Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Θεωρία Υπολογισμού

2η Διάλεξη

Πεπερασμένα αυτόματα

Κανονικές Γλώσσες

Αλέξιος Καπόρης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πό

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άσκηση 3.4 Έστω L η γλώσσα της οποίας οι συμβολοσειρές περιέχουν ακριβώς μια εμφάνιση του 00. Για να κατασκευάσουμε μια κανονική έκφραση για την L μπορούμε να αρχίσουμε με την έκφραση 00 και να αναρωτηθούμε τι πρέπει να βάλουμε δεξιά και αριστερά αυτής. Έστω l η έκφραση στα αριστερά. Η l δε μπορεί να επιτρέπει τη δημιουργία συνεχόμενων μηδενικών και δεν μπορεί να τελειώνει σε 0, γιατί τότε θα είχαμε τη δημιουργία του 000. Αν λοιπόν αναγκάσουμε κάθε 0 να ακολουθείται από 1, τότε η ζητούμενη έκφραση είναι η $l = (1 + 01)^*$. Αντίστοιχα, αν r είναι η έκφραση στα δεξιά, τότε και αυτή δε μπορεί να περιέχει συνεχόμενα μηδενικά αλλά και να *αρχίζει* από 0. Μια τέτοια έκφραση είναι η $r = (1 + 10)^*$. Άρα η ζητούμενη έκφραση για την L είναι η $(1 + 01)^*00(1 + 10)^*$.

Ασκηση 3.5 Έστω L η γλώσσα της οποίας οι συμβολοσειρές δεν περιέχουν το 110. Λέγοντας ότι μια συμβολοσειρά δεν περιέχει το 110 είναι ισοδύναμο με το να πούμε, ότι αν εμφανίζεται το 11 ή γενικότερα μια ακολουθία από 1, τότε δεν μπορεί να ακολουθεί 0. Άρα, μια συμβολοσειρά που δεν περιέχει το 110 αποτελείται από ένα αρχικό τμήμα που δεν περιέχει 11 (ώστε να επιτρέπεται η ύπαρξη 0) και μια ακολουθία από 1 στο τέλος. Το αρχικό τμήμα μπορεί να αποδοθεί με την έκφραση $(0+10)^*$. Άρα η ζητούμενη έκφραση για τη γλώσσα L είναι η $(0+10)^*1^*$.

$\{x \in \Sigma^* \mid$ το μήκος της x είναι πολλαπλάσιο του 5$\}$

Αν θέσουμε $(0+1)=\omega$, τότε η ζητούμενη κανονική έκφραση είναι η $(\omega^5)^*$.

$\{x \in \Sigma^* \mid$ η x τελειώνει σε 01 ή σε 11$\}$

Η γλώσσα αυτή είναι ένωση δύο γλωσσσών, με αντίστοιχες κανονικές εκφράσεις $(0+1)^*01$ και $(0+1)^*11$.

Συνεπώς η ζητούμενη κανονική έκφραση είναι η $(0+1)^*01+(0+1)^*11$.

{ $x \in \Sigma^*$ | η x περιέχει τουλάχιστον ένα 1}

Η ζητούμενη κανονική έκφραση είναι η $(0+1)^*1(0+1)^*$.

$\{ x \in \Sigma^* \mid$ η x δεν περιέχει ούτε το 111, ούτε το 000$\}$

Η ζητούμενη κανονική έκφραση είναι η

$\omega =$
$(\in+0+00)(10+110+100+1100)^*(\in+1+11)$

$\{x \in \Sigma^* \mid$ η x περιέχει τη συμβολοσειρά $111000\}$

- Η ζητούμενη κανονική έκφραση είναι η $(0+1)^*111000(0+1)^*$

- Έστω η γλώσσα L που περιέχει όλες τις συμβολοσειρές του που αρχίζουν με *ab* και συνεχίζουν είτε με ένα είτε με δύο είτε με τρία *a.* Για παράδειγμα οι συμβολοσειρές *ε, a, aa b, abb, ab,* δεν ανήκουν στην L, ενώ οι *aba, abaabaa, abaaaaba, abaaabaa* ανήκουν. Η είναι η κενή συμβολοσειρά.
- Να γράψετε κανονική παράσταση που να περιγράφει τη γλώσσα L.

ab(a+aa+aaa)(a+b)*

ή απλούστερα

aba(a+b)*

και οι δύο κανονικές εκφράσεις περιγράφουν την ίδια γλώσσα

Δώστε τις κανονικές εκφράσεις που αντιστοιχούν στις παρακάτω γλώσσες:

i) $\{x \in \Sigma^* \mid$ η x δεν αρχίζει από $101\}$

ii) $\{x \in \Sigma^* \mid$ η x δεν τελειώνει σε $00\}$

i) ε+10+1+(0+11+100)(1+0)*

ii) ε+0+(0+1)*1+(0+1)*10

$$\varepsilon+0+1+\left\{\begin{array}{c}\cancel{00}\\01\\10\\11\end{array}\right\}+(0+1)^*\left\{\begin{array}{c}\cancel{00}\\01\\10\\11\end{array}\right\}$$

Περιγράψτε τις γλώσσες που αντιστοιχούν στις παρακάτω κανονικές εκφράσεις:

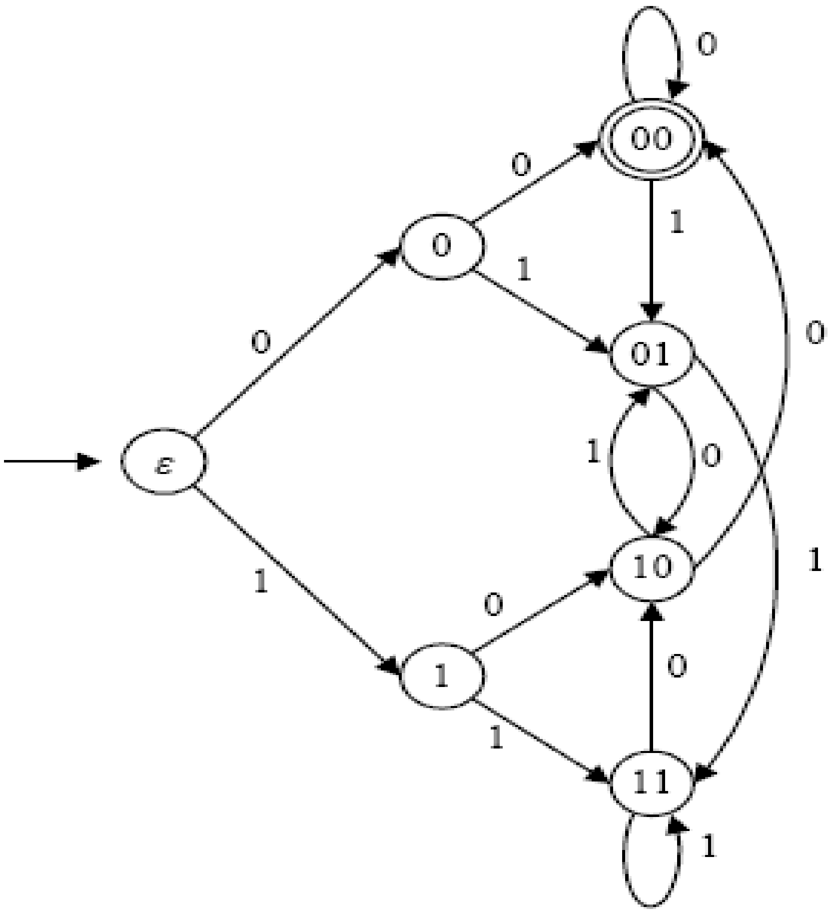
i) 0*1(0+1)*

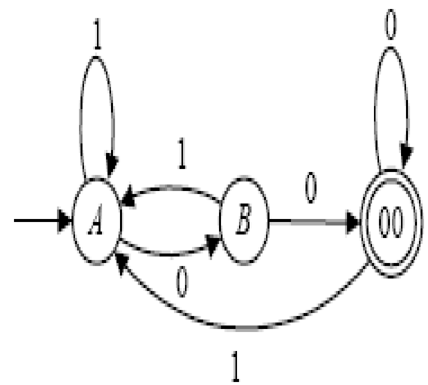
ii) (11+0)*(00+1)*

i) {x$\in\Sigma^*$ | η x περιέχει τουλάχιστον ένα 1}

ii) {x$\in\Sigma^*$ | η x μετά από ομάδα με περιττό αριθμό άσσων δεν μπορεί να περιέχει ομάδα με περιττό αριθμό μηδενικών.}

Έστω L η γλώσσα που αποτελείται από τις συμβολοσειρές $x \in \{0,1\}^*$ που τελειώνουν σε 00. Η απόφαση αν η x ανήκει ή όχι στην L εξαρτάται μόνο από τα δύο τελευταία

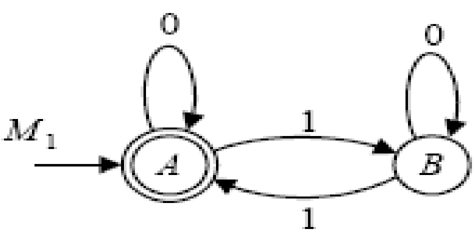


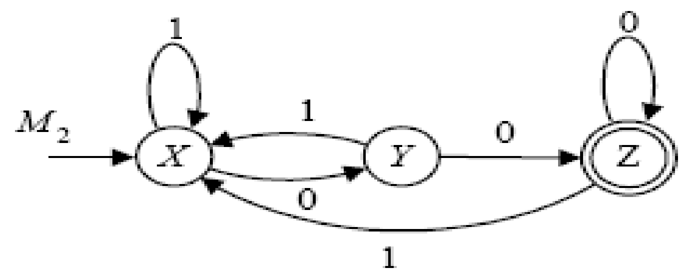


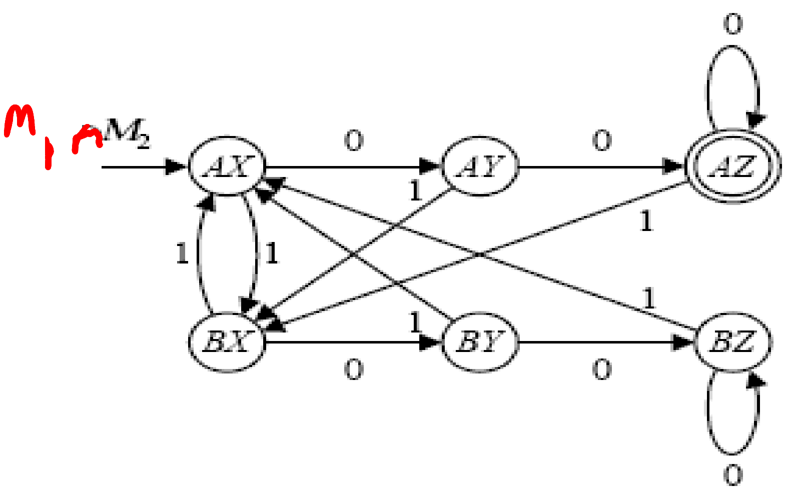
		Είσοδος	
		0	1
Κατάσταση	A	B	A
	B	00	A
	00	00	A

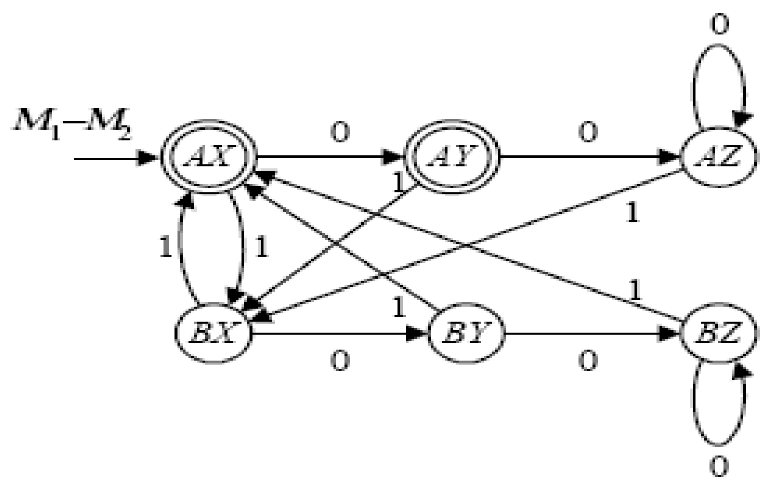
Έστω M_1 και M_2 τα αυτόματα του Σχήματος 4.3 τα οποία αναγνωρίζουν τις γλώσσες:

$$
\begin{aligned}
L_1 &= \{x \in \{0,1\}^* |\ \text{η } x \text{ περιέχει ζυγό αριθμό άσσων}\} \\
L_2 &= \{x \in \{0,1\}^* |\ \text{η } x \text{ τελειώνει σε } 00.\}
\end{aligned}
$$

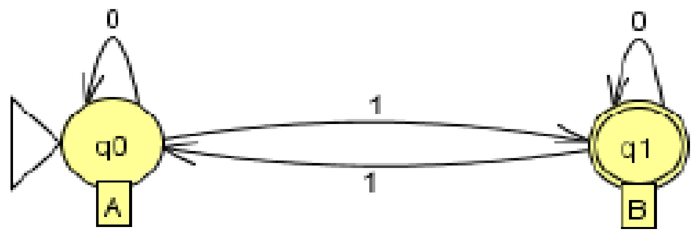




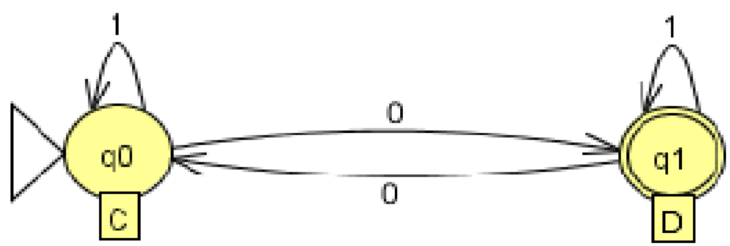




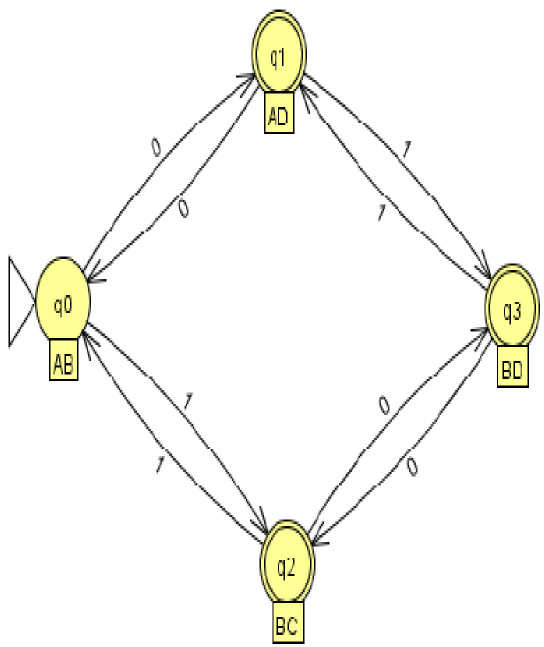
Έστω, για παράδειγμα, ότι θέλουμε να σχεδιάσουμε ένα αυτόματο που να αναγνωρίζει όλες τους δυαδικούς αριθμούς που περιέχουν περιττό πλήθος από 1 (η γλώσσα L_1). Δεν χρειάζεται να θυμόμαστε το πλήθος των 1 που έχουμε διαβάσει. Αρκεί μόνο να θυμόμαστε αν έχουμε διαβάσει άρτιο πλήθος από 1 (μέσω της κατάστασης q0) ή περιττό πλήθος από 1 (μέσω της κατάστασης q1). Σας δίνω το αυτόματο στη συνέχεια.



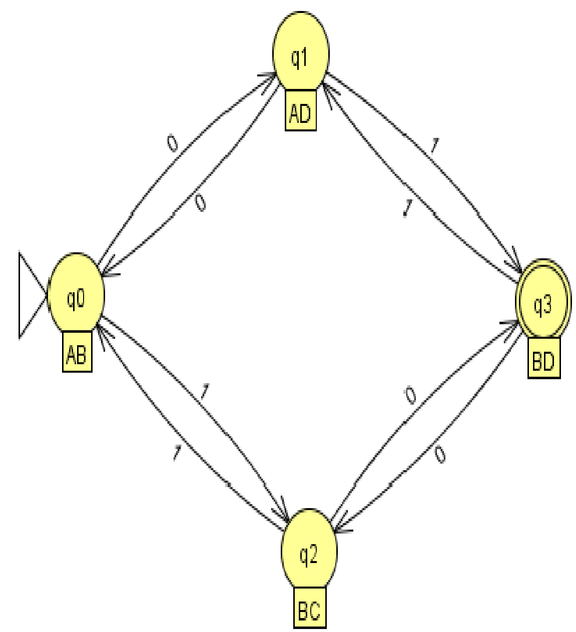
Το αυτόματο που ακολουθεί αναγνωρίζει όλους τους δυαδικούς αριθμούς που περιέχουν περιττό πλήθος 0 (η γλώσσα L_2).



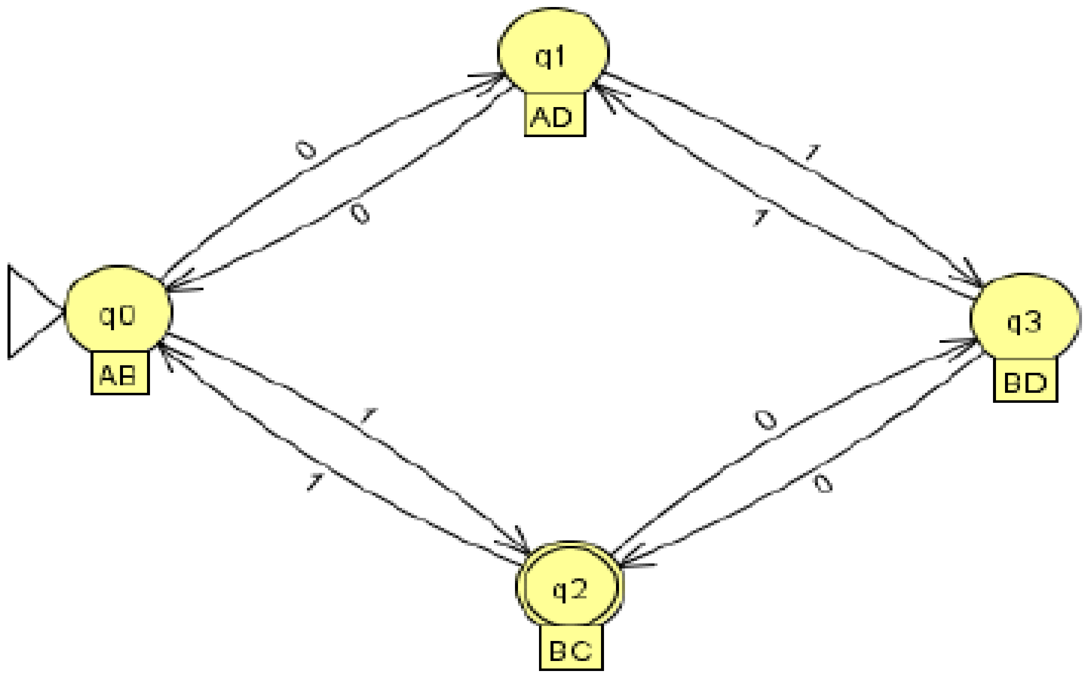
Σύνολο τελικών καταστάσεων για την $L_1 \cup L_2$: $F = \{ (r_1, r_2) \mid r_1 \in F_1$ **ή** $r_2 \in F_2 \}$



Σύνολο τελικών καταστάσεων για την $L_1 \cap L_2$, $F = \{ (r_1, r_2) \mid r_1 \in F_1$ **και** $r_2 \in F_2 \}$



Σύνολο τελικών καταστάσεων για την $L_1 — L_2$, $F = \{ (r_1, r_2) \mid r_1 \in F_1$ **και** $r_2 \notin F_2 \}$



Όσο αφορά στο συμπλήρωμα $\neg L = \Sigma^* — L$, τότε αρκεί να κάνουμε μη τελικές τις τελικές καταστάσεις και τελικές τις μη τελικές. Δίνουμε για παράδειγμα το συμπλήρωμα της L_2.