Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Εισαγωγή στην Πληροφορική

Ενότητα 3: Άλγεβρα Boole

Ανδρέας Παπασαλούρος

Τμήμα Μαθηματικών

Σάμος, Απρίλιος 2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Εισαγωγικά

- Οι σύγχρονοι υπολογιστές αποτελούνται από ηλεκτρονικά κυκλώματα.
- Τα θεμελιώδη στοιχεία τους είναι δυνατόν να βρίσκονται σε *δύο* καταστάσεις
- Κατά την εκτέλεση υπολογισμών μεταβαίνουν από τη μία κατάσταση στην άλλη.
- Η άλγεβρα Boole είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για τον σχεδιασμό και την ανάλυση των ηλεκτρονικών κυκλωμάτων που υλοποιούν τις λειτουργίες των υπολογιστών.

Εισαγωγή στην Άλγεβρα Boole

Η άλγεβρα Boole ορίζεται σε ένα σύνολο στοιχείων, A μαζί με τους ακόλουθους δύο τελεστές:

- τον τελεστή $+$ ή $\vee$,
- τον τελεστή $\cdot$ ή $\wedge$.

Αξιώματα της άλγεβρας Boole

Αξιώματα της άλγεβρας Boole

1. Αν τα στοιχεία a και b ανήκουν στο A τότε και τα $a + b$ και $a \cdot b$ ανήκουν στο A (κλειστότητα ως προς τους τελεστές $+$ και $\cdot$).

Αξιώματα της άλγεβρας Boole

1. Αν τα στοιχεία a και b ανήκουν στο A τότε και τα $a+b$ και $a \cdot b$ ανήκουν στο A (κλειστότητα ως προς τους τελεστές $+$ και $\cdot$).
2. Αντιμετάθεση ως προς $+$ και $\cdot$: $a+b=b+a$ και $a \cdot b = b \cdot a$.

Αξιώματα της άλγεβρας Boole

1. Αν τα στοιχεία a και b ανήκουν στο A τότε και τα $a+b$ και $a \cdot b$ ανήκουν στο A (κλειστότητα ως προς τους τελεστές $+$ και $\cdot$).
2. Αντιμετάθεση ως προς $+$ και $\cdot$: $a+b=b+a$ και $a \cdot b = b \cdot a$.
3. Επιμεριστικότητα: $a \cdot (b+c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ και $a + (b \cdot c) = (a+b) \cdot (a+c)$.

Αξιώματα της άλγεβρας Boole

1. Αν τα στοιχεία a και b ανήκουν στο A τότε και τα $a+b$ και $a \cdot b$ ανήκουν στο A (κλειστότητα ως προς τους τελεστές $+$ και $\cdot$).
2. Αντιμετάθεση ως προς $+$ και $\cdot$: $a+b=b+a$ και $a \cdot b = b \cdot a$.
3. Επιμεριστικότητα: $a \cdot (b+c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ και $a + (b \cdot c) = (a+b) \cdot (a+c)$.
4. Υπάρχει ουδέτερο στοιχείο, 0, ως προς $+$: $a+0=a$ και ουδέτερο στοιχείο, 1, ως προς $\cdot$: $a \cdot 1 = a$.

Αξιώματα της άλγεβρας Boole

1. Αν τα στοιχεία a και b ανήκουν στο A τότε και τα $a+b$ και $a \cdot b$ ανήκουν στο A (κλειστότητα ως προς τους τελεστές $+$ και $\cdot$).
2. Αντιμετάθεση ως προς $+$ και $\cdot$: $a+b=b+a$ και $a \cdot b = b \cdot a$.
3. Επιμεριστικότητα: $a \cdot (b+c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ και $a + (b \cdot c) = (a+b) \cdot (a+c)$.
4. Υπάρχει ουδέτερο στοιχείο, 0, ως προς $+$: $a+0=a$ και ουδέτερο στοιχείο, 1, ως προς $\cdot$: $a \cdot 1 = a$.
5. Για κάθε στοιχείο a στο A υπάρχει μοναδικό στοιχείο a' ή $\bar{a}$ στο A: $a+\bar{a}=1$ και $a \cdot \bar{a} = 0$. Το στοιχείο $\bar{a}$ ονομάζεται *συμπλήρωμα* του a.

Αξιώματα της άλγεβρας Boole

1. Αν τα στοιχεία a και b ανήκουν στο A τότε και τα $a+b$ και $a \cdot b$ ανήκουν στο A (κλειστότητα ως προς τους τελεστές $+$ και $\cdot$).
2. Αντιμετάθεση ως προς $+$ και $\cdot$: $a+b=b+a$ και $a \cdot b = b \cdot a$.
3. Επιμεριστικότητα: $a \cdot (b+c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ και $a + (b \cdot c) = (a+b) \cdot (a+c)$.
4. Υπάρχει ουδέτερο στοιχείο, 0, ως προς $+$: $a+0=a$ και ουδέτερο στοιχείο, 1, ως προς $\cdot$: $a \cdot 1 = a$.
5. Για κάθε στοιχείο a στο A υπάρχει μοναδικό στοιχείο a' ή $\bar{a}$ στο A: $a+\bar{a}=1$ και $a \cdot \bar{a} = 0$. Το στοιχείο $\bar{a}$ ονομάζεται *συμπλήρωμα* του a.
6. Υπάρχουν δύο τουλάχιστον στοιχεία του A τα οποία είναι διαφορετικά μεταξύ τους.

Δίτιμη άλγεβρα Boole

- Για διαφορετικά σύνολα A προκύπτουν διαφορετικές άλγεβρες Boole.
- Στη συνέχεια θα παρουσιαστεί η *δίτιμη* άλγεβρα Boole στην οποία το σύνολο A έχει μόνο δύο στοιχεία.
- Η άλγεβρα αυτή έχει εφαρμογές μεταξύ άλλων
  - στη μελέτη των *λογικών κυκλωμάτων* που χρησιμοποιούνται στους υπολογιστές
  - στην *προτασιακή λογική*.
- Στη δίτιμη άλγεβρα Boole το σύνολο A έχει δύο στοιχεία, το 0 και το 1.
- Η άλγεβρα αυτή αποτελεί άλγεβρα των *λογικών σχέσεων*.

Δίτιμη άλγεβρα Boole

Δίτιμη άλγεβρα Boole

Τα στοιχεία 0 και 1 αντιστοιχίζονται στις λογικές τιμές ‘ψευδές’ και ‘αληθές’

Δίτιμη άλγεβρα Boole

Τα στοιχεία 0 και 1 αντιστοιχίζονται στις λογικές τιμές ‘ψευδές’ και ‘αληθές’

Ο τελεστής + αντιστοιχεί στη λογική διάζευξη (OR – Η)

Δίτιμη άλγεβρα Boole

Τα στοιχεία 0 και 1 αντιστοιχίζονται στις λογικές τιμές ‘ψευδές’ και ‘αληθές’

Ο τελεστής $+$ αντιστοιχεί στη λογική διάζευξη (OR – Η)

Ο τελεστής $\cdot$ αντιστοιχεί στη λογική σύζευξη (AND – ΚΑΙ)

Δίτιμη άλγεβρα Boole

Τα στοιχεία 0 και 1 αντιστοιχίζονται στις λογικές τιμές 'ψευδές' και 'αληθές'

Ο τελεστής $+$ αντιστοιχεί στη λογική διάζευξη (OR – Η)

Ο τελεστής $\cdot$ αντιστοιχεί στη λογική σύζευξη (AND – ΚΑΙ)

Το συμπλήρωμα αντιστοιχεί στην πράξη της λογικής άρνησης (NOT – ΟΧΙ).

Δίτιμη άλγεβρα Boole

Τα στοιχεία 0 και 1 αντιστοιχίζονται στις λογικές τιμές ‘ψευδές’ και ‘αληθές’

Ο τελεστής $+$ αντιστοιχεί στη λογική διάζευξη (OR – Η)

Ο τελεστής $\cdot$ αντιστοιχεί στη λογική σύζευξη (AND – ΚΑΙ)

Το συμπλήρωμα αντιστοιχεί στην πράξη της λογικής άρνησης (NOT – ΟΧΙ).

Οι τιμές των τελεστών δίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

a	b	$a+b$	$a \cdot b$	$\bar{a}$
0	0	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	1	0	0
1	1	1	1	0

Στον παραπάνω πίνακα, κάθε τελεστής αντιστοιχεί σε μια *λογική πράξη*.

Ένας τέτοιος πίνακας ονομάζεται *πίνακας αλήθειας*.

Δίτιμη άλγεβρα Boole

Είναι φανερό ότι οι τιμές 0 και 1 στον παραπάνω πίνακα αντιστοιχίζονται στις τιμές 'αληθές' (Α) και 'ψευδές'(Ψ) του επόμενου πίνακα, στον οποίο είναι εμφανής η σημασία των λογικών τελεστών.

a	b	a Η b	a ΚΑΙ b	ΟΧΙ a
Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Α	Α	Ψ	Α
Α	Ψ	Α	Ψ	Ψ
Α	Α	Α	Α	Ψ

Οι τιμές των τελεστών $+$, $\cdot$ καθώς και του συμπληρώματος ικανοποιούν τα αξιώματα της άλγεβρας Boole.

Παράδειγμα

Επιμεριστική ιδιότητα

a	b	c	$a+(b \cdot c)$	$(a+b) \cdot (a+c)$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

Για κάθε συνδυασμό τιμών των μεταβλητών a, b και c οι τιμές στις δύο τελευταίες στήλες του *πίνακα αλήθειας* είναι ίδιες. Άρα, ισχύει $a+(b \cdot c) = (a+b) \cdot (a+c)$ (επιμεριστική ιδιότητα).

Προτεραιότητα τελεστών

Για την αποφυγή της χρήσης πολλών παρενθέσεων, η προτεραιότητα του τελεστή $\cdot$ ορίζεται ως υψηλότερη αυτής του τελεστή $+$. Έτσι, η παράσταση $a \cdot b + c \cdot d$ είναι ισοδύναμη με την $(a \cdot b) + (c \cdot d)$.

Χρησιμοποιώντας είτε τα αξιώματα της άλγεβρας Boole είτε πίνακες αλήθειας, είναι δυνατόν να αποδειχθούν μια σειρά από βασικές ιδιότητες της άλγεβρας Boole.

Μερικές βασικές ιδιότητες παρουσιάζονται και αποδεικνύονται στη συνέχεια

Θεώρημα

$$ab + ab' = a$$

Θεώρημα

$ab + ab' = a$

Απόδειξη.

$$\begin{aligned} ab + ab' &= a \cdot (b + b') && \text{Αξ. 3 (Επιμεριστικότητα)} \\ &= a \cdot 1 && \text{Αξ. 5 (Ύπαρξη συμπληρώματος)} \\ &= a && \text{Αξ. 4 (Ουδέτερο στοιχείο)} \end{aligned}$$

□

Θεώρημα

$a + a = a$

Απόδειξη.

Για την απόδειξη του θεωρήματος ξεκινάμε από το δεύτερο μέλος της ισότητας:

$$
\begin{aligned}
a &= a + 0 && \text{Αξ. 4 (ουδέτερο στοιχείο 0)} \\
&= a + (a \cdot a') && \text{Αξ. 5 (ορισμός συμπληρώματος)} \\
&= (a + a) \cdot (a + a') && \text{Αξ. 3 (επιμεριστικότητα)} \\
&= (a + a) \cdot 1 && \text{Αξ. 5 (ορισμός συμπληρώματος)} \\
&= a + a && \text{Αξ. 4 (ουδέτερο στοιχείο 1)}
\end{aligned}
$$

Παρά την 'προφανή' ισχύ του, η τυπική απόδειξη του θεωρήματος εμπλέκει, όπως φαίνεται μια σειρά από βήματα. Σε κάθε βήμα επικαλούμαστε κάποιο αξίωμα, ή κάποιο προηγούμενο θεώρημα.

Θεώρημα

$a \cdot a = a$

Απόδειξη.

Το θεώρημα αυτό αποτελεί το 'δυϊκό' του προηγούμενου. Δηλαδή προκύπτει με αντικατάσταση κάθε εμφάνισης του του τελεστή $+$ με τον $\cdot$, και αντίστροφα, και κάθε εμφάνισης του 0 σε 1 και αντίστροφα. Η απόδειξή προκύπτει σύμφωνα με την απόδειξη του δυϊκού του ως εξής:

$$\begin{aligned}
a &= a \cdot 1 && \text{Αξ. 4 (ουδέτερο στοιχείο 1)} \\
&= a \cdot (a + a') && \text{Αξ. 5 (ορισμός συμπληρώματος)} \\
&= (a \cdot a) + (a \cdot a') && \text{Αξ. 3 (επιμεριστικότητα)} \\
&= (a \cdot a) + 0 && \text{Αξ. 5 (ορισμός συμπληρώματος)} \\
&= a \cdot a && \text{Αξ. 4 (ουδέτερο στοιχείο 0)}
\end{aligned}$$

Θεώρημα

$a + 1 = 1$

Απόδειξη.

$$
\begin{aligned}
a + 1 &= (a+1)\cdot 1 && \text{Αξ. 4 (ουδέτερο στοιχείο 1)}\\
&= (a+1)\cdot(a+a') && \text{Αξ. 5 (ορισμός συμπληρώματος)}\\
&= a + 1\cdot a' && \text{Αξ. 3 (επιμεριστικότητα)}\\
&= a + a' && \text{Αξ. 4 (ουδέτερο στοιχείο 1)}\\
&= 1 && \text{Αξ. 5 (ορισμός συμπληρώματος)}
\end{aligned}
$$

□

Θεώρημα

$a \cdot 0 = 0$

Απόδειξη.

Δυϊκό του προηγούμενου. $\square$

Θεώρημα

$\bar{\bar{a}} = a$

Απόδειξη.

Σύμφωνα με το Αξίωμα 5, για κάθε $a \in A$ υπάρχει *μοναδικό* συμπλήρωμα. Με βάση τον συμβολισμό, το συμπλήρωμα του a είναι το $\bar{a}$. Επίσης, το συμπλήρωμα του $\bar{a}$ είναι το $\bar{\bar{a}}$. Άρα, λόγω μοναδικότητας, τα a και $\bar{\bar{a}}$ ταυτίζονται, αφού έχουν το ίδιο συμπλήρωμα. □

Θεώρημα

$a + ab = a$

Απόδειξη.

$$
\begin{aligned}
a + ab &= a \cdot 1 + ab && \text{Αξ. } 4 \\
&= a \cdot (1 + b) && \text{Αξ. } 3 \\
&= a \cdot (b + 1) && \text{Αξ. } 2 \\
&= a \cdot 1 && \text{Θεώρ. } 4 \\
&= a && \text{Αξ. } 4
\end{aligned}
$$

□

Θεώρημα

$$a \cdot (a + b) = a$$

Απόδειξη.

Δυικό του προηγούμενου. $\square$

Θεώρημα

(Θεώρημα De Morgan): $(a+b)' = a' \cdot b'$.

Απόδειξη.

Για την αλγεβρική απόδειξη του θεωρήματος, αρκεί να δείξουμε ότι $(a+b)(a' \cdot b') = 0$.
Με χρήση *πίνακα αλήθειας*.

a	b	a'	b'	$a+b$	$(a+b)'$	$a' \cdot b'$
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0

Καθώς οι τιμές στις δύο τελευταίες στήλες ταυτίζονται, έχει αποδειχθεί ότι ισχύει $(a+b)' = a' \cdot b'$. □

Λογικές συναρτήσεις

Μια *λογική συνάρτηση* ορίζεται από μια *παράσταση* η οποία αποτελείται από λογικές μεταβλητές, τους τελεστές AND ($\cdot$), OR ($+$) και NOT ($'$ ή $^-$), παρενθέσεις και το ίσον ($=$).
Παράδειγμα λογικής συνάρτησης:

$$f(a,b) = ab + a'b'$$

Μια λογική συνάρτηση παίρνει τιμές στο σύνολο $\{0,1\}$.
Μια λογική συνάρτηση είναι δυνατόν να περιγραφεί από έναν *πίνακα αλήθειας*. Για n λογικές μεταβλητές, ένας πίνακας αλήθειας έχει 2^n γραμμές, που αντιστοιχούν στους συνδυασμούς τιμών των λογικών μεταβλητών της συνάρτησης.

Παραδείγματα πίνακα αλήθειας

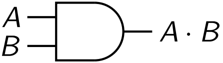
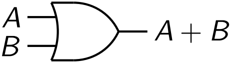
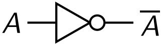
Ο πίνακας αλήθειας της συνάρτησης $f(a,b) = ab + a'b'$ είναι:

a	b	$ab + a'b'$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Ο πίνακας αλήθειας της συνάρτησης $f(a, b, c) = ab + bc'$ είναι:

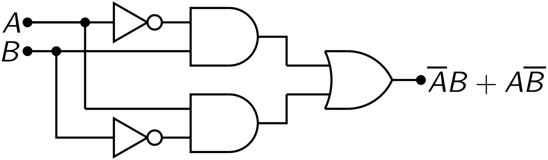
a	b	c	$ab + bc'$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Τελεστές και πύλες

Σύμβολο	Σημασία
 $A \cdot B$	Λογική σύζευξη
 $A + B$	Λογική διάζευξη
 $\overline{A}$	Λογική άρνηση

Παράδειγμα λογικού κυκλώματος

Η λογική συνάρτηση $f(A, B) = \overline{A}B + A\overline{B}$ αντιστοιχίζεται στο λογικό κύκλωμα:



Σχήμα: Λογικό κύκλωμα για τη συνάρτηση $f(A, B) = \overline{A}B + A\overline{B}$

Λογικές πύλες και λογικές πράξεις

Τα *λογικά κυκλώματα* υλοποιούν λογικές συναρτήσεις με κατάλληλη σύνδεση *πυλών*.

Μια *πύλη* υλοποιεί έναν λογικό τελεστή από τους AND, OR, NOT.

Οι πύλες AND, OR, έχουν δύο τουλάχιστον εισόδους, ενώ η πύλη NOT έχει μία είσοδο ενώ όλες οι πύλες έχουν μια έξοδο, η οποία έχει στο αποτέλεσμα της αντίστοιχης λογικής πράξης.

Η έξοδος μιας πύλης συνδέεται με την είσοδο μιας άλλης για το σχηματισμό κυκλωμάτων.

Με τον παραπάνω τρόπο, μια λογική συνάρτηση αντιστοιχίζεται σε ένα *λογικό κύκλωμα*.

Παράδειγμα

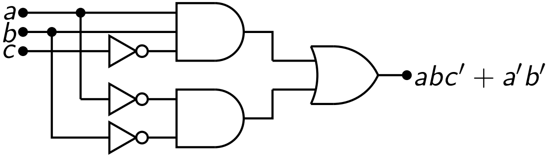
Για την λογική συνάρτηση $W = f(a, b, c) = abc' + a'b'$:

1. *Να βρεθεί ο πίνακας αλήθειας,*
2. *Να σχεδιαστεί το αντίστοιχο λογικό κύκλωμα.*

Ο πίνακας αλήθειας της συνάρτησης είναι ο ακόλουθος:

a	b	c	a'	b'	c'	abc'	$a'b'$	W
0	0	0	1	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	0	1	1	0	1
1	1	1	0	0	0	0	0	0

Το λογικό κύκλωμα της $W = f(a, b, c) = abc' + a'b'$ είναι:



Μορφή αθροίσματος γινομένων

Μια λογική συνάρτηση είναι σε μορφή *αθροίσματος γινομένων* εάν είναι το λογικό άθροισμα (τελεστής $+$) όρων κάθε ένας από τους οποίους είναι το γινόμενο (τελεστής $\cdot$) κάθε μεταβλητής ή του συμπληρώματός της.

Οι συναρτήσεις

$$f(a,b,c) = abc + a'bc' + abc'$$

και

$$g(a,b,c,d) = a'b'cd + abc'd'$$

είναι σε μορφή αθροίσματος γινομένων. Η συνάρτηση

$$w(a,b,c) = a + abc$$

δεν είναι σε μορφή αθροίσματος γινομένων.

Παράδειγμα

Δίνεται ο πίνακας αλήθειας της συνάρτησης $f(a, b, c)$.

a	b	c	$f(a, b, c)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

Με βάση τον πίνακα αλήθειας, να δοθεί η παράσταση της συνάρτησης σε μορφή αθροίσματος γινομένων.

Λύση

Η τιμή της συνάρτησης στον πίνακα αλήθειας είναι 1 στην πρώτη, τρίτη και πέμπτη γραμμή. Η πρώτη γραμμή αντιστοιχεί στον όρο $a'b'c'$, καθώς κάθε μία από τις μεταβλητές a, b, c έχει την τιμή 0. Αντίστοιχα, η τρίτη γραμμή αντιστοιχεί στον όρο $a'bc'$ και η πέμπτη στον $ab'c'$.
Η παράσταση της συνάρτησης σε μορφή αθροίσματος γινομένων προκύπτει προσθέτοντας τους παραπάνω όρους:

$$f(a,b,c) = a'b'c' + a'bc' + ab'c'$$

Εύρεση μορφής αθροίσματος γινομένων

Όταν δίνεται ο *πίνακας αλήθειας* μιας λογικής συνάρτησης είναι δυνατό να βρεθεί η *αλγεβρική μορφή* της συνάρτησης σε μορφή *αθροίσματος γινομένων* ως εξής:

- Για κάθε τιμή 1 στον πίνακα αλήθειας της συνάρτησης προστίθεται ένας όρος στην παράσταση
- Ο όρος αποτελεί γινόμενο των μεταβλητών της συνάρτησης ως εξής:
  - Αν η μεταβλητή έχει την τιμή 1 εμφανίζεται στο γινόμενο ως έχει.
  - Αν η μεταβλητή έχει την τιμή 0 εμφανίζεται στο γινόμενο το συμπλήρωμά της.

Απλοποίηση παράστασης

Απλοποίηση παράστασης

- Η απλοποίηση μιας παράστασης αναφέρεται στον μετασχηματισμό της σε μια ισοδύναμη παράσταση η οποία έχει τον ελάχιστο αριθμό τελεστών.

Απλοποίηση παράστασης

- Η απλοποίηση μιας παράστασης αναφέρεται στον μετασχηματισμό της σε μια ισοδύναμη παράσταση η οποία έχει τον ελάχιστο αριθμό τελεστών.
- Μια παράσταση που πρόκειται να υλοποιηθεί ως λογικό κύκλωμα είναι σκόπιμο να απλοποιηθεί, καθώς έτσι το κύκλωμα που θα προκύψει θα έχει τον μικρότερο δυνατό αριθμό πυλών και συνδέσεων.

Αλγεβρική απλοποίηση

Η απλοποίηση είναι δυνατόν να πραγματοποιηθεί *αλγεβρικά*, χρησιμοποιώντας τα αξιώματα και θεωρήματα της άλγεβρας Boole. Στην περίπτωση αυτή απαιτείται εξοικείωση με την άλγεβρα Boole.
Ως παράδειγμα, η απλοποίηση της παράστασης $ab + ab' + a'b$ είναι δυνατόν να πραγματοποιηθεί ως εξής:

$$\begin{aligned} ab + ab' + a'b &= ab + ab + ab' + a'b \\ &= a(b + b') + (a + a')b \\ &= a \cdot 1 + 1 \cdot b \\ &= a + b \end{aligned}$$

Η παραπάνω απλοποίηση δεν είναι προφανής. Για παραστάσεις περισσότερων μεταβλητών, η απλοποίηση γίνεται ακόμη πιο δύσκολη.

Απλοποίηση με χάρτες Karnaugh

$f(a, b)$:

		b
	$a'b'$ 0	$a'b$ 1
a	ab' 2	ab 3

Ο χάρτης Karnaugh είναι ένα διάγραμμα το οποίο αποτελείται από τετράγωνα στο επίπεδο. Κάθε τετράγωνο έχει την τιμή 0 ή 1 και αντιστοιχεί σε έναν όρο μιας λογικής συνάρτησης σε μορφή αθροίσματος γινομένων. Με τον τρόπο που θα παρουσιαστεί στη συνέχεια, ανάλογα με την θέση των 1 στον χάρτη είναι δυνατή η απλοποίηση της λογικής παράστασης που αντιστοιχεί στον συγκεκριμένο χάρτη.

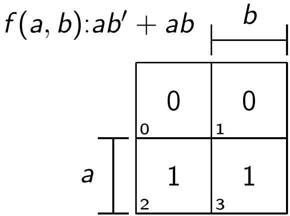
Χάρτης Karnaugh δύο μεταβλητών

$f(a, b)$:

		b
	$a'b'$ 0	$a'b$ 1
a	ab' 2	ab 3

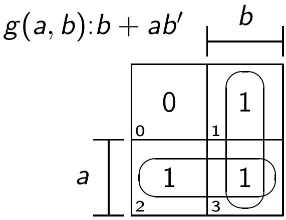
Το διάγραμμα δείχνει τη μορφή ενός χάρτη Karnaugh δύο μεταβλητών. Κάθε τετράγωνο αντιστοιχεί σε έναν από τους $2^2 = 4$ δυνατούς όρους μιας παράστασης με δύο μεταβλητές σε μορφή αθροίσματος γινομένων.

Ο χάρτης που αντιστοιχεί στη συνάρτηση $f(a,b) = ab' + ab$ είναι ο εξής:



Ο χάρτης έχει μονάδες στις θέσεις που αντιστοιχούν στους όρους ab' και ab.

Εάν η συνάρτηση *δεν* είναι σε μορφή αθροίσματος γινομένων, τότε κάποιοι όροι είναι δυνατόν να αντιστοιχίζονται σε περισσότερα από ένα τετράγωνα στο χάρτη, όπως στην περίπτωση της $g(a, b) = b + ab'$.



Στο παραπάνω διάγραμμα, ο όρος ab' αντιστοιχεί στο τετράγωνο 2 ενώ ο όρος b αντιστοιχεί στη δεξιά στήλη (τετράγωνα 1 και 3).

Η απλοποίηση της συνάρτησης $g(a,b) = b + ab'$ γίνεται ως εξής:

- Το μπλοκ των δύο διαδοχικών τετραγώνων 1 και 3, το οποίο σημειώνεται με το κατακόρυφο οβάλ στη δεύτερη στήλη του διαγράμματος, αντιστοιχεί στον όρο b.
- Το μπλοκ των δύο διαδοχικών τετραγώνων 2 και 3, το οποίο σημειώνεται με το οριζόντιο οβάλ στη δεύτερη γραμμή του διαγράμματος, αντιστοιχεί στον όρο a.
- Σύμφωνα με τα παραπάνω, η απλοποιημένη μορφή της g είναι η

$$g(a,b) = a + b$$

Γενικά, για την απλοποίηση με βάση τον χάρτη Karnaugh βρίσκουμε μπλοκ από 2, 4, ή 8 γειτονικά τετράγωνα με την τιμή 1 και κάνουμε την απλοποίηση όπως στο παραπάνω παράδειγμα. Η μορφή του όρου καθορίζεται από τη γραμμή (ή στήλη) στην οποία διατάσσονται τα διαδοχικά 1. Η διαδικασία της ομαδοποίησης πρέπει να περιλαμβάνει *όλα* τα τετράγωνα με 1 στο χάρτη.

Χάρτης Karnaugh τριών μεταβλητών

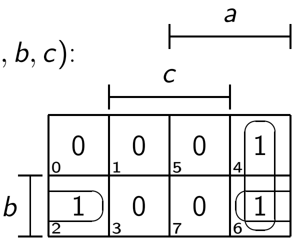
Ο χάρτης Karnaugh τριών μεταβλητών έχει την ακόλουθη μορφή:

$f(a, b, c)$:

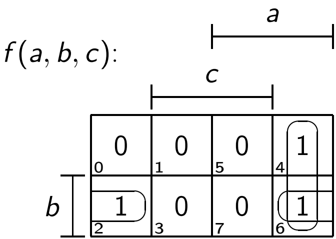
			a	a
		c	c	
	$a'b'c'$ 0	$a'b'c$ 1	$ab'c$ 5	$ab'c'$ 4
b	$a'bc'$ 2	$a'bc$ 3	abc 7	abc' 6

Ως παράδειγμα, ο χάρτης Karnaugh της συνάρτησης $f(a,b,c) = ab'c' + a'bc' + abc'$είναι ο ακόλουθος:

$f(a,b,c)$:



Ως παράδειγμα, ο χάρτης Karnaugh της συνάρτησης $f(a, b, c) = ab'c' + a'bc' + abc'$ είναι ο ακόλουθος:



Στο τετράγωνο 2 αντιστοιχεί ο όρος $a'bc'$, στο τετράγωνο 4 ο όρος abc' και στο τετράγωνο 6 ο όρος abc'.

Απλοποίηση με χάρτη Karnaugh τριών μεταβλητών

Η απλοποίηση της συνάρτησης προκύπτει με την ομαδοποίηση γειτονικών τετραγώνων με 1 στο διάγραμμα ως εξής:

Απλοποίηση με χάρτη Karnaugh τριών μεταβλητών

Η απλοποίηση της συνάρτησης προκύπτει με την ομαδοποίηση γειτονικών τετραγώνων με 1 στο διάγραμμα ως εξής:

- Το μπλοκ των γειτονικών τετραγώνων 4 και 6 αντιστοιχούν στον όρο ac'

Απλοποίηση με χάρτη Karnaugh τριών μεταβλητών

Η απλοποίηση της συνάρτησης προκύπτει με την ομαδοποίηση γειτονικών τετραγώνων με 1 στο διάγραμμα ως εξής:

- Το μπλοκ των γειτονικών τετραγώνων 4 και 6 αντιστοιχούν στον όρο ac'
- Το μπλοκ των τετραγώνων 2 και 6 αντιστοιχούν στον όρο bc'. Προσέξτε ότι τα τετράγωνα αυτά δεν είναι διαδοχικά.

Απλοποίηση με χάρτη Karnaugh τριών μεταβλητών

Η απλοποίηση της συνάρτησης προκύπτει με την ομαδοποίηση γειτονικών τετραγώνων με 1 στο διάγραμμα ως εξής:

- Το μπλοκ των γειτονικών τετραγώνων 4 και 6 αντιστοιχούν στον όρο ac'
- Το μπλοκ των τετραγώνων 2 και 6 αντιστοιχούν στον όρο bc'. Προσέξτε ότι τα τετράγωνα αυτά δεν είναι διαδοχικά.
- Σύμφωνα με τα παραπάνω, η απλοποιημένη μορφή της συνάρτησης είναι η $f(a,b,c) = ac' + bc'$

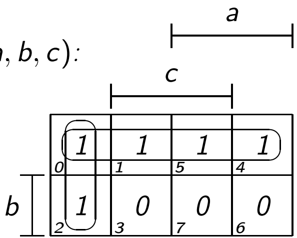
Παράδειγμα

Να απλοποιηθεί η συνάρτηση
$g(a,b,c) = ab'c + ab'c' + a'b'c + a'b'c' + a'bc'$

Λύση

Ο αντίστοιχος χάρτης είναι ο ακόλουθος:

$g(a,b,c)$:



Το μπλοκ των κελιών της πρώτης γραμμής, 0, 1, 5, 4 αντιστοιχεί στον όρο b'. Το μπλοκ των τετραγώνων 0 και 2 αντιστοιχεί στον όρο $a'c'$. Άρα, $g(a,b,c) = b' + a'c'$.

Χάρτης Karnaugh τεσσάρων μεταβλητών

b

d

c

a

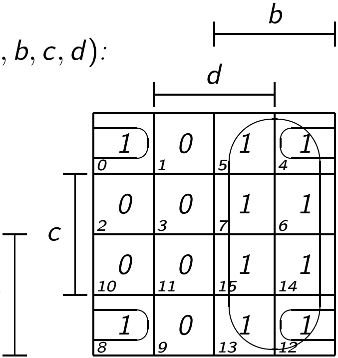
$a'b'c'd'$ 0	$a'b'c'd$ 1	$a'bc'd$ 5	$a'bc'd'$ 4
$a'b'cd'$ 2	$a'b'cd$ 3	$a'bcd$ 7	$a'bcd'$ 6
$ab'cd'$ 10	$ab'cd$ 11	$abcd$ 15	$abcd'$ 14
$ab'c'd'$ 8	$ab'c'd$ 9	$abc'd$ 13	$abc'd'$ 12

Παράδειγμα

Να απλοποιηθεί η συνάρτηση
$f(a,b,c,d) = a'b'c'd' + a'bc'd' + ab'c'd' + abc'd' + a'b'c'd + a'b'cd' + a'bcd' + abcd + abcd' + abc'd.$

Λύση

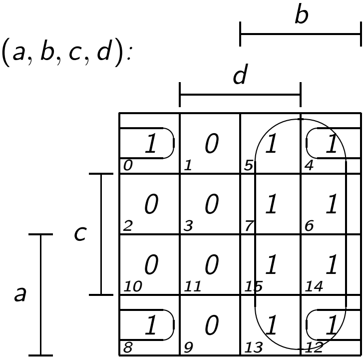
$f(a, b, c, d)$:



$f(a, b, c, d) =$
$a'b'c'd' + a'bc'd' +$
$ab'c'd' + abc'd' +$
$a'b'c'd + a'b'cd' +$
$a'bcd' + abcd +$
$abcd' + abc'd.$

Λύση

$f(a, b, c, d)$:

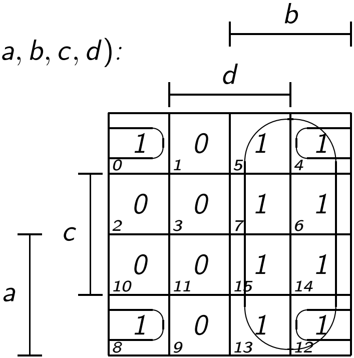


$f(a, b, c, d) =$
$a'b'c'd' + a'bc'd' +$
$ab'c'd' + abc'd' +$
$a'b'c'd + a'b'cd' +$
$a'bcd' + abcd +$
$abcd' + abc'd.$

Δύο μπλοκ με μονάδες:

Λύση

$f(a, b, c, d)$:

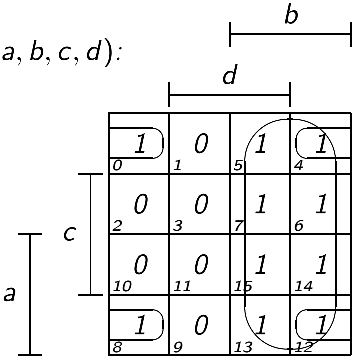


$f(a, b, c, d) =$
$a'b'c'd' + a'bc'd' +$
$ab'c'd' + abc'd' +$
$a'b'c'd + a'b'cd' +$
$a'bcd' + abcd +$
$abcd' + abc'd.$

Δύο μπλοκ με μονάδες: Τα τετράγωνα 0, 4, 8 και 12 αντιστοιχούν στον όρο $c'd'$.

Λύση

$f(a,b,c,d)$:



$f(a,b,c,d) =$
$a'b'c'd' + a'bc'd' +$
$ab'c'd' + abc'd' +$
$a'b'c'd + a'b'cd' +$
$a'bcd' + abcd +$
$abcd' + abc'd.$

Δύο μπλοκ με μονάδες: Τα τετράγωνα 0, 4, 8 και 12 αντιστοιχούν στον όρο $c'd'$.
Τα τετράγωνα 4, 5, 6, 7, 12, 13, 14 και 15 αντιστοιχούν στον όρο b. Άρα, $f(a,b,c,d) = b + c'd'$.

Σχεδίαση λογικού κυκλώματος πρόσθεσης

1. Η άλγεβρα Boole αποτελεί, όπως αναφέρθηκε, τη βάση για τη σχεδίαση λογικών κυκλωμάτων
2. Τέτοια είναι τα κυκλώματα που αποτελούν τις μονάδες ενός ηλεκτρονικού υπολογιστή
3. Ως δείγμα της σχέσης των λογικών κυκλωμάτων και της επεξεργασίας πληροφοριών σε δυαδική μορφή, περιγράφεται στη συνέχεια το παράδειγμα ενός *αθροιστή*.
4. Πρόκειται για ένα λογικό κύκλωμα το υλοποιεί την αριθμητική άθροιση δύο δυαδικών αριθμών των 4 bit

Κύκλωμα ημιαθροιστή

Κύκλωμα ημιαθροιστή

- Ένα κύκλωμα ημιαθροιστή υπολογίζει το άθροισμα δύο δυαδικών ψηφίων.

Κύκλωμα ημιαθροιστή

- Ένα κύκλωμα ημιαθροιστή υπολογίζει το άθροισμα δύο δυαδικών ψηφίων.
- Το αποτέλεσμα, S και το υπόλοιπο, Y, του αθροίσματος δύο δυαδικών ψηφίων,A και B, σε περίπτωση που δεν υπάρχει προηγούμενο κρατούμενο, δίνεται από τον παρακάτω πίνακα αλήθειας:

A	B	S	Y
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

Σχεδίαση ημιαθροιστή

Στον πίνακα, S είναι το *αριθμητικό άθροισμα* των τιμών των δύο μονοψήφιων δυαδικών αριθμών, A και B. Από τον πίνακα προκύπτουν για τις λογικές συναρτήσεις S και Y οι ακόλουθες παραστάσεις, σε μορφή αθροίσματος γινομένων:

$$S = A'B + AB'$$

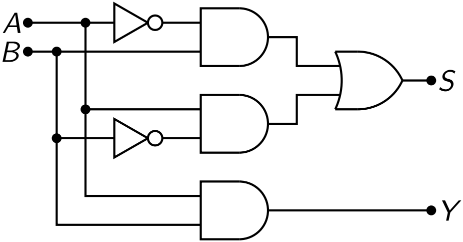
και

$$Y = AB$$

.

Κύκλωμα ημιαθροιστή

Οι δύο αυτές συναρτήσεις υλοποιούνται από ένα κύκλωμα το οποίο ονομάζεται *ημιαθροιστής*.



Κύκλωμα πλήρους αθροιστή

Για την υλοποίηση της πράξης της πρόσθεσης απαιτείται επέκταση του κυκλώματος ημιαθροιστή ώστε να δέχεται ως είσοδο,

Κύκλωμα πλήρους αθροιστή

Για την υλοποίηση της πράξης της πρόσθεσης απαιτείται επέκταση του κυκλώματος ημιαθροιστή ώστε να δέχεται ως είσοδο,

τα ψηφία A και B,

Κύκλωμα πλήρους αθροιστή

Για την υλοποίηση της πράξης της πρόσθεσης απαιτείται επέκταση του κυκλώματος ημιαθροιστή ώστε να δέχεται ως είσοδο,

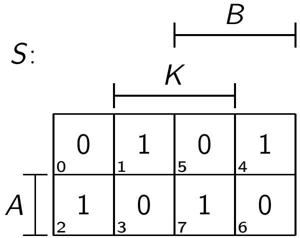
τα ψηφία A και B,

το κρατούμενο από την πρόσθεση των προηγούμενων ψηφίων, K

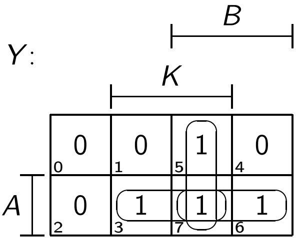
Πίνακας αλήθειας:

A	B	K	S	Y
0	0	0	0	0
0	1	0	1	0
1	0	0	1	0
1	1	0	0	1
0	0	1	1	0
1	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	1	1	1	1

Οι παραπάνω παραστάσεις απλοποιούνται με χρήση διαγραμμάτων Karnaugh.
Η S δεν απλοποιείται:



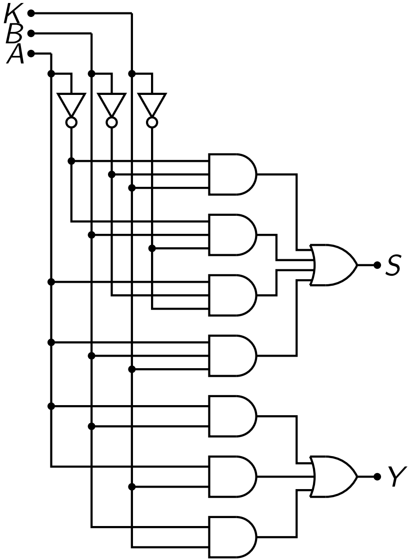
Για τη συνάρτηση Y ο χάρτης Karnaugh είναι ο ακόλουθος:



Σύμφωνα με το χάρτη, η απλοποιημένη μορφή της Y είναι η ακόλουθη:

$$Y = AB + AK + BK$$

Λογικό κύκλωμα πλήρους αθροιστή



Ένας πλήρης αθροιστής των 4 bit

Ένας πλήρης αθροιστής των 4 bit

- Το κύκλωμα αθροίζει δύο φυσικούς αριθμούς σε δυαδική μορφή οι οποίοι παριστάνονται ως $A_3A_2A_1A_0$ και $B_3B_2B_1B_0$.

Ένας πλήρης αθροιστής των 4 bit

- Το κύκλωμα αθροίζει δύο φυσικούς αριθμούς σε δυαδική μορφή οι οποίοι παριστάνονται ως $A_3A_2A_1A_0$ και $B_3B_2B_1B_0$.
- Το αποτέλεσμα του αθροίσματος βρίσκεται στα δυαδικά ψηφία $YS_3S_2S_1S_0$

Ένας πλήρης αθροιστής των 4 bit

- Το κύκλωμα αθροίζει δύο φυσικούς αριθμούς σε δυαδική μορφή οι οποίοι παριστάνονται ως $A_3A_2A_1A_0$ και $B_3B_2B_1B_0$.
- Το αποτέλεσμα του αθροίσματος βρίσκεται στα δυαδικά ψηφία $YS_3S_2S_1S_0$ όπου Y είναι το υπόλοιπο από την πρόσθεση των σημαντικότερων ψηφίων, A_3 και B_3.

Ένας πλήρης αθροιστής των 4 bit

- Το κύκλωμα αθροίζει δύο φυσικούς αριθμούς σε δυαδική μορφή οι οποίοι παριστάνονται ως $A_3 A_2 A_1 A_0$ και $B_3 B_2 B_1 B_0$.
- Το αποτέλεσμα του αθροίσματος βρίσκεται στα δυαδικά ψηφία $YS_3 S_2 S_1 S_0$ όπου Y είναι το υπόλοιπο από την πρόσθεση των σημαντικότερων ψηφίων, A_3 και B_3.
- Ένα κύκλωμα άθροισης με 4 bit το οποίο χρησιμοποιεί *πλήρεις αθροιστές*

Ένας πλήρης αθροιστής των 4 bit

- Το κύκλωμα αθροίζει δύο φυσικούς αριθμούς σε δυαδική μορφή οι οποίοι παριστάνονται ως $A_3A_2A_1A_0$ και $B_3B_2B_1B_0$.
- Το αποτέλεσμα του αθροίσματος βρίσκεται στα δυαδικά ψηφία $YS_3S_2S_1S_0$ όπου Y είναι το υπόλοιπο από την πρόσθεση των σημαντικότερων ψηφίων, A_3 και B_3.
- Ένα κύκλωμα άθροισης με 4 bit το οποίο χρησιμοποιεί *πλήρεις αθροιστές*
- Κάθε πλήρης αθροιστής (Full Adder – FA) παριστάνεται στο διάγραμμα με ένα πλαίσιο

Ένας πλήρης αθροιστής των 4 bit

- Το κύκλωμα αθροίζει δύο φυσικούς αριθμούς σε δυαδική μορφή οι οποίοι παριστάνονται ως $A_3A_2A_1A_0$ και $B_3B_2B_1B_0$.
- Το αποτέλεσμα του αθροίσματος βρίσκεται στα δυαδικά ψηφία $YS_3S_2S_1S_0$ όπου Y είναι το υπόλοιπο από την πρόσθεση των σημαντικότερων ψηφίων, A_3 και B_3.
- Ένα κύκλωμα άθροισης με 4 bit το οποίο χρησιμοποιεί *πλήρεις αθροιστές*
- Κάθε πλήρης αθροιστής (Full Adder – FA) παριστάνεται στο διάγραμμα με ένα πλαίσιο
- Το κύκλωμα σχηματίζεται συνδέοντας την έξοδο του υπολοίπου ενός αθροιστή στην είσοδο κρατουμένου του αθροιστή που αντιστοιχεί στο επόμενο ψηφίο.

Ένας πλήρης αθροιστής των 4 bit

- Το κύκλωμα αθροίζει δύο φυσικούς αριθμούς σε δυαδική μορφή οι οποίοι παριστάνονται ως $A_3A_2A_1A_0$ και $B_3B_2B_1B_0$.
- Το αποτέλεσμα του αθροίσματος βρίσκεται στα δυαδικά ψηφία $YS_3S_2S_1S_0$ όπου Y είναι το υπόλοιπο από την πρόσθεση των σημαντικότερων ψηφίων, A_3 και B_3.
- Ένα κύκλωμα άθροισης με 4 bit το οποίο χρησιμοποιεί *πλήρεις αθροιστές*
- Κάθε πλήρης αθροιστής (Full Adder – FA) παριστάνεται στο διάγραμμα με ένα πλαίσιο
- Το κύκλωμα σχηματίζεται συνδέοντας την έξοδο του υπολοίπου ενός αθροιστή στην είσοδο κρατουμένου του αθροιστή που αντιστοιχεί στο επόμενο ψηφίο.
- Η είσοδος K του αθροιστή που αντιστοιχεί στο λιγότερο σημαντικό ψηφίο είναι σταθερή και ίση με 0.

Λογικό κύκλωμα άθροισης 4 bit