ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

Θεωρία Υπολογισμού

Σημειώσεις - Cantor

Αλέξιος Καπόρης

Τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών και Επικοινωνιακών Συστημάτων

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

1 Αριθμήσιμα σύνολα

Στο Δημοτικό μάθαμε να μετράμε το πλήθος των αντικειμένων ενός συνόλου A (πορτοκαλιών, μήλων, κ.α.) με τα δάχτυλα μας, με ξυλάκια ή και με Αριθμητήριο (οι πιο προχωρημένοι). Με προσοχή αντιστοιχούσαμε κάθε ένα δάχτυλο μας με ακριβώς ένα αντικείμενο του A ώστε να μην περισσέψει κανένα αντικείμενο.

Στα Μαθηματικά χρησιμοποιούμε αυτή την απλή μέθοδο, ο G. Cantor έχει κάνει σημαντική δουλειά στην προσπάθεια να μετρήσει *άπειρα* σύνολα, για να συγκρίνουμε-μετρήσουμε δύο οποιαδήποτε σύνολα A και B. Πιο αυστηρά, για να δείξουμε ότι $|A| = |B|$ αρκεί να βρούμε μια συνάρτηση $f : A \to B$ που να είναι "1-1" (να αντιστοιχεί με μοναδικό τρόπο κάθε $x \in A$ σε ένα μόνο $y \in B$) και "επί" (κάθε $y \in B$ να είναι εικόνα κάποιου $x \in A$, δηλαδή κανένα στοιχείο του B να μην μείνει αζευγάρωτο με κάποιο στοιχείο του A).

Η μέθοδος αυτή, παρά την απλότητα της, οδήγησε σε μεγάλα προβλήματα τον Cantor και τα παράξενα συμπεράσματα του προξένησαν το μένος ισχυρών Μαθηματικών προσωπικοτήτων της εποχής του (Kronecker). Για να πάρουμε μια ιδέα των προβλημάτων που ενέκυψαν, ας φανταστούμε ένα σύνολο A αποτελούμενο από *άπειρα* ζευγάρια παπουτσιών. Δηλαδή το σύνολο

$$A = \{Z_1, Z_2, \ldots, \},$$

όπου Z_i είναι το i-οστό ζεύγος του A. Δημιουργούμε ένα νέο σύνολο παπουτσιών B ως εξής. Από κάθε ζεύγος παπουτσιών $Z_i \in A$, αντιγράφουμε το *αριστερό* παπούτσι $\Pi_i^{\alpha} \in Z_i = \{\Pi_i^{\alpha}, \Pi_i^{\delta}\}$ και το εισάγουμε στο σύνολο B, δημιουργώντας το νέο σύνολο αριστερών παπουτσιών

$$B = \{\Pi_1^{\alpha}, \Pi_2^{\alpha}, \ldots, \},$$

όπου Π_i^{α} είναι το i-οστό αριστερό παπούτσι του i-οστού ζεύγους παπουτσιών $Z_i,\ i = 1, \ldots, \infty$.

- Ένα *έμπειρο* μάτι αντιλαμβάνεται ότι το σύνολο B έχει λιγότερα παπούτσια από το A, διότι του λείπουν όλα τα δεξιά παπούτσια του A. Άρα $|B| < |A|$.

- Το παράδοξο είναι ότι ένα *έμπειρο* μυαλό αντιλαμβάνεται την προφανή συνάρτηση $f : A \to B$ που είναι "$1-1$" και "επί" του B. Με απλά λόγια, η f αντιστοιχεί το i-οστό στοιχείο Z_i του συνόλου A στο i-οστό στοιχείο Π_i^{α} του B με μοναδικό τρόπο και κανένα στοιχείο (αριστερό παπούτσι) του B δεν μένει αζευγάρωτο. Άρα $|B| = |A|$.

Μήπως το παραπάνω παράδοξο $|B| = |A|$ οφείλετε σε κάποιο λάθος ως προς τον ορισμό της συναρτήσεως f που αντιστοιχεί στοιχεία του A με του B; Μήπως και αν ακόμη αλλάξουμε την f το παράδοξο $|B| = |A|$ παραμένει;

Ορισμος 1 *Ένα σύνολο A ονομάζεται* αριθμήσιμο *αν υπάρχει "1-1" και "επί" συνάρτηση $f : \mathcal{N} \to A$, όπου $\mathcal{N}$ είναι το σύνολο των Φυσικών Αριθμών.*

2 Οι μηχανές Turing είναι αριθμήσιμες

Για την απόδειξη του ζητουμένου μας βοηθάει να αποδείξουμε πρώτα το παρακάτω:

Οι πεπερασμένες λέξεις είναι αριθμίσημες: Αν Σ είναι ένα αλφάβητο, τότε το σύνολο όλων των πεπερασμένων λέξεων που μπορούμε να σχηματίσουμε από το Σ είναι αριθμήσιμο (δηλαδή μπορούν να μπουν στην σειρά όπως οι φυσικοί αριθμοί). Για παράδειγμα, αν $\Sigma = \{0,1\}$ τότε μπορούμε να διατάξουμε λεξικογραφικά[1] (είναι ο τρόπος που καθορίζει τη σειρά που εμφανίζονται οι λέξεις σε ένα λεξικό) όλες τις πεπερασμένες λέξεις

$$\epsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111, 0000, \ldots$$

όπου με αυτό τον τρόπο εύκολα προκύπτει η ''1-1'' και ''επί'' αντιστοίχηση με τους Φυσικούς αριθμούς

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \ldots$$

Οι μηχανές Turing περιγράφονται ως λέξεις *πεπερασμένου μήκους*: Μια μηχανή Turing M αποτελείται από πεπερασμένα σύνολα συμβόλων που δηλώνουν τις καταστάσεις, την συνάρτηση μετάβασης, κ.α. Συνεπώς, μπορούμε να κωδικοποιήσουμε τη M ως μια πεπερασμένη λέξη $w_M \in \Sigma^*$. Από την προηγούμενη ενότητα είδαμε ότι το σύνολο όλων των πεπερασμένων λέξεων που μπορούν να σχηματιστούν από ένα αλφάβητο Σ είναι αριθμήσιμο. Δηλαδή μπορούν να μπουν σε λεξικογραφική σειρά

$$w_1, w_2, w_3, w_4, \ldots \tag{1}$$

Προφανώς η i-οστή λέξη w_i αυτής της σειράς μπορεί να μην κωδικοποιεί καμία μηχανή Turing. Όμως, διατρέχοντας τις λέξεις της λεξικογραφικής διατάξεως (1) από αριστερά προς τα δεξιά, συναντούμε την 1η λέξη w_{M_1} που κωδικοποιεί μια μηχανή Turing M_1, μετά την 2η λέξη w_{M_2} που κωδικοποιεί μια μηχανή Turing M_2, κ.τ.λ. Με αυτό τον τρόπο προκύπτει η λεξικογραφικά διατεταγμένη υπακολουθία της (1)

$$w_{M_1}, w_{M_2}, w_{M_3}, w_{M_4}, \ldots \tag{2}$$

αποτελούμενη μόνο από τις λέξεις που κωδικοποιούν μηχανές Turing. Αυτό σημαίνει ότι και το σύνολο όλων των μηχανών Turing είναι αριθμήσιμο, διότι η (2) είναι σε αντιστοιχία με τους φυσικούς αριθμούς.

3 Οι γλώσσες είναι *μη* αριθμήσιμες

Θυμίζουμε πως ορίζουμε μια *Γλώσσα* σε ένα πεπερασμένο αλφάβητο Σ.

Ορισμος **2** *Έστω Σ^* το σύνολο όλων των λέξεων (πεπερασμένου μήκους και μη) που μπορούν να σχηματιστούν από το αλφάβητο Σ. Μια γλώσσα L είναι ένα υποσύνολο του Σ^*, δηλαδή $L \subseteq \Sigma^*$.*

Για την καλύτερη κατανόηση του συνόλου όλων των γλωσσών που μπορούμε να κατασκευάσουμε από ένα δοσμένο αλφάβητο Σ, αρχικά δείχνουμε την παρακάτω εύκολη ιδιότητα.

[1] Προχωρούμε σε αύξουσα σειρά από όλες τις λέξεις μήκους 0, μετά μήκους 1, μήκους 2, ... κ.τ.λ. Μεταξύ δύο λέξεων ίσου μήκους μικρότερη είναι αυτή με το μικρότερο *σημαντικό* ψηφίο. Προσέξτε ότι για να γράψουμε σε αυτή την σειρά την μικρότερη λέξη μήκους $n_0 + 1$ πρέπει να έχουμε διατάξει προηγουμένως όλες τις λέξεις μήκους $\leq n_0$.

Το σύνολο όλων των αναγνωρίσιμων γλωσσών είναι αριθμήσιμο. Έστω μια μηχανή Turing M. Η γλώσσα $L(M)$ της μηχανής M αποτελείται από όλες τις λέξεις $w \in \Sigma^*$ για τις οποίες $M(w) = \text{NAI}$. Κάθε αναγνωρίσιμη γλώσσα $L \subseteq \Sigma^*$ έχει τουλάχιστον μια μηχανή Turing M_L ώστε για κάθε λέξη $w \in L$ η μηχανή M_L τερματίζει σε κατάσταση NAI. Αντιλαμβανόμαστε λοιπόν ότι για κάθε αναγνωρίσιμη γλώσσα $L \subseteq \Sigma^*$, αν είναι η μηχανή Turing M_L που την αναγνωρίζει, τότε ισχύει

$$L(M_L) \equiv L.$$

Με αυτό τον τρόπο, το σύνολο $ACCEPT$ όλων των αναγνωρίσιμων γλωσσών μπορεί να γραφεί αυστηρά ως

$$ACCEPT = \{L \subseteq \ \Sigma^* \mid \exists \ M \text{ ώστε } L(M) = L\}.$$

Παρατηρούμε ότι από την αρίθμηση (2) όλων των μηχανών Turing προκύπτει η αρίθμηση όλων των αναγνωρίσιμων γλωσσών

$$L(M_1),\ L(M_2),\ L(M_3),\ L(M_4),\ \ldots\ =\ L_{M_1},\ L_{M_2},\ L_{M_3},\ L_{M_4},\ \ldots \tag{3}$$

Το σύνολο όλων των γλωσσών είναι *μη* αριθμήσιμο. Είδαμε ότι όλες οι πεπερασμένου μήκους λέξεις που μπορούν να σχηματιστούν από ένα πεπερασμένο αλφάβητο Σ είναι αριθμίσημες, διότι μπορούν να μπουν στην σειρά όπως οι λέξεις ενός λεξικού, δείτε (1).

Στην συνέχεια, είδαμε ότι μια υπακολουθία λέξεων της (1) μπορεί να βάλει στην σειρά όλες τις μηχανές Turing, δηλαδή είδαμε ότι και το σύνολο όλων των μηχανών Turing είναι αριθμήσιμο, δείτε (2).

Τέλος, επειδή κάθε μία μηχανή Turing M ορίζει μονοσήμαντα και την γλώσσα L_M που αναγνωρίζει (προσοχή, κάθε μια αναγνωρίσιμη γλώσσα L δεν ορίζει μονοσήμαντα *ακριβώς μια* μηχανή M_L που αναγνωρίζει την L, διότι δύο ή περισσότερες διαφορετικές μηχανές μπορεί να αναγνωρίζουν την ίδια γλώσσα), καταλήξαμε ότι και το σύνολο όλων των αναγνωρίσιμων γλωσσών είναι αριθμήσιμο, δείτε (3).

Δυστυχώς, το σύνολο όλων των γλωσσών είναι *μη* αριθμήσιμο. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν και άλλες γλώσσες, εκτός από τις αναγνωρίσιμες (θυμηθείτε ότι οι αναγνωρίσιμες γλώσσες εμπεριέχουν τις αποφασίσιμες γλώσσες), οι οποίες εμπλουτίζουν το σύνολο όλων των γλωσσών του Σ^*, και το καθιστούν μη αριθμήσιμο. Ο εμπλουτισμός αυτός οφείλετε σε πιο περίπλοκες γλώσσες, π.χ. γλώσσες μη αναγνωρίσιμες (δείτε Παράδειγμα 1).

Θα αποδείξουμε ότι το σύνολο όλων των γλωσσών είναι μη αριθμήσιμο με την μέθοδο της *Διαγωνοποίησης*. Έστω η αρίθμηση (1) όλων των πεπερασμένων λέξεων που μπορούν να σχηματιστούν από το αλφάβητο Σ. Προσέξτε ότι η αρίθμηση (1) έχει αριστερή αρχή μα δεν έχει δεξιό πεπερασμένο τέλος. Έστω οποιαδήποτε γλώσσα $L \subseteq \Sigma^*$. Η γλώσσα L είναι ένα πεπερασμένο ή άπειρο σύνολο λέξεων του Σ^*. Οι λέξεις της L μπορούν να παρασταθούν ως μια *απείρου μήκους* δυαδική ακολουθία συμβόλων 0, 1. Δηλαδή

$$L \to 00101110\ldots, \tag{4}$$

όπου στην i-θέση υπάρχει το ψηφίο 1 αν η i-στη λέξη που εμφανίζεται στη λεξικογραφική σειρά (1) είναι λέξη της γλώσσας L, αλλιώς εμφανίζεται το ψηφίο 0. Στην ουσία, κάθε γλώσσα L την κωδικοποιούμε με *μοναδικό τρόπο* με την μορφή μιας απείρου μήκους δυαδικής λέξεως.

Αν δείξουμε ότι το σύνολο όλων των απείρων δυαδικών ακολουθιών είναι αριθμήσιμο τότε θα έχουμε δείξει ότι το σύνολο όλων των γλωσσών είναι αριθμήσιμο. Για να καταλήξουμε σε Άτοπο, *ας υποθέσουμε ότι το σύνολο των απείρων δυαδικών ακολουθιών της μορφής (4) είναι αριθμήσιμο,* δηλαδή έστω μια αντιστοίχηση του με τους φυσικούς αριθμούς της μορφής

$$b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots, \tag{5}$$

όπου κάθε b_i είναι μια δυαδική ακολουθία της μορφής (4). Τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε μια *νέα* δυαδική ακολουθία που *δεν* εμφανίζεται στην σειρά (5), της μορφής

$$D = d_1 d_2 d_3 \ldots d_i \ldots, \text{ όπου κάθε } d_i \in \{0,\ 1\} \tag{6}$$

και το d_i είναι το *αντίθετο ψηφίο* του i-οστού ψηφίου της δυαδικής ακολουθίας b_i που εμφανίζεται στην σειρά (5). Προφανώς η D δεν ταυτίζεται με καμία δυαδική ακολουθία της αντιστοίχησης με τους φυσικούς αριθμούς (5) (που υποθέσαμε ότι υπάρχει), διότι εκ κατασκευής διαφέρει από κάθε b_i τουλάχιστον στο i-οστό ψηφίο. Καταλήξαμε σε άτοπο, διότι η υπόθεση μας ήταν ότι η (5) περιέχει όλες τις δυαδικές λέξεις.

Παραδειγμα **1** *Γνωρίζουμε ότι η γλώσσα*

$$ACCEPT = \{\langle M; w\rangle |\ M(w) = \ NAI\},$$

είναι αναγνωρίσιμη (προσοχή στην απόδειξη της αναγνωρισιμότητας της) χωρίς να είναι αποφασίσιμη. *Μια μη αναγνωρίσιμη γλώσσα είναι η*

$$\overline{ACCEPT} = \{\langle M; w\rangle \mid M(w) \neq \ NAI\ \}.$$

Η $\overline{ACCEPT}$ είναι μη αναγνωρίσιμη, διότι αν ήταν αναγνωρίσιμη τότε οι γλώσσες $ACCEPT, \overline{ACCEPT}$ θα ήταν αποφασίσιμες (γιατί;), το οποίο είναι άτοπο.

Α. Καπόρης