Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Ανάλυση Κατηγορικών Δεδομένων

Ενότητα 8: Λογιστική παλινδρόμηση

Στέλιος Ζήμερας

Τμήμα Μαθηματικών

Εισαγωγική Κατεύθυνση: Στατιστικής και Αναλογιστικών – Χρηματοοικονομικών Μαθηματικών

Σάμος, Δεκέμβριος 2014

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΙΣΗ

Τα μη γραμμικά μοντέλα έχουν την πιο κάτω μορφή:

$$Y_i = f\left(X_i, \gamma\right) + \varepsilon_i$$

η μορφή αυτή μοιάζει με τη μορφή που έχουμε για τα γραμμικά μοντέλα (δηλαδή η παρατήρηση Y_i είναι το άθροισμα της αναμενόμενης συνάρτησης $f(X_i,\gamma)$ με τυχαία σφάλματα ε_i.

η διαφορά είναι ότι η αναμενόμενη συνάρτηση εδώ είναι μη γραμμική

ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΙΣΗ

- Τα σφάλματα είναι τυχαίες μεταβλητές με τις πιο κάτω υποθέσεις:
- $E(\varepsilon_i)=0$
- Σταθερή διασπορά
- Ανά δύο τα σφάλματα είναι ασυσχέτιστα $E(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=0$, $\forall i \neq j$
- Επίσης πολλές φορές υποθέτουμε ότι είναι κανονικές μεταβλητές

ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ

ΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΙΣΗ

Το λογιστικό μοντέλο είναι ένα

1. μη γραμμικό μοντέλο
2. τα σφάλματα δεν ακολουθούν κανονική κατανομή και
3. η μεταβλητή απόκρισης είναι διακριτή.

- Η λογιστική παλινδρόμηση χρησιμοποιείται σε περιπτώσεις στις οποίες επιθυμούμε να προβλέψουμε την απουσία ή την παρουσία ενός χαρακτηριστικού, ή ενός συμβάντος. Είναι μια γενίκευση της απλής γραμμικής παλινδρόμησης για την περίπτωση όπου η εξαρτημένη μεταβλητή (Y) είναι δίτιμη (δηλαδή παίρνει την τιμή 0 όταν απουσιάζει το χαρακτηριστικό ή την τιμή 1 όταν υπάρχει το χαρακτηριστικό).

ΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΙΣΗ

Ερμηνεία

- Απλό γραμμικό μοντέλο:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$$

Δίτιμη μεταβλητή (0, 1)

- Επειδή ισχύει $E(\varepsilon_i)=0$

$$\begin{aligned} E(Y_i) &= E(\beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i) \\ &= E(\beta_0 + \beta_1 X_i) + E(\varepsilon_i) \\ &= \beta_0 + \beta_1 X_i \end{aligned}$$

ΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΙΣΗ

Επίσης αφού είναι δίτιμη μεταβλητή η Y_i, θα είναι μια μεταβλητή Bernoulli με

- Όταν το $Y_i = 1$ έχουμε $\mathrm{P}(Y_i = 1) = \pi_i$
- Όταν το $Y_i = 0$ έχουμε $\mathrm{P}(Y_i = 0) = 1 - \pi_i$

Με βάση τον ορισμό της αναμενόμενης τιμής έχουμε

$$E(Y_i) = 1\pi_i + 0(1 - \pi_i) = \pi_i$$

Εξισώνοντας τους τύπους των δύο αναμενόμενων τιμών έχουμε

$$E(Y_i) = \beta_0 + \beta_1 X_i = \pi_i$$

Όταν το $Y_i = 1$ έχουμε $\mathrm{P}(Y_i = 1) = \pi_i$

Όταν ανεξάρτητη μεταβλητή η X_i

ΓΙΑΤΙ ΌΧΙ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ

1. Τα σφάλματα δεν είναι κανονικά

Έχουμε

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i \Leftrightarrow \varepsilon_i = Y_i - (\beta_0 + \beta_1 X_i)$$

Όταν

$$Y_i = 0: \ \varepsilon_i = -\beta_0 - \beta_1 X_i$$

$$Y_i = 1: \ \varepsilon_i = 1 - \beta_0 - \beta_1 X_i$$

Όχι κανονική κατανομή σφαλμάτων

ΓΙΑΤΙ ΌΧΙ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ

2. Τα σφάλματα έχουν άνισες διασπορές

Όταν η αποκρινόμενη μεταβλητή παίρνει τις τιμές 0 ή 1 τα σφάλματα δεν έχουν ίσες διασπορές.

$$Var(\varepsilon_i) = Var(Y_i - \pi_i) = Var(Y_i) + Var(-\pi_i) = Var(Y_i) + 0 = Var(Y_i)$$

$$Var(Y_i) = E\left\{(Y_i - E(Y_i))^2\right\}$$

$$= (1-\pi_i)^2 \pi_i + (0-\pi_i)^2 (1-\pi_i)$$

$$= \pi_i (1-\pi_i)[(1-\pi_i) + \pi_i]$$

$$= \pi_i (1-\pi_i)$$

$$= (E(Y_i))(1 - E(Y_i))$$

$$= (\beta_0 + \beta_1 X_i)(1 - \beta_0 - \beta_1 X_i)$$

$$= Var(\varepsilon_i) \qquad (4)$$

Από την σχέση βλέπουμε πως η διασπορά των σφαλμάτων εξαρτάται από τα X_i, άρα η τιμή της διασποράς θα είναι διαφορετική για κάθε διαφορετικό X_i

ΓΙΑΤΙ ΌΧΙ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ

- **Περιορισμός στη συνάρτηση απόκρισης**

Η συνάρτηση απόκρισης επειδή παριστάνει πιθανότητες θα πρέπει να ισχύει ο περιορισμός

$$0 \le E(Y) = \pi \le 1 .$$

ΑΠΛΟ ΛΟΓΙΣΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ

Το μοντέλο που χρησιμοποιούμε όταν η Y_i είναι δίτιμη είναι το λογιστικό, το οποίο ορίζεται ως εξής:

$$Y_i = E(Y_i) + \varepsilon_i$$

όπου Y_i ανεξάρτητη τ.μ. Bernoulli

$$E(Y_i) = \pi_i = \frac{e^{(\beta_0+\beta_1 X_i)}}{1+e^{(\beta_0+\beta_1 X_i)}} = \left[1+e^{(-\beta_0-\beta_1 X_i)}\right]^{-1}$$

ΑΠΛΟ ΛΟΓΙΣΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ

Είδαμε πως η αναμενόμενη συνάρτηση πρέπει να παίρνει τιμές στο διάστημα [0,1]

$$E(Y_i) = \beta_0 + \beta_1 X_i = \pi_i .$$

Οι τιμές όμως της $E(Y_i)$ κυμαίνονται σε όλο το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Για να αντιμετωπίσουμε αυτό το πρόβλημα, μια σκέψη θα ήταν να αντικαταστήσουμε την πιθανότητα π_i της επιτυχίας του γεγονότος με τη σχετική πιθανότητα επιτυχίας, δηλαδή με το λόγο της πιθανότητας επιτυχίας του γεγονότος προς την πιθανότητα αποτυχίας του γεγονότος

$$\frac{\pi_i}{1-\pi_i} .$$

ΑΠΛΟ ΛΟΓΙΣΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ

- Το μοντέλο

$$\frac{\pi_i}{1-\pi_i} = \beta_0 + \beta_1 X_i$$

πάλι δεν είναι απόλυτα σωστό γιατί παίρνει τιμές από (0, +∞). Επομένως προτείνεται ο μετασχηματισμός

$$\pi_i' = \ln\left(\frac{\pi_i}{1-\pi_i}\right)$$

$$\pi_i' = \ln\left(\frac{\pi_i}{1-\pi_i}\right) = \beta_0 + \beta_1 X_i$$

ΑΠΛΟ ΛΟΓΙΣΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ

Έχουμε

$$\pi_i' = \ln\left(\frac{\pi_i}{1-\pi_i}\right) = \beta_0 + \beta_1 X_i$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi_i}{1-\pi_i} = e^{\beta_0+\beta_1 X_i} \Leftrightarrow \pi_i = e^{\beta_0+\beta_1 X_i}\left(1-\pi_i\right)$$

$$\Leftrightarrow \pi_i + \pi_i e^{\beta_0+\beta_1 X_i} = e^{\beta_0+\beta_1 X_i} \Leftrightarrow \pi_i(1+e^{\beta_0+\beta_1 X_i}) = e^{\beta_0+\beta_1 X_i}$$

$$\Leftrightarrow \pi_i = \frac{e^{\beta_0+\beta_1 X_i}}{1+e^{\beta_0+\beta_1 X_i}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{E\left(Y_i\right) = \frac{e^{\beta_0+\beta_1 X_i}}{1+e^{\beta_0+\beta_1 X_i}}}$$

ΑΠΛΟ ΛΟΓΙΣΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ

Επίσης ισχύει

$$E(Y_i) = \left(1 + e^{-\beta_0 - \beta_1 X_i}\right)^{-1} :$$

Απόδειξη

$$E(Y_i) = \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 X_i}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 X_i}} = \left(\frac{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 X_i}}{e^{\beta_0 + \beta_1 X_i}} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{e^{\beta_0 + \beta_1 X_i}} + \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 X_i}}{e^{\beta_0 + \beta_1 X_i}} \right)^{-1}$$

$$= \left(e^{-\beta_0 - \beta_1 X_i} + 1\right)^{-1}$$

ΑΠΛΟ ΛΟΓΙΣΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ

Ορισμός

Ο λόγος $\frac{\pi_i}{1-\pi_i}$

ονομάζεται odds ενώ ο μετασχηματισμός $\pi_i' = \ln\left(\frac{\pi_i}{1-\pi_i}\right)$

ονομάζεται logit μετασχηματισμός της πιθανότητας

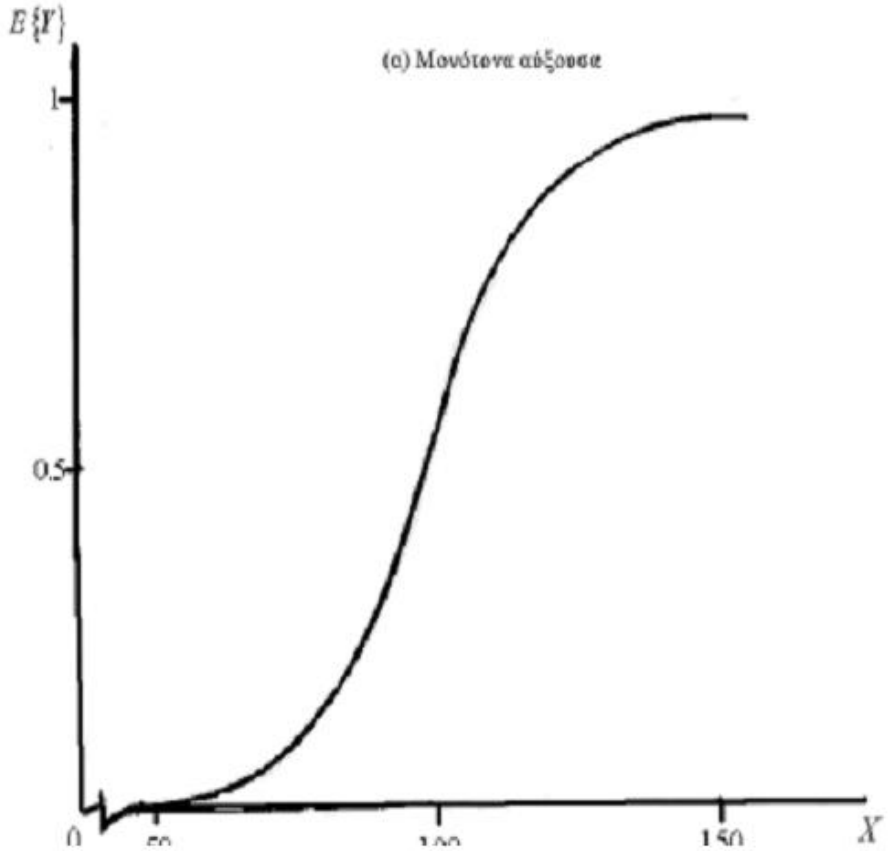
Η αναμενόμενη λογιστική συνάρτηση είναι:

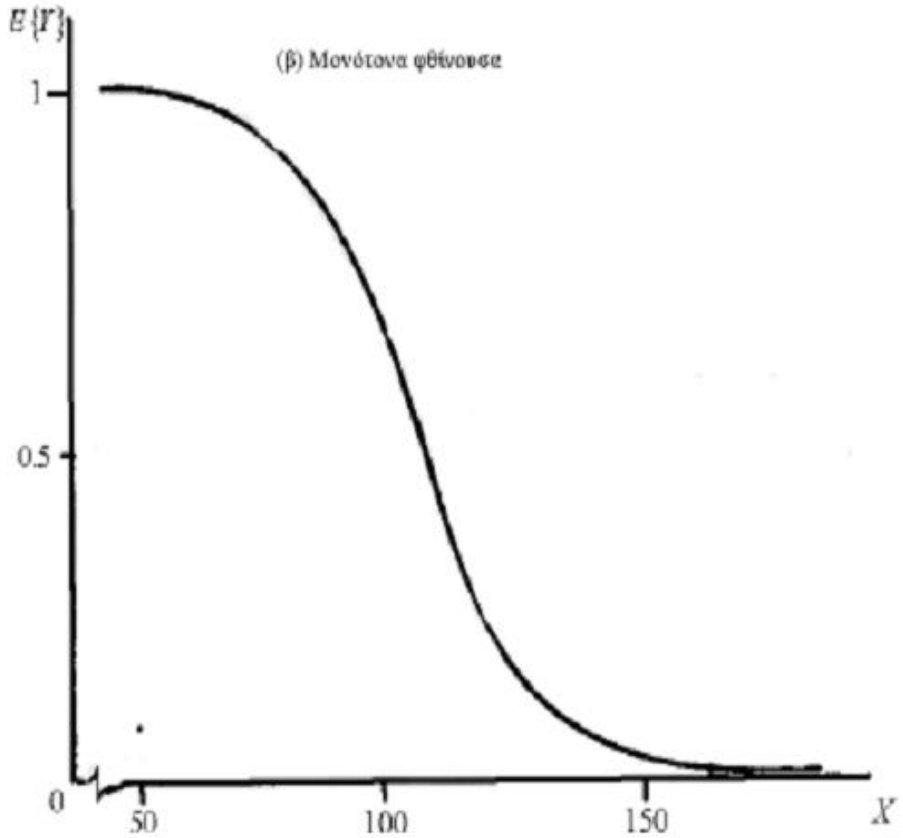
a) Είτε μονότονα αύξουσα συνάρτηση είτε μονότονα φθίνουσα,

b) Είναι σχεδόν γραμμική στην περιοχή [0.2, 0.8],

c) Πλησιάζει το 0 και 1 στις ακραίες τιμές της εμβέλειας του Χ

ΑΠΛΟ ΛΟΓΙΣΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ





ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΙΘΑΝΟΦΑΝΕΙΑΣ

Αφού τα Y_i είναι τυχαίες μεταβλητές Bernoulli όπου

$$\mathrm{P}\left(Y_i = 1\right) = \pi_i$$

$$\mathrm{P}\left(Y_i = 0\right) = 1 - \pi_i$$

η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι:

$$f_i\left(Y_i\right) = \pi_i^{Y_i}\left(1-\pi_i\right)^{1-Y_i} \qquad Y_i = 0,1 \quad \text{και} \quad i = 1,\ldots,n$$

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΙΘΑΝΟΦΑΝΕΙΑΣ

Οι παρατηρήσεις Y_i είναι ανεξάρτητες οπότε η από κοινού συνάρτησης πιθανότητας θα είναι:

$$g(Y_1,\ldots\ldots,Y_n)=\prod_{i=1}^{n} f_i(Y_i)=\prod_{i=1}^{n}\pi_i^{Y_i}(1-\pi_i)^{1-Y_i}$$

$$\ln g(Y_1,\ldots\ldots,Y_n)=\ln\prod_{i=1}^{n}\pi_i^{Y_i}(1-\pi_i)^{1-Y_i}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left[Y_i\ln\left(\frac{\pi_i}{1-\pi_i}\right)\right]+\sum_{i=1}^{n}\ln(1-\pi_i)$$

$$\pi_i'=\ln\left(\frac{\pi_i}{1-\pi_i}\right)=\beta_0+\beta_1X_i$$

$$E(Y_i)=\pi_i=\frac{e^{(\beta_0+\beta_1X_i)}}{1+e^{(\beta_0+\beta_1X_i)}}=\left[1+e^{(-\beta_0-\beta_1X_i)}\right]^{-1}$$

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΙΘΑΝΟΦΑΝΕΙΑΣ

$$\ln L(\beta_0,\beta_1)=\sum_{i=1}^{n}Y_i(\beta_0+\beta_1X_i)+\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1-\frac{e^{\beta_0+\beta_1X_i}}{1+e^{\beta_0+\beta_1X_i}}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}Y_i(\beta_0+\beta_1X_i)+\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{1+e^{\beta_0+\beta_1X_i}-e^{\beta_0+\beta_1X_i}}{1+e^{\beta_0+\beta_1X_i}}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}Y_i(\beta_0+\beta_1X_i)+\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+e^{\beta_0+\beta_1X_i}\right)^{-1}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}Y_i(\beta_0+\beta_1X_i)-\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+e^{\beta_0+\beta_1X_i}\right)$$

Εκτιμήσεις β_0 και β_1 → $\hat{\pi}=\dfrac{e^{b_0+b_1X}}{1+e^{b_0+b_1X}}$ → $\hat{\pi}'=\ln\left(\dfrac{\hat{\pi}}{1-\hat{\pi}}\right)$

$$\hat{\pi}'=b_0+b_1X$$

ΕΡΜΗΝΕΙΑ

συντελεστής παλινδρόμησης b_1

Η ερμηνεία προέρχεται από την ιδιότητα που έχει ο εκτιμώμενος λόγος πιθανοτήτων (odds) $\frac{\pi_i}{1-\pi_i}$ ο οποίος πολλαπλασιάζεται με το e^{b_1} για κάθε μοναοα που αυξάνεται το Χ

$$OR = \frac{odds_2}{odds_1} = e^{b_1}$$

Αν το b_1 είναι θετικό, ο παράγοντας e^{b_1} είναι μεγαλύτερος από τη μονάδα, δηλαδή ο εκτιμώμενος λόγος πιθανοτήτων αυξάνεται. Αν το b_1 είναι αρνητικό, ο παράγοντας e^{b_1} είναι μικρότερος της μονάδας, και άρα ο εκτιμώμενος λόγος πιθανοτήτων μειώνεται.