



## Αλιευτική Βιολογία

### Ηλικία – Ανάπτυξη ατόμου



Βασίλης Τρυγόνης

Μυτιλήνη 2024



Αναφορά δημιουργού – Παρόμοια διανομή (CC BY-SA 4.0)  
<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0>



## Εκτίμηση ηλικίας



## Εκτίμηση ηλικίας

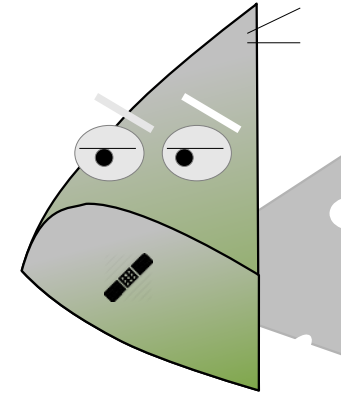
Η εκτίμηση της ηλικιακής σύνθεσης του αποθέματος δίνει χρήσιμες πληροφορίες για:

- Τον **κύκλο ζωής** των ψαριών (ανάπτυξη, αναπαραγωγή, θνησιμότητα,...),
- Τις **εξωγενείς επιδράσεις** (μεταβολές στο ενδιαίτημα, κλίμα,...),
- Τις επιπτώσεις της **αλιευτικής πίεσης**.

---

Μέθοδοι εκτίμησης ηλικίας:

- σήμανση – επανασύλληψη,
- μελέτη σκληρών τμημάτων του οργανισμού,
- ανάλυση της κατανομής μήκους.



Μετρήσεις μπορούν να γίνουν σε κλειστό και ελεγχόμενο χώρο (ενυδρεία ή κλωβοί), ωστόσο οι συνθήκες ανάπτυξης δεν είναι ίδιες με αυτές ενός άγριου πληθυσμού.

## Εμπειρική εκτίμηση ηλικίας (I)

σήμανση – επανασύλληψη (mark – recapture)

Στη βιβλιογραφία, αναφέρεται και ως “άμεση” μέθοδος. Αφορά σε μετρήσεις ατόμων που συλλαμβάνονται, σημαίνονται και επιστρέφονται στη θάλασσα, τα οποία εφόσον αλιευθούν πάλι, υπολογίζεται η αύξηση τους με **ακρίβεια**.

- Οι βασική υπόθεση είναι ότι η διαδικασία σήμανσης δεν τροποποιεί την ανάπτυξη του ατόμου και δεν αυξάνει την πιθανότητα θήρευσης (δεν επιδρά στη θνησιμότητα της ηλικιακής κλάσης υπό μελέτη).
- Η μέθοδος τυπικά απαιτεί σημαντική προσπάθεια στο πεδίο, αλλά λόγω της ακρίβειάς της, χρησιμοποιείται συχνά για την **επαλήθευση άλλων μεθόδων**.



photo: V.M. Giacalone



photo: Des Colhoun



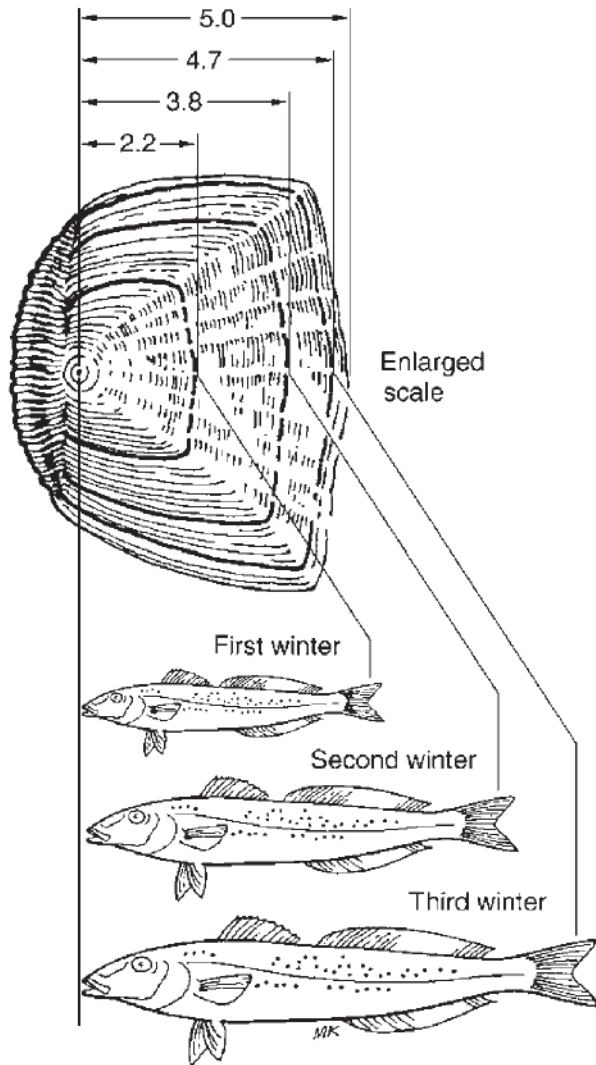
### Περαιτέρω ανάγνωση:

Campana (2001). Accuracy, precision and quality control in age determination, including a review of the use and abuse of age validation methods. *Journal of Fish Biology* 59, 197–242.

## Εμπειρική εκτίμηση ηλικίας (II)

### λέπια

Πηγή: King (2007)



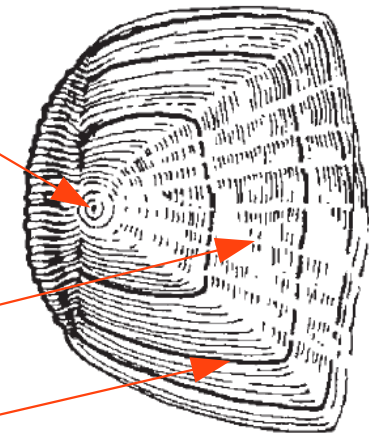
Βασίζεται στους δακτύλιους του **λεπιού**, οι οποίοι αναπτύσσονται από το κέντρο προς την περιφέρεια με λίγο-πολύ ένα κοινό κέντρο.

Η αύξηση των λεπιών είναι ανάλογη με την ηλικία και το μέγεθος του σώματος (αλλά όχι γραμμικά).

Κεντρική κηλίδα  
(γέννηση).

Τα καλοκαίρια, η  
εναπόθεση υλικού είναι  
έντονη και σχηματίζονται  
φωτεινοί δακτύλιοι.

Οι σκοτεινοί δακτύλιοι  
δείχνουν την αργή  
ανάπτυξη κατά τη  
διάρκεια του χειμώνα.



### Περαιτέρω ανάγνωση:

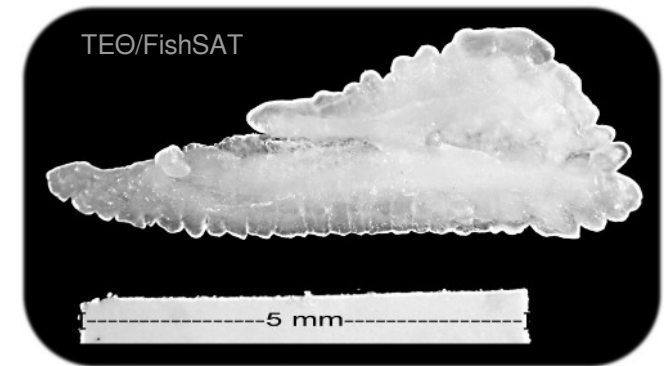
Alvord (1954). Validity of age determinations from scales of brown trout, rainbow trout, and brook trout. Transactions of the American Fisheries Society 83, 91-103.

## Εμπειρική εκτίμηση ηλικίας (III)

### ωτόλιθοι

Οι δακτύλιοι στους **ωτόλιθους** των ψαριών επιτρέπουν πολύ καλή χρονολόγηση, όμως, σε αντίθεση με τα λέπια, πρέπει να θυσιαστεί ο οργανισμός.

- Η ανάπτυξη των ωτόλιθων είναι ραγδαία στην μικρή ηλικία και μειώνεται σταδιακά όσο μεγαλώνει το άτομο.
- Στα μεγάλα ζώα, οι τελευταίες ηλικιακές φάσεις είναι συχνά δυσδιάκριτες (δηλαδή, **τα σφάλματα αυξάνουν με την ηλικία**).
- Το σχήμα των ωτόλιθων βοηθά στην αναγνώριση του είδους από στομαχικά περιεχόμενα ανώτερων θηρευτών και πουλιών.



ωτόλιθος παλαμίδας (*Sarda sarda*)

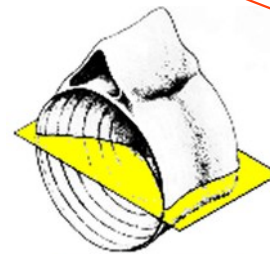
## Εμπειρική εκτίμηση ηλικίας (IV)

### λοιπές μέθοδοι

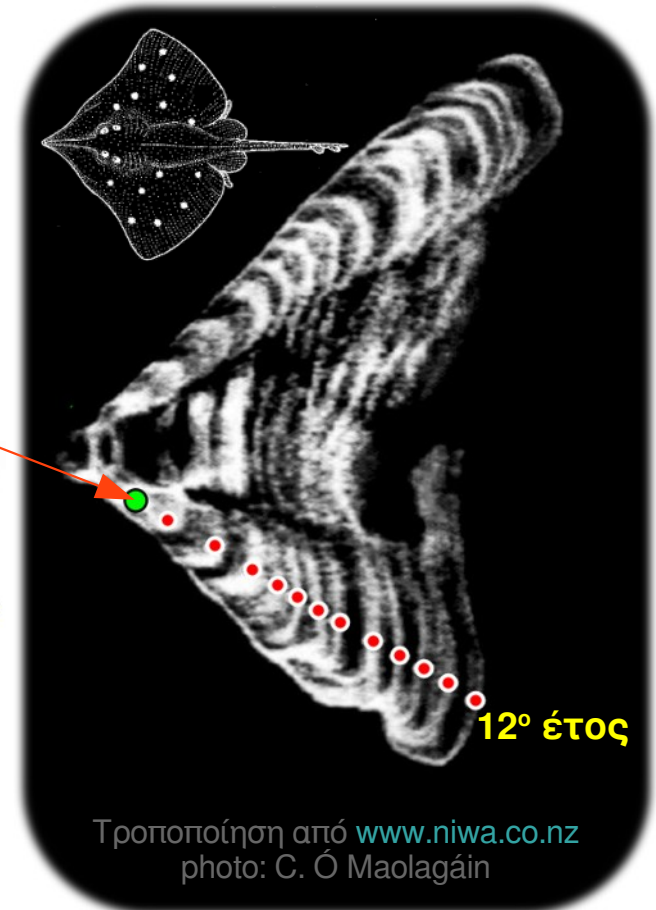
Εκτός από τα λέπια ή τους ωτόλιθους, η ηλικία μπορεί να εκτιμηθεί μέσω της εργαστηριακής επεξεργασίας άλλων σκληρών τμημάτων του οργανισμού, όπως οι σπόνδυλοι ή τα πτερύγια.

- Η μέθοδος χρησιμοποιείται συχνά σε χονδριχθείς (καρχαρίες, σαλάχια), και σε είδη που η εξαγωγή/μελέτη των ωτόλιθων είναι δύσκολη ή αδύνατη.

Γέννηση



Τροποποίηση από  
NOAA ([nefsc.noaa.gov](http://nefsc.noaa.gov))



Τροποποίηση από [www.niwa.co.nz](http://www.niwa.co.nz)  
photo: C. Ó Maolagáin

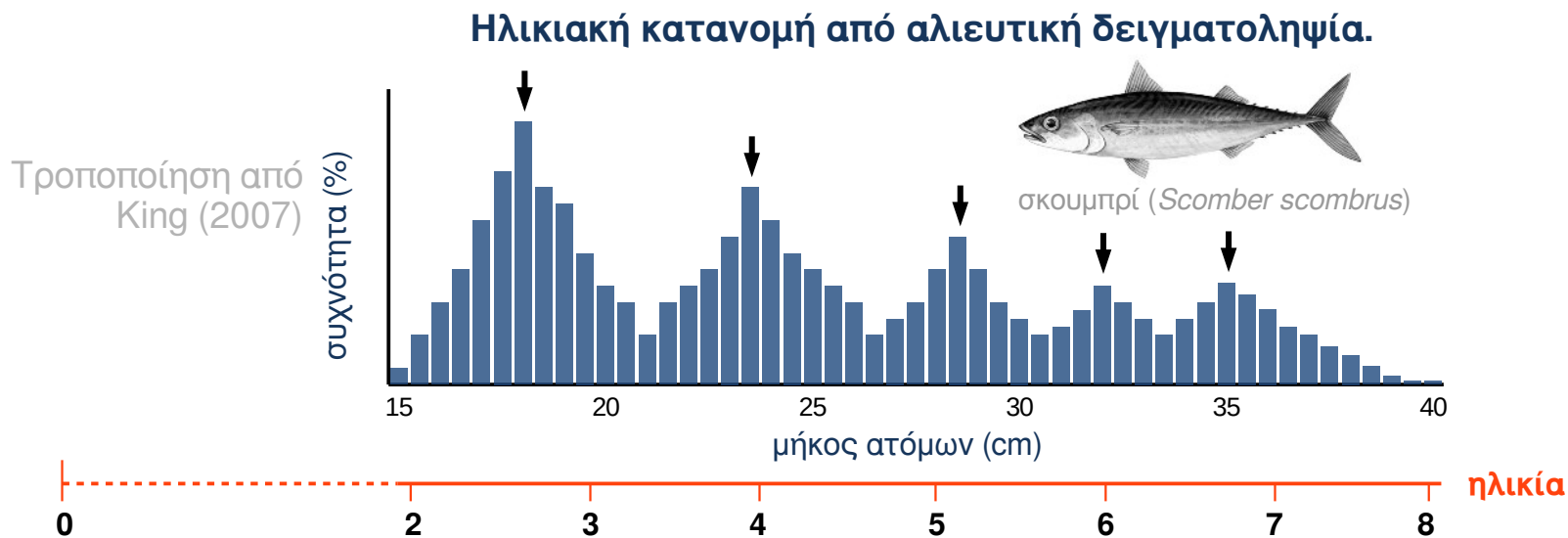
### Περαιτέρω ανάγνωση:

McNeil & Campana (2002). Comparison of whole and sectioned vertebrae for determining the age of young blue shark (*Prionace glauca*). Journal of Northwest Atlantic Fishery Science 30, 77–82.

## Στατιστική εκτίμηση ηλικίας

ανάλυση της κατανομής μήκους (length–frequency analysis)

- Γενικώς, τα ψάρια γεννιούνται σε διακριτές, συχνά ετήσιες, ηλικιακές κλάσεις (**κοόρτες**), και το μήκος των ατόμων μεγαλώνει ασυμπτωτικά κατά τη διάρκεια της ζωής τους.
- Έτσι, το μέσο μήκος των ατόμων κάθε κοόρτης θα διαφέρει, και αυτό θα εμφανίζεται καθαρά σε ένα ιστόγραμμα μήκους.



Η παρουσία διακριτών κορυφών (modes/peaks) στο ιστόγραμμα **μήκους** ενός δείγματος συνηγορεί στην παρουσία κλάσεων διαφορετικής **ηλικίας**.

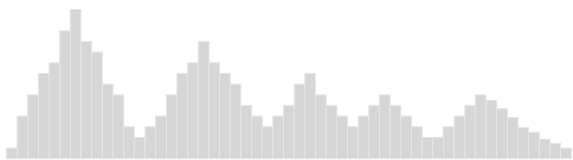


## Στατιστική εκτίμηση ηλικίας

ανάλυση της κατανομής μήκους (length–frequency analysis)

### Σχόλια (I)

- Η μέθοδος έχει θεμελιώδη προβλήματα («*Length–frequency plots are bumpy old things [...]» Pitcher 2002 p.189*), ωστόσο η χρήση της είναι ακόμα διαδεδομένη.
- Σε πραγματικές συνθήκες δειγματοληψίας, το μήκος μετρείται γρήγορα και εύκολα, και η μέθοδος είναι μια πρακτική εναλλακτική όταν η εργαστηριακή εκτίμηση ηλικίας από σκληρά μέρη είναι δύσκολη, χρονοβόρα ή ακριβή.
- Παρακολουθώντας το μέσο μήκος σε διαδοχικές δειγματοληψίες, μπορεί να εκτιμηθεί στατιστικά ο ρυθμός ανάπτυξης (και η διακύμανσή του) ανά ηλικιακή κλάση (δες **Παράρτημα**).





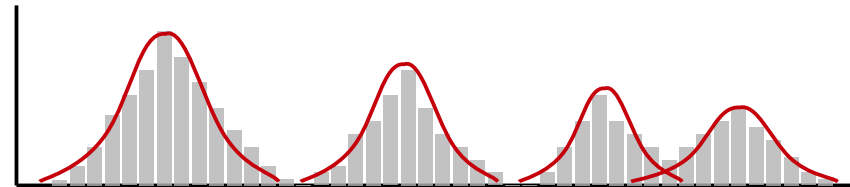
## Στατιστική εκτίμηση ηλικίας

ανάλυση της κατανομής μήκους (length–frequency analysis)

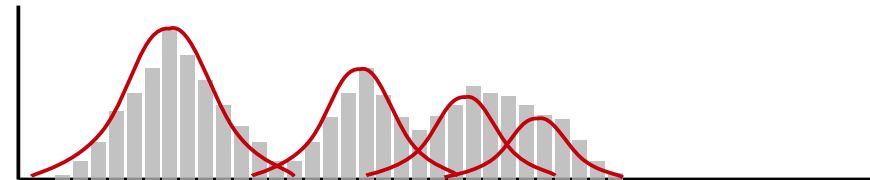
### Σχόλια (II)

- Η μέθοδος είναι ποιο αξιόπιστη αν υπάρχει σύντομη περίοδος ωοτοκίας και περιορισμένες επικαλύψεις ανάμεσα στις ηλικιακές κλάσεις.
- Μετά από κάποια ηλικία υπάρχουν έντονες επικαλύψεις που δυσχεραίνουν την εκτίμηση. Σε πολλές περιπτώσεις, η μέθοδος μπορεί να δώσει λάθος εκτιμήσεις, ή να είναι αδύνατο να εφαρμοστεί.

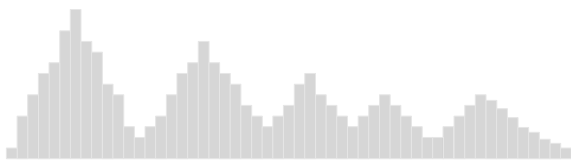
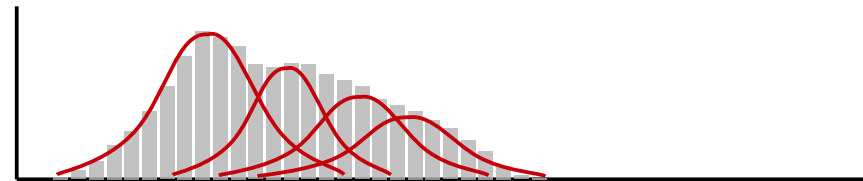
Σύντομη περίοδος ωοτοκίας και μικρή επικάλυψη ηλικιακών κλάσεων (καλές εκτιμήσεις)



Μέση διάρκεια περιόδου ωοτοκίας και μέση επικάλυψη (σφάλμα εκτίμησης σε μεγάλες ηλικίες)



Μακρά περίοδος ωοτοκίας (αδυναμία εκτίμησης)

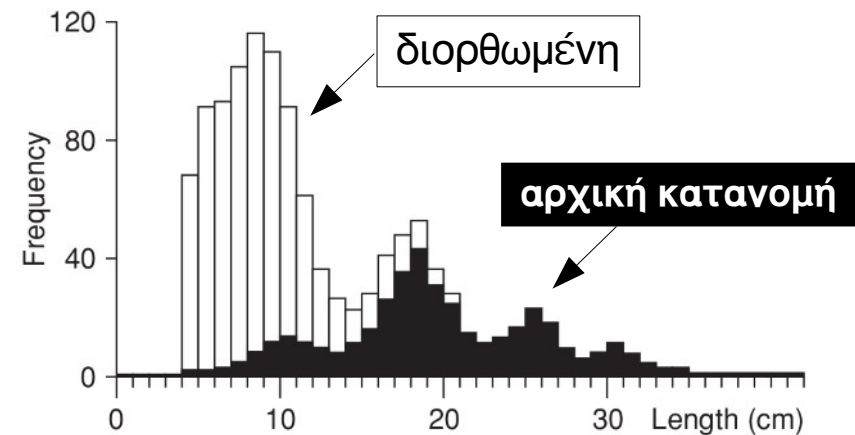


## Στατιστική εκτίμηση ηλικίας

ανάλυση της κατανομής μήκους (length–frequency analysis)

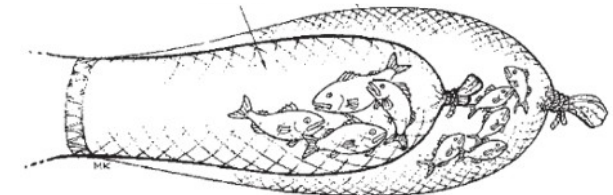
### Σχόλια (III)

- Λόγω της επιλεκτικότητας του εργαλείου, η παρατηρούμενη κατανομή μήκους του αλιεύματος μπορεί να μην αντιπροσωπεύει την πραγματική κατανομή.
- Στατιστικές εκτιμήσεις που λαμβάνονται από ένα ή λίγα δείγματα (ή από όλα ανάλογα με το εργαλείο), πρέπει να διορθωθούν κατάλληλα λαμβάνοντας υπόψη τη πιθανότητα σύλληψης ανά κλάση.

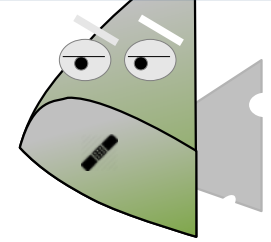


#### Περαιτέρω ανάγνωση:

Pitcher (2002). A bumpy old road: Size-based methods in fisheries assessment. In: P.J.B. Hart and J.D. Reynolds (Eds), Handbook of Fish Biology and Fisheries, Volume 2. pp.189–210.

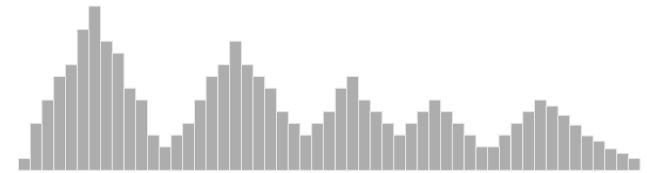


## Εκτίμηση ηλικίας



### Σύνοψη

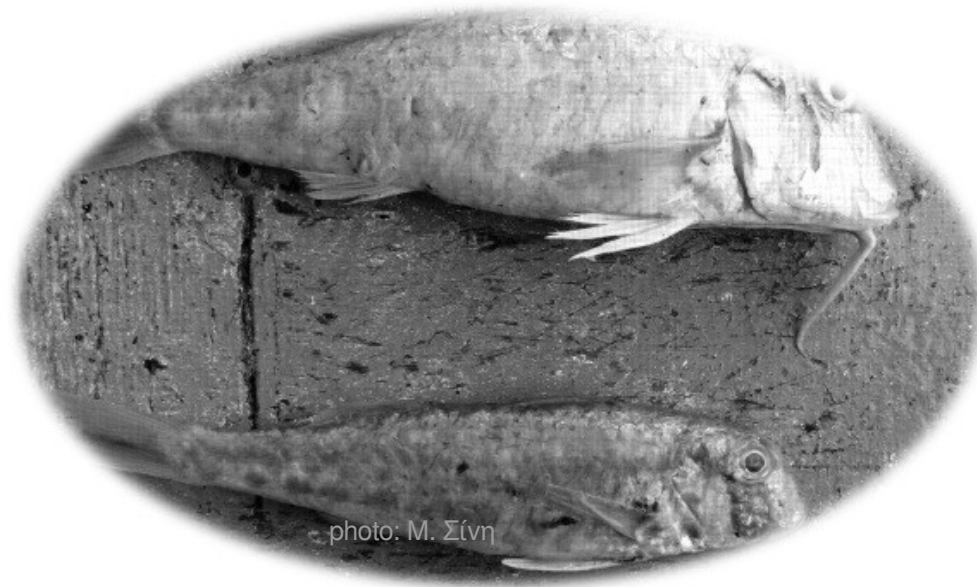
- Η ηλικιακή κατανομή είναι αποτέλεσμα της θνησιμότητας και της διαφορετικής γονιμότητας των διαδοχικών ηλικιακών κλάσεων, αλλά και της μεταβλητότητας αυτών των χαρακτηριστικών σε επίπεδο ατόμου.
- Οι μέθοδοι εκτίμησης ηλικίας μπορούν να δώσουν διαφορετικά αποτελέσματα ανά μέθοδο για τον ίδιο πληθυσμό.
- Η βιβλιογραφία έχει άφθονα παραδείγματα εσφαλμένης εκτίμησης ηλικίας που οδήγησαν σε λανθασμένες αποφάσεις.
- **Είναι επομένως ανάγκη να επαληθεύονται όλες οι μέθοδοι εκτίμησης.**  
Συνήθως, χρησιμοποιείται η μέθοδος της σήμανσης – επανασύλληψης για επαλήθευση.





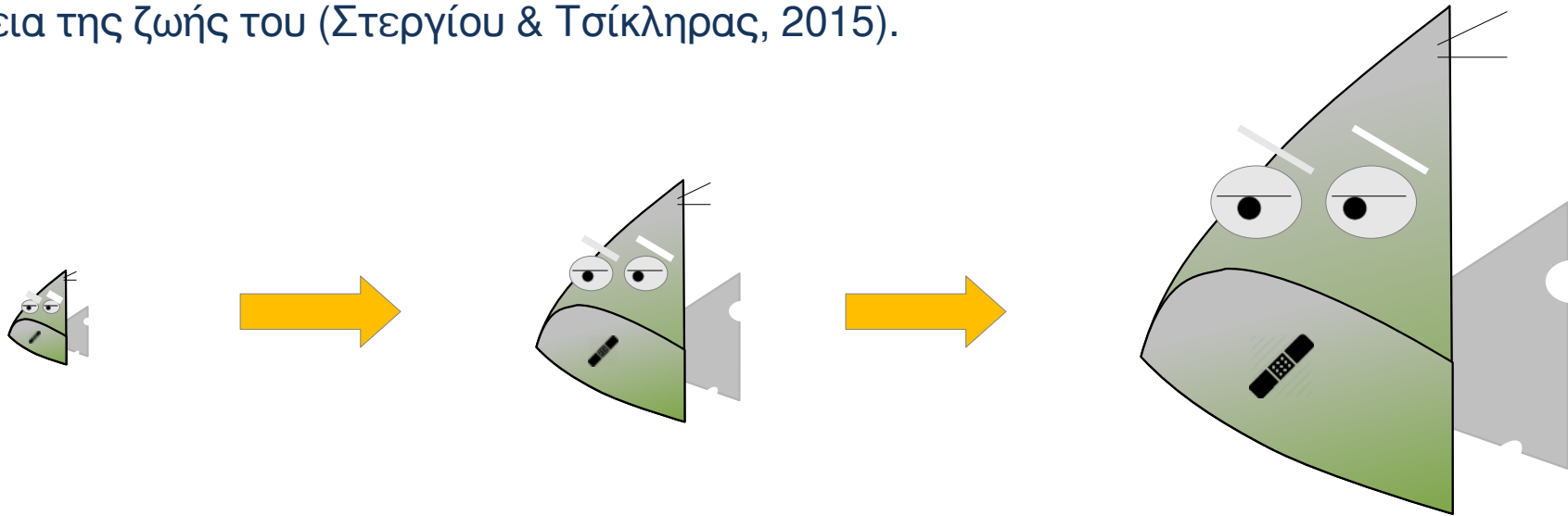
Η ανάπτυξη του ατόμου (growth) **1**

## Καμπύλη ανάπτυξης von Bertalanffy



## Αύξηση

**Αύξηση** (growth) είναι η μεταβολή του σωματικού μήκους ή βάρους ενός ψαριού στη διάρκεια της ζωής του (Στεργίου & Τσίκληρας, 2015).



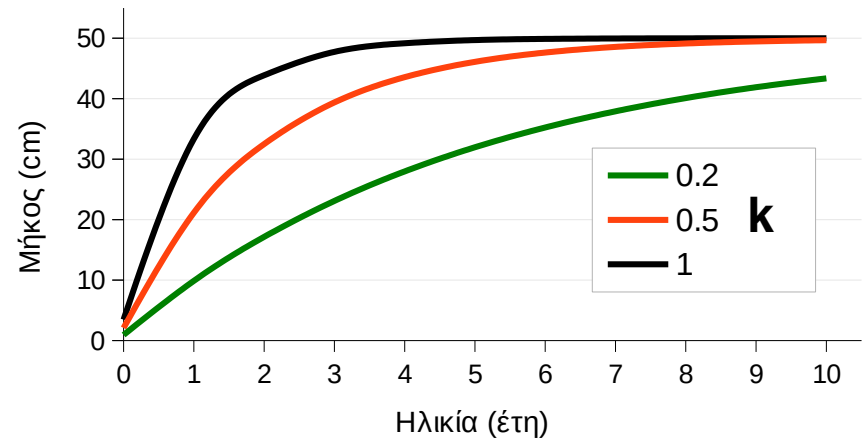
- Τα περισσότερα ζώα (θηλαστικά και πουλιά) αποκτούν το μέγιστο μέγεθός τους κατά την ενηλικίωσή τους.
- Τα ψάρια διαφέρουν: αυξάνουν σε μήκος και βάρος σε όλη τη διάρκεια της ζωής τους, με ρυθμό που μειώνεται με την ηλικία.

## Καμπύλη ανάπτυξης von Bertalanffy

Το πιο γνωστό μοντέλο ανάπτυξης είναι το μοντέλο **von Bertalanffy**:  
(δες **Παράρτημα** για εκτίμηση παραμέτρων)

$$L_t = L_\infty (1 - e^{-k(t - t_0)})$$

ισοδύναμη γραφή:  $L_t = L_\infty (1 - \exp[-k(t - t_0)])$



$t_0$  = θεωρητική ηλικία του ατόμου, στην οποία έχει μήκος μηδέν

$L_t$  = μήκος ατόμου ηλικίας  $t$ , συνήθως σε έτη

$L_\infty$  = μέγιστο δυνατό μήκος (cm)

$k$  = ο μέσος ρυθμός (έτη<sup>-1</sup>) με τον οποίο το είδος πλησιάζει το  $L_\infty$  του πληθυσμού (αναφέρεται και ως “ρυθμός αύξησης”)

παραμέτροι  
ανάπτυξης

Καθώς ο οργανισμός είναι μάλλον απίθανο να ακολουθεί την καμπύλη στο πρώιμο στάδιο της ζωής του, η καμπύλη συχνά τέμνει τον x-άξονα σε μια τιμή  $t_0$ , τυπικά ελάχιστα μικρότερη του μηδενός.

# Καμπύλη ανάπτυξης von Bertalanffy

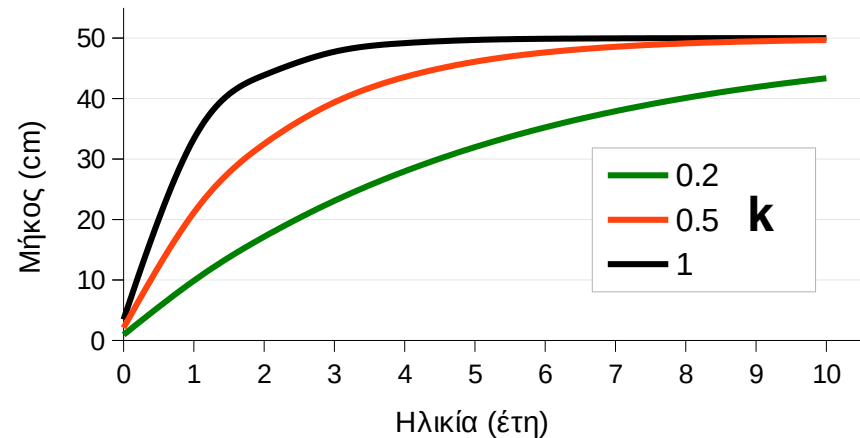
## Άσκηση 1

### Στόχος

- Υλοποίηση της καμπύλης ανάπτυξης von Bertalanffy στο Excel, και δημιουργία του σχήματος που φαίνεται παρακάτω (ίδιο  $L_{\infty}$ , με τρία διαφορετικά  $k$ ).

$$L_t = L_{\infty}(1 - e^{-k(t - t_0)})$$

ισοδύναμη γραφή:  $L_t = L_{\infty}(1 - \exp[-k(t - t_0)])$



### Μέθοδος

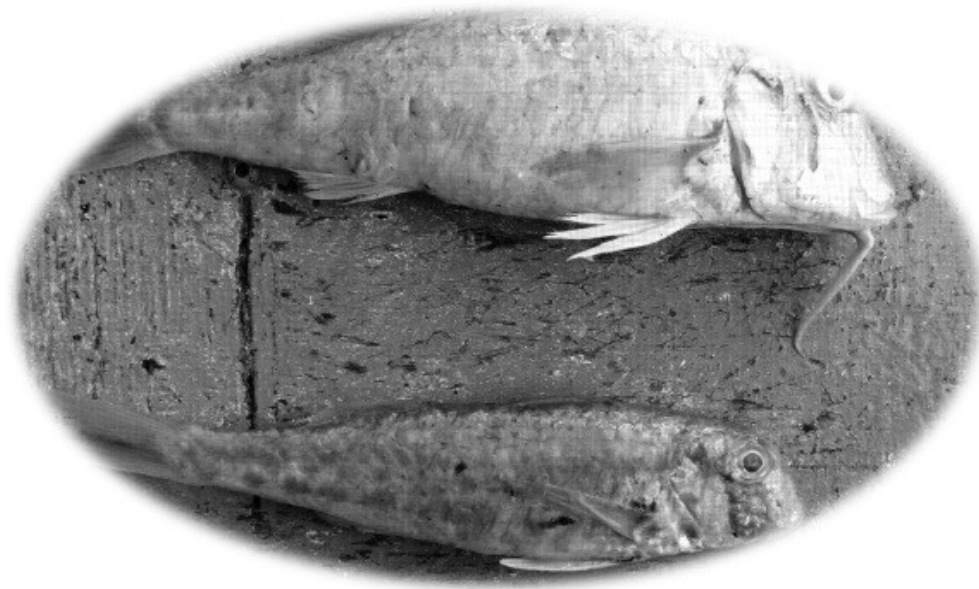
- Για την επίλυση δε χρειάζεστε κάποιο αρχείο δεδομένων, παρά μόνο να “διαβάσετε” την πληροφορία από το ανωτέρω γράφημα. Σύμφωνα με αυτό:
- Ορίστε το  $L_{\infty}$  σε ένα κελί, καθώς και τις τρεις τιμές του  $k$  σε τρία άλλα κελιά. Ως  $t_0$  μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το μηδέν, ή μία μικρή τιμή, π.χ.  $t_0 = -0.1$
- Δημιουργήστε μία στήλη με τις τιμές του χρόνου  $t$ .
- Σε μία νέα στήλη, γράψτε την εξίσωση von Bertalanffy, χρησιμοποιώντας το  $L_{\infty}$  και το πρώτο  $k$ .
- Επαναλάβετε για τα υπόλοιπα δύο  $k$ , και δημιουργήστε το γράφημα.





Η ανάπτυξη του ατόμου (growth) **2**

Εκτίμηση παραμέτρων σχέσης Μήκους-Βάρους (**L**ength-**W**eight)



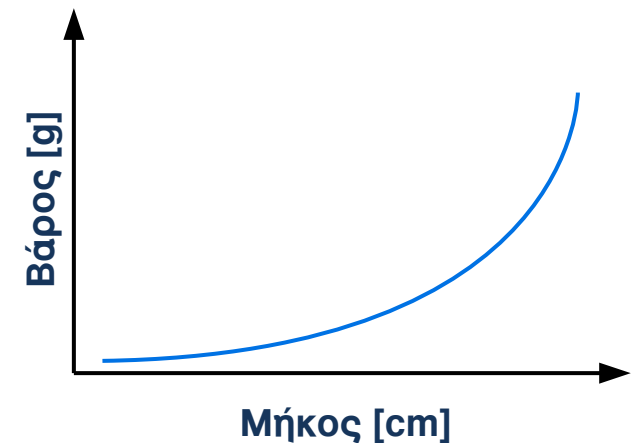
## Σχέση μήκους – βάρους

- Το μήκος και το βάρος των ψαριών συνδέονται στενά.
- Η σχέση αυτή περιγράφεται από την εξίσωση:

$$W = a \cdot L^b$$

Όπου:

- **W** είναι το βάρος του ψαριού, σε γραμμάρια [g].
  - **L** είναι το μήκος του ψαριού, σε εκατοστά [cm].
  - **a** και **b** είναι οι συντελεστές της σχέσης μήκους-βάρους.
- Η εξίσωση έχει αυτήν (την εκθετική) μορφή:



## Σχέση μήκους – βάρους

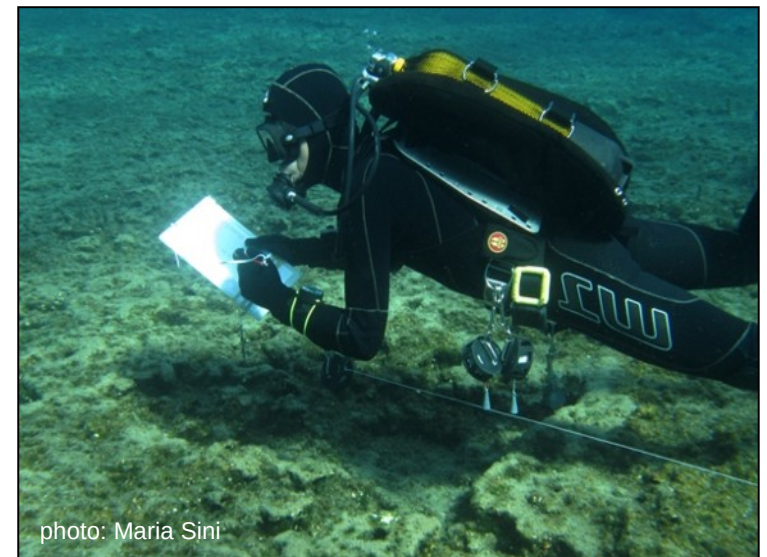
Η γνώση της είναι πολύ σημαντική, διότι:

- Δίνει πληροφορίες για τη φυσική κατάσταση του ψαριού (γενικώς, όσο βαρύτερο είναι ένα ψάρι σε συγκεκριμένο μήκος, τόσο καλύτερη η φυσική του κατάσταση).
- Επιτρέπει συγκρίσεις μεταξύ διαφορετικών γεωγραφικών περιοχών.
- Επιτρέπει την εκτίμηση βιομάζας όταν είναι γνωστές μόνο πληροφορίες του μήκους ατόμων και του συνολικού αριθμού τους.



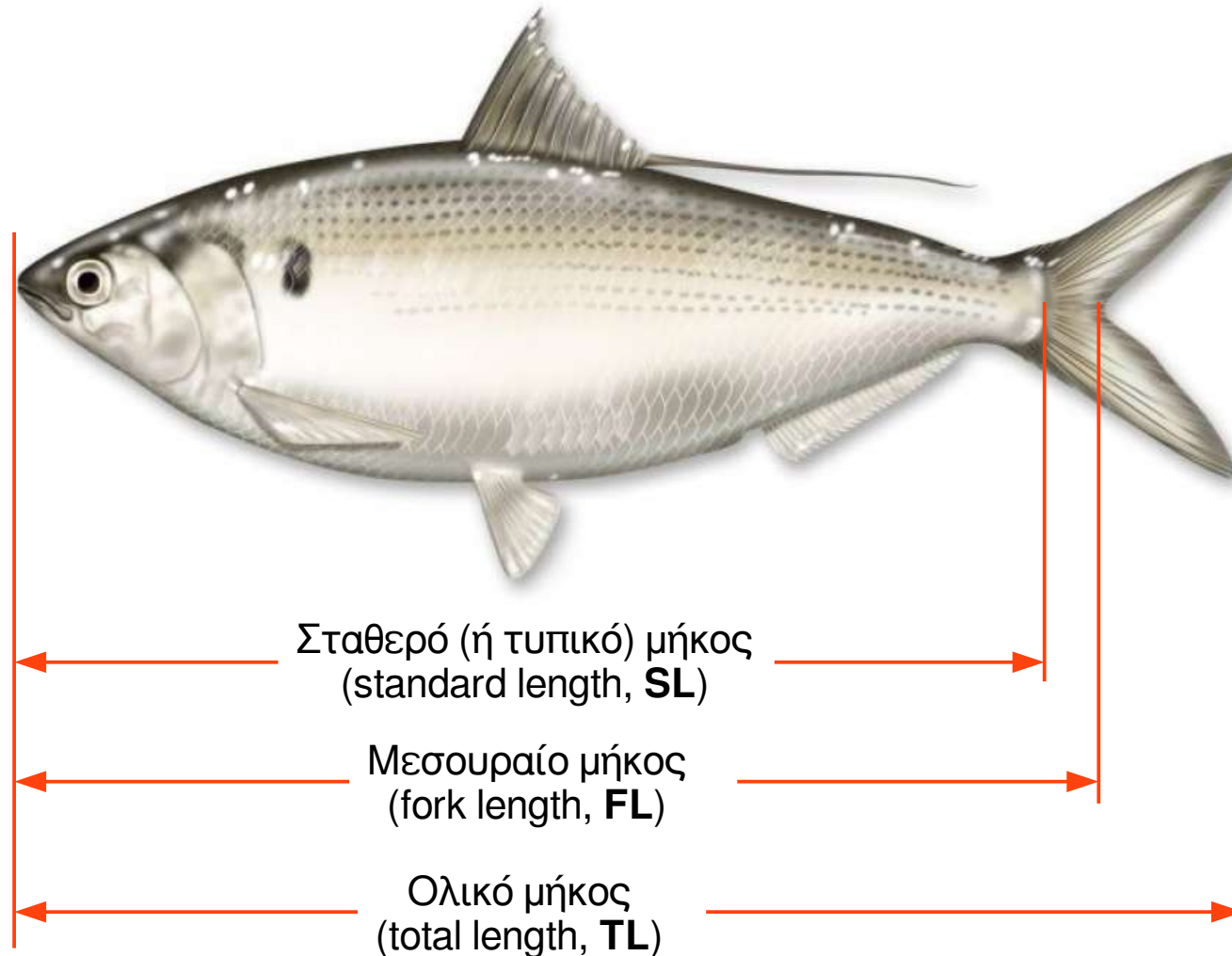
Π.χ. σε οπτικές υποβρύχιες δειγματοληψίες εκτίμησης ιχθυαφθονίας:

- Ο δύτες κινείται σε προκαθορισμένη διατομή (transect) και καταγράφει: (α) τα είδη ψαριών που βλέπει, (β) τον αριθμό τους, και (γ) το μήκος τους.
- Για την εκτίμηση βιομάζας ανά είδος, απαιτείται η μετατροπή των μετρήσεων <μήκους> σε <βάρους>.



## Μέτρηση μήκους ψαριού

- Υπάρχουν τρεις επιλογές.
- Αναφέρουμε πάντα την επιλογή που χρησιμοποιήσαμε.

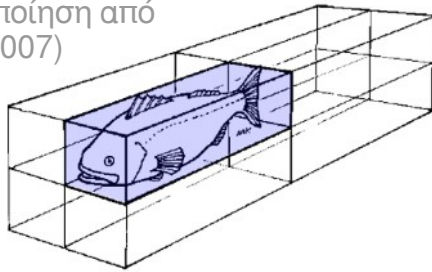




## Σχέση μήκους–βάρους

Αν όλες οι διαστάσεις διπλασιαστούν, ο όγκος αυξάνει κατά  $2^3$  φορές.

Τροποποίηση από King (2007)



Αν το άτομο αυξάνει **ισομετρικά** (με τον ίδιο ρυθμό σε όλες τις διαστάσεις), το βάρος του θα αυξάνει σε σχέση με τον όγκο. Δηλαδή, θα υπάρχει κυβική σχέση μεταξύ μήκους **L** και βάρους **W**. Στη γενική περίπτωση:

$$W_{[g]} = a L^b_{[cm]}$$

όπου **a** και **b** είναι οι συντελεστές του μοντέλου.

αλλομετρική ανάπτυξη ←

- **b=3**: ισομετρική–ομοιόμορφη ανάπτυξη (σπάνια στη φύση).
- **b<3**: μεγαλώνει ταχύτερα σε μήκος αντί σε βάρος (“λεπτό”).
- **b>3**: γίνεται βαρύτερο για το μήκος του (“παχύ”).

Ενδεικτικές τιμές

**a** ≈ 0.1



μικρά ψάρια με στρογγυλό σώμα (στρογγυλόμορφα)

**a** ≈ 0.01



ψάρια με υδροδυναμικό σχήμα (ατρακτόμορφα)

**a** ≈ 0.001



ψάρια με έντονα επίμηκες σώμα (μακρόστενα)



## Εκτίμηση συντελεστών της σχέσης μήκους–βάρους

$$W = a L^b$$



### Πώς;

- Συλλέγουμε δείγματα ψαριών.
- Μετρούμε το μήκος και το βάρος τους.

### Απαιτήσεις:

- Μεγάλο μέγεθος δείγματος ( $N \geq 100$  άτομα).
  - Το δείγμα πρέπει να περιέχει τόσο μικρά, όσο και μεγάλα, άτομα.
  - Αναφορά ελάχιστων/μέγιστων τιμών μήκους που μετρήθηκαν,
  - Αναφορά του  $N$  (μέγεθος δείγματος),
  - Αναφορά της περιοχής μελέτης.
  - Αναφορά του μήκους που χρησιμοποιήθηκε (SL, FL, TL).
- 
- Μία συχνά χρησιμοποιούμενη μέθοδος εκτίμησης των συντελεστών  $a$  και  $b$  είναι η γραμμική παλινδρόμηση (linear regression) μεταξύ των λογαριθμημένων  $L$  και  $W$ .





# Εκτίμηση συντελεστών της σχέσης μήκους–βάρους

συνοπτική περιγραφή της επίλυσης

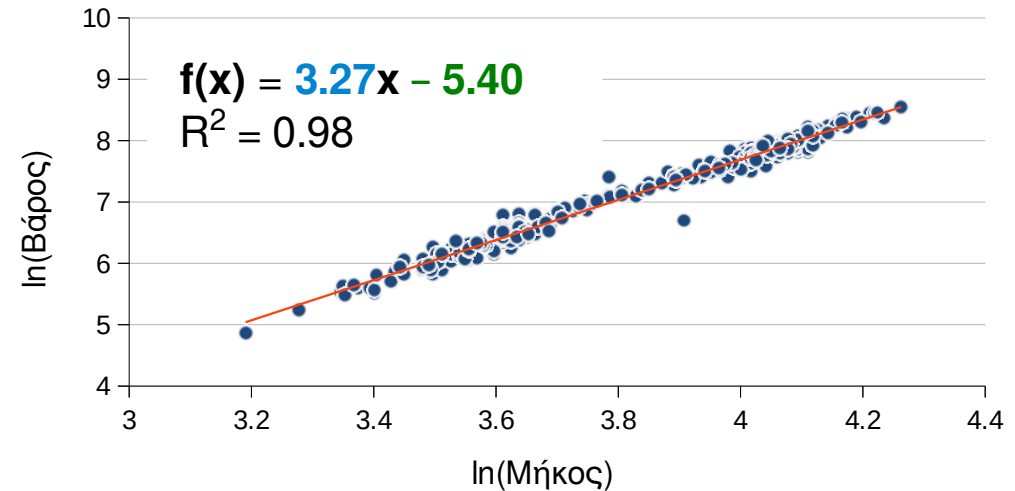
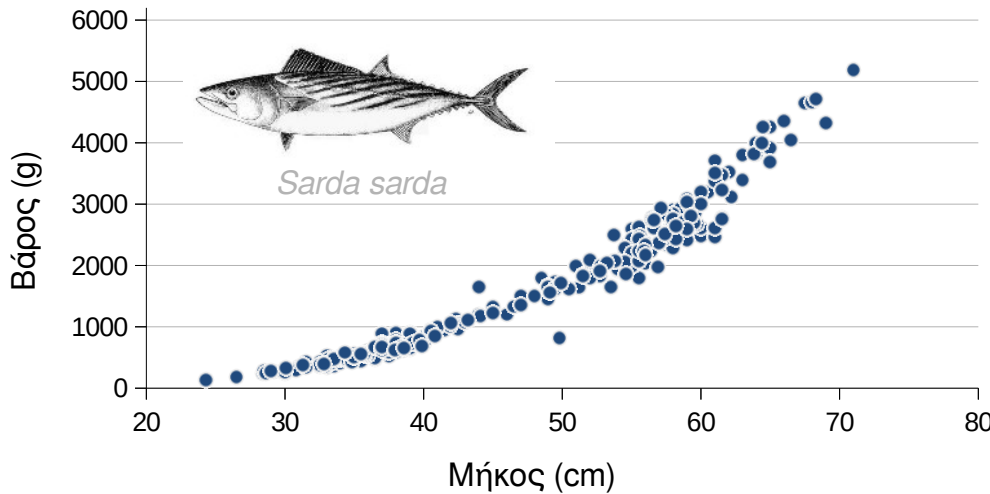
$$W_{[g]} = a L^b_{[cm]}$$

λογαρίθμηση  
➔

$$\ln(W) = \ln(a) + b \ln(L)$$

↓ γραμμική παλινδρόμηση (εκτίμηση σταθεράς **a** και κλίσης **b**)

Μετρήσεις μήκους (L) και βάρους (W)



Σχέση μήκους–βάρους παλαμίδα

$$W = 0.0045 L^{3.27}$$

N = 272, R<sup>2</sup> = 0.98, FL.  
L<sub>min</sub> = 24.3 cm, L<sub>max</sub> = 71 cm.

←

↓ αντιλογάριθμος του **a**

$$a = \exp(-5.40) = 0.0045$$

$$b = 3.27$$



# Αν δεν έχεις μεγάλο δείγμα μετρήσεων μήκους-βάρους ή αν έχεις μόνο δεδομένα μήκους, τι κάνεις;

1. Συμβουλευέσαι τη βιβλιογραφία (δες π.χ. Moutopoulos & Stergiou, 2002).
2. Συμβουλευέσαι τη **Fishbase**: [www.fishbase.org](http://www.fishbase.org)



**Boops boops** (Linnaeus, 1758)  
Bogue

Upload your photos and videos  
Pictures | Stamps, Coins | Google image



*Boops boops*

Picture by Pontes, M.

Add your observation in Fish Watcher  
Native range | Point map | Year 2100



*Boops boops* AquaMaps Data sources: GBIF OBIS

Συντελεστές σχέσης μήκους-βάρους ανά χώρα και περιοχή (π.χ. Ελλάδα - Κυκλάδες)

Year	Country	Area	Species	Length (cm)	Weight (g)	Length-weight relationship	Source
1961	Greece	Cyprus	Boops boops	17.0	4.0	$W = 0.0001L^{3.15}$	Stevens 1961
1971	Greece	Cyprus	Boops boops	17.0	4.0	$W = 0.0001L^{3.15}$	Stevens 1971
1981	Greece	Cyprus	Boops boops	17.0	4.0	$W = 0.0001L^{3.15}$	Stevens 1981
1991	Greece	Cyprus	Boops boops	17.0	4.0	$W = 0.0001L^{3.15}$	Stevens 1991
2001	Greece	Cyprus	Boops boops	17.0	4.0	$W = 0.0001L^{3.15}$	Stevens 2001

Γώπα

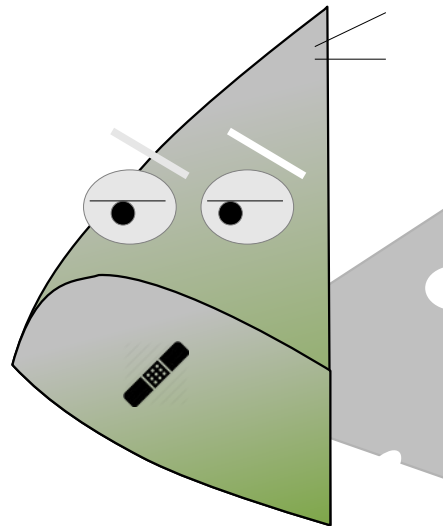
### More information

- Countries
- FAO areas
- Ecosystems
- Occurrences
- Introductions
- Stocks
- Ecology
- Diet
- Food items
- Food consumption
- Ration
- Common names
- Synonyms
- Metabolism
- Predators
- Ecotoxicology
- Reproduction
- Maturity
- Spawning
- Fecundity
- Eggs
- Egg development
- Age/Size
- Growth
- Length-weight
- Length-length
- Length-frequencies
- Morphometrics
- Morphology
- Larvae
- Larval dynamics
- Recruitment
- Abundance
- References
- Aquaculture
- Aquaculture profile
- Strains
- Genetics
- Allele frequencies
- Heritability
- Diseases
- Processing
- Mass conversion
- Vision
- Collaborators
- Pictures
- Stamps, Coins
- Sounds
- Ciguatera
- Speed
- Swim. type
- Gill area
- Otoliths
- Brains





## Παράρτημα





# Εκτίμηση των παραμέτρων ανάπτυξης μοντέλου von Bertalanffy

στοιχεία ηλικίας και μήκους | γραφική μέθοδος Ford – Walford

Από την von Bertalanffy για  $t_0 = 0$ :

$$L_t = L_\infty (1 - e^{-kt})$$

το ίδιο ισχύει για  $L_{t+1}$ :

$$L_{t+1} = L_\infty (1 - e^{-k(t+1)})$$

Με μια σειρά αλγεβρικών μετασχηματισμών..

$$L_{t+1} - L_t = \dots \quad \searrow$$

Γραμμική σχέση μεταξύ  $L_t$  και  $L_{t+1}$

$$L_{t+1} = L_\infty (1 - e^{-k}) + L_t e^{-k}$$

$$y = a + xb$$

$$k = -\ln(b)$$

$$L_\infty = a / (1 - b)$$

δεν παρέχει εκτίμηση του  $t_0$

Επομένως, μπορούμε να σχεδιάσουμε το μήκος  $L_t$  στο χρόνο  $t$  ως προς το μήκος  $L_{t+1}$  στο χρόνο  $t+1$ , και να εκτιμήσουμε τη σταθερά  $a$  και κλίση  $b$  μέσω γραμμικής παλινδρόμησης (linear regression).

Πώς όμως αποκτούμε τα  $L_t$  και  $L_{t+1}$ ;



# Εκτίμηση των παραμέτρων ανάπτυξης μοντέλου von Bertalanffy

στοιχεία ηλικίας και μήκους | γραφική μέθοδος Ford – Walford

Από την von Bertalanffy για  $t_0 = 0$ :

$$L_t = L_\infty (1 - e^{-kt})$$

το ίδιο ισχύει για  $L_{t+1}$ :

$$L_{t+1} = L_\infty (1 - e^{-k(t+1)})$$

Με μια σειρά αλγεβρικών μετασχηματισμών..

$$L_{t+1} - L_t = \dots \quad \searrow$$

Γραμμική σχέση μεταξύ  $L_t$  και  $L_{t+1}$

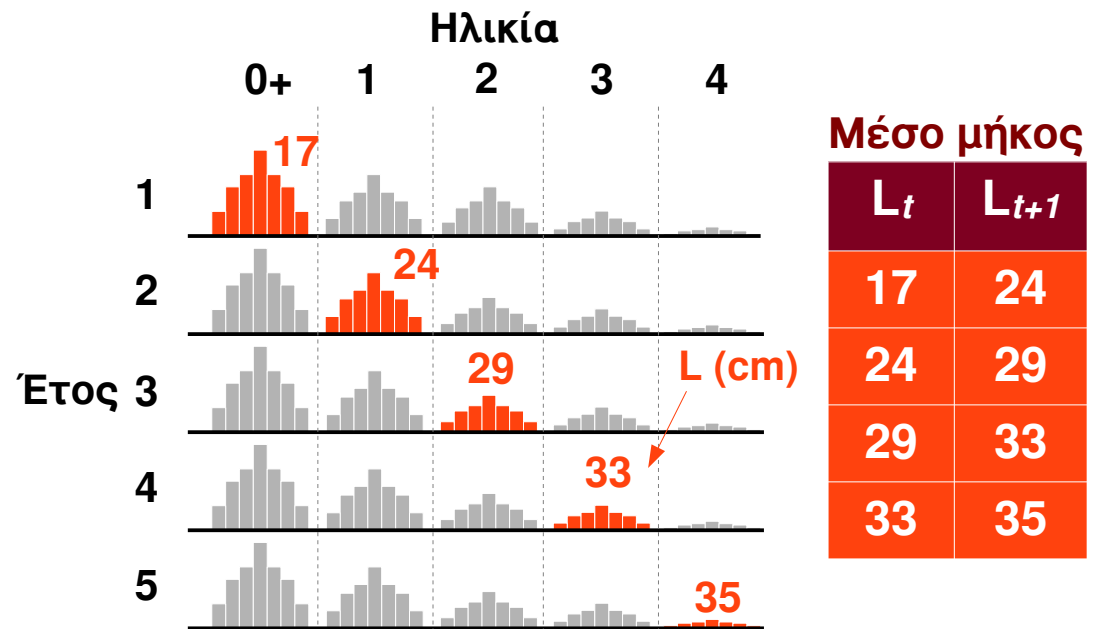
$$L_{t+1} = L_\infty (1 - e^{-k}) + L_t e^{-k}$$

$$y = a + xb$$

$$k = -\ln(b)$$

$$L_\infty = a / (1 - b)$$

Παρακολουθούμε την ίδια ηλικιακή κλάση καθώς αυτή μεγαλώνει



Ο αριθμός ατόμων ανά κοόρτη μειώνεται λόγω της θνησιμότητας.

- Τα διαδοχικά χρονικά διαστήματα πρέπει να ισαπέχουν (π.χ. κάθε 1 έτος).
- Η μέθοδος δεν εκτιμά το  $t_0$ .



# Εκτίμηση των παραμέτρων ανάπτυξης μοντέλου von Bertalanffy

στοιχεία ηλικίας και μήκους | γραφική μέθοδος Ford – Walford

Από την von Bertalanffy για  $t_0 = 0$ :

$$L_t = L_\infty (1 - e^{-kt})$$

το ίδιο ισχύει για  $L_{t+1}$ :

$$L_{t+1} = L_\infty (1 - e^{-k(t+1)})$$

Με μια σειρά αλγεβρικών μετασχηματισμών..

$$L_{t+1} - L_t = \dots$$

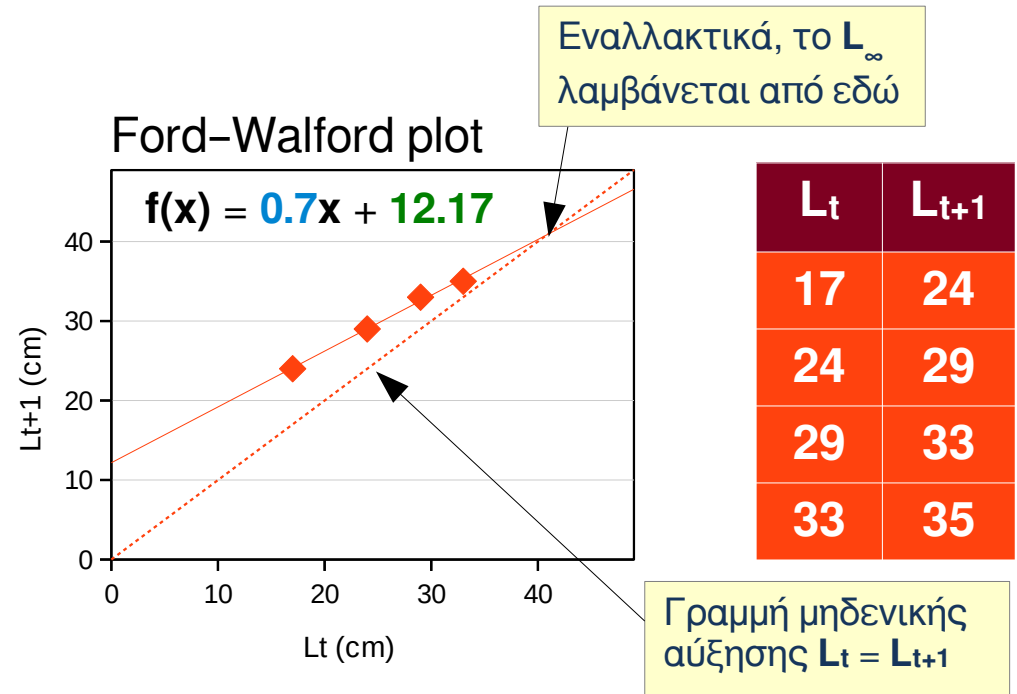
Γραμμική σχέση μεταξύ  $L_t$  και  $L_{t+1}$

$$L_{t+1} = L_\infty (1 - e^{-k}) + L_t e^{-k}$$

$$y = a + xb$$

$$k = -\ln(b)$$

Σχεδιάζουμε το μέσο μήκος της μιας χρονιάς με αυτό της επόμενης



$$k = -\ln(0.7) = 0.35 \text{ yr}^{-1}$$

$$L_\infty = 12.17 / (1 - 0.7) = 40.56 \text{ cm}$$

\*οι παράμετροι  $a$  και  $b$  έχουν στρογγυλοποιηθεί



# Εκτίμηση των παραμέτρων ανάπτυξης μοντέλου von Bertalanffy

στοιχεία ηλικίας και μήκους | γραφική μέθοδος Ford – Walford

Από την von Bertalanffy για  $t_0 = 0$ :

$$L_t = L_\infty (1 - e^{-kt})$$

το ίδιο ισχύει για  $L_{t+1}$ :

$$L_{t+1} = L_\infty (1 - e^{-k(t+1)})$$

Με μια σειρά αλγεβρικών μετασχηματισμών..

$$L_{t+1} - L_t = \dots \quad \searrow$$

Γραμμική σχέση μεταξύ  $L_t$  και  $L_{t+1}$

$$L_{t+1} = L_\infty (1 - e^{-k}) + L_t e^{-k}$$

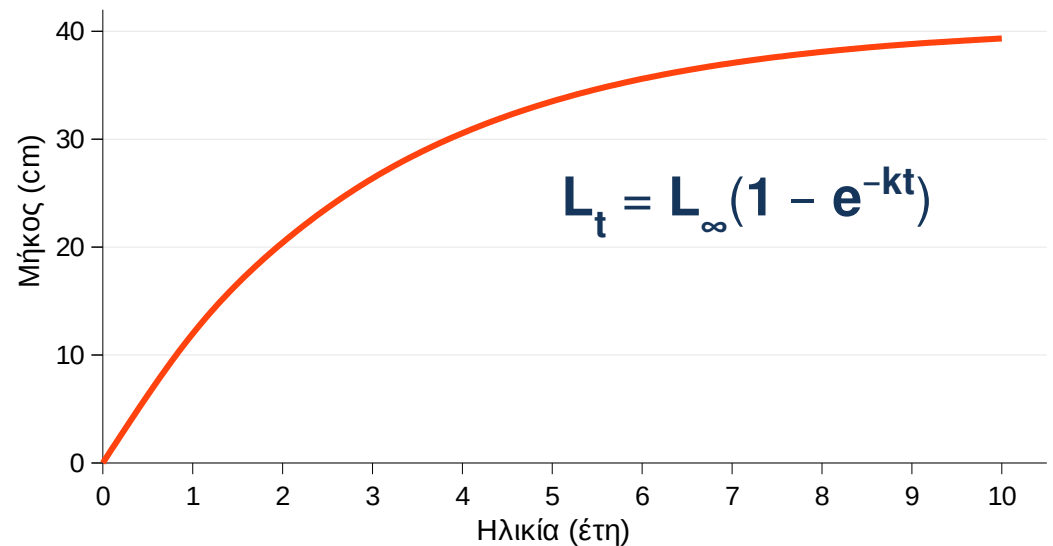
$$y = a + xb$$

$$k = -\ln(b)$$

$$L_\infty = a / (1 - b)$$

## Μοντέλο ανάπτυξης

$$k = 0.35 \text{ yr}^{-1} \quad | \quad L_\infty = 40.56 \text{ cm}$$



Αν ξέρουμε ότι π.χ. η νεότερη κοόρτη ( $L = 17 \text{ cm}$ ) γεννήθηκε 1.5 χρόνο πριν την μέτρησή της (ξέρουμε το χρόνο ωοτοκίας), λύνουμε την von Bertalanffy ως προς  $t_0$  (στο τρέχον παράδειγμα είναι μηδέν) και βελτιώνουμε το μοντέλο:

$$t_0 = t + (1/k)(\ln[(L_\infty - L_t)/L_\infty])$$

