ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

Θεωρία Υπολογισμού

Σημειώσεις - Αναγωγές

Αλέξιος Καπόρης

Τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών και Επικοινωνιακών Συστημάτων

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Ανάγω το πρόβλημα A στο πρόβλημα B

Διαισθητικά, ***ανάγω** το πρόβλημα A στο B,* σχηματικά **A®B**, σημαίνει **λύνω** το **A** **διαμέσου** της επίλυσης του **B** (και όχι το αντίστροφο).

Άσκηση 1

Έστω ότι το πρόβλημα **B** είναι επιλύσιμο από μια μηχανή Turing. Έστω ότι το πρόβλημα **A** ανάγετε στο **B.** Τότε, είναι το **A** επιλύσιμο;

Λύση

Αφού το **A** ανάγετε στο **B**, τότε διαισθητικά λύνω το **A** απλώς λύνοντας το **B**. Επειδή το **B** είναι επιλύσιμο, για κάθε είσοδο, τότε και το **A** είναι επιλύσιμο.

Άσκηση 2

Ανάγω ένα πρόβλημα **A** στο **B.** Ανάγω το **B** στο **C.** Το **C** είναι επιλύσιμο. Τότε, είναι το **A** επιλύσιμο;

Λύση

Λύνω το **A** λύνοντας το **B**, το οποίο μπορώ να το λύσω, με τη σειρά του, λύνοντας το **C**. Συνοψίζοντας, τελικά λύνω το **A** λύνοντας το **C**. Όμως, μπορώ να λύσω το **C**; Ναι, διότι το **C** είναι επιλύσιμο, για κάθε είσοδο, άρα και το **A** είναι επιλύσιμο (όπως φυσικά και το **B**).

Άσκηση 3

Έστω ότι το πρόβλημα **B** είναι ΜΗ επιλύσιμο. Έστω ένα *οποιοδήποτε* πρόβλημα **A.** Έστω ότι ανάγω το **B** στο **A.** Τότε, είναι το **A** επιλύσιμο; Δείτε την απάντηση εδώ.

Λύση

Το **A** είναι ένα άγνωστο πρόβλημα που δεν γνωρίζουμε αν είναι επιλύσιμο ή όχι. Με τη χρήση αναγωγής θέλουμε να βγάλουμε συμπέρασμα αν το **A** είναι επιλύσιμο ή όχι.

Ξέρουμε ότι το **B** (μη επιλύσιμο) ανάγετε στο **A** (άγνωστο). Συνεπώς, το μη επιλύσιμο **B** λύνετε αν υποθέσουμε ότι μπορούμε να λύσουμε το **A**. Αυτό σημαίνει ότι δεν μπορούμε να λύσουμε το **A** (γιατί αλλιώς θα λύναμε και το **B**, άτοπο διότι είναι μη επιλύσιμο).

Άσκηση 4

Έστω ότι το πρόβλημα **B** είναι αναγνωρίσιμο από μια μηχανή Turing. Ανάγω ένα *οποιοδήποτε* πρόβλημα **Α** στο **Β.** Τότε, είναι το **Α** αναγνωρίσιμο;

Λύση

Περίπτωση 1^{η}: Έστω ότι υπάρχει Turing υπολογίσιμη συνάρτηση R: Σ*®Σ* ώστε

x **ÎA** Û R(x) **ÎB**

Αφού το Β είναι αναγνωρίσιμο, τότε υπάρχει μηχανή Turing M_B που για κάθε x **ÎBÞ** M_B(x)= ΝΑΙ, ενώ για κάθε x **ÏB Þ** M_B(x)= **-**.

Για να δείξω ότι το Α είναι αναγνωρίσιμο πρέπει να περιγράψω μια μηχανή Turing M_A ώστε: για κάθε x **ÎAÞ** M_A(x)= ΝΑΙ, ενώ για κάθε x **ÏA Þ** M_A(x)= **-**.

Θα κατασκευάσω την M_A εκμεταλλευόμενος την ιδιότητα x **ÎA** Û R(x) **ÎB** της αναγωγής R και την μηχανή M_B.

Σε κάθε είσοδο xÎ Σ* η M_A εξομοιώνει την λειτουργία της M_B με είσοδο R(x), δηλαδή:

M_A(x)= M_B(R(x))

Εύκολα διαπιστώνουμε:

- για κάθε x **ÎAÞ** R(x) **ÎB** (λόγω αναγωγής) **Þ** M_B(R(x))= ΝΑΙ, και επειδή η M_A εξομοιώνει την λειτουργία της M_B με είσοδο R(x), τελικά έχουμε

  για κάθε x **ÎAÞ** M_A(x)= M_B(R(x))= ΝΑΙ
- για κάθε x **ÏA Þ** R(x) Ï **B** (λόγω αναγωγής) **Þ** M_B(R(x))= **-**, και επειδή η M_A εξομοιώνει την λειτουργία της M_B με είσοδο R(x), τελικά έχουμε

  για κάθε x **ÏAÞ** M_A(x)= M_B(R(x))= **-**

Περίπτωση 2^{η}: Έστω ότι η **Α** ανάγετε *μόνο* κατά Turing στην **Β**. Δηλαδή ΔΕΝ υπάρχει Turing υπολογίσιμη συνάρτηση R: Σ*®Σ* ώστε

x **ÎA** Û R(x) **ÎB**

Το μόνο που ξέρουμε, σε αυτή την περίπτωση, είναι ότι μπορούμε να λύσουμε το **Α** αν λύσουμε το **Β**.

Με χρήση αντιπαραδείγματος, σε αυτή την περίπτωση, θα δείξουμε ότι το **Α** ΔΕΝ είναι πάντα αναγνωρίσιμο.

Ας συγκεκριμενοποιήσουμε το πρόβλημα **Β** ως το πρόβλημα της αποδοχής της εισόδου:

A_{TM}= {<M, x> | M(x)= ΝΑΙ}

Είναι γνωστό ότι το A_{TM} είναι αναγνωρίσιμο (από την καθολική μηχανή Turing). Ας συγκεκριμενοποιήσουμε το αρχικό πρόβλημα **Α** ως το *συμπληρωματικό* A^c_{TM} του $A_{TM.}$ Είναι γνωστό ότι το A^c_{TM} ανάγεται κατά Turing στο A_{TM} και αντίστροφα. Αυτό ισχύει για οποιοδήποτε ζεύγος συμπληρωματικών γλωσσών. Διότι αν λύσουμε οποιαδήποτε γλώσσα από τις δύο, τότε λύνουμε αυτόματα και την συμπληρωματική της (αντιστρέφοντας απλώς τις απαντήσεις του αλγορίθμου που λύνει την μια γλώσσα).

Η κρίσιμη παρατήρηση είναι ότι το A^c_{TM} ΔΕΝ είναι αναγνωρίσιμο (παρόλο που ανάγεται κατά Turing στο αναγνωρίσιμο A_{TM}). Διότι αν υποθέσουμε ότι είναι το A^c_{TM} αναγνωρίσιμο, επειδή και το συμπλήρωμα του A_{TM} είναι αναγνωρίσιμο, τότε θα ήταν επιλύσιμο το A_{TM} το οποίο είναι άτοπο.

Άσκηση 5

Έστω ότι το πρόβλημα **B** είναι αναγνωρίσιμο από μια μηχανή Turing. Ανάγω το συμπληρωματικό του πρόβλημα $\mathbf{B^c}$ στο **B.** Τότε, είναι το **B** επιλύσιμο;

Λύση

Όπως είδαμε και στην προηγούμενη Άσκηση, η πρόταση αυτή ισχύει *μόνο* αν υπάρχει Turing υπολογίσιμη συνάρτηση R: Σ*®Σ* ώστε

x Î $\mathbf{B^c}$ Û R(x) Î**B**

Δηλαδή, όπως είδαμε και με το αντιπαράδειγμα που εξετάσαμε εκεί, δεν ισχύει σε περίπτωση που έχουμε *Αναγωγή κατά Turing*.

Άσκηση 6

Έστω ότι η **A** ανάγεται (μέσω Turing υπολογίσιμης συνάρτησης) στην **B**. Έστω ότι η **A** δεν είναι αναγνωρίσιμη. Να δείξετε ότι και η **B** δεν είναι αναγνωρίσιμη.

Λύση

Σε προηγούμενη Άσκηση, στην $1^η$ Περίπτωση της λύσης, είδαμε ότι ισχύει η πρόταση:

Π: "ΑΝ η **A** ανάγεται (μέσω Turing υπολογίσιμης συνάρτησης) στην **B** και αν η **B** είναι αναγνωρίσιμη ΤΟΤΕ η A είναι αναγνωρίσιμη".

Το ζητούμενο της παρούσας άσκησης προκύπτει εύκολα με *αντιθετοαντιστροφή* της άνω πρότασης **Π.**

Θυμίζουμε ότι αν έχουμε την αληθή λογική πρόταση **P1 Þ P2** τότε είναι επίσης αληθής η *αντιθετοαντίστροφη* πρόταση: $\mathbf{P2^c}$ **Þ** $\mathbf{P1^c}$, όπου $\mathbf{P1^c}$**,**$\mathbf{P2^c}$ είναι οι αρνήσεις των **P1, P2**.

Άσκηση 6

Το πρόβλημα της ανάλυσης ενός φυσικού αριθμού N σε γινόμενο πρώτων παραγόντων (**factoring**) είναι μεγάλης υπολογιστικής δυσκολίας και, λόγω της δυσκολίας του, έχει βρει πληθώρα εφαρμογών στην *Κρυπτογραφία*. Μέχρι χθες, δεν είχε βρεθεί αλγόριθμος που με είσοδο αριθμό με *n* ψηφία να τον αναλύει σε γινόμενο πρώτων παραγόντων σε χρόνο *O(n)*. Ακριβέστερα, ο καλύτερος αλγόριθμος απαιτούσε εκθετικό χρόνο ως προς το μέγεθος *n*, δηλαδή, είχε πολυπλοκότητα $\Omega(e^n)$. Σήμερα, ένας επιστήμονας ισχυρίζεται ότι κατάφερε να ανάγει το **factoring** σε ένα πρόβλημα **Ψ** γραμμικής πολυπλοκότητας χρόνου. Δηλαδή, κάθε στιγμιότυπο μεγέθους *n* του **Ψ** λύνεται σε χρόνο *O(n)*. Η αναγωγή αυτή σημαίνει ότι το και **factoring** λύνεται σε χρόνο *O(n),* όπως λύνεται το πρόβλημα **Ψ**;

Λύση

Από την εκφώνηση, βγαίνει το συμπέρασμα ότι ο επιστήμονας κατασκεύασε μια αναγωγή ως Turing υπολογίσιμη συνάρτηση R: Σ*®Σ* ώστε

x Î**factoring** Û R(x) Î**Ψ**

όπου «x Î**factoring**» σημαίνει «ο x αναλύθηκε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων» και «R(x) Î**Ψ**» σημαίνει ότι «ο μετασχηματισμένος αριθμός R(x) του αριθμού x επεξεργάστηκε με τον γραμμικό αλγόριθμο του προβλήματος **Ψ** με τρόπο ώστε να προκύψει η ανάλυση του x σε πρώτους παράγοντες».

Ξέρουμε ότι η επεξεργασία R(x) Î**Ψ** απαιτεί χρόνο *O(n)*. Όμως, είναι δυνατόν ο χρόνος που απαιτεί η Turing υπολογίσιμη συνάρτηση R για να μετασχηματίσει το x σε R(x) να είναι εκθετικός ως προς *n*. Συνεπώς, το factoring δεν λύθηκε σε χρόνο *O(n)*.

Άσκηση 7

Έστω η γλώσσα **A** = $\{0^n1^n \mid n \geq 0\}$ που είναι γνωστό ότι ΔΕΝ είναι κανονική. Έστω η κανονική γλώσσα **B**= {x Î$\{0,1\}^*$ | x= 1}. Αιτιολογήστε πλήρως αν μπορούμε ή όχι να ανάγουμε με Turing υπολογίσιμη συνάρτηση τη γλώσσα **A** στη γλώσσα **B**. Στη περίπτωση που το συμπέρασμα είναι ότι η αναγωγή της **A** στη **B** είναι δυνατή, αυτό μας οδηγεί στο «παράδοξο» συμπέρασμα ότι η γλώσσα **A** είναι κανονική;

Λύση

Είναι εύκολο να κατασκευάσουμε μια Μηχανή Turing $M_{A\rightarrow B}$ που με είσοδο οποιαδήποτε λέξη x του αλφαβήτου {0,1} αποφασίζει αν η λέξη x ανήκει στην γλώσσα **A** ή όχι.
Συνεπώς:

- Αν η λέξη x ανήκει στην γλώσσα **A**, τότε $M_{A\rightarrow B}$ (x) = 1.
- Αν η λέξη x ΔΕΝ ανήκει στην γλώσσα **A**, τότε $M_{A\rightarrow B}$ (x) = 0.

Η $M_{A\rightarrow B}$ μπορεί να ιδωθεί ως μια Turing υπολογίσιμη συνάρτηση από το Σ* στο {0,1}, που μετασχηματίζει κάθε στιγμιότυπο του προβλήματος **A** σε ισοδύναμο στιγμιότυπο του προβλήματος **B**.

Έτσι, κάθε στιγμιότυπο x Î{0, 1}* του προβλήματος που αφορά την γλώσσα **A**, μετασχηματίζεται, με την Turing Μηχανή $M_{A\rightarrow B}$, στο στιγμιότυπο $M_{A\rightarrow B}$ (x) Î{1, 0}.

Το μετασχηματισμένο στιγμιότυπο $M_{A\rightarrow B}$ (x) του αρχικού προβλήματος που αφορά τη γλώσσα **A**, δίνεται ως είσοδος στο πεπερασμένο αυτόματο M_B (θυμίζουμε ότι M_B(x)=

ΝΑΙ αν και μόνο αν x= 1), που αποφασίζει στιγμιότυπα που αφορούν τη κανονική γλώσσα **B**.

Καταλήγουμε ότι:

- Αν $M_B[M_{A \to B}$ (x)]= ΝΑΙ, τότε $M_{A \to B}$ (x)= 1, και άρα (εκ κατασκευής της Μηχανής Turing $M_{A \to B}$) το x ανήκει στην **A**.
- Αν $M_B[M_{A \to B}$ (x)]= ΟΧΙ, τότε $M_{A \to B}$ (x)= 0, καί άρα (εκ κατασκευής της Μηχανής Turing $M_{A \to B}$) το x ΔΕΝ ανήκει στην **A**.

Ο λόγος που, λόγω της αναγωγής, δεν οδηγούμαστε στο παράδοξο ότι η **A** είναι κανονική είναι επειδή η $M_{A \to B}$ είναι μια Turing Μηχανή που ΔΕΝ είναι πεπερασμένο αυτόματο. Το ότι η $M_{A \to B}$ δεν είναι δυνατόν να είναι πεπερασμένο αυτόματο το γνωρίζουμε από το Λήμμα της Άντλησης.

Ασκήσεις

Ο κοινός στόχος των ασκήσεων είναι να αποδείξουν, με χρήση αναγωγής, ότι μια γλώσσα **B** άγνωστης πολυπλοκότητας είναι μη επιλύσιμη. Υποθέτουμε, ώστε να καταλήξουμε σε άτοπο, ότι η **B** είναι επιλύσιμη. Το άτοπο θα το πετύχουμε ανάγοντας στην **B** μια γλώσσα **A** που γνωρίζουμε ότι είναι μη επιλύσιμη. Αυτό είναι άτοπο, διότι η αναγωγή της μη επιλύσιμης **A** στην **B** σημαίνει ότι η **A** επιλύετε μέσω της **B** (που υποθέσαμε ότι είναι επιλύσιμη). Αφού καταλήξαμε σε άτοπο, η **B** είναι μη επιλύσιμη.

Η μέθοδος αυτή είχε παρουσιαστεί ως προηγούμενη άσκηση.

Άσκηση 1

Είναι το πρόβλημα HALT= {(M, w)| M(w) τερματίζει} επιλύσιμο; Υποθέστε ότι το πρόβλημα ACCEPT= {(M, w)| M(w) = ΝΑΙ} είναι μη επιλύσιμο.

Λύση

Υποθέτω ότι το πρόβλημα άγνωστης πολυπλοκότητας HALT είναι επιλύσιμο από την μηχανή R_H. Θα ανάγω το πρόβλημα ACCEPT στο HALT και θα το λύσω με την βοήθεια της R_H καταλήγοντας σε άτοπο.

Πρέπει να κατανοήσω τι σημαίνει η απάντηση ΝΑΙ ή ΟΧΙ της μηχανής
R_H για κάθε στιγμιότυπο (M, w) του ACCEPT.

- Για κάθε στιγμιότυπο (M, w) του ACCEPT όταν η μηχανή R_H με είσοδο M τερματίζει R_H (M, w)= ΟΧΙ τότε (M, w)$\notin$ HALT. Αυτό σημαίνει ότι M(w)= -. Άρα, αποκλείεται η M στη λέξη w να τερματίσει σε ΝΑΙ, δηλαδή M(w) $\neq$ΝΑΙ.

Καταλήγω στην παρακάτω, σαφέστατη, 1 δυνατότητα:

R_H (M, w)= ΟΧΙ $\Rightarrow$ M(w) $\neq$ ΝΑΙ

- Για κάθε στιγμιότυπο (M, w) του ACCEPT που μηχανή R_H με είσοδο M τερματίζει R_H (M, w)= ΝΑΙ τότε (M, w) $\in$ HALT. Αυτό σημαίνει ότι M(w)$\neq$ -. Δηλαδή η M με είσοδο w τερματίζει, απλά, χωρίς να ξέρω αν M(w)= ΝΑΙ ή M(w)= ΟΧΙ.

Καταλήγω στις παρακάτω, δυστυχώς, δύο δυνατότητες:

R_H (M, w)= ΝΑΙ $\Rightarrow$ M(w) = ΝΑΙ ή ΟΧΙ

Η άνω σχέση δείχνει ότι από το ΝΑΙ της R_H σε ένα οποιοδήποτε στιγμιότυπο (M, w) του ACCEPT δεν μπορούμε να βγάλουμε συμπέρασμα.

Όμως, το ΝΑΙ της R_H σημαίνει ότι η M(w) σίγουρα τερματίζει. Άρα αν τρέξουμε την M(w), ξέροντας ότι τερματίζει, τότε σε πεπερασμένο χρόνο θα λάβουμε ΝΑΙ ή ΟΧΙ και έτσι, τελικά, να αποφασίσουμε το ACCEPT.

Καταλήγουμε ότι μπορούμε να αποφασίσουμε οποιοδήποτε στιγμιότυπο (M, w) του ACCEPT με την χρήση της R_H με τον παρακάτω αλγόριθμο:

Με είσοδο οποιοδήποτε στιγμιότυπο **(M, w)** του ACCEPT τρέξε την **R_H (M, w)**

- **Αν R_H (M, w)= ΝΑΙ** $\Rightarrow$ τρέξε την M(w)
  - Αν M(w)= ΝΑΙ $\Rightarrow$ δώσε έξοδο **ΝΑΙ**
  - Αν M(w)= ΟΧΙ $\Rightarrow$ δώσε έξοδο **ΟΧΙ**

- **Αν R_H (M, w)= ΟΧΙ** $\Rightarrow$ δώσε έξοδο **ΟΧΙ**

Όμως αυτό είναι άτοπο, διότι το πρόβλημα ACCEPT από την υπόθεση της εκφώνησης είναι μη επιλύσιμο.

Άρα, η μηχανή R_H δεν υπάρχει και το πρόβλημα HALT είναι μη επιλύσιμο.

Άσκηση 2

Είναι το πρόβλημα EMPTY = {M| L(M) = Æ} επιλύσιμο; Υποθέστε ότι το πρόβλημα ACCEPT= {(M, w)| M(w) = NAI} είναι μη επιλύσιμο.

Λύση

Υποθέτω ότι το πρόβλημα άγνωστης πολυπλοκότητας EMPTY είναι επιλύσιμο από την μηχανή R_E. Θα ανάγω το πρόβλημα ACCEPT στο EMPTY και θα το λύσω με την βοήθεια της R_E καταλήγοντας σε άτοπο.

Πρέπει να κατανοήσω τι σημαίνει η απάντηση NAI ή OXI της μηχανής
R_E για κάθε στιγμιότυπο (M, w) του ACCEPT.

- Για κάθε στιγμιότυπο (M, w) του ACCEPT όταν η μηχανή R_E με είσοδο M τερματίζει R_E (M)=NAI, τότε M Î EMPTY, άρα L(M)= Æ, άρα για κάθε είσοδο x η M(x) 1 NAI. Συνεπώς (M, w) Ï ACCEPT. Άρα, αποκλείεται η M στη λέξη w να τερματίσει σε NAI, δηλαδή M(w) 1 NAI.

Καταλήγω στην παρακάτω, σαφέστατη, 1 δυνατότητα:

R_E (M)= NAI Þ M(w) 1 NAI.

- Για κάθε στιγμιότυπο (M, w) του ACCEPT που μηχανή R_E με είσοδο M τερματίζει R_E (M)= OXI τότε L(M) 1 Æ. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει τουλάχιστον μία λέξη x ώστε M(x)= NAI. Μα δεν μπορώ να ξέρω αν η M με είσοδο τη δοσμένη αρχική λέξη w τερματίζει σε NAI.

Καταλήγω στις παρακάτω, δυστυχώς, δύο δυνατότητες:

R_E (M)= OXI Þ M(w) = NAI ή 1NAI

Η άνω σχέση δείχνει ότι από το OXI της R_E σε ένα οποιοδήποτε στιγμιότυπο (M, w) του ACCEPT δεν μπορούμε να βγάλουμε συμπέρασμα.

Αυτό συμβαίνει επειδή το σύνολο L(M) των λέξεων που η M αποδέχεται μπορεί να είναι οποιοδήποτε άλλο εκτός από τα {w} ή Æ.

Αν όμως τύχαινε και L(M)= {w} ή Æ τότε από την απάντηση της R_E θα μπορούσαμε να βγάλουμε συμπέρασμα αν M(w)= NAI ή OXI.

Η λύση είναι για κάθε στιγμιότυπο (M, w) του ACCEPT να τροποποιούμε την M σε M_w η οποία να απορρίπτει κάθε είσοδο x ¹ w και μόνο στην είσοδο w να εξομοιώνει την M(w). Προφανώς η M_w είναι δυνατόν να πει ΝΑΙ μόνο με είσοδο w και εφόσον η M(w)= NAI. Άρα $L(M_w)$ ¹ Æ Þ M(w) = NAI, δηλαδή αν (M, w) Î ACCEPT.

Καταλήγουμε ότι μπορούμε να αποφασίσουμε οποιοδήποτε στιγμιότυπο
(M, w) του ACCEPT με την χρήση της R_E ως εξής:

Με είσοδο (M, w) τροποποίησε την M σε M_w και τρέξε την R_E (M_w).

- **Αν R_E (M_w)= NAI** τότε M(w) ¹ NAI επέστρεψε **ΟΧΙ**

- **Αν R_E (M_w)= OXI** τότε M(w) = NAI επέστρεψε **NAI**

Καταλήξαμε σε άτοπο, διότι από την υπόθεση της εκφώνησης το ACCEPT είναι μη επιλύσιμο. Άρα η υποθετική μηχανή R_E δεν υπάρχει και το πρόβλημα EMPTY είναι μη επιλύσιμο.

Άσκηση 3

Είναι το πρόβλημα EQ = {(M_1, M_2)| L(M_1) = L(M_2)} επιλύσιμο; Υποθέστε ότι το πρόβλημα EMPTY= {M| L(M) = Æ} είναι μη επιλύσιμο.

Λύση

Υποθέτω ότι το πρόβλημα άγνωστης πολυπλοκότητας EQ είναι επιλύσιμο από την μηχανή R_{EQ}. Θα ανάγω το πρόβλημα EMPTY στο EQ και θα το λύσω με την βοήθεια της R_{EQ} καταλήγοντας σε άτοπο, διότι από την εκφώνηση ξέρω ότι το πρόβλημα EMPTY είναι μη επιλύσιμο.

Πρέπει να κατανοήσω τι σημαίνει η απάντηση ΝΑΙ ή ΟΧΙ της μηχανής R_{EQ} για κάθε στιγμιότυπο M του EMPTY.

- Για κάθε στιγμιότυπο M του EMPTY, όταν η μηχανή R_{EQ} με είσοδο (M, M'), όπου M' μια τυχαία μηχανή, τερματίζει R_{EQ}(M, M')= NAI, τότε L(M) = L(M'). Δηλαδή δεν μπορώ να βγάλω συμπέρασμα αν L(M)= Æ ή ¹ Æ.

  R_{EQ} (M, M')= NAI Þ L(M) = L(M')

- Για κάθε στιγμιότυπο M του EMPTY όταν η μηχανή R_{EQ} με είσοδο (M, M'), όπου M' μια τυχαία μηχανή, τερματίζει R_{EQ}(M, M')= OXI, τότε L(M) ¹ L(M'). Δηλαδή πάλι δεν μπορώ να βγάλω συμπέρασμα αν L(M)= Æ ή ¹ Æ.

  R_{EQ} (M, M')= OXI Þ L(M) ¹ L(M')

Αυτό συμβαίνει επειδή η μηχανή M' είναι μια οποιαδήποτε μηχανή και δεν έχω καμιά γνώση για το L(M') αυτής. Αν όμως επιλέξω ως δεύτερη μηχανή τη $M_{Æ}$ που δεν αποδέχεται καμία λέξη (εκ κατασκευής), δηλαδή, L($M_{Æ}$)= Æ τότε από την απάντηση της R_{EQ} θα μπορούσαμε να βγάλουμε συμπέρασμα για οποιαδήποτε πρώτη μηχανή M αν L(M)= Æ ή ^{1} Æ. Σχηματικά, για κάθε στιγμιότυπο M του EMPTY έχουμε

R_{EQ} (M, $M_{Æ}$)= ΝΑΙ Þ L(M) = L($M_{Æ}$)= Æ

R_{EQ} (M, $M_{Æ}$)= ΟΧΙ Þ L(M) ^{1} L($M_{Æ}$)= Æ

Συνεπώς, με χρήση της υποθετικής μηχανής R_{EQ} αποφασίσαμε το πρόβλημα EMPTY, άτοπο, διότι το πρόβλημα EMPTY είναι μη επιλύσιμο από την αρχική υπόθεση της εκφώνησης.

Άσκηση 4

Είναι το πρόβλημα L_{111} = {M | η M τυπώνει 111 με είσοδο Æ } επιλύσιμο; Υποθέστε ότι το πρόβλημα $L_{Æ}$ = {M| η M τερματίζει με είσοδο Æ } είναι μη επιλύσιμο.

Λύση

Υποθέτω ότι το πρόβλημα άγνωστης πολυπλοκότητας L_{111} είναι επιλύσιμο από την μηχανή R_{111}. Θα ανάγω το πρόβλημα $L_{Æ}$ στο L_{111} και θα το λύσω με την βοήθεια της R_{111} καταλήγοντας σε άτοπο.

Πρέπει να κατανοήσω τι σημαίνει η απάντηση ΝΑΙ ή ΟΧΙ της μηχανής R_{111} για κάθε στιγμιότυπο M του $L_{Æ}$.

1. Για κάθε στιγμιότυπο M του $L_{Æ}$, που η μηχανή M με είσοδο Æ τυπώνει 111 και τερματίζει, η μηχανή R_{111} θα μας απαντήσει, ορθά, ΝΑΙ και με βάση αυτή την απάντηση ορθά θα μπορούμε να εντάξουμε την M στην $L_{Æ}$.
2. Για κάθε στιγμιότυπο M του $L_{Æ}$, που η μηχανή M με είσοδο Æ ΔΕΝ τυπώνει 111 ΚΑΙ τερματίζει, η μηχανή R_{111} θα μας απαντήσει, ΟΧΙ. Με βάση αυτή την απάντηση της R_{111} ΔΕΝ θα εντάξουμε την M στην $L_{Æ}$. Λανθασμένα όμως, διότι η M όντως τερματίζει με είσοδο Æ. Εύκολα μπορούμε να το αποφύγουμε αυτό υποχρεώνοντας (τροποποιώντας) την κατάσταση τερματισμού της M, ώστε *όταν* η M εισέλθει σε αυτή να περάσει στην κατάσταση που να τυπώνει 111 και μετά να τερματίζει. Άρα, για κάθε στιγμιότυπο M του $L_{Æ}$ θα τροποποιούμε την M ως άνω σε M' και θα δίνουμε είσοδο στην R_{111} την M'.
3. Για κάθε στιγμιότυπο M του $L_{Æ}$, που η μηχανή M με είσοδο Æ τυπώνει 111 ΚΑΙ ΔΕΝ τερματίζει, η μηχανή R_{111} θα μας απαντήσει ΝΑΙ. Με βάση αυτή την απάντηση της R_{111} θα εντάξουμε την M στην $L_{Æ}$. Αυτό είναι λάθος όμως, διότι η M ΔΕΝ τερματίζει με είσοδο Æ. Εύκολα μπορούμε να το αποφύγουμε αυτό υποχρεώνοντας (τροποποιώντας) την M ώστε με ένα νέο σύμβολο π.χ. ``$'' να

κάνει ότι έκανε με το γράμμα ``1". Δηλαδή, σε κάθε κατάσταση που είχε το ``1" το αλλάζει με το ``$". Επίσης αντικαθιστά στην είσοδο κάθε ``1" με το ``$". Τέλος όταν είναι να τυπώσει ``1" θα τυπώνει ``$". Μόνο όταν εισέλθει στην τελική κατάσταση τερματισμού της M θα τυπώνει 111 και θα τερματίζει.

Άρα, για κάθε στιγμιότυπο M του $L_{Æ}$ θα κάνουμε όλες τις άνω τροποποιήσεις που περιγράψαμε στην M και θα δίνουμε είσοδο στην R_{111} την M'.

Από τα άνω 1, 2, 3 καταφέραμε να αποφασίσουμε κάθε στιγμιότυπο M του $L_{Æ}$ με την βοήθεια της R_{111} τροφοδοτώντας την με την τροποποιημένη M'. Συνεπώς

M Î $L_{Æ}$ Þ R_{111} (M')= NAI

που είναι άτοπο.

Άσκηση 5

Είναι το πρόβλημα FINITE = {M| L(M)= πεπερασμένο} επιλύσιμο; Υποθέστε ότι το πρόβλημα HALT= {(M, w)| M(w)^{1} - } είναι μη επιλύσιμο.

Λύση

Υποθέτω ότι το πρόβλημα άγνωστης πολυπλοκότητας FINITE είναι επιλύσιμο από την μηχανή R_f. Θα ανάγω το πρόβλημα HALT στο L_f και θα το λύσω με την βοήθεια της R_f καταλήγοντας σε άτοπο.

Πρέπει να κατανοήσω τι σημαίνει η απάντηση NAI ή OXI της μηχανής R_f για κάθε στιγμιότυπο (M, w) του HALT.

1. Για κάθε στιγμιότυπο (M, w) του HALT, που η μηχανή M με είσοδο w τερματίζει, αν επίσης συμβαίνει η M να τερματίζει και σε *πεπερασμένο* πλήθος άλλων λέξεων y ^{1}w, τότε η μηχανή R_f που αποφασίζει το FINITE με είσοδο M θα μας απαντήσει NAI. Με βάση αυτή την απάντηση ορθά θα μπορούμε να εντάξουμε την M στην HALT. Άρα ορθά:

   R_f (M)= NAI Þ (M, w) Î HALT

2. Για κάθε στιγμιότυπο (M, w) του HALT, που η μηχανή M με είσοδο w τερματίζει, αλλά επίσης η M τερματίζει επιπλέον σε *άπειρο* πλήθος λέξεων $y^{1}w$ τότε η μηχανή που αποφασίζει το FINITE θα τερματίσει ως R_f (M)= OXI (διότι L(M)= άπειρο). Άρα λανθασμένα (διότι M(w) ^{1} -):

   R_f (M)= OXI Þ (M, w) ÏHALT

Μια λύση θα ήταν να τροποποιήσουμε την M σε M' που υποχρεωτικά, εφόσον ισχύει M(w) ^{1} -, στην συνέχεια η M' να λέει ΝΑΙ σε πεπερασμένου πλήθους λέξεις *y* ^{1} *w* (π.χ. να επιλέγει 10 λέξεις x_1, …, x_{10} ^{1} w και να τερματίζει μόνο σε αυτές). Συνεπώς η R_f (M')= ΝΑΙ.

Άρα σωστά (διότι M(w) ^{1} -):

R_f (M)= ΝΑΙ Þ (M, w) ÎHALT

Όμως, η τροποποίηση της M σε M' μας οδηγεί στο παρακάτω πρόβλημα.

3. Για κάθε στιγμιότυπο (M, w) του HALT, που η μηχανή M με είσοδο w ΔΕΝ τερματίζει, άρα και η M' κατόπιν δεν τερματίζει σε *πεπερασμένο* πλήθος άλλων λέξεων *y* ^{1} *x*, τότε η μηχανή R_f με είσοδο M' θα μας απαντήσει ΝΑΙ (διότι L(M')=Æ, πεπερασμένο). Άρα λανθασμένα (διότι M(w)= -):

R_f (M)= ΝΑΙ Þ (M, w) ÎHALT_t

Από τα άνω 1, 2, 3 αντιλαμβανόμαστε ότι δεν μπορούμε να βγάλουμε ορθό συμπέρασμα από κάθε απάντηση της R_f επειδή είτε η M' τερματίσει (άρα θα δεχτεί 10 άλλες λέξεις) στο w είτε όχι (άρα δεν θα δεχτεί καμία άλλη λέξη) το L(M')= πεπερασμένο. Άρα η τροποποιημένη M' είναι λάθος.

Η σωστή τροποποίηση είναι: για κάθε στιγμιότυπο (M,w) του HALT_t, δημιουργούμε την M_w που προσομοιώνει την M(w) και αν M(w) ^{1} - τότε η M_w να αποδέχεται άπειρο πλήθος λέξεων (άρα L(M_w)= άπειρο), αλλιώς η M_w κρεμάει στο w (και άρα L(M_w)= Æ πεπερασμένο).

Συνεπώς, για κάθε στιγμιότυπο (M,w):

- Αν R_f (M_w)= ΝΑΙ Þ M_w ÎFINITE Þ η μόνη περίπτωση η M_w να αποδεχτεί πεπερασμένο πλήθος λέξεων είναι όταν L(M_w)= Æ δηλαδή όταν M(w) = - και τελικά (M, w) ÏHALT.
- Αν R_f (M_w)= ΟΧΙ Þ M_w ÏFINITE Þ |L(M_w)|= ¥ Þ η μόνη περίπτωση η M_w να αποδεχτεί άπειρο πλήθος λέξεων είναι όταν M(w) ^{1} - και τελικά (M, w) ÎHALT.

Από τα άνω, καταφέραμε να αποφασίσουμε κάθε στιγμιότυπο του HALT, υποθέτοντας ότι FINITE είναι επιλύσιμο, άτοπο.

Άσκηση 6

Αποδείξτε ότι το παρακάτω πρόβλημα είναι μη επιλύσιμο: Δοθείσης μηχανής Turing M και εισόδου 1^n0^n, $n \geq 0$, δεν περιέχονται στην ταινία της M σε κανένα βήμα της περισσότερα 0 από 1;

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το μη επιλύσιμο πρόβλημα: Δοθείσης μιας μηχανής Turing N, τερματίζει η N με κενή είσοδο;

Λύση

Έστω ότι η ζητούμενη γλώσσα
$L=\{<M, x>, x = 1^n0^n, n\geq 0 \mid M(x)$ σε κανένα βήμα τα 0'ς δεν υπερβαίνουν τα 1'ς $\}$
είναι αποφασίσιμη. Έστω R_L η μηχανή Turing που την αποφασίζει. Με την βοήθεια της R_L θα αποφασίσουμε την γλώσσα $E= \{N| N(e)$ τερματίζει$\}$ καταλήγοντας σε άτοπο.
Έστω ένα οποιοδήποτε στιγμιότυπο N της μη αποφασίσιμης γλώσσας E. Μετασχηματίζω το N σε $N^{\$*}$, αλλάζοντας την συνάρτηση μετάβασης της N ώστε:

- Όταν διαβάζει ή γράφει 0 να το κάνει με το νέο σύμβολο \$.
- Όταν διαβάζει ή γράφει 1 να το κάνει με το νέο σύμβολο *.
- Να σβήνει την είσοδο της και να τρέχει με κενή είσοδο.
- Αν η $N^{\$}*(\varepsilon)$ τερματίσει τότε τυπώνει τη λέξη «001» και τερματίζει.

Εκ κατασκευής, η $N^{\$*}$ έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

1. Η $N^{\$*}$ στην ουσία είναι ίδια η N, δηλαδή κάνει τις ίδιες κινήσεις με την N χρησιμοποιώντας, όμως, τα σύμβολα \$, * αντί για τα 0, 1.
2. Η $N^{\$*}$ αγνοεί κάθε είσοδο της και τρέχει με είσοδο τη κενή συμβολοσειρά ε.
3. Η $N^{\$*}$ σε όλα τα βήματα της δεν τυπώνει 0 ή 1, εκτός και αν φθάσει στη κατάσταση τερματισμού της, οπότε τυπώνει τη λέξη «001» και τερματίζει.

Συνεπώς η $N^{\$*}$ τερματίζει, με είσοδο τη κενή συμβολοσειρά, αν και μόνο αν τυπώσει «001», δηλαδή αν και μόνο αν τα 0'ς υπερβούν τα 1'ς.
Τελικά:
Οποιοδήποτε στιγμιότυπο N, του μη επιλύσιμου προβήματος E, το μετασχηματίσαμε σε $N^{\$*}$ και τρέχουμε την υποθετική μηχανή $R_L(N^{\$*}, x)$ όπου x οποιαδήποτε λέξη της μορφής 0^n1^n, $n\geq 0$.

- Αν $R_L(N^{\$*}, x)$ = NAI τότε η $N^{\$*}(\varepsilon)$ δεν τερματίζει, άρα η αρχική $N(\varepsilon)$ δεν τερματίζει.
- Αν $R_L(N^{\$*}, x)$ =OXI τότε η $N^{\$*}(\varepsilon)$ τερματίζει, άρα η αρχική $N(\varepsilon)$ τερματίζει.

Συνεπώς, με την υποθετική μηχανή R_L αποφασίσαμε οποιοδήποτε στιγμιότυπο του μη επιλύσιμου προβλήματος E, καταλήγοντας σε άτοπο.