Δειγματοληψία

- Πρέπει να γνωρίζουμε πως πήραμε το δείγμα
- Το πλήθος n_{ij} των παρατηρήσεων σε κάθε κελί είναι τ.μ. με μ_{ij} συμβολίζουμε την μέση τιμή:

$$E\left(n_{ij}\right)=\mu_{ij}$$

- Επομένως στην δειγματοληψία πινάκων συνάφειας αναφερόμαστε στον τρόπο της δειγματοληψίας που επιλέξαμε το δείγμα μας με βάση την διάταξη και την δυνατότητα συνδυασμών των κελιών.
- Επομένως μπορούμε να έχουμε

1. Μονοδιάστατους πίνακες (μόνο γραμμές)
2. Πίνακες συνάφειας (συνδυαζόμενες γραμμές και στήλες)
3. Ανεξάρτητους μονοδιάστατους πίνακες (ανεξάρτητες γραμμές ή στήλες)

Ανάλογα με τα παραπάνω σχήματα δειγματοληψίας έχουμε και τα αντίστοιχα μοντέλα

Δειγματοληψία Poisson

- Παρατηρούμε ανεξάρτητες τ.μ. με κατανομή Poisson και n_{ij} οι τιμές που παίρνουν οι τ.μ.
- Επομένως έχουμε μοντελοποίηση μονοδιάστατου πίνακα με μορφή

Μεταβλητές	Y1	Y2
X1	n_{11}	n_{12}
X2	n_{21}	n_{22}
X3	n_{31}	n_{32}

Μεταβλητή X
n_1
n_2
:
:
n_k

συχνότητες

Μεταβλητή X
n_{11}
n_{12}
n_{22}
n_{21}
n_{31}
n_{32}

Μετατροπή διδιάστατου σε μονοδιάστατο πίνακα

Πολυωνυμική Δειγματοληψία

- Παίρνουμε τυχαία n άτομα και για το καθένα καταγράφουμε σε ποια κατηγορία X_1, X_2,…, X_I, και Y_1, Y_2,…, Y_J, ανήκουν. Έτσι n_{ij} είναι το πλήθος των ατόμων στο κελί (X_I, Y_J)
- Επομένως έχουμε μοντελοποίηση πίνακα διπλής εισόδου με μορφή

Συνδιασμός (X_I, Y_J)

Μεταβλητές	Y1	Y2
X1	n_{11}	n_{12}
X2	n_{21}	n_{22}
X3	n_{31}	n_{32}

Ανεξάρτητη Πολυωνυμική

- Παίρνουμε τ.δ. μεγέθους $n_{1.}$ από την κατηγορία X_1, τ.δ. μεγέθους $n_{2.}$ από την κατηγορία X_2,……, και μετράμε σε κάθε κατηγορία πόσα άτομα ανήκουν στην Y_1, Y_2,…, Y_J, και έτσι έχουμε πίνακα συνάφειας (IxJ).
- Επομένως έχουμε μοντελοποίηση ανεξάρτητων μονοδιάστατων πινάκων με μορφή

ανεξάρτητα

Μεταβλητές	Y1	Y2
X1	n_{11}	n_{12}
X2	n_{21}	n_{22}
X3	n_{31}	n_{32}

Σχέση Πολυωνυμικής και Poisson Δειγματοληψίας

Ένα Poisson μοντέλο δειγματοληψίας θεωρεί τις μετρήσεις Y_{ij}, ανεξάρτητες τ.μ. με μέσο μ_{ij} . Η από κοινού σ.π.π. των πιθανών αποτελεσμάτων n_{ij} ισούται με το γινόμενο των πιθανοτήτων $P(Y_{ij}=n_{ij})$ για τα κελιά (I,J) που ακολουθούν κατανομή Poisson με

$$P\left(Y_{ij}\right)=\prod_i \prod_j \frac{e^{-\mu_{ij}} \mu_{ij}^{\ n_{ij}}}{n_{ij}!}$$

Σχέση Πολυωνυμικής και Poisson Δειγματοληψίας

- Όταν το μέγεθος του δείγματος n είναι γνωστό αλλά τα αθροίσματα (γραμμών ή στηλών) άγνωστα τότε πολυωνυμικό μοντέλο δειγματοληψίας εφαρμόζεται. Τα κελιά (I,J) είναι τα πιθανά αποτελέσματα με σ.π.π. να ισούται με

$$\frac{n_{..}!}{\prod_{ij} n_{ij}!} \prod_i \prod_j \pi_{ij}^{n_{ij}}$$

Σχέση Πολυωνυμικής και Poisson Δειγματοληψίας

- Ας υποθέσουμε ότι σε κάθε επίπεδο της X, έστω X = i, διαθέτουμε n_i, παρατηρήσεις. Έστω επίσης ότι οι μετρήσεις της Y σε ένα επίπεδο της X είναι ανεξάρτητες από αυτές σε ένα άλλο επίπεδο της X, έχοντας συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $(\pi_{1|i}, \ldots, \pi_{J|i})$. Τότε για κάθε γραμμή έχουμε ένα διαφορετικό πολυωνυμικό πείραμα. Οι μετρήσεις n_{ij}, j = 1,..., J έχουν την πολυωνυμική κατανομή:

$$\frac{n_{i.}!}{\prod_j n_{ij}!} \prod_j \pi_{j|i}^{n_{ij}}$$

- Όταν τα δείγματα σε διαφορετικές τιμές της *X* είναι ανεξάρτητα τότε η από κοινού κατανομή για ολόκληρο το δείγμα είναι το γινόμενο των πολυωνυμικών κατανομών. Η δειγματοληψία αναφέρεται σαν ανεξάρτητη πολυωνυμική ή και γινόμενο πολυωνυμικής δειγματοληψίας.

Πρόταση

Αν έχουμε δειγματοληψία Poisson με $E(n_{ij}) = \mu_{ij}$ και σ.π.π.

$$f(n_{ij}) = \frac{e^{-\mu_{ij}} \mu_{ij}^{n_{ij}}}{n_{ij}!}$$

τότε η δεσμευμένη κατανομή των n_{ij} όταν $\sum_{ij} n_{ij} = n$ είναι πολυωνυμική με

$$f\left(n_{ij} \mid \sum_{ij} n_{ij} = n \right) = \frac{n!}{\prod_{ij} n_{ij}!} \prod_{ij} \left(\frac{\mu_{ij}}{\sum_{ij} \mu_{ij}} \right)^{n_{ij}}$$

Απόδειξη

Γνωρίζουμε ότι

$$f\left(n_{ij} \mid \sum_{ij} n_{ij} = n\right) = \frac{f\left(n_{ij}\right)}{f\left(\sum_{ij} n_{ij} = n\right)} = \frac{\prod_{ij} \frac{e^{-\mu_{ij}} \mu_{ij}^{n_{ij}}}{n_{ij}!}}{\frac{e^{-\sum_{ij} \mu_{ij}} \sum_{ij} \mu_{ij}^{n_{ij}}}{n!}}$$

$$= \frac{n!}{\prod_{ij} n_{ij}!} \prod_{ij} \left(\frac{\mu_{ij}}{\sum_{ij} \mu_{ij}}\right)^{n_{ij}}$$

Απόδειξη

Με τελική μορφή

$$f\left(n_{ij} \mid \sum_{ij} n_{ij} = n\right) = \frac{n!}{\prod_{ij} n_{ij}!} \prod_{ij} \left(\frac{\mu_{ij}}{\mu}\right)^{n_{ij}}$$

αφού άθροισμα ανεξάρτητων Poisson είναι Poisson με

$$f\left(\sum_{ij} n_{ij} = n\right) \sim Pois\left(\sum_{ij} \mu_{ij}\right) = Pois(\mu)$$

Οι πιθανότητες π_{ij} της πολυωνυμικής είναι

$$\pi_{ij} = \frac{\mu_{ij}}{\mu}$$

Πρόταση

Αν το τυχαίο δείγμα n=(n_1, n_2,…, n_k) ακολουθεί πολυωνυμική κατανομή με παραμέτρους n, p_1, p_2,…, p_k τότε η στατιστική συνάρτηση

$$X_* = \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(n_i - E\left\{n_{ij}\right\}\right)^2}{E\left\{n_{ij}\right\}} =$$

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\left(\pi\alpha\rho\alpha\tau\eta\rho\acute{\eta}\sigma\varepsilon\iota\varsigma - \varepsilon\kappa\tau\iota\mu\acute{\eta}\sigma\varepsilon\iota\varsigma\right)^2}{\varepsilon\kappa\tau\iota\mu\acute{\eta}\sigma\varepsilon\iota\varsigma} = \sum_{\iota=1}^{\kappa} \frac{\left(\mathrm{O}_i - E_i\right)^2}{E_i}$$

ακολουθεί ασυμπτωτικά (n→∝) την x^2 κατανομή με κ-1 βαθμούς ελευθερίας

Θεώρημα

Έστω τυχαίο δείγμα n=(n_1, n_2,…, n_k) ακολουθεί πολυωνυμική κατανομή με παραμέτρους n, π_1, π_2,…, π_k. Έστω η μηδενική υπόθεση ότι σε μια πολυωνυμική κατανομή με κ-κελιά οι παράμετροι π_i παίρνουν συγκεκριμένες τιμές αλλά άγνωστες. Αν η H_0 είναι αληθής τότε οι αναμενόμενες τιμές σε κάθε ένα κελί από τα κ θα ισούται με $\widehat{\mu}_i = e_i = n\pi_i$. Τότε η στατιστική συνάρτηση

$$X_* = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - n\pi_i)^2}{n\pi_i} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - \widehat{\mu}_i)^2}{\widehat{\mu}_i} \sim x_{k-1}^2$$

ακολουθεί ασυμπτωτικά (n→∞) την x^2 κατανομή με κ-1 βαθμούς ελευθερίας

Τεστ καλής προσαρμογής

Δοκιμασίες καλής προσαρμογής

- Στην μελέτη των παραμετρικών διαδικασιών για την εκτίμηση και έλεγχο υποθέσεων, οι κατανομές θεωρούνται γνωστές και η προσοχή μας στέφεται στην εκτίμηση μιας ή περισσοτέρων παραμέτρων της κατανομής ή στον έλεγχο της υποθέσεως που αφορά σύνολο τιμών της υπό-εξέτασης παραμέτρου.
- Σύμφωνα με το πρόβλημα, θεωρούμε σύνολο ανεξάρτητων παρατηρήσεων $X_1, X_2, \ldots, X_n$, τ.μ. με συνάρτηση κατανομής $F(x; \theta)$, όπου $\theta=(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ και μορφή της F άγνωστη.
- Θεωρούμε την δοκιμασία

$$H_0 : F(x;\theta) = F_0(x;\theta)$$

Δοκιμασίες καλής προσαρμογής

όπου F_0 έχει συγκεκριμένη μορφή και θ διάνυσμα παραμέτρων μη καθορισμένο.

Ένας απλός τρόπος κατασκευής δοκιμασιών καλής προσαρμογής είναι η ομαδοποίηση δεδομένων κατά τέτοιο τρόπο ώστε η υπόθεση προσαρμογής να ισοδυναμεί με υπόθεση που αφορά πολυωνυμικές πιθανότητες.

Αυτό επιτυγχάνεται με διαίρεση του εύρους των δυνατών κλάσεων της τ.μ. Χ σε κ-πλήθος αμοιβαίως αποκλειόμενες κλάσεις.

Δοκιμασίες καλής προσαρμογής

- Υποθέτουμε ότι τυχαίο δείγμα n-παρατηρήσεων X_1, X_2,…., X_n, εξήφθη από την τ.μ. X και ότι η n_i είναι τ.μ. που παριστάνει τον αριθμό των κ-παρατηρήσεων που κατατάσσονται στην i-οστη κλάση.
- Θεωρούμε την υπόθεση προσαρμογής H_0 απλή, επομένως η συνάρτηση κατανομής είναι πλήρως ορισμένη. Άρα η συνάρτηση κατανομής δεν εξαρτάται από παραμέτρους αφού είναι γνωστές κάτω από την H_0 οπότε $F_0(x;\theta)= F_0(x)$.
- Κάτω από την υπόθεση H_0 μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα μιας παρατήρησης να καταταγεί σε κάθε μια από τις κλάσεις και να σημειώσουμε τις πιθανότητες αυτές ως p_{10}, p_{20},…, p_{k0}.

Δοκιμασίες καλής προσαρμογής

- Από την ανεξαρτησία των παρατηρήσεων προκύπτει ότι κάτω από την H_0 οι n_i έχουν από κοινού την πολυωνυμική κατανομή που δίνεται από την έκφραση

$$p(n_1, n_2, \ldots, n_k \mid H_0) = \frac{n_{..}!}{\prod_i n_{ij}!} \prod_i p_{i0}^{n_i}$$

- Έστω F(x) η αληθής συνάρτηση κατανομής της τ.μ. X με εναλλακτική στην υπόθεση προσαρμογής την $F(x) \neq F_0(x)$ για κάθε x.
- Αν p_i η αληθής πιθανότητα μιας παρατήρησης να καταταγεί στην i-οστή κλάση, η δοκιμασία προσαρμογής με βάση τις συχνότητες n_i ισοδυναμεί με δοκιμασία απλής υπόθεσης που αφορά πολυωνυμικές πιθανότητες.

Δοκιμασίες καλής προσαρμογής

με δοκιμασία H_0: $p_i = p_{i0}$ έναντι H_1: $p_i \neq p_{i0}$ (i=1,2,…,κ)

- Κάτω από την μηδενική υπόθεση H_0 η τ.μ. n_i έχει αναμενόμενη τιμή np_{i0} και συνεπώς αν οι απόλυτες διαφορές $|n_i - np_{i0}|$ είναι μεγάλες τότε παράγει μαρτυρία κατά της υπόθεσης H_0
- Για την διαδικασία αυτή κατάλληλο τεστ προτείνεται το x^2 με εκφραση

$$X_* = \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(n_i - np_{i0}\right)^2}{np_{i0}} \sim x_{k-1}^2$$

Άσκηση

- Ζάρι το ρίχνουμε 60 φορές και παίρνουμε τα παρακάτω αποτελέσματα

Αποτελέσματα	1	2	3	4	5	6
συχνότητα	13	19	11	8	5	4

H_0 είναι $\pi_i = \frac{1}{6}, i = 1,\ldots,6$

Αναμενόμενες συχνότητες $e_i = n\pi_i = 60\frac{1}{6} = 10$

Έλεγχος

Αποτελέσματα	1	2	3	4	5	6
συχνότητα	13	19	11	8	5	4
Αναμενόμενες	10	10	10	10	10	10

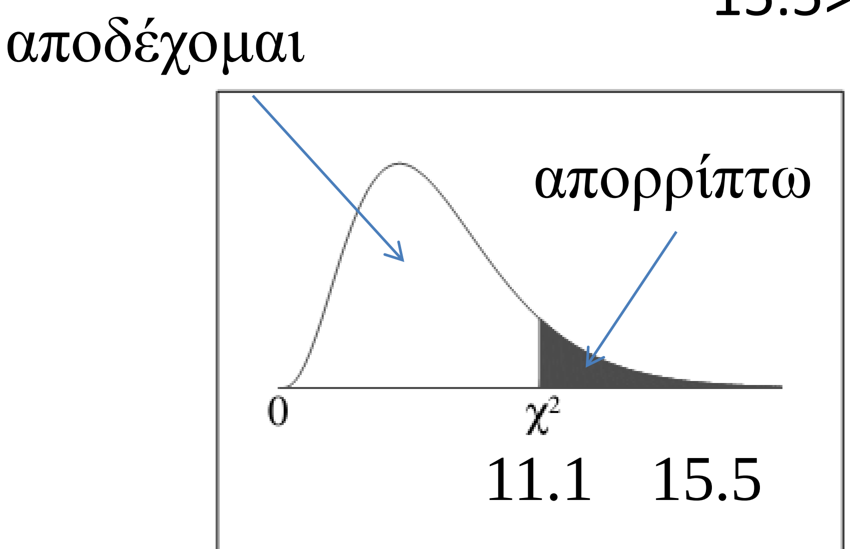
Άσκηση

$$X_* = \frac{(13-10)^2}{10} + \frac{(19-10)^2}{10} + \ldots + \frac{(4-10)^2}{10} = 15.5$$

Από τους πίνακες της x^2 κατανομή με κ-1 β.ε (κ-1=5) έχουμε

$$x^2_{5,0.05} = 11.1$$

15.5>11.1 άρα απορρίπτω την H_0



Θεώρημα

- Έστω τυχαίο δείγμα $n=(n_1, n_2,\ldots, n_k)$. Για μεγάλο n ($n\to\infty$) εφόσον ισχύει η αρχική υπόθεση H_0 η στατιστική συνάρτηση

$$X_* = \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(n_i - n\pi_i\right)^2}{n\pi_i} = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i^2}{n\pi_i} - n \sim x_{k-1-m}^2$$

όπου m=1 από εκθετική ή m=2 από κανονική

Απόδειξη

$$X_* = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - n\pi_i)^2}{n\pi_i} = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i^2 - 2n\pi_i n_i + n^2\pi_i^2}{n\pi_i} =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{n_i^2}{n\pi_i} - \frac{2n\pi_i n_i}{n\pi_i} + \frac{n^2\pi_i^2}{n\pi_i} \right) = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i^2}{n\pi_i} - 2\sum_{i=1}^{k} n_i + n\sum_{i=1}^{k} \pi_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i^2}{n\pi_i} - 2n + n = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i^2}{n\pi_i} - n$$

Άσκηση

- Έχουμε

Ώρες λειτουργίας	0-15	15-30	30-45	45-50
τρανζίστορ	50	55	23	12

Τα δεδομένα προέρχονται από εκθετική κατανομή?

Εκθετική κατανομή:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \lambda > 0$$

Απάντηση

- Η παράμετρος λ της εκθετικής είναι άγνωστη. Θα πρέπει να υπολογισθεί από τον υπολογισμό του μέσου:

$$\lambda = \frac{1}{\mu} \qquad \mu = \int_0^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$\widehat{x} = \frac{1}{140}\sum_i f_i x_i = \frac{50*7.5 + 22.5*35 + 37.5*23 + 50*12}{140}$$

Μέσος διαστήματος

$$\lambda = \frac{1}{\mu} \Rightarrow \widehat{\lambda} = \frac{1}{\widehat{x}} = 0.0533$$

Απάντηση

- Η αθροιστική συνάρτηση F(x) δίνεται από τον τύπο:

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

- Άρα έχουμε

$$F(x) = 1 - e^{-\widehat{\lambda} x} = 1 - e^{-0.0533x}$$

- Οι θεωρητικές πιθανότητες εκτιμούνται από:

$$\widehat{p}_1 = P(0 < X \leq 15) = F(15) = 1 - e^{-0.0533*15} = 0.449$$

$$\widehat{p}_2 = P(15 < X \leq 30) = F(30) - F(15) = 0.249$$

$$\widehat{p}_3 = P(30 < X \leq 45) = F(45) - F(30) = 0.126$$

$$\widehat{p}_4 = 1 - \widehat{p}_1 - \widehat{p}_2 - \widehat{p}_3 = 0.128$$

Απάντηση

- Επομένως οι θεωρητικές παρατηρήσεις δίνονται από την σχέση:

$$x_1 = np_1 = 140 * 0.449 = 62.86$$

Ώρες λειτουργίας	0-15	15-30	30-45	45-50
τρανζίστορ	50	55	23	12
Θεωρητικές	62.86	29.98	15.12	15.37

$$X_* = \frac{(50-62.86)^2}{62.86} + \ldots + \frac{(12-15.37)^2}{15.37} = 7.2$$

Με βάση την διαπίστωση ότι η εκθετική κατανομή έχει μια παράμετρο, οι βαθμοί ελευθερίας γίνονται κ-1-m=4-1-1=2

$x^2_{2,0.05} = 10.59$ 7.2<10.59 άρα αποδέχομαι την H_0

Άσκηση

- Το πλήθος των οχημάτων που θέλει να στρίψει αριστερά σε φανάρι καταμετριέται 120 φορές με

Πλήθος οχημάτων	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
συχνότητες	30	32	46	10	2

Μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η παραπάνω εμπειρική κατανομή προέρχεται από πληθυσμό που ακολουθεί την Poisson?

Απάντηση

Έχουμε H_0: πληθυσμός ~ Poisson

H_1: πληθυσμός διάφορη από Poisson

Η σ.π.π. της Poisson κατανομής δίνεται από την σχέση

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$$

Πλήθος οχημάτων	0	1	2	3	4
συχνότητες	30	32	46	10	2
Πιθανότητες	0.25	0.35	0.23	0.155	

Απάντηση

$$\lambda = E(X) \Rightarrow \widehat{\lambda} = \widehat{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{120}(0*30+\ldots+4*2) = 1.35$$

$$\widehat{p}_0 = P(X=0) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} = \frac{e^{-1.35}\lambda^{0}}{0!} = 0.259$$

$$\widehat{p}_1 = P(X=1) = 0.259 * \frac{1.35}{1} = 0.35$$

$$\widehat{p}_2 = P(X=2) = 0.35 * \frac{1.35}{2} = 0.236$$

$$\widehat{p}_3 = 1 - \widehat{p}_1 - \widehat{p}_2 - \widehat{p}_3 = 0.155$$

$$\boxed{P(X=x+1) = P(X=x)\frac{\lambda}{(x+1)}}$$

Αναγωγική σχέση

Απάντηση

Πλήθος οχημάτων	0	1	2	3	4
συχνότητες	30	32	46	10	2
Πιθανότητες	0.259	0.35	0.236	0.155	
Εκτιμήσεις	31	42	29	18	

$$\widehat{n}_1 = np_1 = 120 * 0.259 = 31$$

Πλήθος οχημάτων	0	1	2	3	4
συχνότητες	30	32	46	10	2
Πιθανότητες	0.259	0.35	0.236	0.155	
Εκτιμήσεις	31	42	29	18	
n^2_i / np_i	29	24.4	73	8	

$$X_* = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i^2}{n\pi_i} - n$$

Απάντηση

$$X_* = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i^2}{n\pi_i} - n = 134.4 - 120 = 14.4$$

$x^2_{4-1-1,0.05} = 5.99$ 14.4>5.99 άρα απορρίπτω την H_0

Άσκηση

- Ένα τυχαίο δείγμα 500 επιχειρήσεων έδειξε ότι 120 έχουν έντονη δραστηριότητα στο εξωτερικό, 200 μερική και 180 ελάχιστη.
- Μπορούμε να ισχυριστούμε ότι τα πραγματικά ποσοστά είναι 28%, 37% και 35% αντίστοιχα ($\alpha=0.05$)

Απάντηση

- Για να ελέγξουμε αν οι παρατηρούμενες αναλογίες

$$\frac{120}{500}, \frac{200}{500}, \frac{180}{500}$$

συμπίπτουν με τις θεωρητικές 0.28, 0.37, 0.35 εφαρμόζουμε το τέστ καλής προσαρμογής x^2

Έχουμε H_0: $p_1=0.28$, $p_2=0.37$, $p_3=0.35$,

H_1: κάποιο p_i διάφορο της θεωρητικής

Απάντηση

δραστηριότητα	έντονη	μερική	Ελάχιστη
Συχνότητες (f_i)	120	200	180
Πιθανότητες (p_i)	0.28	0.37	0.35
Εκτιμήσεις	140	185	175

θεωρητικές

$\mu_i = np_i = 500 * p_i$

$$X_* = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i^2}{n\pi_i} - n = \frac{120^2}{140} + \frac{200^2}{185} + \frac{180^2}{175} - 500 = 4.22$$

$$x^2_{3-1,0.05} = 5.99$$

4.22<5.99 άρα αποδέχομαι την H_0

Απάντηση

- Μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η πραγματική αναλογία των επιχειρήσεων με έντονη δραστηριότητα είναι 30% (α=0.01)?

H_0: p=0.30

H_1: p≠0.30 δίπλευρο τεστ

$$z_{1-a/2} = z_{1-0.005} = z_{0.995} = 2.575$$

$$\widehat{p} = \frac{120}{500} = 0.24$$

$$\pi \pm z_{a/2}\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}} = 0.3 \pm 2.575 * \sqrt{\frac{0.3*0.7}{500}} = [0.279, 3.205]$$

Το 0.24 δεν ανήκει στο διάστημα άρα απορρίπτεται η H_0

Απάντηση

- Μπορούμε να ισχυριστούμε ότι τα ποσοστά δεν διαφέρουν μεταξύ τους ($\alpha=0.05$)?

Αν δεν διαφέρουν τότε $p_1=p_2=p_3=1/3$.

Επομένως έχουμε

H_0: $p_1=p_2=p_3=1/3$

H_1: κάποιο $p_i \neq 1/3$

δραστηριότητα	έντονη	μερική	Ελάχιστη
Συχνότητες (f_i)	120	200	180
Πιθανότητες (p_i)	1/3	1/3	1/3
Εκτιμήσεις	500/3	500/3	500/3

Απάντηση

$$X_* = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i^2}{n\pi_i} - n = 20.8$$

$$x^2_{3-1,0.05} = 5.99$$

20.8>5.99 άρα απορρίπτω την H_0