

ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ

Στέλιος Ζήμερας
Αναπληρωτής Καθηγητής
Τμήμα Στατιστικής και Αναλογιστικών-
Χρηματοοικονομικών Μαθηματικών

Σαμος

2020

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

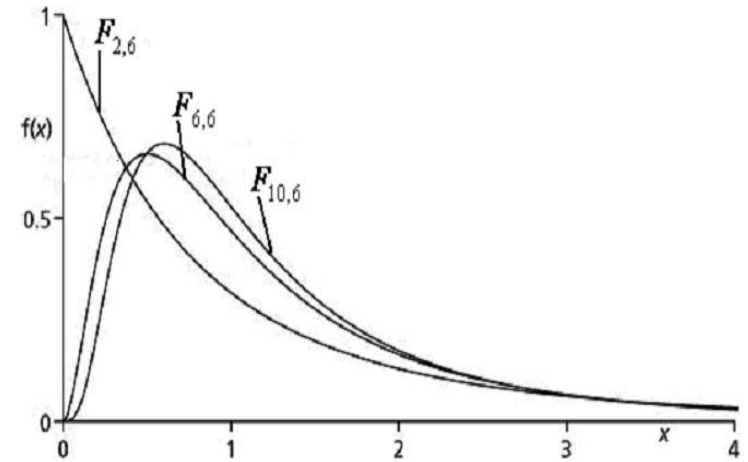
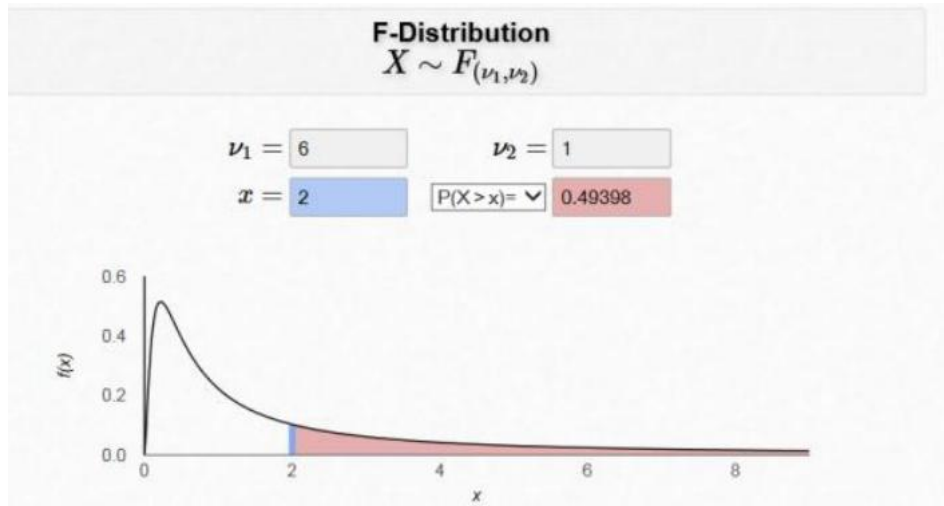
<https://homepage.divms.uiowa.edu/~mbognar/applets/f.html>

Προσομοίωση F-κατανομής

F-Distribution
 $X \sim F(\nu_1, \nu_2)$

$\nu_1 =$ $\nu_2 =$

$x =$ $P(X > x) =$



ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

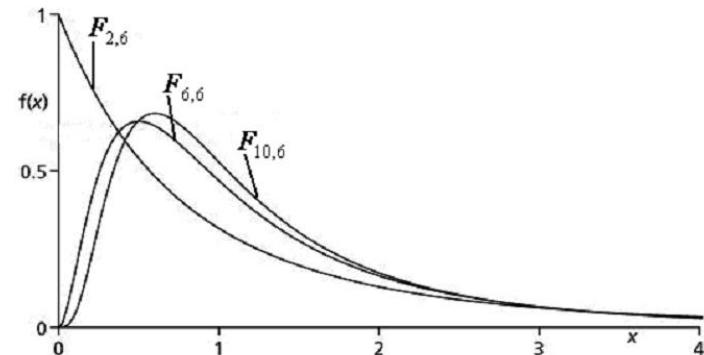
Η κατανομή F (F -distribution)

Έστω S_n και S_m δύο ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές οι οποίες ακολουθούν τις κατανομές χ_n^2 και χ_m^2 αντίστοιχα. Τότε, η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής,

$$F = \frac{\frac{S_n}{n}}{\frac{S_m}{m}}$$

ονομάζεται **κατανομή F με n και m βαθμούς ελευθερίας** και συμβολίζεται με $F_{n,m}$.

Όπως και για τις κατανομές χ_n^2 και t_n , πρόκειται για οικογένεια κατανομών. Για κάθε τιμή του n και κάθε τιμή του m παίρνουμε μια άλλη $F_{n,m}$ κατανομή. Επίσης, είναι φανερό ότι μια τυχαία μεταβλητή X που ακολουθεί μια $F_{n,m}$ κατανομή δεν παίρνει αρνητικές τιμές. Στο σχήμα που ακολουθεί φαίνεται η γραφική παράσταση της **συνάρτησης πυκνότητας** της $F_{n,m}$ για διάφορες τιμές των n και m . Παρατηρείστε ότι όσο αυξάνονται οι **βαθμοί ελευθερίας n και m** τόσο η (θετική) **ασυμμετρία** της γραφικής παράστασης της **συνάρτησης πυκνότητας** της $F_{n,m}$ μειώνεται.



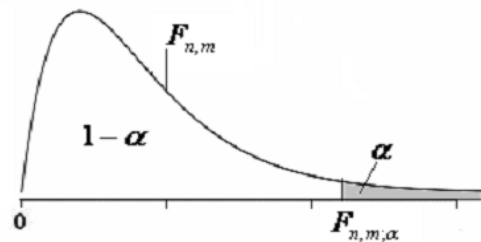
ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Αποδεικνύεται ότι η μέση τιμή και η διασπορά μιας τυχαίας μεταβλητής X που ακολουθεί την κατανομή $F_{n,m}$ ($X \sim F_{n,m}$) είναι, αντίστοιχα, $E(X) = \frac{m}{m-2}$ (για

$m > 2$) και $V(X) = \frac{2 \cdot m^2 \cdot (n+m-2)}{n \cdot (m-2)^2 \cdot (m-4)}$ (για $m > 4$). Παρατηρείστε ότι η μέση τιμή

της $F_{n,m}$ εξαρτάται μόνο από τους βαθμούς ελευθερίας, m , του παρανομαστή.

Όπως για τις κατανομές χ_n^2 και t_n που παρουσιάσαμε προηγουμένως, έτσι και για την κατανομή F με n και m βαθμούς ελευθερίας έχουν δημιουργηθεί πίνακες που δίνουν, για διάφορες τιμές του α , του n και του m , τα άνω α -ποσοστιαία σημεία της, τα οποία συμβολίζονται με $F_{n,m;\alpha}$ ή με $F_{n,m}(\alpha)$. Όπως φαίνεται και στο σχήμα που ακολουθεί, αν μια τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κατανομή $F_{n,m}$, δηλαδή αν $X \sim F_{n,m}$, τότε το $F_{n,m;\alpha}$ είναι εκείνη η τιμή της X για την οποία ισχύει $P(X > F_{n,m;\alpha}) = \alpha$, ή ισοδύναμα, $P(X \leq F_{n,m;\alpha}) = 1 - \alpha$.



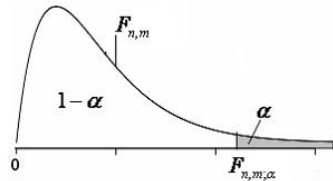
Έτσι από τον πίνακα που υπάρχει στο τέλος της ενότητας παίρνουμε, για παράδειγμα, $F_{6,6;0.05} = 4.28$, $F_{10,6;0.05} = 4.06$ και $F_{6,10;0.05} = 3.22$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Τιμές $F_{n,m;\alpha}$ της κατανομής $F_{n,m}$

Οι Πίνακες δίνουν τα άνω α -ποσοστιαία σημεία της κατανομής F με n και m βαθμούς ελευθερίας, για $\alpha = 0.05$ και $\alpha = 0.01$, αντίστοιχα.

Αν $X \sim F_{n,m}$, ισχύει, $P(X > F_{n,m;\alpha}) = \alpha$. Επίσης ισχύει, $F_{n,m;1-\alpha} = 1/F_{m,n;\alpha}$



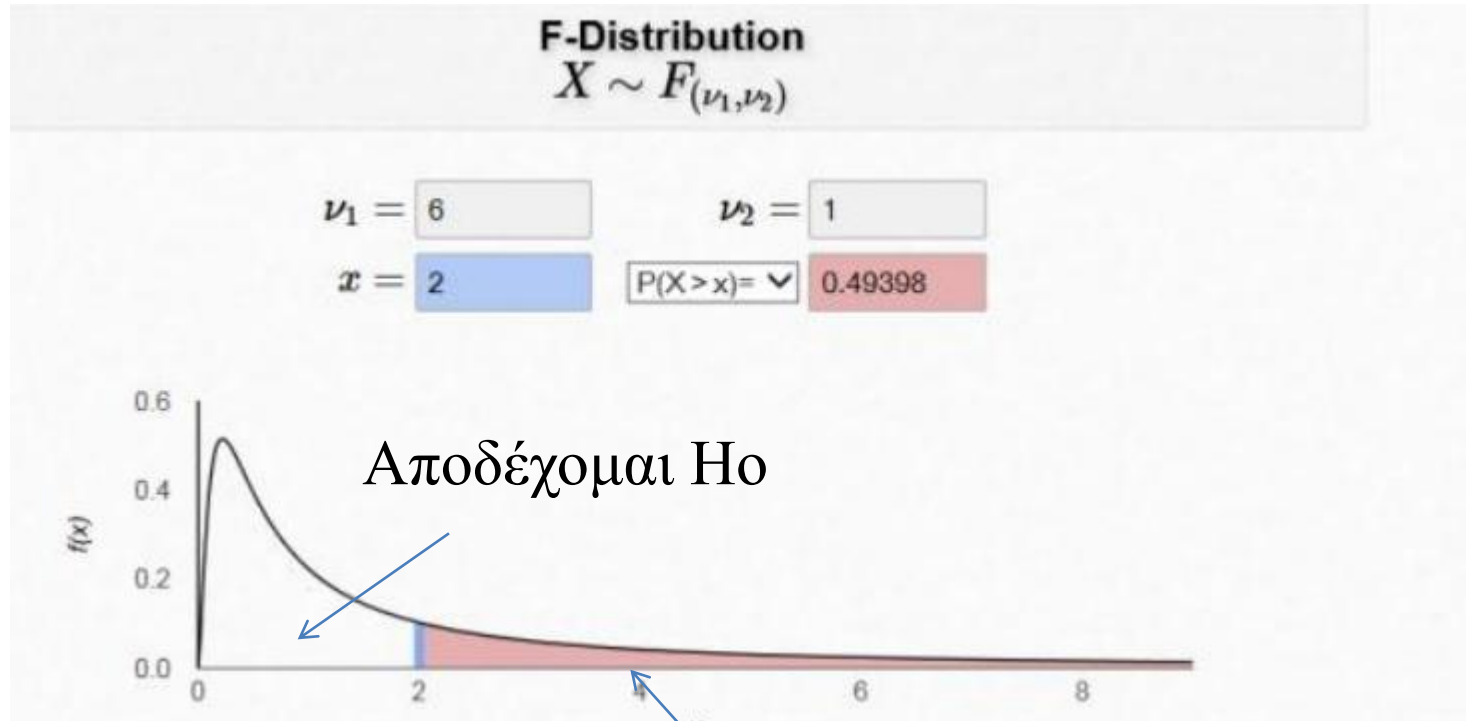
n = βαθμός ελευθερίας για τον αριθμητή

$\alpha = 0.05$

m = βαθμός ελευθερίας για τον παρονομαστή

$m \backslash n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	244	246	248	249	250	251	252	253	254
2	18.5	19.0	19.2	19.3	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5
3	10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.37
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62
40	4.09	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ



ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

F-Distribution

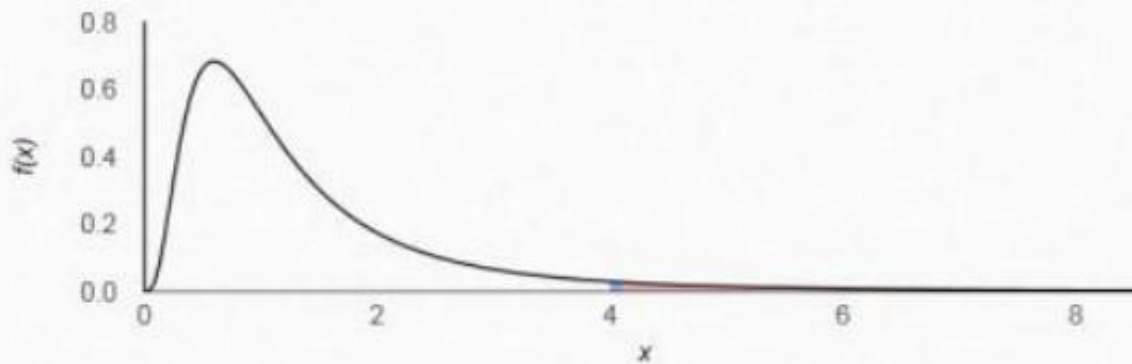
$$X \sim F(\nu_1, \nu_2)$$

$\nu_1 =$

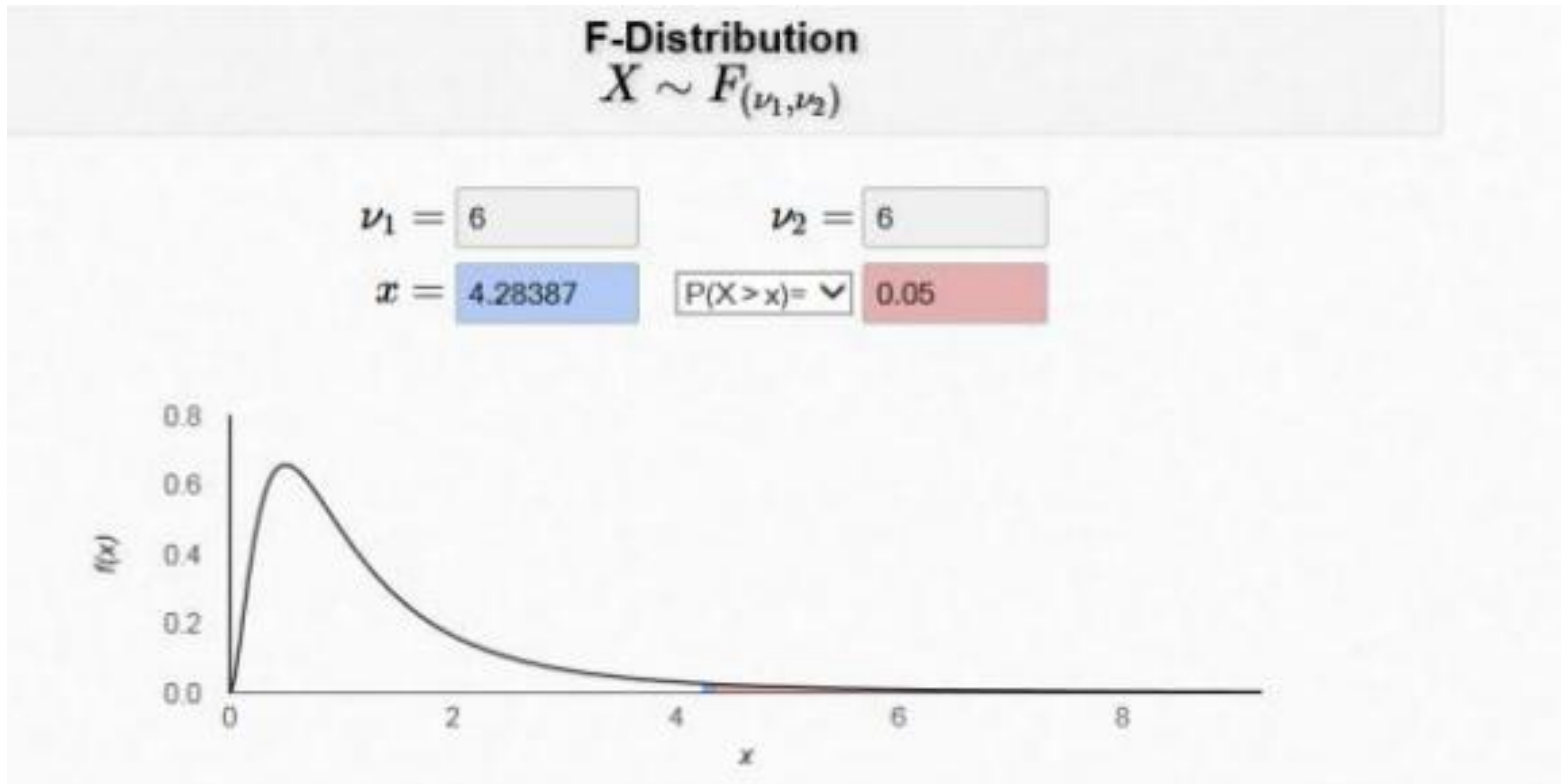
$\nu_2 =$

$x =$

$P(X > x) =$



ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ



ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

<https://statpages.info/anova1sm.html>

Enter your summary data here...

Group Name	N (count)	Mean	Std. Dev.
Group 1	20	164.5	28.3
Group 2	23	140.1	23.9
Group 3	18	156.6	26.1
Group 4			
Group 5			
Group 6			
Group 7			
Group 8			
Group 9			
Group 10			

δεδομένα

υπολογισμός

Desired confidence level for post-hoc confidence intervals: 95

Compute

Πίνακας ANOVA

ANOVA Table...

Source of Variation	Sum of Squares	d.f.	Variance	F	p
Between Groups:					
Within Groups:					
Total:					

Post-hoc tests...

Πολλαπλές συγκρίσεις

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Enter your summary data here...

Group Name	N (count)	Mean	Std. Dev.
Group 1	20	164.5	28.3
Group 2	23	140.1	23.9
Group 3	18	156.6	26.1
Group 4			
Group 5			
Group 6			
Group 7			
Group 8			
Group 9			
Group 10			

Διαφορετικές τ.α.

Desired confidence level for post-hoc confidence intervals: 95

Compute

Μη στατιστική διαφορά

ANOVA Table...

Source of Variation	Sum of Squares	d.f.	Variance	F	p
Between Groups:	6705.6508	2	3352.8254	4.9401	0.0104
Within Groups:	39364.1000	58	678.6914		
Total:	46069.7508	60			

Post-hoc tests...

Tukey HSD Post-hoc Test...
Group 1 vs Group 2: Diff=-24.4000, 95%CI=-43.5586 to -5.2414, p=0.0092
Group 1 vs Group 3: Diff=-7.9000, 95%CI=-28.2586 to 12.4586, p=0.6216
Group 2 vs Group 3: Diff=16.5000, 95%CI=-3.2197 to 36.2197, p=0.1182

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Ιδέες τ.α - μικρες.

Enter your summary data here...

Group Name	N (count)	Mean	Std. Dev.
Group 1	20	164.5	20
Group 2	23	140.1	20
Group 3	18	156.6	20
Group 4			
Group 5			
Group 6			
Group 7			
Group 8			
Group 9			
Group 10			

Desired confidence level for post-hoc confidence intervals: 95

Compute

ANOVA Table...

Source of Variation	Sum of Squares	d.f.	Variance	F	p
Between Groups:	6705.6508	2	3352.8254	8.3821	0.0006
Within Groups:	23200.0000	58	400.0000		
Total:	29905.6508	60			

Post-hoc tests...

Tukey HSD Post-hoc Test...
Group 1 vs Group 2: Diff=-24.4000, 95%CI=-39.1081 to -9.6919, p=0.0005
Group 1 vs Group 3: Diff=-7.9000, 95%CI=-23.5294 to 7.7294, p=0.4488
Group 2 vs Group 3: Diff=16.5000, 95%CI=1.3611 to 31.6389, p=0.0296

στατιστική διαφορά

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Enter your summary data here...

Group Name	N (count)	Mean	Std. Dev.
Group 1	20	164.5	100
Group 2	23	140.1	100
Group 3	20	156.6	100
Group 4			
Group 5			
Group 6			
Group 7			
Group 8			
Group 9			
Group 10			

Desired confidence level for post-hoc confidence intervals: 95

Compute

ANOVA Table...

Source of Variation	Sum of Squares	d.f.	Variance	F	p
Between Groups:	6731.1841	2	3365.5921	0.3366	0.7156
Within Groups:	600000.0000	60	10000.0000		
Total:	606731.1841	62			

Post-hoc tests...

Tukey HSD Post-hoc Test...
Group 1 vs Group 2: Diff=-24.4000, 95%CI=-97.8765 to 49.0765, p=0.7057
Group 1 vs Group 3: Diff=-7.9000, 95%CI=-83.8964 to 68.0964, p=0.9662
Group 2 vs Group 3: Diff=16.5000, 95%CI=-56.9765 to 89.9765, p=0.8521

Ιδέες τ.α - μεγάλες

μη στατιστική διαφορά

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Group Name	N (count)	Mean	Std. Dev.
Group 1	20	164.5	25
Group 2	23	140.1	23
Group 3	18	156.6	26
Group 4	25	147.3	20
Group 5	29	162.6	22
Group 6			
Group 7			
Group 8			
Group 9			
Group 10			

Διαφορετικές τ.α.

Desired confidence level for post-hoc confidence intervals: 95

Compute

ANOVA Table...

Source of Variation	Sum of Squares	d.f.	Variance	F	p
Between Groups:	10034.4609	4	2508.6152	4.7449	0.0014
Within Groups:	58157.0000	110	528.7000		
Total:	68191.4609	114			

στατιστική διαφορά

Post-hoc tests...

```
Tukey HSD Post-hoc Test...
Group 1 vs Group 2: Diff=-24.4000, 95%CI=-43.8978 to -4.9022, p=0.0065
Group 1 vs Group 3: Diff=-7.9000, 95%CI=-28.6191 to 12.8191, p=0.8277
Group 1 vs Group 4: Diff=-17.2000, 95%CI=-36.3316 to 1.9316, p=0.0996
Group 1 vs Group 5: Diff=-1.9000, 95%CI=-20.4359 to 16.6359, p=0.9985
Group 2 vs Group 3: Diff=16.5000, 95%CI=-3.5689 to 36.5689, p=0.1591
Group 2 vs Group 4: Diff=7.2000, 95%CI=-11.2254 to 25.6254, p=0.8145
```

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

<http://www.rossmanchance.com/applets/AnovaSim.html>

Simulating ANOVA Tables

Μετριά διακύμανση

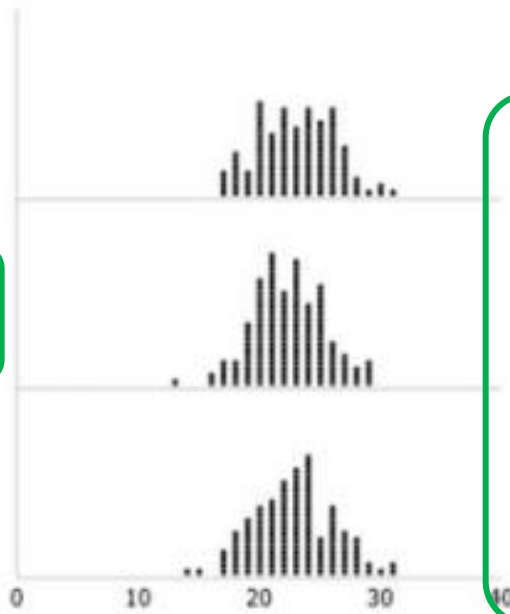
$\mu_1 = 23$
 $\mu_2 = 23$
 $\mu_3 = 23$
 $\sigma = 3$

$n_1 = 120$
 $n_2 = 142$
 $n_3 = 131$

Draw Samples

ANOVA output:

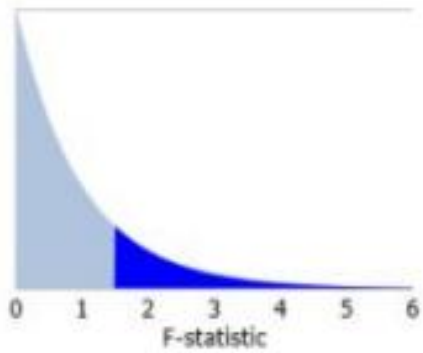
Source	df	Sum Sq	Mean Sq	F	p-value
Groups	2	29.06	14.53	1.49	0.2276
Error	390	3813.11	9.78		
Total	392				



Group 1 (n=120)
mean = 23.008
SD = 3.123

Group 2 (n=142)
mean = 22.359
SD = 2.959

Group 3 (n=131)
mean = 22.794
SD = 3.302



Dotplots Boxplots
Reset

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Simulating ANOVA Tables

Μικρή διακύμανση

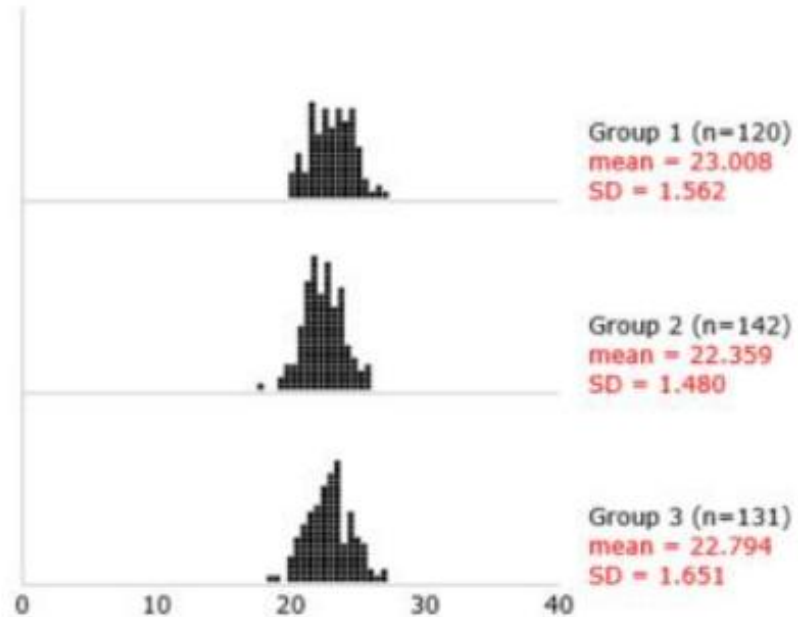
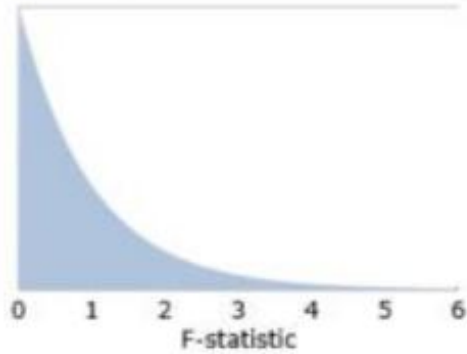
$\mu_1 = 23$
 $\mu_2 = 23$
 $\mu_3 = 23$
 $\sigma = 1.5$

$n_1 = 120$
 $n_2 = 142$
 $n_3 = 131$

Draw Samples

ANOVA output:

Source	df	Sum Sq	Mean Sq	F	p-value
Groups	2	29.06	14.53	5.94	0.0029
Error	390	953.28	2.44		
Total	392				



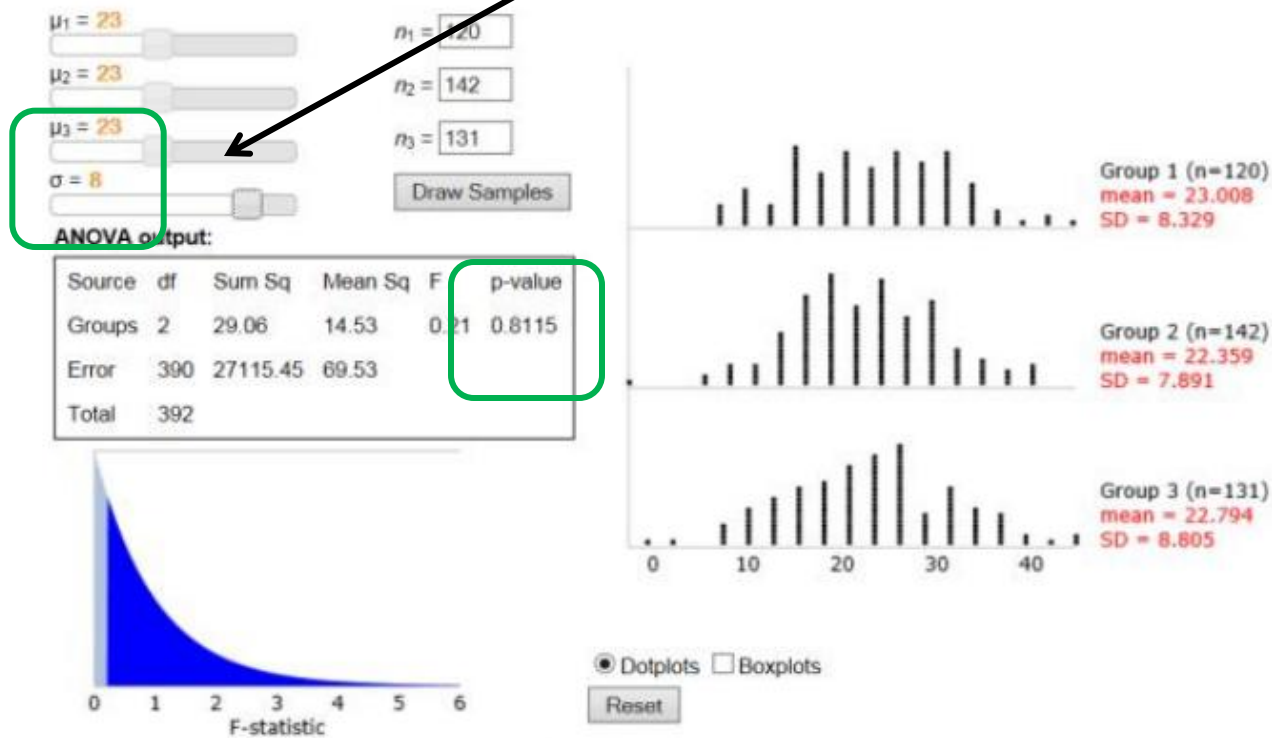
Dotplots Boxplots

Reset

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

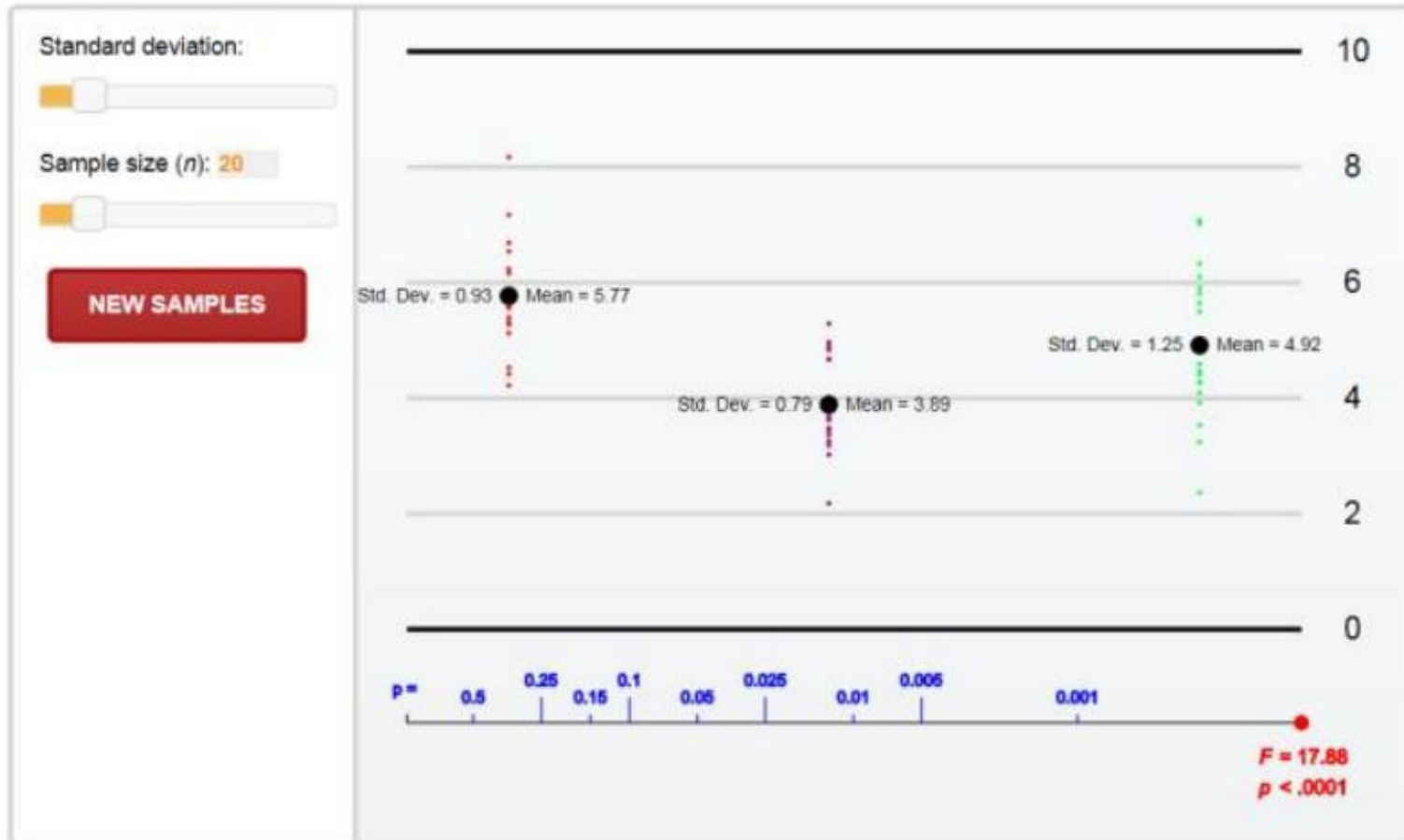
Μεγάλη διακύμανση

Simulating ANOVA Tables



ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

http://digitalfirst.bfwpub.com/stats_applet/stats_applet_1_anova.html



ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

