ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

Θεωρία Υπολογισμού

Σημειώσεις – Μη αποφασίσιμες γλώσσες

Αλέξιος Καπόρης

Τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών και Επικοινωνιακών Συστημάτων

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Μη αποφασισιμές γλώσσες

Α. Κ. Καπόρης

15 Μαΐου 2009

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Μη αποφασίσιμες γλώσσες

1.1 Ανάγω το πρόβλημα A στο B

"*Ανάγω το πρόβλημα Α στο Β*" σημαίνει λύνω το A με τη βοήθεια του Β (και όχι το αντίστροφο).

Παραδειγμα 1 *Ας υποθέσουμε ότι φθάνουμε νύχτα στη τεράστια άγνωστη πόλη Ν. Υόρκη. Το πρόβλημα μας (πρόβλημα Α) είναι να βρίσκουμε τη διαδρομή προς κάθε δυνατό προορισμό στη Ν. Υόρκη. Ένα στιγμιότυπο του προβλήματος Α είναι να βρούμε το ξενοδοχείο Salonika.*

Στο αεροδρόμιο αγοράζουμε ένα εξαιρετικό χάρτη. Τότε το πρόβλημα εύρεσης του Salonika στην πόλη Ν. Υόρκη έχει αναχθεί στην εύρεση της λέξης Salonika στον εξαιρετικό χάρτη (πρόβλημα Β). Σε λιγότερο από 1′ εντοπίζουμε το Salonika στο χάρτη. Άρα σε 1′ λύσαμε το στιγμιότυπο

$$I_A = \textit{Πως θα πάω στο Salonika, οεο;}$$

του προβλήματος A μετατρέποντας το σε στιγμιότυπο

$$I_B = \textit{Αναζήτησε τη λέξη Salonika στο χάρτη}$$

του προβλήματος B.

> Παρατηρηση 1 *Η αναγωγή είναι σωστή αν με αυτό το τρόπο μπορώ να λύσω κάθε στιγμιότυπο του A με τη βοήθεια του B.*
>
> Αν θέλω να λύσω το στιγμιότυπο:
>
> $$I_{A'} = \textit{Πως θα πάω στη 5η Λεωφόρο, οεο;}$$
>
> (το οποίο ξέρω ότι λύνεται) και για ώρες κάνω:
>
> $$I_B = \textit{Αναζήτησε τη λέξη 5th Avenue στο χάρτη}$$
>
> χωρίς αποτέλεσμα, τότε η αναγωγή είναι λάθος. Διότι ο χάρτης είναι λάθος και δεν έχει όλα τα σημαντικά σημεία της Ν. Υόρκης (δεν λύνει *κάθε* στιγμιότυπο του προβλήματος Α).
>
> Παρατηρηση 2 *Η αναγωγή έχει καθορισμένη φορά από το A προς το B.*

Λύνω κάθε στιγμιότυπο του A με τη βοήθεια του B και μόνο. ΔΕΝ λύνω το στιγμιότυπο:

$$I_{B''} = \textit{Πως θα βρω τη λέξη Madison Square, οεο;}$$

στο χάρτη ενεργώντας ως:

$$I_{A''} = \textit{Περπάτα στη Ν. York μέχρι να βρεις το Madison Square}$$

Διότι το $I_{A''}$ δεν λύνεται γρήγορα (ενώ το $I_{B''}$ λύνεται γρήγορα) την νύχτα στην άγνωστη, τεράστια και επικίνδυνη Ν. Υόρκη.

Παρατηρηση **3** *Έχει τεράστια σημασία ποιο είναι το Β (στην ουσία αυτό μου λύνει το πρόβλημα Α).*

Αν το αεροδρόμιο έχει μόνο χάρτες γραμμένους στα Κινέζικα τότε δεν έχει νόημα να ανάγω το A στην αγορά χάρτη. Ακόμα και αν διαθέτει σχολείο Κινέζικων το αεροδρόμιο.

1.2 Αναγωγές μη επιλυσιμότητας

1.2.1 Ασκήσεις

•Ασκηση **1** *Είναι το πρόβλημα*

$$HALT = \{(M, w) | M(w) \neq \uparrow\}$$

επιλύσιμο; Υποθέστε ότι το πρόβλημα

$$ACCEPT = \{(M, w) | M(w) = NAI\}$$

είναι μη επιλύσιμο.

Λύση: Υποθέτω ότι το πρόβλημα άγνωστης πολυπλοκότητας $HALT$ είναι επιλύσιμο από την μηχανή R_H. Θα ανάγω το πρόβλημα $ACCEPT$ στο $HALT$ και θα το λύσω με την βοήθεια της R_H καταλήγοντας σε άτοπο.

Πρέπει να κατανοήσω τι σημαίνει η απάντηση ΝΑΙ ή ΟΧΙ της μηχανής R_H για κάθε στιγμιότυπο (M, w) του $ACCEPT$.

- Για κάθε στιγμιότυπο (M, w) του $ACCEPT$ όταν η μηχανή R_H με είσοδο M τερματίζει $R_H(M, w) =$ ΟΧΙ τότε $(M, w) \notin HALT$. Αυτό σημαίνει ότι $M(w) = \uparrow$. Άρα, αποκλείεται η M στη λέξη w να τερματίσει σε ΝΑΙ, δηλαδή $M(w) \neq NAI$.

  Καταλήγω στην παρακάτω, σαφέστατη, 1 δυνατότητα:

$$R_H(M, w) = \text{ΟΧΙ} \Rightarrow M(w) \neq \text{ΝΑΙ} \tag{1.1}$$

- Για κάθε στιγμιότυπο (M, w) του $ACCEPT$ που μηχανή R_H με είσοδο M τερματίζει $R_H(M, w) =$ ΝΑΙ τότε $(M, w) \in HALT$. Αυτό σημαίνει ότι $M(w) \neq \uparrow$. Δηλαδή η M με είσοδο w τερματίζει, απλά, χωρίς να ξέρω αν $M(w) =$ ΝΑΙ ή $M(w) =$ ΟΧΙ.

  Καταλήγω στις παρακάτω, δυστυχώς, δύο δυνατότητες:

$$R_H(M, w) = \text{ΝΑΙ} \Rightarrow M(w) = \begin{cases} \text{ΝΑΙ} \\ \text{ή} \\ \text{ΟΧΙ} \end{cases} \tag{1.2}$$

Η (1.3) δείχνει ότι από το ΝΑΙ της R_H σε ένα οποιοδήποτε στιγμιότυπο (M, w) του $ACCEPT$ δεν μπορούμε να βγάλουμε συμπέρασμα. Όμως, το ΝΑΙ αυτό σημαίνει ότι η $M(w)$ τερματίζει. Άρα αν τρέξουμε την $M(w)$ τότε σε πεπερασμένο χρόνο θα λάβουμε ΝΑΙ ή ΟΧΙ και έτσι, τελικά, να αποφασίσουμε το ACCEPT.

Καταλήγουμε ότι μπορούμε να αποφασίσουμε οποιοδήποτε στιγμιότυπο (M, w) του $ACCEPT$ με την χρήση της R_H ως εξής:

$$\textbf{input} : (M, w) \Rightarrow R_H(M, w) = \begin{cases} \text{NAI} \Rightarrow M(w) = \begin{cases} \text{NAI} \Rightarrow \textbf{output} : \text{NAI} \\ \text{OXI} \Rightarrow \textbf{output} : \text{OXI} \end{cases} \\ \\ \text{OXI} \Rightarrow \textbf{output} : \text{OXI} \end{cases} \tag{1.3}$$

•Άσκηση **2** *Είναι το πρόβλημα*

$$EMPTY = \{M | L(M) = \emptyset\}$$

επιλύσιμο; Υποθέστε ότι το πρόβλημα

$$ACCEPT = \{(M, w) | M(w) = NAI\}$$

είναι μη επιλύσιμο.

Λύση: Υποθέτω ότι το πρόβλημα άγνωστης πολυπλοκότητας $EMPTY$ είναι επιλύσιμο από την μηχανή R_E. Θα ανάγω το πρόβλημα $ACCEPT$ στο $EMPTY$ και θα το λύσω με την βοήθεια της R_H καταλήγοντας σε άτοπο.

Πρέπει να κατανοήσω τι σημαίνει η απάντηση ΝΑΙ ή ΟΧΙ της μηχανής R_E για κάθε στιγμιότυπο (M, w) του $ACCEPT$.

- Για κάθε στιγμιότυπο (M, w) του $ACCEPT$ όταν η μηχανή R_E με είσοδο M τερματίζει $R_E(M) =$ ΝΑΙ, τότε $M \in EMPTY$, άρα $L(M) = \emptyset$, άρα για κάθε είσοδο x η $M(x) \neq$ ΝΑΙ. Συνεπώς $(M, w) \notin ACCEPT$. Άρα, αποκλείεται η M στη λέξη w να τερματίσει σε ΝΑΙ, δηλαδή $M(w) \neq NAI$.

  Καταλήγω στην παρακάτω, σαφέστατη, 1 δυνατότητα:

  $$R_E(M) = \text{NAI} \Rightarrow M(w) \neq \text{NAI} \tag{1.4}$$

- Για κάθε στιγμιότυπο (M, w) του $ACCEPT$ που μηχανή R_E με είσοδο M τερματίζει $R_E(M) =$ ΟΧΙ τότε $L(M) \neq \emptyset$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει τουλάχιστον μία λέξη x ώστε $M(x) =$ ΝΑΙ. Μα δεν μπορώ να ξέρω αν η M με είσοδο τη δοσμένη λέξη w τερματίζει σε ΝΑΙ.

  Καταλήγω στις παρακάτω, δυστυχώς, δύο δυνατότητες:

  $$R_E(M) = \text{OXI} \Rightarrow M(w) = \begin{cases} \text{NAI} \\ \text{ή} \\ \neq \text{NAI} \end{cases} \tag{1.5}$$

Η (1.5) δείχνει ότι από το ΟΧΙ της R_E σε ένα οποιοδήποτε στιγμιότυπο (M, w) του $ACCEPT$ δεν μπορούμε να βγάλουμε συμπέρασμα. Αυτό συμβαίνει επειδή το σύνολο $L(M)$ των λέξεων που η M αποδέχεται μπορεί να είναι οποιοδήποτε άλλο εκτός από τα $\{w\}$ ή $\emptyset$. Αν όμως τύχαινε και $L(M) = \{w\}$ ή $\emptyset$ τότε από την απάντηση της R_E θα μπορούσαμε να βγάλουμε συμπέρασμα αν $M(w) =$ ΝΑΙ ή ΟΧΙ.

Η λύση είναι για κάθε στιγμιότυπο (M, w) του $ACCEPT$ να τροποποιούμε την M σε M_w η οποία να απορρίπτει κάθε είσοδο $x \neq w$ και μόνο στην είσοδο w να εξομοιώνει την $M(w)$. Προφανώς η M_w είναι δυνατόν να πει ΝΑΙ μόνο με είσοδο w και εφόσον η $M(w) =$ ΝΑΙ. Άρα $L(M_w) \neq \emptyset \Leftrightarrow M(w) =$ ΝΑΙ, δηλαδή αν $(M, w) \in ACCEPT$.

Καταλήγουμε ότι μπορούμε να αποφασίσουμε οποιοδήποτε στιγμιότυπο (M, w) του $ACCEPT$ με την χρήση της R_E ως εξής:

$$\textbf{input} : (M, w) \Rightarrow R_E(M_w) = \begin{cases} \text{NAI} \Rightarrow M(w) \neq \text{NAI} \Rightarrow \textbf{output} : \text{OXI} \\ \\ \text{OXI} \Rightarrow M(w) = \text{NAI} \Rightarrow \textbf{output} : \text{NAI} \end{cases} \tag{1.6}$$

•Άσκηση **3** *Είναι το πρόβλημα*

$$EQ = \{\langle M_1, M_2\rangle | L(M_1) = L(M_2)\}$$

επιλύσιμο; Υποθέστε ότι το πρόβλημα

$$EMPTY = \{M | L(M) = \emptyset\}$$

είναι μη επιλύσιμο.

Λύση: Υποθέτω ότι το πρόβλημα άγνωστης πολυπλοκότητας EQ είναι επιλύσιμο από την μηχανή R_{EQ}. Θα ανάγω το πρόβλημα $EMPTY$ στο EQ και θα το λύσω με την βοήθεια της R_{EQ} καταλήγοντας σε άτοπο.

Πρέπει να κατανοήσω τι σημαίνει η απάντηση ΝΑΙ ή ΟΧΙ της μηχανής R_{EQ} για κάθε στιγμιότυπο M του $EMPTY$.

- Για κάθε στιγμιότυπο M του $EMPTY$ όταν η μηχανή R_{EQ} με είσοδο (M, M'), όπου M' μια τυχαία μηχανή, τερματίζει $R_{EQ}(M, M') =$ ΝΑΙ, τότε $L(M) = L(M')$. Δηλαδή δεν μπορώ να βγάλω συμπέρασμα αν $L(M) = \emptyset$ ή $\neq \emptyset$.

$$R_{EQ}(M, M') = \text{ΝΑΙ} \Rightarrow L(M) = L(M') \tag{1.7}$$

- Για κάθε στιγμιότυπο M του $EMPTY$ όταν η μηχανή R_{EQ} με είσοδο (M, M'), όπου M' μια τυχαία μηχανή, τερματίζει $R_{EQ}(M, M') =$ ΟΧΙ, τότε $L(M) \neq L(M')$. Δηλαδή πάλι δεν μπορώ να βγάλω συμπέρασμα αν $L(M) = \emptyset$ ή $\neq \emptyset$.

$$R_{EQ}(M, M') = \text{ΟΧΙ} \Rightarrow L(M) \neq L(M') \tag{1.8}$$

Αυτό συμβαίνει επειδή η μηχανή M' είναι μια τυχαία μηχανή και δεν έχω καμιά γνώση για το $L(M')$ αυτής. Αν όμως επιλέξω ως δεύτερη μηχανή τη $M_\emptyset$ που δεν αποδέχεται καμία λέξη (εκ κατασκευής), δηλαδή, $L(M_\emptyset) = \emptyset$ τότε από την απάντηση της R_{EQ} θα μπορούσαμε να βγάλουμε συμπέρασμα για οποιαδήποτε πρώτη μηχανή M αν $L(M) = \emptyset$ ή $\neq \emptyset$. Σχηματικά, για κάθε στιγμιότυπο M του $EMPTY$ έχουμε

$$\begin{aligned} R_{EQ}(M, M_\emptyset) = \text{ΝΑΙ} \Rightarrow L(M) = L(M') = \emptyset \\ R_{EQ}(M, M_\emptyset) = \text{ΟΧΙ} \Rightarrow L(M) \neq L(M') = \emptyset \end{aligned} \tag{1.9}$$

•Άσκηση **4** *Είναι το πρόβλημα*

$$L_{111} = \{M | \textit{H } M \textit{ τυπώνει 111 με είσοδο } \emptyset\}$$

επιλύσιμο; Υποθέστε ότι το πρόβλημα

$$L_\emptyset = \{M | \textit{H } M \textit{ τερματίζει με είσοδο } \emptyset\}$$

είναι μη επιλύσιμο.

Λύση: Υποθέτω ότι το πρόβλημα άγνωστης πολυπλοκότητας L_{111} είναι επιλύσιμο από την μηχανή R_{111}. Θα ανάγω το πρόβλημα $L_\emptyset$ στο L_{111} και θα το λύσω με την βοήθεια της R_{111} καταλήγοντας σε άτοπο.

Πρέπει να κατανοήσω τι σημαίνει η απάντηση ΝΑΙ ή ΟΧΙ της μηχανής R_{111} για κάθε στιγμιότυπο M του $L_\emptyset$.

1. Για κάθε στιγμιότυπο M του $L_\emptyset$, που η μηχανή M με είσοδο $\emptyset$ τυπώνει 111 και τερματίζει, η μηχανή R_{111} θα μας απαντήσει, ορθά, ΝΑΙ και με βάση αυτή την απάντηση ορθά θα μπορούμε να εντάξουμε την M στην $L_\emptyset$.

2. Για κάθε στιγμιότυπο M του $L_\emptyset$, που η μηχανή M με είσοδο $\emptyset$ ΔΕΝ τυπώνει 111 ΚΑΙ τερματίζει, η μηχανή R_{111} θα μας απαντήσει, ΟΧΙ. Με βάση αυτή την απάντηση της R_{111} ΔΕΝ θα εντάξουμε την M στην $L_\emptyset$. Λανθασμένα όμως, διότι η M όντως τερματίζει με είσοδο $\emptyset$. Εύκολα μπορούμε να το αποφύγουμε αυτό υποχρεώνοντας (τροποποιώντας) την κατάσταση τερματισμού της M, ώστε *όταν* η M εισέλθει σε αυτή να περάσει στην κατάσταση που να τυπώνει 111 και μετά να τερματίζει. Άρα, για κάθε στιγμιότυπο M του $L_\emptyset$ θα τροποποιούμε την M ως άνω σε M' και θα δίνουμε είσοδο στην R_{111} την M'.

3. Για κάθε στιγμιότυπο M του $L_\emptyset$, που η μηχανή M με είσοδο $\emptyset$ τυπώνει 111 ΚΑΙ ΔΕΝ τερματίζει, η μηχανή R_{111} θα μας απαντήσει ΝΑΙ. Με βάση αυτή την απάντηση της R_{111} θα εντάξουμε την M στην $L_\emptyset$. Αυτό είναι λάθος όμως, διότι η M ΔΕΝ τερματίζει με είσοδο $\emptyset$. Εύκολα μπορούμε να το αποφύγουμε αυτό υποχρεώνοντας (τροποποιώντας) την M ώστε με ένα νέο σύμβολο π.χ. '§' να κάνει ότι έκανε με το '1'. Δηλαδή, σε κάθε κατάσταση που είχε το '1' το αλλάζει με το '§'. Επίσης αντικαθιστά στην είσοδο κάθε '1' με το '§'. Τέλος όταν είναι να τυπώσει '1' θα τυπώνει '§'. Μόνο όταν εισέλθει στην τελική κατάσταση τερματισμού της M θα τυπώνει 111 και θα τερματίζει. Άρα, για κάθε στιγμιότυπο M του $L_\emptyset$ θα κάνουμε όλες τις άνω τροποποιήσεις που περιγράψαμε στην M και θα δίνουμε είσοδο στην R_{111} την M'.

Από τα άνω 1, 2, 3 καταφέραμε να αποφασίσουμε κάθε στιγμιότυπο M του $L_\emptyset$ με την βοήθεια της R_{111} τροφοδοτώντας την με την τροποποιημένη M'. Συνεπώς

$$M \in L_\emptyset \Leftrightarrow R_{111}(M') = \text{ΝΑΙ}$$

που είναι άτοπο.

•Άσκηση **5** *Είναι το πρόβλημα*[1]

$$L_f = \{M|\ L(M) = \textit{πεπερασμένο}\}$$

επιλύσιμο; Υποθέστε ότι το πρόβλημα

$$L_{halt} = \{(M, w)| H\ M(w) \neq \nearrow\}$$

είναι μη επιλύσιμο.

Λύση: Υποθέτω ότι το πρόβλημα άγνωστης πολυπλοκότητας L_f είναι επιλύσιμο από την μηχανή R_f. Θα ανάγω το πρόβλημα L_{halt} στο L_f και θα το λύσω με την βοήθεια της R_f καταλήγοντας σε άτοπο.

Πρέπει να κατανοήσω τι σημαίνει η απάντηση ΝΑΙ ή ΟΧΙ της μηχανής R_f για κάθε στιγμιότυπο (M, w) του L_{halt}.

1. Για κάθε στιγμιότυπο (M, w) του L_{halt}, που η μηχανή M με είσοδο w τερματίζει, αν επίσης συμβαίνει η M να τερματίζει και σε *πεπερασμένο* πλήθος άλλων λέξεων $y \neq w$, τότε η μηχανή R_f με είσοδο M θα μας απαντήσει ΝΑΙ. Με βάση αυτή την απάντηση ορθά θα μπορούμε να εντάξουμε την M στην L_{halt}. Άρα ορθά:
$$R_f(M) = \text{ ΝΑΙ } \Rightarrow (M, w) \in L_{halt}$$

2. Για κάθε στιγμιότυπο (M, w) του L_{halt}, ώστε η μηχανή M με είσοδο w τερματίζει, αλλά επίσης η M τερματίζει επιπλέον σε *άπειρο* πλήθος λέξεων $y \neq w$ τότε η μηχανή $R_f(M) = $ ΟΧΙ (διότι $L(M) = $ άπειρο). Άρα λανθασμένα (διότι $M(w) \neq \nearrow$):

$$R_f(M) = \text{ ΟΧΙ } \Rightarrow (M, w) \notin L_{halt}$$

Μια λύση θα ήταν να τροποποιήσουμε την M σε M' που υποχρεωτικά εφόσον $M(w) \neq \nearrow$ στην συνέχεια η M' να λέει ΝΑΙ σε πεπερασμένου πλήθους λέξεις $y \neq w$ (π.χ. να επιλέγει 10 λέξεις

[1] $L(M) = \{w \in S^*|M(w) = \text{ΝΑΙ}\}$, δηλαδή το σύνολο των λέξεων που η μηχανή M τερματίζει σε ΝΑΙ.

$x_1, \ldots, x_{10} \neq w$ και να τερματίζει μόνο σε αυτές). Συνεπώς η $R_f(M') =$ NAI. Άρα σωστά (διότι $M(w) \neq \nearrow$):

$$R_f(M) = \text{ NAI } \Rightarrow (M, w) \in L_{halt}$$

Όμως, η τροποποίηση της M σε M' μας οδηγεί στο παρακάτω πρόβλημα.

3. Για κάθε στιγμιότυπο (M, w) του L_{halt}, που η μηχανή M με είσοδο w ΔΕΝ τερματίζει, άρα και η M' κατόπιν δεν τερματίζει σε *πεπερασμένο* πλήθος άλλων λέξεων $y \neq x$, τότε η μηχανή R_f με είσοδο M' θα μας απαντήσει NAI (διότι $L(M') = \emptyset$, πεπερασμένο). Άρα λανθασμένα (διότι $M(w) = \nearrow$):

$$R_f(M) = \text{ NAI } \Rightarrow (M, w) \in L_{halt}$$

Από τα άνω 1, 2, 3 αντιλαμβανόμαστε ότι δεν μπορούμε να βγάλουμε ορθό συμπέρασμα από κάθε απάντηση της R_f επειδή είτε η M' τερματίσει (άρα θα δεχτεί 10 άλλες λέξεις) στο w είτε όχι (άρα δεν θα δεχτεί καμία άλλη λέξη) το $L(M') =$ πεπερασμένο. Άρα η τροποποιημένη M' είναι λάθος.

Η σωστή τροποποίηση είναι: για κάθε στιγμιότυπο (M, w) του L_{halt}, δημιουργούμε την M_w που προσομοιώνει την $M(w)$ και αν $M(w) \neq \nearrow$ τότε η M_w να αποδέχεται άπειρο πλήθος λέξεων (άρα $L(M_w) =$ άπειρο), αλλιώς η M_w κρεμάει στο w (και άρα $L(M_w) = \emptyset$ πεπερασμένο).

Συνεπώς, για κάθε στιγμιότυπο (M, w):

• Αν $R_f(M_w) =$ NAI $\Rightarrow M_w \in L_f \Rightarrow$ η μόνη περίπτωση η M_w να αποδεχτεί πεπερασμένο πλήθος λέξεων είναι όταν $L(M_w) = \emptyset$ δηλαδή όταν $M(w) = \nearrow$ και τελικά $(M, w) \notin L_{halt}$.
• Αν $R_f(M_w) =$ OXI $\Rightarrow M_w \notin L_f \Rightarrow |L(M_w)| = \infty \Rightarrow$ η μόνη περίπτωση η M_w να αποδεχτεί άπειρο πλήθος λέξεων είναι όταν $M(w) \neq \nearrow$ και τελικά $(M, w) \in L_{halt}$.

Από τα άνω, καταφέραμε να αποφασίσουμε κάθε στιγμιότυπο του L_{halt}, υποθέτοντας ότι L_f είναι επιλύσιμο, άτοπο.