέν και τα θετικά (εάν έχουν τιμές μεγαλύτερες του 1) ίσα με μονάδες προκύπτει η σωστή μήτρα χωρικής γειτονίας δεύτερης τάξης $\mathbf{W}^{(2)}$ που είναι η:

$$\mathbf{W}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

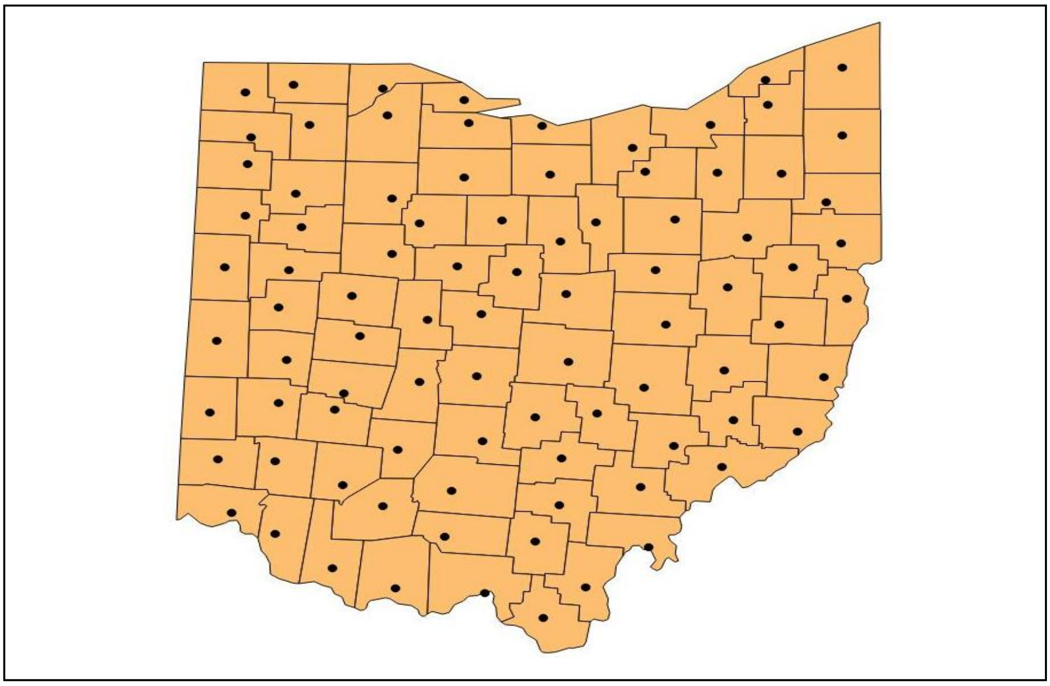
Από τη μήτρα αυτή διαπιστώνονται ότι:

- Η χωρική μονάδα 1 έχει γείτονες δεύτερης τάξης τις χωρικές μονάδες 3 και 4 (οι οποίες αποτελούν γείτονες πρώτης τάξης στη χωρική μονάδα 2 που είναι γείτονας πρώτης τάξης της χωρικής μονάδας 1).
- Η χωρική μονάδα 2 έχει γείτονα δεύτερης τάξης τη χωρική μονάδα 5 (που αποτελεί γείτονα πρώτης τάξης στις χωρικές μονάδες 3 και 4 που είναι γείτονες πρώτης τάξης της χωρικής μονάδας 2).
- Η χωρική μονάδα 3 έχει γείτονα δεύτερης τάξης τη χωρική μονάδα 1 (που αποτελεί γείτονα πρώτης τάξης στη χωρική μονάδα 2 που είναι γείτονας πρώτης τάξης της χωρικής μονάδας 3).
- Η χωρική μονάδα 4 έχει γείτονα δεύτερης τάξης τη χωρική μονάδα 1 (που αποτελεί γείτονα πρώτης τάξης στη χωρική μονάδα 2 που είναι γείτονας πρώτης τάξης της χωρικής μονάδας 4).
- Η χωρική μονάδα 5 έχει γείτονα δεύτερης τάξης τη χωρική μονάδα 2 (που αποτελεί γείτονα πρώτης τάξης στις χωρικές μονάδες 3 και 4 που είναι γείτονες πρώτης τάξης της χωρικής μονάδας 5).

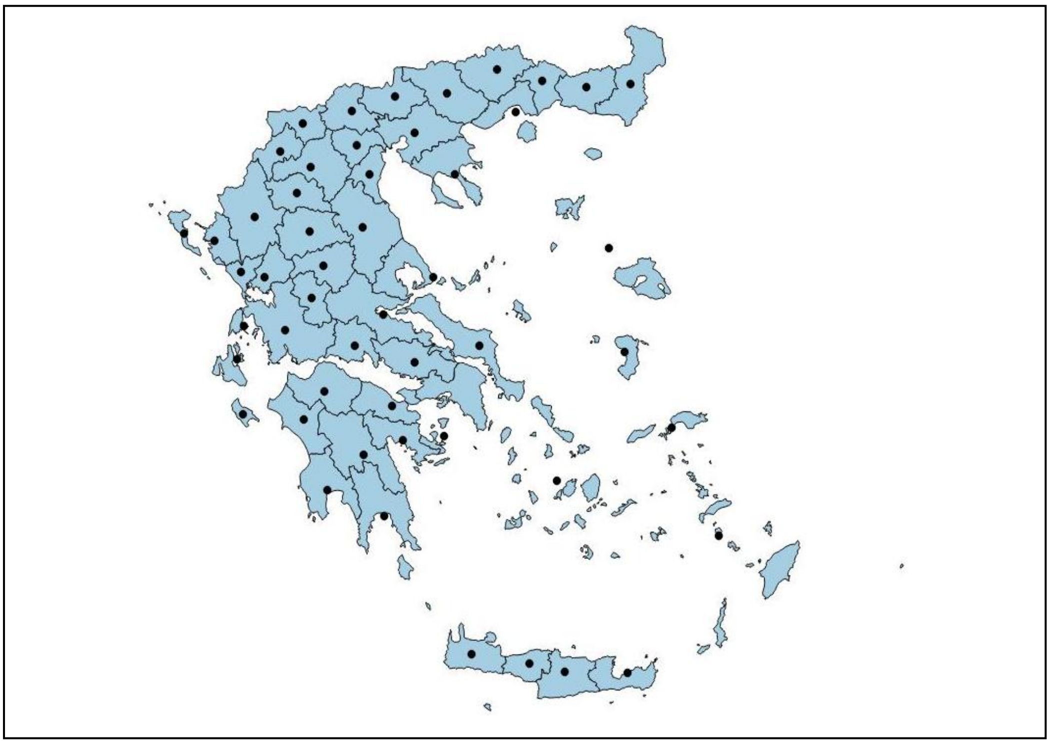
2.7 Γενικά σχόλια για τις μήτρες χωρικής γειτονίας και σταθμίσεων

1) Οι μήτρες χωρικής γειτονίας συνήθως χρησιμοποιούνται στην τυποποιημένη τους μορφή διότι έτσι ισχύουν συνθήκες ομαλότητας όταν γίνεται η εκτίμηση των χωρικών οικονομετρικών υποδειγμάτων.
2) Όταν έχουμε χωρικά δεδομένα που αντιστοιχούν σε πολύγωνα (χώρες, νομοί, απογραφικά τετράγωνα) κάτι που είναι και η πιο κοινή περίπτωση και θέλουμε να κατασκευάσουμε μήτρες χωρικής γειτονίας που βασίζονται σε κριτήρια απόστασης πρέπει να θεωρηθούν κάποιες γεωγραφικές συντεταγμένες στις όποιες θα αντιστοιχεί η κάθε παρατήρηση. Τέτοιες γεωγραφικές συντεταγμένες θα μπορούσαν να είναι:
    - Οι γεωγραφικές συντεταγμένες της πρωτεύουσας της χώρας ή του νομού ή της πόλης που θεωρείται ότι είναι αντιπροσωπευτική του κάθε πολυγώνου.
    - Οι γεωγραφικές συντεταγμένες του κέντρου βάρους (*centroid*) του πολυγώνου. Ωστόσο, το κέντρο βάρους μπορεί να βρεθεί εκτός του πολυγώνου ενώ δεν είναι πάντα εύκολο να υπολογιστεί ακόμη και με εξειδικευμένο λογισμικό.
    - Οι γεωγραφικές συντεταγμένες του μέσου όρου των συντεταγμένων (*central point*) του πολυγώνου. Αυτές οι συντεταγμένες συνήθως χρησιμοποιούνται στις περισσότερες εφαρμογές και υπολογίζονται και στο λογισμικό χωρικής ανάλυσης GeoDa.

Στο Διάγραμμα 2.5 απεικονίζεται ο χάρτης με τις 88 κομητείες της πολιτείας Οχάιο των ΗΠΑ με τα γεωγραφικά κεντροειδή (*central points*) κάθε κομητείας (πολυγώνου). Αντίστοιχα, ο χάρτης στο Διάγραμμα 2.6 απεικονίζει τους 51 νομούς της Ελλάδας (πολύγωνα) με τα κεντροειδή τους (*central points*). Διαπιστώνεται ότι λόγω της γεωγραφικής ιδιομορφίας της χώρας για αρκετούς νομούς (ακόμη και για το νομό Αττικής!) τα κεντροειδή εντοπίζονται σε θαλάσσιο χώρο.



Διάγραμμα 2.5
Οι 88 κομητείες της πολιτείας Οχάιο των ΗΠΑ με τα κεντροειδή τους (central points)



Διάγραμμα 2.6
Οι 51 νομοί της Ελλάδας με τα κεντροειδή τους (*central points*)

3) Στις εμπειρικές εφαρμογές της χωρικής οικονομετρίας η χρησιμοποίηση των κριτηρίων και οι απαραίτητοι υπολογισμοί για την παραγωγή της μήτρας χωρικών σταθμίσεων γίνονται με τη βοήθεια ψηφιακών χαρτών μέσα από γεωγραφικά συστήματα πληροφοριών και εξειδικευμένων λογισμικών χωρικής ανάλυσης. Χωρίς τη βοήθεια των ηλεκτρονικών υπολογιστών δεν είναι δυνατόν να οριστούν οι μήτρες λόγω της πολυπλοκότητας των συγκρίσεων και της δυσκολίας των μαθηματικών υπολογισμών που απαιτούνται.
4) Ο ερευνητής μπορεί να παρέμβει και να αλλάξει τα στοιχεία της μήτρας χωρικών σταθμίσεων που έχει κατασκευαστεί από το λογισμικό. Παραδείγματος χάριν, λόγω λάθους στον ψηφιακό χάρτη η της ιδιαιτερότητας της υπό μελέτης περιοχής δύο χωρικές μονάδες μπορεί να μην προκύπτουν γειτονικές ενώ στην πραγματικότητα είναι. Δύο περιοχές μπορεί να μην έχουν φυσικά σύνορα αλλά να έχουν οικονομικές αλληλεπιδράσεις και κατά κάποιο τρόπο να συνορεύουν. Επιπρόσθετα κάποιες γεωγραφικές συντεταγμένες όταν υπολογίζονται κεντροειδή μπορεί να βρεθούν εκτός των πολυγώνων και να πρέπει να διορθωθούν από τον ερευνητή.
5) Για μια γεωγραφική περιοχή ανάλυσης η μήτρα χωρικής γειτονίας μπορεί να κατασκευαστεί με διαφορετικούς τρόπους. Για παράδειγμα όταν χρησιμοποιείται το κριτήριο των *k* κοντινών γειτόνων συνήθως κατασκευάζεται για διαφορετικές τιμές του *k*. Όσο αυξάνεται η τιμή του *k* η μήτρα θα γίνεται πιο πυκνή και θα αυξάνεται η επίδραση από τις γειτονικές περιοχές. Ο ερευνητής ενδιαφέρεται να εξετάσει πόσο επηρεάζονται τα αποτελέσματα της ανάλυσής του με τις διαφορετικές μήτρες χωρικής γειτονίας που χρησιμοποιεί πραγματοποιώντας ανάλυση ευαισθησίας (*sensitivity analysis*).
6) Η μήτρα χωρικής γειτονίας **W** και ως αποτέλεσμα της τυποποίησης η μήτρα χωρικών σταθμίσεων χρησιμοποιούνται για να μοντελοποιηθεί η αλληλεπίδραση των γειτονικών περιοχών σε μια χωρική ανάλυση αλλά **δεν πρέπει** να θεωρούνται διότι **δεν είναι** μήτρες συνδιακυμάνσεων.