Κεφάλαιο 3: Λογιστική Παλινδρόμηση

Σύνοψη

Η λογιστική παλινδρόμηση ερευνά το μη γραμμικό αποτέλεσμα μίας εξαρτημένης κατηγορικής μεταβλητής αναφορικά με τη δράση πολλών ανεξάρτητων μεταβλητών. Χαρακτηρίζεται, αναλόγως της φύσης των κατηγοριών της εξαρτημένης μεταβλητής, από τρεις κατηγορίες μοντέλων, τη διωνυμική παλινδρόμηση (με δυο μόνο κατηγορίες), την τακτική (οι κατηγορίες διατάσσονται με αυξητική τάση) και την ονομαστική (ποιοτικές κατηγορίες). Στο εξεταζόμενο μοντέλο παλινδρόμησης εφαρμόζονται οι τεχνικές της άριστης επιλογής των υποψήφιων προς ένταξη ανεξάρτητων μεταβλητών και τα διαγνωστικά κριτήρια εγκυρότητας και αξιοπιστίας του μοντέλου. Ως παράδειγμα αναφέρεται η μελέτη της δυνατότητας ένταξης μαθητών με ειδικές ανάγκες στα σχολεία γενικής αγωγής, με τη χρήση και των τριών μοντέλων παλινδρόμησης.

Ειδικά πεδία της βασικής στατιστικής όπως, η ανάλυση συχνοτήτων, ο έλεγχος χ^2 της καλής προσαρμογής των στοιχείων σε πίνακες ενδεχομένων και τα μέτρα συνάφειας των στοιχείων, προϋποθέτουν το γνωσιακό υπόβαθρο των εκπαιδευόμενων. Η λογιστική παλινδρόμηση δανείζεται αναλογικές γνώσεις της πολλαπλής γραμμικής παλινδρόμησης.

3.1 Γενικά

Η λογιστική παλινδρόμηση **(Logistic regression)** αποτελεί στην ουσία ένα μοντέλο ταξινόμησης των τιμών μιας μεταβλητής απόκρισης Y με βάση τη θεωρία των πιθανοτήτων. Στο μοντέλο αυτό όπου η μεταβλητή Y συνήθως έχει δυαδικό χαρακτήρα (λαμβάνει δύο τιμές) στοχεύεται η πρόβλεψη της έκβασης αυτής από ένα πλήθος προβλεπτικών μεταβλητών που μπορεί να είναι ονομαστικές, τακτικές ή ποσοτικές.

Η σημαντικότερη διαφοροποίηση μεταξύ λογιστικής και γραμμικής παλινδρόμησης βασίζεται στη φύση της επιλεγμένης μεταβλητής απόκρισης, η οποία στην μεν πρώτη μπορεί να είναι κατηγορική, (τακτική ή ονομαστική, στη δε δεύτερη αποκλειστικά ποσοτική. Ενώ κατά την κλασική γραμμική παλινδρόμηση η εκτίμηση των παραμέτρων α και bi γίνεται με τη μέθοδο των ελάχιστων τετραγώνων, κατά τη λογιστική παλινδρόμηση η εκτίμηση των παραμέτρων γίνεται με τη μέθοδο του λόγου πιθανοφάνειας (μέθοδος συνήθως εφαρμοζόμενη στα γενικευμένα γραμμικά υποδείγματα), δηλαδή επιλέγονται οι πιο πιθανοφανείς τιμές των παραμέτρων, προκειμένου να οδηγήσουν στα παρατηρούμενα αποτελέσματα. Ως επακόλουθο, η πρώτη παραδέχεται την ύπαρξη ομοιογένειας (ομοσκεδαστικότητας) στα υπολείμματα των αποκρίσεων ενώ στη δεύτερη αναπτύσσεται πάντα ετεροσκεδαστικότητα σε κάθε προβλεπόμενη τιμή εξαιτίας του μεταβαλλόμενου ποσοστού διακύμανσης που αναλογεί σε αυτήν.

Διακρίνονται τρεις τύποι λογιστικής παλινδρόμησης ανάλογα με την ιδιαίτερη φύση της εξαρτημένης κατηγορικής μεταβλητής η οποία μπορεί να είναι:

1. **Δίτιμη** ή **δυαδική ή διχοτομική** (binary) ή **διμερής** εξαρτημένη μεταβλητή. Συνίσταται από δύο κατηγορίες, όπως π.χ. είναι οι εκβάσεις επιτυχία/αποτυχία, ΝΑΙ/ΟΧΙ, γεγονός απόν/παρόν.
2. **Τακτική** (ordinal) μεταβλητή. Η εξαρτημένη μεταβλητή συνίσταται από τρεις ή περισσότερες κατηγορίες μεταξύ των οποίων ισχύει η έννοια της ανισότητας, όπως π.χ. σε μια ερώτηση της κλίμακας διαφωνώ καθόλου, λίγο, μέτρια, αρκετά, πολύ, στην κατάταξη ενός στρώματος υλικού ως λεπτού, μεσαίου, παχέος.
3. **Ονομαστική (Nominal)** ή **πολυωνυμική** (polynomial) ή **πολυχοτομική** (polychotomus) **ή κατηγορική αδιαβάθμητη** (non-ordered categorical) ή **πολυμερής** μεταβλητή απόκρισης. Περιέχει τρεις ή περισσότερες κατηγορίες χωρίς κάποια φυσική διαβάθμιση, όπως π.χ. ο χαρακτηρισμός ενός τροφίμου ως τραγανού, μαλακού, εύθρυπτου ή του χρώματος αντικειμένων ως ερυθρού, πράσινου, κίτρινου κτλ.

Η λογιστική παλινδρόμηση επινοήθηκε ως εναλλακτική επιλογή της γραμμικής διακριτικής ανάλυσης (κεφάλαιο 7) για την ταξινόμηση των στοιχείων (ονομαστικών ή τακτικών) της εξαρτημένης, με ευρεία απήχηση σε πολλά διαφορετικά επιστημονικά πεδία και κυρίως στην ιατρική και τις κοινωνικές επιστήμες. Χαρακτηριστικά, χρησιμοποιείται στην πρόβλεψη της:

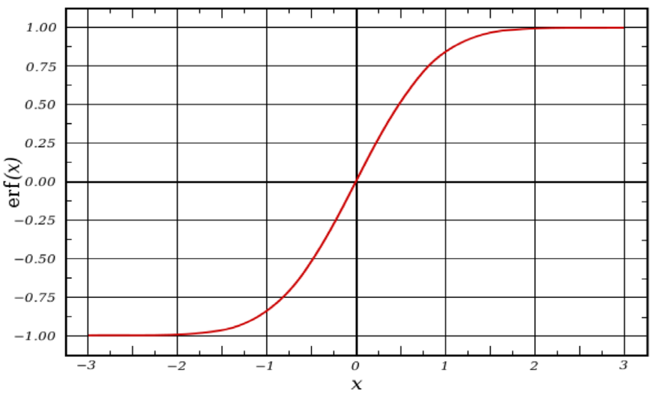
- εμφάνισης ή μη μιας νόσου (π.χ. διαβήτης) από ένα σύνολο διαφορετικών χαρακτηριστικών του πάσχοντος ατόμου (ηλικία, φύλο, αιματολογικά, ηλεκτροκαρδιογράφημα κτλ.)
- επιλογής ενός πολιτικού κόμματος με βάση την καταγραφή των δημογραφικών στοιχείων των πολιτών, όπως είναι η ηλικία, φύλο, φυλή, τόπος διαμονής, εισόδημα, προηγούμενη ψηφοφορία
- πιθανότητας αποτυχίας μιας διεργασίας παραγωγής προϊόντος σε ένα εργοστάσιο τροφίμων
- πρόβλεψη της πρόθεσης αγοράς ενός αγαθού από έναν καταναλωτή (έρευνα αγοράς)
- πιθανότητας αθέτησης από δανειολήπτη της αποπληρωμής του δανείου του.

Λεπτομερής περιγραφή των μεθόδων της λογιστικής παλινδρόμησης παρέχεται από τα συγγράμματα των Cox & Snell (1989), των Hosmer & Lemeshow (2000), των Long & Freese (2014) και συνδυαστικά με τη χρήση των πινάκων ενδεχομένων από τους Everitt (1992) και Agresti (1996).

Η κατανόηση των όρων και μαθηματικών τύπων που συνοδεύουν τη μελέτη της λογιστικής παλινδρόμησης αποτελεί κυριολεκτικά πρόκληση για τον απλό επιστήμονα. Ως εκ τούτου, στο κεφάλαιο αυτό γίνεται αναφορά μόνο των αναγκαίων τεχνικών εφαρμογής της λογιστικής παλινδρόμησης με φειδωλή χρήση των μαθηματικών τύπων και με ιδιαίτερο βάρος στην απόδοση της ερμηνείας των ερευνητικών αποτελεσμάτων σε θέματα κοινωνικών επιστημών.

Ανάπτυξη του μοντέλου

Στη γλώσσα της στατιστικής, η λογιστική παλινδρόμηση χρησιμοποιείται για την πρόβλεψη της πιθανότητας εμφάνισης ενός γεγονότος προσαρμόζοντας τα δεδομένα της μελέτης στην εξίσωση της λογιστικής καμπύλης όπως αυτή παρουσιάζεται στο σχήμα 3.1.



Σχήμα 3.1. *Τυπική ανάπτυξη σιγμοειδούς καμπύλης.*

Η καμπύλη αυτή έχει σιγμοειδή μορφή και χαρακτηρίζεται από ένα στάδιο εκθετικής ανάπτυξης στο οποίο ο ρυθμός αύξησης επιβραδύνεται βαθμιαία και περατώνεται στο ασυμπτωτικό στάδιο κορεσμού της ανάπτυξης (η ευθεία βαίνει τελικά παράλληλα στον άξονα Χ).

Η δυαδική λογιστική παλινδρόμηση αποτελεί μια διωνυμική εξίσωση στην οποία η μεταβλητή απόκρισης Υ είναι το τυχαίο αποτέλεσμα εμφάνισης μιας από δύο δυνητικές εκβάσεις του τύπου επιτυχία ή αποτυχία όπως π.χ. είναι το αποτέλεσμα της ρίψης ενός νομίσματος δύο διαφορετικών όψεων (κορώνα-γράμματα), η ρίψη ενός ζαριού όπου το αποτέλεσμα εμφάνισης του αριθμού 6 θεωρείται επιτυχία και των λοιπών αριθμών αποτυχία, η θετική ψήφος εκλογής ενός πολιτικού εκπροσώπου κτλ.

Η δίτιμη λογιστική παλινδρόμηση έχει τη μορφή

$$f(z)=\frac{e^{z}}{1+e^{z}}=\frac{1}{1+e^{-z}}$$

όπου z είναι η μεταβλητή εισόδου και f(z) το αποτέλεσμα αυτής. Στα πλεονεκτήματα της εξίσωσης συγκαταλέγεται και το γεγονός ότι η μεταβλητή εισόδου λαμβάνει θετικές και αρνητικές τιμές ενώ το αποτέλεσμα αυτής f(z) περιορίζεται σε εύρος τιμών μεταξύ 0 και 1. Αναλυτικότερα, η μεταβλητή z εκπροσωπεί τη δράση μιας ομάδας ανεξάρτητων μεταβλητών ενώ η f(z) προσδιορίζει την πιθανότητα ενός συγκεκριμένου αποτελέσματος λόγω της δράσης της ομάδας αυτής. Η μεταβλητή z (λογιστική) εκφράζει επίσης το μέτρο της ολικής συνεισφοράς όλων των συμμετεχουσών ανεξάρτητων μεταβλητών στο μοντέλο και ορίζεται ως

$$z=\beta_0+\beta_1 X_1+\beta_2 X_2+\ldots+\beta_k X_k$$

όπου β_0 είναι το ύψος της κλίσης της γραμμής της παλινδρόμησης και ισούται με την τιμή z όταν οι τιμές όλων των ανεξάρτητων μεταβλητών ισούνται με 0, ενώ β_i είναι οι συντελεστές παλινδρόμησης καθένας των οποίων εκφράζει το μέγεθος συνεισφοράς της αντίστοιχης μεταβλητής. Θετική τιμή του συντελεστή δηλώνει ότι η επεξηγηματική μεταβλητή αυξάνει την πιθανότητα της επιτυχημένης έκβασης (να συμβεί δηλαδή το γεγονός), αρνητική τιμή σημαίνει ότι η μεταβλητή μειώνει την πιθανότητα αυτής της έκβασης. Υψηλή τιμή του συντελεστή σημαίνει ότι η ανεξάρτητη μεταβλητή επηρεάζει πολύ ισχυρά την πιθανότητα να συμβεί το γεγονός ή μη, ενώ χαμηλή τιμή δηλώνει μικρή επίδραση της ανεξάρτητης μεταβλητής στην πιθανότητα εμφάνισης της ανάλογης έκβασης.

Συνοψίζοντας, η λογιστική παλινδρόμηση χρησιμεύει στην περιγραφή της σχέσης που αναπτύσσεται μεταξύ μιας ή περισσότερων ανεξάρτητων μεταβλητών (π.χ. ηλικία, φύλο, τοξική συγκέντρωση ουσίας) και μιας δυαδικής μεταβλητής απόκρισης εκφρασμένης ως πιθανότητα δυνάμενη να πάρει μία από δύο τιμές, όπως π.χ. θετική (1) αρνητική (0), παρόν ενδεχόμενο (1) απόν ενδεχόμενο (0), επιζών (1) θανών (0), αρεστός (1) δυσάρεστος (0).

Η φύση των ανεξάρτητων μεταβλητών εισόδου στην εξίσωση της πολλαπλής λογιστικής παλινδρόμησης μπορεί να είναι ποσοτική, τακτική ή ονομαστική (αδιαβάθμητη κατηγορική). Για παράδειγμα, η πιθανότητα ένα άτομο να υποστεί καρδιακό επεισόδιο σε συγκεκριμένο χρονικό διάστημα (εξαρτημένη μεταβλητή) μπορεί να προβλεφθεί από ένα πλήθος ανεξάρτητων μεταβλητών όπως είναι η ηλικία, το φύλο, ο δείκτης μάζας σώματος, η φυσική αγωγή, το ιστορικό του ασθενούς κτλ. Η ηλικία ενδέχεται να ενταχθεί στη εξίσωση είτε ως ποσοτική (με την πραγματική τιμή της) είτε ως τακτική: 15-25 ετών, 25-40, 40-60, >60. Η φυσική αγωγή ως ονομαστική μεταβλητή (άθληση ή μη), ο δείκτης μάζας σώματος (Body Mass Index - BMI) ως ποσοτική ή τακτική (<25, 25-30, >30), και το ιστορικό ως ονομαστική (ύπαρξη προδιάθεσης ή μη). Επιστήμες όπως η ιατρική, οι κοινωνικές επιστήμες και το marketing καταφεύγουν συχνά στην εφαρμογή της πολυωνυμικής λογιστικής παλινδρόμησης.

Οι πιθανότητες που συγκλίνουν υπέρ της εμφάνισης ενός γεγονότος ή πρόθεσης εκφράζονται ως λόγος ζεύγους ακέραιων τιμών (odds) όπου ο αριθμητής προσδιορίζει την πιθανότητα που έχει το προσδοκώμενο γεγονός να συμβεί και ο παρονομαστής την πιθανότητα να μη συμβεί. Έτσι, αν p είναι η πιθανότητα να εμφανιστεί το γεγονός και 1-p η πιθανότητα να μη συμβεί τότε ο λόγος των πιθανοτήτων θα είναι p/(1-p). Για παράδειγμα, η πιθανότητα να ανασυρθεί μια κάρτα σπαθί από μια τράπουλα 52 φύλλων είναι 25% δηλαδή μία στις τέσσερις ή αριθμητικά 13/52=1:4 ή και ¼. Με ανάλογο τρόπο εκφράζεται και η πιθανότητα μη εμφάνισης μιας κάρτας σπαθί η οποία ισούται με 4:1, αντιστρέφοντας απλώς τους όρους του κλάσματος, (1-p)/p.

Η παραπάνω σχέση (logit) κάλλιστα μπορεί να ενσωματωθεί στο μοντέλο της παλινδρόμησης σε λογαριθμική μορφή ως εξής,

$$logit(p)=\log_e\left(\frac{p}{1-p}\right)=\beta_0+\beta_1 X_1+\beta_2 X_2+\ldots+\beta_k X_k$$

Οι συντελεστές της παλινδρόμησης υπολογίζονται με τη βοήθεια της εκτίμησης της **μέγιστης πιθανοφάνειας (Maximum Likelihood Estimate – MLE),** ως

$$L = \prod_{i=1}^{n} f(x_i\theta)$$

ή προτιμότερο με τη λογαριθμική έκδοση αυτής,

$$L = \sum_{i=1}^{n} \log_e f(x_i\theta)$$

όπου θ είναι μια παράμετρος της μεταβλητής η οποία μπορεί να μεταβάλλεται ελεύθερα. Η προβλεπόμενη τιμή για κάθε παρατήρηση θα ισούται με

$$\hat{l} = \frac{1}{n} \log_e L$$

Η συνάρτηση της πιθανοφάνειας έκβασης ενός γεγονότος (likelihood) δείχνει πόσο κατάλληλα ένα παρατηρούμενο δείγμα περιγράφεται από κάποιες τιμές παραμέτρων π.χ. μέσος όρος, τυπική απόκλιση. Άρα, η μεγιστοποίηση της συνάρτησης της πιθανότητας έκβασης καθορίζει τις παραμέτρους εκείνες που είναι οι πλέον ικανές να παράγουν τα παρατηρούμενα στοιχεία. Από άποψη στατιστικής βαρύτητας, η MLE προτείνεται για εφαρμογές σε μεγάλα δείγματα καθόσον είναι ευέλικτη, προσαρμόζεται εύκολα στην παραγωγή πολλών διαφορετικού τύπου μοντέλων, το χειρισμό διαφορετικής φύσης στοιχείων και περιέχει ακριβέστερες μετρήσεις.

Η αξιοπιστία των αποτελεσμάτων της λογιστικής παλινδρόμησης επηρεάζεται κατά πολύ από το δειγματοληπτικό μέγεθος της έρευνας. Ένας χρυσός κανόνας υπαγορεύει την αντιστοιχία του αριθμού των επιθυμητών εκβάσεων προς τον αριθμό των ανεξάρτητων μεταβλητών να προσδιορίζεται από τη σχέση 10:1. Εάν υπάρχουν ονομαστικές ανεξάρτητες μεταβλητές, όπως, για παράδειγμα, διχοτομικές, ο παραπάνω κανόνας θα ισχύει για το μέγεθος των παρατηρήσεων της ολιγοπληθέστερης κατηγορίας.

Για δίτιμες εξαρτημένες μεταβλητές, η άριστη άμεση πρόβλεψη της συμμετοχής μιας μεταβλητής ως μέλους σε ομάδα με τη μέθοδο της διακριτικής ανάλυσης (βλ. κεφάλαιο 6) επιβάλλει την ύπαρξη της πολυμεταβλητής κανονικότητας των ανεξάρτητων μεταβλητών αφενός και την ισότητα των διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων (ομοιογένεια) στις δύο ομάδες, προϋποθέσεις όχι απαραίτητες κατά τη δίτιμη λογιστική παλινδρόμηση. Συμπερασματικά, για την εφαρμογή του υποδείγματος της δίτιμης λογιστικής παλινδρόμησης είναι αναγκαίες πολύ λιγότερες προϋποθέσεις από αυτές που απαιτεί η διακριτική ανάλυση. Μάλιστα, ακόμη κι αν ικανοποιούνται όλες οι προϋποθέσεις για την εφαρμογή της διακριτικής ανάλυσης, η δίτιμη λογιστική παλινδρόμηση λειτουργεί εξαιρετικά καλά, με την απαραίτητη, βέβαια, προϋπόθεση ότι το μέγεθος των παρατηρήσεων είναι τουλάχιστον 10-20 ανά ανεξάρτητη μεταβλητή.

3.2 Πολλαπλή Διωνυμική Παλινδρόμηση

Αποτελεί μέρος κατηγορικών στατιστικών μοντέλων γνωστών ως Γενικευμένα Γραμμικά μοντέλα (McCullagh & Nelder, 1989), τα οποία περιλαμβάνουν τη γνωστή κλασική παλινδρόμηση, την ανάλυση διακύμανσης και συνδιακύμανσης και τη λογαριθμογραμμική παλινδρόμηση.

Η μέθοδος αυτή επιτρέπει την πρόβλεψη των τιμών εξαρτημένης διμερούς μεταβλητής μορφής από ένα πλήθος ανεξάρτητων μεταβλητών, οι οποίες μπορεί να είναι ποσοτικές, διχοτομικές ή πολυμερείς ή και συνδυασμοί αυτών. Αντίποδας της λογιστικής παλινδρόμησης είναι η διακριτική ανάλυση κατηγοριών με τη διαφορά ότι στη δεύτερη συμμετέχουν μόνο ποσοτικές ανεξάρτητες μεταβλητές.

Η μεταβλητή απόκρισης στην αλγεβρική της έκδοση λαμβάνει την τιμή 1 με πιθανότητα επιτυχίας p και την τιμή 0 με πιθανότητα αποτυχίας 1-p και καλείται δυαδική (Binary) ή δυωνυμική (Binomial) ή μεταβλητή του Bernouli.

Λόγω της φύσης των συμμετεχουσών μεταβλητών, απουσιάζουν οι προϋποθέσεις της ομαλής κατανομής των τιμών και της ομοιογένειας των διακυμάνσεών τους, η δε έλλειψη της γραμμικότητας μεταξύ της Y και των ανεξάρτητων μεταβλητών βελτιώνεται με τη χρήση της λογαριθμικής εξίσωσης ως εξής,

$$p=\frac{e^z}{1+e^z}$$

όπου

$$z=\beta_0+\beta_1 X_1+\beta_2 X_2+\ldots+\beta_k X_k$$

Ακολούθως χρησιμοποιείται η σχέση

$$\log_e\left(\frac{p}{1-p}\right)=z$$

ή λογαριθμώντας προκύπτει

$$\left(\frac{p}{1-p}\right)=e^z$$

Σημαντική πληροφόρηση για τις ιδιότητες των δυωνυμικών μοντέλων περιγράφεται από τους Collett (2003) και Cox & Snell (1989).

3.2.1 Χαρακτηριστικά της εξίσωσης διωνυμικής παλινδρόμησης

Τα λογαριθμικά μοντέλα λόγου (συμπληρωματικών) πιθανοτήτων ή λογιστικά μοντέλα (logit models) χρησιμοποιούνται όταν η εξαρτημένη μεταβλητή είναι δυαδική. Η λογιστική παλινδρόμηση είναι μη γραμμικής μορφής γιατί αναγκάζει τις προβλεπόμενες τιμές να κυμαίνονται μεταξύ 0 και 1.

Τα λογιστικά μοντέλα μοντέλα εκτιμούν την πιθανότητα της εξαρτημένης μεταβλητής να λαμβάνει την τιμή 1 (Y=1), δηλαδή την πιθανότητα ότι κάποιο γεγονός συμβαίνει. Τα μοντέλα αυτά υπακούουν στη συνθήκη πιθανότητας εμφάνισης Pr,

$$Pr\ (Y=1\,|\,X_{1,}X_2,\ldots X_k)=\frac{1}{1+e^{-z}}$$

Τόσο τα logit όσο και τα probit μοντέλα παρέχουν παρόμοια αποτελέσματα, διαφέρουν μόνο ως προς την κατανομή των στοιχείων. Τα logit ακολουθούν την αθροιστική τυπική λογιστική κατανομή (F) και τα probit την αθροιστική ομαλή κατανομή (Φ).

Η λέξη logit προέρχεται συγκοπτόμενη από τη φράση logarithmic unit (λογαριθμομονάδα) σε ακολουθία με την πρωταρχικά αποδοθείσα ονοματολογία της λέξης probit (probability unit - πιθανομονάδα) και έχει την έννοια της νεπέρειας (φυσικής) λογαρίθμησης ενός αριθμού p ($\log_e$ ή ln) που εκπροσωπεί πιθανότητα (αναλογία) και άρα τιμές μεταξύ 0 και 1:

$$logit(p) = \log_e\left(\frac{p}{1-p}\right) = \log_e p - \log_e(1-p)$$

Αν p δηλώνει κάποια πιθανότητα τότε η σχέση p/(1-p) αντιστοιχεί στην επιτυχημένη πιθανότητα έκβασης (odds) και κατ΄αντιστοιχία ο λογάριθμος της p στον λογάριθμο της επιτυχημένης πιθανότητας. Με τον ίδιο συλλογισμό, η διαφορά μεταξύ των λογαρίθμων δυο ευνοϊκών πιθανοτήτων p_1 και p_2 αποτελεί και το λογάριθμο του λόγου των ευνοϊκών πιθανοτήτων R σύμφωνα με την ακολουθία των εξισώσεων:

$$\log_e R = \log_e \frac{p_1/(1-p_1)}{p_2/(1-p_2)} = \log_e \frac{p_1}{1-p_1} - \log_e \frac{p_2}{(1-p_2)} = logit(p_1) - logit(p_2)$$

Πιθανότητα (επιτυχημένης) έκβασης

Ονομάζεται και προβλεπόμενη πιθανότητα p. Αν οι αποκρίσεις αποτιμώνται ως 0 (αποτυχία) και 1 (επιτυχία), τότε p_j είναι η πιθανότητα όπου η i ανεξάρτητη μεταβλητή (ποσοτική ή κατηγορική) δίνει απόκριση 1,

$$p_j = \frac{e^z}{1+e^z}$$

όπου

$$z = \beta_0 + \beta_1 X_{j1} + \beta_2 X_{j2} + \ldots \beta_k X_{jk}$$

όπου β_0 είναι σταθερή παράμετρος, β_i συντελεστές και X_{ji} η i προβλεπτική μεταβλητή με j=2 κατηγορίες.

Λογαριθμική πιθανότητα έκβασης

Εφαρμόζεται για την άριστη εκτίμηση των συντελεστών της παλινδρόμησης και επίσης για τη σύγκριση δύο μοντέλων που διαφέρουν ως προς το σύνολο των ανεξάρτητων μεταβλητών σε καθένα από αυτά:

$$L_{(\beta)} = \sum_j \left[y_j \log_e p_j + (m_j - y_j) \log_e(1-p_j) \right]$$

όπου p_j= πιθανότητα επιτυχημένης έκβασης, y_j= απόκριση, m_j= αριθμός προσπαθειών ή παρατηρήσεων σχετιζόμενων με την j ανεξάρτητη μεταβλητή. Αν τα στοιχεία περιέχουν μια παρατήρηση ανά ανεξάρτητη μεταβλητή τότε m_j=1.

Συντελεστές β_i

Ο εκτιμώμενος συντελεστής για κάθε ανεξάρτητη μεταβλητή εκφράζει τη μεταβολή του λογαρίθμου του λόγου p/(1-p) για κάθε μονάδα μεταβολής της αντίστοιχης ανεξάρτητης μεταβλητής, ενώ οι λοιπές παραμένουν σταθερές (το αποτέλεσμά τους είναι υπό έλεγχο). Για να βρεθεί η τιμή του β η οποία μεγιστοποιεί τη λογαριθμική πιθανότητα έκβασης $L_{(\beta)}$, η τελευταία διαφορίζεται ως προς β_0 και β_i έτσι ώστε να προκύπτει,

$$\sum_j (y_j - m_j p_j) = 0$$

$$\sum_j X_{ji} (y_j - m_j p_j) = 0$$

Οι εξισώσεις αυτές επειδή δεν είναι γραμμικές, χρησιμοποιείται για την επίλυσή τους η εκτίμηση της μέγιστης πιθανοφάνειας (MLE).

Λόγος των πιθανοτήτων έκβασης (odds ratio)

Ο λόγος των ευνοϊκών πιθανοτήτων έκβασης (**OR**) δυο μεταβλητών με δυο κατηγορίες εκάστη μπορεί να εκφραστεί με δυο τρόπους:

α) Με την κατάρτιση του πίνακα ενδεχομένων των δυο μεταβλητών στον οποίο ο λόγος OR εκτιμά τη σχέση που αναπτύσσεται μεταξύ ενός αιτίου (π.χ. έκθεση σε ακτινοβολία) και σε μια έκβαση αποτελέσματος (επιβίωση):

		Έκβαση αποτελέσματος	
		+	-
Αίτιο πρόκλησης	+	a	b
	-	c	d

Ειδικότερα, ο λόγος OR εκτιμά την πιθανότητα εκείνη που προκαλεί ένα γεγονός όταν αυτό συμβεί (ευνοϊκή έκβαση) προς την πιθανότητα να μην συμβεί. Υπό την έννοια αυτή, ο λόγος OR χρησιμοποιείται συχνά στην ιατρική επιστήμη, όπως μελετώντας για παράδειγμα την πρόκληση πυρετού (ευνοϊκή έκβαση) ή μη λόγω της εμφάνισης μιας ασθένειας.

Ο λόγος OR προκύπτει από τη σχέση:

$$OR = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

στην οποία τα λατινικά γράμματα αφορούν συχνότητες εμφάνισης ατόμων σε ένα επαρκές δείγμα νοσούντων με τις ακόλουθες διαπιστώσεις:

a= πρόκληση αιτίου και αποτελέσματος (+ +), δηλαδή εμπύρετα άτομα με παρούσα τη νόσο

b= πρόκληση αιτίου άνευ αποτελέσματος (+ -), δηλαδή άτομα φυσιολογικά παρά την εμφάνιση της νόσου

c= απουσία αιτίου αλλά πρόκληση αποτελέσματος (- +), εμπύρετα άτομα χωρίς να νοσούν

d= απουσία αιτίου και απουσία αποτελέσματος (- -), άτομα χωρίς νόσο και πυρετό

Η τιμή του λόγου OR ερμηνεύεται με βάση τις ακόλουθες τρεις συνθήκες, εφόσον προηγουμένως έχει διαπιστωθεί στατιστική σημαντικότητα στο αποτέλεσμα ($p<0,05$):

Όταν OR=1 δεν παρατηρείται πρόκληση αιτίου (νόσος) στην έκβαση ενός αποτελέσματος (πυρετός)

Όταν OR>1 η πρόκληση του αιτίου σχετίζεται με υψηλή πιθανότητα να συμβεί ευνοϊκό αποτέλεσμα

Όταν OR<1 η πρόκληση του αιτίου σχετίζεται με χαμηλή πιθανότητα εμφάνισης της ευνοϊκής έκβασης

Η τιμή του λόγου OR συνοδεύεται πάντα και από την εκτίμηση του στατιστικού σφάλματος, SE:

$$SE = \sqrt{(1/a)+(1/b)+(1/c)+(1/d)}$$

καθώς επίσης και από τα 95% όρια εμπιστοσύνης μέσα στα οποία ο λόγος OR κυμαίνεται στατιστικώς σημαντικά:

$$e^{\log_e(OR) \pm 1,96 \cdot SE}$$

β) Υπό τους όρους της λογιστικής παλινδρόμησης ο λόγος OR ή επικρατέστερα **θ** χρησιμοποιείται για την ερμηνεία της σχέσης μεταξύ μιας προβλεπτικής X και της απόκρισης Y και λαμβάνει μόνο θετικές τιμές,

$$\theta = \frac{p_j}{1-p_j} = e^{(\beta_0 + \beta_1 X)}$$

όπου p_j είναι η πιθανότητα επιτυχημένης έκβασης. Έτσι, όταν θ=1, τότε δεν υπάρχει σχέση μεταξύ των δύο αντιπαραβαλλόμενων μεταβλητών. Αν θ>1, τότε οι πιθανότητες επιτυχημένης έκβασης είναι υψηλότερες να συμβούν για τη συγκεκριμένη ανεξάρτητη μεταβλητή (συνεχή, τακτική ή ονομαστική) και αν θ<1, ισχύει το αντίστροφο. Η παράμετρος β_0 (χωρίς τη θεώρηση της X) αφορά την ευνοϊκή πιθανότητα απόκρισης (1) της Y στο σύνολο του μελετώμενου πληθυσμού.

Η εκθετική σχέση χρησιμοποιείται για την ερμηνεία του συντελεστή β: ο λόγος των πιθανοτήτων επιτυχημένης έκβασης αυξάνεται αναλογικά με την τιμή e^{β_1} για κάθε μονάδα αύξησης της X, στην ουσία δηλαδή ο λόγος ισούται με e^{β_1}. Για παράδειγμα, αν $\beta_1=0,85$ τότε $\theta=e^{0,85}=2,34$ που σημαίνει ότι αναμένεται αύξηση κατά 134% (2,34-1=1,34) του λόγου επιτυχημένης έκβασης για κάθε αύξηση της X κατά 1 μονάδα. Στο παράδειγμα 3.1 δείχνεται η διαδικασία υπολογισμού όλων των παραμέτρων που αφορούν την εκτίμηση του λόγου θ αλλά και της λογιστικής παλινδρόμησης.

Παράδειγμα 3.1. Τρόπος υπολογισμού του λόγου των ευνοϊκών πιθανοτήτων έκβασης και των στατιστικών παραμέτρων.

Ο παρακάτω πίνακας ενδεχομένων καταρτίστηκε ύστερα από έρευνα αγοράς σχετικής με την προτίμηση (πρόθεση αγοράς) 80 καταναλωτών ως προς δύο προϊόντα A και B. Οι κωδικοί αριθμοί 1 και 0 αναφέρονται στην προτίμηση η μη των καταναλωτών και οι τιμές (συχνότητες εμφάνισης), ανάλογα με την επιλογή τους στα συνδυασμένα επίπεδα (κελιά):

		Είδος προϊόντος		
		A	B	Σύνολο
Πρόθεση αγοράς	1	36	20	56
	0	14	10	24
Σύνολο		50	30	80

Το είδος προϊόντος στον πίνακα αυτόν αποτελεί το αίτιο πρόκλησης (μεταβλητή X, με δύο κατηγορίες (A και B)) και η πρόθεση αγοράς την έκβαση του αποτελέσματος (απόκριση Y), ευνοϊκή (1) ή μη (0).

Οι υπολογισμοί βασίζονται στη χρήση της εξίσωσης,

$$logit(p) = \log_e\left(\frac{p}{1-p}\right) = \beta_0 + \beta_1 X$$

Αν επιθυμούμε την εξέταση μόνο της Y τότε η εξίσωση τροποποιείται σε logit(p)=β_0, και η ολική πιθανότητα εμφάνισης της πρόθεσης αγοράς των προϊόντων θα ισούται με p=56/80=0,70. Η ευνοϊκή έκβαση της απόκρισης Y για όλο τον πληθυσμό υπολογίζεται ως p/(1-p)=0,7/(1-0,7)=2,333, ενώ η λογαριθμική μορφή της θα δίνει logit(p)=$\log_{e(}$2,333)=0,847.

Όταν το ενδιαφέρον στρέφεται στην ολοκληρωμένη εξίσωση logit(p) τότε οι πιθανότητες αγοράς για καθένα από τα δύο προϊόντα (ευνοϊκές εκβάσεις (1)) έχουν ως εξής:

Προϊόν A: p=(36/50)/(14/50)=0,72/0,28=2,57, δηλαδή πιθανότητα 2,57:1 να προτιμηθεί το προϊόν A

Προϊόν B: p=(20/30)/(10/30)=0,67/0,33=2,00, δηλαδή πιθανότητα 2:1 να αγοραστεί το προϊόν B

Ο λόγος θ των δύο ευνοϊκών πιθανοτήτων προκύπτει ως θ=(2,57)/(2,00)=1,285 η οποία δείχνει ότι το προϊόν A έχει 1,285 φορές μεγαλύτερη πιθανότητα (ή 28,5%) να αγοραστεί από τους καταναλωτές από ό,τι το προϊόν B.

Το τυπικό σφάλμα εκτιμάται ως

$$SE = \sqrt{(1/a)+(1/b)+(1/c)+(1/d)} = \sqrt{(1/36)+(1/20)+(1/14)+(1/10)} = \sqrt{0,249} = 0,499$$

και τα 95% όρια εμπιστοσύνης του λόγου θ

$$e^{\log_e(\theta)\pm 1,96\cdot SE} = e^{\log_e(1,285)\pm 1,96\cdot 0,499} = e^{0,25\pm 0,98}$$

από τη σχέση,

όπου για μεν το ανώτερο όριο ο λόγος θα ισούται με $e^{0,25+0,98}$=$e^{1,23}$ και αντιλογαριθμώντας με 3,42

για δε το κατώτερο όριο θα ισούται με $e^{0,25-0,98}$=$e^{-0,73}$ και αντιλογαριθμώντας με 0,48.

Με τη χρήση του στατιστικού προγράμματος MINITAB 17.0 προκύπτουν τα ακόλουθα αποτελέσματα (βλ. ενότητα 3.2.1 και 3.2.2):

Αξιοπιστία του μοντέλου	
R^2	AIC
0,26%	101,49

Παράμετροι παλινδρόμησης					
Προϊόν	Συντελεστής	SE	p-τιμή	Λόγος θ	95% Ο.Ε.
β_0	-0,693	0,387			
A (προς B)	-0,251	0,499	0,616	1,2857	(0,483-3,420)

Έλεγχοι καλής προσαρμογής			
Μέθοδος	DF	χ^2	p-τιμή
Pearson	78	80,0	0,416
Deviance	78	97,5	0,067

τα οποία δείχνουν εξαιρετικά χαμηλή τιμή R^2 (0,26%) και άρα ελάχιστη αξιοπιστία του μοντέλου, μη καλή προσαρμογή του κριτηρίου απόκλισης D (p=0,067) και έλλειψη στατιστικής σημαντικότητας του μοντέλου συνολικά (p=0,616). Κατά συνέπεια το μοντέλο της διωνυμικής παλινδρόμησης με τιμή αναφοράς της Y=0 και κατηγορία αναφοράς της X=B (στην εξίσωση εισάγεται η κατηγορία A):

$$P(0)=\frac{e^{-0,693-0,251\cdot(A)}}{1+e^{-0,693-0,251\cdot(A)}}$$

δεν εδραιώνεται στατιστικά και απορρίπτεται.

Οι στατιστικές παράμετροι του μοντέλου επαληθεύουν όλους τους υπολογισμούς που εκτελέστηκαν με βάση τις συχνότητες του πίνακα ενδεχομένων.

Τυπικό σφάλμα των συντελεστών

Υπολογίζεται το ασυμπτωτικό τυπικό σφάλμα το οποίο όσο μικρότερη τιμή παρέχει τόσο ακριβέστερη θεωρείται η εκτίμηση. Η στατιστική σημαντικότητα των συντελεστών των ανεξάρτητων μεταβλητών ελέγχεται με δύο κριτήρια:

α) Το κριτήριο του Wald,

$$z=\frac{\beta_i}{SE}$$

Η τιμή z συγκρίνεται με την τιμή 1,96 ή υψούμενη στο τετράγωνο με τη θεωρητική τιμή χ^2 (3,841).

Τιμές του z μεγαλύτερες από 1,96 δείχνουν στατιστική σημαντικότητα της μεταβλητής. Τα 95% όρια εμπιστοσύνης κάθε συντελεστή β_i εξάγονται ως $\beta_i \pm z_{0,05/2} \cdot SE$ και τα αντίστοιχα όρια εμπιστοσύνης του λόγου επιτυχημένης έκβασης υπολογίζονται αντιλογαριθμίζοντας το ανώτερο και κατώτερο της παραπάνω σχέσης. Εντός του εύρους των ορίων εμπιστοσύνης, ο λόγος των πιθανοτήτων αντιπροσωπεύεται πλήρως και ισοδύναμα από οποιαδήποτε τιμή.

Το κριτήριο του Wald προκαλεί διεύρυνση του τυπικού σφάλματος όταν οι συγκρινόμενοι συντελεστές έχουν υψηλή τιμή, μία ιδιότητα καθόλου επιθυμητή, διότι οδηγεί σε πολύ μικρή τιμή του στατιστικού Wald και στην λανθασμένα αποδοχή της σημαντικότητας του εξεταζόμενου συντελεστή (Hauck and Donner 1977). Στις περιπτώσεις αυτές, είναι προτιμότερη η απόπειρα ανάπτυξης κάποιου υποδείγματος με και χωρίς τη συγκεκριμένη - με υψηλό συντελεστή - μεταβλητή και ο έλεγχος της υπόθεσης να στηρίζεται στη μεταβολή -2LL, δηλαδή του λογάριθμου πιθανοφάνειας όπως περιγράφεται παρακάτω.

β) Το κριτήριο του λόγου ή λογάριθμου πιθανοφάνειας -2LL (Likelihood ratio statistic), το οποίο ελέγχει ένα μικρότερο μοντέλο S με s συντελεστές και πιθανοφάνεια L_s προς ένα μεγαλύτερο μοντέλο L με l συντελεστές (συνήθως ένα παραπάνω) και πιθανοφάνεια L_l και με τον περιορισμό ότι οι παράμετροι s αποτελούν μέρος του συνόλου των παραμέτρων l:

$$-2\log_e\left(\frac{L_s}{L_l}\right)=-2\left[\log_e(L_s)-\log_e(L_l)\right]=-2(L_s-L_l)$$

Η τιμή του κριτηρίου συγκρίνεται με τη θεωρητική τιμή χ^2 που λαμβάνεται από τον πίνακα Π4.

3.2.2 Μέθοδοι επιλογής, προσαρμογής και αξιολόγησης του μοντέλου

Ένα διωνυμικό υπόδειγμα (μοντέλο) παλινδρόμησης για να θεωρείται αποδεκτό οφείλει να υπακούει σε ορισμένα κριτήρια τα οποία σχετίζονται με τον κατάλληλο αριθμό επιλογής των ανεξάρτητων μεταβλητών από ένα υποψήφιο πλήθος αυτών που έχουν καταμετρηθεί. Ελέγχεται επίσης, το ποσοστό ακρίβειας του επιλεγμένου μοντέλου, ο βαθμός καταλληλότητας του μοντέλου στα στοιχεία που το αναπαράγουν και η ποιότητα σύνδεσης των στοιχείων μεταξύ τους.

Μέθοδοι της άριστης επιλογής των ανεξάρτητων μεταβλητών

Σκοπός της λογιστικής παλινδρόμησης είναι να προβλέψει σωστά την καταγραφή της έκβασης των ατομικών παρατηρήσεων υπολογίζοντας το πλέον φειδωλό μοντέλο, δηλαδή εκείνο που περιλαμβάνει μόνο τις στατιστικά σημαντικές ανεξάρτητες μεταβλητές. Αυτό επιτυγχάνεται με τη χρήση της **βηματικής παλινδρόμησης** η οποία συνίσταται από την προοδευτική ένταξη ή προοδευτική απαλοιφή των μεταβλητών στο μοντέλο. Κυρίως συνιστάται η χρησιμοποίηση τεχνικής κατά την οποία όλες οι μεταβλητές εντάσσονται στο αρχικό μοντέλο και σταδιακά απομακρύνονται εκείνες που δεν υπακούουν στις προϋποθέσεις ενός στατιστικού κριτηρίου (t-απόρριψης ή F-απόρριψης) και παραμένουν μόνο οι στατιστικά σημαντικές.

Η λογιστική παλινδρόμηση χρησιμοποιείται κυρίως για δυο λόγους:

α) Εξασφαλίζει ορθή πρόβλεψη των μελών καθεμιάς από τις δύο κατηγορίες, λαμβάνοντας υπόψη τη δράση πολλών ανεξάρτητων μεταβλητών. Ουσιαστικά η λογιστική παλινδρόμηση υπολογίζει την πιθανότητα επιτυχίας μιας ενέργειας p προς την πιθανότητα αποτυχίας q, ή με μετατροπή, το πηλίκο (λόγο) της ευνοϊκής πιθανότητας (επιτυχημένης έκβασης): p/q=p/(1-p). Ως παράδειγμα αναφέρεται μια επιδημιολογική μελέτη, το ενδιαφέρον της οποίας επικεντρώνεται στην πιθανότητα (p) ανάπτυξης καρκίνου συνεπεία της δράσης συγκεκριμένων ανεξάρτητων μεταβλητών (παράγοντες επικινδυνότητας).

β) Παρέχει σημαντική πληροφόρηση της σχέσης και της ισχύος που αναπτύσσεται μεταξύ των ανεξάρτητων μεταβλητών, η οποία διαπιστώνεται από το μέγεθος των τιμών των συντελεστών της παλινδρόμησης. Για παράδειγμα, το κάπνισμα 10 σιγαρέτων την ημέρα (μεταβλητή X_1) προκαλεί μεγαλύτερο κίνδυνο στην ανάπτυξη καρκίνου απ’ ό,τι η εργασία σε ασβεστορυχείο (μεταβλητή X_2).

Κριτήριο ελέγχου της ισότητας των κλίσεων

Το **κριτήριο G**, που είναι επίσης λογαριθμικό πηλίκο πιθανοφάνειας (Log-likelihood ratio), ελέγχει τη διαφορά στη λογαριθμική έκβαση μεταξύ ενός μοντέλου που περιέχει μόνο τους σταθερούς συντελεστές (όρους) β0 και εκείνου που περιέχει τους όρους του προσαρμοσμένου μοντέλου και εξετάζει αν όλοι οι συντελεστές των ανεξάρτητων μεταβλητών ισούνται με 0. Ο έλεγχος G θα πρέπει να δίνει στατιστικά σημαντικό αποτέλεσμα ($p<0,05$) ώστε να ισχύει ότι ένας τουλάχιστον συντελεστής διαφέρει από το 0 και άρα υπάρχει ενδεχόμενο να υφίσταται κάποιο λογιστικό μοντέλο.

Ακρίβεια του επιλεγμένου μοντέλου

Ένας εναλλακτικός τρόπος ελέγχου του μοντέλου που παράγεται με την εφαρμογή της βηματικής παλινδρόμησης (πέραν των κριτηρίων F και R^2) είναι και η εκτίμηση του μοντέλου με μια ομάδα στοιχείων που δεν συμπεριφθηκαν στο μοντέλο. Συνήθως, η διαδικασία περιλαμβάνει την εκτίμηση ενός μοντέλου με το 30-50% των παρατηρήσεων του δείγματος και χρήση του υπόλοιπου 70-50% για τον έλεγχο της ακρίβειας του μοντέλου. Η ακρίβεια μετρείται με την ταυτοποίηση των παρατηρήσεων εκείνων που ταξινομήθηκαν ορθά στο χρησιμοποιούμενο δείγμα. Υπάρχουν 4 δυνατές περιπτώσεις ταξινόμησης για κάθε παρατήρηση. Μια πρόβλεψη 0 όταν το δείγμα που χρησιμοποιείται δίνει 0 (ορθό), μια πρόβλεψη 0 όταν το δείγμα παρέχει ένδειξη 1 (σφάλμα), μια πρόβλεψη 1 όταν το δείγμα δείχνει 0 (σφάλμα) και μια πρόβλεψη 1 όταν το δείγμα προβλέπει 1 (ορθό). Το ποσοστό των ορθά ταξινομημένων παρατηρήσεων αναφέρεται ως ακρίβεια του παραγόμενου μοντέλου.

Μετρήσεις καλής προσαρμογής του μοντέλου

Οποιοδήποτε μοντέλο με k ανεξάρτητες μεταβλητές που επιλέγεται πριν από την τελική αποδοχή του θα πρέπει να ελεγχθεί για την ποιότητα της αξιοπιστίας του με την εφαρμογή ορισμένων κριτηρίων:

1. Ο έλεγχος χ^2 του Pearson βασίζεται στην εκτίμηση των υπολειμμάτων και περιγράφει το μοντέλο προσαρμόζοντάς το στα μετρηθέντα στοιχεία. Το κριτήριο μειονεκτεί όταν ο αριθμός των κατηγορικών τιμών της ανεξάρτητης μεταβλητής προσεγγίζει τον αριθμό των παρατηρήσεων, προτιμάται όμως όταν υπάρχουν επαναληπτικές παρατηρήσεις για καθεμία κατηγορία της μεταβλητής. Το κριτήριο υπολογίζεται ως,

$$\chi^2=\sum_j r_j^2$$

$$r_j=\frac{y_j-m_j\hat{p}_j}{\sqrt{m_j\hat{p}_j(1-\hat{p}_j)}}$$

y_j= ο αριθμός των επιτυχημένων εκβάσεων για την j μεταβλητή

m_j= ο αριθμός των προσπαθειών ή επαναληπτικών μετρήσεων για την j μεταβλητή $\hat{p}_j$ = εκτιμώμενη (προσαρμοσμένη) πιθανότητα για την j μεταβλητή.

r_j= τυποποιημένο υπόλειμμα του Pearson

Υψηλές τιμές χ^2, όταν αντιστοιχούν σε ακριβή πιθανότητα σφάλματος p, μικρότερη της θεωρητικής τιμής 0,05, δείχνουν ότι το μοντέλο δεν περιγράφει επαρκώς τα στοιχεία.

2. Το κριτήριο απόκλισης D (Deviance) των παρατηρήσεων δείχνει, επίσης, πόσο καλά προσαρμόζεται το επιλεγμένο μοντέλο στα στοιχεία της μελέτης και ουσιαστικά μετράει την ασυμφωνία που υφίσταται μεταξύ του κρινόμενου μοντέλου και του κορεσμένου μοντέλου (με όλους τους όρους αλληλεπίδρασης ενσωματωμένους). Το κριτήριο υπόκειται στους ίδιους περιορισμούς οι οποίοι αναφέρθηκαν στον προηγούμενο έλεγχο καλής προσαρμογής. Το κριτήριο υπολογίζεται ως,

$$D=\sum_j d_j^2$$

$$d_j=\pm 2\left[y_j\log_e\left(\frac{y_j}{m_i\hat{p}_j}\right)+(m_j-y_j)\log_e\frac{(m_j-y_j)}{m_j(1-\hat{p}_j)}\right]$$

d_j= η υπολειμματική απόκλιση και το πρόσημο ± εξαρτάται από το αποτέλεσμα της πράξης

$$y_j-m_j\hat{p}_j$$

.

Όταν y_j=0 τότε η υπολειμματική απόκλιση ισούται με

$$d_j=\left[2m_j\left|\log_e(1-\hat{p}_j)\right|\right]^{1/2}$$

Όταν y_j=m_j τότε η εξίσωση τροποποιείται σε

$$d_j = \left[2\mathrm{m}_j \left| \log_e \hat{p}_j \right| \right]^{1/2}$$

Υψηλές τιμές D όταν αντιστοιχούν σε ακριβή πιθανότητα σφάλματος p<0,05 δείχνουν ότι το μοντέλο δεν περιγράφει επαρκώς τα στοιχεία.

3. Το κριτήριο πληροφόρησης του Akaike,

$$AIC = \frac{-2\log_e \hat{L}(M_k) + 2\mathrm{p}}{N}$$

όπου $\hat{L}(M_k)$ είναι η εκτίμηση της μέγιστης πιθανοφάνειας του μοντέλου προσαρμογής M_k και p ο αριθμός των παραμέτρων στο μοντέλο. Το μοντέλο με τη μικρότερη τιμή AIC θεωρείται ότι παρέχει την καλύτερη προσαρμογή και χρησιμοποιείται κυρίως στις περιπτώσεις σύγκρισης διαφορετικών μοντέλων.

4. Το κριτήριο πληροφόρησης του Bayes το οποίο χρησιμοποιείται ως ακριβής προσέγγιση ενός θεωρητικά μεγάλου μεγέθους δείγματος, έχοντας διαθέσιμο μόνο ένα μικρό δείγμα μέχρι και 40 παρατηρήσεων,

$$BIC_k = D(M_k) - df_k \log_e N$$

όπου $D(M_k)$ είναι ο συντελεστής απόκλισης του μοντέλου M_k και df_k οι βαθμοί ελευθερίας των αποκλίσεων. Όσον αυξάνεται η αρνητική τιμή BIC_k τόσο καλύτερη προσαρμογή παρουσιάζει το μοντέλο. Ως ένας καλός οδηγός λήψης ορθής κρίσης προτείνεται ο ακόλουθος:

Όταν η εκάστοτε τιμή $|BIC_1\text{-}BIC_2|$ είναι 0-2 τότε το αποτέλεσμα της προσαρμογής κρίνεται επισφαλές. Τιμές 2-6 κρίνονται ικανοποιητικές, τιμές 6-10 παρέχουν ισχυρή μαρτυρία προσαρμογής του μοντέλου ενώ τιμές >10 εξαιρετικά ισχυρή.

5. Ο συντελεστής τύπου R^2 του McFadden γνωστός και ως δείκτης του λόγου πιθανοφανειών (Likelihood-ratio index) ο οποίος συγκρίνει ένα μοντέλο με k εισηγμένες ανεξάρτητες μεταβλητές με το μοντέλο εκείνο στο οποίο απουσιάζουν οι συγκεκριμένες μεταβλητές,

$$R^2_{MF} = 1 - \frac{\log_e L_M - k}{L_0}$$

όπου k ο αριθμός των μεταβλητών στο μοντέλο, L_0 η εκτίμηση πιθανοφάνειας στο μοντέλο χωρίς την ένταξη αυτών των μεταβλητών και L_M η αντίστοιχη στο πλήρες μοντέλο με όλες τις μεταβλητές εισηγμένες. Υψηλές τιμές του δείκτη R^2_{MF} δηλώνουν ένδειξη καλής προσαρμογής του μοντέλου.

6. Ο έλεγχος των Hosmer-Lemeshow αφορά τον έλεγχο της ποσοστιαίας κατανομής των παρατηρήσεων σε ομάδες, με βάση τις προβλεπόμενες πιθανότητες (Παράδειγμα 3.2). Αποτελεί εκδοχή του στατιστικού κριτηρίου χ^2 ενός πίνακα 2xg παρατηρούμενων και αναμενόμενων συχνοτήτων, όπου g είναι ο αριθμός των ομάδων και με βαθμούς ελευθερίας g-2 και θεωρείται κριτήριο σημαντικής βαρύτητας. Το κριτήριο εκτιμάται ως,

$$G^2_{HL} = \sum_{k=1}^{g} \frac{(O_k - n'_k \bar{p}_k)^2}{n'_k \bar{p}_k (1 - \bar{p}_k)}$$

n'_k= ο αριθμός των ανεξάρτητων μεταβλητών στην k ομάδα
O_k= ο αριθμός των αποκρίσεων μεταξύ των n'k μεταβλητών
$\bar{p}_k$ = μέση τιμή πιθανότητας σε κάθε ομάδα.

Συνήθως χρησιμοποιούνται 10 ομάδες ίδιας κλάσης μεγέθους των πιθανοτήτων (0-0,1) αφού προηγουμένως καταταγούν οι πιθανότητες με αύξουσα τάξη. Το κριτήριο G^2_{HL} συγκρίνεται με τη θεωρητική τιμή χ^2_8=15,507 (από πίνακα Π4) και όταν κρίνεται μη στατιστικά σημαντικό τότε αποφαινόμαστε ότι οι δύο αντιστοιχίες συχνοτήτων σε κάθε κλάση δεν διαφέρουν στατιστικώς σημαντικά και άρα ισχύει η καλή προσαρμογή των στοιχείων στο μοντέλο. Οπτικά τουλάχιστον, ένα μοντέλο κρίνεται επαρκώς προσαρμοσμένο όταν οι τιμές των παρατηρούμενων και εκτιμώμενων συχνοτήτων πλησιάζουν αρκετά μεταξύ τους.

Παράδειγμα 3.2. Έλεγχος της καλής προσαρμογής των Hosmer-Lemeshow, με τη δημιουργία 10 κλάσεων παρατηρήσεων αφού προηγουμένως διαβαθμιστούν οι κλάσεις με βάση τις προβλεπόμενες πιθανότητες. Συγκεκριμένα, οι 10 κλάσεις διαβαθμίζονται με τέτοιο τρόπο ώστε καθεμία να αντιστοιχεί σε πιθανότητα αυξημένης διαβάθμισης κατά 0,1 μονάδες (0-0,1) μέχρι την ανώτερη 0,9-1,0 (δεκατημόρια) όπως υποδεικνύεται στον πίνακα 3.1. Ακολουθεί η σύγκριση των παρατηρούμενων συχνοτήτων των κλάσεων με τις προβλέπουσες (αναμενόμενες) συχνότητες. Ένα μοντέλο θεωρείται ικανοποιητικό όταν οι περισσότερες παρατηρήσεις με επιτυχημένη έκβαση (1) ταξινομούνται στα υψηλότερα δεκατημόρια και παράλληλα οι περισσότερες παρατηρήσεις με ανεπιτυχή έκβαση (0) στα χαμηλότερα δεκατημόρια. Ακριβέστερα όμως ένα μοντέλο ελέγχεται με την εξίσωση του κριτηρίου,

$$G^2_{HL}=\sum_{j=1}^{10}\frac{\left(O_j-E_j\right)^2}{E_j\left(1-\frac{E_j}{n_j}\right)}$$

όπου n_j= ο αριθμός των παρατηρήσεων στην κλάση j, O_j και E_j ο αριθμός των παρατηρούμενων και αναμενόμενων συχνοτήτων σε αμφότερες τις αποκρίσεις 0 και 1 της εξαρτημένης μεταβλητής (Πίν. 3.1).

Στον πίνακα 3.1 το κριτήριο του ελέγχου είναι στατιστικά σημαντικό (19,58>15,51) ή αλλιώς η ακριβής πιθανότητα σφάλματος p είναι στατιστικά σημαντική (p=0,01<0,05) και επομένως το προτεινόμενο μοντέλο δεν εμφανίζει καλή προσαρμογή των στοιχείων του και απορρίπτεται. Οπτικά, ο αριθμός των επιτυχημένων εκβάσεων δεν συγκεντρώνεται στα ανώτερα δεκατημόρια ούτε και ο αριθμός των ανεπιτυχών στα κατώτερα.

Κλάση	Σύνολο	O	E	O	E
1	9	0	0.14	9	8.86
2	9	0	1.60	9	7.40
3	9	4	3.68	5	5.32
4	9	9	5.28	0	3.72
5	9	7	6.52	2	2.48
6	9	5	7.47	4	1.53
7	9	9	8.03	0	0.97
8	9	7	8.50	2	0.50
9	9	9	8.82	0	0.18
10	12	12	11.96	0	0.04

G^2_{HL}	DF	p
19.58	8	0.01

Πίνακας 3.1. *Καταμερισμός (υποθετικός) των συχνοτήτων με βάση τις 10 κλάσεις των Hosmer-Lemeshow. Οι αναμενόμενες συχνότητες υπολογίζονται από το μοντέλο. Οι παρατηρήσεις ταξινομούνται σε 10 κλάσεις διαστήματος πιθανοτήτων 0 και 1 η καθεμία με αυξανόμενη διάταξη.*

Μέτρα της ποιότητας συνάφειας των στοιχείων (measures of association)

Τα ζεύγη συνακολουθίας ή ανακολουθίας αποτελούν ένδειξη του μεγέθους αξιοπιστίας της πρόβλεψης του προτεινόμενου μοντέλου. Όσα περισσότερα συνακόλουθα ζεύγη καταμετρώνται τόσο ισχυρότερη προβλεπτική αξία έχει το μοντέλο. Ο πίνακας των συνακόλουθων, ανακόλουθων και ισοψηφούντων ζευγών σχηματίζεται με τη δημιουργία όλων των πιθανών ζευγών παρατηρήσεων με τις διαφορετικές τιμές απόκρισης (Παράδειγμα 3.3). Έτσι, αν οι τιμές απόκρισης είναι 1 και 0 τότε κάθε παρατήρηση με τιμή απόκρισης 1 συνδυάζεται (ζευγαρώνει) με κάθε παρατήρηση με τιμή απόκρισης 0. Ο ολικός αριθμός των ζευγών προκύπτει ως το γινόμενο του αριθμού των παρατηρήσεων με τιμή απόκρισης 1 επί τον αριθμό των παρατηρήσεων με τιμή απόκρισης 0. Ακολούθως υπολογίζονται οι προβλεπόμενες πιθανότητες για κάθε παρατήρηση και συγκρίνονται με κάθε ζεύγος παρατηρήσεων.

Ένα ζεύγος παρατηρήσεων κρίνεται συνακόλουθο αν η παρατήρηση με τιμή απόκρισης 1 έχει μεγαλύτερη προβλεπόμενη πιθανότητα να είναι 1 με βάση το μοντέλο απ' ό,τι η παρατήρηση με τιμή απόκρισης 0.

Ένα ζεύγος παρατηρήσεων κρίνεται ανακόλουθο αν η παρατήρηση με τιμή απόκρισης 1 έχει μικρότερη προβλεπόμενη πιθανότητα να είναι 1 με βάση το μοντέλο απ' ό,τι η παρατήρηση με τιμή απόκρισης 0.

Ένα ζεύγος τιμών παρατηρήσεων θεωρείται ισοψήφιο αν οι παρατηρήσεις έχουν ίσες προβλεπόμενες πιθανότητες. Από τον πίνακα των ζευγών συνακολουθίας, ανακολουθίας και ισοψηφούντων ζευγών προκύπτουν τα ακόλουθα στατιστικά μέτρα μέτρα:

- Ο δείκτης D του Somers,

$$D = \frac{n_c - n_d}{n_c + n_d + n_t}$$

- Ο δείκτης Gamma των Goodman-Kruskal,

$$Gamma = \frac{n_c - n_d}{n_c + n_d}$$

- Ο δείκτης Tau-α του Kendall,

$$Tau - a = \frac{n_c - n_d}{0{,}5 \cdot N \cdot (N+1)}$$

n_c= ο αριθμός των ζευγών συνακολουθίας
n_d= ο αριθμός των ζευγών ανακολουθίας
n_t= ο αριθμός των ισοψηφούντων ζευγών
N= ο ολικός αριθμός παρατηρήσεων

Οι παραπάνω δείκτες συνάφειας κυμαίνονται μεταξύ -1 και +1 και τιμές κοντά στο ±1 δηλώνουν ότι το μοντέλο έχει καλύτερη προβλεπτική αξία.

Παράδειγμα 3.3. Διαδικασία υπολογισμού των συνακόλουθων ζευγών σύνδεσης των τιμών απόκρισης.
Τα ζεύγη συνακολουθίας ή μη περιγράφουν τις σχέσεις σύνδεσης μεταξύ ζευγών παρατηρήσεων. Ένα ζεύγος παρατηρήσεων θεωρείται συνακόλουθο όταν και οι δυο τιμές αυτών βρίσκονται προς την ίδια κατεύθυνση και ανακόλουθο όταν οι τιμές των παρατηρήσεων διευθετούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις. Έτσι για δυο ζεύγη παρατηρήσεων (X_1, Y_1) και (X_2, Y_2), τα ζεύγη κρίνονται συνακόλουθα όταν ισχύει $X_1 > Y_1$ και $X_2 > Y_2$ ή επίσης $X_1 < Y_1$ και $X_2 < Y_2$. Ανακόλουθα κρίνονται τα ζεύγη όταν ισχύει $X_1 < Y_1$ και $X_2 > Y_2$ ή επίσης $X_1 > Y_1$ και $X_2 < Y_2$. Ως παράδειγμα αναφέρεται η οργανοληπτική δοκιμή της αρεστότητας σε 4 διαφορετικούς τύπους άρτου (Α-Δ) από δυο δοκιμαστές Δ1 και Δ2 με τα ακόλουθα αποτελέσματα:

		Α	Β	Γ	Δ
X_i	**Δ1**	4	5	1	3
Y_i	**Δ2**	3	2	4	1

Ο πίνακας διαβαθμίζεται με βάση τις τιμές του πρώτου δοκιμαστή και ανασυγκροτείται ως εξής:

		Γ	Δ	Α	Β
X_i	**Δ1**	1	3	4	5
Y_i	**Δ2**	4	1	3	2

Το ζεύγος (1,4) συγκρίνεται με το ζεύγος (3,1) και προκύπτει ότι 1<3 και 4>1, άρα τα ζεύγη κρίνονται ανακόλουθα. Με τον τρόπο αυτό διενεργούνται όλες οι δυνατές συγκρίσεις ζευγών τα αποτελέσματα των οποίων αποτυπώνονται στον πίνακα 3.2. Από το σύνολο των συγκρίσεων προκύπτουν 2 συνακόλουθα ζεύγη (c) και 4 ανακόλουθα (d).

	X_1		Y_1	**Συμπέρασμα**
X_2	1<3	Y_2	4>1	**d**
X_3	1<4	Y_3	4>3	**d**
X_4	1<5	Y_4	4>2	**d**

	X_2		Y_2	
X_3	3<4	Y_3	1<3	**c**
X_4	3<5	Y_4	1<2	**c**

	X_3		Y_3	
X_4	4<5	Y_4	3>2	**d**

Πίνακας 3.2. *Αποτελέσματα της σύγκρισης όλων των δυνατών συνδυασμών των ζευγών ανά δύο τη φορά.*

Διαγνωστικά κριτήρια της διωνυμικής παλινδρόμησης

Η εγκυρότητα του επιλεγμένου μοντέλου ελέγχεται με τη γραφική απεικόνιση των υπολειμμάτων που υπολογίζονται με διάφορους τρόπους και με τη διενέργεια ελέγχων καλής προσαρμογής. Έτσι, ανιχνεύονται οι ανεξάρτητες μεταβλητές αν εμφανίζουν έλλειψη καλής προσαρμογής των στοιχείων τους, αν επηρεάζουν σημαντικά τους συντελεστές παλινδρόμησης και ακόμα αν περιέχουν στοιχεία που δρουν διαστρεβλωτικά στη συμπεριφορά των υπολειμμάτων (εμφάνιση ακραίων τιμών). Υψηλές τιμές των κριτηρίων αυτών ειδοποιούν για πιθανή έλλειψη καλής προσαρμογής των στοιχείων στο μοντέλο.

1. Κριτήρια που ελέγχουν την καλή προσαρμογή των ανεξάρτητων μεταβλητών:

α) Τα υπολείμματα Pearson (r_j) μετρούν την απόσταση μεταξύ της παρατηρούμενης και προσαρμοσμένης τιμής

β) Τα τυποποιημένα υπολείμματα του Pearson μετρούν ό,τι και τα προηγούμενα, προέρχονται όμως ως πηλίκο των στοιχείων δια της τυπικής απόκλισης των τιμών των μεταβλητών.

γ) Τα υπολείμματα των αποκλίσεων (d_j) με παρόμοια ελεγκτική συμπεριφορά όπως και τα προηγούμενα.

δ) Τα υπολείμματα $\Delta\chi^2$ τα οποία προκύπτουν ως μεταβολές του κριτηρίου χ^2 του Pearson, όταν εκάστοτε αφαιρείται μια παρατήρηση από το σύνολο των ανεξάρτητων μεταβλητών και ελέγχεται η επίδρασή της στα υπόλοιπα στοιχεία.

ε) Τα υπολείμματα ΔD τα οποία προκύπτουν ως μεταβολές του κριτηρίου απόκλισης D όταν αφαιρείται εκάστοτε μια παρατήρηση από το πλήθος των ανεξάρτητων μεταβλητών και ελέγχεται η επίδραση της αφαιρούμενης επί των υπόλοιπων στοιχείων.

2. Κριτήρια που ελέγχουν το μέγεθος της επίδρασης των ανεξάρτητων μεταβλητών στη διαμόρφωση των τιμών των συντελεστών της παλινδρόμησης:

α) Το κριτήριο Δβ το οποίο μετρά μεταβολές στους συντελεστές, όταν μια παρατήρηση απομακρύνεται από το μοντέλο και βασίζεται υπολογιστικά στα υπολείμματα Pearson.

β) Το τυποποιημένο κριτήριο Δβ το οποίο συμπεριφέρεται όπως και το προηγούμενο, αλλά προέρχεται υπολογιστικά από τα τυποποιημένα υπολείμματα Pearson.

3. Οι τιμές μόχλευσης – επιρροής (leverages) h_i οι οποίες ελέγχουν αν και πόσο ασυνήθιστες προβλέπουσες τιμές εμφανίζονται στο μοντέλο των ανεξάρτητων μεταβλητών. Η έννοια των συντελεστών επιρροής αναπτύχθηκε στο κεφάλαιο της πολλαπλής γραμμικής παλινδρόμησης και έχει ανάλογη ερμηνεία, με τη διαφορά ότι εδώ οι τιμές μόχλευσης εξαρτώνται τόσο από τις τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής όσο και από εκείνες των ανεξάρτητων. Κυμαίνονται μεταξύ 0 και 1 και υψηλές τιμές μπορεί να σημαίνουν την ύπαρξη παρατηρήσεων με σημαντική επίδραση στην αξιοπιστία του μοντέλου. Συνήθως οι συντελεστές συγκρίνονται με την τιμή αναφοράς 3p/n (p=αριθμός των ανεξάρτητων όρων στο μοντέλο +1 και n=αριθμός παρατηρήσεων) και αν υπάρχουν κάποιοι μεγαλύτεροι αυτής τότε θεωρούνται ύποπτες τιμές.

Συνήθως επιλέγονται τα κριτήρια $\Delta\chi^2$ και ΔD και ελέγχονται γραφικά (ως Y) θέτοντας στον άξονα X τον αύξοντα αριθμό των παρατηρήσεων ή τις εκτιμώμενες τιμές των πιθανοτήτων (Σχ. 3.2). Ακραίες τιμές αντιστοιχούν στα σημεία που εμφανίζονται απομονωμένα των υπολοίπων στις άνω γωνίες των δύο γραφημάτων και, από ποσοτικής πλευράς, όσες τιμές είναι μεγαλύτερες της θεωρητικής 3,841. Με παρόμοιο γραφικό τρόπο ελέγχονται και οι συντελεστές μόχλευσης.

3.3 Πολλαπλή Τακτική Παλινδρόμηση

Η πολλαπλή τακτική παλινδρόμηση (Ordinal regression) επιλέγεται στις περιπτώσεις όπου η εξαρτημένη μεταβλητή διακρίνεται σε περισσότερες από δύο κατηγορίες οι οποίες δύνανται να διαβαθμιστούν με κάποια λογική έννοια, όπως η προτίμηση ενός προϊόντος με βαθμολόγηση της μορφής αποδέχομαι καθόλου, λίγο, αρκετά, πολύ, αντιστοιχώντας ακέραιους με αυξητική κλίμακα (1,2,3,4,5) η ηλικία των ασθενών διακρινόμενη σε ανήλικα, ενήλικα και υπερήλικα άτομα.

Θα πρέπει να αποφεύγεται η χρησιμοποίηση της τακτικής παλινδρόμησης στη θέση της κλασικής γραμμικής παλινδρόμησης, για το λόγο ότι οι τακτικές τιμές, στη θέση συνεχών τής εξαρτημένης μεταβλητής παραβιάζει τις υποθέσεις της παλινδρόμησης με τη μέθοδο ελάχιστων τετραγώνων (Garson 2011). Αφού δεν μπορεί να καθοριστεί η προσεγγισιμότητα των τακτικών τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής ως προς τη μετρική κλίμακα ισοδιαστημάτων, η χρησιμοποίησή της στην κλασική γραμμική παλινδρόμηση είναι υπό αμφισβήτηση, παρόλο που πολλοί ερευνητές δεν το αποφεύγουν, ιδιαίτερα όταν ο αριθμός των κατηγοριών της μεταβλητής είναι μεγάλος (7 ή και 5 ακόμη). Η αμφισβήτηση είναι αντίστοιχη με αυτή που εγείρεται κατά τη χρησιμοποίηση τακτικών μεταβλητών της κλίμακας Likert, στη γραμμική παλινδρόμηση, την παραγοντική ανάλυση, την ανάλυση συστάδων, τη διακριτική ανάλυση, κ.α.) οι οποίες προϋποθέτουν κλίμακες ισοδιαστημάτων, με την αποδοχή της ισότητας των αποστάσεων μεταξύ των σημείων της τακτικής κλίμακας.

3.3.1 Χαρακτηριστικά της τακτικής παλινδρόμησης

Πιθανότητα έκβασης

Αυτή εκφράζεται ως p_k όπου k=1,2...K διαβαθμίσεις και ισχύει,

$$P(y \leq k) = p_1 + p_2 + ... + p_k = \frac{e^z}{1+e^z}$$

όπου

$$z=\beta_0+\beta_1 X_{j1}+\beta_2 X_{j2}+\ldots\beta_k X_{jk}$$

Αθροιστική πιθανότητα έκβασης
Εκφράζει την πιθανότητα μια απόκριση να εμπίπτει σε μια διαβάθμιση k,

$$P(y\leq k)=p_1+p_2+\ldots+p_k, \qquad k=1,2..K$$

Οι αθροιστικές πιθανότητες έκβασης αντιπροσωπεύουν την κατάταξη της απόκρισης. Για ένα μοντέλο με k διαβαθμίσεις 1,2...K θα ισχύει,

$$P(y\leq 1)+P(y\leq 2)+\ldots+P(y\leq K)=1$$

Επειδή το άθροισμα των πιθανοτήτων ισούται με 1 δεν μπορεί εκ των πραγμάτων να υπολογιστεί η πιθανότητα της τελευταίας κατηγορίας. Έτσι, οι λογάριθμοι των πιθανοτήτων επιτυχημένης έκβασης για k-1 αθροιστικές πιθανότητες, δίνονται ως

$$logit[P(y\leq k)] = \log_e \frac{P(y\leq k)}{1-P(y\leq k)}$$

Έννοια της συνάρτησης συνδέσμου
Υπό τον όρο αυτό νοείται ο μη γραμμικός μετασχηματισμός των προβλεπόμενων τιμών με τρόπο ώστε η κατανομή των νέων τιμών να εντάσσεται σε μία από γνωστές κατανομές οικογένεια δίνοντας έτσι τη δυνατότητα στη συνάρτηση συνδέσμου (link function) να προβλέπει άριστα την απόκριση μιας εξαρτημένης μεταβλητής ως μη γραμμικό αποτέλεσμα ενός πλήθους ανεξάρτητων (Σιάρδος 2005). Οι συναρτήσεις που χρησιμοποιούνται ειδικά στις τακτικές παλινδρομήσεις αναφέρονται:

α) Ο λογαριθμικός λόγος των πιθανοτήτων (logit): f(z)= log[z/(1-z)], ο οποίος ενδείκνυται όταν οι παρατηρούμενες συχνότητες των διαβαθμίσεων κατανέμονται ομοιόμορφα μεταξύ τους και αποτελεί τη συχνότερη επιλογή.

β) Η συμπληρωματική διλογαριθμική (complementary log-log): f(z)= log[-log(1-z)], επιλέγεται όταν οι συχνότητες στις υψηλότερες διαβαθμίσεις είναι πολυπληθέστερες απ’ ό,τι στις χαμηλότερες.

γ) Η αρνητική διλογαριθμική (negative log-log): f(z)= -log[-log(z)], χρήσιμη όταν οι συχνότητες των χαμηλότερων διαβαθμίσεων υπερτερούν συγκριτικά των υψηλότερων.

δ) Η αθροιστική πιθανομονάδων (cumulative probit): f(z)= $\Phi^{-1}(z)$, η οποία αποτελεί το αντίστροφο της αθροιστικής κανονικής κατανομής και επιλέγεται όταν οι διαβαθμίσεις της εξαρτημένης τακτικής μεταβλητής ακολουθούν την κανονική κατανομή.

ε) Η αντίστροφη μορφή της Couchy (Cauchit): f(z)= tan [p(z-0,5)], η οποία επιλέγεται όταν ανιχνεύονται πολλές εξωκείμενες τιμές.

Οι τρεις πρώτες συναρτήσεις συνδέσμου επιλέγονται συχνότερα από τις υπόλοιπες, έχουν συνήθως όμοια συμπεριφορά στα μετασχηματισμένα στοιχεία, πλην όμως, παρατηρούνται μερικές φορές διαφοροποιήσεις ως προς την αποτελεσματικότητά τους.

Συντελεστές παλινδρόμησης

Η τεχνική ασπάζεται τα μοντέλα με αναλογικές πιθανότητες έκβασης, πράγμα που σημαίνει ότι οι ανεξάρτητες μεταβλητές ασκούν ισοδύναμο αποτέλεσμα σε όλες τις k-1 διαβαθμίσεις της εξαρτημένης μεταβλητής. Ο συντελεστής κάθε ανεξάρτητης μεταβλητής και για συγκεκριμένη κατηγορία k της εξαρτημένης, εκφράζει τη μεταβολή του λογαρίθμου της απόκρισης σε αυτή την κατηγορία συγκρινόμενη ως προς την κατηγορία αναφοράς K. Οι υπολογισμοί των συντελεστών πραγματοποιούνται με τη μέθοδο της εκτίμησης της μέγιστης πιθανότητας (MLE).

Το τυπικό σφάλμα των συντελεστών ακολουθεί τους κανόνεςτης διωνυμικής παλινδρόμησης.

Η σημαντικότητα κάθε συντελεστή β_i και συνεπώς της αντίστοιχης προβλέπουσας ανεξάρτητης μεταβλητής ελέγχεται από τη σχέση,

$$z = \frac{\beta_i}{SE}$$

και της εκάστοτε σταθερής παραμέτρου

$$z = \frac{\beta_0}{SE}$$

Τιμές $z \geq 1,96$ δηλώνουν στατιστική σημαντικότητα σε επίπεδο σφάλματος 0,05 ($\beta_i \neq 0$).

Τα 95% όρια εμπιστοσύνης των συντελεστών υπολογίζονται από τη σχέση $\beta_i \pm z_{0,05/2} \circ SE$. Τα αντίστοιχα όρια εμπιστοσύνης του λόγου των πιθανοτήτων έκβασης προκύπτουν ως αντιλογάριθμοι του κατώτερου και ανώτερου ορίου της προηγούμενης σχέσης. Τα δύο όρια περιέχουν ένα εύρος μέσα στο οποίο ο λόγος των πιθανοτήτων έκβασης εκφράζεται με οποιαδήποτε τιμή.

Λόγος των πιθανοτήτων επιτυχημένης έκβασης

Για κάθε ανεξάρτητη μεταβλητή εκτιμάται μία μόνο παράμετρος και ένας λόγος πιθανοτήτων, για τον υπολογισμό του οποίου χρησιμοποιούνται οι αθροιστικές πιθανότητες. Έτσι, για μια ανεξάρτητη μεταβλητή X με X_1 και X_2 κατηγορίες ο αθροιστικός λόγος των πιθανοτήτων θα ισούται με

$$\theta = \frac{P(y \leq k \,|X=X_2) \,/\, P(y>k \,|X=X_2)}{P(y \leq k \,|X=X_1) \,/\, P(y>k \,|X=X_1)}$$

Λογαριθμική πιθανότητα έκβασης

Χρησιμεύει για τη σύγκριση δυο μοντέλων που διαφέρουν κατά μία ανεξάρτητη μεταβλητή εισόδου π.χ. στο ένα μοντέλο εισάγονται 3 μεταβλητές και στο άλλο 3+1. Αν θεωρήσουμε ότι στην τακτική παλινδρόμηση υπάρχουν n ανεξάρτητες κατηγορικές μεταβλητές με k κατηγορίες η καθεμία, τότε η συνεισφορά κάθε παρατήρησης y_i στη λογαριθμική πιθανότητα έκβασης, θα εκφράζεται με

$$L(p_i; y_i) = \sum_k y_{ik} \log_e p_{ik}$$

όπου $y_i=(y_{i1},...y_{ik})$ ενώ ισχύει $\Sigma_j y_{ij}=m_j$ για κάθε παρατήρηση i, p_{ik} η πιθανότητα της i παρατήρησης για την κατηγορία k.

Η ολική λογαριθμική πιθανότητα έκβασης ισούται με το άθροισμα των συνεισφορών όλων των παρατηρήσεων,

$$L(p:y) = \sum_i L(p_i : y_i)$$

Κριτήριο ελέγχου της ισότητας των κλίσεων

Το κριτήριο G (λογαριθμικό κριτήριο των πιθανοτήτων) ελέγχει τη στατιστική σημαντικότητα μεταξύ ενός μοντέλου με παρούσες μόνο τις σταθερές παραμέτρους β_0 και του μοντέλου με όλους τους συντελεστές των ανεξάρτητων μεταβλητών και εξετάζει αν όλοι οι συντελεστές είναι ίσοι με 0. Ο έλεγχος G θα πρέπει να δίνει στατιστικά σημαντικό αποτέλεσμα ($p<0{,}05$) έτσι ώστε να ισχύει ότι ένας τουλάχιστον συντελεστής διαφέρει από το 0 και συνεπώς υπάρχει ενδεχόμενο να εφαρμόζεται κάποιο λογιστικό μοντέλο.

Έλεγχοι καλής προσαρμογής του μοντέλου

1. Ο έλεγχος χ^2 του Pearson βασίζεται στην εκτίμηση των υπολειμμάτων και ακολουθεί τη σχέση

$$\chi^2 = \frac{\sum_j r_j^2}{m p_j^{(0)}}$$

r_j = το υπόλειμμα Pearson της κατηγορίας j

m= ο αριθμός των παρατηρούμενων δοκιμών (προσπαθειών) στην κατηγορία j

$p_j^{(0)}$= πιθανότητα που αντιστοιχεί στη μηδενική υπόθεση (δεν υπάρχει διαφορά μεταξύ των παρατηρούμενων και αναμενόμενων τιμών)

2. Ο έλεγχος της απόκλισης D,

$$D = 2\sum y_{ik} \log_e p_{ik} - 2\sum y_{ik} \log_e p_{ik}$$

ο οποίος έχει j-(p+1) βαθμούς ελευθερίας, όπου j είναι ο αριθμός των διακριτών κατηγοριών των ανεξάρτητων μεταβλητών και p ο αριθμός των ανεξάρτητων μεταβλητών και p_{ik} είναι η πιθανότητα της i παρατήρησης για την κατηγορία k.

Το κριτήρια χ^2 του Pearson και της απόκλισης D δείχνουν πόσο καλά ταιριάζει το επιλεγμένο μοντέλο στα στοιχεία της μελέτης. Υψηλές τιμές των κριτηρίων όταν αντιστοιχούν σε ακριβή πιθανότητα σφάλματος $p<0{,}05$ δείχνουν ότι το μοντέλο δεν περιγράφει επαρκώς τα στοιχεία.

Τα δυο παραπάνω κριτήρια μειονεκτούν όταν ο αριθμός των κατηγορικών τιμών (ονομαστικών ή διαβαθμισμένων) της ανεξάρτητης μεταβλητής προσεγγίζει τον αριθμό των παρατηρήσεων, υπερέχουν όμως όταν υπάρχουν επαναληπτικές παρατηρήσεις για καθεμία κατηγορία της μεταβλητής.

Μετρήσεις συνάφειας των στοιχείων

Αν υποθέσουμε ότι η μεταβλητή απόκρισης έχει τρεις διαβαθμίσεις 1, 2 και 3, τότε υπολογίζουμε όλα τα ζεύγη κάθε παρατήρησης με απόκριση 1 με κάθε παρατήρηση με αποκρίσεις 2 και 3, κατόπιν όλα τα ζεύγη κάθε παρατήρησης με απόκριση 2 με κάθε παρατήρηση με αποκρίσεις 1 και 3 κοκ. Ο συνολικός αριθμός των παραγόμενων ζευγών είναι ίσος με το γινόμενο του αριθμού των παρατηρήσεων με διαβάθμιση 1 επί τον αριθμό των παρατηρήσεων με διαβάθμιση 2 συν το αντίστοιχο γινόμενο του αριθμού των παρατηρήσεων με διαβάθμιση 2 επί τον αριθμό των παρατηρήσεων με διαβάθμιση 1 και 3 συν το γινόμενο του αριθμού των παρατηρήσεων με διαβάθμιση 3 επί τον αριθμό των παρατηρήσεων με διαβάθμιση 2 και 3.

Στη συνέχεια υπολογίζονται οι αθροιστικές προβλεπόμενες πιθανότητες για κάθε παρατήρηση και συγκρίνονται αυτές με κάθε ζεύγος παρατηρήσεων. Για κάθε ζεύγος που περιέχει τη μικρότερη διαβάθμιση (δηλαδή την 1), ένα ζεύγος θεωρείται συνακόλουθο αν η αθροιστική πιθανότητα μέχρι τη διαβάθμιση 1 είναι μεγαλύτερη για την παρατήρηση που αντιστοιχεί στη διαβάθμιση 1 από την παρατήρηση που αντιστοιχεί σε μεγαλύτερη διαβάθμιση. Για ζεύγη με υψηλότερες διαβαθμίσεις (δηλαδή ζεύγη με 2 και 3), ένα ζεύγος κρίνεται συνακόλουθο αν η αθροιστική πιθανότητα μέχρι τη διαβάθμιση 2 είναι ανώτερη για την παρατήρηση με τη διαβάθμιση 2 απ' ό,τι με την παρατήρηση με διαβάθμιση 3. Ένα ζεύγος κρίνεται ανακόλουθο όταν ισχύει η προηγούμενη διαδικασία αλλά με αντίστροφο συλλογισμό. Τέλος, ένα ζεύγος κρίνεται ισοψήφιο όταν οι παρατηρήσεις έχουν ίσες αθροιστικές πιθανότητες.

Τρία στατιστικά κριτήρια παρέχουν ένδειξη του μέτρου συνάφειας των στοιχείων και έχουν αναφερθεί στη διωνυμική κατανομή. Είναι ο δείκτης D του Somers, ο δείκτης Gamma των Goodman-Kruskal και ο δείκτης Tau-a του Kendall. Οι δείκτες αυτοί κυμαίνονται μεταξύ -1 και 1 και τιμές κοντά στο ±1 δηλώνουν ότι το μοντέλο παρέχει καλύτερη προβλεπτική αξία.

3.4 Πολλαπλή Ονομαστική Παλινδρόμηση

Επιλέγεται στις περιπτώσεις όπου η εξαρτημένη μεταβλητή είναι ονομαστική και περιέχει οπωσδήποτε περισσότερες από δύο αδιαβάθμητες κατηγορίες (π.χ. περιοχές μιας επικράτειας, τυριά ποικίλης προέλευσης, φυτικά είδη ενός υγρότοπου, υποστρώματα ιζήματος κτλ.).

Η τεχνική, γνωστή και ως πολυμερής ή πολυωνυμική παλινδρόμηση, παραδέχεται ότι κάθε ανεξάρτητη μεταβλητή έχει μία μόνο τιμή για κάθε παρατήρηση και ότι η εξαρτημένη δεν μπορεί να προβλεφτεί άριστα από μία μόνο ανεξάρτητη μεταβλητή για καθεμία παρατήρηση. Οι ανεξάρτητες μεταβλητές θα πρέπει να μη συσχετίζονται ισχυρά μεταξύ τους, να υπάρχει δηλαδή έλλειψη πολυσυγγραμμικότητας. Στα μοντέλα όπου η εξαρτημένη μεταβλητή έχει τη μορφή θεμάτων πολλαπλής επιλογής (multiple choice items), με τη δυνατότητα επιλογής περισσότερων της μιας κατηγοριών τη φορά, η τεχνική προϋποθέτει ότι ισχύει η ανεξαρτησία των λοιπών μη σχετικών εναλλακτικών επιλογών.

Τα μοντέλα της ονομαστικής λογιστικής παλινδρόμησης εκπροσωπούνται από μία εξαρτημένη μεταβλητή με περισσότερες από δυο κατηγορίες, αποτελούν δηλαδή προέκταση της διχοτομικής παλινδρόμησης και περιγράφονται από την εξίσωση,

$$\log_e\left(\frac{p_{ij}}{p_{i1}}\right) = x_i \beta_j$$

όπου j=2,3...J και i=1,2...N και η πιθανότητα p_{ij}= P(Y=j|x) προκύπτει ως

$$p_{ij}=\frac{e^{x_i\beta_j}}{\sum_{j=1}^{J} e^{x_i\beta_j}}$$

όπου $\mathbf{x}_i$ είναι το διάνυσμα των ανεξάρτητων μεταβλητών. Οι άγνωστες παράμετροι $\boldsymbol{\beta}_j$ υπολογίζονται με την εκτίμηση της μέγιστης πιθανοφάνειας (MLE).

Στην πολυμερή λογιστική παλινδρόμηση, μία από τις κατηγορίες της εξαρτημένης μεταβλητής επιλέγεται ως βασική ή προς σύγκριση ή αλλιώς κατηγορία αναφοράς (baseline category). Χωριστές αναλογίες πιθανοτήτων εκτιμώνται για όλες τις ανεξάρτητες μεταβλητές για καθεμία κατηγορία της εξαρτημένης, εκτός από τη βασική η οποία αποκλείεται από περαιτέρω ανάλυση. Ο εκθετικός συντελεστής β εκφράζει τη μεταβολή της επιτυχημένης πιθανότητας καθεμίας κατηγορίας συγκρινόμενη με τη βασική, όταν κάθε ανεξάρτητη μεταβλητή μεταβάλλεται κατά μια μονάδα.

Έτσι, για τις κατηγορίες Y=0, Y=j και Y=J (όπου J είναι η τελευταία κατηγορία) θα προκύψουν οι εξισώσεις,

$$P_i(Y=0)=\frac{1}{1+\sum_{j=1}^{J} e^{(x_i\beta_j)}}$$

$$P_i(Y=j)=\frac{e^{(x_i\beta_j)}}{1+\sum_{j=1}^{J} e^{(x_i\beta_j)}}$$

$$P_i(Y=J)=\frac{e^{(x_i\beta_J)}}{1+\sum_{j=1}^{J} e^{(x_i\beta_j)}}$$

Τα ονομαστικά λογιστικά μοντέλα θεωρούν ότι οι πολυμερείς μετρήσεις σε κάθε διαφορετικό συνδυασμό των ανεξάρτητων μεταβλητών είναι ανεξάρτητες.

Ο μέγιστος αριθμός των ανεξάρτητων μεταβλητών θα πρέπει να είναι σημαντικά μικρότερος κατά την πολυωνυμική παλινδρόμηση συγκρινόμενος με αυτόν στη γραμμική, αφού η κατηγοριοποίηση της εξαρτημένης μεταβλητής στην πολυωνυμική παλινδρόμηση σημαίνει περιορισμό σε παροχή πληροφοριών.

Για την εφαρμογή της πολυωνυμικής λογιστικής παλινδρόμησης, υποστηρίζεται η ανάγκη ύπαρξης μεγάλου μεγέθους δείγματος παρατηρήσεων (τουλάχιστον 50 παρατηρήσεις ανά ανεξάρτητη μεταβλητή) για την ακρίβεια του ελέγχου των υποθέσεων, ιδιαίτερα όταν η εξαρτημένη μεταβλητή έχει πολλές ομάδες. Αναλυτική αναφορά στις ιδιότητες των ονομαστικών μεταβλητών δίνεται από το σύγγραμμα του Reynolds (1984).

3.4.1 Χαρακτηριστικά της μεθόδου

Πιθανότητα επιτυχημένης έκβασης

Αν θεωρήσουμε μια μεταβλητή απόκλισης με τρεις κατηγορίες 1, 2 και 3 και κατηγορία αναφοράς την 3 τότε οι δεσμευμένες πιθανότητες προκύπτουν ως

$$P(y=1|X)=\frac{e^{x'\beta_1}}{1+e^{x'\beta_1}+e^{x'\beta_2}}$$

$$P(y=2|X)=\frac{e^{x'\beta_2}}{1+e^{x'\beta_1}+e^{x'\beta_2}}$$

$$P(y=3|X)=\frac{1}{1+e^{x'\beta_1}+e^{x'\beta_2}}$$

όπου $P_k(X)=p(y=k|X)$ για k=1,2,3. Κάθε πιθανότητα είναι αποτέλεσμα του ανύσματος 2(p+1) παραμέτρων και $\beta'=(\beta'_1, \beta'_2)$.

Το μοντέλο με τις τρεις παραπάνω κατηγορίες απόκρισης (κατηγορία αναφοράς η με αριθμό 3) περιγράφεται από την εξίσωση της λογαριθμικής πιθανότητας έκβασης:

$$L(\beta)=\sum_{i}^{n} y_{1i}\, g_1(X_i)-\log_e\left(1+e^{g_1(X_i)}+e^{g_2(X_i)}\right)$$

Κριτήριο ελέγχου της ισότητας των κλίσεων

Το κριτήριο G εξετάζει αν όλοι οι συντελεστές των ανεξάρτητων μεταβλητών ισούνται με 0. Όταν το κριτήριο G είναι στατιστικά σημαντικό ($p<0,05$) τότε δηλώνει ότι ένας τουλάχιστον συντελεστής διαφέρει από το 0 και άρα μπορεί να προσαρμοστεί κάποιο λογιστικό μοντέλο.

Συντελεστές παλινδρόμησης

Με παρούσες k κατηγορίες της εξαρτημένης μεταβλητής εκτιμώνται k-1 παράμετροι για κάθε ανεξάρτητη μεταβλητή. Οι δράσεις διαφέρουν ανάλογα με την κατηγορία απόκρισης συγκρινόμενες με την κατηγορία αναφοράς. Κάθε λογαριθμικός λόγος πιθανοτήτων παρέχει τις εκτιμώμενες (προσαρμοσμένες) διαφορές μιας κατηγορίας απόκρισης ως προς την κατηγορία αναφοράς. Οι παράμετροι (συντελεστές) των k-1 εξισώσεων αφορούν λογαριθμικούς λόγους πιθανοτήτων χρησιμοποιώντας όλα τα λοιπά ζεύγη των κατηγοριών απόκρισης με τη μέθοδο της εκτίμησης της μέγιστης πιθανότητας.

Η σημαντικότητα των συντελεστών υπολογίζεται με βάση το κριτήριο Wald ως,

$$z=\frac{\beta_{k_i}}{SE}$$

$$Z=\frac{\beta_0}{SE}$$

και τα 95% όρια εμπιστοσύνης από την εξίσωση $\beta_{kj} \pm z_{0,05/2^\circ}SE$.

Εναλλακτικά, και με περισσότερη αξιοπιστία, χρησιμοποιείται ο λογάριθμος του λόγου πιθανοφάνειας -2LL ο οποίος ελέγχει με τη βοήθεια του κριτηρίου χ^2 την επίδραση καθεμίας ανεξάρτητης μεταβλητής στο τελικό μοντέλο και βασίζεται στη μεταβολή που επέρχεται στην τιμή -2LL με την απομάκρυνσης μιας εκάστοτε μεταβλητής.

Λόγος των πιθανοτήτων έκβασης

Χρησιμοποιείται για την εκτίμηση της σχέσης μεταξύ εξαρτημένης και ανεξάρτητης μεταβλητής και παράγει πάντα θετική τιμή. Λόγος ίσος με 1 λαμβάνεται ως λόγος αναφοράς δηλαδή η τιμή θ=1 εκφράζει απουσία κάποιας σχέσης μεταξύ των δυο μεταβλητών X και Y. Αν θ>1 τότε οι πιθανότητες επιτυχημένης έκβασης είναι υψηλότερες να συμβούν για τη συγκεκριμένη ανεξάρτητη μεταβλητή. Για παράδειγμα, αν ένα μοντέλο περιλαμβάνει k κατηγορίες της εξαρτημένης μεταβλητής και μία ανεξάρτητη, τότε ο λόγος των πιθανοτήτων έκβασης υποδεικνύει την επιτυχημένη πιθανότητα μιας κατηγορίας συγκρινόμενη με την κατηγορία αναφοράς.

Η παρακάτω εξίσωση περιγράφει το λόγο των πιθανοτήτων μιας εξαρτημένης κατηγορικής μεταβλητής με τρεις κατηγορίες και μιας ανεξάρτητης κατηγορικής με δύο κατηγορίες, α και β:

$$\theta = \frac{P(y=k \mid X=a) \,/\, P(y=3 \mid X=a)}{P(y=k \mid X=\beta) \,/\, P(y=3 \mid X=\beta)}$$

Έλεγχοι καλής προσαρμογής του μοντέλου

Στην ονομαστική παλινδρόμηση υπολογίζονται, όπως και στις προηγούμενες τεχνικές, τα κριτήρια χ^2 του Pearson και της απόκλισης D των παρατηρήσεων (παρατηρούμενες-εκτιμώμενες) και θεωρούνται αξιόπιστες μόνον όταν υπάρχουν πολλές παρατηρήσεις για κάθε συνδυασμό των ανεξάρτητων μεταβλητών. Υψηλές τιμές χ^2 δηλώνουν μοντέλο μη επαρκώς προσαρμοσμένο στα στοιχεία της ανάλυσης.

Οι συντελεστές πολλαπλού προσδιορισμού τύπου R^2, ή αλλιώς ψευδο-συντελεστές R^2, αποτελούν διαφορετική προσέγγιση εκτίμησης της καλής προσαρμογής του μοντέλου παρέχοντας ερμηνεία παρόμοια με εκείνη της γραμμικής παλινδρόμησης, δηλαδή εκφράζουν το ποσοστό της διακύμανσης που επεξηγείται από τις ανεξάρτητες μεταβλητές. Εξ αυτών, ο συντελεστής R^2 των Aldrich and Nelson χρησιμοποιείται σε διμερείς και πολυμερείς λογιστικές παλινδρομήσεις αδυνατώντας πάντως να προσεγγίσει το μέγιστο της τιμής R^2, δηλαδή τη μονάδα. Δημοφιλέστερος θεωρείται ο συντελεστής R^2 του McFadden, σχετική αναφορά του οποίου έγινε στην ενότητα 3.2.2. Ο έλεγχος αυτός στηρίζεται στην εκτίμηση του λογάριθμου της πιθανοφάνειας όπως επίσης και ο ψευδο-συντελεστής των Cox & Snell:

$$R^2_{(C \wedge S)} = 1 - \left(\frac{L_0}{L_M} \right)^{2/n}$$

όπου n το πλήθος των παρατηρήσεων και οι παράμετροι L_M και L_0 αφορούν τις πιθανοφάνειες με παρούσες τις μεταβλητές και χωρίς αυτές αντίστοιχα. Ο δείκτης αυτός αδυνατεί επίσης να προσεγγίσει τη μονάδα και το πρόβλημα αυτό παρακάμπτεται με τη χρήση της τροποποιημένης εξίσωσης των Nagelkerke/Cragg & Uhle, ο οποίος επιτρέπει τη διακύμανση του δείκτη στο εύρος 0-1:

$$R^2 = \frac{1 - \left(\frac{L_0}{L_M} \right)^{2/n}}{1 - (L_M)^{2/n}}$$

Επισημαίνεται ότι οι ψευδοσυντελεστές προσδιορισμού R^2 θεωρούνται εσφαλμένως έλεγχοι της καλής προσαρμογής των μοντέλων αφού στην πραγματικά επιζητούν να εκτιμήσουν την ένταση σχέσης που αναπτύσσεται μεταξύ της εξαρτημένης και των ανεξάρτητων μεταβλητών. Ένεκα αυτής της διάστασης μερικές φορές παρατηρείται αναντιστοιχία στην εκτίμηση των αποτελεσμάτων.

Διαγνωστικά κριτήρια της ονομαστικής παλινδρόμησης

Η καλή προσαρμογή του μοντέλου υποβοηθείται επίσης και με την εξέταση των τυποποιημένων υπολειμμάτων r_j του Pearson της απόκλισης D, συνηθέστερα όμως με τη διαγραμματική μεταβολή των κριτηρίων $\Delta\chi^2$ και ΔD και τον αύξοντα αριθμό των παρατηρήσεων ή τις εκτιμώμενες τιμές των πιθανοτήτων, όπως περιγράφηκαν στη διωνυμική παλινδρόμηση (ενότητα 3.2.2).

Ταξινόμηση παρατηρήσεων

Ας υποθέσουμε ότι αξιολογήθηκε επαρκώς ένα μοντέλο πολυωνυμικής παλινδρόμησης με τρεις κατηγορίες παρούσες στην εξαρτημένη μεταβλητή ως αποτέλεσμα της δράσης δύο ανεξάρτητων μεταβλητών. Τότε, είναι εφικτή, με βάση τους συντελεστές παλινδρόμησης, η εκτίμηση της πιθανότητας που έχει ένα άτομο (παρατήρηση) να ανήκει σε κάποια από τις τρεις κατηγορίες της εξαρτημένης, εφαρμόζοντας την εξίσωση (και αντιλογαριθμώντας τις τιμές j):

$$P_1(Y=1)=\frac{e^{g_1}}{\sum_{j=1}^{J} e^{g_j}}$$

$$P_2(Y=2)=\frac{e^{g_2}}{\sum_{j=1}^{J} e^{g_j}}$$

όπου P είναι η εκτιμώμενη πιθανότητα για τις κατηγορίες 1 και 2 (η τρίτη τίθεται ως κατηγορία αναφοράς). Η κατηγορία που εμφανίζει την υψηλότερη πιθανότητα θεωρείται να αντιπροσωπεύει το συγκεκριμένο άτομο.

Με τον τρόπο αυτό υπολογίζονται οι εκτιμώμενες πιθανότητες για όλα τα άτομα να ανήκουν σε μία από τις τρεις κατηγορίες. Γεννιέται όμως το ερώτημα πόσο ορθά έχει πραγματοποιηθεί η ταξινόμηση αυτή αν ληφθεί υπόψη ο βαθμός ταύτισης του αριθμού των προβλεπόμενων παρατηρήσεων με τις εμπειρικές στις κατηγορίες της εξαρτημένης μεταβλητής. Για το λόγο αυτό, καταρτίζεται ένας διασταυρωτός πίνακας δυο κατευθύνσεων ο οποίος περιέχει στα κελιά τις συχνότητες ορθής αντιστοίχησης ανά κατηγορία των προβλεπόμενων (στήλες) και παρατηρούμενων (σειρές). Το ποσοστό των ορθώς προβλέψιμων ανά κατηγορία υπολογίζεται επίσης είτε ατομικά σε κάθε κελί είτε και συνολικά ως αθροίσματα σειρών και στηλών. Όσο μεγαλύτερο ποσοστό ταυτίζεται τόσο πιο αξιόπιστο αναμένεται το μοντέλο πολυωνυμικής παλινδρόμησης.

Η ταξινόμηση των παρατηρήσεων αποτελεί μέτρο εκτίμησης της καλής προσαρμογής του προτεινόμενου μοντέλου, η αξιοπιστία του όμως ενδέχεται να υποβαθμίζεται στην παρουσία άνισου αριθμού παρατηρήσεων μεταξύ των κατηγοριών και συνεπώς θα πρέπει να συνεκτιμάται με τα υπόλοιπα κριτήρια αξιολόγησης της προσαρμογής του μοντέλου.

3.5. Μελέτες περιπτώσεων πολλαπλής λογιστικής παλινδρόμησης

Οι αναλύσεις επιμελήθηκαν με τη βοήθεια των προγραμμάτων STATISTICA 12.0 (βηματική παλινδρόμηση) και MINITAB 16.0

Σε μια έρευνα σχετική με την ένταξη παιδιών με ειδικές εκπαιδευτικές ανάγκες στο Γενικό Σχολείο (Πέννα, 2008), ειδικά καταρτισμένα ερωτηματολόγια δόθηκαν σε όλους τους δασκάλους της ευρύτερης περιφέρειας μιας επικράτειας και επεστράφησαν 421 πλήρως συμπληρωμένα. Στο ερωτηματολόγιο του πίνακα 3.3 αναφέρονται μόνο τα κριτήρια και οι κλίμακες μέτρησής τους που αφορούν αποκλειστικά αναλύσεις της λογιστικής παλινδρόμησης.

Στην έρευνα αυτή εξετάζονται δυο μοντέλα διδασκαλίας αναφορικά με τον αριθμό ενσωμάτωσης μαθητών Μ.Ε.Α. (με ειδικές ανάγκες) στα γενικά σχολεία:

Στο πρώτο μοντέλο προτείνεται η παρουσία 4-5 μαθητών Μ.Ε.Α. ανά 10 μαθητές σε κάθε τάξη και δύο δάσκαλοι παρόντες αμφότεροι της γενικής αγωγής.

Στο δεύτερο μοντέλο προτείνεται η παρακολούθηση 18 μαθητών μαζί με 1-2 μαθητές Μ.Ε.Α. με την παρουσία δύο δασκάλων στην τάξη, ένας από τη γενική και ένας από την ειδική αγωγή.

Τέσσερις ερωτήσεις (κριτήρια) προσδιορίστηκαν ως βασικές μεταβλητές απόκρισης από την, υπό διερεύνηση, δράση των λοιπών ερωτήσεων του ερωτηματολογίου:

Η δυνατότητα υλοποίησης της φοίτησης μαθητών Μ.Ε.Α. στα γενικά σχολεία με πλήρη αποδοχή ή αποκλεισμό (κατεύθυνση μόνο στα ειδικά σχολεία) ή και αποδοχή μόνο όσων εμφανίζουν ελαφρές παθήσεις (κριτήριο Κ1 – ονομαστική μεταβλητή με τρεις κατηγορίες).

Ο βαθμός αποδοχής μαθητών Μ.Ε.Α. σε τάξεις όπου διδάσκουν δάσκαλοι γενικής αγωγής (Κριτήριο Κ14- δίτιμη μεταβλητή)

Ο βαθμός ετοιμότητας των δασκάλων γενικής/ειδικής αγωγής να διδάξουν σε μικτές τάξεις με βάση τις συνθήκες διδασκαλίας του Μοντέλου Ι (Κριτήριο Κ11Α- τακτική μεταβλητή με πέντε διαβαθμίσεις τύπου Likert).

Ο βαθμός ετοιμότητας των δασκάλων γενικής/ειδικής αγωγής να διδάξουν σε μικτές τάξεις με βάση τις συνθήκες του μοντέλου ΙΙ (Κριτήριο Κ13- τακτική με πενταβάθμια κλίμακα τύπου Likert).

Τα υπόλοιπα κριτήρια αποτελούν τις ανεξάτητες μεταβλητές της μελέτης, από τις οποίες οι υποερωτήσεις Κ2, Κ8, Κ9 και Κ20 εξελήφθησαν ως ποσοτικές μεταβλητές (με πενταβάθμια κλίμακα τύπου Likert) και οι ερωτήσεις Κ15, Κ24 και Κ29 ως δίτιμες κατηγορικές.

Κ1- Υλοποίηση φοίτησης
[(Κατηγορίες: (1), (2), (3)]
1- όλοι οι μαθητές Μ.Ε.Α. και μη μπορούν να φοιτούν στο γενικό σχολείο
2- οι μαθητές Μ.Ε.Α. μόνο ελαφριάς μορφής μπορούν να φοιτούν στο γενικό σχολείο
3- οι μαθητές Μ.Ε.Α. θα πρέπει να φοιτούν σε Ειδικά Σχολεία
Κ2- Συμφωνία με τα παρακάτω θέματα (Ερωτήσεις 5)
[Κλίμακα διαβάθμισης 1-5: διαφωνώ απόλυτα (1), διαφωνώ (2) ούτε διαφωνώ ούτε συμφωνώ (3), συμφωνώ (4) συμφωνώ απόλυτα (5)]
Κ2_1 Οι μαθητές Μ.Ε.Α., οι οποίοι φοιτούν σε Ειδικά Σχολεία, στη ζωή τους είναι κοινωνικά αποκλεισμένοι.
Κ2_2 Με την παρουσία των μαθητών Μ.Ε.Α. στη συνήθη σχολική τάξη μαθαίνουν οι μαθητές χωρίς ειδικές εκπαιδευτικές ανάγκες να αποδέχονται τις ατομικές διαφορές
Κ2_3 Είναι δυνατό να εμφανιστούν προβλήματα συμπεριφοράς στους μαθητές με ειδικές εκπαιδευτικές ανάγκες κατά τη φοίτησή τους στη γενική τάξη.
Κ8- Συμφωνία με τα παρακάτω θέματα (Ερωτήσεις 9)
[Κλίμακα διαβάθμισης 1-5: διαφωνώ απόλυτα (1), διαφωνώ (2) ούτε διαφωνώ ούτε συμφωνώ (3), συμφωνώ (4), συμφωνώ απόλυτα (5)]
Κ8_3 Όταν φοιτούν μαθητές με ειδικές εκπαιδευτικές ανάγκες σε μία γενική τάξη, είναι δύσκολο να κρατήσει ο δάσκαλος τους κανόνες εύρυθμης λειτουργίας μέσα στην τάξη.
Κ9- Συμφωνία φοίτησης (Ερωτήσεις 13)
[Κλίμακα διαβάθμισης: μη δυνατή (1), υπό όρους δυνατή (2), δυνατή (3)]
Κατηγορία των ειδικών εκπαιδευτικών αναγκών
Κ9_1 Μαθησιακές Δυσκολίες
Κ9_2 Δυσλεξία
Κ9_3 Οργανικά Προβλήματα
Κ9_4 Εκπαιδεύσιμα
Κ9_5 Ασκήσιμα
Κ9_6 Προβλήματα Συμπεριφοράς
Κ9_7 Προβλήματα Ακοής
Κ9_8 Κώφωση
Κ9_9 Προβλήματα Όρασης
Κ9_10 Τύφλωση
Κ9_11 Διαταραχές Λόγου
Κ9_12 Σύνδρομο Down
Κ9_13 Αυτισμός

Κ14- Πιστεύετε ότι εσείς οι ίδιοι (οι δάσκαλοι) πρόκειται να αντιμετωπίσετε με αίσθημα αποδοχής μαθητές Μ.Ε.Α.;
[(Κατηγορίες: ΝΑΙ (1), Ανάλογα με την περίπτωση των ειδικών αναγκών (0)]
Κ15- Θεωρείτε ότι ο χρόνος διδασκαλίας που διατίθεται στο σχολείο για κάθε μάθημα επαρκεί για την υποστήριξη μαθητών Μ.Ε.Α. στις τάξεις, στις οποίες θα συνεκπαιδεύονται με μαθητές χωρίς ειδικές ανάγκες;
[(Κατηγορίες: ΝΑΙ (1), ΟΧΙ (0)]
Κ20- Πόσο σημαντικούς θεωρείτε στη διδακτική δραστηριότητα τους στόχους που ακολουθούν; (Ερωτήσεις 9)
[Κλίμακα διαβάθμισης 1-5: πολύ ασήμαντο (1), ασήμαντο (2), ούτε ασήμαντο ούτε σημαντικό (3), σημαντικό (4), πολύ σημαντικό (5)]
Κ20_7 Να είστε η αυθεντία απέναντι στους μαθητές σας
Κ24- Παρακολουθήσατε μαθήματα Ειδικής Αγωγής κατά τη διάρκεια των σπουδών σας;
[(Κατηγορίες: ΝΑΙ (1), ΟΧΙ (0)]
Κ29- Είμαι δάσκαλος με ειδίκευση στη Γενική Αγωγή/Ειδική Αγωγή
[(Κατηγορίες: Γενική Αγωγή (1), Ειδική Αγωγή (2)]
Μοντέλο Ι: Ένταξη στην ευρύτερη περιοχή, αριθμός μαθητών 10+(4-5 μαθητές Μ.Ε.Α.), Σύστημα Δύο Δασκάλων
Κ11Α- Αισθάνεστε έτοιμος να διδάξετε σε μία σχολική τάξη αυτού του μοντέλου (Μοντέλο Ι);
Κλίμακα διαβάθμισης 1-5: εντελώς ανέτοιμος (1), ανέτοιμος (2) δεν είμαι σίγουρος (3) έτοιμος (4), απόλυτα έτοιμος (5)
Μοντέλο ΙΙ: Ένταξη-φοίτηση στον τόπο κατοικίας, ένας δάσκαλος στην τάξη, αριθμός μαθητών 18+(1-2 μαθητές Μ.Ε.Α.), ένας δάσκαλος ειδικής αγωγής υποστηρίζει τους μαθητές με ειδικές εκπαιδευτικές ανάγκες της τάξης.
Κ13 - Αν είστε δάσκαλοι γενικής αγωγής, νιώθετε έτοιμοι να αναλάβετε μία συνήθη σχολική τάξη με ένα έως δύο (1-2)

Πίνακας 3.3. *Ερωτηματολόγιο εκπαιδευτικών σχετικό με την ένταξη παιδιών Μ.Ε.Α. στο Γενικό Σχολείο. Αναφέρονται μόνο οι ερωτήσεις (κριτήρια) που έδειξαν στατιστική σημαντικότητα στις αναλύσεις της λογιστικής παλινδρόμησης.*

Α. Διωνυμική λογιστική παλινδρόμηση

Το κριτήριο Κ14 το οποίο αφορά τη διάθεση αποδοχής μαθητών Μ.Ε.Α. παλινδρομήθηκε ως εξαρτημένη μεταβλητή έναντι όλων των μεταβλητών, κατηγορικών και μη, που έδειξαν στατιστική σημαντικότητα. Επειδή το κριτήριο αυτό είναι κατηγορική μεταβλητή με δυο εκβάσεις (κατηγορίες) εφαρμόσθηκε η διωνυμική λογιστική παλινδρόμηση.

Σκοπός της μεθόδου είναι ο προσδιορισμός εκείνων των ανεξάρτητων μεταβλητών οι οποίες περιγράφουν πιο αντιπροσωπευτικά, δηλαδή επηρεάζουν σημαντικότερα την απόκριση της Κ14 με την τεχνική του λόγου των πιθανοτήτων έκβασης. Ο προσδιορισμός αυτών οριστικοποιήθηκε με τη βοήθεια της προοδευτικής απόρριψης των μεταβλητών (Backward elimination) όπου από το σύνολο των ανεξάρτητων μεταβλητών προέκυψαν ως σημαντικότερες αυτές του πίνακα 3.4.

Ο έλεγχος της ισότητας των κλίσεων (συντελεστών παλινδρόμησης) κατέδειξε ότι ένας τουλάχιστον συντελεστής διαφέρει από το 0 και άρα μπορεί να προσδιοριστεί μοντέλο παλινδρόμησης.

Ο έλεγχος χ^2 της καλής προσαρμογής του Pearson έδωσε τιμή 50,97 με 45 βαθμούς ελευθερίας και το πηλίκο αυτών τιμή 1,13, η οποία προσεγγίζει ικανοποιητικά την μονάδα και έτσι το μοντέλο θεωρείται επαρκές ($p<0,251$).

Ο έλεγχος των αποκλίσεων (Deviance) έδειξε παρόμοια εικόνα. Την καλή προσαρμογή των στοιχείων τεκμηριώνει και ο έλεγχος των Hosmer-Lemeshow που δεν είναι στατιστικά σημαντικός ($p=0,098$).

Στον πίνακα 3.5 παρουσιάζονται οι αντιστοιχίες των παρατηρούμενων και εκτιμούμενων συχνοτήτων ανά κλάση πιθανότητας, οι οποίες δείχνουν ισχυρή προσέγγιση των τιμών, γεγονός που συνηγορεί στη μειωμένη απόκλιση μεταξύ τους. Η ποιότητα σύνδεσης του κριτηρίου Κ14 με τα ανεξάρτητα κριτήρια εκφράζεται από 71,3% συνακόλουθων ζευγών, ποσοστό που παρέχει ένδειξη ικανοποιητικής αξιοπιστίας στην πρόβλεψη του προτεινόμενου μοντέλου. Οι δείκτες σύνδεσης D του Somers και Gamma των Goodman-Kruskal κυμαίνονται στο 0,50, πράγμα που αποτελεί ένδειξη μέτριας προβλεπτικής αξίας του μοντέλου.

Τα διαγνωστικά κριτήρια των υπολειμμάτων $\Delta\chi^2$ και ΔD απεικονίζονται στο σχήμα 3.2. Εύκολα συνάγεται ότι ορισμένες παρατηρήσεις έχουν τιμή μεγαλύτερη από 3,841, πράγμα που τις καθιστά ασυνήθεις και θα πρέπει να ελεγχθούν στο φύλο εργασίας σε ποια μεταβλητή ασκούν σημαντική επιρροή και να κριθούν ως ύποπτες τιμές ή μη.

Οι ποσοτικές ανεξάρτητες μεταβλητές ελέγχονται ως προς το αποτέλεσμά τους στο μοντέλο της παλινδρόμησης, δηλαδή στην εξαρτημένη Y, με βάση πρώτα τη στατιστική σημαντικότητά τους όπου θα πρέπει να ισχύει $z\geq1,96$ (ή $p\leq0,05$). Ακολούθως ελέγχονται με βάση την τιμή του λόγου των πιθανοτήτων ή και το πρόσημο των συντελεστών παλινδρόμησης. Μια ποσοτική μεταβλητή κρίνεται ότι έχει αυξητική (θετική) επιρροή όταν ο λόγος των πιθανοτήτων είναι μεγαλύτερος της μονάδας ή αλλιώς όταν ο συντελεστής εμφανίζει θετικό πρόσημο. Μια μεταβλητή κρίνεται ότι έχει αρνητικό αποτέλεσμα όταν ο λόγος των πιθανοτήτων είναι μικρότερος της μονάδας ή το πρόσημο του συντελεστή είναι αρνητικό.

Οι ονομαστικές ανεξάρτητες μεταβλητές ελέγχονται με παρόμοιο τρόπο ως προς το αποτέλεσμά τους στην επιτυχημένη έκβαση της εξαρτημένης Y. Σε αντίθεση με τις ποσοτικές, ο λόγος των πιθανοτήτων έκβασης ποσοτικοποιείται (π.χ. 3,23 φορές ισχυρότερο αποτέλεσμα) ως προς το μέγεθος της δράσης των ανεξάρτητων κατηγορικών. Γενικά, ο τρόπος έκφρασης των αποτελεσμάτων εντοπίζεται ως προς την επιτυχημένη απόκριση της Y συγκρίνοντας το αποτέλεσμα της δράσης μιας κατηγορίας της ανεξάρτητης μεταβλητής αναφορικά με μια κατηγορία της ίδιας μεταβλητής η οποία εκλαμβάνεται ως βασική κατηγορία ή κατηγορία αναφοράς. Οι στατιστικές συγκρίσεις μεταξύ των κατηγοριών των ανεξάρτητων μεταβλητών έγιναν με κατηγορία αναφοράς το 0 (Απάντηση: ΟΧΙ, βλ. ερωτηματολόγιο) και πάντα συγκριτικά με την κατηγορία αναφοράς 1 (Απάντηση: ΝΑΙ) της Κ14 (Πίν. 3.4). Έτσι, προέκυψαν τα εξής αποτελέσματα:

Οι δάσκαλοι που έχουν παρακολουθήσει μαθήματα Ειδικής Αγωγής (Κ24) κατά τη διάρκεια των σπουδών τους έχουν 2,4 φορές μεγαλύτερη πιθανότητα να αποδεχθούν (Κ14) τους μαθητές Μ.Ε.Α. από εκείνους που δεν διαθέτουν. Οι εκπαιδευτικοί που θεωρούν ως επαρκή το χρόνο διδασκαλίας που διατίθεται στο σχολείο για την εκπαίδευση των μαθητών Μ.Ε.Α. (Κ15) έχουν 5,24 φορές μεγαλύτερη πιθανότητα να αποδεχθούν τους μαθητές Μ.Ε.Α. από εκείνους που πιστεύουν ότι ο χρόνος δεν επαρκεί.

Οι δάσκαλοι που πρόκειται να αντιμετωπίσουν με αίσθημα αποδοχής τους μαθητές Μ.Ε.Α. συμφωνούν περισσότερο με την άποψη του κριτηρίου Κ2_2 (λόγος πιθανοτήτων=1,99 μεγαλύτερος της μονάδας, άρα μεγαλύτερες τιμές διαβαθμίσεων μεγαλύτερη αποδοχή), ότι οι μαθητές χωρίς προβλήματα προσαρμόζονται βαθμιαία στην αποδοχή των ατομικών διαφορών των μαθητών Μ.Ε.Α. Οι δάσκαλοι που πρόκειται να αντιμετωπίσουν με αίσθημα αποδοχής τους μαθητές Μ.Ε.Α. συμφωνούν λιγότερο με την άποψη του κριτηρίου Κ8_3 (λόγος πιθανοτήτων=0,72 μικρότερος της μονάδας, άρα μικρότερες τιμές διαβαθμίσεων μικρότερη αποδοχή), ότι δηλαδή οι δάσκαλοι δυσκολεύονται στην τήρηση της εύρυθμης λειτουργίας στην τάξη.

Κριτήριο	Συντελεστής	Τυπικό σφάλμα	Z τιμή	p	Λόγος των πιθανοτήτων έκβασης	-95%	+95%
K15:							
Κατηγορία 1	1,657	0,648	2,56	0,011	5,24	1,47	18,66
K24:							
Κατηγορία 1	0,874	0,243	3,59	0,000	2,40	1,49	3,86
K2_2	0,689	0,179	3,85	0,000	1,99	1,40	2,83
K8_3	-0,330	0,120	-2,75	0,006	0,72	0,57	0,91

Λογαριθμική πιθανότητα: L= -196,80
Έλεγχος της ισότητας των κλίσεων: G = 59,34, DF = 4, p< 0,001

Έλεγχοι καλής προσαρμογής

Μέθοδος	χ^2	DF	χ^2/ DF	p
Pearson	50,97	45	1,13	0,251
Deviance	47,77	45	1,06	0,361
Hosmer-Lemeshow	12,06	7		0,098

Μετρήσεις σύνδεσης της εξαρτημένης Y με τις ανεξάρτητες μεταβλητές

Ζεύγη	**Αριθμός**	**%**	**Δείκτες σύνδεσης**	**Τιμή**
Συνακόλουθα	19064	71,3	Somers' D	0,48
Ανακόλουθα	6317	23,6	Goodman-Kruskal Gamma	0,50
Ισοψηφίες	1371	5,1	Kendall's Tau-a	0,24
Σύνολο	26752	100,0		

Τιμή p>0,05 δηλώνει μη στατιστική σημαντικότητα και άρα ισχύει η καλή προσαρμογή των στοιχείων του μοντέλου. Επίσης τιμές του πηλίκου χ^2/ DF που προσεγγίζουν τη μονάδα, ειδοποιούν για την καλή προσαρμογή των στοιχείων.

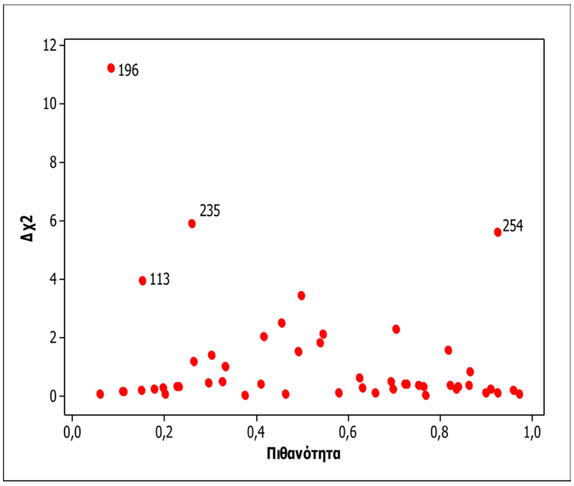
Πίνακας 3.4. *Στατιστικά αποτελέσματα από την εφαρμογή της διωνυμικής λογιστικής παλινδρόμησης με εξαρτημένη μεταβλητή το κριτήριο Κ14 και ανεξάρτητες τα κριτήρια Κ15, Κ24, Κ2_2 και Κ8_3. Οι ανεξάρτητες μεταβλητές επιλέχθηκαν από ένα σύνολο κριτηρίων με τη μέθοδο της προοδευτικής απόρριψης των μεταβλητών.*

Η τιμή του ελέγχου καλής προσαρμογής των Hosmer-Lemeshow είναι μη στατιστικά σημαντική (p=0,098), επομένως αναμένεται μια σχετική αρμονία μεταξύ των παρατηρούμενων και αναμενόμενων τιμών στα δεκατημόρια του πίνακα 3.5. Η μεγαλύτερη απόκλιση εντοπίζεται στο 4^{ο} δεκατημόριο σε αμφότερες τις κατηγορίες 0 και 1. Στην εγκυρότητα του μοντέλου συμβάλει και το γεγονός ότι οι μεγαλύτερες συχνότητες συγκεντρώνονται στα υψηλότερα δεκατημόρια της κατηγορίας 1, ενώ οι μικρότερες στα χαμηλότερα δεκατημόρια της κατηγορίας 0 πλην κάποιων εξαιρέσεων.

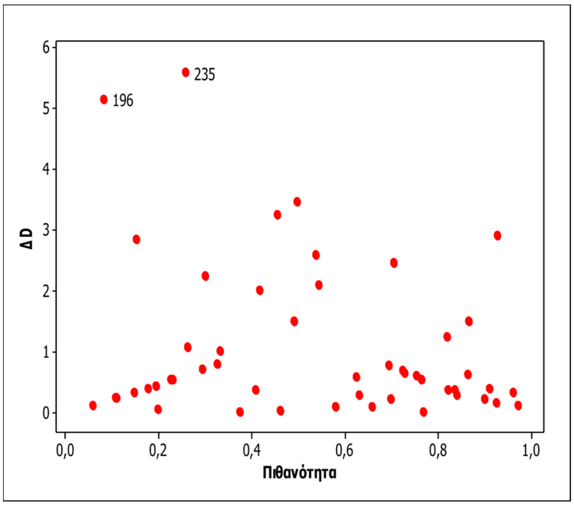
Η αξιοπιστία του μοντέλου ελέγχεται επιπρόσθετα με τη γραφική απεικόνιση των υπολειμμάτων $\Delta\chi^2$ και ΔD με τους συντελεστές επιρροής (Σχ. 3.2).Στα γραφήματα εντοπίζονται μερικές ασυνήθιστες τιμές των υπολειμμάτων οι οποίες χρήζουν περαιτέρω διερεύνηση.

K14	Δεκατημόρια									
Κλάση	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	Σύνολο
Συχνότητα (Κατηγορία 1)										
Παρατηρούμενη	11	14	19	14	16	22	27	31	22	176
Αναμενόμενη	6,7	18,2	15	19,8	18,5	22,2	24,6	29,6	21,5	
Συχνότητα (Κατηγορία 0)										
Παρατηρούμενη	21	41	17	26	18	13	8	6	2	152
Αναμενόμενη	25,3	36,8	21	20,2	15,5	12,8	10,4	7,4	2,5	
Σύνολο	32	55	36	40	34	35	35	37	24	328

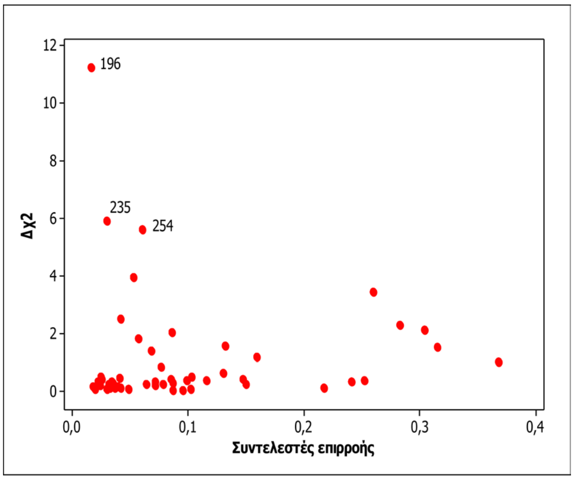
Πίνακας 3.5. *Έλεγχος των Hosmer-Lemeshow: Πίνακας καλής προσαρμογής των παρατηρούμενων και αναμενόμενων συχνοτήτων.*



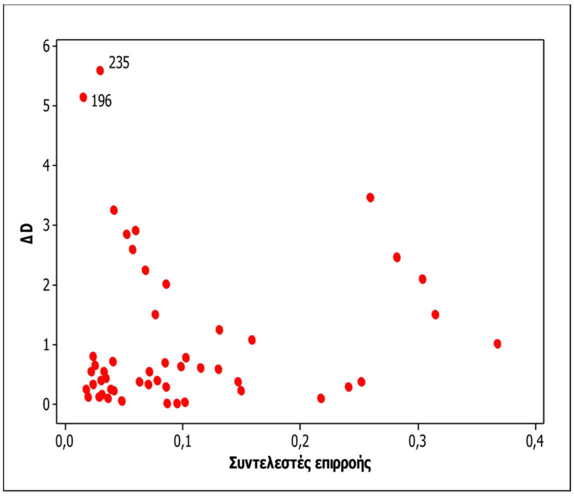
196
235
254
113
Δχ2
Πιθανότητα



235
196
ΔD
Πιθανότητα



196
235
254
Δχ2
Συντελεστές επιρροής



Σχήμα 3.2. *Διαγνωστικά κριτήρια της αξιοπιστίας του προτεινόμενου μοντέλου. Οι αριθμοί στα γραφήματα αντιστοιχούν σε παρατηρήσεις στις οποίες το αποτέλεσμα των υπολειμμάτων έχει τιμή μεγαλύτερη από 3,841 και άρα σημαντική επιρροή στο μοντέλο (ασυνήθεις παρατηρήσεις).*

Β. Τακτική λογιστική παλινδρόμηση

Το **μοντέλο διδασκαλίας Ι** προτάσσει την ένταξη 4-5 μαθητών Μ.Ε.Α. σε μία αίθουσα διδασκαλίας 10 περίπου μαθητών. Το κριτήριο Κ11_Α παλινδρομήθηκε ως εξαρτημένη μεταβλητή με τις κριτήρια Κ1, Κ14 και τις συνιστώσες των βαθμών δυσκολίας Κ9_Ι, Κ9_ΙΙ και Κ9_ΙΙΙ, εκλαμβανόμενες ως ανεξάρτητες ποσοτικές (για τον τρόπο επιλογής βλ. παρακάτω ανάλυση των κύριων συνιστωσών). Στο μοντέλο της παλινδρόμησης προστέθηκε και το κριτήριο Κ29, που αφορά την απόκτηση ειδικότητας στην Ειδική ή μη Αγωγή, λόγω της μεγάλης επιρροής που διαπιστώθηκε ότι διαθέτει στα κριτήρια της μελέτης. Προτιμήθηκε το μοντέλο της τακτικής λογιστικής παλινδρόμησης (Ordinal logistic regression) από το κλασικό μοντέλο της ποσοτικής παλινδρόμησης το οποίο υπάγεται σε μια μεγάλη ομάδα εφαρμογών γνωστών και ως «Γενικευμένα γραμμικά πρότυπα». Η πρώτη εκφράζει τους συντελεστές των ανεξάρτητων μεταβλητών ως λόγος των πιθανοτήτων έκβασης ο οποίος οδηγεί σε ποσοτική έκφραση των αποτελεσμάτων όταν υπάρχουν κατηγορικές εξαρτημένες μεταβλητές, πράγμα που αδυνατεί να εκφράσει το δεύτερο μοντέλο.

Η στατιστική σημαντικότητα των συμμετεχουσών ανεξάρτητων μεταβλητών εξετάστηκε με τη μέθοδο της προοδευτικής απόρριψης των μεταβλητών η οποία οδήγησε στην έξοδο των κριτηρίων Κ1 και Κ9_ΙΙ (Πίν. 3.6).

Ο έλεγχος χ^2 της καλής προσαρμογής του Pearson έδωσε τιμή 535,28 με 524 βαθμούς ελευθερίας και το πηλίκο αυτών τιμή 1,02, η οποία προσεγγίζει ικανοποιητικά την μονάδα και έτσι το μοντέλο θεωρείται επαρκές ($p<0,357$). Ανάλογη εικόνα δίνουν και τα αποτελέσματα του κριτηρίου της απόκλισης D (Deviance).

Ο έλεγχος της ισότητας των κλίσεων έδειξε στατιστική σημαντικότητα ($p<0,001$), και έτσι τη δυνατότητα εφαρμογής μοντέλων παλινδρόμησης.

Το ποσοστό συνακολουθίας των ζευγών έφτασε το 72% των συνολικών ζευγών, το οποίο αποτελεί ικανοποιητική ένδειξη της αξιοπιστίας πρόβλεψης του προτεινόμενου μοντέλου. Οι δείκτες σύνδεσης της Υ με τις ανεξάρτητες Χ κυμάνθηκαν στο 0,45 και δείχνουν μέτρια προβλεπτική αξία.

Στην τακτική παλινδρόμηση μία διαβάθμιση της Υ ορίζεται ως επιτυχημένη απόκριση (έκβαση) και συνήθως επιλέγεται το ανώτερο ή κατώτερο σημείο της τακτικής κλίμακας, το 1 ή το 5 στην προκείμενη κλίμακα.

Οι ποσοτικές ανεξάρτητες μεταβλητές ελέγχονται ως προς το αποτέλεσμά τους στην εξαρτημένη Υ, με βάση πρώτα τη στατιστική σημαντικότητά τους ($z\geq1,96$) και κατόπιν με βάση την τιμή του λόγου των πιθανοτήτων ή και το πρόσημο των συντελεστών παλινδρόμησης. Μια μεταβλητή κρίνεται ότι έχει αυξητική (θετική) επιρροή όταν ο λόγος των πιθανοτήτων είναι μεγαλύτερος της μονάδας ή αλλιώς όταν ο συντελεστής εμφανίζει θετικό πρόσημο. Το ίδιο ισχύει και για τις κατηγορικές μεταβλητές με τη μόνη διαφορά ότι σε αυτές ο λόγος των πιθανοτήτων έχει αναλογικό μέγεθος μεταβολής συγκρίνοντας κάθε κατηγορία με την κατηγορία αναφοράς.

Οι στατιστικές συγκρίσεις μεταξύ των κατηγοριών των ανεξάρτητων μεταβλητών έγιναν με κατηγορία αναφοράς το 2 για την Κ14 (Απάντηση: ανάλογα με την περίπτωση των ειδικών αναγκών, βλ. ερωτηματολόγιο) και την κατηγορία 1 (Γενική Αγωγή) για την Κ29 και πάντα συγκριτικά με τη διαβάθμιση αναφοράς 5 (απόλυτα έτοιμοι) της Κ11Α. Σύμφωνα με την ανάλυση του πίνακα 3.6 διαπιστώθηκε ότι:

- Οι δάσκαλοι που δέχονται να αντιμετωπίσουν με αίσθημα αποδοχής μαθητές Μ.Ε.Α. (Κ14) αισθάνονται απόλυτα έτοιμοι (Κ11Α) να εμφανίσουν 2,33 φορές μεγαλύτερη ετοιμότητα να διδάξουν σε τάξεις ένταξης (Κ11Α) από εκείνους που κρίνουν την αποδοχή των μαθητών ανάλογα με την περίπτωση των ειδικών αναγκών.
- Οι δάσκαλοι με ειδίκευση στην Ειδική Αγωγή (Κ29) αισθάνονται απόλυτα έτοιμοι (Κ11Α) να διδάξουν σε τάξεις ένταξης με ετοιμότητα μεγαλύτερη κατά 2,84 φορές από εκείνη των δασκάλων Γενικής Αγωγής.
- Οι δάσκαλοι αναφορικά με τον 3^{ο} βαθμό δυσκολίας ένταξης των μαθητών Μ.Ε.Α. (συνιστώσα Κ9_ΙΙΙ) αισθάνονται περισσότερο απόλυτα έτοιμοι να διδάξουν σε τάξεις ένταξης (λόγος πιθανοτήτων=2,61>1, άρα μεγαλύτερες τιμές συνιστώσας συνιστούν μεγαλύτερη απόλυτη ετοιμότητα).
- Παρόμοια, οι δάσκαλοι σχετικά με τον 1^{ο} βαθμό δυσκολίας ένταξης των μαθητών Μ.Ε.Α. (συνιστώσα Κ9_Ι) αισθάνονται περισσότερο απόλυτα έτοιμοι να διδάξουν σε τάξεις ένταξης (λόγος πιθανοτήτων=2,48>1, άρα μεγαλύτερες τιμές συνιστώσας συνιστούν μεγαλύτερη απόλυτη ετοιμότητα). Το συμπέρασμα που εξάγεται από τις δυο συνιστώσες αν και ηχεί παράδοξα τεκμηριώνεται από τα στοιχεία του παρακάτω πινακιδίου,

Κ11Α	**Κ9_Ι**	**Κ9_ΙΙΙ**
1	2,05	1,43
2	2,22	1,41
3	2,34	1,64
4	2,45	1,83
5	2,50	1,89

στο οποίο παρίστανται οι μέσες τιμές των βαθμών δυσκολίας ένταξης Κ9_Ι και Κ9_ΙΙΙ ανά κατηγορία διαβάθμισης της Κ11Α. Είναι εμφανής η ανοδική τάση αμφοτέρων των μέσων τιμών όσο ανεβαίνουμε από τη διαβάθμιση 1 προς την 5 και δηλώνει ότι οι δάσκαλοι αισθάνονται απόλυτα έτοιμοι να διδάξουν σε τάξεις άμεσης ένταξης μαθητών Μ.Ε.Α. με 1^{ο} βαθμό δυσκολίας (Κ9_Ι, μέση τιμή 2,50) όπως και σε τάξεις με υπό όρους ένταξης μαθητών με 3^{ο} βαθμό δυσκολίας (Κ9_ΙΙΙ, διαβάθμιση 5, μέση τιμή 1,89). Με δεδομένο δε ότι οι δάσκαλοι Ειδικής Αγωγής εμφανίζουν 2,84 φορές μεγαλύτερη ετοιμότητα να διδάξουν από τους δασκάλους Γενικής Αγωγής, εύκολα συνάγεται ότι η παραπάνω συμπεριφορά οφείλεται σχεδόν αποκλειστικά στους Ειδικής Αγωγής.

Σχετικά με το **μοντέλο διδασκαλίας ΙΙ,** το κριτήριο Κ13 έχει ακριβώς την ίδια ισχύ και αντίληψη με το κριτήριο Κ11Α του μοντέλου Ι και αφορά στην ετοιμότητα όλων των δασκάλων του δείγματος να δεχτούν 1-2 μαθητές Μ.Ε.Α. στη συνήθη σχολική τάξη.

Το κριτήριο Κ13 παλινδρομήθηκε ως εξαρτημένη μεταβλητή με τα κριτήρια Κ1, Κ14 και τις συνιστώσες των βαθμών δυσκολίας Κ9_Ι, Κ9_ΙΙ και Κ9_ΙΙΙ, εκλαμβανόμενες ως ανεξάρτητες χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της τακτικής λογιστικής παλινδρόμησης. Στο μοντέλο της παλινδρόμησης προστέθηκε και το κριτήριο Κ29 επειδή είναι αυτό που διαχωρίζει το κριτήριο Κ13 σε δασκάλους Ειδικής και Ειδικής Αγωγής.

Κριτήριο	Συντελεστής	Τυπικό σφάλμα	Z τιμή	p	Λόγος των πιθανοτήτων έκβασης	-95%	95%
K14:							
Κατηγορία 1	0,846	0,256	3,300	0,001	2,33	1,41	3,85
K29:							
Κατηγορία 2	1,043	0,332	3,140	0,002	2,84	1,48	5,43
K9_III	0,959	0,295	3,250	0,001	2,61	1,46	4,65
K9_I	0,909	0,323	2,810	0,005	2,48	1,32	4,67

Λογαριθμική πιθανότητα: L= -345,19
Έλεγχος της ισότητας των κλίσεων: G = 80,76, DF = 4, p<0,001

Έλεγχοι της καλής προσαρμογής

Μέθοδος	χ^2	DF	χ^2/ DF	p
Pearson	535,28	524	1,02	0,357
Deviance	423,71	524	0,81	0,992

Μετρήσεις σύνδεσης της εξαρτημένης Y με τις ανεξάρτητες μεταβλητές

Ζεύγη	**Αριθμός**	**%**	**Δείκτες σύνδεσης**	**Τιμή**
Συνακόλουθα	18492	72,0	Somers' D	0,45
Ανακόλουθα	6940	27,0	Goodman-Kruskal Gamma	0,45
Ισοψηφίες	236	0,9	Kendall's Tau-a	0,33
Σύνολο	25668	100,0		

Τιμή p>0.05 δηλώνει μη στατιστική σημαντικότητα και άρα ισχύει η καλή προσαρμογή των στοιχείων του μοντέλου. Επίσης τιμές του πηλίκου x^2/ DF που προσεγγίζουν τη μονάδα ειδοποιούν για την καλή προσαρμογή των στοιχείων.

Πίνακας 3.6*. Στατιστικά αποτελέσματα από την εφαρμογή της τακτικής λογιστικής παλινδρόμησης με εξαρτημένη μεταβλητή το κριτήριο K11A και ανεξάρτητες τα κριτήρια K14, K29, K9_I και K9_III.*

Η στατιστική σημαντικότητα των ανεξάρτητων μεταβλητών εξετάστηκε με τη μέθοδο της προοδευτικής απόρριψης των μεταβλητών ένεκα της οποίας τα κριτήρια K1 και K9_II απομακρύνθηκαν από το μοντέλο (Πίν. 3.7).

Ο έλεγχος χ^2 της καλής προσαρμογής του Pearson έδωσε τιμή 425,65 με 512 βαθμούς ελευθερίας και το πηλίκο αυτών τιμή 0,83, η οποία προσεγγίζει ικανοποιητικά την μονάδα και έτσι το μοντέλο θεωρείται επαρκές (p=0,998). Ομοίως, ο έλεγχος της απόκλισης D έδειξε τιμή 378,21 και μη στατιστική σημαντικότητα p=0,999.

Ο έλεγχος της ισότητας των κλίσεων (p<0,001) έδειξε ότι επιτρέπει την προσαρμογή κάποιου στατιστικού μοντέλου και οι μετρήσεις συνακολουθίας των ζευγών και της σύνδεσης μεταξύ Y και X έδειξαν από μέτρια έως ικανοποιητική αξιοπιστία πρόβλεψης του προτεινόμενου μοντέλου.

Οι στατιστικές συγκρίσεις μεταξύ των κατηγοριών των ανεξάρτητων μεταβλητών έγιναν με κατηγορία αναφοράς το 2 για την K14 (Απάντηση: ανάλογα με την περίπτωση των ειδικών αναγκών, βλ. ερωτηματολόγιο) και την κατηγορία 1 (Γενική Αγωγή) για την K29 και πάντα συγκριτικά με τη διαβάθμιση αναφοράς 5 (απόλυτα έτοιμοι) της K13.

Σύμφωνα με την ανάλυση του πίνακα 3.7 διαπιστώθηκε μια απόλυτα όμοια εικόνα συμπεριφοράς του μοντέλου II με εκείνη του μοντέλου I:

- Οι δάσκαλοι που δέχονται να αντιμετωπίσουν με αίσθημα αποδοχής μαθητές Μ.Ε.Α. (K14) αισθάνονται απόλυτα έτοιμοι (K13) να εμφανίσουν 1,96 φορές μεγαλύτερη ετοιμότητα να διδάξουν σε τάξεις ένταξης με 1-2 μαθητές Μ.Ε.Α. (K13) από εκείνους που κρίνουν την αποδοχή των μαθητών ανάλογα με την περίπτωση των ειδικών αναγκών.
- Οι δάσκαλοι με ειδίκευση στην Ειδική Αγωγή (K29) αισθάνονται απόλυτα έτοιμοι (K13) να διδάξουν σε τάξεις ένταξης με παρόντες 1-2 μαθητές Μ.Ε.Α. με ετοιμότητα μεγαλύτερη κατά 3,24 φορές από εκείνη των δασκάλων Γενικής Αγωγής.
- Οι δάσκαλοι αναφορικά με τον 3ο βαθμό δυσκολίας ένταξης των μαθητών Μ.Ε.Α. (συνιστώσα K9_III) αισθάνονται περισσότερο απόλυτα έτοιμοι να διδάξουν σε τάξεις ένταξης με παρόντες 1-2 μαθητές Μ.Ε.Α. (λόγος πιθανοτήτων=3,29). Παρόμοια, οι δάσκαλοι σχετικά με τον 1ο βαθμό δυσκολίας ένταξης των μαθητών Μ.Ε.Α. (συνιστώσα K9_I) αισθάνονται περισσότερο απόλυτα έτοιμοι να διδάξουν σε τάξεις ένταξης με παρόντες 1-2 μαθητές Μ.Ε.Α. (λόγος πιθανοτήτων=2,81).

Το συμπέρασμα που εξάγεται από τις δυο συνιστώσες ακολουθεί περίπου την ίδια τεκμηρίωση που διατυπώθηκε και στο μοντέλο I. Εξάγοντας τις μέσες τιμές ανά κατηγορία διαβάθμισης των δυο συνιστωσών, προκύπτει το παρακάτω πινακίδιο,

K13	K9_I	K9_III
1	2,00	1,26
2	2,12	1,50
3	2,33	1,52
4	2,38	1,72
5	2,56	2,00

Και εδώ, η ανοδική τάση όσο ανερχόμαστε την κλίμακα, είναι εμφανής και δηλώνει ότι οι δάσκαλοι αισθάνονται απόλυτα έτοιμοι να διδάξουν σε τάξεις άμεσης ένταξης μαθητών Μ.Ε.Α. με 1^{ο} βαθμό δυσκολίας (K9_I, διαβάθμιση 5 μέση τιμή 2,6) όπως και σε τάξεις με υπό όρους ένταξη μαθητών με 3^{ο} βαθμό δυσκολίας (K9_III, διαβάθμιση 5, μέση τιμή 2,0).

Οι δάσκαλοι Ειδικής Αγωγής εμφανίζουν 3,24 φορές μεγαλύτερη ετοιμότητα να διδάξουν από τους δασκάλους Γενικής Αγωγής, και ένεκα αυτού η παραπάνω συμπεριφορά οφείλεται στην παρουσία σχεδόν αποκλειστικά των δασκάλων Ειδικής Αγωγής.

Ανάλυση κύριων συνιστωσών

Τα κριτήρια κατηγοριοποίησης των ειδικών εκπαιδευτικών αναγκών (βλ. ερωτηματολόγιο, κριτήριο Κ9: Συμφωνία φοίτησης - δυσκολίες ένταξης) επεξεργάστηκαν με την πολυδιάστατη Ανάλυση των Κύριων Συνιστωσών (βλ. κεφάλαιο 4 για πληρέστερη κατανόηση) και παράλληλη περιστροφή των τριών πρώτων κύριων αξόνων (συνιστωσών) με τη μέθοδο Varimax (μεγιστοποίηση της διακύμανσης μεταξύ των αξόνων). Με την ανάλυση αυτή τα 13 κριτήρια μειώθηκαν σε 3 κριτήρια-κύριες συνιστώσες οι οποίες όλες μαζί επεξηγούν το 56,7% της ολικής μεταβλητότητας της ανάλυσης και οι συσχετίσεις (παραγοντικά φορτία) όλων των κριτηρίων με τις συνιστώσες, παρίστανται στον πίνακα 3.8. Τιμές συσχετίσεων >0,700 δηλώνουν ικανοποιητική συμμετοχή των αντίστοιχων κριτηρίων για τη δημιουργία των κύριων αξόνων. Συγκεκριμένα, ο πρώτος άξονας συνίσταται ουσιαστικά από τα κριτήρια 7 μέχρι 13, ο δεύτερος άξονας από τα κριτήρια 1, 2, 3 και 6 και ο τρίτος από τα κριτήρια 4 και 5. Αυτό επιβεβαιώνεται και γραφικά από την τριδιάστατη παράσταση των συσχετίσεων των κριτηρίων στο σχήμα 3.3.

Εύκολα διαφαίνεται ο διαχωρισμός των κριτηρίων σε τρεις ομάδες οι οποίες συνιστούν και τις τρεις συνιστώσες. Η παραπάνω διαχείριση των στοιχείων επέτρεψε την αντιπροσώπευση των κριτηρίων της κατηγοριοποίησης των μαθητών Μ.Ε.Α. στο ερωτηματολόγιο από τις τρεις συνιστώσες K9_III, K9_I και K9_III , με παραγοντικούς βαθμούς, οι οποίες εύκολα μπορούν να διακριθούν ανάλογα με το βαθμό δυσκολίας ένταξης σε:

K9_I- Συνιστώσα 1^{ου} βαθμού δυσκολίας και αντίστοιχη του δεύτερου άξονα (Πίν. 3.8, Σχ. 3.3)
K9_II- Συνιστώσα 2^{ου} βαθμού δυσκολίας και αντίστοιχη του τρίτου άξονα
K9_III- Συνιστώσα 3^{ου} βαθμού δυσκολίας και αντίστοιχη του πρώτου άξονα

Κριτήριο	Συντελεστής	Τυπικό σφάλμα	Ζ τιμή	p	Λόγος των πιθανοτήτων έκβασης	-95%	95%
K14:							
Κατηγορία 1	0,674	0,255	2,640	0,008	1,96	1,19	3,23
K29:							
Κατηγορία 2	1,175	0,349	3,360	0,001	3,24	1,63	6,42
K9_III	1,191	0,303	3,930	0,000	3,29	1,82	5,96
K9_I	1,034	0,331	3,120	0,002	2,81	1,47	5,38

Λογαριθμική πιθανότητα: L= -377,59
Έλεγχος της ισότητας των κλίσεων: G = 82,67, DF = 3, p<0,001

Έλεγχοι της καλής προσαρμογής

Μέθοδος	χ^2	DF	χ^2/ DF	p
Pearson	425,65	512	0,83	0,998
Deviance	378,21	512	0,88	0,999

Μετρήσεις σύνδεσης της εξαρτημένης Y με τις ανεξάρτητες μεταβλητές

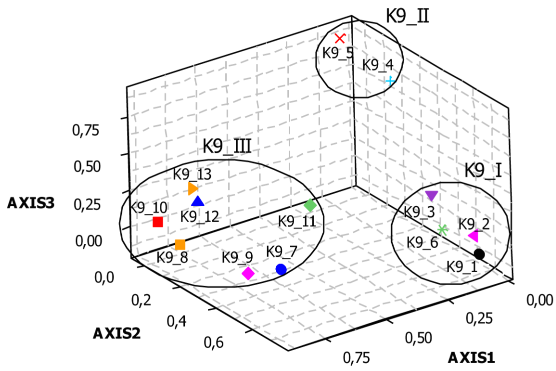
Ζεύγη	Αριθμός	%	Δείκτες σύνδεσης	Τιμή
Συνακόλουθα	18157	72,2	Somers' D	0,46
Ανακόλουθα	6609	26,3	Goodman-Kruskal Gamma	0,47
Ισοψηφίες	369	1,5	Kendall's Tau-a	0,34
Σύνολο	25135	100		

Τιμή p>0,05 δηλώνει μη στατιστική σημαντικότητα και άρα ισχύει η καλή προσαρμογή των στοιχείων του μοντέλου. Επίσης τιμές του πηλίκου x^2/ DF που προσεγγίζουν τη μονάδα, ειδοποιούν για την καλή προσαρμογή των στοιχείων.

Πίνακας 3.7. *Στατιστικά αποτελέσματα από την εφαρμογή της τακτικής λογιστικής παλινδρόμησης με εξαρτημένη μεταβλητή το κριτήριο Κ13 και ανεξάρτητες τα κριτήρια Κ14, Κ29, Κ9_Ι και Κ9_ΙΙΙ.*

Κατηγοριοποίηση	Αξονας 1	Αξονας 2	Αξονας 3
C9_1	0,09	0,75	-0,02
C9_2	0,06	0,69	0,05
C9_3	0,10	0,51	0,22
C9_4	0,09	0,27	0,81
C9_5	0,08	-0,02	0,89
C9_6	0,11	0,58	0,04
C9_7	0,65	0,41	-0,06
C9_8	0,86	0,14	0,01
C9_9	0,71	0,31	-0,14
C9_10	0,83	-0,02	0,04
C9_11	0,48	0,35	0,23
C9_12	0,73	0,07	0,18
C9_13	0,68	-0,03	0,18
Διακύμανση (λ)	3,61	2,11	1,64
Διακύμανση %	27,80	16,30	12,60

Πίνακας 3.8. *Συντελεστές συσχέτισης των τριών πρώτων αξόνων με τα κριτήρια της Κατηγοριοποίησης. Τιμές συσχετίσεων μεγαλύτερες από 0,450 παρίστανται με σκίαση*



Σχήμα 3.3. Τριδιάστατο γράφημα των τριών πρώτων κύριων συνιστωσών των κατηγοριών των ειδικών εκπαιδευτικών αναγκών του κριτηρίου Κ9. Οι κύκλοι επισημαίνουν το σχηματισμό τριών ομάδων κριτηρίων.

Γ. Ονομαστική λογιστική παλινδρόμηση

Το κριτήριο Κ1 που αφορά την υλοποίηση της φοίτησης όλων των μαθητών στο γενικό σχολείο, μόνο υπό προϋποθέσεις και μόνο στο ειδικό σχολείο, παλινδρομήθηκε ως εξαρτημένη μεταβλητή έναντι όλων των μεταβλητών, ποσοτικών και δίτιμων, που έδειξαν στατιστική σημαντικότητα. Επειδή το κριτήριο Κ1 είναι ονομαστική μεταβλητή με τρεις κατηγορίες μη διαβαθμισμένες, εφαρμόσθηκε η ονομαστική λογιστική παλινδρόμηση. Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό εκείνων των ανεξάρτητων μεταβλητών οι οποίες περιγράφουν πιο αντιπροσωπευτικά, δηλαδή επηρεάζουν σημαντικότερα την απόκριση της Κ1. Ο προσδιορισμός αυτών οριστικοποιήθηκε με τη βοήθεια της προοδευτικής απόρριψης των μεταβλητών όπου από το σύνολο των ανεξάρτητων μεταβλητών προέκυψαν ως σημαντικότερες αυτές του πίνακα 3.9.

Ο έλεγχος χ^2 της καλής προσαρμογής του Pearson έδωσε τιμή 437,14 με 468 βαθμούς ελευθερίας και το πηλίκο αυτών τιμή 0,93, η οποία προσεγγίζει ικανοποιητικά την μονάδα, έτσι που το μοντέλο θεωρείται επαρκές. Ο έλεγχος της απόκλισης D έδειξε, επίσης, καλή προσαρμογή (p=0,991) πλην του πηλίκου χ^2/DF που δεν προσέγγισε ικανοποιητικά τη μονάδα (0,54).

Με τον έλεγχο G διαπιστώθηκε ανισότητα στις κλίσεις των συντελεστών ($p<0{,}001$) που επιτρέπει την εφαρμογή στατιστικών μοντέλων στα στοιχεία.

Στις εξαρτημένες ονομαστικές μεταβλητές, κάθε κατηγορία της απόκρισης Υ συγκρίνεται ατομικά με μια κατηγορία αναφοράς της Υ. Στην περίπτωση αυτή, οι ανεξάρτητες μεταβλητές ελέγχονται ως προς το αποτέλεσμά τους επί της απόκρισης Υ τόσες φορές όσες και οι κατηγορίες της Υ μείον 1.

Ο τρόπος σύγκρισης και εξαγωγής συμπερασμάτων για τις ανεξάρτητες μεταβλητές, τόσο για τις δίτιμες όσο και τις ποσοτικές, ακολουθεί την ίδια διαδικασία που αναφέρθηκε λεπτομερώς στις προηγούμενες αναλύσεις της λογιστικής παλινδρόμησης.

Οι στατιστικές συγκρίσεις των ανεξάρτητων μεταβλητών έγιναν με κατηγορία αναφοράς την 3 (Απάντηση: Όλοι οι μαθητές Μ.Ε.Α. θα πρέπει να υποστηρίζονται στα Ειδικά Σχολεία) της Κ1 και τα αποτελέσματα των συγκρίσεων στον πίνακα 3.9. Έτσι προέκυψαν τα εξής:

Όλες οι ανεξάρτητες μεταβλητές είναι ποσοτικές, άρα η σύγκριση γίνεται είτε με το πρόσημο των συντελεστών παλινδρόμησης είτε με την τιμή του λόγου πιθανοτήτων έκβασης (μεγαλύτερη ή μικρότερη της μονάδας).

Α) Αξιολόγηση των κριτηρίων συγκρίνοντας την κατηγορία 1 (ένταξη όλων των μαθητών στο γενικό σχολείο) της Κ1 ως προς την κατηγορία αναφοράς 3:

- Τα κριτήρια Κ2_1 και Κ2_2 παρουσιάζουν τιμές του λόγου των πιθανοτήτων έκβασης μεγαλύτερες της μονάδας (βλ. και θετικούς συντελεστές) άρα υπεροχή των μεγαλύτερων τιμών διαβαθμίσεων και επομένως μεγαλύτερη συμφωνία στην απόκριση των δασκάλων. Συγκεκριμένα, οι δάσκαλοι οι οποίοι διάκεινται υπέρ της άμεσης ένταξης των μαθητών Μ.Ε.Α. στο γενικό σχολείο σε σχέση με εκείνους που διάκεινται υπέρ της ένταξης στα Ειδικά Σχολεία, συμφωνούν περισσότερο στις απόψεις περί ύπαρξης κοινωνικού αποκλεισμού (Κ2_1) και αποδοχής της διαφορετικότητας των μαθητών Μ.Ε.Α. (Κ2_2)

Κριτήριο	Συντελεστής	Τυπικό σφάλμα	Z τιμή	p	Λόγος των πιθανοτήτων έκβασης	-9%	+95%
Σύγκριση Κ1(1/3)							
Κ2_1	1,189	0,293	4,050	0,000	3,28	1,85	5,83
Κ2_2	0,720	0,465	1,550	0,122	2,05	0,83	5,11
Κ2_3	-0,582	0,254	-2,290	0,022	0,56	0,34	0,92
Κ8_3	-0,409	0,251	-1,630	0,104	0,66	0,41	1,09
Κ20_7	-0,381	0,262	-1,460	0,145	0,68	0,41	1,14
Σύγκριση Κ1 (2/3)							
Κ2_1	-0,450	0,189	-2,380	0,018	0,64	0,44	0,92
Κ2_2	-0,979	0,235	-4,160	0,000	0,38	0,24	0,6
Κ2_3	0,197	0,242	0,810	0,416	1,22	0,76	1,96
Κ8_3	1,038	0,253	4,100	0,000	2,82	1,72	4,64
Κ20_7	0,471	0,178	2,650	0,008	1,60	1,13	2,27

Λογαριθμική πιθανότητα: L= -153,54
Έλεγχος της ισότητας των κλίσεων: G = 119,79, DF = 10, p< 0,001

Έλεγχοι καλής προσαρμογής

Μέθοδος	χ^2	DF	χ^2/ DF	p
Pearson	437,14	468	0,93	0,844
Deviance	253,27	468	0,54	0,991

Τιμή p>0,05 δηλώνει μη στατιστική σημαντικότητα και άρα ισχύει η καλή προσαρμογή των στοιχείων του μοντέλου. Επίσης τιμές του πηλίκου χ^2/DF που προσεγγίζουν τη μονάδα, ειδοποιούν για την καλή προσαρμογή των στοιχείων

Πίνακας 3.9. *Στατιστικά αποτελέσματα από την εφαρμογή της ονομαστικής λογιστικής παλινδρόμησης με εξαρτημένη μεταβλητή το κριτήριο Κ1 και ανεξάρτητες τα κριτήρια Κ2_1, Κ2_2, Κ2_3, Κ8_3 και Κ20_7. Οι ανεξάρτητες μεταβλητές επιλέχθηκαν από ένα σύνολο κριτηρίων με τη μέθοδο της προοδευτικής απόρριψης των μεταβλητών. Οι συγκρίσεις των αποτελεσμάτων γίνονται με βάση το επίπεδο αναφοράς 3 της Κ1.*

- Τα κριτήρια Κ8_3 και Κ20_7 δεν παρουσιάζουν στατιστική σημαντικότητα (p=0,104 και p=0,145 αντίστοιχα) και δεν αξιολογούνται περαιτέρω. Το κριτήριο Κ2_3 παρουσιάζει λόγο πιθανοτήτων μικρότερο της μονάδας, υπερέχουν δηλαδή οι μικρότερες διαβαθμίσεις και κατά συνέπεια υπερέχει μικρότερη συμφωνία στην απόκριση των δασκάλων. Αυτό σημαίνει ότι οι δάσκαλοι οι οποίοι διάκεινται υπέρ της άμεσης ένταξης των μαθητών Μ.Ε.Α. συμφωνούν λιγότερο στις απόψεις περί εμφάνισης προβλημάτων συμπεριφοράς των μαθητών Μ.Ε.Α. (Κ2_3) από εκείνους που διάκεινται υπέρ της ένταξης στα Ειδικά Σχολεία.

Β) Αξιολόγηση των μεταβλητών συγκρίνοντας την κατηγορία 2 (μαθητές Μ.Ε.Α. μόνο ελαφριάς μορφής μπορούν να φοιτούν στα γενικά σχολεία) της Κ1 ως προς την κατηγορία αναφοράς 3:

- Κρίνοντας από τις τιμές του λόγου πιθανοτήτων έκβασης στα κριτήρια Κ2_1 και Κ2_2 προκύπτει ακριβώς αντίθετη συμπεριφορά των δασκάλων συγκριτικά με την προηγούμενη αξιολόγηση. Οι εκπαιδευτικοί που αποδέχονται την υπό όρους ένταξη των μαθητών Μ.Ε.Α. συμφωνούν λιγότερο στις απόψεις περί κοινωνικού αποκλεισμού και της αποδοχής της διαφορετικότητας των μαθητών Μ.Ε.Α. από αυτούς που επιθυμούν την ένταξη τους στα Ειδικά Σχολεία.
- Οι λόγοι των πιθανοτήτων έκβασης των κριτηρίων Κ8_3 και Κ20_7 είναι μεγαλύτεροι της μονάδας. Αυτό σημαίνει ότι οι δάσκαλοι που επιθυμούν την υπό όρους ένταξη των μαθητών Μ.Ε.Α. στο γενικό σχολείο αισθάνονται ότι θα διαταραχθεί περισσότερο η εύρυθμη λειτουργία στην τάξη και η αυθεντία του εκπαιδευτικού από εκείνους που εμμένουν στην ένταξη των μαθητών Μ.Ε.Α. στο Ειδικό Σχολείο.
- Το κριτήριο Κ2_3 είναι στατιστικά μη σημαντικό (p=0,416) και συνεπώς δεν αξιολογείται.

3.6 Βιβλιογραφία

Agresti A. (1996). *An Introduction to Categorical Data Analysis*. John Wiley and Sons, New York, 372 p.

Collett D. (2003). *Modelling Binary Data,* 2nd ed. Chapman & Hall, London, 344 p.

Cox D. R. & Snell E. J. (1989). *The Analysis of Binary Data,* 2nd ed. Chapman and Hall, London, 236 p.

Everitt B.S. (1992). *The analysis of contingency tables.* Chapman & Hall, London, 164 p.

Garson G.B (2011). *Ordinal regression. In Statnotes: Topics in Multivariate Analysis.* http://faculty.chass.ncsu.edu./garson/pa765/statnote.htm

Hauck W.W. & Donner A. (1977). Wald's test as applied to hypotheses in logit analysis. *Journal of the American Statistical Association*, 72, 851-853.

Hosmer D.W. & Lemeshow S. (2000). *Applied Logistic Regression*. 2nd ed. John Wiley & Sons, N. Jersey, 373 p.

McCullagh P. & Nelder J.A. (1989). *Generalized Linear Models.* 2nd ed. Chapman & Hall, London, 511 p.

Long J.C. & Freese J. (2014). *Regression Models for Categorical Dependent Variables Using Stata*, 3rd ed. College Station: Stata Press, 589 p.

Πέννα Α. (2008). *Στάσεις και ετοιμότητα δασκάλων ως προς την ένταξη παιδιών με ειδικές εκπαιδευτικές ανάγκες στο γενικό σχολείο.* Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας. Σχολή Παιδαγωγική Φλώρινας. Τμήμα Παιδαγωγικό Δημοτικής Εκπαίδευσης, 381 σ.

Reynolds H.T. (1984). *Analysis of Nominal Data.* 2nd ed. Sage Publications, London, 82 p.