



Πανεπιστήμιο Αιγαίου

# Τηλεπικοινωνίες

## Ενότητα 2 : Αναπαράσταση Σημάτων και Συστημάτων και Εφαρμογές στις Τηλεπικοινωνίες

Δημοσθένης Βουγιούκας (dnougiou@aegean.gr)

Αναπληρωτής Καθηγητής

Τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών & Επικοινωνιακών Συστημάτων



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



# Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



# Περιεχόμενα

4

- Σειρά Fourier
- Μ/Σ Fourier
- Φασματική Πυκνότητα
- Συναρτήσεις Αυτοσυσχέτισης / Συσχέτισης / Συνέλιξης
- Μετάδοση Σημάτων Μέσω Γραμμικών Συστημάτων
- Φίλτρα
- Δειγματοληψία
- Μ/Σ Hilbert
- Προ-περιβάλλουσα
- Ζωνοπερατά Σήματα και Συστήματα
- Φάση και Καθυστέρηση Ομάδας

# Σειρά Fourier

5

- Έστω περιοδικό σήμα  $g_p(t)$  με περίοδο  $T_0$ .
- Ανάπτυξη σε σειρά Fourier (*Fourier series expansion*)

$$g_p(t) = a_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T_0}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{T_0}\right) \right]$$

- Όπου  $a_n$  και  $b_n$  τα πλάτη των συνημιτονικών και ημιτονικών όρων, αντίστοιχα, και  $n/T_0$  η  $n$ -οστη αρμονική της θεμελιώδους συχνότητας  $1/T_0$ .
- Καθένας από τους όρους  $\cos(2\pi nt/T_0)$  και  $\sin(2\pi nt/T_0)$  ονομάζεται **συνάρτηση βάσης** (basis function).

# Σειρά Fourier

6

- Οι συναρτήσεις βάσεις σχηματίζουν ένα ορθογώνιο σύνολο (orthogonal set) στο διάστημα  $T_0$ :

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \cos\left(\frac{2\pi mt}{T_0}\right) \cos\left(\frac{2\pi nt}{T_0}\right) dt = \begin{cases} T_0/2, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \sin\left(\frac{2\pi mt}{T_0}\right) \sin\left(\frac{2\pi nt}{T_0}\right) dt = \begin{cases} T_0/2, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \cos\left(\frac{2\pi mt}{T_0}\right) \sin\left(\frac{2\pi nt}{T_0}\right) dt = 0, \quad \forall m, n$$

# Σειρά Fourier

7

- Το  $a_0$  είναι η μέση τιμή (mean value) του περιοδικού σήματος  $g(t)$  σε μία περίοδο  $T_0$ :

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} g_p(t) dt$$

- Τα  $a_n$  και  $b_n$  δίνονται από τις σχέσεις:

$$a_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} g_p(t) \cos\left(\frac{2\pi nt}{T_0}\right) dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} g_p(t) \sin\left(\frac{2\pi nt}{T_0}\right) dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

# Σειρά Fourier

- Για να εφαρμόσουμε την παραπάνω ανάπτυξη σε σειρά Fourier, θα πρέπει η περιοδική συνάρτηση  $g(t)$  να ικανοποιεί τις εξής συνθήκες (συνθήκες του Dirichlet):
  - να είναι μονοσήμαντη στο διάστημα  $T_0$
  - να εμφανίζει το πολύ ένα πεπερασμένο αριθμό ασυνεχειών στο διάστημα  $T_0$
  - να έχει ένα πεπερασμένο αριθμό μεγίστων και ελαχίστων στο διάστημα  $T_0$
  - να είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη, δηλαδή:  $\int_{-T_0/2}^{T_0/2} |g_p(t)| dt < \infty$
- Οι παραπάνω συνθήκες Dirichlet, ικανοποιούνται από τα περιοδικά σήματα που συνήθως εμφανίζονται στα τηλεπικοινωνιακά συστήματα.



# Μιγαδική Εκθετική Σειρά Fourier

9

- Αντικαθιστώντας τα συνημίτονα και τα ημίτονα με την εκθετική τους μορφή, δηλ.:

$$\cos\left(\frac{2\pi nt}{T_0}\right) = \frac{1}{2} \left[ \exp\left(\frac{j2\pi nt}{T_0}\right) + \exp\left(-\frac{j2\pi nt}{T_0}\right) \right]$$

$$\sin\left(\frac{2\pi nt}{T_0}\right) = \frac{1}{2j} \left[ \exp\left(\frac{j2\pi nt}{T_0}\right) - \exp\left(-\frac{j2\pi nt}{T_0}\right) \right]$$

και αντικαθιστώντας τους συντελεστές ως εξής:

$$c_n = \begin{cases} a_n - jb_n, & n > 0 \\ a_0, & n = 0 \\ a_n + jb_n, & n < 0 \end{cases}$$

παίρνουμε την μιγαδική εκθετική σειρά Fourier

# Μιγαδική Εκθετική Σειρά Fourier

10

- Μιγαδική εκθετική σειρά Fourier (complex exponential Fourier series):

$$g_p(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(\frac{j2\pi nt}{T_0}\right)$$

- όπου  $c_n$  είναι οι μιγαδικοί συντελεστές Fourier (complex Fourier coefficients)

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} g_p(t) \exp\left(-\frac{j2\pi nt}{T_0}\right) dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

# Μιγαδική Εκθετική Σειρά Fourier

11

- Έτσι ένα περιοδικό σήμα περιέχει όλες τις συχνότητες (τόσο τις θετικές, όσο και τις αρνητικές που συνδέονται αρμονικά με τη θεμελιώδη συχνότητα  $f_0=1/T_0$ ).
- Ο λόγος για τη χρήση **μιγαδικών συναρτήσεων βάσης** ( $\exp(j2\pi nt/T_0)$ ) και συνιστωσών με αρνητικές συχνότητες (που δεν έχουν καμία φυσική σημασία) είναι απλά η παροχή μιας συμπαγούς μαθηματικής περιγραφής ενός περιοδικού σήματος, που είναι κατάλληλη τόσο για θεωρητική όσο και για πρακτική εργασία.

# Σειρά Fourier: Διακριτό Φάσμα

12

- Το περιοδικό σήμα  $g_p(t)$  που υπάρχει στο πεδίο του χρόνου, περιγράφεται στο πεδίο της συχνότητας με τις συνιστώσες του στις συχνότητες  $0, \pm f_0, \pm 2f_0, \pm 3f_0, \dots$  που ονομάζονται **φάσμα (spectrum)**.
- Η αναπαράσταση του περιοδικού σήματος  $g_p(t)$  στο πεδίο του χρόνου και η αναπαράσταση στο πεδίο της συχνότητας είναι ισοδύναμες και συσχετίζονται με τη θεωρία Fourier.

# Σειρά Fourier: Διακριτό Φάσμα

13

- Οι μιγαδικοί συντελεστές Fourier,  $c_n$ , γράφονται:

$$c_n = |c_n| \exp[j \arg(c_n)]$$

- Το διάγραμμα του  $|c_n|$  συναρτήσει της συχνότητας δίνει το **πλάτος** του διακριτού φάσματος (discrete amplitude spectrum) του σήματος.
- Το διάγραμμα της  $\arg(c_n)$  συναρτήσει της συχνότητας δίνει το **φάση** του διακριτού φάσματος (discrete phase spectrum) του σήματος.

# Σειρά Fourier: Διακριτό Φάσμα

14

- Για μια πραγματική περιοδική συνάρτηση  $g_p(t)$  βρίσκουμε από τον ορισμό του συντελεστή Fourier  $c_n$  ότι ισχύει:

$$c_{-n} = c_n^*$$

- ή αλλιώς:

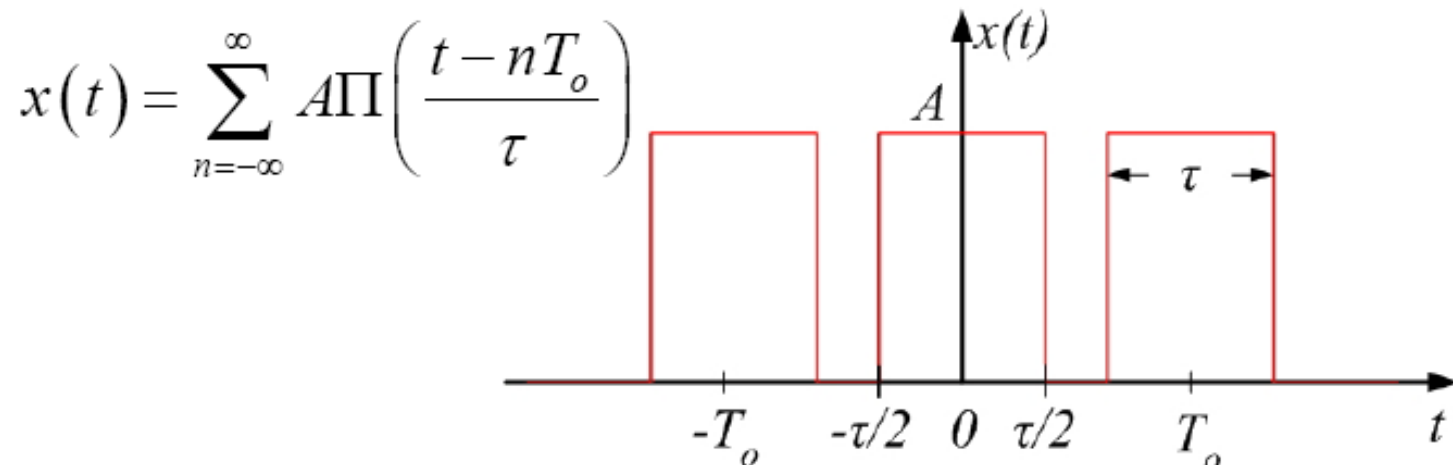
$$|c_{-n}| = |c_n| \quad \text{και} \quad \arg(c_{-n}) = -\arg(c_n)$$

- Δηλαδή το πλάτος του φάσματος ενός πραγματικού περιοδικού σήματος είναι συμμετρικό (**άρτια** συνάρτηση του  $n$ ) και η φάση αντισυμμετρική (**περιττή** συνάρτηση του  $n$ ) περί τον κάθετο άξονα που διέρχεται από την αρχή.

# Σειρά Fourier: Παράδειγμα 1

15

- Θεωρούμε την περιοδική παλμοσειρά



Για  $-T_o/2 \leq t \leq T_o/2$

$$x(t) = \begin{cases} A & -\tau/2 \leq t \leq \tau/2 \\ 0 & \text{στην υπόλοιπη περίοδο} \end{cases}$$

# Σειρά Fourier: Παράδειγμα 1

16

Μιγαδικός συντελεστής

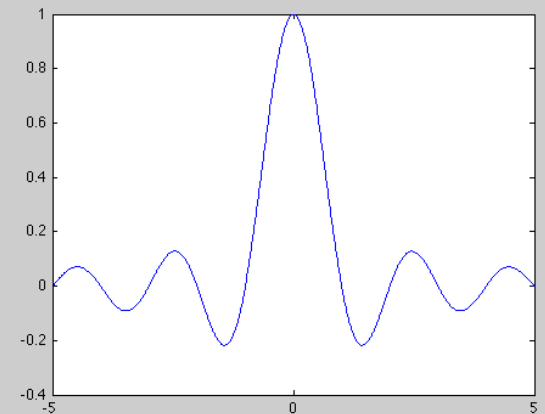
$$x_n = \frac{1}{T_o} \int_{-T_o/2}^{T_o/2} x(t) e^{-j\frac{2\pi n t}{T_o}} dt = \frac{A}{T_o} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j\frac{2\pi n t}{T_o}} dt$$

$$= \frac{A}{T_o} \left( -\frac{T_o}{j2\pi n} \right) \left[ e^{-j\frac{2\pi n t}{T_o}} \right]_{-\tau/2}^{\tau/2} = \frac{A}{T_o} \left( -\frac{T_o}{j2\pi n} \right) \left( e^{-j\frac{\pi n \tau}{T_o}} - e^{j\frac{\pi n \tau}{T_o}} \right)$$

$$= \frac{A}{\pi n} \sin \left( \frac{\pi n \tau}{T_o} \right) \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$x_n = \frac{A\tau}{T_o} \frac{T_o}{\pi n \tau} \sin \left( \frac{\pi n \tau}{T_o} \right) = \frac{A\tau}{T_o} \operatorname{sinc} \left( \frac{n\tau}{T_o} \right)$$

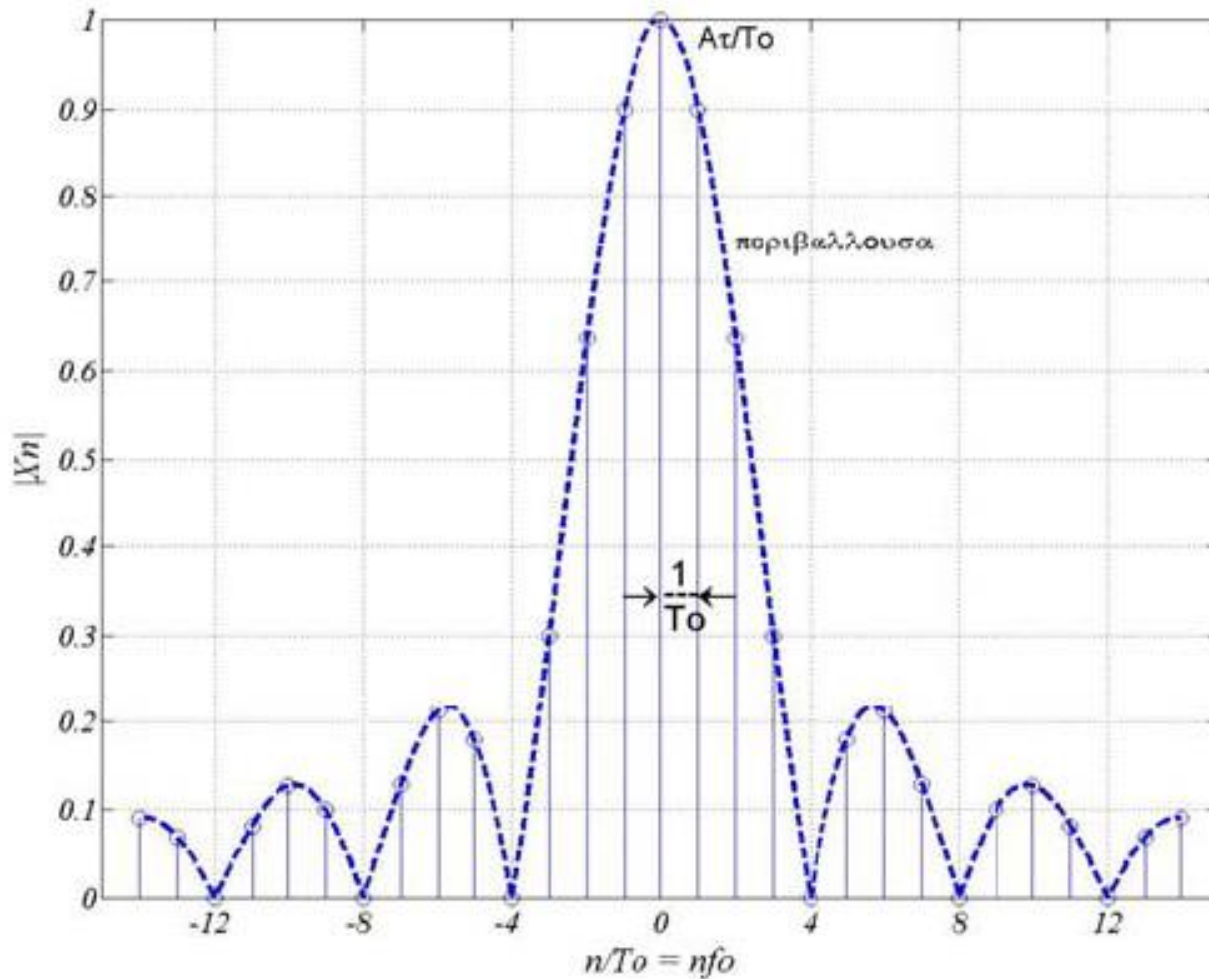
$$\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$





# Σειρά Fourier: Παράδειγμα 1

17



Μηδενισμοί για  
 $\frac{n\tau}{T_0} = \pm 1, \pm 2, \dots$

Παράδειγμα για

$$T_0 = 4\tau$$

Duty Cycle

$$\left(\frac{\tau}{T_0}\right) = 0.25$$

# Σειρά Fourier: Παράδειγμα 1

18

## □ Παρατηρήσεις

▣ Το μέγιστο πλάτος είναι  $\frac{A\tau}{T_o}$  και αντιστοιχεί σε μηδενική συχνότητα, δηλαδή πρόκειται για την dc συνιστώσα.

▣ Η απόσταση των αρμονικών είναι  $f_o = \frac{1}{T_o}$

▣ Οι μηδενισμοί συμβαίνουν για  $n$  που είναι ακέραια πολλαπλάσια του αντιστρόφου duty cycle, δηλαδή

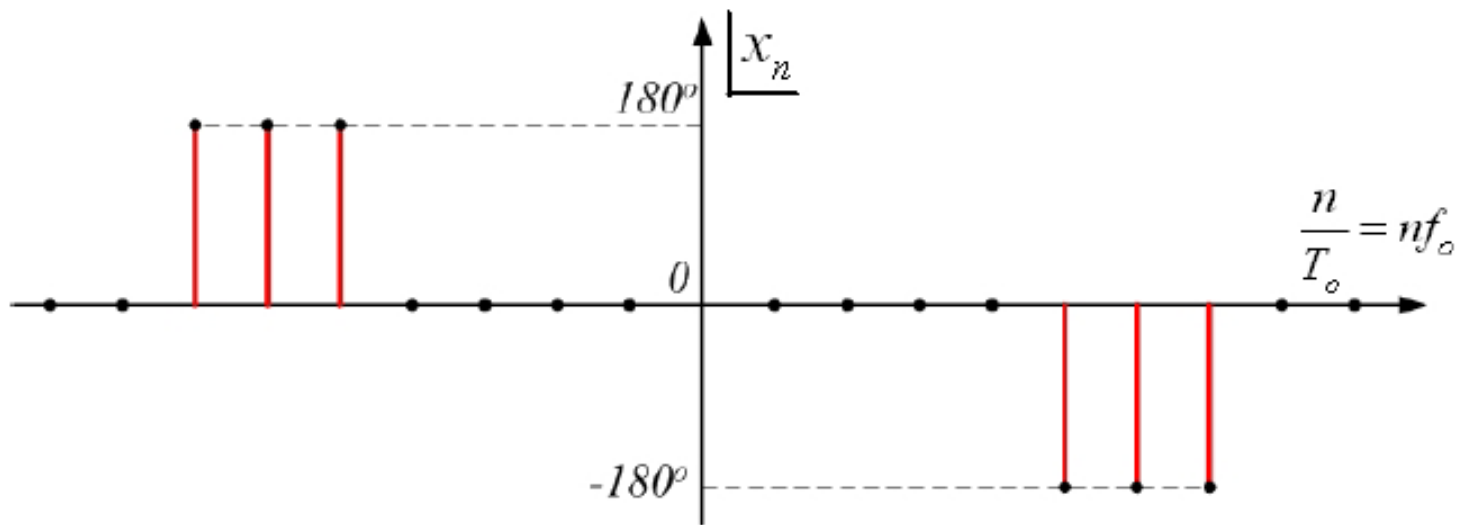
$$n = m \frac{T_o}{\tau} \Rightarrow nf_o = \frac{m}{\tau} \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots$$

# Σειρά Fourier: Παράδειγμα 1

19

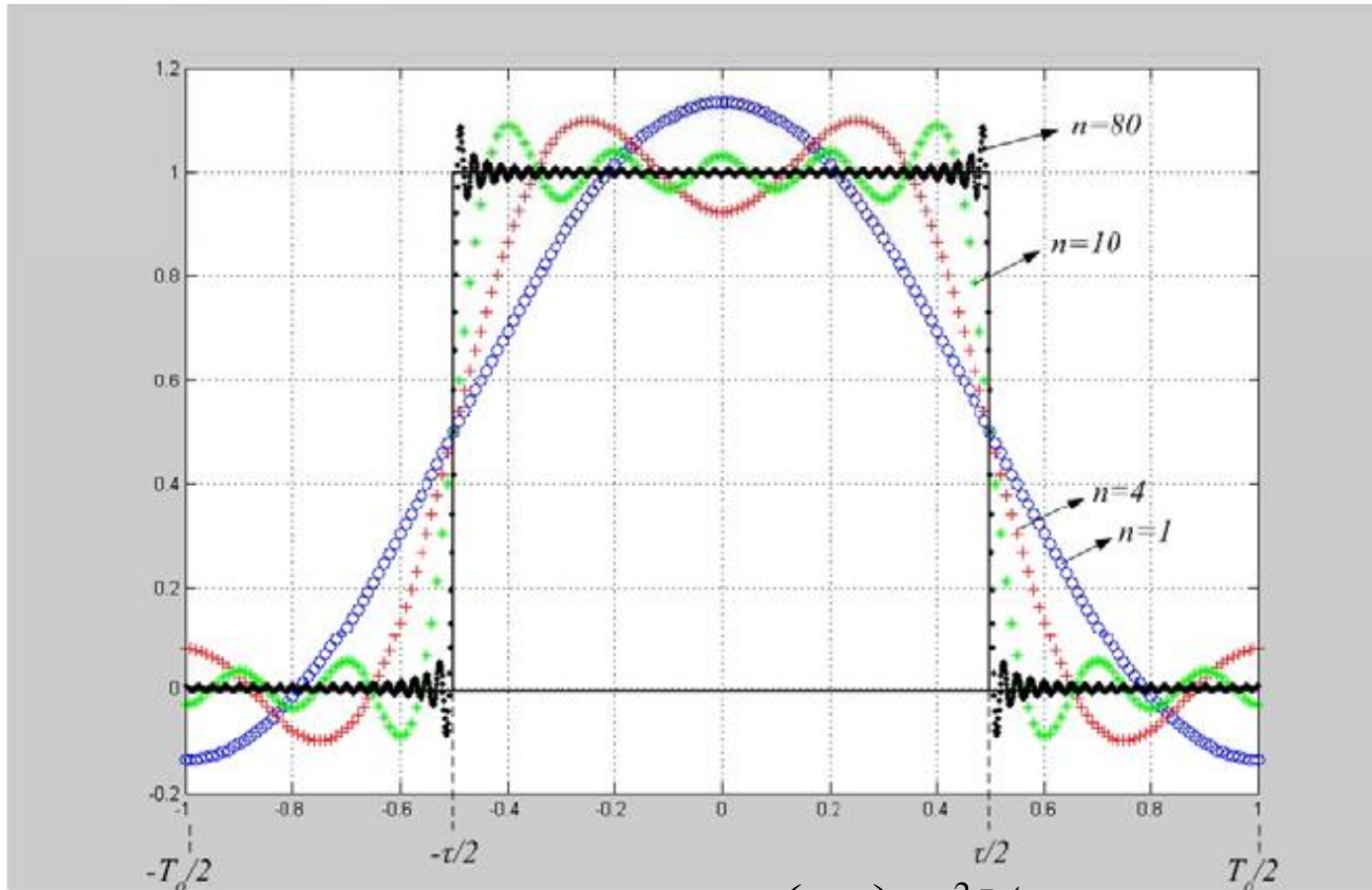
- Η φάση παίρνει τιμές  $0^\circ$  και  $\pm 180^\circ$  ανάλογα με την πολικότητα της συνάρτησης

$$\text{sinc}\left(\frac{n\tau}{T_o}\right)$$



# Σειρά Fourier: Παράδειγμα 1

20



$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{A\tau}{T_o} \operatorname{sinc}\left(\frac{n\tau}{T_o}\right)}_{x_n(t)} e^{j\frac{2\pi n t}{T_o}}$$

Τηλεπικοινωνίες

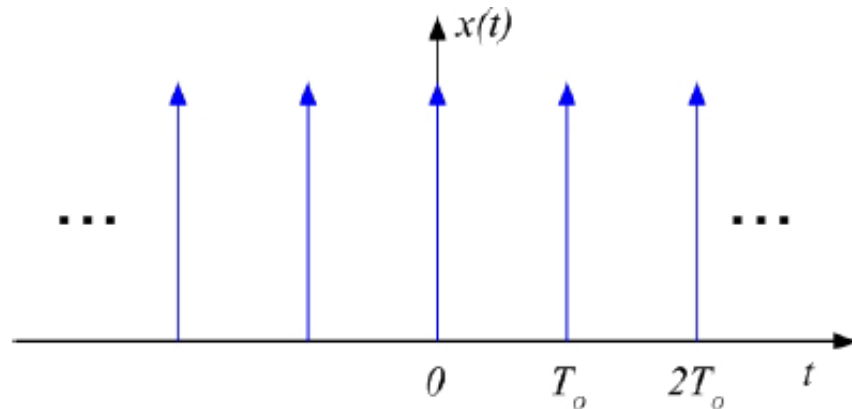
Περιοδική Παλμοσειρά

# Σειρά Fourier: Παράδειγμα 2

21

- Θεωρούμε την κρουστική παλμοσειρά

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_o)$$



- Οι μιγαδικοί συντελεστές Fourier είναι

$$x_n = \frac{1}{T_o} \int_{-T_o/2}^{T_o/2} x(t) e^{-j\frac{2\pi nt}{T_o}} dt = \frac{1}{T_o} \int_{-T_o/2}^{T_o/2} \delta(t) e^{-j\frac{2\pi nt}{T_o}} dt = \frac{1}{T_o}$$

# Σειρά Fourier: Παράδειγμα 2

22

- Άρα η κρουστική παλμοσειρά γράφεται

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_o) = \frac{1}{T_o} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\frac{2\pi nt}{T_o}}$$

- Το φάσμα της κρουστικής παλμοσειράς είναι διακριτό και αποτελείται από κρουστικές πλάτους  $1/T_o$  και σε συχνότητες ακέραια πολλαπλάσια της βασικής  $f_o=1/T_o$ . Άρα πρόκειται για κρουστική παλμοσειρά στο πεδίο της συχνότητας, που μπορεί να γραφεί:

$$X(f) = \frac{1}{T_o} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_o}\right)$$

# Σειρά Fourier: Παράδειγμα 3 (Γραμμικότητα)

23

Το  $x(t)$  είναι  
τετραγωνικός  
παλμός

$$y(t) = A/2$$

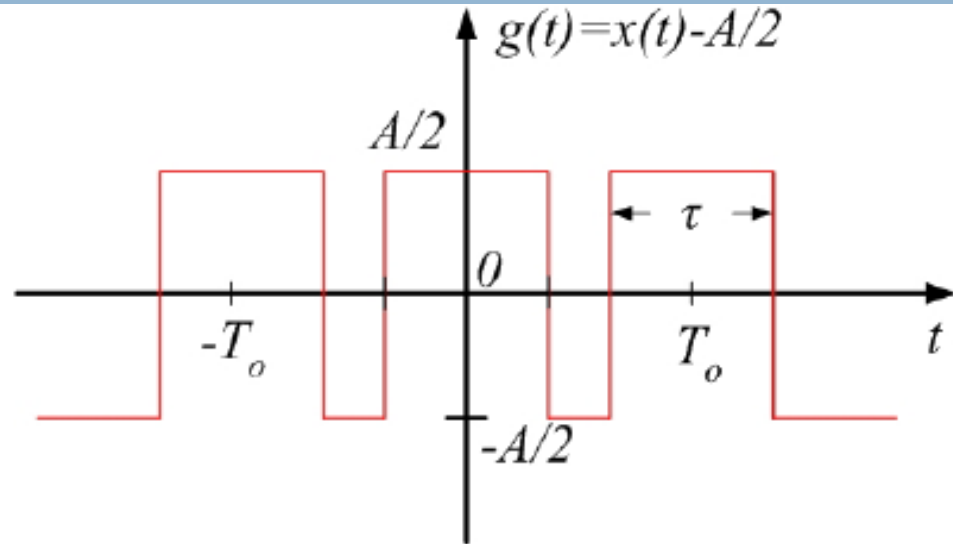
$$g(t) = \alpha x(t) + \beta y(t)$$

$$\alpha = 1 \quad \beta = -1$$

$$x_n = \frac{A\tau}{T_o} \operatorname{sinc}\left(\frac{n\tau}{T_o}\right)$$

$$y_n = \begin{cases} 0 & \text{για } n \neq 0 \\ A/2 & \text{για } n = 0 \end{cases}$$

$$g_n = \alpha x_n + \beta y_n = x_n - y_n = \begin{cases} x_n & \text{για } n \neq 0 \\ \frac{A\tau}{T_o} - \frac{A}{2} & \text{για } n = 0 \end{cases}$$

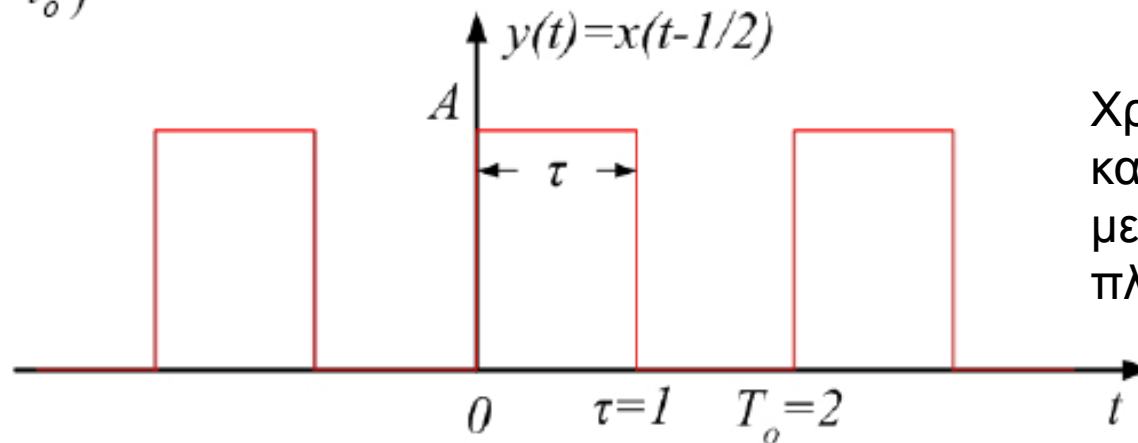


# Σειρά Fourier: Παράδειγμα 4 (Χρονική Ολίσθηση)

24

$$y(t) = x(t - t_o)$$

Απλή  
μετατόπιση  
στη φάση



Χρονική ολίσθηση  
κατά  $t_o = 1/2$  χωρίς  
μεταβολή στο  
πλάτος

$$y_n = e^{-j\frac{2\pi n t_o}{T_o}} x_n = e^{-j\frac{\pi n}{2}} x_n = e^{-j\frac{\pi n}{2}} \frac{A\tau}{T_o} \text{sinc}\left(\frac{n\tau}{T_o}\right) = e^{-j\frac{\pi n}{2}} \frac{A}{2} \text{sinc}\left(\frac{n}{2}\right)$$



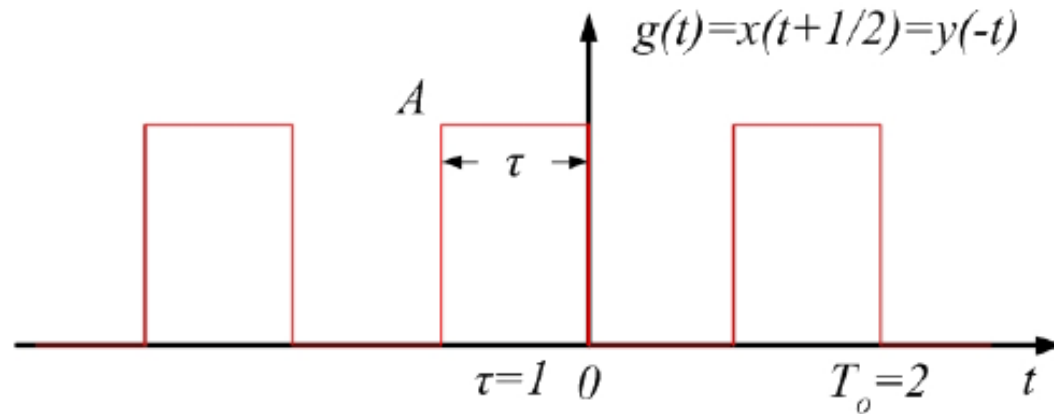
# Σειρά Fourier: Παράδειγμα 5 (Χρονική Αναδίπλωση)

25

$$y(t) = x(-t)$$



$$y_n = x_{-n}$$



Χρονική  
Αναδίπλωση

$$g_n = y_{-n} = e^{j\frac{\pi n}{2}} x_{-n} = e^{j\frac{\pi n}{2}} \frac{A}{2} \operatorname{sinc}\left(\frac{-n}{2}\right) = e^{j\frac{\pi n}{2}} \frac{A}{2} \operatorname{sinc}\left(\frac{n}{2}\right)$$

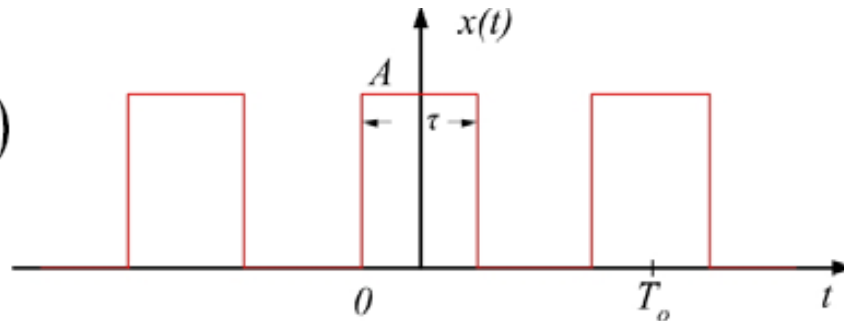
Χρονική  
Ολίσθηση

$$g_n = e^{-j\frac{2\pi n t_o}{T_o}} x_n = e^{j\frac{\pi n}{2}} x_n = e^{j\frac{\pi n}{2}} \frac{A}{2} \operatorname{sinc}\left(\frac{n}{2}\right)$$

# Σειρά Fourier: Παράδειγμα 6 (Χρονική Κλιμάκωση)

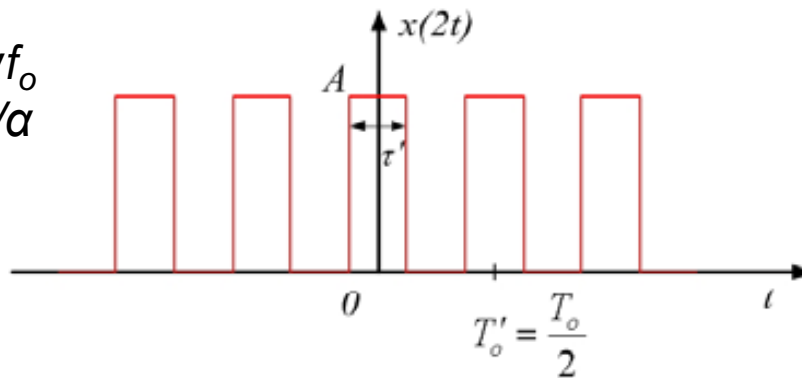
26

$$y(t) = x(at)$$



$$x_n = \frac{A\tau}{T_o} \operatorname{sinc}\left(\frac{n\tau}{T_o}\right)$$

Νέα συχνότητα  $\alpha f_o$   
Νέα περίοδος  $T_o/\alpha$



$$\frac{\tau}{T_o} = \frac{\tau'}{T'_o}$$

$$x(2t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A\tau'}{T'_o} \operatorname{sinc}\left(\frac{n\tau'}{T'_o}\right) e^{j\frac{2\pi n t}{T'_o}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A\tau}{T_o} \operatorname{sinc}\left(\frac{n\tau}{T_o}\right) e^{j\frac{4\pi n t}{T_o}}$$

# Συμμετρίες Σημάτων

27

- Αν το πραγματικό σήμα  $x(t)$  είναι άρτιο

$$b_n = 0 \quad x(t) = a_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T_0}\right)$$

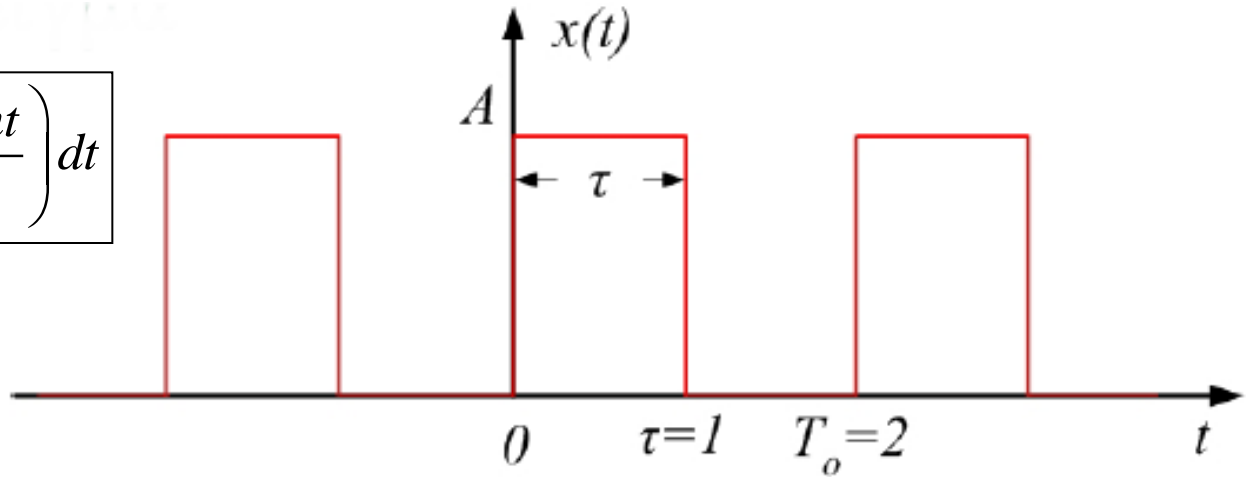
- Αν το πραγματικό σήμα  $x(t)$  είναι περιττό

$$a_n = 0 \quad x(t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T_0}\right)$$

# Παράδειγμα 7

28

$$a_n = \frac{1}{T_o} \int_{-T_o/2}^{T_o/2} x(t) \cos\left(\frac{2\pi n t}{T_o}\right) dt$$



$$a_n = \frac{1}{2} \int_0^2 x(t) \cos\left(\frac{2\pi n t}{2}\right) dt = \frac{1}{2} \int_0^1 (A) \cos(\pi n t) dt + \frac{1}{2} \int_1^2 (0) \cos(\pi n t) dt$$

$$= \frac{A}{2} \int_0^1 \cos(\pi n t) dt = \frac{A}{2} \left( \frac{1}{n\pi} \sin(\pi n t) \right) \Big|_0^1 = 0 \quad \text{για } n \neq 0$$

$$a_o = \frac{1}{2} \int_0^1 A \cos(\pi 0 t) dt = \frac{A}{2} \int_0^1 dt = \frac{A}{2}$$

$$a_o = \frac{1}{T_o} \int_{-T_o/2}^{T_o/2} x(t) dt$$

# Παράδειγμα 7

29

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2} \int_0^2 x(t) \sin\left(\frac{2\pi nt}{2}\right) dt = \frac{1}{2} \int_0^1 (A) \sin(\pi nt) dt + \frac{1}{2} \int_1^2 (0) \sin(\pi nt) dt \\ &= \frac{A}{2} \int_0^1 \sin(\pi nt) dt = \frac{A}{2} \left( -\frac{1}{\pi n} \cos(\pi nt) \right) \Big|_0^1 = \frac{A}{2} \left( -\frac{1}{\pi n} \cos(\pi n) + \frac{1}{\pi n} \right) \\ &= \frac{A}{2\pi n} [1 - \cos(\pi n)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= a_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[ b_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{T_o}\right) \right] = \frac{A}{2} + A \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{[1 - \cos(\pi n)]}{\pi n} \sin(\pi nt) \right] \\ &= \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \left[ \sin(\pi t) + \frac{1}{3} \sin(\pi 3t) + \frac{1}{5} \sin(\pi 5t) + \dots \right] \end{aligned}$$

Σύνδεση με  
Παράδειγμα 4...

# Παράδειγμα 8

30

$$x(t) = \sin(2\pi f_o t) \quad a_n = 0 \quad \text{Περιττή συνάρτηση}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{T_o} \int_0^{T_o} \sin(2\pi f_o t) \sin(2\pi n f_o t) dt \\ &= \frac{1}{T_o} \int_0^{T_o} \frac{1}{2} \left\{ \cos[2\pi f_o t(n-1)] - \cos[2\pi f_o t(n+1)] \right\} dt \\ &= \frac{1}{2T_o} \int_0^{T_o} \cos[2\pi f_o t(n-1)] dt - \frac{1}{2T_o} \int_0^{T_o} \cos[2\pi f_o t(n+1)] dt \end{aligned}$$

Για όλες τις τιμές του  $n$  εκτός από  $n=1$ ,  $b_n=0$

$$b_1 = \frac{1}{2T_o} \int_0^{T_o} dt = \frac{1}{2} \quad x(t) = 2 \left\{ b_1 \sin(2\pi f_o t) \right\} = \sin(2\pi f_o t)$$

# Παράδειγμα 8

31

$$x_1 = a_1 - jb_1 = -jb_1 = \frac{-j}{2} = \frac{1}{2j} \quad x_{-1} = x_1^* = \frac{j}{2} = \frac{-1}{2j}$$

$$\sin(2\pi f_o t) = \frac{e^{j2\pi f_o t} - e^{-j2\pi f_o t}}{2j} = \frac{1}{2j} e^{j2\pi f_o t} - \frac{1}{2j} e^{-j2\pi f_o t}$$

Όμοια για το  $x(t) = \cos(2\pi f_o t) \quad b_n = 0$

$$a_1 = \frac{1}{2T_o} \int_0^{T_o} dt = \frac{1}{2}$$

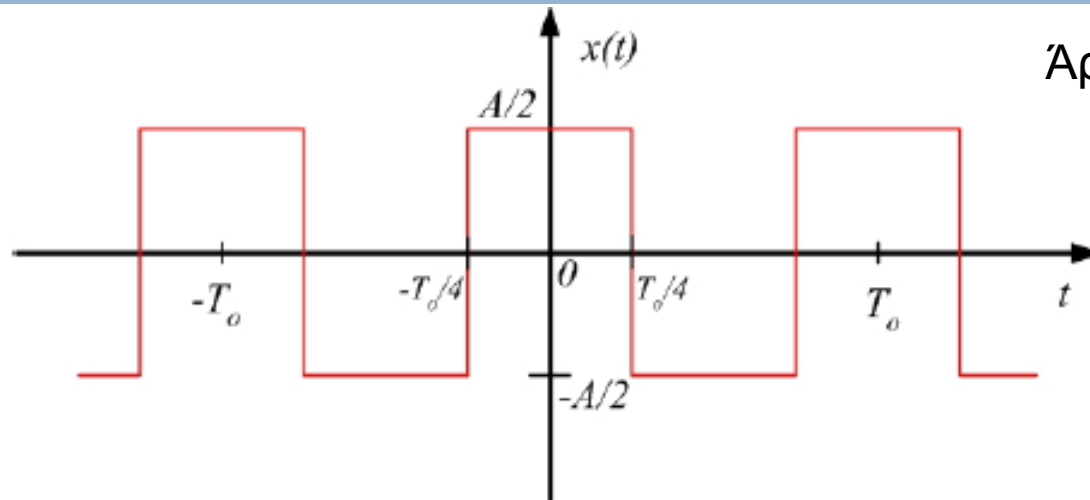
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n e^{j2\pi n f_o t}$$

$$x_1 = a_1 - jb_1 = a_1 = \frac{1}{2} \quad x_{-1} = x_1^* = x_1 = a_1 = \frac{1}{2}$$

$$\cos(2\pi f_o t) = \frac{e^{j2\pi f_o t} + e^{-j2\pi f_o t}}{2} = \frac{1}{2} e^{j2\pi f_o t} + \frac{1}{2} e^{-j2\pi f_o t}$$

# Παράδειγμα 9

32



Άρτια συνάρτηση

$$b_n = 0$$

$$a_o = 0$$

$$a_n = \frac{1}{T_o} \int_{-T_o/4}^{3T_o/4} x(t) \cos(2\pi n f_o t) dt = \frac{1}{T_o} \int_{-T_o/4}^{T_o/4} \frac{A}{2} \cos(2\pi n f_o t) dt + \frac{1}{T_o} \int_{T_o/4}^{3T_o/4} \frac{-A}{2} \cos(2\pi n f_o t) dt$$

$$= \frac{A}{\pi n} \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{για } n \text{ άρτιο} \\ \frac{A}{\pi n} & \text{για } n = 1, 5, 9, \dots \\ \frac{-A}{\pi n} & \text{για } n = 3, 7, 11, \dots \end{cases}$$



# Παράδειγμα 9

33

$$x(t) = \frac{2A}{\pi} \left[ \cos(2\pi f_o t) - \frac{1}{3} \cos(2\pi 3 f_o t) + \frac{1}{5} \cos(2\pi 5 f_o t) - \dots \right]$$
$$= \frac{2A}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cos[2\pi(2k+1)f_o t]$$

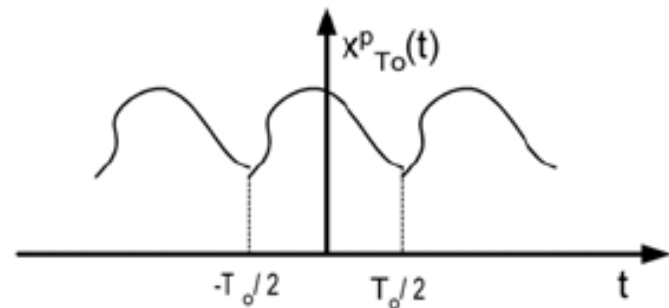
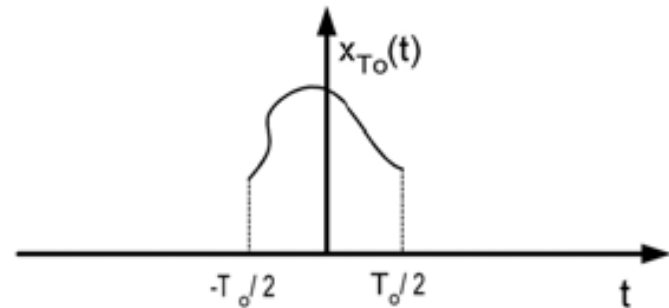
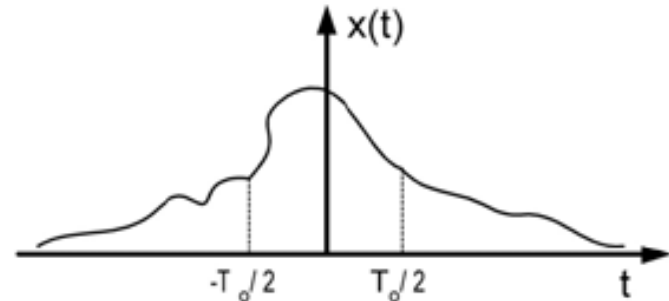
$$x(t) = a_o + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T_o}\right)$$

# M/Σ Fourier

34

- Έστω απεριοδικό σήμα  $g(t)$ .
- Κατασκευάζουμε περιοδική συνάρτηση  $g_p(t)$  με περίοδο  $T_0$ , έτσι ώστε η  $g(t)$  να ορίζει ένα κύκλο αυτής της περιοδικής συνάρτησης.
- Οριακά αφήνουμε την περίοδο  $T_0$  να γίνει άπειρη:

$$g(t) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} g_p(t)$$



# M/Σ Fourier

35

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) \exp(j2\pi f t) df \quad G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \exp(-j2\pi f t) dt$$

- $G(f)$  = M/Σ Fourier (Fourier transform) της  $g(t)$
- $g(t)$  = αντίστροφος M/Σ Fourier (inverse Fourier transform) της  $G(f)$
- $g(t) \rightleftarrows G(f)$  Ζευγάρι M/Σ Fourier (Fourier transform pair)

$$F[g(t)] = G(f)$$

$$F^{-1}[G(f)] = g(t)$$

- Η  $g(t)$  πρέπει να ικανοποιεί τις συνθήκες του Dirichlet.
- Όλα τα σήματα ενέργειας ικανοποιούν τις συνθήκες αυτές.

# M/Σ Fourier

36

- Ο M/Σ Fourier  $G(f)$  του σήματος ορίζει την αναπαράσταση στο πεδίο της συχνότητας του σήματος  $g(t)$ .
- Οι αναπαραστάσεις του σήματος στο πεδίο του χρόνου,  $g(t)$ , και στο πεδίο της συχνότητας,  $G(f)$ , είναι ισοδύναμες.

$$G(f) = |G(f)| \exp[j\theta(f)]$$

- $|G(f)|$  = πλάτος του **συνεχούς φάσματος** (continuous amplitude spectrum) της  $g(t)$
- $\theta(f)$  = φάση του συνεχούς φάσματος (continuous phase spectrum) της  $g(t)$

# M/Σ Fourier

37

- Για πραγματική συνάρτηση  $g(t)$  έχουμε:

$$G(f) = G^*(-f)$$

- ή αλλιώς:

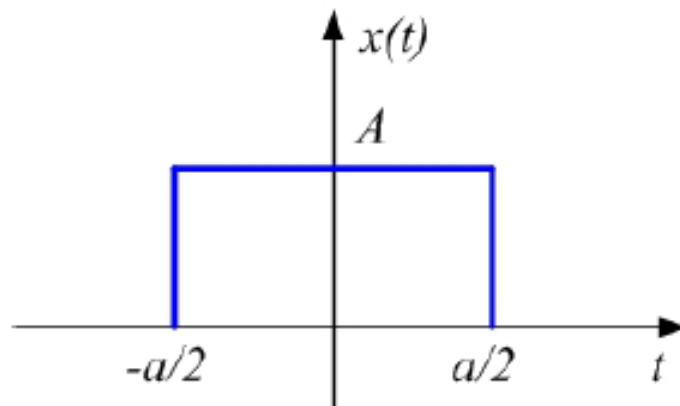
$$|G(f)| = |G(-f)| \quad \text{και} \quad \theta(-f) = -\theta(f)$$

- Δηλαδή το πλάτος του φάσματος  $|G(f)|$  ενός πραγματικού σήματος είναι **άρτια** συνάρτηση της συχνότητας  $f$  και η φάση του φάσματος  $\theta(f)$  είναι **περιττή** συνάρτηση της συχνότητας  $f$ .

# Παράδειγμα: Φάσμα Τετραγωνικού Παλμού

38

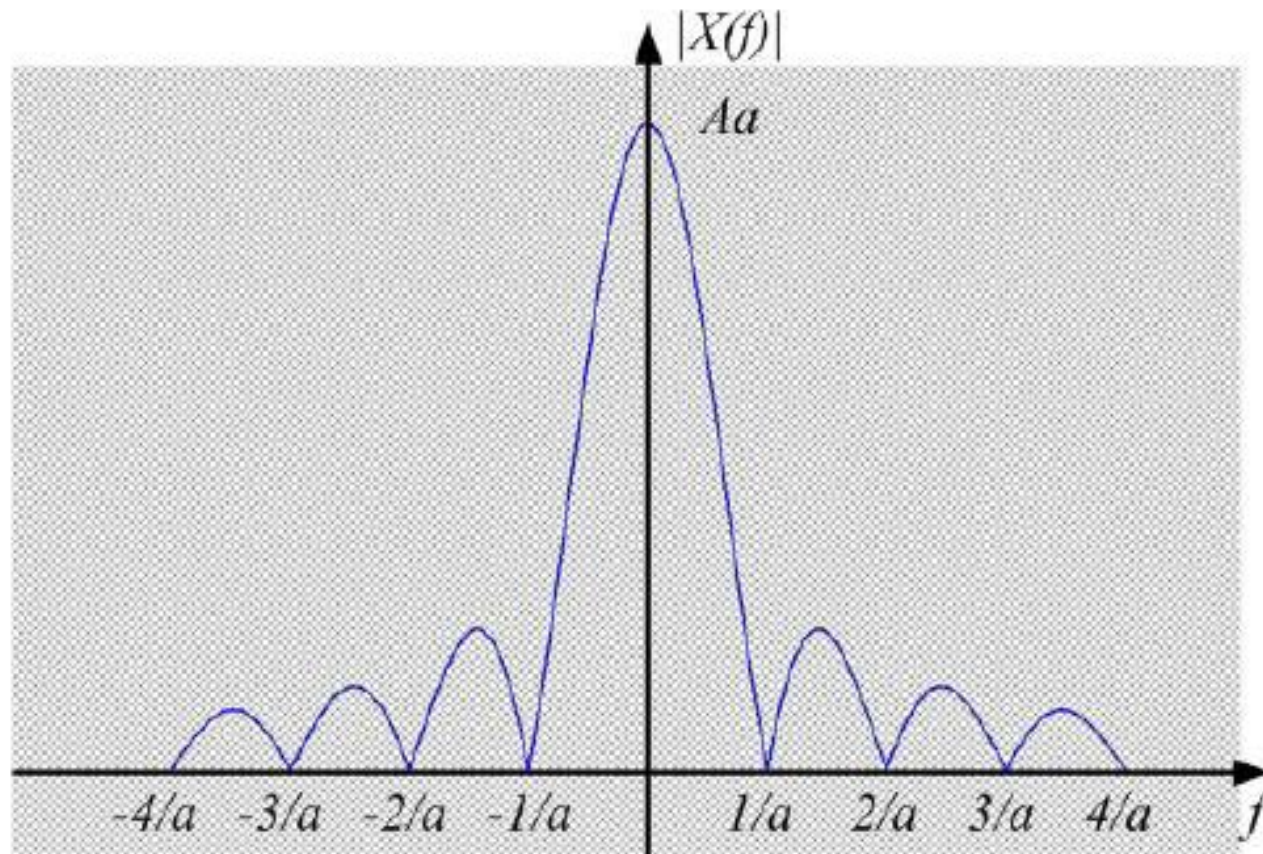
$$x(t) = A\Pi_{a/2}(t)$$



$$\begin{aligned} X(f) = \mathfrak{F}[x(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} A\Pi_{a/2}(t)e^{-j2\pi ft} dt = A \int_{-a/2}^{a/2} e^{-j2\pi ft} dt = \frac{A}{-j2\pi f} \left[ e^{-j2\pi ft} \right]_{-a/2}^{a/2} \\ &= \frac{A}{-j2\pi f} (e^{-ja\pi f} - e^{ja\pi f}) = \frac{A}{\pi f} \frac{(e^{ja\pi f} - e^{-ja\pi f})}{2j} = \frac{A}{\pi f} \sin(a\pi f) \\ &= Aa \frac{\sin(a\pi f)}{a\pi f} = Aa \operatorname{sinc}(af) \end{aligned}$$

# Παράδειγμα: Φάσμα Τετραγωνικού Παλμού

39



Μηδενισμοί

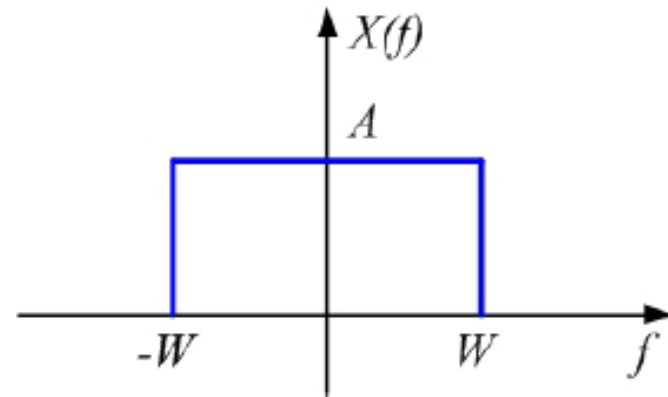
$$f = \pm \frac{n}{a}$$

Συνεχές Φάσμα

# Παράδειγμα: Βαθυπερατού Φίλτρου

40

$$X(f) = \begin{cases} A & |f| < W \\ 0 & |f| > W \end{cases}$$



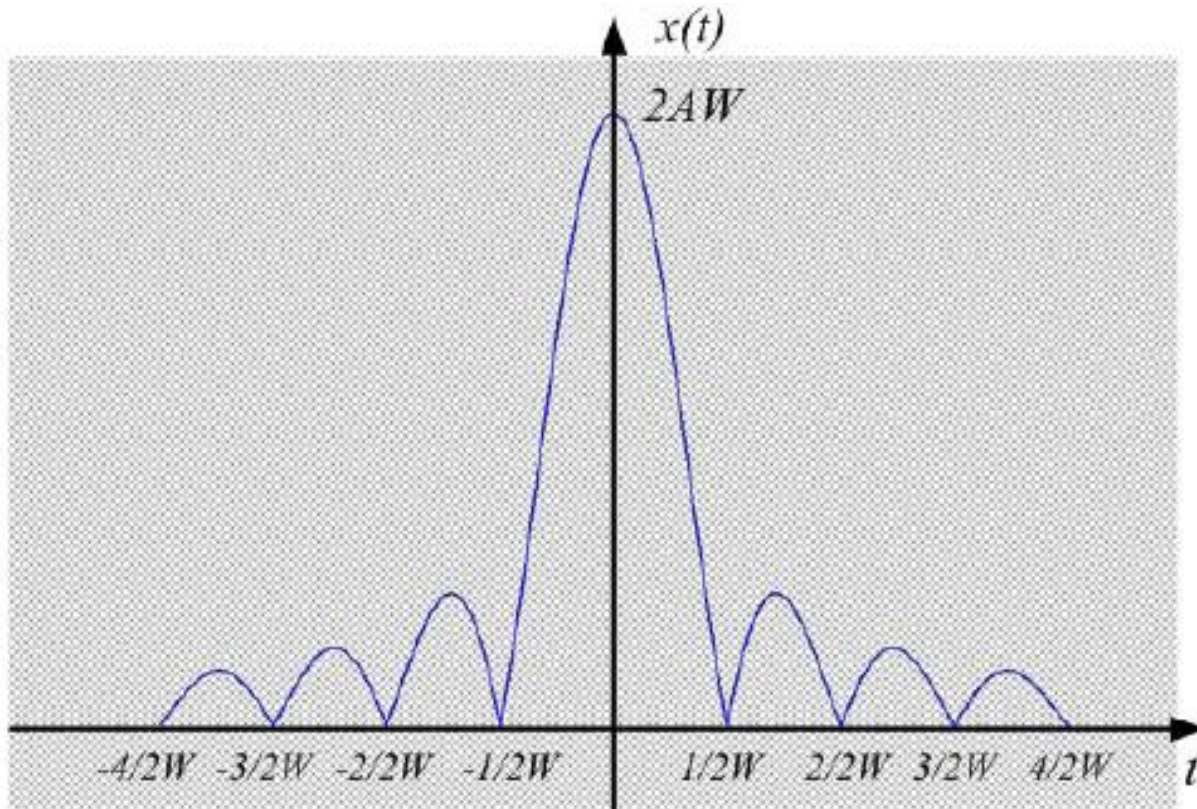
$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df = \int_{-W}^W A e^{j2\pi ft} df \\ &= \frac{A}{j2\pi t} \left[ e^{j2\pi ft} \right]_{-W}^W = \frac{A}{j2\pi t} \left( e^{j2\pi Wt} - e^{-j2\pi Wt} \right) \\ &= \frac{A}{\pi t} \sin(2\pi Wt) = 2AW \frac{\sin(2\pi Wt)}{2\pi Wt} \\ &= 2AW \operatorname{sinc}(2Wt) \end{aligned}$$

$$X(f) = A \operatorname{sinc}(af)$$



# Παράδειγμα: Βαθυπερατού Φίλτρου

41



Παρατηρήστε τη **δυσαικτικότητα** ανάμεσα στις συναρτήσεις στα πεδία του χρόνου και της συχνότητας

# Ιδιότητες του Μ/Σ Fourier

42

- Έστω:

$$g_1(t) \xleftrightarrow{\leftarrow} G_1(f) \quad g_2(t) \xleftrightarrow{\leftarrow} G_2(f) \quad g(t) \xleftrightarrow{\leftarrow} G(f)$$

- Ιδιότητα 1: Γραμμικότητα (υπέρθεση)

$$ag_1(t) + bg_2(t) \xleftrightarrow{\leftarrow} aG_1(f) + bG_2(f)$$

όπου  $a$  και  $b$  σταθερές.

- Ιδιότητα 2: Αλλαγή κλίμακας χρόνου

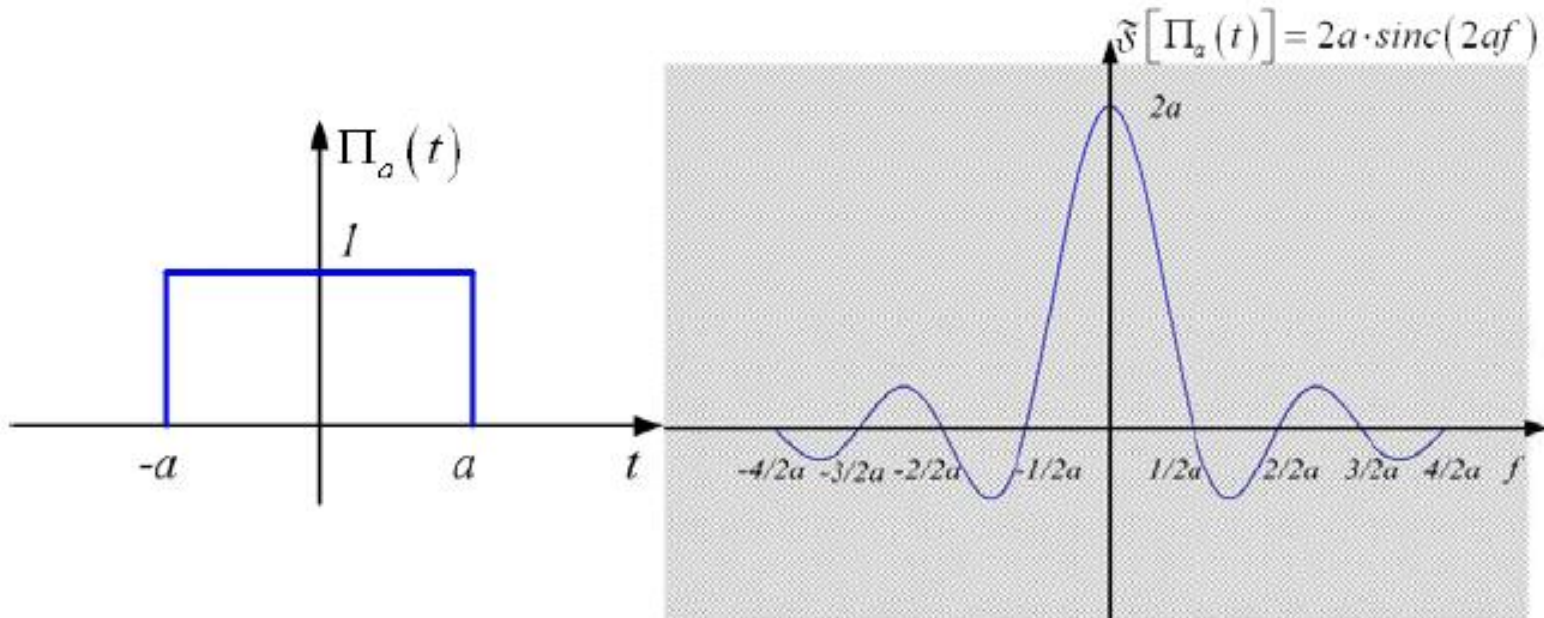
$$g(at) \xleftrightarrow{\leftarrow} \frac{1}{|a|} G\left(\frac{f}{a}\right)$$

# Ιδιότητες του Μ/Σ Fourier

43

$$\Pi_a(t) = \Pi\left(\frac{t}{2a}\right) \quad \mathfrak{F}[\Pi(t)] = \text{sinc}(f)$$

$$\mathfrak{F}[\Pi_a(t)] = \mathfrak{F}[\Pi(t/2a)] = 2a \cdot \text{sinc}(2af)$$



# Ιδιότητες του Μ/Σ Fourier

44

- Ιδιότητα 3: Δυαδικότητα

$$G(t) \xrightarrow{\leftarrow} g(-f)$$

- Ιδιότητα 4: Χρονική ολίσθηση

$$g(t - t_0) \xrightarrow{\leftarrow} G(f) \exp(-j2\pi f t_0)$$

- Ιδιότητα 5: Ολίσθηση Συχνότητας (θεώρημα διαμόρφωσης)

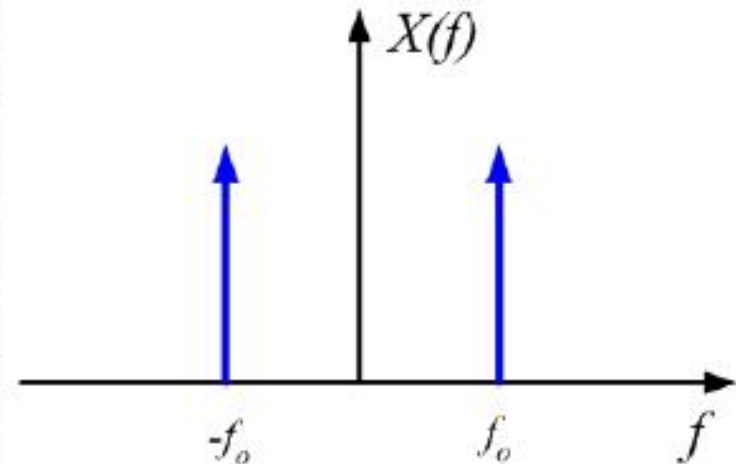
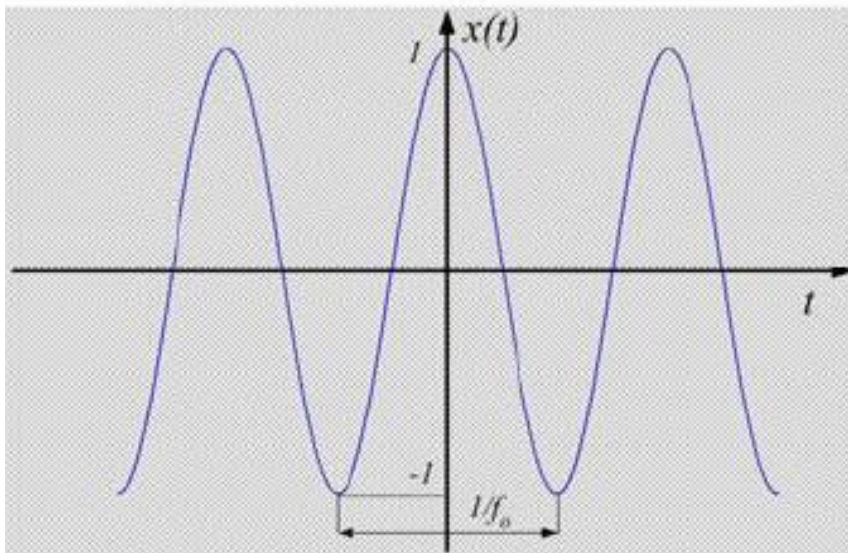
$$\exp(j2\pi f_c t) g(t) \xrightarrow{\leftarrow} G(f - f_c)$$

όπου  $f_c$  μια πραγματική σταθερά.

# Ιδιότητες του Μ/Σ Fourier

45

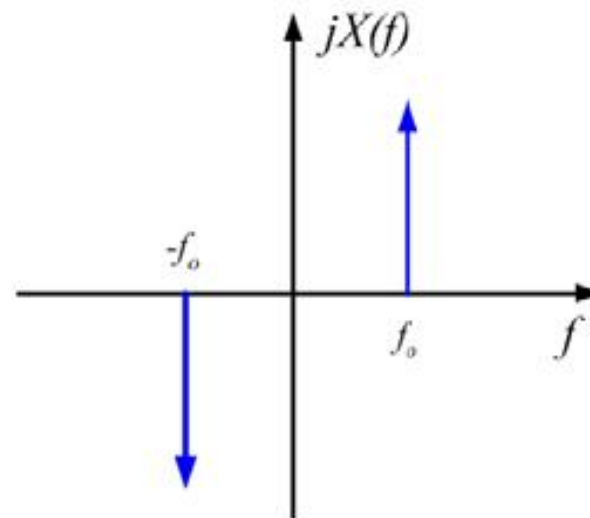
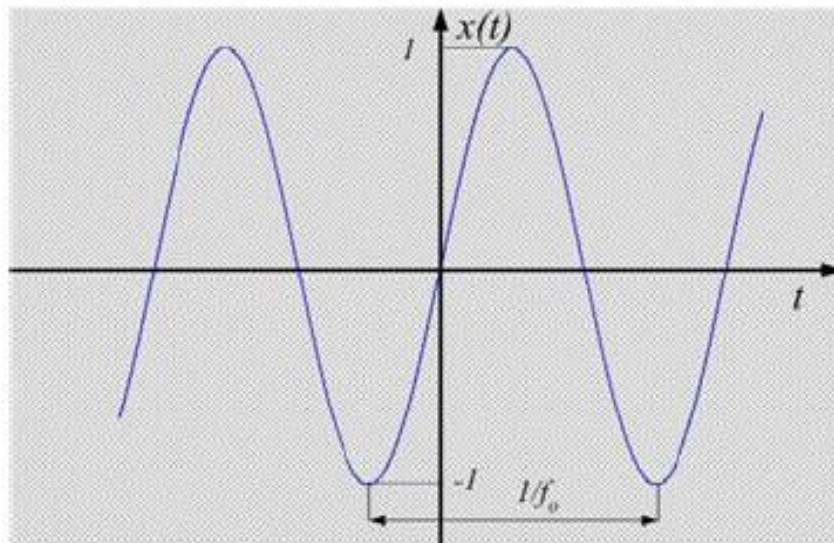
$$\begin{aligned}x(t) = \cos(2\pi f_o t) \quad \mathfrak{F}[\cos(2\pi f_o t)] &= \mathfrak{F}\left[\frac{e^{j2\pi f_o t} + e^{-j2\pi f_o t}}{2}\right] \\ &= \frac{1}{2}\mathfrak{F}[e^{j2\pi f_o t}] + \frac{1}{2}\mathfrak{F}[e^{-j2\pi f_o t}] \\ &= \frac{1}{2}[\delta(f - f_o) + \delta(f + f_o)]\end{aligned}$$



# Ιδιότητες του Μ/Σ Fourier

46

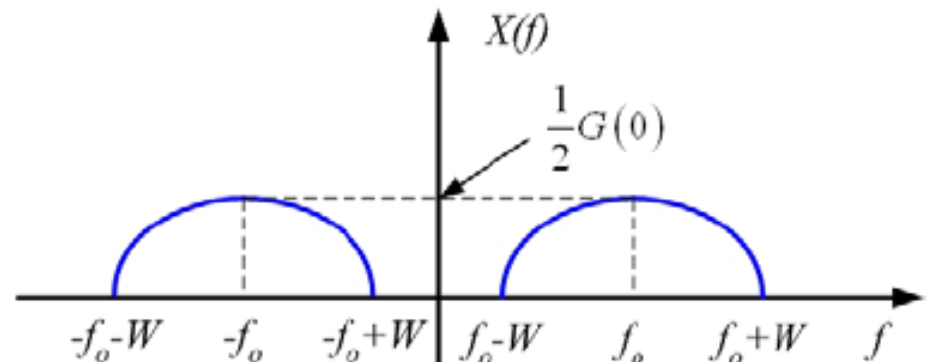
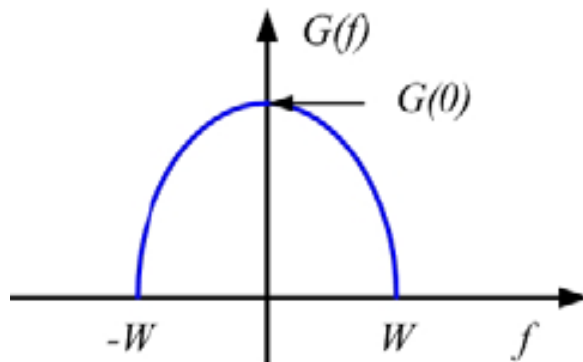
$$\begin{aligned}x(t) = \sin(2\pi f_o t) \quad \mathfrak{F}[\sin(2\pi f_o t)] &= \mathfrak{F}\left[\frac{e^{j2\pi f_o t} - e^{-j2\pi f_o t}}{2j}\right] \\ &= \frac{1}{2j}[\delta(f - f_o) - \delta(f + f_o)]\end{aligned}$$



# Ιδιότητες του Μ/Σ Fourier

47

$$\begin{aligned}x(t) &= g(t) \cos(2\pi f_o t) & \mathfrak{F}[x(t)] &= \mathfrak{F}[g(t) \cos(2\pi f_o t)] \\ & & &= \mathfrak{F}\left[g(t) \frac{e^{j2\pi f_o t} + e^{-j2\pi f_o t}}{2}\right] \\ & & &= \frac{1}{2} [G(f - f_o) + G(f + f_o)]\end{aligned}$$



# Ιδιότητες του Μ/Σ Fourier

48

- Ιδιότητα 6: Εμβαδό κάτω από την  $g(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t) dt = G(0)$$

- Ιδιότητα 7: Εμβαδό κάτω από την  $G(f)$

$$g(0) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) df$$

- Ιδιότητα 8: Παραγωγή στο πεδίο του χρόνου

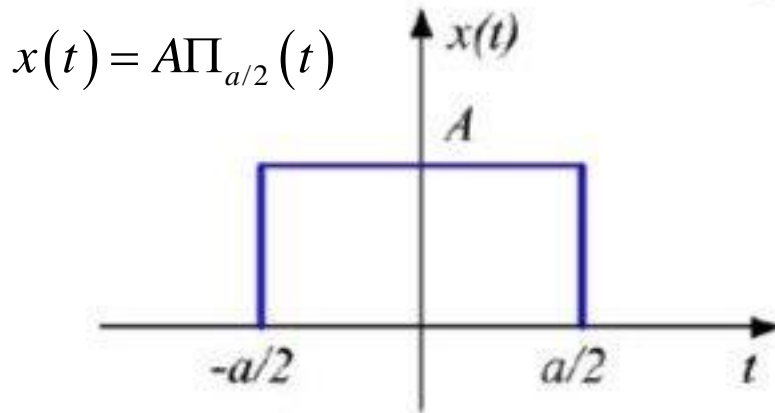
$$\frac{d}{dt} g(t) \begin{matrix} \rightarrow \\ \leftarrow \end{matrix} j2\pi f G(f) \qquad \frac{d^n}{dt^n} g(t) \begin{matrix} \rightarrow \\ \leftarrow \end{matrix} (j2\pi f)^n G(f)$$



# Ιδιότητες του Μ/Σ Fourier

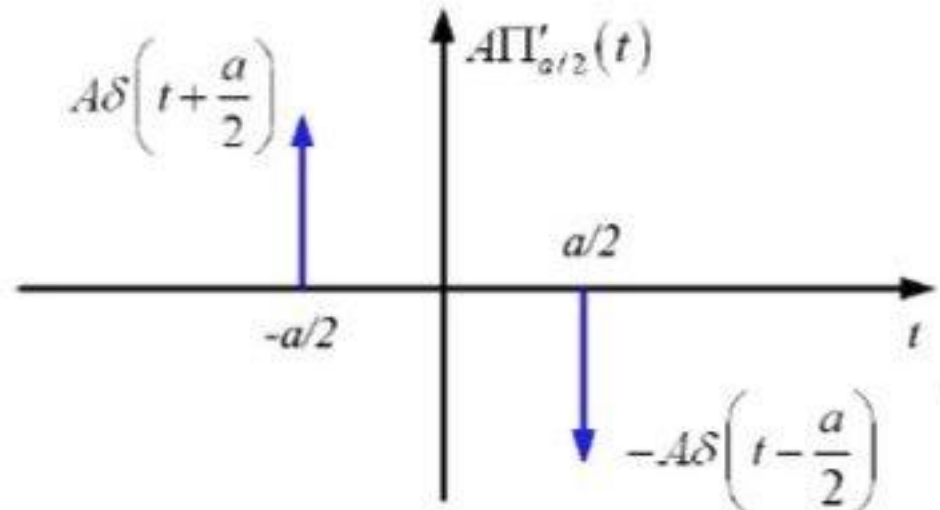
49

## □ Παράδειγμα



$$\Pi_{a/2}(t) = \Pi\left(\frac{t}{a}\right) = u\left(t + \frac{a}{2}\right) - u\left(t - \frac{a}{2}\right)$$

$$\frac{Ad\Pi_{a/2}(t)}{dt} = A\left[\delta\left(t + \frac{a}{2}\right) - \delta\left(t - \frac{a}{2}\right)\right]$$



$$\mathcal{F}\left[\frac{d}{dt}\Pi_{a/2}(t)\right] = (j2\pi f)\mathcal{F}[\Pi_{a/2}(t)] \Rightarrow \mathcal{F}[\Pi_{a/2}(t)] = \frac{\mathcal{F}\left[\frac{d}{dt}\Pi_{a/2}(t)\right]}{(j2\pi f)}$$

# Ιδιότητες του Μ/Σ Fourier

50

## □ Παράδειγμα

$$\mathfrak{F}[\delta(t-t_o)] = \mathfrak{F}[\delta(t)] \exp(-2\pi f t_o) = \exp(-2\pi f t_o)$$

$$\mathcal{F}\left[A \frac{d}{dt} \Pi_{a/2}(t)\right] = \mathcal{F}\left\{A \left[\delta\left(t + \frac{a}{2}\right) - \delta\left(t - \frac{a}{2}\right)\right]\right\} = A \left(e^{j2\pi f \frac{a}{2}} - e^{-j2\pi f \frac{a}{2}}\right)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[A \Pi_{a/2}(t)] &= \frac{\mathcal{F}\left[A \frac{d}{dt} \Pi_{a/2}(t)\right]}{(j2\pi f)} = \frac{A \left(e^{j2\pi f \frac{a}{2}} - e^{-j2\pi f \frac{a}{2}}\right)}{(j2\pi f)} = \frac{A}{\pi f} \frac{(e^{j\pi f a} - e^{-j\pi f a})}{2j} \\ &= \frac{A}{\pi f} \sin(\pi f a) = A a \frac{\sin(\pi f a)}{\pi f a} = A a \cdot \text{sinc}(f a) \end{aligned}$$

# Ιδιότητες του Μ/Σ Fourier

51

- Ιδιότητα 9: Ολοκλήρωση στο πεδίο του χρόνου

- ▣ Με την προϋπόθεση ότι  $G(0) = 0$ :

$$\int_{-\infty}^t g(\tau) d\tau \begin{matrix} \rightarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \frac{1}{j2\pi f} G(f)$$

- ▣ Αν  $G(0) \neq 0$ :

$$\int_{-\infty}^t g(\tau) d\tau \begin{matrix} \rightarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \frac{1}{j2\pi f} G(f) + \frac{G(0)}{2} \delta(f)$$

- Ιδιότητα 10: Συζυγείς συναρτήσεις

$$g^*(t) \begin{matrix} \rightarrow \\ \leftarrow \end{matrix} G^*(-f)$$

# Ιδιότητες του Μ/Σ Fourier

52

- Ιδιότητα 11: Πολλαπλασιασμός στο πεδίο του χρόνου (θεώρημα πολλαπλασιασμού)

$$g_1(t)g_2(t) \xrightarrow{\leftarrow} G_1(f) \otimes G_2(f)$$

- Ιδιότητα 12: Συνέλιξη στο πεδίο του χρόνου (θεώρημα συνέλιξης)

$$g_1(t) \otimes g_2(t) \xrightarrow{\leftarrow} G_1(f)G_2(f)$$

# Ιδιότητες του Μ/Σ Fourier

53

□ Παράδειγμα  $\Lambda(t) = \Pi(t) * \Pi(t)$

↑  
Τριγωνικός παλμός

$$\mathfrak{F}[\Pi(t)] = \text{sinc}(f)$$

$$\mathfrak{F}[\Lambda(t)] = \text{sinc}^2(f)$$

Γιατί?

# Ιδιότητες του Μ/Σ Fourier

54

- Παράδειγμα: Υπολογίστε το Μ/Σ Fourier του πραγματικού και φανταστικού μέρους ενός μιγαδικού σήματος

$$\begin{aligned}x(t) &= \operatorname{Re}[x(t)] + j \operatorname{Im}[x(t)] & \operatorname{Re}[x(t)] &= \frac{1}{2}[x(t) + x^*(t)] \\x^*(t) &= \operatorname{Re}[x(t)] - j \operatorname{Im}[x(t)] & \operatorname{Im}[x(t)] &= \frac{1}{2j}[x(t) - x^*(t)]\end{aligned}$$

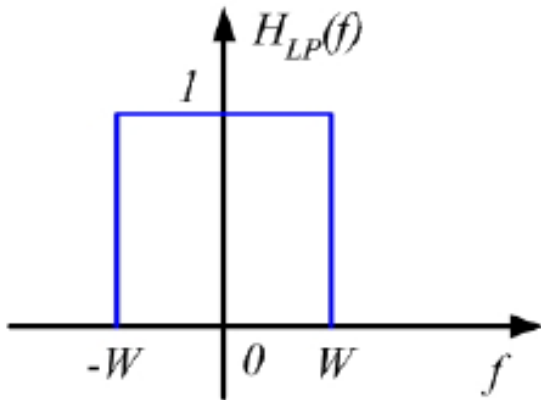
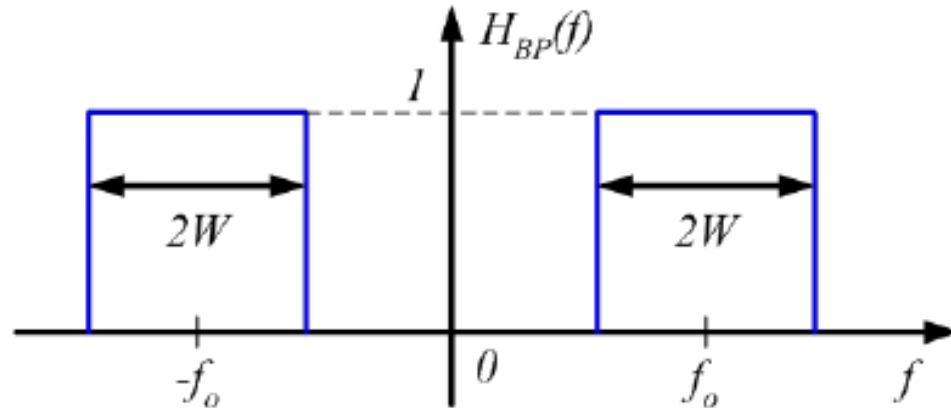
Ιδιότητες  
γραμμικότητας και  
συζυγούς  
συνάρτησης

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{\operatorname{Re}[x(t)]\} &= \frac{1}{2}[X(f) + X^*(-f)] \\ \mathcal{F}\{\operatorname{Im}[x(t)]\} &= \frac{1}{2j}[X(f) - X^*(-f)]\end{aligned}$$

# Ιδιότητες του Μ/Σ Fourier

55

- Παράδειγμα : Υπολογίστε την κρουστική απόκριση  $h_{BP}(t)$  συστήματος (ζωνοπερατού φίλτρου) με συνάρτηση μεταφοράς



$$H_{BP}(f) = H_{LP}(f) * [\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)]$$

# Ιδιότητες του Μ/Σ Fourier

56

$$\mathcal{F}^{-1}\left[H_{LP}(f)\right] = 2W \operatorname{sinc}(2Wt) = 2W \frac{\sin(2\pi Wt)}{2\pi Wt}$$

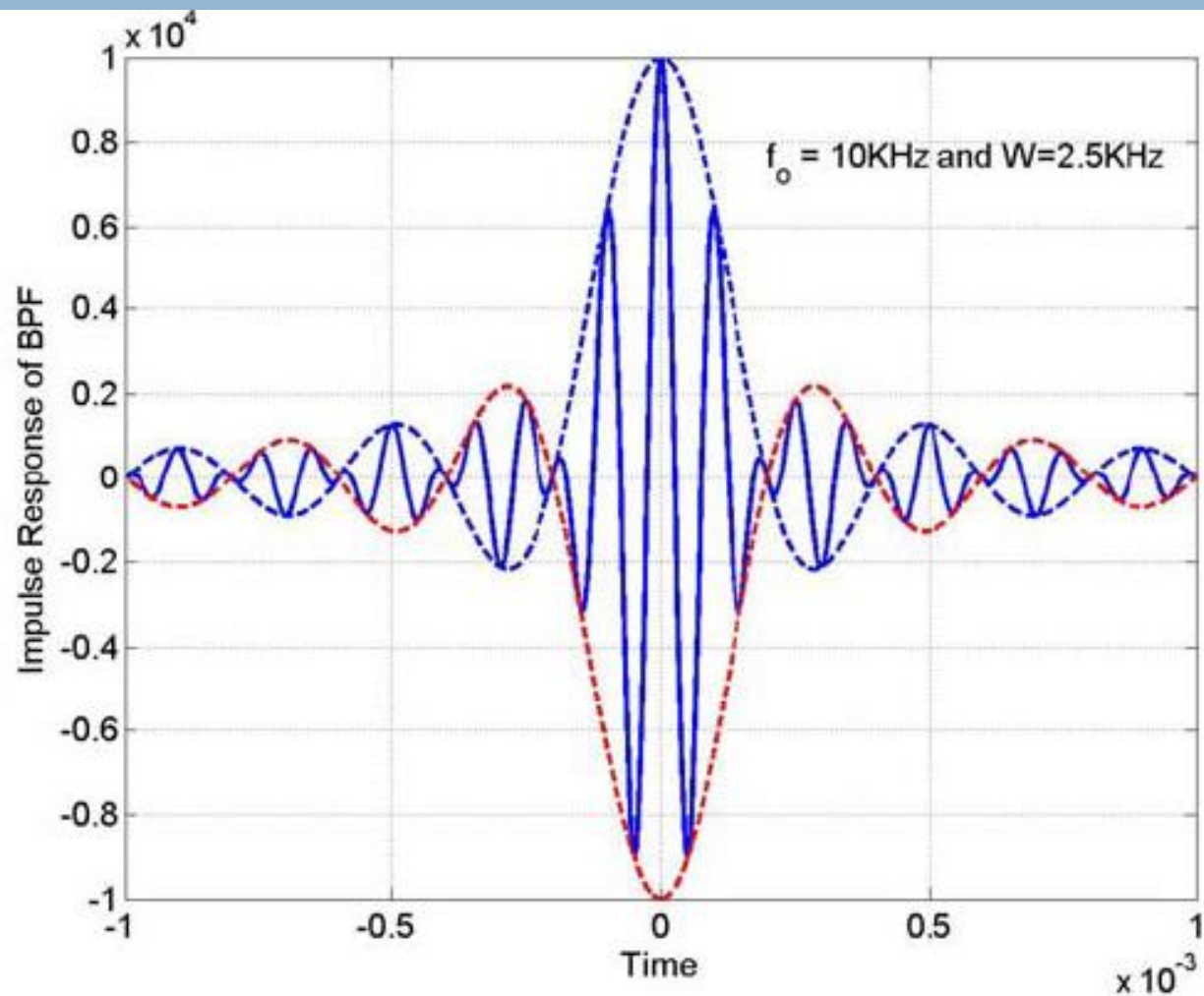
$$\mathcal{F}^{-1}\left[\delta(f + f_o) + \delta(f - f_o)\right] = 2 \cos(2\pi f_o t)$$

$$\begin{aligned} h_{BP}(t) &= \mathcal{F}^{-1}\left[H_{BP}(f)\right] \\ &= \mathcal{F}^{-1}\left[H_{LP}(f) * \left[\delta(f + f_o) + \delta(f - f_o)\right]\right] \\ &= \mathcal{F}^{-1}\left[H_{LP}(f)\right] \mathcal{F}^{-1}\left[\delta(f + f_o) + \delta(f - f_o)\right] \\ &= 4W \operatorname{sinc}(2Wt) \cos(2\pi f_o t) \end{aligned}$$



# Ιδιότητες του Μ/Σ Fourier

57



# Ιδιότητες του Μ/Σ Fourier

58

- Αποδεικνύεται ότι η ανάπτυξη σε Σειρές Fourier ενός περιοδικού σήματος διευκολύνεται με τον απλό υπολογισμό των μιγαδικών συντελεστών Fourier ως εξής:
  - Ορισμός του σήματος  $x(t)$  από το περιοδικό σήμα  $x_p(t)$  για μια περίοδο
  - Υπολογισμός του φάσματος  $X(f)$  του  $x(t)$  με μετ/σμό Fourier
  - Υπολογισμός του φάσματος σε διακριτές συχνότητες  $f=n/T_o$ , ώστε να προκύψουν οι αντίστοιχες αρμονικές
  - Πολλαπλασιασμός κάθε αρμονικής με  $1/T_o$  δηλαδή

$$x_n = \frac{1}{T_o} X\left(\frac{n}{T_o}\right)$$

# Μ/Σ Fourier Περιοδικών Σημάτων

59

- Έστω περιοδικό σήμα  $g_p(t)$  με περίοδο  $T_0$ , και  $g(t)$  μια παλμοειδής συνάρτηση που είναι ίση με  $g_p(t)$  σε μια περίοδο  $T_0$  και μηδέν οπουδήποτε αλλού.

$$g(t) = g_p(t), \quad -\frac{T_0}{2} \leq t \leq \frac{T_0}{2} \quad \text{και} \quad g(t) = 0, \quad \text{αλλού}$$

- Άρα:

$$g_p(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g(t - mT_0)$$

- Η  $g(t)$  είναι η **γεννήτρια συνάρτηση** (generating function) που παράγει το σήμα  $g_p(t)$ .

# Μ/Σ Fourier Περιοδικών Σημάτων

60

- Ανάπτυξη της  $g_p(t)$  σε μιγαδική σειρά Fourier

$$g_p(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(\frac{j2\pi nt}{T_0}\right)$$

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} g_p(t) \exp\left(-\frac{j2\pi nt}{T_0}\right) dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

- Αντικαθιστούμε την  $g_p(t)$  με την  $g(t)$ , και αφού η  $g(t)$  είναι μετασχηματιζόμενη κατά Fourier έχουμε:

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \exp\left(-\frac{j2\pi nt}{T_0}\right) dt = \frac{1}{T_0} G\left(\frac{n}{T_0}\right)$$

$$x_n = \frac{1}{T_0} X\left(\frac{n}{T_0}\right)$$

# Μ/Σ Fourier Περιοδικών Σημάτων

61

□ Άρα:

$$g_p(t) = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G\left(\frac{n}{T_0}\right) \exp\left(\frac{j2\pi nt}{T_0}\right)$$

□ ή ισοδύναμα:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} g(t - mT_0) = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G\left(\frac{n}{T_0}\right) \exp\left(\frac{j2\pi nt}{T_0}\right)$$

(μια μορφή του τύπου του αθροίσματος Poisson)

□ αλλά αφού:  $\exp(j2\pi f_c t) \begin{matrix} \rightarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \delta(f - f_c)$

# Μ/Σ Fourier Περιοδικών Σημάτων

62

$$g_p(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g(t - mT_0) \quad \begin{matrix} \rightarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \quad \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G\left(\frac{n}{T_0}\right) \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right)$$

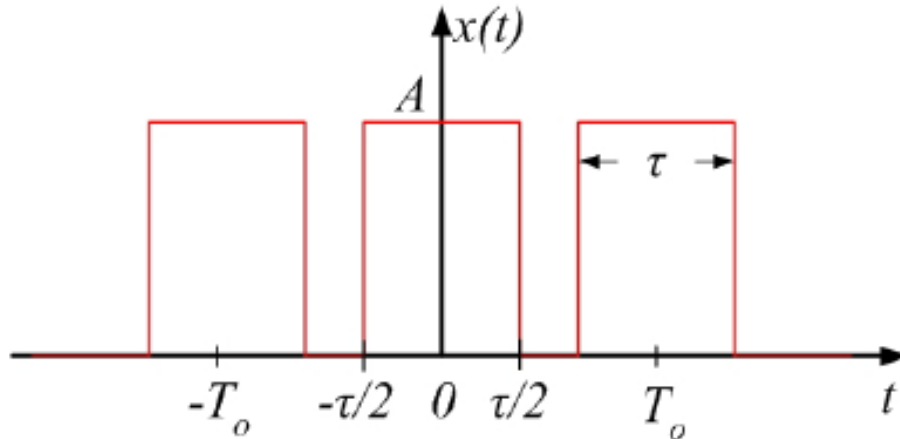
- Η περιοδικότητα στο πεδίο του χρόνου έχει σαν αποτέλεσμα να κάνει διακριτή την περιγραφή στο πεδίο της συχνότητας (ή του φάσματος του σήματος) σε ακέραια πολλαπλάσια του αντιστρόφου της περιόδου.

# Μ/Σ Fourier Περιοδικών Σημάτων

63

$$X_p(f) = X(f) \frac{1}{T_o} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_o}\right) = \frac{1}{T_o} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{n}{T_o}\right) \delta\left(f - \frac{n}{T_o}\right)$$

Παράδειγμα



$$x(t) = A \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

$$X(f) = (A\tau) \text{sinc}(\tau f)$$

$$x_n = \frac{A\tau}{T_o} \text{sinc}\left(\frac{n\tau}{T_o}\right)$$

$$x_n = \frac{1}{T_o} X\left(\frac{n}{T_o}\right)$$

# Συνοπτικός Πίνακας Ιδιοτήτων Μ/Σ Fourier

64

Γραμμικότητα	$\alpha x(t) + \beta y(t) \supset \alpha X(f) + \beta Y(f), \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
Συζυγές σήμα	$x^*(t) \supset X^*(-f)$
Πραγματικό σήμα	$X(-f) = X^*(f)$
Ολίσθηση στο χρόνο	$x(t - t_0) \supset e^{-j2\pi f t_0} X(f)$
Διαμόρφωση	$e^{j2\pi f_c t} x(t) \supset X(f - f_c)$
Διαμόρφωση με cos	$x(t) \cos(2\pi f_c t) \supset \frac{1}{2} [X(f - f_c) + X(f + f_c)]$
Βάθμωση στο χρόνο	$x(\alpha t) \supset \frac{1}{ \alpha } X\left(\frac{f}{\alpha}\right), \alpha \in \mathbb{R}$
Βάθμωση στη συχνότητα	$\frac{1}{ \alpha } x\left(\frac{t}{\alpha}\right) \supset X(\alpha f), \alpha \in \mathbb{R}$
Ανάκλαση	$x(-t) \supset X(-f)$
Δυϊκότητα	$x(t) \supset X(f) \Rightarrow X(t) \supset x(-f)$
Άρτιο σήμα	$X(f) = X(-f)$
Άρτιο και πραγματικό σήμα	$X(f) = X(-f)$ και $X(f) \in \mathbb{R}$
Παράγωγος	$\frac{d^n}{dt^n} x(t) \supset (j2\pi f)^n X(f)$
Ολοκλήρωμα	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \supset \frac{1}{j2\pi f} X(f) + \frac{X(0)}{2} \delta(f)$
Θεώρημα Rayleigh	$\int_{-\infty}^{+\infty}  x(\tau) ^2 d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty}  X(f) ^2 df$
Θεώρημα Parseval	$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) y^*(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) Y^*(f) df$
Τιμή dc	$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt = X(f = 0)$
Θεώρημα συνέλιξης	$x(t) * y(t) \supset X(f) \cdot Y(f)$ και $x(t) \cdot y(t) \supset X(f) * Y(f)$



# Συγκεντρωτικός Πίνακας Μ/Σ Fourier

65

$x(t)$	$X(f)$
$\Pi(t)$	$\text{sinc}(f)$
$\text{sinc}(t)$	$\Pi(f)$
$\delta(t)$	1
$\delta(t - t_0)$	$e^{-j2\pi ft_0}$
$e^{j2\pi fct}$	$\delta(f - f_c)$
$\cos(2\pi f_c t)$	$\frac{1}{2} [\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)]$
$\sin(2\pi f_c t)$	$\frac{1}{2j} [\delta(f - f_c) - \delta(f + f_c)]$
$u(t)$	$\frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2}\delta(f)$
$e^{- t }$	$\frac{2}{4\pi^2 f^2 + 1}$
$e^{-\pi t^2}$	$e^{-\pi f^2}$
$\text{III}(t)$	$\text{III}(f)$

# Συνάρτηση Αυτοσυσχέτισης

66

- Η διαδικασία της αυτοσυσχέτισης (auto-correlation function) παρέχει ένα μέτρο της ομοιότητας ή συμφωνίας μεταξύ ενός δοσμένου σήματος και ενός αντίγραφου του σήματος καθυστερημένου κατά μεταβλητή ποσότητα.
- Είναι συνάρτηση της μεταβλητής καθυστέρησης.
- Κατά τον ορισμό δίνεται ξεχωριστή προσοχή στον τύπο του σήματος που θεωρείται. Σε αυτή την ενότητα αναπτύσσουμε ορισμούς για τα ενεργειακά και περιοδικά σήματα.

# Συνάρτηση Αυτοσυσχέτισης

67

- Συνάρτηση Αυτοσυσχέτισης Ενεργειακών Σημάτων
- Έστω ενεργειακό σήμα  $g(t)$  (μπορεί να είναι και μιγαδικό).

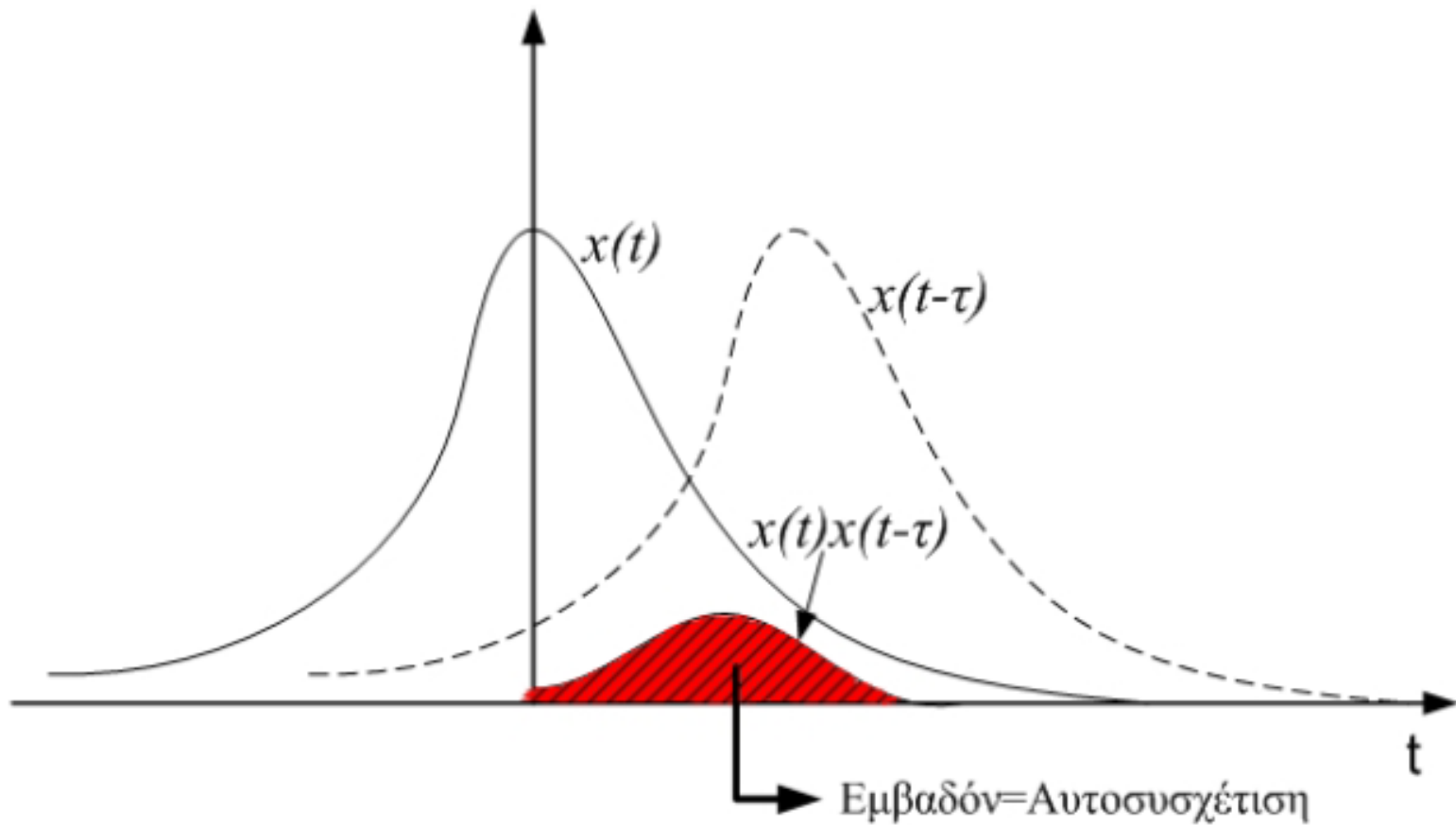
$$R_g(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)g^*(t - \tau)dt$$

- Η καθυστέρηση χρόνου  $\tau$  έχει το ρόλο παραμέτρου σάρωσης (scanning) ή αναζήτησης (searching).
- Ισοδύναμα:

$$R_g(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t + \tau)g^*(t)dt$$

# Συνάρτηση Αυτοσυσχέτισης

68



# Συνάρτηση Αυτοσυσχέτισης

69

- Συνάρτηση Αυτοσυσχέτισης Ενεργειακών Σημάτων
- Ιδιότητα 1: Εμφανίζει συζυγή συμμετρία

$$R_g(\tau) = R_g^*(-\tau)$$

- Ιδιότητα 2: Η τιμή της στην αρχή των αξόνων είναι ίση με την ενέργεια του σήματος.

$$R_g(0) = \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt$$

- Ιδιότητα 3: Η μέγιστη τιμή της εμφανίζεται στην αρχή των αξόνων.

$$|R_g(\tau)| \leq R_g(0) \quad \text{για όλα τα } \tau.$$

# Συνάρτηση Αυτοσυσχέτισης

70

- Συνάρτηση Αυτοσυσχέτισης Ενεργειακών Σημάτων
- Ιδιότητα 4: Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης και η φασματική πυκνότητα ενέργειας αποτελούν ζευγάρι Μ/Σ Fourier.

$$R_g(\tau) \xrightarrow{\leftarrow} \Psi_g(f) = |G(f)|^2$$

- Για μια δοσμένη συνάρτηση  $g(t)$  υπάρχει μία μοναδική συνάρτηση αυτοσυσχέτισης  $R_g(t)$ . Το αντίστροφο αυτού του ισχυρισμού δεν είναι απαραίτητα αληθές.

# Συνάρτηση Αυτοσυσχέτισης

71

- Συνάρτηση Αυτοσυσχέτισης Περιοδικών Σημάτων Ισχύος
- Έστω σήμα ισχύος  $g(t)$

$$R_g(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T g(t)g^*(t - \tau)dt$$

- Όταν το σήμα είναι περιοδικό:

$$R_{gp}(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} g_p(t)g_p^*(t - \tau)dt$$

# Συνάρτηση Αυτοσυσχέτισης

72

- Συνάρτηση Αυτοσυσχέτισης Περιοδικών Σημάτων
- Ιδιότητα 1: Εμφανίζει συζυγή συμμετρία

$$R_{gp}(\tau) = R_{gp}^*(-\tau)$$

- Ιδιότητα 2: Η τιμή της στην αρχή των αξόνων είναι ίση με τη μέση ισχύ του σήματος.

$$R_{gp}(0) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |g_p(t)|^2 dt$$



# Συνάρτηση Αυτοσυσχέτισης

73

- Συνάρτηση Αυτοσυσχέτισης Περιοδικών Σημάτων
- Ιδιότητα 3: Η μέγιστη τιμή της εμφανίζεται στην αρχή των αξόνων.

$$\left| R_{gp}(\tau) \right| \leq R_{gp}(0) \quad \text{για όλα τα } \tau.$$

- Ιδιότητα 4: Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης και η φασματική πυκνότητα ισχύος αποτελούν ζευγάρι Μ/Σ Fourier.

$$R_{gp}(\tau) \xleftrightarrow{\leftarrow} S_{gp}(f) = \frac{1}{T_0^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| G\left(\frac{n}{T_0}\right) \right|^2 \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right)$$

# Συνάρτηση Αυτοσυσχέτισης

74

- Συνάρτηση Αυτοσυσχέτισης Περιοδικών Σημάτων
- Ιδιότητα 5: Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης είναι περιοδική με την ίδια περίοδο με αυτή του περιοδικού σήματος.

$$R_{gp}(\tau) = R_{gp}(\tau \pm nT_0), \quad n=1,2,\dots$$

# Συναρτήσεις Ετεροσυσχέτισης

75

- Η συνάρτηση ετεροσυσχέτισης (cross-correlation function) είναι ένα μέτρο της ομοιότητας μεταξύ ενός σήματος και της χρονικά καθυστερημένης μορφής ενός δεύτερου σήματος.
- Είναι συνάρτηση της μεταβλητής καθυστέρησης.
- Κατά τον ορισμό δίνεται ξεχωριστή προσοχή στον τύπο του σήματος που θεωρείται. Σε αυτή την ενότητα αναπτύσσουμε ορισμούς για τα ενεργειακά και περιοδικά σήματα.

# Συναρτήσεις Ετεροσυσχέτισης

76

## □ Ετεροσυσχέτιση Ενεργειακών Σημάτων

- Έστω τα ενεργειακά σήματα  $g_1(t)$  και  $g_2(t)$  (μπορεί να είναι και μιγαδικά).

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(t)g_2^*(t - \tau)dt$$

- Τα  $g_1(t)$  και  $g_2(t)$  είναι **ορθογώνια** σε ολόκληρο το χρονικό διάστημα εάν:

$$R_{12}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(t)g_2^*(t)dt = 0$$

# Συναρτήσεις Ετεροσυσχέτισης

77

- Ετεροσυσχέτιση Ενεργειακών Σημάτων

$$R_{12}(\tau) = R_{21}^*(-\tau)$$

$$R_{12}(\tau) \neq R_{21}(\tau)$$

- Θεώρημα ετεροσυσχέτισης (correlation theorem):

$$R_{12}(\tau) \xrightarrow{\leftarrow} G_1(f)G_2^*(f)$$

- Η ετεροσυσχέτιση δύο ενεργειακών σημάτων αντιστοιχεί στον πολλαπλασιασμό του ΜΣ Fourier του ενός σήματος με το συζυγή μιγαδικό ΜΣ Fourier του άλλου σήματος.

# Συναρτήσεις Ετεροσυσχέτισης

78

- Ετεροσυσχέτιση Σημάτων Ισχύος
- Έστω τα σήματα ισχύος  $g_1(t)$  και  $g_2(t)$

$$R_{12}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T g_1(t) g_2^*(t - \tau) dt$$

- Τα σήματα ισχύος  $g_1(t)$  και  $g_2(t)$  είναι **ορθογώνια** σε ολόκληρο το χρονικό διάστημα εάν:

$$R_{12}(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T g_{p1}(t) g_{p2}^*(t) dt = 0$$

# Συναρτήσεις Ετεροσυσχέτισης

79

- Ετεροσυσχέτιση Σημάτων Ισχύος (Περιοδικών)
- Όταν τα σήματα είναι και περιοδικά με την ίδια περίοδο:

$$R_{12}(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} g_{p1}(t) g_{p2}^*(t - \tau) dt$$

$$R_{12}(\tau) \xleftrightarrow{\leftarrow} \frac{1}{T_0^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_1\left(\frac{n}{T_0}\right) G_2^*\left(\frac{n}{T_0}\right) \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right)$$

όπου  $G_1(\cdot)$  και  $G_2(\cdot)$  οι ΜΣ Fourier των γεννητριών συναρτήσεων για τα  $g_{p1}(t)$  και  $g_{p2}(t)$ , αντίστοιχα.

# Συνέλιξη

80

- Η Συνέλιξη (convolution) δύο σημάτων ορίζεται :

$$y(t) = x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau$$

- Ιδιότητες της Συνέλιξης

$$x_1(t) * x_2(t) = x_2(t) * x_1(t)$$

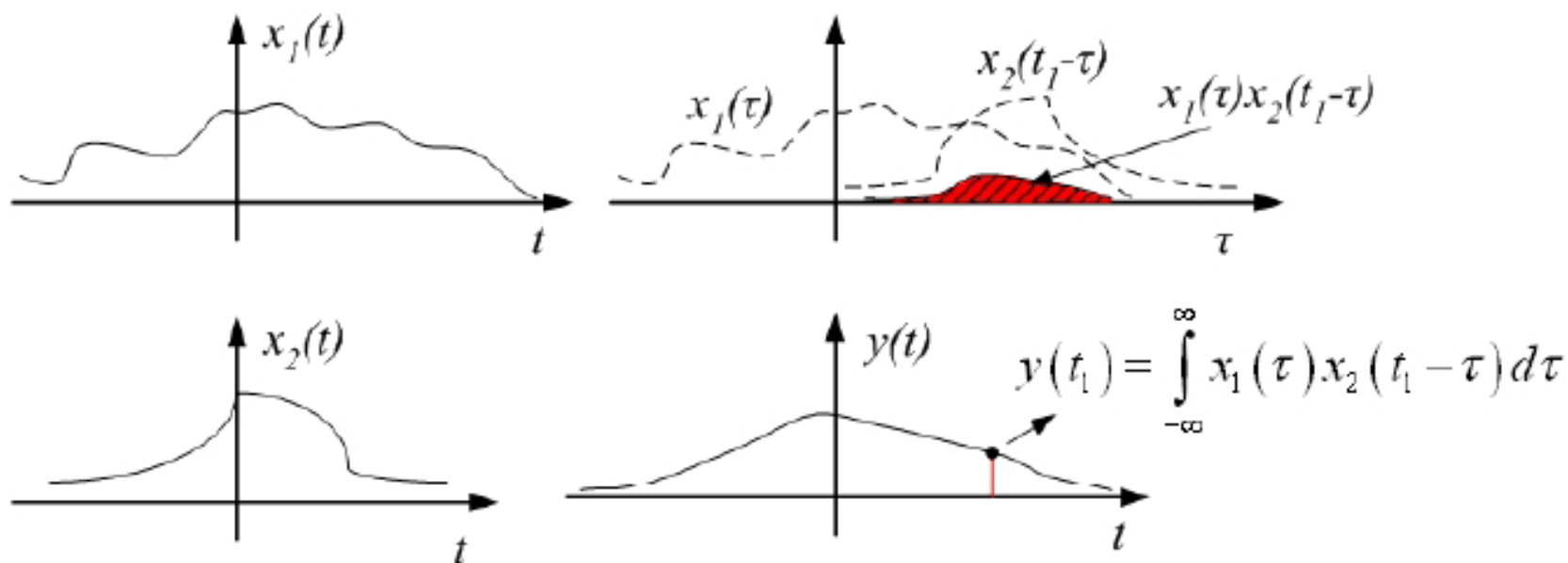
$$x_1(t) * (x_2(t) * x_3(t)) = (x_1(t) * x_2(t)) * x_3(t)$$

$$x_1(t) * (x_2(t) + x_3(t)) = (x_1(t) * x_2(t)) + (x_1(t) * x_3(t))$$



# Συνέλιξη

81



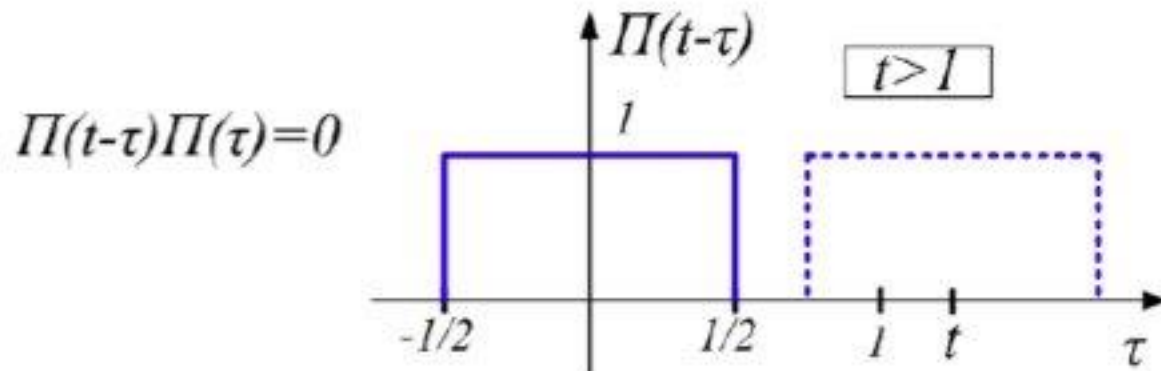
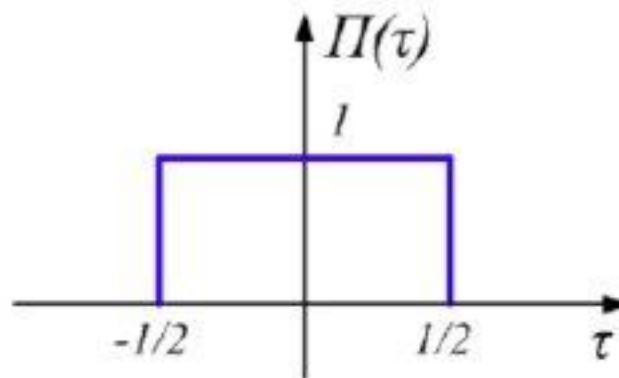
Η συνέλιξη είναι μία ομαλοποιημένη εκδοχή της εισόδου στην ταχύτητα μεταβολής του σήματος και στη διάρκειά του.

# Παράδειγμα Συνέλιξης

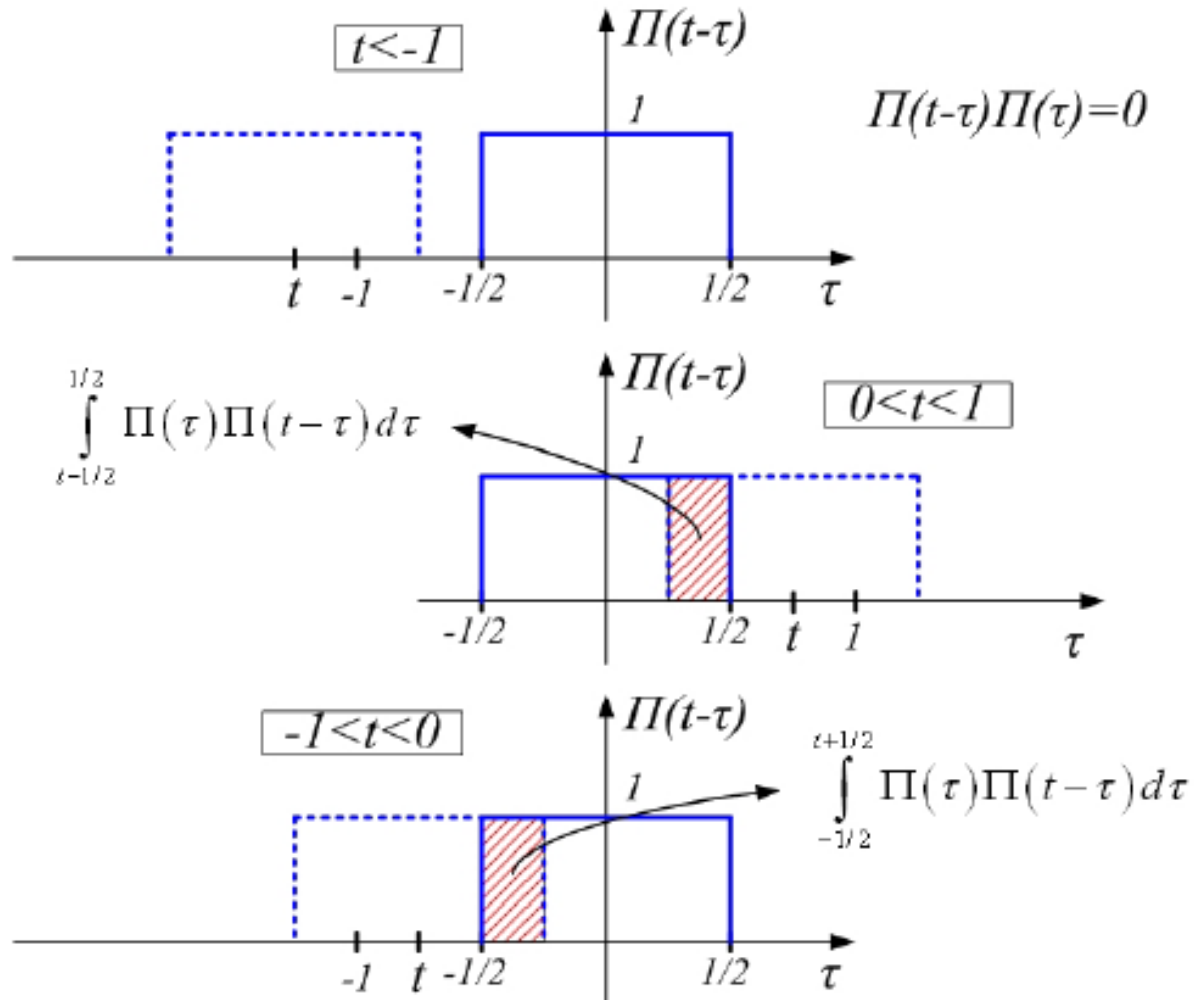
82

- Υπολογίστε την αυτοσυνέλιξη του τετραγωνικού παλμού

$$[\Pi(t) * \Pi(t)]$$



# Παράδειγμα Συνέλιξης



# Παράδειγμα Συνέλιξης

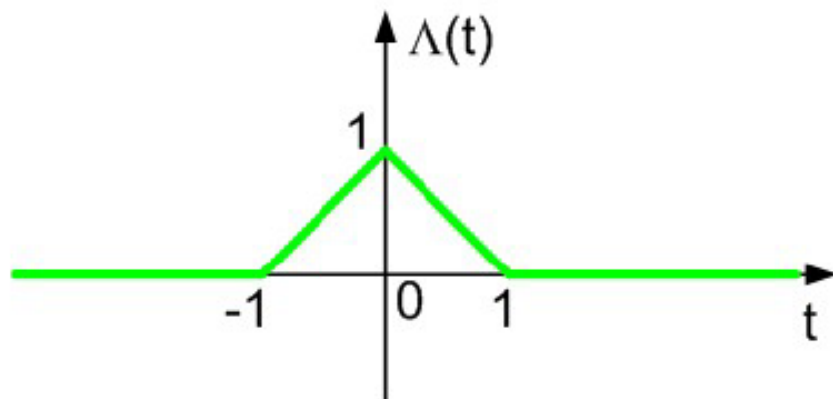
84

$$\Pi(t) * \Pi(t) = \int_{-1/2}^{t+1/2} d\tau = \tau \Big|_{-1/2}^{t+1/2} = t+1 \quad -1 < t < 0$$

$$\Pi(t) * \Pi(t) = \int_{t-1/2}^{1/2} d\tau = \tau \Big|_{t-1/2}^{1/2} = 1-t \quad 0 < t < 1$$

$$\Lambda(t) = \begin{cases} t+1 & -1 \leq t \leq 0 \\ 1-t & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1-|t| & |t| \leq 1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$



Τηλεπικοινωνίες  
 Φασμ. Πυκν. Ενέργειας:  $\mathfrak{F}[R_{\text{ΑΠ}_{a/2}}(\tau)] = |\mathfrak{F}[\text{ΑΠ}_{a/2}(t)]|^2 = |Aa \cdot \text{sin } c(af)|^2 = (Aa)^2 [\text{sin } c(af)]^2$

# Φασματική Πυκνότητα Ενέργειας

85

- Η ενέργεια ενός σήματος ενέργειας  $x(t)$  υπολογίζεται από τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης για μηδενική μετατόπιση, δηλαδή

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = R_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

- Το γεγονός ότι ολοκληρώνουμε ένα μέγεθος σε όλο το φάσμα και προκύπτει το ενεργειακό περιεχόμενο του σήματος, σημαίνει ότι το μέγεθος αυτό, και στην προκειμένη περίπτωση το τετράγωνο του πλάτους του φάσματος, είναι μια συνάρτηση πυκνότητας, ονομάζεται δε **φασματική πυκνότητα ενέργειας** του σήματος και έχει μονάδες **ενέργειας ανά Hertz** στο εύρος ζώνης του σήματος.

# Φασματική Πυκνότητα Ενέργειας

86

- Συνεπώς ο μετ/σμός Fourier της αυτοσυσχέτισης είναι η φασματική πυκνότητα ενέργειας του σήματος και συμβολίζεται

$$\mathcal{F}[R_x(\tau)] = |X(f)|^2 = G_x(f)$$

- Αν ολοκληρώσουμε την  $G_x(f)$  σε όλο το εύρος ζώνης του σήματος, προκύπτει η ενέργεια του σήματος.
- Αποδεικνύεται εύκολα ότι η φασματική πυκνότητα ενέργειας του σήματος εξόδου ενός συστήματος με συνάρτηση μεταφοράς  $H(f)$  δίνεται ως εξής

$$G_y(f) = |Y(f)|^2 = G_x(f)G_h(f) = |X(f)|^2 |H(f)|^2$$

# Φασματική Πυκνότητα Ισχύος

87

- Όμοια με τα σήματα ενέργειας υπολογίζουμε και τη φασματική πυκνότητα ισχύος ενός σήματος ισχύος.
- Έχει μονάδες **ισχύος ανά Hertz**.
- Η μέση ισχύς δίνεται από :

$$P_x = R_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[R_x(\tau)] df = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) df$$

- Η φασματική πυκνότητα ισχύος εξόδου ενός συστήματος δίνεται παρόμοια από :

$$S_y(f) = S_x(f) |H(f)|^2$$

# ΦΠΙ Περιοδικών Σημάτων

88

- Για τα περιοδικά σήματα η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης είναι περιοδική με περίοδο την ίδια με εκείνη του σήματος, και αναπτύσσεται σε Σειρές Fourier, με συντελεστές ίσους με το τετράγωνο του πλάτους των μιγαδικών συντελεστών Fourier του αρχικού σήματος, δηλαδή

$$R_x(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^2 e^{j2\pi \frac{n}{T_o} \tau}$$

$$x_n = \frac{1}{T_o} X\left(\frac{n}{T_o}\right)$$



# ΦΠΙ Περιοδικών Σημάτων

89

- Επιπλέον η ΦΠΙ του περιοδικού σήματος υπολογίζεται ως Fourier της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης, όπου λόγω της περιοδικότητάς της ο μετ/σμός Fourier θα αποτελείται από κρουστικές σε διάφορες συχνότητες (αρμονικές), δηλαδή

$$S_x(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^2 \delta\left(f - \frac{n}{T_o}\right)$$

- Η συνολική ισχύς υπολογίζεται ως εξής.

$$P_x = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) df = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^2$$

# ΦΠΙ Περιοδικών Σημάτων

90

- Αν τώρα υποθέσουμε ότι το περιοδικό σήμα  $x(t)$  αποτελεί είσοδο στο ΓΧΑ σύστημα με  $H(f)$ , τότε η έξοδος είναι

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n e^{j\frac{2\pi n t}{T_o}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n H\left(\frac{n}{T_o}\right) e^{j\frac{2\pi n t}{T_o}}$$

- και θα έχει φασματική πυκνότητα ισχύος

$$S_y(f) = |H(f)|^2 S_x(f) = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^2}_{\text{Ισχύς}} \left| H\left(\frac{n}{T_o}\right) \right|^2 \delta\left(f - \frac{n}{T_o}\right)$$

- Η ΦΠΙ ενός περιοδικού σήματος είναι διακριτή συνάρτηση της συχνότητας.
- Η ΦΠΙ ενός τυχαίου σήματος (επίσης σήμα ισχύος) είναι συνεχής συνάρτηση της συχνότητας.

# Φασματική Πυκνότητα

91

- Έτσι ανάλογα με το αν το σήμα είναι ενεργειακό ή ισχύος, το συνολικό εμβαδό κάτω από την καμπύλη της πυκνότητας φάσματος σχεδιασμένη συναρτήσει της συχνότητας, είναι ίσο με τη συνολική ενέργεια ή τη μέση ισχύ του σήματος, αντίστοιχα.
- Θεώρημα Ισχύος του Parseval (Parseval's power theorem):

*Η μέση ισχύς ενός περιοδικού σήματος  $x(t)$  είναι ίση με το άθροισμα των τετραγώνων του πλάτους όλων των αρμονικών συνιστωσών του σήματος  $x(t)$ .*

**Άρα με τους συντελεστές Fourier μπορούμε να υπολογίσουμε τη μέση ισχύ ενός σήματος.**

# Μετάδοση Σημάτων μέσω Γραμμικών Συστημάτων

92

- Με τον όρο σύστημα (system) αναφερόμαστε σε κάθε φυσική διάταξη που παράγει ένα σήμα εξόδου σε απόκριση ενός σήματος εισόδου.

Διέγερση (excitation) -> Απόκριση (response)

- Σε ένα γραμμικό σύστημα ισχύει η αρχή της υπέρθεσης (superposition principle).

# Μετάδοση Σημάτων μέσω Γραμμικών Συστημάτων

93

- Ασχολούμαστε με τη μελέτη των γραμμικών συστημάτων, με ιδιαίτερη αναφορά στα φίλτρα και στους τηλεπικοινωνιακούς διαύλους.
- Φίλτρο (filter):
  - Μία διάταξη επιλογής συχνότητας που χρησιμοποιείται για να περιορίσει το φάσμα ενός σήματος σε μία ζώνη συχνοτήτων.
- Τηλεπικοινωνιακός δίαυλος (communication channel):
  - το μέσο μετάδοσης που συνδέει τον πομπό και το δέκτη ενός συστήματος επικοινωνίας.

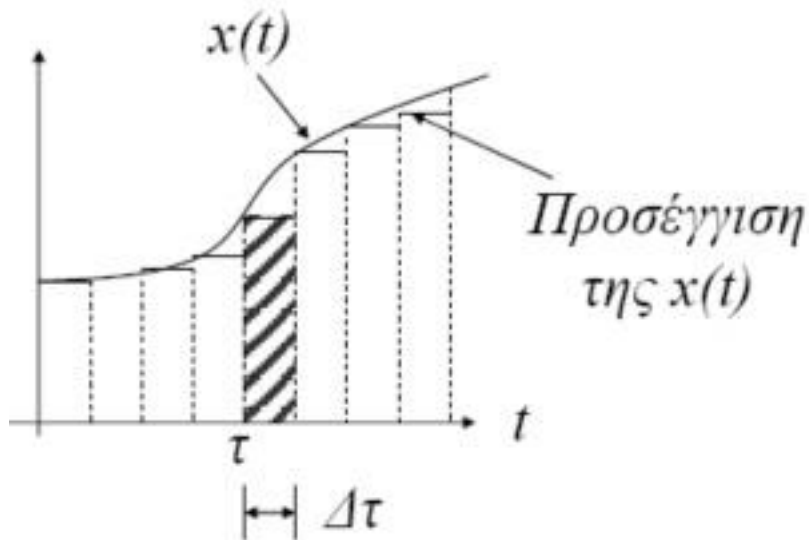
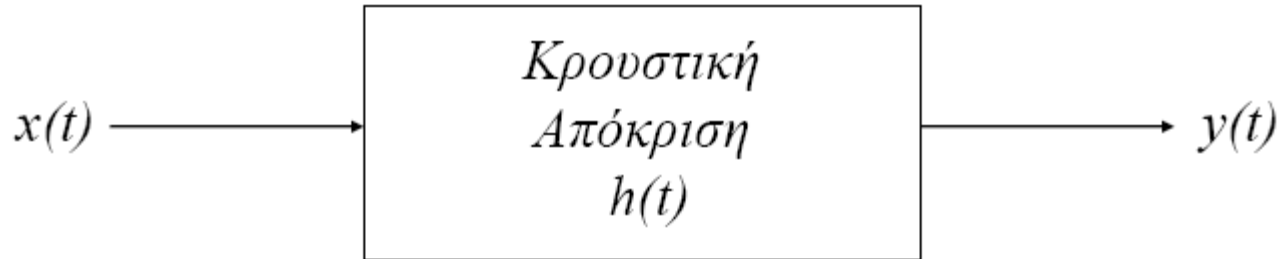
# Γραμμικά Συστήματα: Απόκριση στο Πεδίο του Χρόνου

94

- Στο πεδίο του χρόνου, ένα γραμμικό σύστημα περιγράφεται με την κρουστική συνάρτηση.
- Κρουστική συνάρτηση (impulse response):
  - η απόκριση του συστήματος (με μηδενικές αρχικές συνθήκες) σε μια μοναδιαία κρουστική συνάρτηση (συνάρτηση δέλτα  $\delta(t)$ ), που εφαρμόζεται στην είσοδο του συστήματος.
- Χρονικά αμετάβλητο (time invariant) σύστημα:
  - η μορφή της κρουστικής απόκρισης είναι η ίδια ανεξάρτητα από το πότε εφαρμόζεται στο σύστημα η μοναδιαία κρουστική συνάρτηση.

# Γραμμικά Συστήματα: Απόκριση στο Πεδίο του Χρόνου

95



Καθώς το  $\Delta\tau$  τείνει στο μηδέν κάθε παλμός τείνει σε μια συνάρτηση δέλτα με συντελεστή βαρύτητας ίσο με το ύψος του παλμού πολλαπλασιασμένο με  $\Delta\tau$ .

$$\delta(t-\tau)x(\tau)\Delta\tau \rightarrow h(t-\tau)x(\tau)\Delta\tau$$

# Γραμμικά Συστήματα: Απόκριση στο Πεδίο του Χρόνου

96

- Καθώς το  $\Delta t$  τείνει στο μηδέν, εφαρμόζοντας την αρχή της επαλληλίας και αθροίζοντας τις διάφορες απειροελάχιστες αποκρίσεις:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

- **Συνελικτικό Ολοκλήρωμα** (convolution integral)
- Περιλαμβάνονται τρεις διαφορετικές κλίμακες χρόνου:
  - ▣ χρόνος διέγερσης (excitation time)  $\tau$ ,
  - ▣ χρόνος απόκρισης (response time)  $t$ ,
  - ▣ χρόνος μνήμης του συστήματος (system-memory time)  $t-\tau$ .



# Γραμμικά Συστήματα: Απόκριση στο Πεδίο του Χρόνου

97

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t)*h(t)$$

- Η παρούσα τιμή της απόκρισης ενός γραμμικού χρονικά αμετάβλητου συστήματος είναι το ολοκλήρωμα με συντελεστές βαρύτητας, σύμφωνα με την κρουστική απόκριση του συστήματος, σε όλη την προηγούμενη χρονική περίοδο εφαρμογής του σήματος εισόδου.
- Κρουστική Απόκριση  $\rightarrow$  Συνάρτηση μνήμης (memory function)
- Η συνέλιξη είναι αντιμεταθετική:  $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$

# Γραμμικά Συστήματα: Απόκριση Συχνότητας

98

$$x(t) = \exp(j2\pi ft)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \exp(j2\pi f(t - \tau)) d\tau = \exp(j2\pi ft) H(f)$$

Ιδιοσυνάρτηση  
(eigenfunctions) των  
συστημάτων ΓΧΑ

Ιδιοτιμή  
(eigenvalue) των  
συστημάτων ΓΧΑ

$$\text{όπου: } H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau = \mathbf{F}[h(t)]$$

- $H(f)$  = **συνάρτηση μεταφοράς** (transfer function)

$$H(f) = \left. \frac{y(t)}{x(t)} \right|_{x(t)=\exp(j2\pi ft)}$$

$$Y(f) = H(f)X(f)$$

Γραμμικό χρονικά  
αμετάβλητο (ΓΧΑ) σύστημα

# Γραμμικά Συστήματα: Απόκριση Συχνότητας

$$H(f) = |H(f)| \exp(j\beta(f))$$

- $H(f)$  = συνάρτηση μεταφοράς (transfer function)
- $|H(f)|$  = απόκριση πλάτους (amplitude response)
- $\beta(f)$  = φάση (phase) ή γωνία φάσης (phase angle)

$$\ln[H(f)] = \alpha(f) + j\beta(f)$$

- $\alpha(f) = \ln(|H(f)|)$  = κέρδος (gain) του συστήματος (neper)
- $\beta(f)$  = (radian)
- $\alpha'(f) = 20 \log_{10}(|H(f)|) = 8.69 \alpha(f)$  (decibel)

# Γραμμικά Συστήματα: Απόκριση Συχνότητας

100

- Αν ένα γραμμικό σύστημα έχει πραγματική κρουστική απόκριση  $h(t)$ , η συνάρτηση μεταφοράς  $H(f)$  παρουσιάζει συζυγή συμμετρία:

$$|H(f)| = |H(-f)| \text{ και } \beta(f) = -\beta(-f)$$

- Ως μέσο για να καθορίσουμε τη σταθερότητα της απόκρισης πλάτους  $|H(f)|$  ή του κέρδους  $\alpha(f)$ , χρησιμοποιούμε μια παράμετρο που ονομάζεται **εύρος ζώνης** (bandwidth) του συστήματος.

# Παράδειγμα – Απόκριση ΓΧΑ Συστήματος σε Περιοδικά Σήματα

101

$$x(t) = 1 + \cos(200\pi t) + \frac{1}{2} \cos(400\pi t)$$

$$h(t) = e^{-t}u(t) \quad \text{Υπολογίστε την έξοδο}$$

Παρατηρούμε αρχικά ότι το σήμα εισόδου αποτελείται από μια dc συνιστώσα, μια βασική συχνότητα  $f_o = 100\text{Hz}$ , και τη δεύτερη αρμονική  $f_o = 200\text{Hz}$ .

$$x(t) = 1 + \frac{e^{j2\pi 100t} + e^{-j2\pi 100t}}{2} + \frac{1}{2} \frac{e^{j2\pi 200t} + e^{-j2\pi 200t}}{2} = \sum_{n=-2}^2 x_n e^{j2\pi n 100t}$$

$$x_0 = 1 \quad x_{-2} = x_2 = \frac{1}{4} \quad x_{-1} = x_1 = \frac{1}{2}$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{j\frac{2\pi nt}{T_o}}$$

# Παράδειγμα – Απόκριση ΓΧΑ Συστήματος σε Περιοδικά Σήματα

102

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} e^{-j2\pi ft} dt = \int_0^{\infty} e^{-(1+j2\pi f)t} dt$$

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

$$= \left[ -\frac{1}{1+j2\pi f} e^{-(1+j2\pi f)t} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{1+j2\pi f}$$

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n e^{j\frac{2\pi nt}{T_o}}$$

$$y_0 = 1 \quad y_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1+j200\pi} \right) \quad y_{-1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1-j200\pi} \right)$$

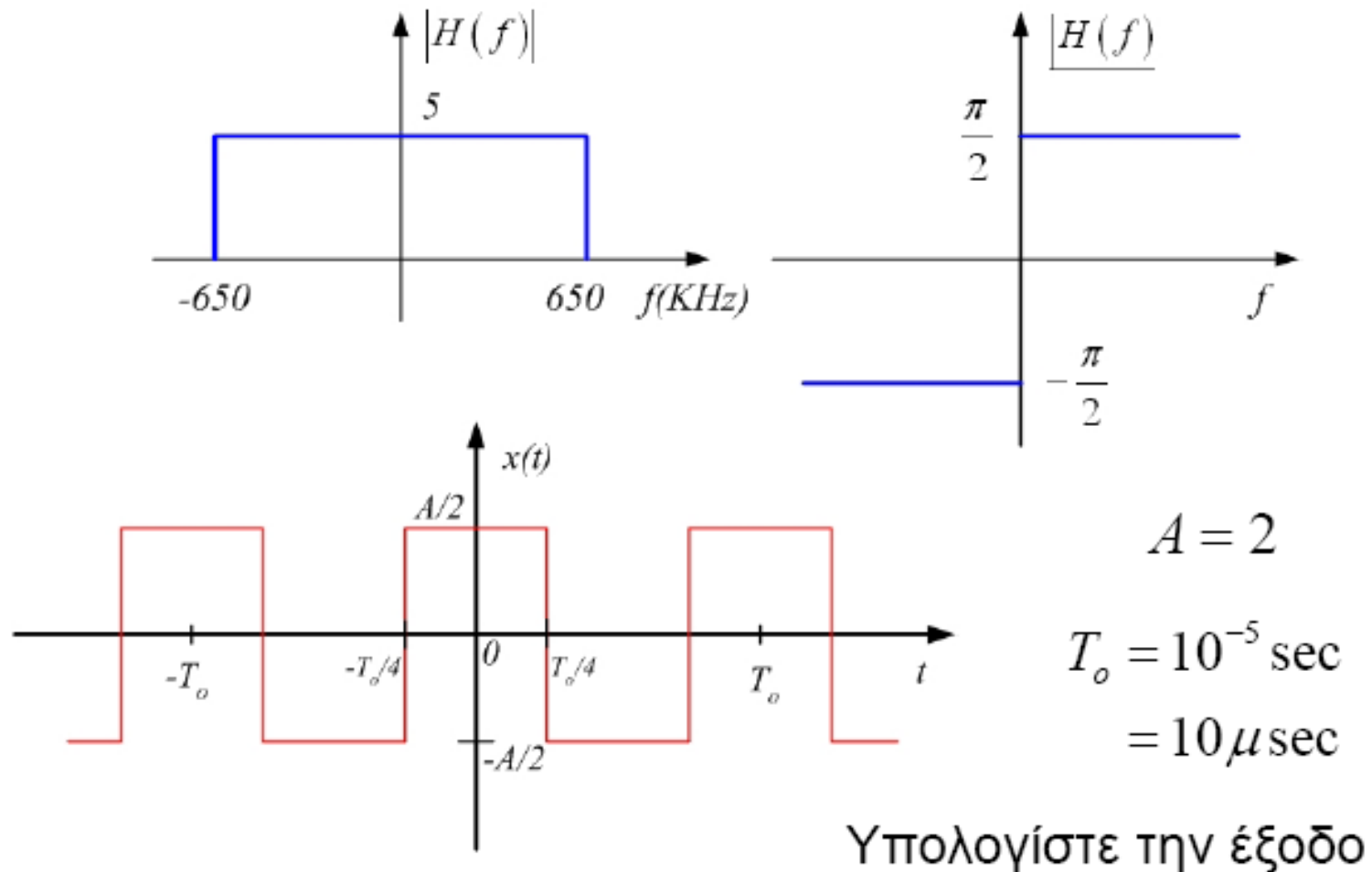
$$y_2 = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{1+j400\pi} \right) \quad y_{-2} = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{1-j400\pi} \right)$$

$$y_n = x_n H(nf_o) = |x_n| |H(nf_o)| e^{j(\underbrace{x_n}_{\phi_n} + \underbrace{H(nf_o)}_{\theta_n})}$$

$$y(t) = \sum_{n=-2}^2 y_n e^{j2\pi n100t} = 1 + 2 \sum_{n=1}^2 |y_n| \cos(2\pi n100t + \underbrace{\phi_n}_{\theta_n})$$

# Παράδειγμα: Βαθυπερατό Φίλτρο

103



# Παράδειγμα: Βαθυπερατό Φίλτρο

104

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cos[2\pi(2k+1)10^5 t] \\ &= \frac{2}{\pi} e^{j2\pi 10^5 t} + \frac{2}{\pi} e^{-j2\pi 10^5 t} - \frac{2}{3\pi} e^{j2\pi 3 \cdot 10^5 t} - \frac{2}{3\pi} e^{-j2\pi 3 \cdot 10^5 t} + \frac{2}{5\pi} e^{j2\pi 5 \cdot 10^5 t} + \frac{2}{5\pi} e^{-j2\pi 5 \cdot 10^5 t} - \dots\end{aligned}$$

Υπολογίζουμε τις τιμές της συνάρτησης μεταφοράς για όλες τις αρμονικές που υπάρχουν στο σήμα εισόδου

$$H(10^5) = |H(10^5)| e^{j\angle H(10^5)} = |H(100\text{KHz})| e^{j\frac{\pi}{2}} = 5e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$H(-10^5) = 5e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$H(3 \cdot 10^5) = 5e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$H(-3 \cdot 10^5) = 5e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$H(5 \cdot 10^5) = 5e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$H(-5 \cdot 10^5) = 5e^{-j\frac{\pi}{2}}$$



# Παράδειγμα: Βαθυπερατό Φίλτρο

105

$$y_1 = |x_1| |H(10^5)| e^{j(\underbrace{|x_1|}_{\text{phase}} + \underbrace{|H(10^5)|}_{\text{phase}})} = \frac{2}{\pi} 5 e^{j\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{10}{\pi} e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$y_{-1} = \frac{10}{\pi} e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$y_3 = -\frac{10}{3\pi} e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$y_{-3} = -\frac{10}{3\pi} e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$y_5 = \frac{2}{\pi} e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$y_{-5} = \frac{2}{\pi} e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$y_0 = y_2 = y_{-2} = y_4 = y_{-4} = 0$$

$$y_n = x_n H(nf_o) = |x_n| |H(nf_o)| e^{j(\underbrace{|x_n|}_{\text{phase}} + \underbrace{|H(nf_o)|}_{\text{phase}})}$$

$$y(t) = \sum_{n=-5}^5 y_n e^{j2\pi n 10^5 t}$$

$$= \frac{10}{\pi} e^{j\left(2\pi 10^5 t + \frac{\pi}{2}\right)} + \frac{10}{\pi} e^{-j\left(2\pi 10^5 t + \frac{\pi}{2}\right)} - \frac{10}{3\pi} e^{j\left(2\pi 3 \cdot 10^5 t + \frac{\pi}{2}\right)} - \frac{10}{3\pi} e^{-j\left(2\pi 3 \cdot 10^5 t + \frac{\pi}{2}\right)} + \frac{2}{\pi} e^{j\left(2\pi 5 \cdot 10^5 t + \frac{\pi}{2}\right)} + \frac{2}{\pi} e^{-j\left(2\pi 5 \cdot 10^5 t + \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$= \frac{10}{\pi} 2 \cos\left(2\pi 10^5 t + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{10}{3\pi} 2 \cos\left(2\pi 3 \cdot 10^5 t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{2}{\pi} 2 \cos\left(2\pi 5 \cdot 10^5 t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= -\frac{20}{\pi} \sin(2\pi 10^5 t) + \frac{20}{3\pi} \sin(6\pi 10^5 t) - \frac{4}{\pi} \sin(10\pi 10^5 t)$$

Τηλεπικοινωνίες

Από είσοδο με άπειρους όρους έχουμε έξοδο με 3 όρους

# Παράδειγμα: Φίλτρο απομαστευμένης γραμμής μεταφοράς (tapped-delay-line-filter)

106

- Έστω γραμμικό χρονικά αμετάβλητο φίλτρο με κρουστική απόκριση  $h(t)$ . Υποθέστε ότι:
  - ▣ 1.  $h(t)=0, t<0$
  - ▣ 2.  $h(t)=0, t\geq T_f$  (πεπερασμένης διάρκειας).
- Άρα 
$$y(t) = \int_0^{T_f} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$
- Έστω ότι έχουν ληφθεί ομοιόμορφα δείγματα (uniformly sampled)
  - ▣  $\Delta t$  = περίοδος δειγματοληψίας (sampling period):
- $t = n*\Delta t$  και  $\tau=k*\Delta t, n,k =$  ακέραιοι

# Παράδειγμα: Φίλτρο απομαστευμένης γραμμής μεταφοράς (tapped-delay-line-filter)

107

- Έστω  $\Delta\tau$  αρκετά μικρό, ώστε το γινόμενο  $h(\tau)x(t-\tau)$  να παραμένει σταθερό για  $k\Delta\tau < \tau < (k+1)\Delta\tau$ .
- Άθροισμα Συνέλιξης (convolution sum):

$$y(n\Delta\tau) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k\Delta\tau)x(n\Delta\tau - k\Delta\tau)\Delta\tau$$

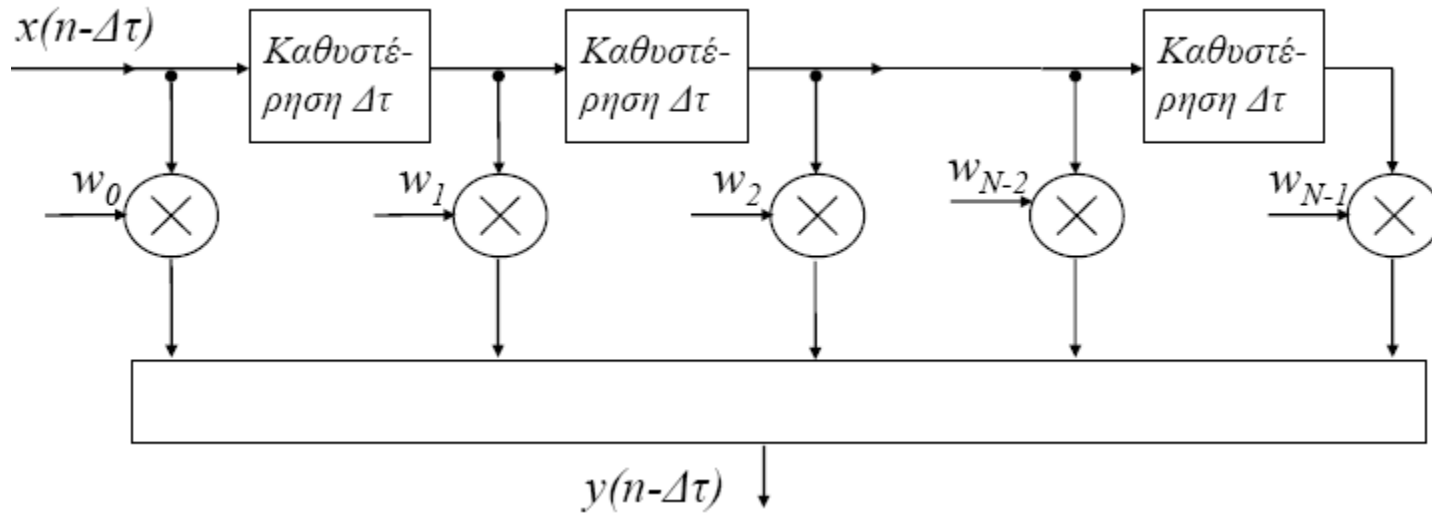
όπου  $N\Delta\tau = T_f$ .

- Ορίζοντας:  $w_k = h(k\Delta\tau)\Delta\tau$

- Μπορούμε να γράψουμε: 
$$y(n\Delta\tau) = \sum_{k=0}^{N-1} w_k x(n\Delta\tau - k\Delta\tau)$$

# Παράδειγμα: Φίλτρο απομαστευμένης γραμμής μεταφοράς (tapped-delay-line-filter)

108



- Στοιχεία καθυστέρησης (delay elements)
- Πολλαπλασιαστές (multipliers)
- Απομαστεύσεις της γραμμής καθυστέρησης (delay-line taps)
- Εγκάρσιο φίλτρο (transversal filter)
- Ψηφιακό φίλτρο με κρουστική απόκριση πεπερασμένης διάρκειας - finite-duration impulse response (FIR) digital filter

# Γραμμικά Συστήματα: Σχέση μεταξύ Πυκνοτήτων Φασμάτων Εισόδου και Εξόδου

109

- Ενεργειακά Φάσματα:

$$|Y(f)|^2 = |H(f)|^2 |X(f)|^2 \Leftrightarrow \Psi_y(f) = |H(f)|^2 \Psi_x(f)$$

- Φάσματα Ισχύος:

$$S_y(f) = S_x(f) |H(f)|^2$$

# Γραμμικά Συστήματα: Κριτήριο Paley-Wiener

110

- Αναγκαία και ικανή συνθήκη ώστε μια συνάρτηση  $a(f)$  να αποτελεί το κέρδος ενός τυχαίου φίλτρου είναι η σύγκλιση του ολοκληρώματος:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|a(f)|}{1+f^2} df < \infty$$

- Το ισοδύναμο της **απαίτησης αιτιότητας** στο πεδίο της συχνότητας.
- Ένα σύστημα με πραγματοποιήσιμη χαρακτηριστική κέρδους μπορεί να έχει άπειρη εξασθένηση για ένα διακριτό σύνολο συχνοτήτων, αλλά δεν μπορεί να έχει άπειρη εξασθένηση σε μία ζώνη συχνοτήτων.
- Για να ικανοποιείται το κριτήριο P - W πρέπει  $\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df < \infty$

# Γραμμικά Συστήματα: Μετάδοση χωρίς Παραμόρφωση

111

- (*distortionless transmission*)

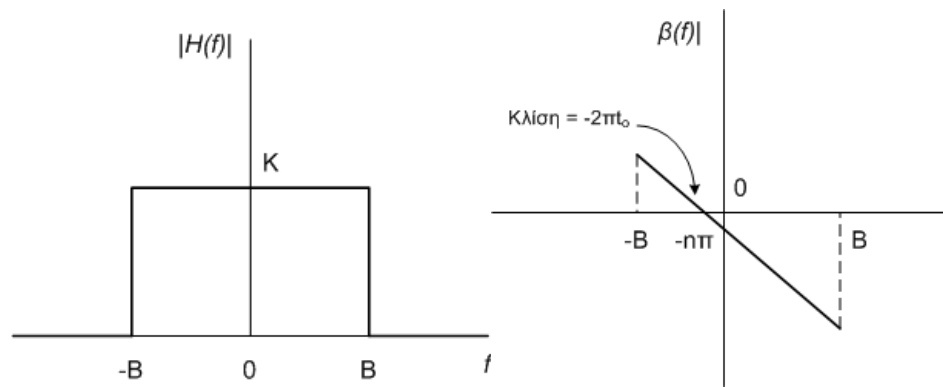
$$y(t) = K x(t - t_0) \quad \text{όπου } K = \text{σταθερά}$$

$$Y(f) = K X(f) \exp(-j2\pi f t_0) \Rightarrow$$

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = K \exp\left[j \underbrace{(-2\pi f t_0 \pm n\pi)}_{\beta(f)}\right]$$

- Για να πετύχουμε μετάδοση χωρίς παραμόρφωση μέσω ενός διαύλου, η συνάρτηση μεταφοράς του διαύλου πρέπει να ικανοποιεί δύο συνθήκες:

- $|H(f)| = K$ ,
- $\beta(f) = -2\pi f t_0 \pm n\pi$



# Γραμμικά Συστήματα: Μετάδοση χωρίς Παραμόρφωση

112

- Η χρονική καθυστέρηση που εισάγει ο δίαυλος σχετίζεται με τη φάση και τη συχνότητα:

$$\tau = \frac{d\beta(\omega)}{d\omega} = \frac{1}{2\pi} \frac{d\beta(f)}{df}$$

- Αν η φάση μεταβάλλεται **γραμμικά** ως προς τη συχνότητα, τότε η παράγωγος (κλίση) παραμένει σταθερή, άρα και η καθυστέρηση.
- Στην πράξη δεν είναι εφικτή μετάδοση χωρίς παραμορφώσεις. Η έξοδος υπόκειται σε παραμορφώσεις ως προς το σήμα εισόδου, και ο δίαυλος καλείται «διασκορπιστικός» (dispersive).



# Γραμμικά Συστήματα: Μετάδοση χωρίς Παραμόρφωση

113

- Εάν ωστόσο, το φάσμα του μεταδιδόμενου σήματος περιορίζεται σε μία ζώνη συχνοτήτων, τότε οι παραπάνω συνθήκες πρέπει να ικανοποιούνται από το δίαυλο μόνο για αυτή τη ζώνη συχνοτήτων.
- Σε ένα δίαυλο με διασπορά (dispersive) μπορούμε να ξεχωρίσουμε δύο μορφές παραμόρφωσης σήματος:
  - ▣ α. Παραμόρφωση πλάτους (amplitude distortion) όταν η απόκριση πλάτους του διαύλου  $|H(f)|$ , δεν είναι σταθερή.
  - ▣ β. Παραμόρφωση φάσης ή καθυστέρησης (phase or delay distortion) όταν η απόκριση φάσης του διαύλου  $\beta(f)$ , δεν είναι γραμμική συνάρτηση της συχνότητας.

# Γραμμικά Συστήματα: Μετάδοση χωρίς Παραμόρφωση

114

- Θεωρούμε ένα δίαυλο-φίλτρο με συνάρτηση μεταφοράς

$$H(f) = e^{j\beta(f)}$$

- Η είσοδος του διαύλου-φίλτρου είναι

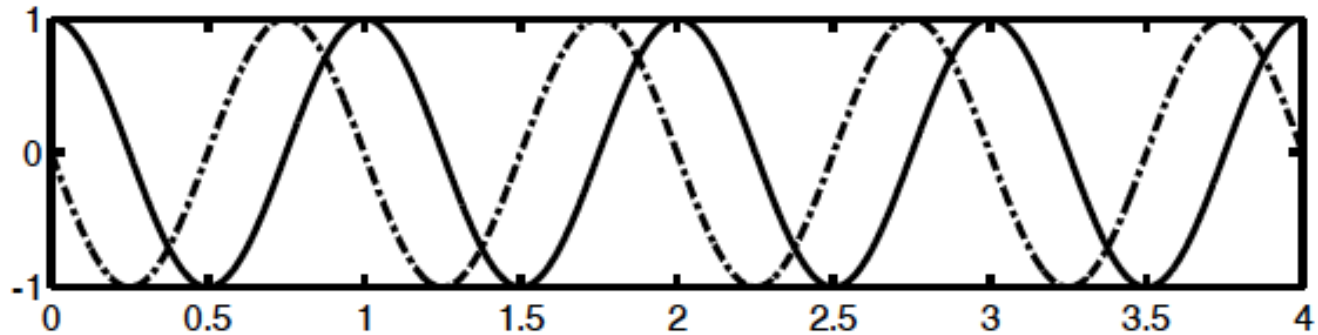
$$x(t) = \cos(2\pi f_1 t) + \cos(2\pi f_2 t)$$

- Και η έξοδος

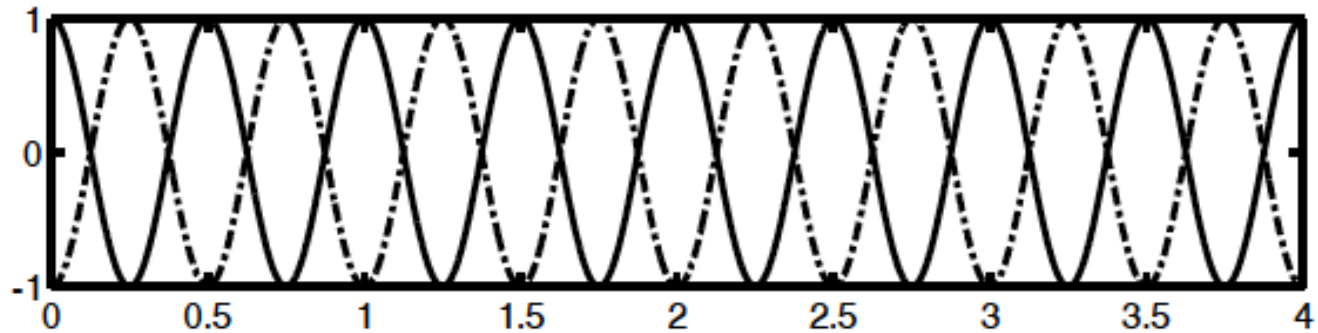
$$y(t) = \cos[2\pi f_1 t + \beta(f_1)] + \cos[2\pi f_2 t + \beta(f_2)]$$

# Γραμμικά Συστήματα: Μετάδοση χωρίς Παραμόρφωση

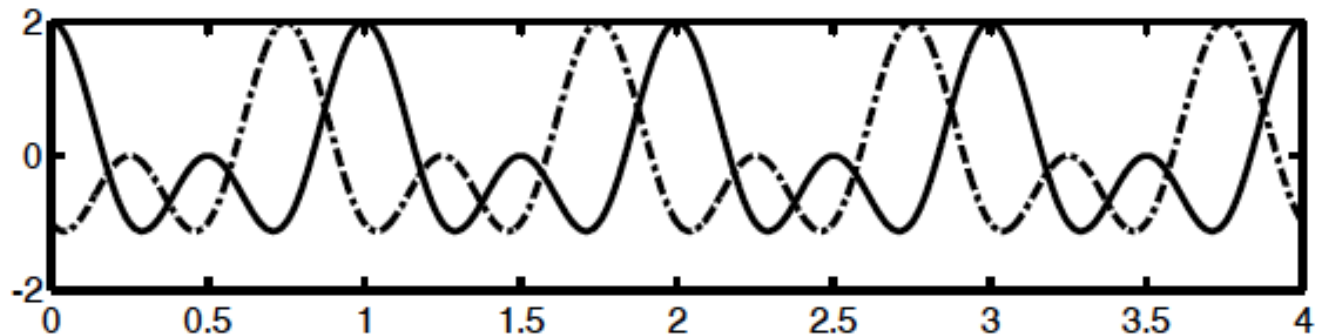
115



$\beta(f)$  γραμμική

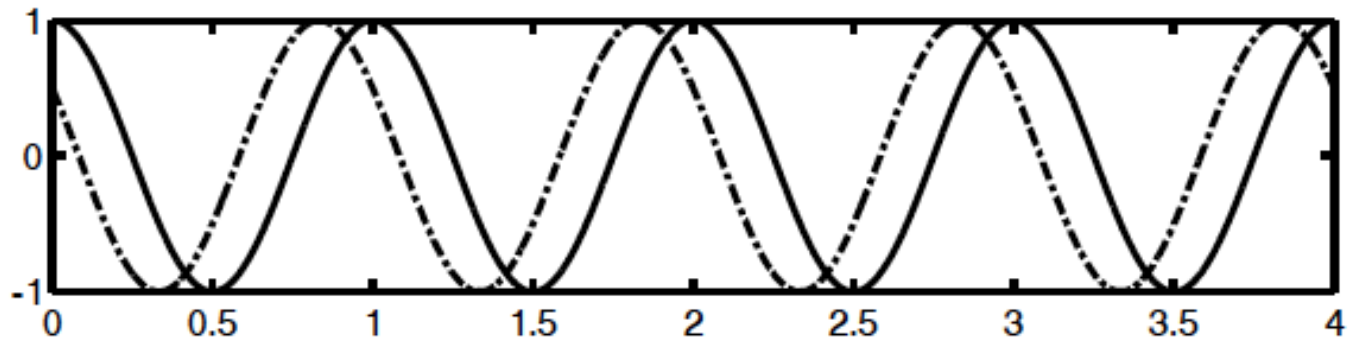


Τηλεπικοινωνίες

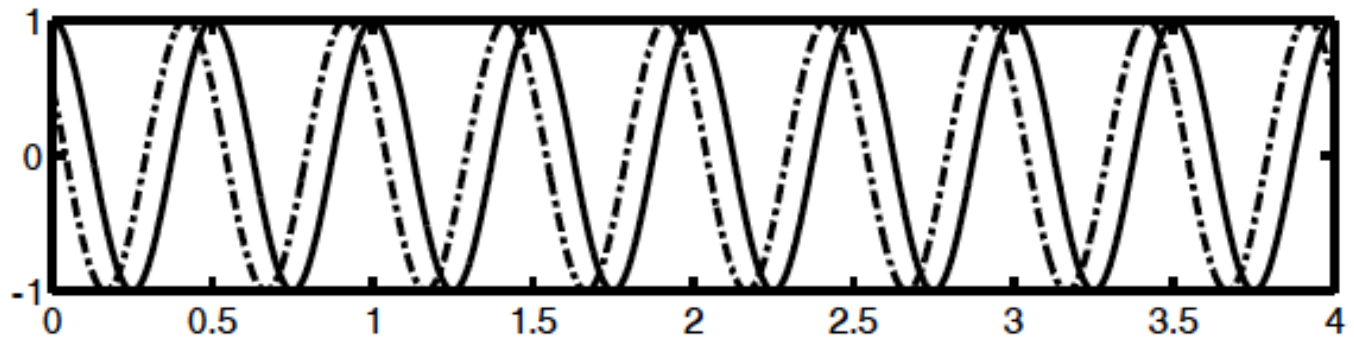


# Γραμμικά Συστήματα: Μετάδοση με Παραμόρφωση

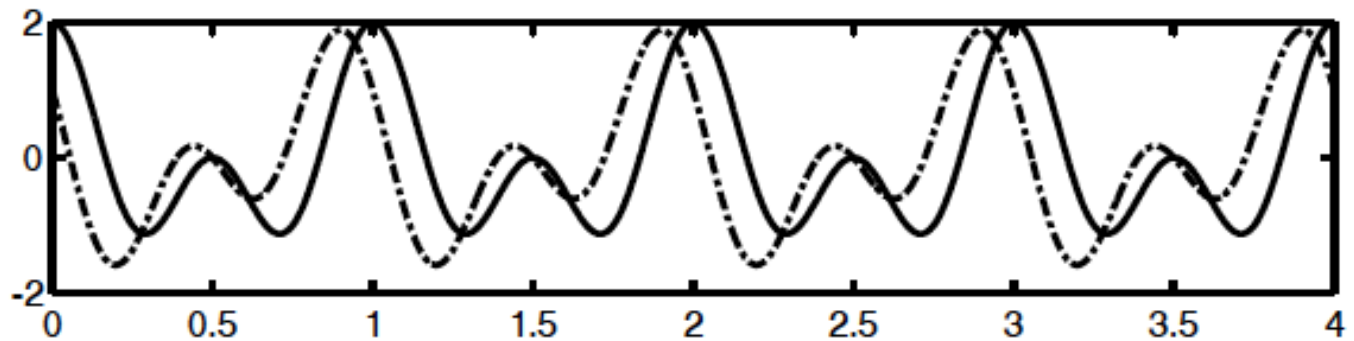
116



$\beta(f)$  μη γραμμική



Τηλεπικοινωνίες



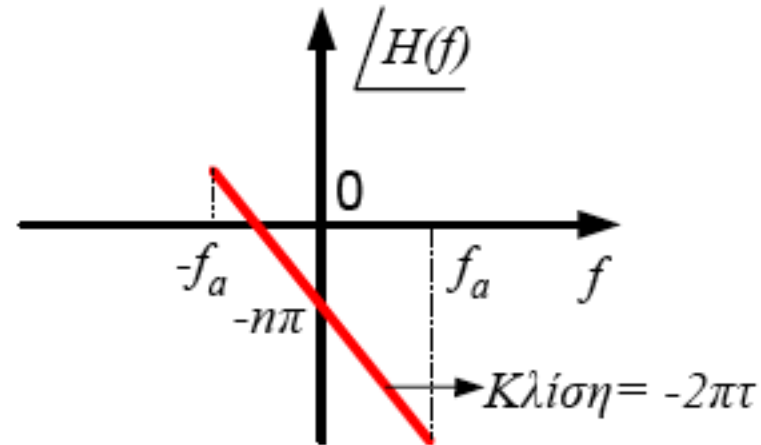
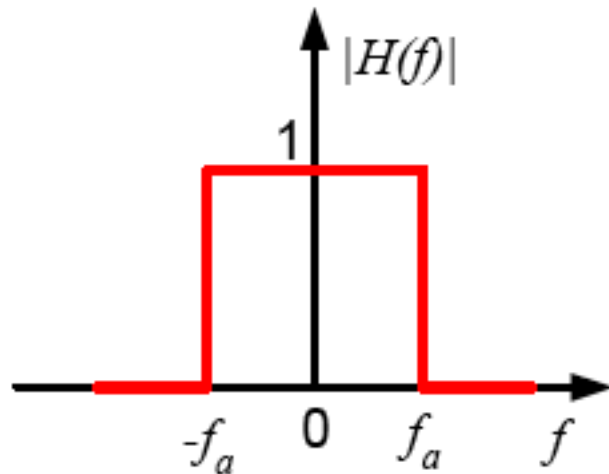
# Ιδανικά Φίλτρα

117

- Φίλτρο (filter) είναι μία διάταξη επιλογής συχνότητας που χρησιμοποιείται για να περιορίσει το φάσμα ενός σήματος σε μία ζώνη συχνοτήτων.
- Δηλαδή η συνάρτηση μεταφοράς έχει μια ζώνη διέλευσης και μια ζώνη αποκοπής ή απόρριψης.
- Κάθε συχνότητα του σήματος που ανήκει στη ζώνη διέλευσης δε θα υποστεί παραμόρφωση, ενώ κάθε συχνότητα που ανήκει στη ζώνη αποκοπής θα απορριφθεί.
- Ανάλογα με τη συνάρτηση μεταφοράς τους, διακρίνουμε 4 κατηγορίες ιδανικών φίλτρων
  - Βαθυπερατά (Low Pass Filter, LPF)
  - Υψιπερατά (High Pass Filter, HPF)
  - Ζωνοπερατά (Band Pass Filter, BPF)
  - Ζωνοφρακτικά (Band Stop Filter, BSF)

# Ιδανικά Βαθυπερατά Φίλτρα (LPF)

118



$$H(f) = \begin{cases} e^{-j2\pi f\tau \pm n\pi} & -f_a \leq f \leq f_a \\ 0 & |f| > f_a \end{cases}$$

Εύρος Ζώνης :  $W=f_a$

# Ιδανικά Βαθυπερατά Φίλτρα (LRF)

119

- Συνάρτηση μεταφοράς ιδανικού βαθυπερατού φίλτρου:

$$H(f) = \begin{cases} \exp(-j2\pi f t_0) & -B \leq f \leq B \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

(εδώ για ευκολία  $K=1$ ,  $n=0$ ).

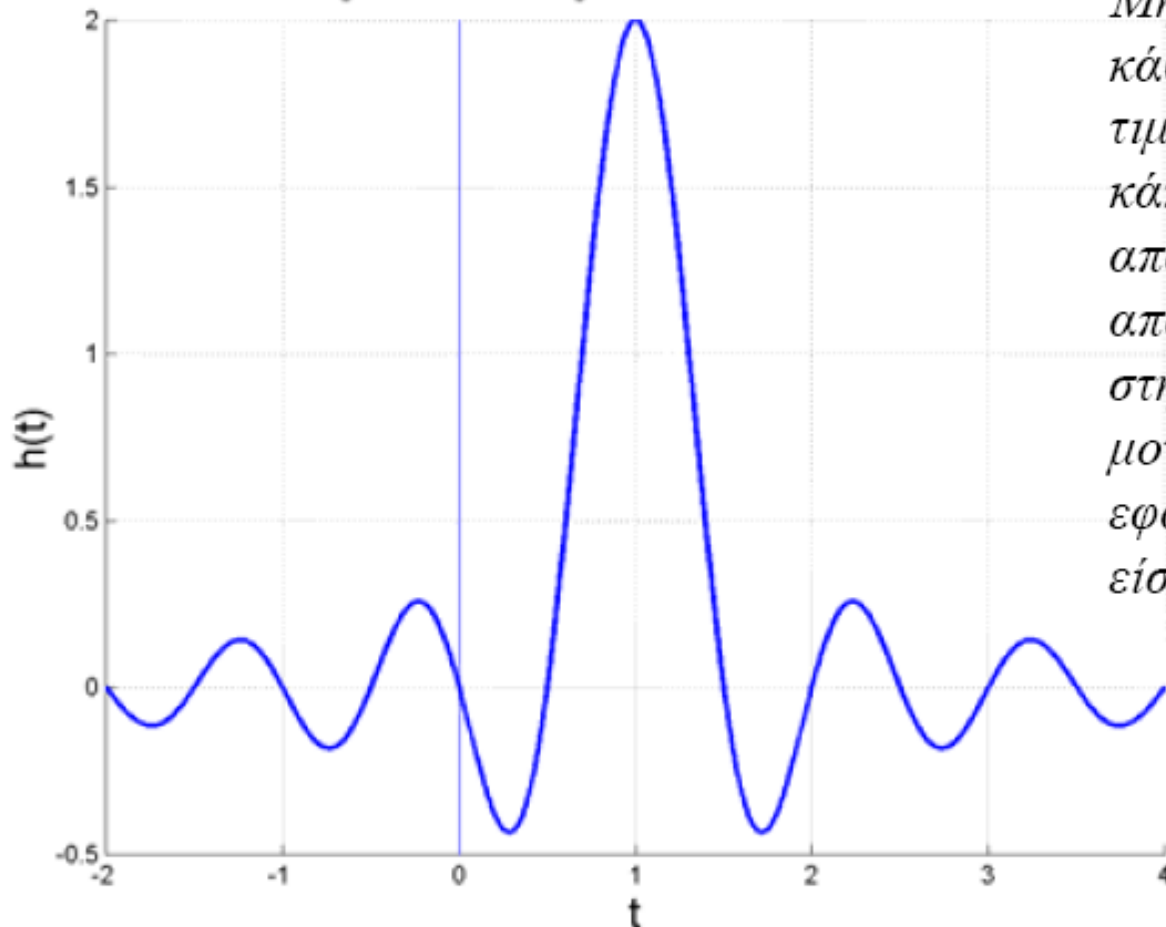
- Το ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο είναι μη αιτιατό γιατί παραβιάζει το κριτήριο Paley-Wiener. Αυτό φαίνεται και από την κρουστική απόκριση  $h(t)$ :

$$h(t) = \int_{-B}^B \exp(j2\pi f(t-t_0)) df = \frac{\sin(2\pi B(t-t_0))}{\pi(t-t_0)} = 2B \operatorname{sinc}(2B(t-t_0))$$

# Ιδανικά Βαθυπερατά Φίλτρα

120

$B=1, t_0=1$  (peak= $(t_0, 2B)$ ,  $1/B$  between nulls)

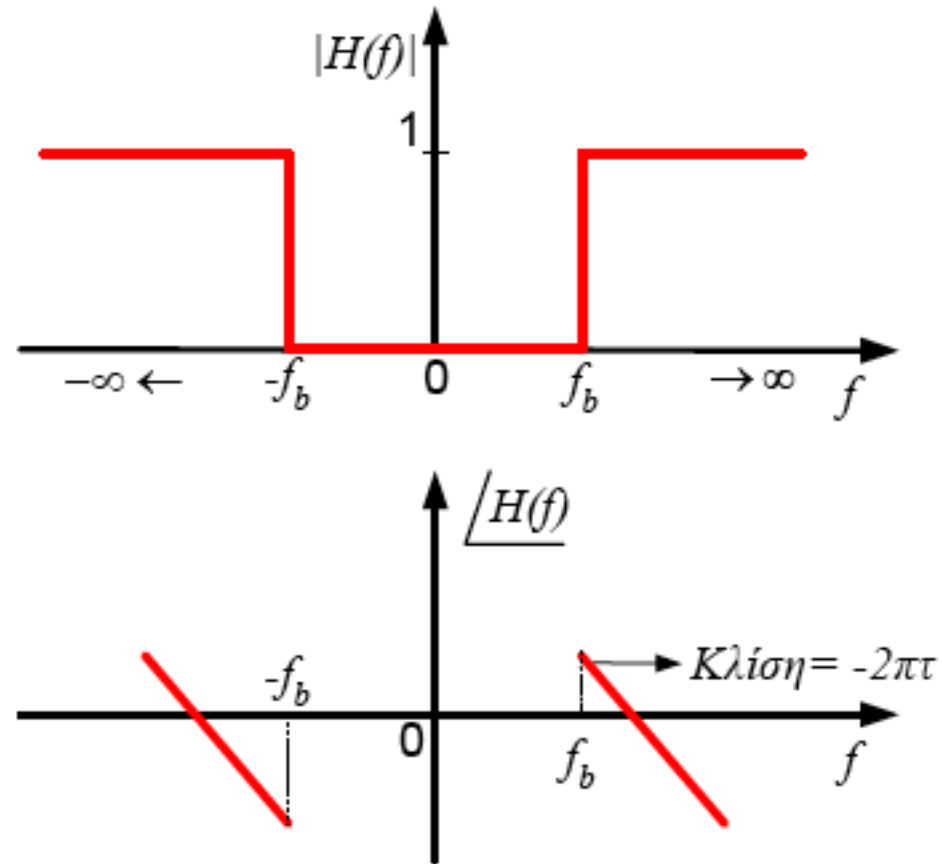


*Μη αιτιατό: Για κάθε πεπερασμένη τιμή  $t_0$ , υπάρχει κάποια απόκριση από το φίλτρο πριν από την τιμή  $t=0$ , στην οποία η μοναδιαία κρουστική εφαρμόζεται στην είσοδο.*



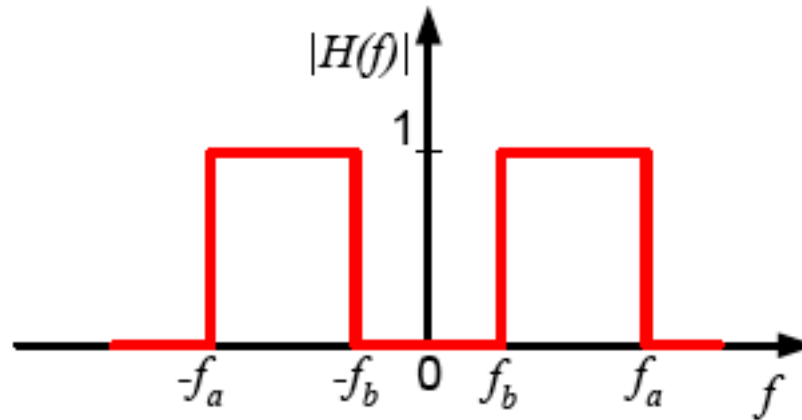
# Ιδανικά Υψιπερατά Φίλτρα (HPF)

121

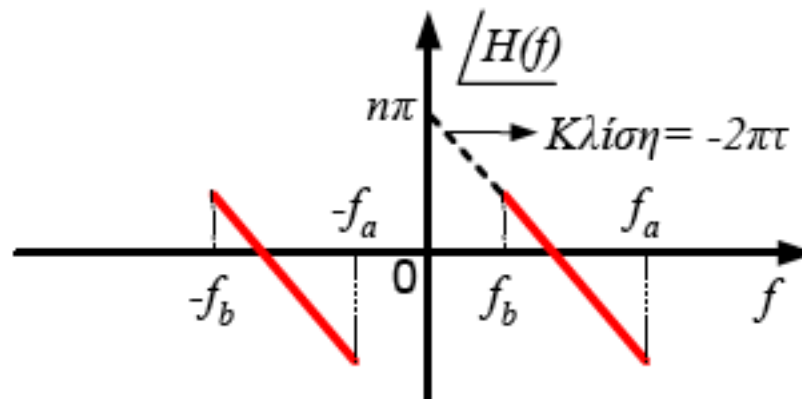


# Ιδανικά Ζωνοπερατά Φίλτρα (BPF)

122

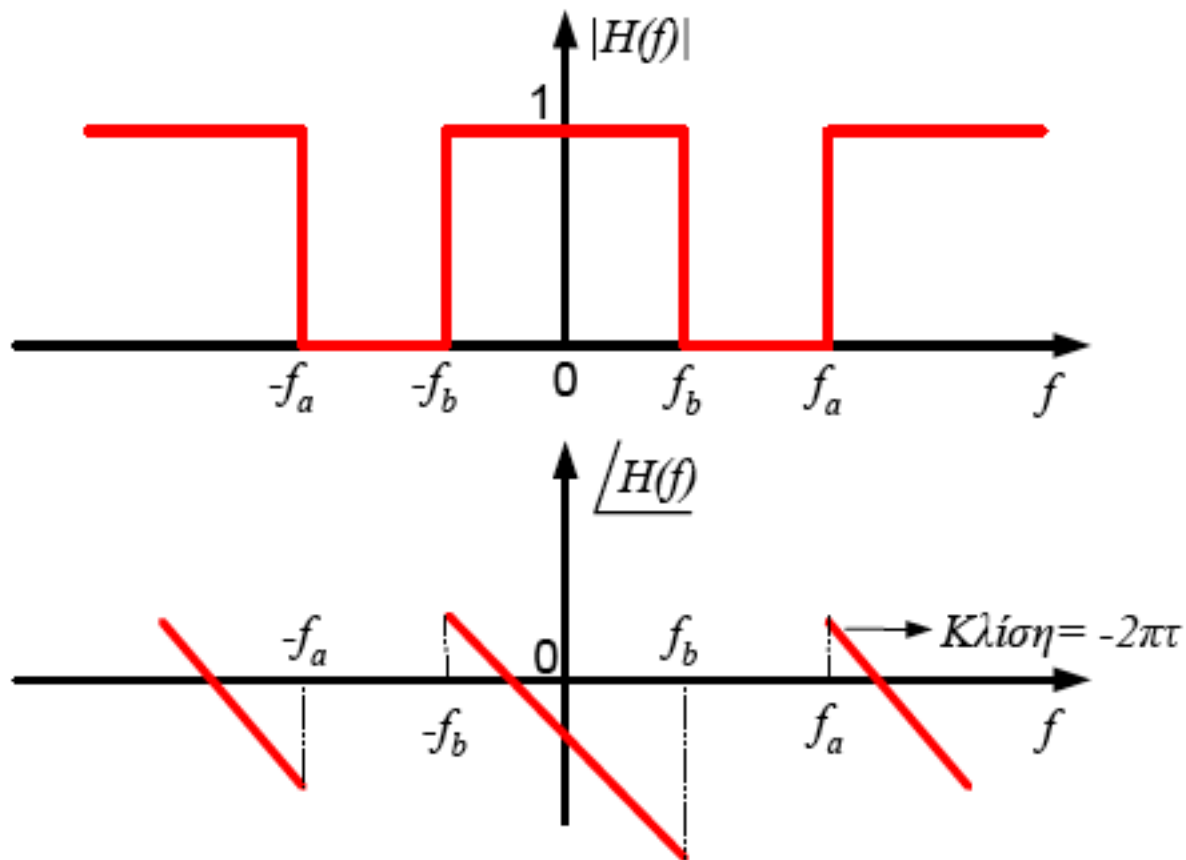


Εύρος Ζώνης  
 $W=f_a-f_b$



# Ιδανικά Ζωνοφρακτικά Φίλτρα (BSF)

123



# Μη-Ιδανικά Φίλτρα και Εύρος Ζώνης

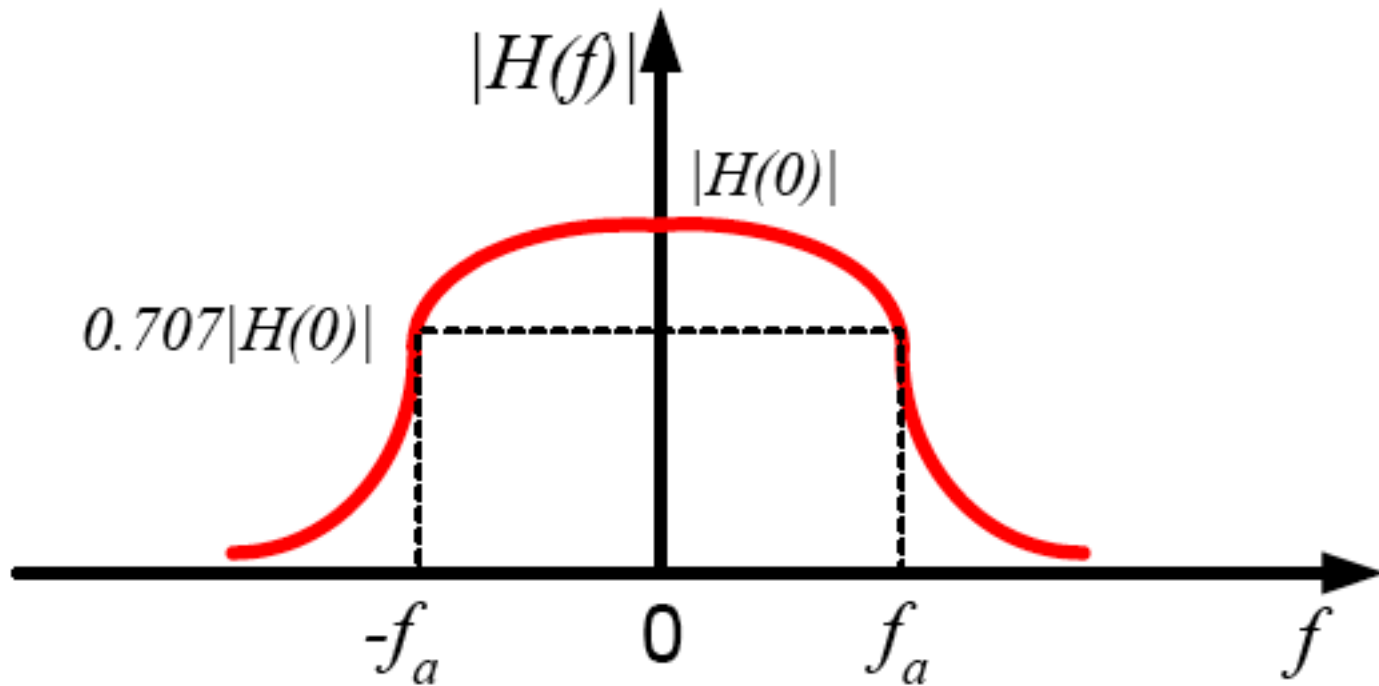
- Στην πράξη τα φίλτρα που προαναφέρθηκαν δεν είναι πραγματοποιήσιμα. Τα πραγματικά φίλτρα έχουν συνάρτηση μεταφοράς διαφορετική από τις προηγούμενες.
- Το εύρος ζώνης ενός φίλτρου ορίζεται ως το διάστημα των θετικών συχνοτήτων εντός του οποίου το μέτρο της συνάρτησης μεταφοράς παίρνει τιμές μεγαλύτερες από ένα προκαθορισμένο ποσοστό της μέγιστης τιμής του.
- Αν το όριο που θέτουμε για το πλάτος της συνάρτησης μεταφοράς είναι ένας παράγοντας 0.707 ή το κέρδος ισχύος που ορίζεται ως

$$20 \log_{10} (|H(f)|)$$

έχει μειωθεί κατά 3dB, τότε το εύρος ζώνης ονομάζεται 3dB.

# Μη-Ιδανικό Βαθυπερατό Φίλτρο

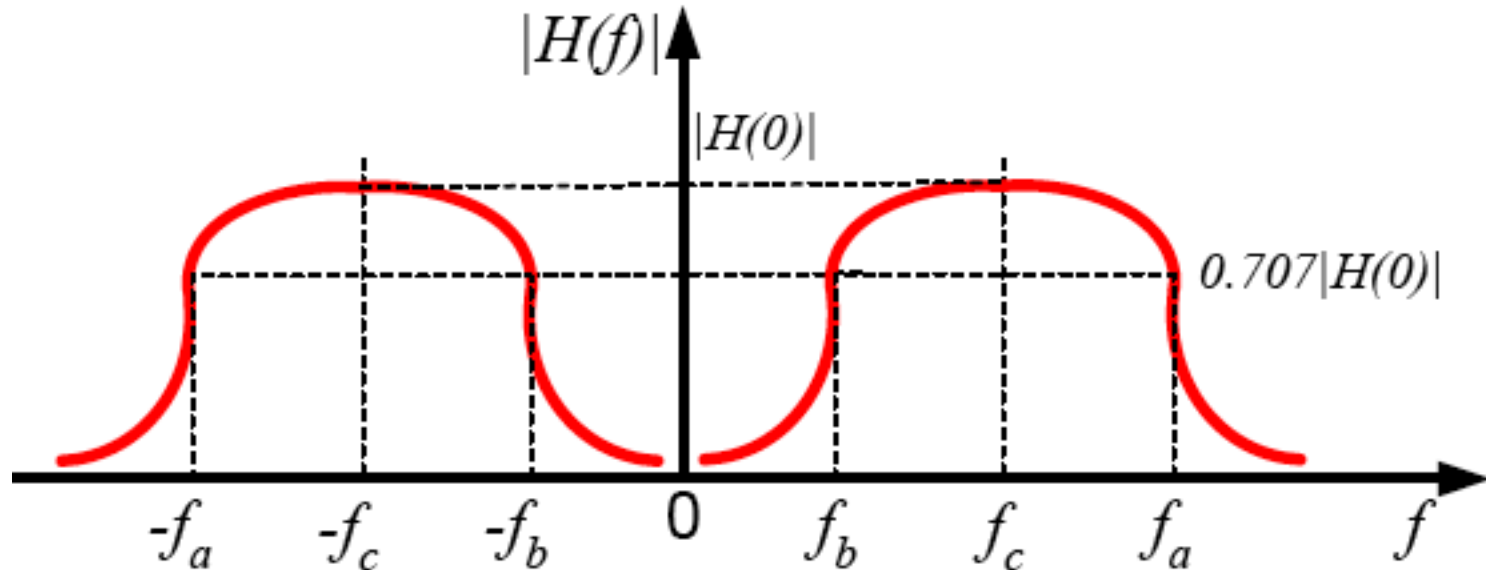
125



Εύρος Ζώνης 3dB :  $W=f_a$

# Μη-Ιδανικό Ζωνοπερατό Φίλτρο

126

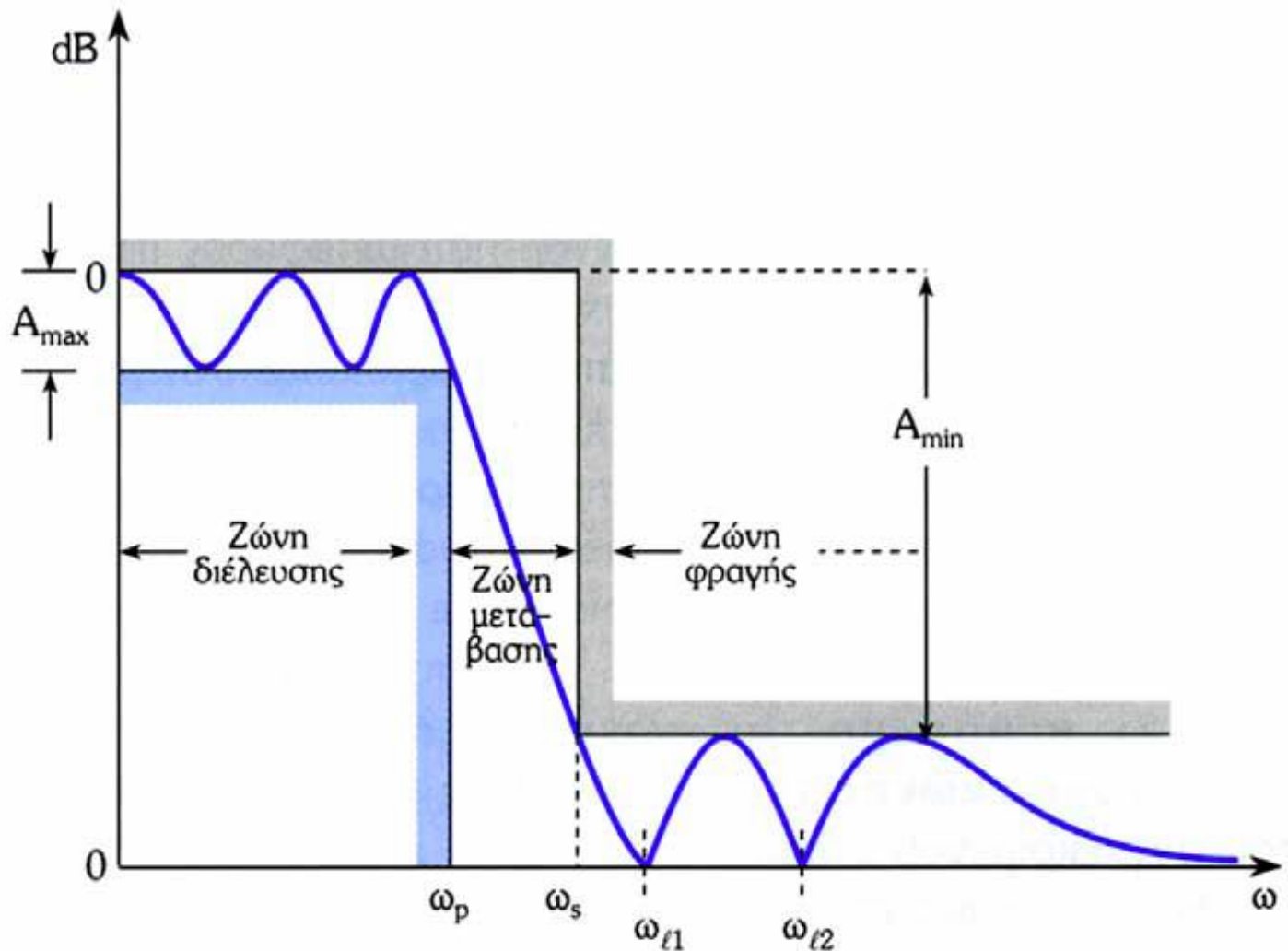


Εύρος Ζώνης 3dB :  $W=f_a-f_b$

- Εδώ έχουμε θεωρήσει ότι το πλάτος της συνάρτησης μεταφοράς είναι συμμετρικό ως προς μια κεντρική συχνότητα  $f_c$ .

# Μη-Ιδανικό Ζωνοπερατό Φίλτρο

127



# Δειγματοληψία

128

- Η διαδικασία κατά την οποία ένα σήμα συνεχούς χρόνου μετατρέπεται σε σήμα διακριτού χρόνου.
- Ερωτήματα που τίθενται
  - ▣ ρυθμός δειγματοληψίας (φάσμα)
  - ▣ τρόπος ανακατασκευής του αρχικού σήματος από τα δείγματα (συνάρτηση παρεμβολής)
- Και στα δύο ερωτήματα απαντά το *θεώρημα της δειγματοληψίας* που διατυπώθηκε από τον Claude Shannon το 1949, ο οποίος στηρίχθηκε στην εργασία του H. Nyquist, που έδωσε το ρυθμό δειγματοληψίας.

$$f_s \geq 2W$$



# Θεώρημα Ομοιόμορφης Δειγματοληψίας

129

- Θεωρούμε σήμα  $x(t)$  με περιορισμένο εύρος ζώνης  $W$ , δηλαδή  $X(f)=0$  για  $|f| \geq W$
- Δειγματοληπτούμε το σήμα με  $|f_s| \geq 2W$
- Δηλαδή παίρνουμε δείγματα σε πολλαπλάσια της βασικής περιόδου δειγματοληψίας  $T_s$  και προκύπτει η ακολουθία δειγμάτων  $\{x(nT_s)\}_{n=-\infty}^{\infty}$
- Τώρα είναι δυνατή η ανακατασκευή του αρχικού σήματος από τα δείγματα

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \operatorname{sinc} \left[ 2W \left( t - \frac{n}{2W} \right) \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \operatorname{sinc} \left( \frac{t}{T_s} - n \right)$$

$$y(t) = \cos[2\pi f_1 t + \beta(f_1)] + \cos[2\pi f_2 t + \beta(f_2)]$$

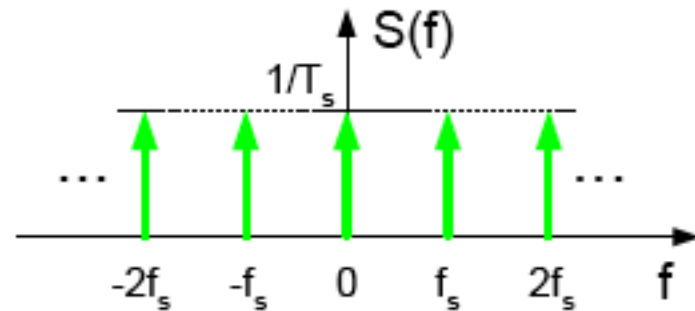
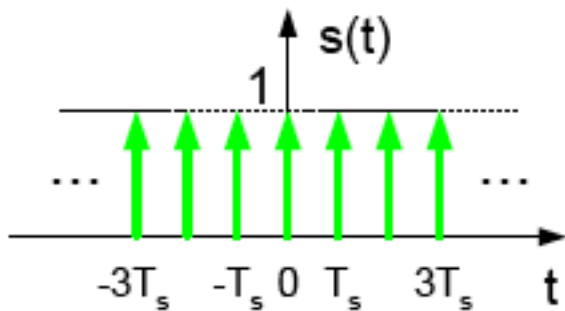
# Ιδανική Δειγματοληψία

130

- Θεωρούμε τη συνάρτηση δειγματοληψίας που αποτελείται από περιοδική επανάληψη της μοναδιαίας κρουστικής συνάρτησης

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$

$$S(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nf_s)$$



# Ιδανική Δειγματοληψία

131

- Αν πολλαπλασιάσουμε στο χρόνο το σήμα  $x(t)$  με τη συνάρτηση δειγματοληψίας, θα προκύψει

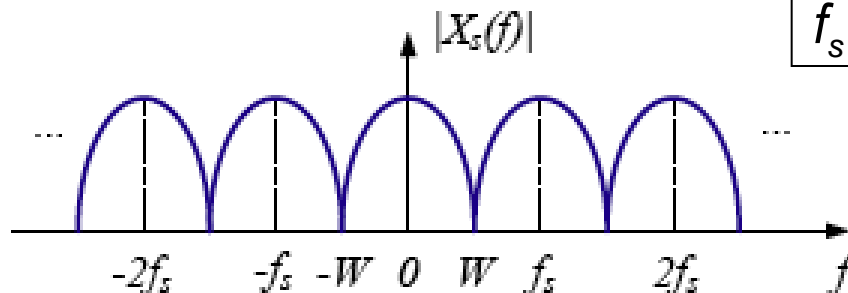
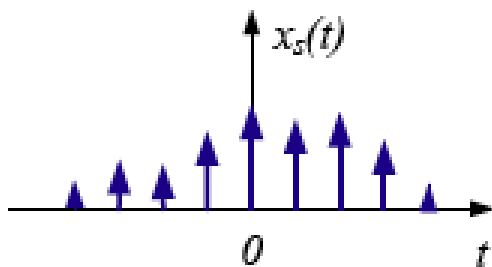
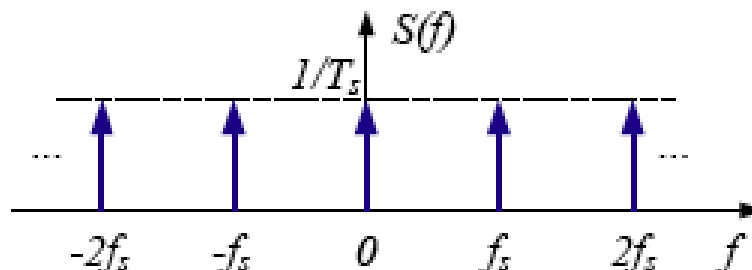
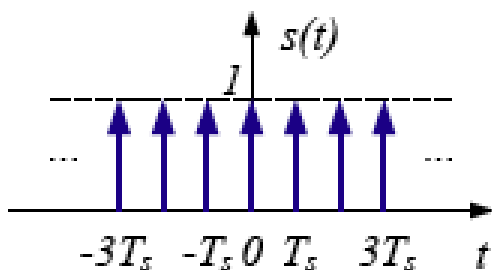
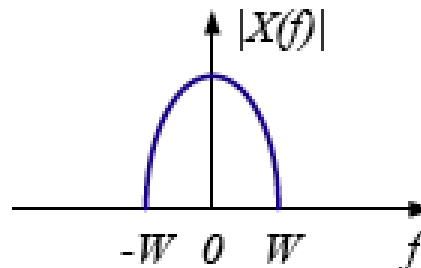
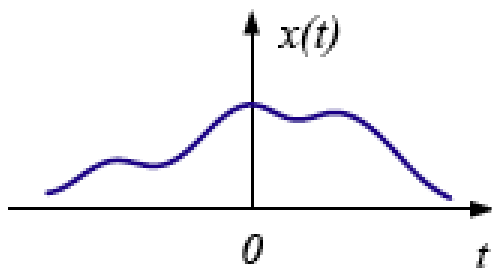
$$x(t)s(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \delta(t - nT_s)$$

- Σύμφωνα με την ιδιότητα Fourier που σχετίζει τον πολλαπλασιασμό στο πεδίο του χρόνου με τη συνέλιξη στο πεδίο της συχνότητας, θα ισχύει

$$X(f) * \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nf_s) = \left( \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - nf_s) \right)$$

# Ιδανική Δειγματοληψία

132



$$f_s = 2W$$

# Ιδανική Δειγματοληψία

133

- Παρατηρούμε ότι:
  - Στο εύρος  $-W$  ως  $W$ , το προκύπτον σήμα έχει το ίδιο φάσμα με το αρχικό σήμα, εκτός από μια μείωση στο πλάτος κατά  $1/T_s$ .
  - Το φάσμα επαναλαμβάνεται περιοδικά με συχνότητα  $f_s$ .
  - Για να προκύψει το αρχικό σήμα αρκεί η διέλευση του νέου σήματος από ένα βαθυπερατό φίλτρο με εύρος ζώνης  $W$ .
  - Στην πράξη είναι αδύνατη η επίτευξη απότομης κλίσης της συνάρτησης μεταφοράς του φίλτρου.

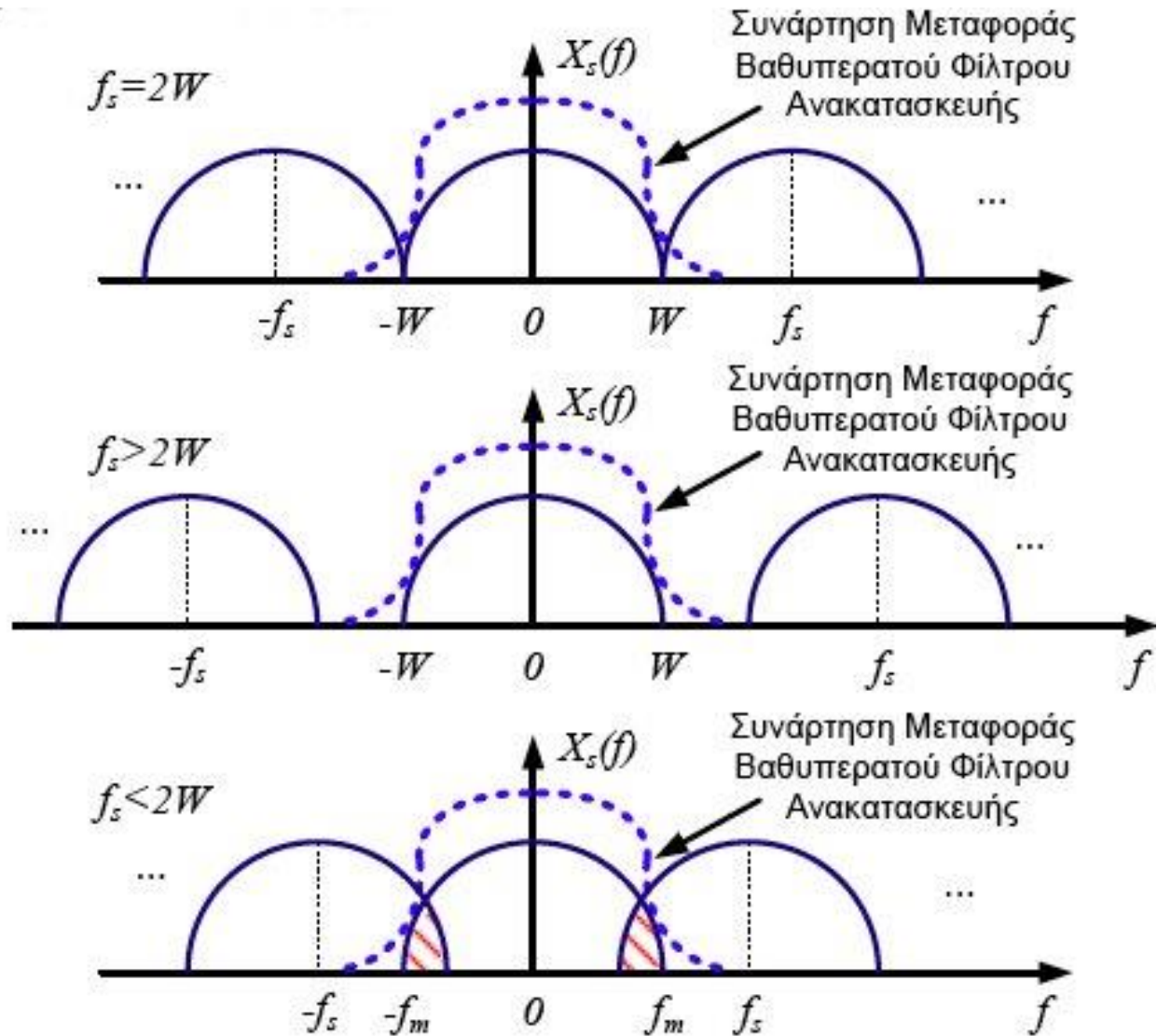
# Ιδανική Δειγματοληψία

134

- Άρα απαιτείται μια μεγαλύτερη απόσταση των επαναλήψεων του βασικού φάσματος.
- Αυτό επιτυγχάνεται επιλέγοντας  $f_s > 2W$  (**Oversampling**)
- Πρακτικός κανόνας:  $f_s \geq 2.2W$
- Αν ο ρυθμός δειγματοληψίας είναι μικρότερος από το όριο του Nyquist, τότε οι επαναλήψεις του φάσματος θα επικαλύπτονται με αποτέλεσμα την παρεμβολή και την απώλεια πληροφορίας.

# Δειγματοληψία

135



# Πραγματική – Φυσική Δειγματοληψία

- Στην πράξη η δειγματοληψία επιτυγχάνεται με τη χρήση περιοδικής παλμοσειράς με εύρος  $T$ , πλάτος  $1/T$  και βασική συχνότητα  $1/T_s$ .
- Μεταβάλλεται το πλάτος των δειγμάτων σύμφωνα με τη διάρκεια των παλμών.

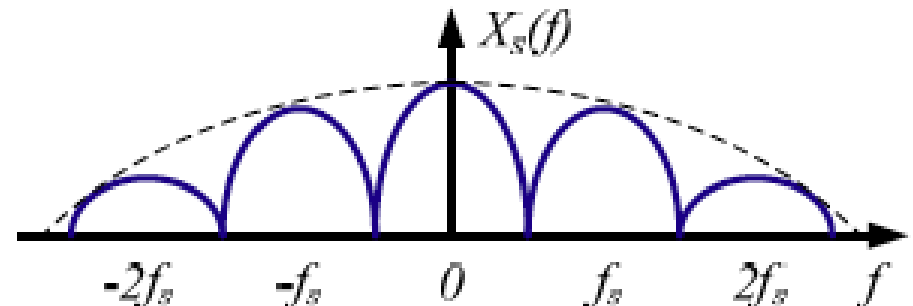
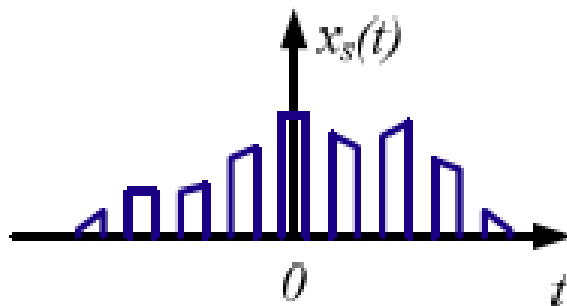
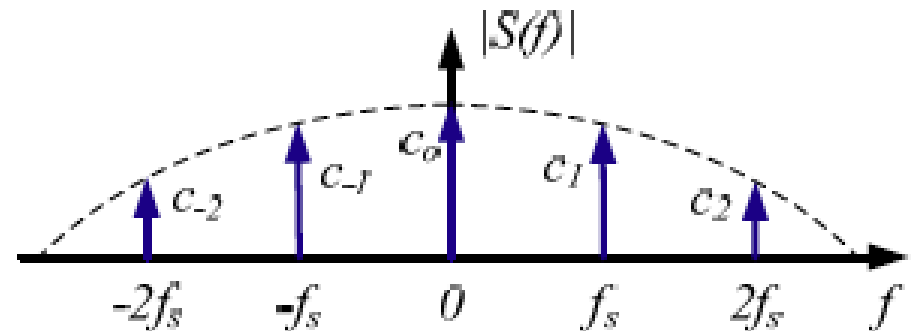
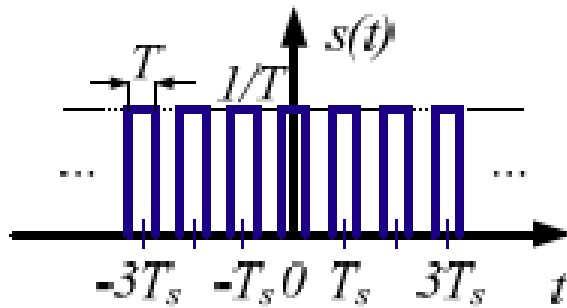
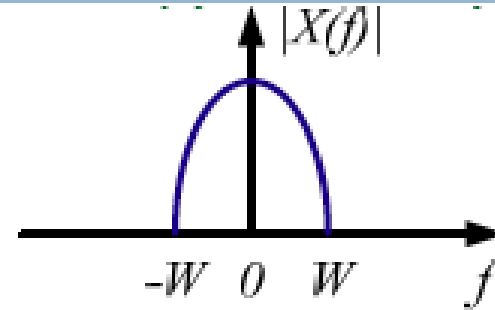
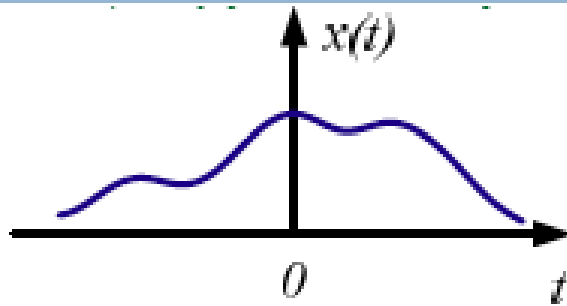
$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi n f_s t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_s} \operatorname{sinc}\left(\frac{nT}{T_s}\right) e^{j2\pi n f_s t}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}\left[x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi n f_s t}\right] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathfrak{F}\left[x(t) e^{j2\pi n f_s t}\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n X(f - n f_s) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_s} \operatorname{sinc}\left(\frac{nT}{T_s}\right) X(f - n f_s) \end{aligned}$$



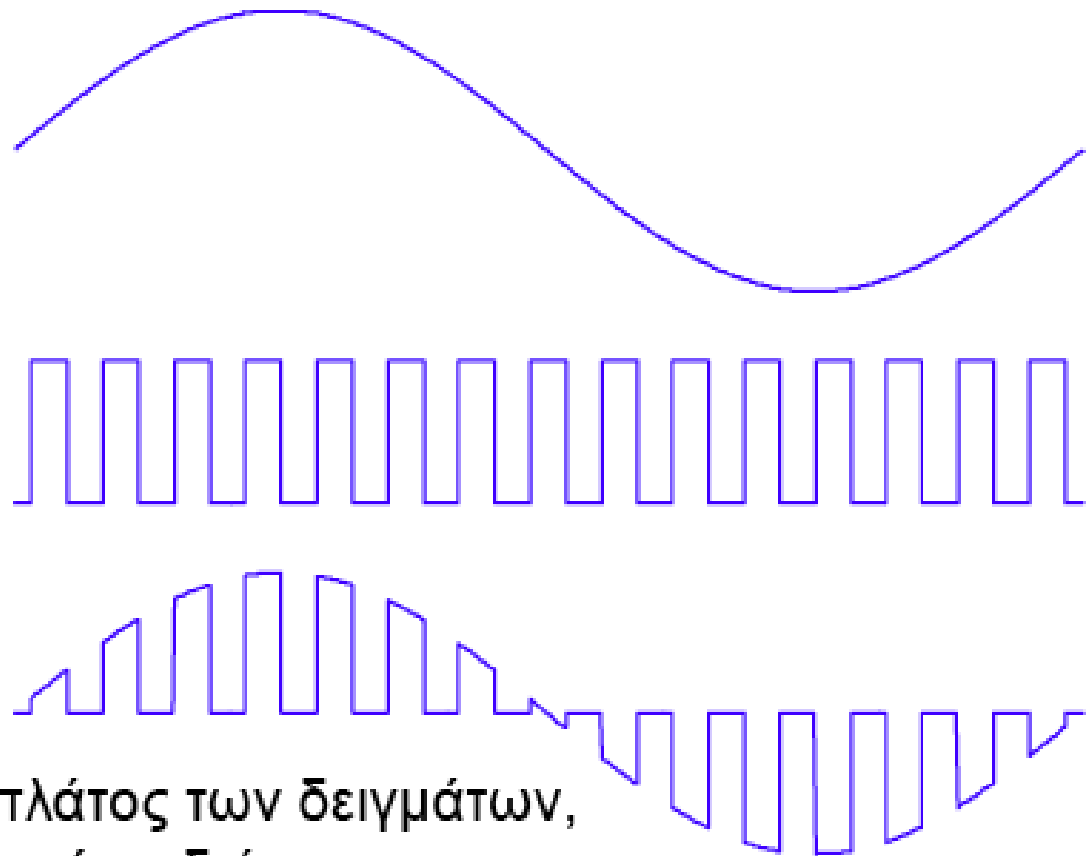
# Πραγματική – Φυσική Δειγματοληψία

137



# Πραγματική – Φυσική Δειγματοληψία

138

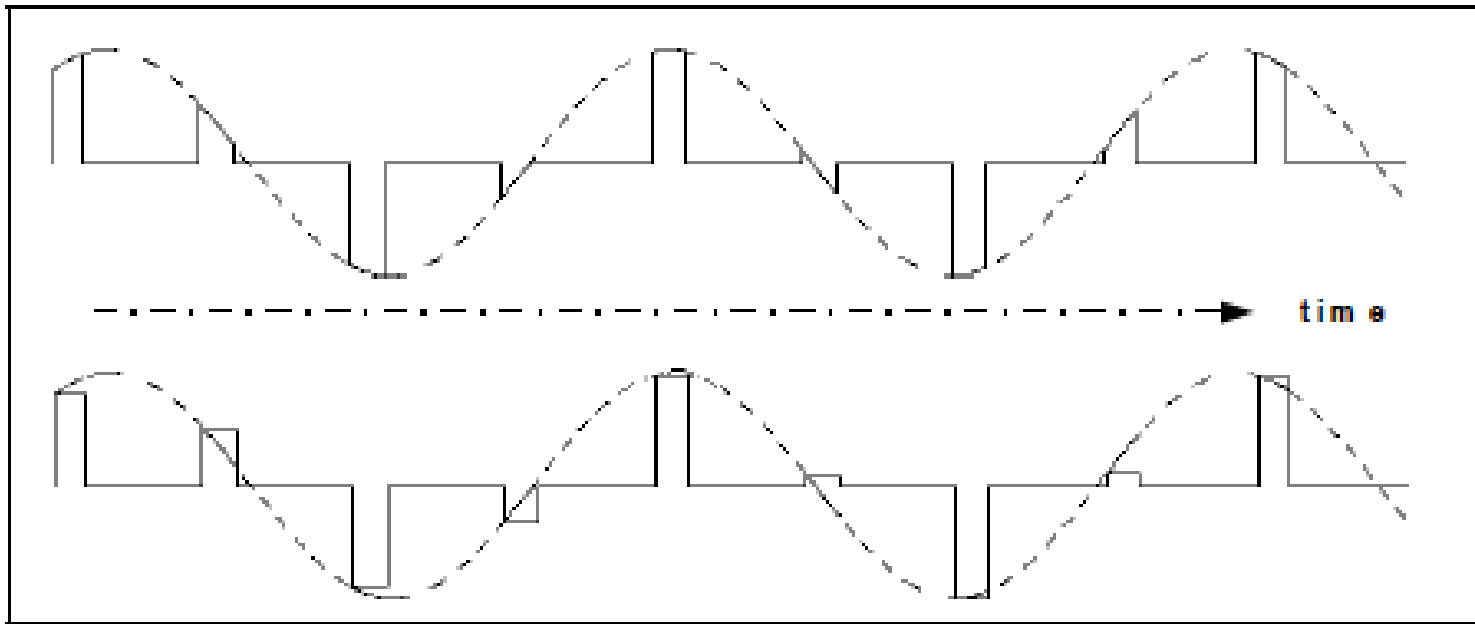


Προσοχή στο πλάτος των δειγμάτων,  
μεταβάλλεται κατά τη διάρκεια των  
παλμών.

# Φυσική Δειγματοληψία vs. Sample and Hold

139

Φυσική  
Δειγματοληψία



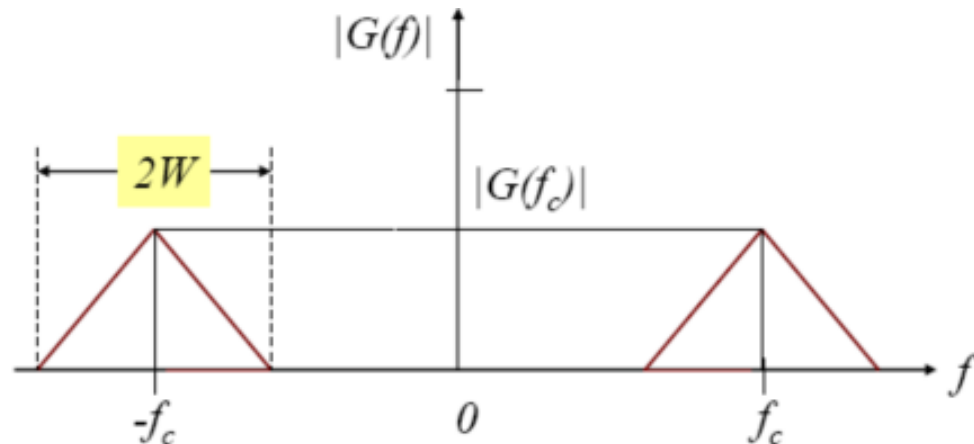
Δειγματοληψία  
Sample and Hold

- Η δειγματοληψία γίνεται τις χρονικές στιγμές  $nT_s$  και κρατάμε την τιμή του πλάτους μέχρι τη χρονική στιγμή του επόμενου δείγματος

# Ζωνοπερατά Σήματα

140

- Ονομάζουμε ένα σήμα  $g(t)$  ζωνοπερατό εάν ο ΜΣ Fourier  $G(f)$  αυτού δεν είναι αμελητέος μόνο για μια ζώνη συχνοτήτων συνολικού μεγέθους  $2W$  και με κέντρο κάποια συχνότητα  $\pm f_c$ .
  - ▣  $f_c$  = συχνότητα φέροντος (carrier frequency)
- Στα περισσότερα τηλεπικοινωνιακά σήματα, το εύρος ζώνης  $2W$  είναι μικρό συγκρινόμενο με την  $f_c$ 
  - ▣ σήματα στενής ζώνης (narrow-band signals)



# Ζωνοπερατά Σήματα

141

- Συνήθως επεξεργαζόμαστε τα σήματα στη βασική ζώνη
- Είναι απαραίτητη η αναπαράσταση των ζωνοπερατών σημάτων και συστημάτων με **ισοδύναμα (μιγαδικά) βαθυπερατά σήματα και συστήματα**.
- Αυτός είναι ο βασικός λόγος ύπαρξης:
  - ▣ του μετ/σμού Hilbert
  - ▣ της προ-περιβάλλουσας
  - ▣ της μιγαδικής περιβάλλουσας

# M/Σ Hilbert

142

- Όταν οι γωνίες φάσης όλων των συνιστωσών ενός δοσμένου σήματος μετατοπίζονται κατά  $\pm 90^\circ$ , η προκύπτουσα συνάρτηση χρόνου είναι γνωστή σαν **μετασχηματισμός Hilbert** (Hilbert transform) του σήματος.
- Έστω σήμα  $g(t)$  με M/Σ Fourier  $G(f)$ . Ο M/Σ Hilbert  $\hat{g}(t)$ , ορίζεται από:

$$\hat{g}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\tau)}{t - \tau} d\tau$$

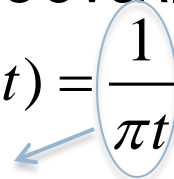
# M/Σ Hilbert

143

- Ο αντίστροφος M/Σ Hilbert (inverse Hilbert transform)

$$\hat{g}(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\tau)}{t - \tau} d\tau$$

- Οι  $g(t)$  και  $\hat{g}(t)$  αποτελούν ζευγάρι M/Σ Hilbert (Hilbert transform pair).
- Ο M/Σ Hilbert είναι μια γραμμική πράξη.
- Η συνάρτηση  $\hat{g}(t)$  μπορεί να θεωρηθεί ως η συνέλιξη του  $g(t)$  με τη συνάρτηση του χρόνου  $1/(\pi t)$ .

$$\hat{g}(t) = \frac{1}{\pi t} * g(t)$$


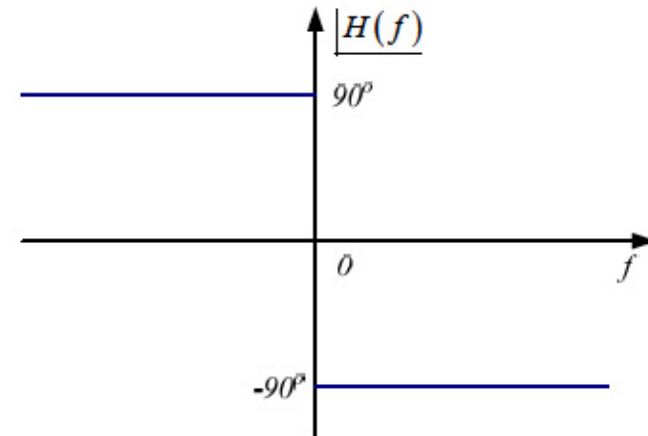
# M/Σ Hilbert

144

- Ο ΜΣ Fourier της  $h(t)=1/(\pi t)$  είναι:

$$H(f) = \mathfrak{F}\left[\frac{1}{\pi t}\right] = -j \operatorname{sgn}(f) = \begin{cases} -j = e^{-j\frac{\pi}{2}}, & f > 0 \\ 0 & , f = 0 \\ j = e^{j\frac{\pi}{2}} & , f < 0 \end{cases}$$

$$\operatorname{sgn}(f) = \begin{cases} 1, & f > 0 \\ 0, & f = 0 \\ -1, & f < 0 \end{cases}$$



- Άρα το φάσμα θα είναι:

$$\hat{G}(f) = -j \operatorname{sgn}(f) G(f)$$

$$g(t) = \frac{1}{\pi t} * g(t)$$



# M/Σ Hilbert

145

- Μπορούμε να πάρουμε τη  $\hat{g}(t)$  περνώντας τη  $g(t)$  μέσω ενός γραμμικού διθύρου με συνάρτηση μεταφοράς  $-j\text{sgn}(f)$ .
- Αυτή η διάταξη προκαλεί μια μετατόπιση φάσης  $-90^\circ$  σε όλες τις θετικές συχνότητες του σήματος και  $+90^\circ$  σε όλες τις αρνητικές.
- Άρα η έκφραση «μετασχηματισμός» είναι κατά κάποιον τρόπο παραπλανητική, αφού ένας μετ/σμός κανονικά μεταφέρει το σήμα σε κάποιο άλλο πεδίο, ενώ αυτό δε συμβαίνει με το **Hilbert**. Το σήμα παραμένει στο πεδίο του χρόνου
- Ο μετ/σμός Hilbert δε μεταβάλλει το πλάτος των συχνοτικών συνιστωσών του σήματος
  - Η ενέργεια και η ισχύς του σήματος παραμένουν αμετάβλητες

# M/Σ Hilbert: Ιδιότητες

146

- Ιδιότητα 1: Ένα σήμα  $g(t)$  και ο M/Σ Hilbert αυτού  $\hat{g}(t)$  έχουν την ίδια πυκνότητα φάσματος.
  - ▣ Άρα έχουν και το ίδιο εύρος ζώνης και την ίδια ενέργεια ή ισχύ
- Ιδιότητα 2: Ένα σήμα  $g(t)$  και ο M/Σ Hilbert αυτού  $\hat{g}(t)$  έχουν την ίδια συνάρτηση αυτοσυσχέτισης.
  - ▣ Προκύπτει και από την ιδιότητα 1, αφού η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης και η πυκνότητα φάσματος αποτελούν ζευγάρι ΜΣ Fourier

# M/Σ Hilbert: Ιδιότητες

147

- Ιδιότητα 3: Ένα σήμα  $g(t)$  και ο M/Σ Hilbert αυτού  $\hat{g}(t)$  είναι ορθογώνια.

- Ενεργειακό σήμα:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g^*(t) \hat{g}(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} G^*(f) \hat{G}(f) df = -j \int_{-\infty}^{\infty} \text{sgn}(f) |G(f)|^2 df = 0$$

- Ομοίως σε σήμα ισχύος αποδεικνύεται ότι:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T g^*(t) \hat{g}(t) dt = 0$$

- Ιδιότητα 4: Εάν  $\hat{g}(t)$  είναι ο M/Σ Hilbert του  $g(t)$ , τότε ο M/Σ Hilbert του  $\hat{g}(t)$  είναι  $-g(t)$ .

- Ισχύει:  $[-j \text{sgn}(f)]^2 = -1$ , για όλα τα  $f$

# M/Σ Hilbert: Παράδειγμα

148

- Υπολογίστε το μετασχηματισμό Hilbert του  $x(t) = \cos(2\pi f_c t)$

$$X(f) = \frac{1}{2} [\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)]$$

$$\begin{aligned} \hat{X}(f) &= -j \operatorname{sgn}(f) X(f) = \frac{-j}{2} [\delta(f - f_c) - \delta(f + f_c)] = \\ &= \frac{1}{2j} [\delta(f - f_c) - \delta(f + f_c)] \end{aligned}$$

$$\hat{x}(t) = \sin(2\pi f_c t)$$

# Προ-περιβάλλουσα

149

- Θεωρείστε ένα σήμα πραγματικής τιμής  $g(t)$ . Ορίζουμε σαν **προ-περιβάλλουσα** (pre-envelope) του σήματος  $g(t)$  τη μιγαδική συνάρτηση:

$$g_+(t) = g(t) + j \hat{g}(t)$$

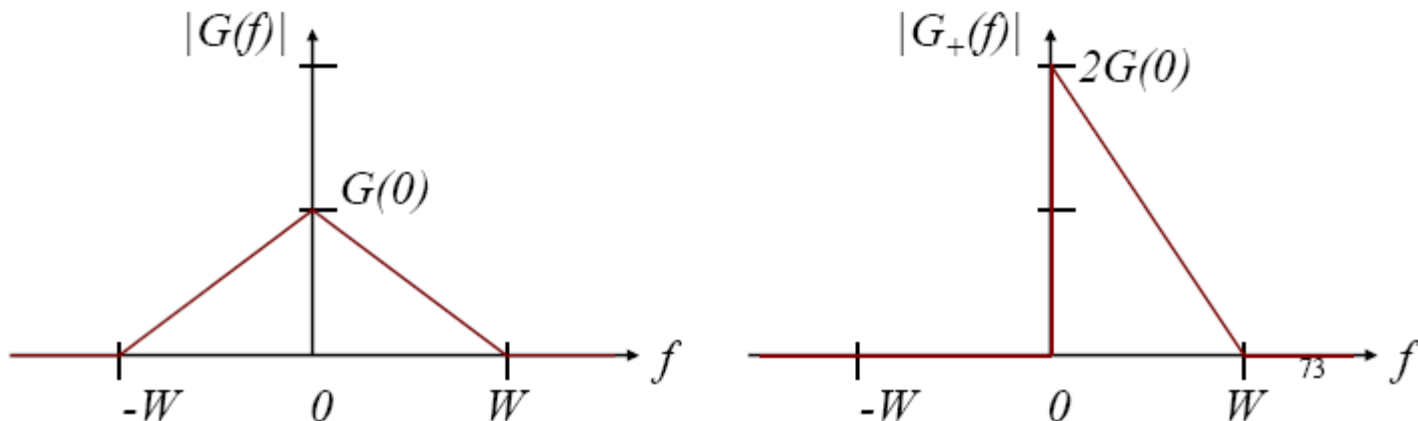
όπου  $\hat{g}(t)$  είναι ο ΜΣ Hilbert του  $g(t)$ .

- Ακριβώς όπως η χρήση των φασιθετών απλοποιεί τη μελέτη των εναλλασσομένων ρευμάτων και τάσεων, βρίσκουμε ότι η προ-περιβάλλουσα είναι χρήσιμη στη μελέτη ζωνοπερατών σημάτων και συστημάτων.

# Προ-περιβάλλουσα

150

- ΜΣ Fourier:  
$$G_+(f) = G(f) + j[-j \operatorname{sgn}(f)]G(f) = \begin{cases} 2G(f), & f > 0 \\ G(0), & f = 0 \\ 0, & f < 0 \end{cases}$$
$$= 2u(f)G(f)$$
- Η προ-περιβάλλουσα ορίζεται για οποιοδήποτε σήμα έχει φάσμα.



# Ζωνοπερατά Σήματα

151

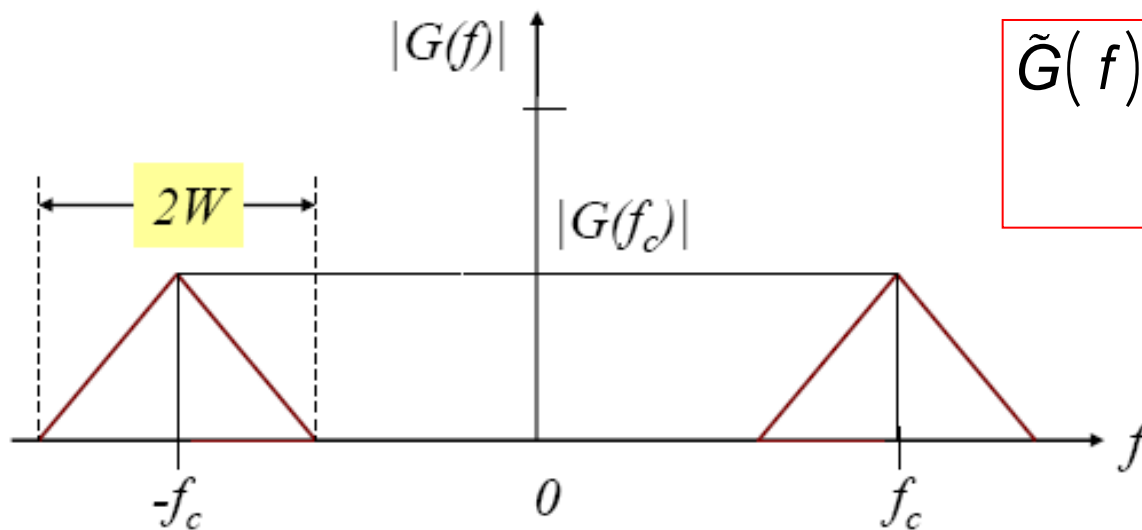
- Η προπεριβάλλουσα ενός σήματος στενής ζώνης  $g(t)$ , με ΜΣ Fourier  $G(f)$ , κεντραρισμένο σε κάποια συχνότητα  $\pm f_c$ :

$$g_+(t) = \tilde{g}(t) \exp(j2\pi f_c t)$$

- $\tilde{g}(t)$  μιγαδική περιβάλλουσα (complex envelope) του  $g(t)$  και είναι το αντίστοιχο σήμα βασικής ζώνης .

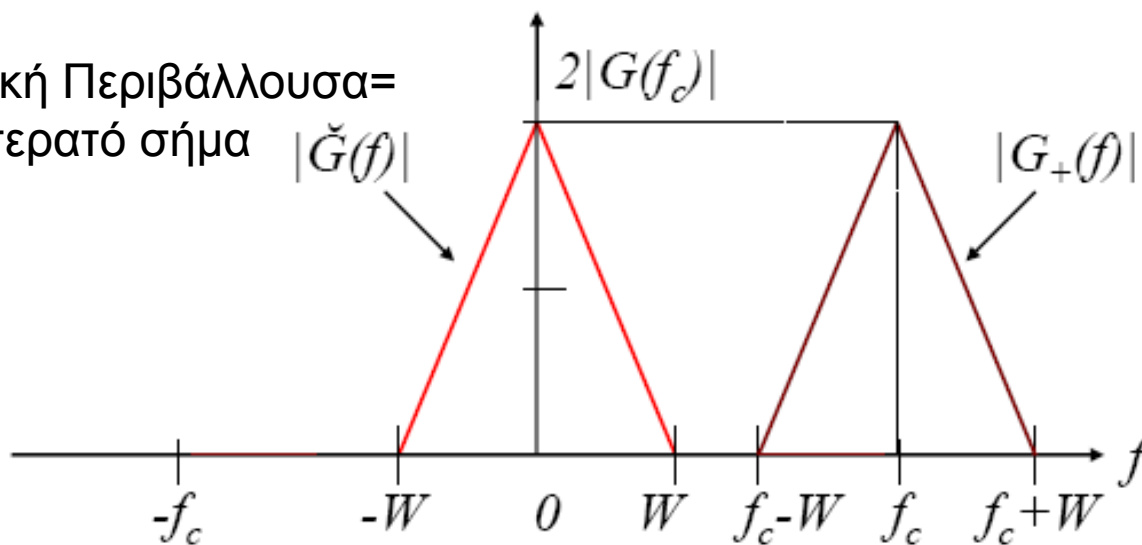
$$g(t) = \operatorname{Re} \left\{ \tilde{g}(t) \exp(j2\pi f_c t) \right\}$$

# Ζωνοπερατά Σήματα



$$\begin{aligned} \tilde{G}(f) &= G_+(f + f_c) = \\ &= 2u(f + f_c)G(f + f_c) \end{aligned}$$

Μιγαδική Περιβάλλουσα =  
Βαθυπερατό σήμα





# Ζωνοπερατά Σήματα

153

- Η  $\tilde{g}(t)$  είναι μια μιγαδική ποσότητα.

$$\tilde{g}(t) = g_I(t) + jg_Q(t)$$

- $g_I(t)$  **συμφασική** συνιστώσα (in-phase component) και  $g_Q(t)$  **ορθογωνική** συνιστώσα (quadrature component) του σήματος  $g(t)$  σε σχέση με το φέρον  $\cos(2\pi f_c t)$
- $g_I(t)$  και  $g_Q(t)$  = πραγματικές βαθυπερατές συναρτήσεις.
- Μπορούμε να εκφράσουμε το ζωνοπερατό σήμα  $g(t)$  στην κανονική μορφή (canonical form):

$$g(t) = g_I(t)\cos(2\pi f_c t) - g_Q(t)\sin(2\pi f_c t)$$

$$g(t) = \operatorname{Re}\left[\tilde{g}(t)e^{j2\pi f_c t}\right]$$

# Ζωνοπερατά Σήματα

$$\tilde{g}(t) = g_I(t) + jg_Q(t)$$

$$g(t) = g_I(t)\cos(2\pi f_c t) - g_Q(t)\sin(2\pi f_c t)$$

- Η μιγαδική περιβάλλουσα  $\tilde{g}(t)$  μπορεί λοιπόν να απεικονιστεί σαν ένας χρονικά μεταβαλλόμενος φασιθέτης στην αρχή των αξόνων του επιπέδου  $g_I, g_Q$ .
- Η άκρη του φασιθέτη μετακινείται πάνω στο επίπεδο και ταυτόχρονα το επίπεδο περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα  $2\pi f_c$  rad/sec. Το δοσμένο σήμα  $g(t)$  είναι η προβολή του χρονικά μεταβαλλόμενου φασιθέτη σε μια σταθερή γραμμή.

# Ζωνοπερατά Σήματα

155

- Εναλλακτικά γράφουμε τη  $\tilde{g}(t)$  ως:

$$\tilde{g}(t) = a(t) \exp[j\phi(t)]$$

$$g(t) = a(t) \cos[2\pi f_c t + \phi(t)]$$

- $a(t)$  = φυσική περιβάλλουσα (natural envelope) ή η περιβάλλουσα (envelope) του ζωνοπερατού σήματος  $g(t)$  (πραγματικό βαθυπερατό σήμα)
- $\phi(t)$  = φάση (phase) του σήματος.

# Ζωνοπερατά Σήματα

156

- Συνοπτικά οι τρεις διαφορετικές περιβάλλουσες ενός πραγματικού σήματος  $g(t)$ :
- 1. Η προ-περιβάλλουσα  $g_+(t)$  του  $g(t)$  :

$$g_+(t) = g(t) + j \hat{g}(t)$$

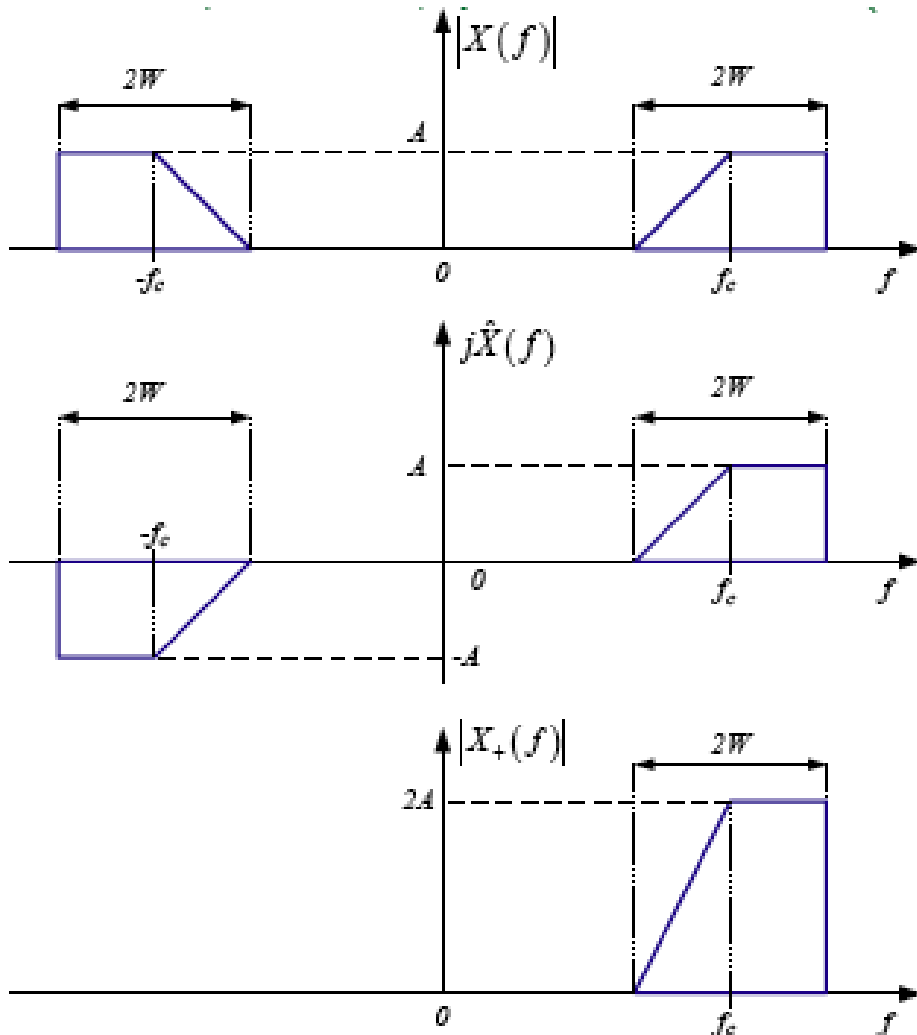
όπου  $\hat{g}(t)$  είναι ο ΜΣ Hilbert του  $g(t)$ . Σύμφωνα με αυτή την αναπαράσταση το  $\hat{g}(t)$  μπορεί να θεωρηθεί σαν η ορθογωνική συνάρτηση του  $g(t)$ . Αντίστοιχα στο πεδίο της συχνότητας:

$$G_+(f) = \begin{cases} 2G(f), & f > 0 \\ G(0), & f = 0 \\ 0, & f < 0 \end{cases}$$

# Ζωνοπερατά Σήματα

157

## □ 1. Η προ-περιβάλλουσα



Το φάσμα της προ-περιβάλλουσας περιλαμβάνει μόνο το τμήμα των **θετικών συχνοτήτων** του φάσματος του ζωνοπερατού σήματος και με **διπλάσιο πλάτος**.

# Ζωνοπερατά Σήματα

158

- 2. Η **μιγαδική** περιβάλλουσα  $\tilde{g}(t)$  είναι ίση με μια μετατοπισμένη στη συχνότητα μορφή της προ-περιβάλλουσας  $g_+(t)$ :

$$\tilde{g}(t) = g_+(t) \exp(-j2\pi f_c t)$$

όπου  $f_c$  η συχνότητα φέροντος του ζωνοπερατού σήματος.

- 3. Η **περιβάλλουσα**  $a(t)$  είναι ίση με το μέτρο των  $\tilde{g}(t)$  και  $g_+(t)$

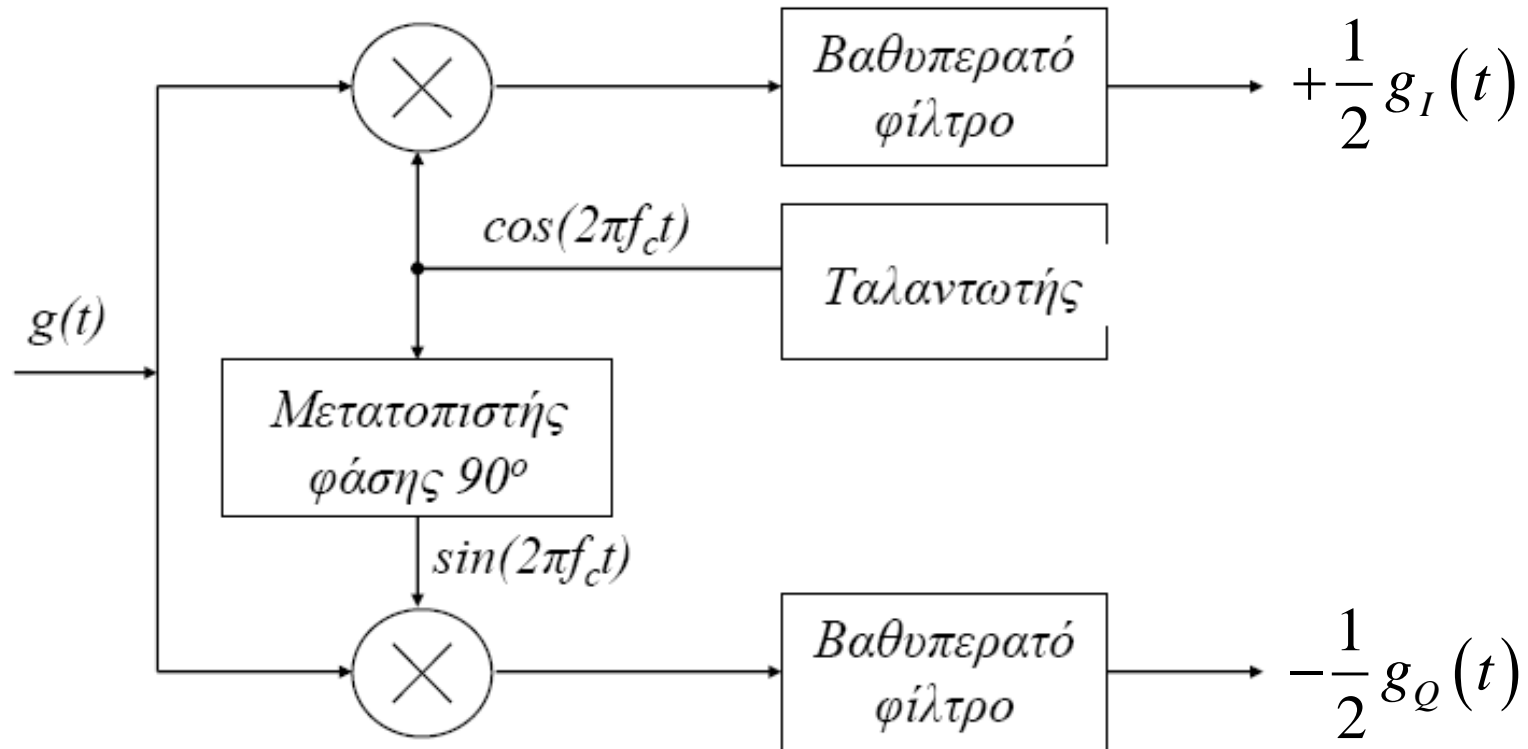
$$a(t) = \left| \tilde{g}(t) \right| = |g_+(t)|$$

- Η  $a(t)$  είναι πραγματικό βαθυπερατό σήμα, ενώ η  $\tilde{g}(t)$  είναι μιγαδικό βαθυπερατό σήμα. Και οι δύο είναι ανεξάρτητες από την  $f_c$ .

# Ζωνοπερατά Σήματα

159

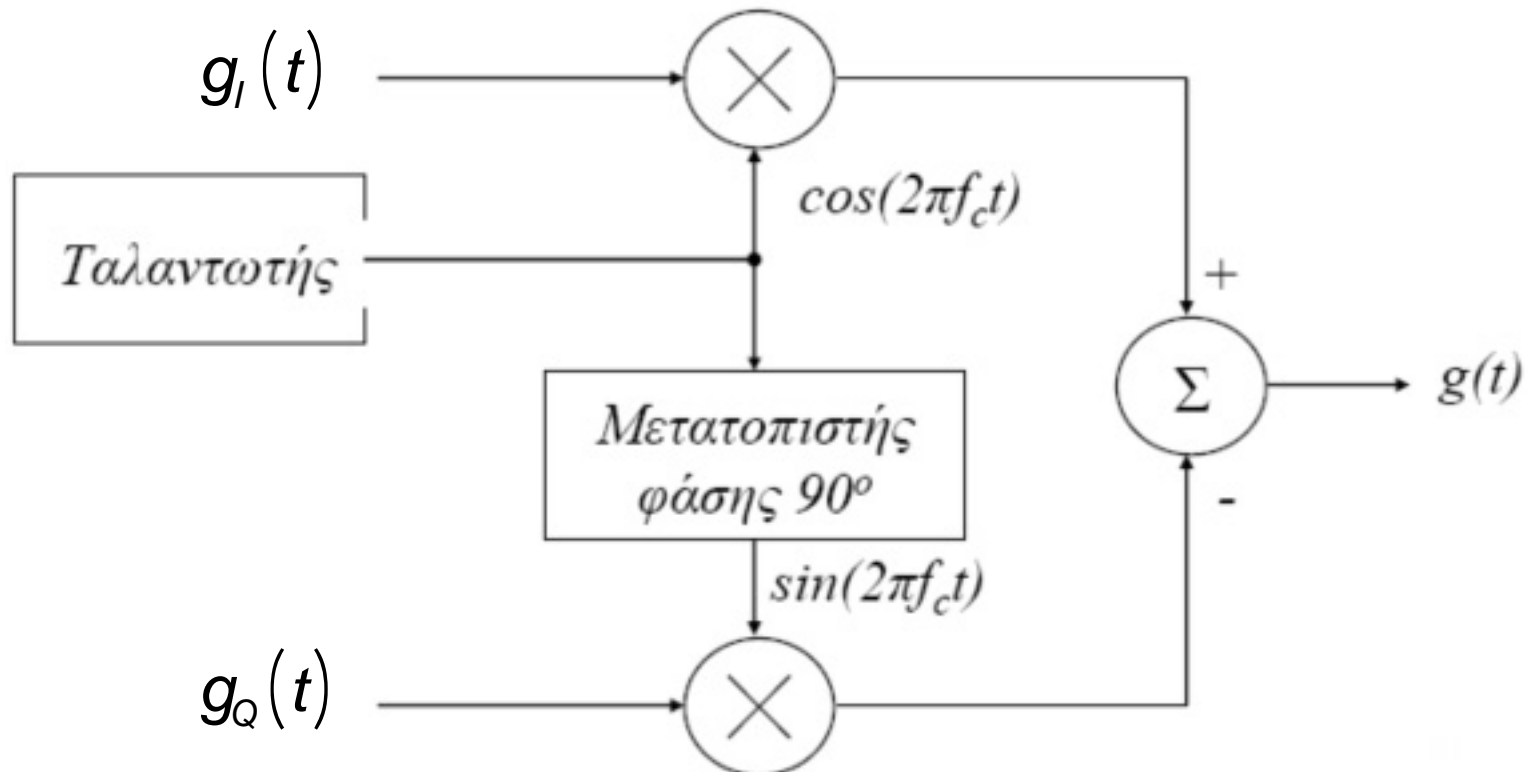
- Διάταξη για την παραγωγή της συμφασικής και της ορθογωνικής συνιστώσας ενός ζωνοπερατού σήματος:



# Ζωνοπερατά Σήματα

160

- Διάταξη για την ανακατασκευή του ζωνοπερατού σήματος από τη συμφασική και την ορθογωνική συνιστώσα:





# Ζωνοπερατά Συστήματα

161

- Ένα σύστημα καλείται **ζωνοπερατό** (bandpass system) όταν αφήνει να διέλθουν σήματα με περιεχόμενο στην περιοχή μιας υψηλής συχνότητας  $f_c$

$$H(f) = 1 \quad \text{για} \quad |f - f_c| \leq B$$

ενώ εξασθενίζει σημαντικά όλες τις φασματικές συνιστώσες που βρίσκονται έξω από αυτή την φασματική περιοχή.

- Στην πράξη θα μπορούσαμε να πούμε ότι ένα ζωνοπερατό σύστημα έχει κρουστική απόκριση που είναι ζωνοπερατό σήμα.

# Ζωνοπερατά Συστήματα

162

- Η ανάλυση ζωνοπερατών συστημάτων μπορεί να απλοποιηθεί πάρα πολύ χρησιμοποιώντας μια αναλογία (ισομορφισμό) μεταξύ βαθυπερατών και ζωνοπερατών συστημάτων. Η αναλογία αυτή βασίζεται στη χρήση του Μ/Σ Hilbert.
- Έστω ζωνοπερατό σήμα στενής ζώνης  $x(t)$  ( $X(f)$ ), περιορισμένο στις συχνότητες  $\pm W$  Hz εκατέρωθεν της συχνότητας  $f_c$  ( $W < f_c$ ), δηλ. **εύρος ζώνης σήματος  $2W$** .

$$x(t) = x_I(t) \cos(2\pi f_c t) - x_Q(t) \sin(2\pi f_c t)$$

$$\tilde{x}(t) = x_I(t) + jx_Q(t)$$

# Ζωνοπερατά Συστήματα

163

- Έστω ότι το σήμα  $x(t)$  εφαρμόζεται σε ΓΧΑ ζωνοπερατό σύστημα με κρουστική απόκριση  $h(t)$  ( $H(f)$ ). Η απόκριση συχνότητας του συστήματος περιορίζεται σε συχνότητες  $\pm B$  Hz εκατέρωθεν της συχνότητας  $f_c$  ( $W < f_c$ ), δηλ. **εύρος ζώνης συστήματος  $2B$** .
- Συνήθως:  $2B \leq 2W$
- Κατά αναλογία με τα ζωνοπερατά σήματα, έχουμε:

$$h(t) = 2h_1(t)\cos(2\pi f_c t) - 2h_0(t)\sin(2\pi f_c t)$$

(ο παράγοντας 2 έχει εισαχθεί για απλούστευση της ανάλυσης που ακολουθεί)

# Ζωνοπερατά Συστήματα

164

- Η έξοδος του συστήματος είναι ένα ζωνοπερατό σήμα:

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

- Οι μιγαδικές περιβάλλουσες υπολογίζονται από:

$$x(t) = \operatorname{Re} \left[ \tilde{x}(t) e^{j2\pi f_c t} \right] \quad y(t) = \operatorname{Re} \left[ \tilde{y}(t) e^{j2\pi f_c t} \right]$$

- Αν θέλουμε σχέση της συνέλιξης να ισχύει και για τις μιγαδικές περιβάλλουσες

$$\tilde{y}(t) = \tilde{x}(t) * \tilde{h}(t)$$

# Ζωνοπερατά Συστήματα

165

- Πρέπει:

$$h(t) = \text{Re} \left[ 2\tilde{h}(t)e^{j2\pi f_c t} \right]$$

- Την  $\tilde{h}(t)$  πολλές φορές την αποκαλούμε μιγαδική κρουστική απόκριση (complex impulse response) του ζωνοπερατού συστήματος και γράφουμε

$$\tilde{h}(t) = h_I(t) + jh_Q(t)$$

- Όλα τα σήματα αυτά είναι βαθυπερατά.

# Ζωνοπερατά Συστήματα

166

□ Γράφεται:  $h(t) = \tilde{h}(t)e^{j2\pi f_c t} + \tilde{h}^*(t)e^{-j2\pi f_c t}$

$$h(t) = \text{Re}[\tilde{h}(t)e^{j2\pi f_c t}]$$

□ Το φάσμα της κρουστικής απόκρισης είναι

$$H(f) = \tilde{H}(f - f_c) + \tilde{H}^*(-f - f_c)$$

□ Το φάσμα της μιγαδικής κρουστικής απόκρισης είναι

$$\tilde{H}(f) = u(f + f_c) H(f + f_c)$$

□ Ενώ

$$\tilde{X}(f) = 2u(f + f_c) X(f + f_c)$$

# Ζωνοπερατά Συστήματα

167

- Επειδή η  $\tilde{H}(f)$  είναι μια **βαθυπερατή** συνάρτηση μεταφοράς, περιορισμένη σε  $|f| \leq B$ , με  $B < f_c$ , έχουμε:

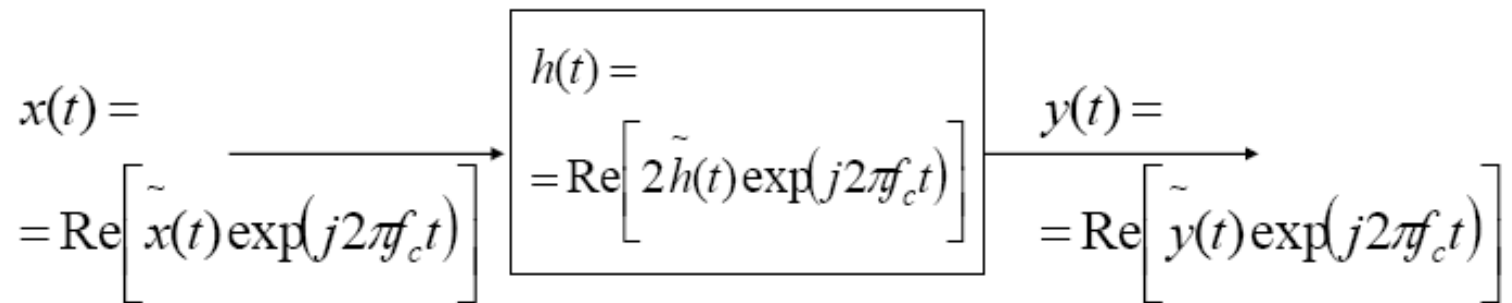
$$\tilde{H}(f - f_c) = H(f), \quad f > 0$$

- Για μία καθορισμένη ζωνοπερατή συνάρτηση μεταφοράς  $H(f)$ , μπορούμε να καθορίσουμε την  $\tilde{H}(f)$  λαμβάνοντας το τμήμα της  $H(f)$  που αντιστοιχεί στις θετικές συχνότητες και στη συνέχεια μετατοπίζοντάς το προς την αρχή των αξόνων.

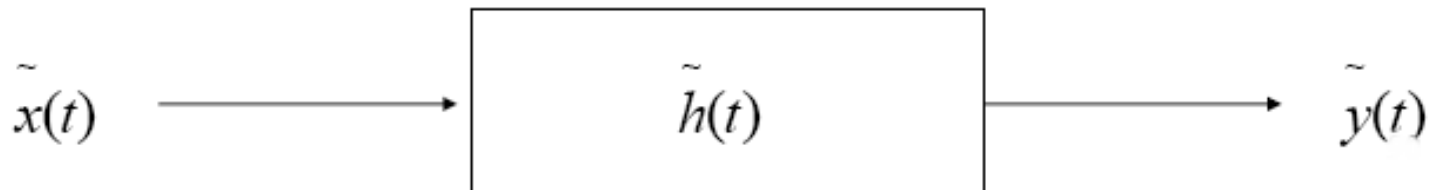
# Ζωνοπερατά Συστήματα

168

- Επομένως ασχολούμενοι με ζωνοπερατά σήματα και συστήματα, χρειάζεται να **ασχολούμαστε μόνο με τις βαθυπερατές συναρτήσεις**  $\tilde{x}(t)$ ,  $\tilde{y}(t)$ , και  $\tilde{h}(t)$



- Ισοδύναμο βαθυπερατό φίλτρο:





# Ζωνοπερατά Συστήματα

169

- Διαδικασία υπολογισμού απόκρισης ζωνοπερατού συστήματος σε ένα ζωνοπερατό σήμα εισόδου:
- 1. Το ζωνοπερατό σήμα εισόδου  $x(t)$  αντικαθίστανται από τη μιγαδική του περιβάλλουσα  $\tilde{x}(t)$  η οποία σχετίζεται με το σήμα  $x(t)$ :

$$x(t) = \operatorname{Re} \{ \tilde{x}(t) \exp(j2\pi f_c t) \}$$

- 2. Το ζωνοπερατό σύστημα με κρουστική απόκριση  $h(t)$  αντικαθίσταται από ένα βαθυπερατό ισοδύναμο σύστημα το οποίο χαρακτηρίζεται από μιγαδική κρουστική απόκριση όπου:  $\tilde{h}(t)$

$$h(t) = \operatorname{Re} \{ \tilde{h}(t) \exp(j2\pi f_c t) \}$$

# Ζωνοπερατά Συστήματα

170

3. Η μιγαδική περιβάλλουσα  $\tilde{y}(t)$  του ζωνοπερατού σήματος εξόδου  $y(t)$  λαμβάνεται συνελίσσοντας τη συνάρτηση  $\tilde{h}(t)$  με την  $\tilde{x}(t)$ :

$$\tilde{y}(t) = \tilde{h}(t) * \tilde{x}(t)$$

4. Η επιθυμητή συνάρτηση εξόδου  $y(t)$  προκύπτει από τη μιγαδική περιβάλλουσα της σχέσης:

$$y(t) = \text{Re} \{ \tilde{y}(t) \exp(j2\pi f_c t) \}$$

# Φάση και Καθυστέρηση Ομάδας

171

- Έστω ημιτονικό σήμα συχνότητας  $f_c$  που διαδίδεται μέσω ενός διαύλου με διασπορά (dispersive channel), που έχει ολική μετατόπιση φάσης  $\beta(f_c)$  rad.
- Ο φασιθέτης του λαμβανόμενου σήματος καθυστερεί ως προς το φασιθέτη του σήματος εισόδου κατά  $\beta(f_c)$  rad.
- Ο χρόνος που απαιτείται από το φασιθέτη του λαμβανόμενου σήματος για να καλύψει αυτή την καθυστέρηση φάσης είναι ίσος με  $\beta(f_c)/2\pi f_c$  (sec).
- Ο χρόνος αυτός ονομάζεται **καθυστέρηση φάσης** (phase delay) του διαύλου.

# Φάση και Καθυστέρηση Ομάδας

172

- Μια διαμορφωμένη κυματομορφή αποτελείται από μια στενή ομάδα συχνοτήτων.
- Όταν αυτή η διαμορφωμένη κυματομορφή μεταδοθεί μέσω του διαύλου, υπάρχει μια καθυστέρηση μεταξύ της περιβάλλουσας του σήματος εισόδου και της περιβάλλουσας του λαμβανόμενου σήματος.
- Η καθυστέρηση αυτή ονομάζεται καθυστέρηση περιβάλλουσας (envelope delay) ή **καθυστέρηση ομάδας** (group delay) του διαύλου και παριστάνει την πραγματική καθυστέρηση του σήματος.

# Ανακεφαλαίωση

173

- Μετάδοση Σημάτων Μέσω Γραμμικών Συστημάτων
- Φίλτρα
- Δειγματολοψία
- Μ/Σ Hilbert
- Προ-περιβάλλουσα
- Ζωνοπερατά Σήματα και Συστήματα
- Φάση και Καθυστέρηση Ομάδας

# Ανακεφαλαίωση

174

□ Προ-περιβάλλουσα  $g_+(t) = g(t) + j\hat{g}(t)$

$$g_+(t) = \tilde{g}(t)\exp(j2\pi f_c t) \quad G_+(f) = \begin{cases} 2G(f), & f > 0 \\ G(0), & f = 0 \\ 0, & f < 0 \end{cases}$$

□ Μιγαδική περιβάλλουσα

$$\tilde{g}(t) = g_+(t)\exp(-j2\pi f_c t)$$
$$\tilde{g}(t) = g_I(t) + jg_Q(t)$$

□ Περιβάλλουσα  $a(t) = |\tilde{g}(t)| = g_+(t)$

□ Σήμα

$$g(t) = \operatorname{Re}[\tilde{g}(t)\exp(j2\pi f_c t)]$$
$$g(t) = a(t)\cos[2\pi f_c t + \varphi(t)]$$