Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Ασύρματες Επικοινωνίες

Ενότητα 2 : Εισαγωγή στη Θεωρία των Η/Μ Πεδίων

Δημοσθένης Βουγιούκας (dvouyiou@aegean.gr)
Μόνιμος Επίκουρος Καθηγητής

Τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών & Επικοινωνιακών Συστημάτων

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Βασικές Έννοιες RF

- Σχέση μήκους κύματος-συχνότητας
- Φάσμα RF: ονόματα ζωνών συχνοτήτων
- Απόδοση συχνοτήτων RF
- Χαρακτηριστικά των μικροκυμάτων
- RF Διάδοση: Προϋπολογισμός ζεύξης (link budget/link margin)
- Συγκεντρωμένα / Κατανεμημένα Κυκλώματα (Lumped / Distributed circuits)
- Τερματισμένες Γραμμές Μεταφοράς
- Επίδραση υψηλών συχνοτήτων: RF απώλειες
- Επίδραση στην υγεία της ακτινοβολούμενης RF ισχύος

Σχέση μήκους κύματος-συχνότητας

- Το μήκος κύματος *λ* ενός ηλεκτρομαγνητικού κύματος σχετίζεται με τη συχνότητα *f* από τη σχέση:

$$\boxed{\lambda = \frac{c}{f}}$$

όπου c = 3x10^{8} *m/s* (ταχύτητα φωτός στο κενό)

- Για διευκόλυνση στην πράξη μπορούμε να υπολογίσουμε το μήκος κύματος όταν μας δίνεται η συχνότητα σε MHz ή GHz:

$$\boxed{\lambda = \frac{300}{f_{MHz}}(m)}$$

Π.χ., *λ* των *100 MHz* είναι *3 m*.

$$\boxed{\lambda = \frac{300}{f_{GHz}}(mm)}$$

Π.χ., *λ* των *10 GHz* είναι *30 mm*.

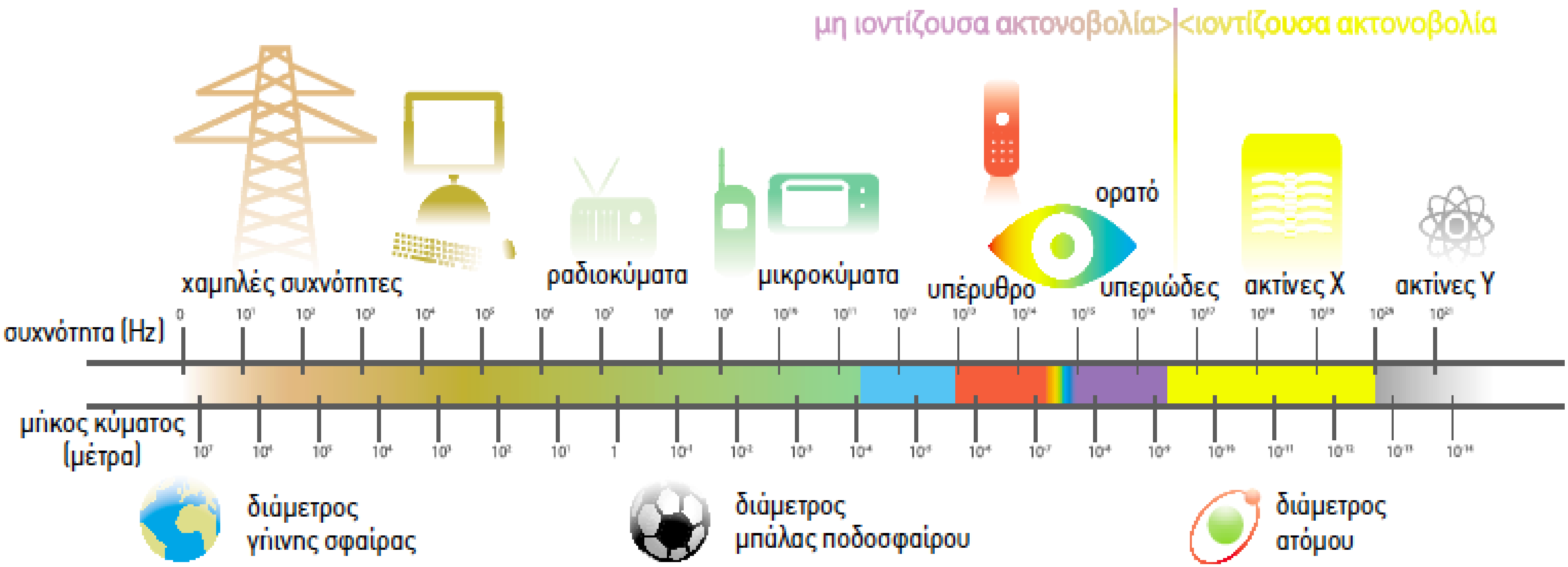
Ηλεκτρομαγνητικό Φάσμα

- Το Ηλεκτρομαγνητικό Φάσμα καλύπτει μία ευρύ περιοχή συχνοτήτων, από τη DC μέχρι τις ακτίνες γ.
- Οι ραδιο-συχνότητες (Radio frequency - RF) είναι ένα υποσύνολο του Η/Μ φάσματος και μπορεί να ορισθεί ως:

"The frequency in the portion of the electromagnetic spectrum that is between the audio-frequency portion and the infrared portion. The present practical limits of radio frequency are roughly 10 kHz to 100 GHz." *[IEEE Std 100-1988 Standard Dictionary of Electrical and Electronic Terms]*

- Τα Η/Μ κύματα μπορούν να διαδοθούν στο κενό, αλλά τα ακουστικά κύματα δεν μπορούν.

Ηλεκτρομαγνητικό Φάσμα



Το ηλεκτρομαγνητικό φάσμα και οι χρήσεις του για επικοινωνία.

Φάσμα RF: ονόματα ζωνών συχνοτήτων

Band Name	Abbr.	Frequency	Wavelength	Examples of Usage
Extremely Low Frequency	ELF	3-30 Hz	10-100 Mm	
Super Low Frequency	SLF	30-300 Hz	1-10 Mm	power lines
Ultra Low Frequency	ULF	0.3-3 kHz	0.1-1 Mm	
Very Low Frequency	VLF	3-30 kHz	10-100 km	submarines
Low Frequency	LF	30-300 kHz	1-10 km	beacons
Medium Frequency	MF	0.3-3 MHz	0.1-1 km	AM broadcast
High Frequency	HF	3-30 MHz	10-100 m	short-wave radio
Very High Frequency	VHF	30-300 MHz	1-10 m	FM and TV broadcast
Ultra High Frequency	UHF	0.3-3 GHz	0.1-1 m	TV, WiFi, mobile phones, GPS
Super High Frequency	SHF	3-30 GHz	10-100 mm	radar, satellites, WLAN data
Extremely High Frequency	EHF	30-300 GHz	1-10 mm	radar, automotive, data

Φάσμα RF: ονόματα ζωνών συχνοτήτων

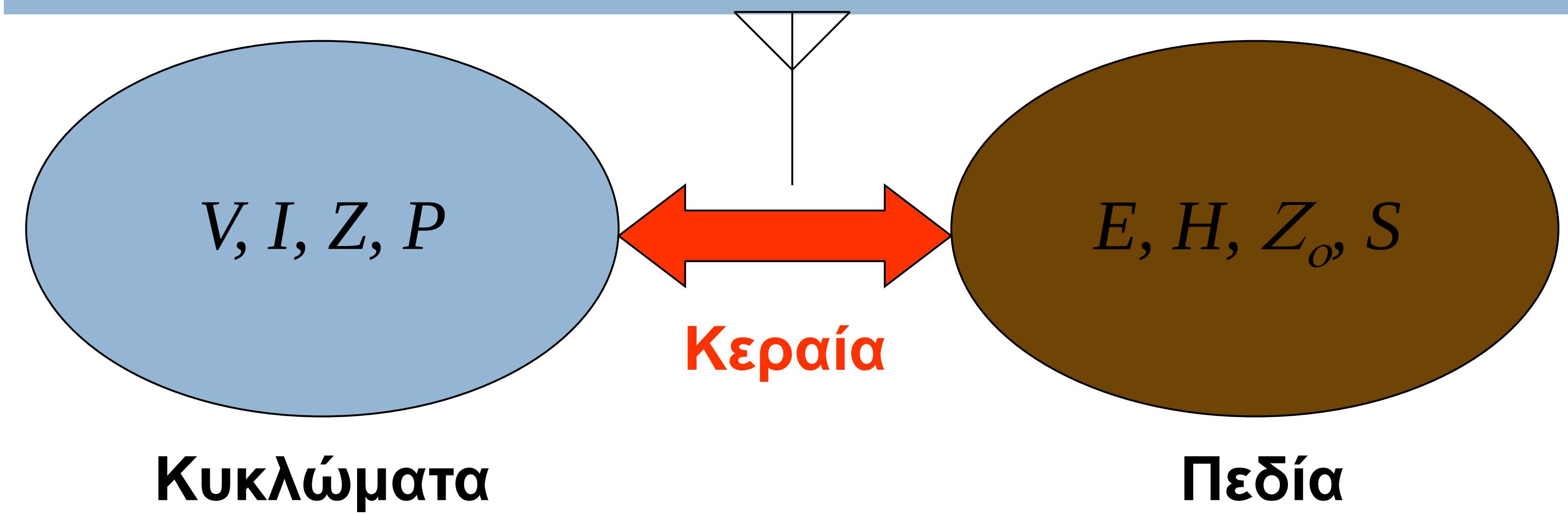
Band Name	Frequency
L	1-2 GHz
S	2-4 GHz
C	4-8 GHz
X	8-12 GHz
Ku	12-18 GHz
K	18-26 GHz
Ka	26-40 GHz
U	40-60 GHz

Εισαγωγή

- Η θεωρία των κυκλωμάτων:
  - Αντιμετωπίζει τα στοιχεία των κυκλωμάτων ως δίθυρα στοιχεία που συνδέονται με καλώδια, δηλαδή αγωγούς.
  - Ασχολείται με ρεύματα και τάσεις που μπορούν να θεωρηθούν τα αποτελέσματα-συνέπεια των πεδίων.
  - Κυκλώματα με φυσικές διαστάσεις πολύ μικρότερες από το μήκος κύματος (*Συγκεντρωμένα Κυκλώματα – Lumped Circuits*)

- Η θεωρία των πεδίων:
  - Ασχολείται με τα ηλεκτρικά και τα μαγνητικά πεδία
  - Ασχολείται με το χώρο, εσωτερικά και εξωτερικά των στοιχείων αποδεικνύοντας ότι η ενέργεια μεταφέρεται ουσιαστικά στον εξωτερικό των στοιχείων χώρο, με τους αγωγούς να παίζουν το ρόλο του καθοδηγητή της ροής της ενέργειας. Για το λόγο αυτό οι αγωγοί καλούνται και *γραμμές μεταφοράς*.
  - Κυκλώματα με φυσικές διαστάσεις συγκρίσιμες με το μήκος κύματος (*Κατανεμημένα Κυκλώματα – Distributed Circuits*)

Σύνδεση μεταξύ Κυκλωμάτων και Πεδίων



- Σταθερή κατάσταση των χρονικά μεταβαλλόμενων σημάτων (π.χ., RF CW)
- Μεταβατικό σήμα (π.χ. Η/Μ παλμοί)
- Γνώση των βασικών *RF* εννοιών

Πηγές Η/Μ Πεδίων

- Οι πηγές των Η/Μ Πεδίων και των ρευμάτων είναι τα ηλεκτρικά φορτία που βρίσκονται:
  - σε κίνηση
  - τα θεωρούμε σε ακινησία

- Η ένταση ενός Η/Μ πεδίου εξαρτάται από:
  - το μέγεθος
  - τη θέση
  - την ταχύτητα
  - την επιτάχυνση των φορτίων

Πηγές Η/Μ Πεδίων

- ***Ηλεκτρικά Φορτία***
  - Η ένταση ενός Η/Μ πεδίου εξαρτάται από το μέγεθος, τη θέση, την ταχύτητα και την επιτάχυνση των θεωρούμενων φορτίων.
  - Κβαντισμένα φορτία: Υπάρχουν ηλεκτρικά φορτία αρνητικά και θετικά με στοιχειώδη μονάδα το ηλεκτρόνιο που έχει τη μικρότερη ποσότητα ηλεκτρισμού ($|q_{el}|$ = 1,602*10^{-19} *Coulomb)*.
  - Χωρική Πυκνότητα φορτίου:

$$\rho_v = \frac{\Delta q}{\Delta V} \quad \left(\frac{Coulomb}{m^3}\right)$$

  - Επιφανειακή Πυκνότητα φορτίου:

$$\rho_s = \frac{\Delta q}{\Delta S} \quad \left(\frac{Coulomb}{m^2}\right)$$

  - Γραμμική Πυκνότητα φορτίου:

$$\rho_l = \frac{\Delta q}{\Delta l} \quad \left(\frac{Coulomb}{m}\right)$$

Πηγές Η/Μ Πεδίων

- ***Ηλεκτρικό Ρεύμα***
  - Το ηλεκτρικό ρεύμα οφείλεται στην κίνηση των ηλεκτρικών φορτίων και χαρακτηρίζεται από την ένταση *i* που ορίζεται ως ο ρυθμός ροής των φορτίων:

$$i = \frac{dq}{dt} \Rightarrow 1Ampere = \frac{1Coulomb}{1\sec}$$

  - Πυκνότητα Ηλεκτρικού Ρεύματος:

$$\boxed{\vec{J} = \rho_v \vec{v}}$$

όπου ρ_v η χωρική πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου και $\vec{v}$ η ταχύτητα των κινούμενων φορτίων.

  - Οποιοδήποτε μέσο μεταφέρει ρεύμα καλείται αγωγός.

Πηγές Η/Μ Πεδίων

- ***Ηλεκτρικό Ρεύμα***
  - Μέτρο Πυκνότητας Ρεύματος:

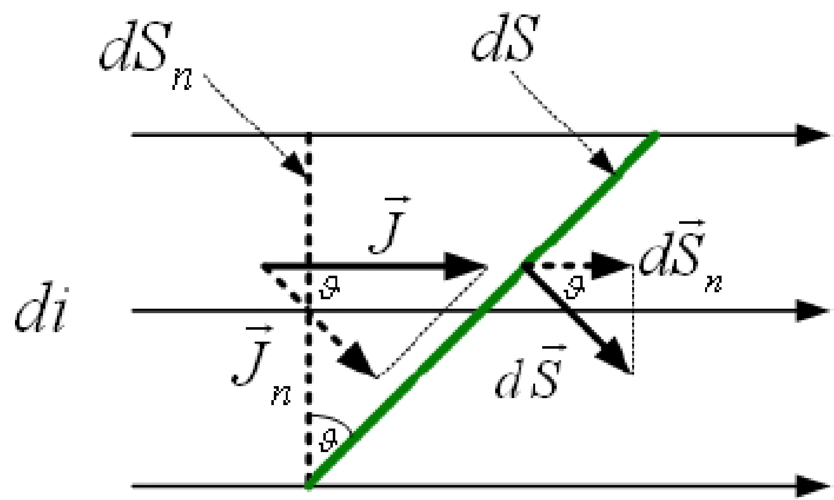
$$J = \frac{di}{dS_n} \quad \left(\frac{Ampere}{m^2} \right)$$

$$di = \vec{J} \cdot d\vec{S} = JdS\cos\vartheta = J_n dS = JdS_n$$

$$i = \int \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

Ρεύμα Μεταφοράς

Επιφανειακό ολοκλήρωμα



Ηλεκτροστατικά Πεδία

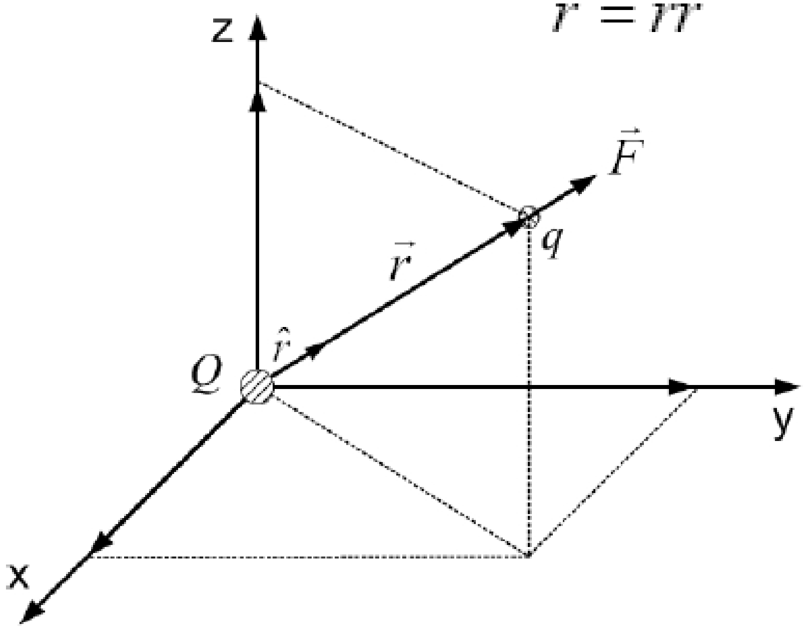
- ***Νόμος του Coulomb***
  - Ελκτική ή απωθητική Κεντρική Δύναμη:

$$\vec{F} = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{r}$$

όπου ε είναι η διηλεκτρική σταθερά ή επιτρεπτότητα του μέσου

(για το κενό είναι $\varepsilon_o \approx \dfrac{1}{36\pi * 10^9}$

$\vec{r} = r\hat{r}$



Ηλεκτροστατικά Πεδία

- ***Ένταση Ηλεκτρικού Πεδίου***

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{\Delta q} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{r} \qquad (Newton / Coulomb)$$

  - Η κατεύθυνση της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου ορίζεται με βάση τη δύναμη που ασκείται σε θετικό δοκιμαστικό φορτίο από το θετικό σταθερό φορτίο *Q*.
  - Ενώ η δύναμη που ασκείται στο δοκιμαστικό φορτίο Δ*q* που τοποθετείται στο πεδίο του φορτίου *Q* εξαρτάται από το στοιχειώδες μέγεθος Δ*q*, η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου είναι ανεξάρτητη του Δ*q.*
  - Το ηλεκτρικό πεδίο θα υπάρχει και μετά την απομάκρυνση του δοκιμαστικού φορτίου.

Ηλεκτροστατικά Πεδία

- ***Πυκνότητα Ηλεκτρικής Ροής ή Διηλεκτρική Μετατόπιση***
  - Ηλεκτρική Ροή Ψ_e είναι ένα μέγεθος το οποίο εξαρτάται από το φορτίο-πηγή αλλά είναι ανεξάρτητο από το μέσο, δηλαδή ουσιαστικά τις ιδιότητες του υλικού.
    - Μέγεθος ανάλογο του ρεύματος στα αγώγιμα υλικά και καλύπτει τις περιπτώσεις των *διηλεκτρικών υλικών*.
  - Το πείραμα ομόκεντρων σφαιρών του Faraday απέδειξε ότι το μέγεθος της μετατόπισης εξαρτάται μόνο από το φορτίο Q και όχι από άλλα χαρακτηριστικά όπως είναι οι ιδιότητες του μέσου.

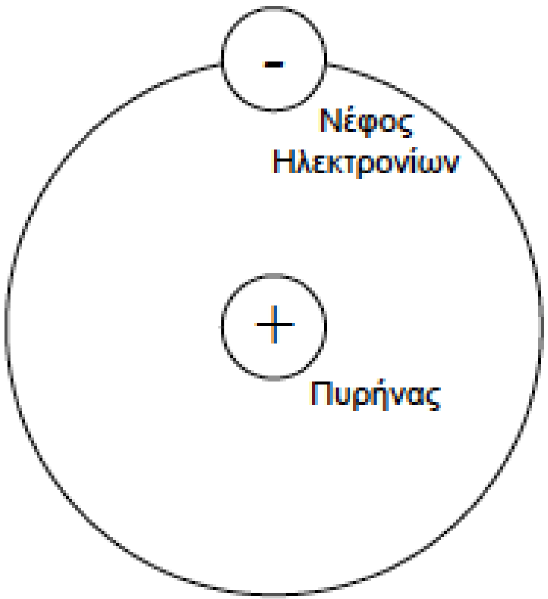
$$\Psi_e = Q \quad (Coulomb)$$

  - Για εξωτερική σφαίρα άπειρης ακτίνας, η Πυκνότητα Ηλεκτρ. Ροής ή Διηλεκτρική Μετατόπιση δίνεται από:

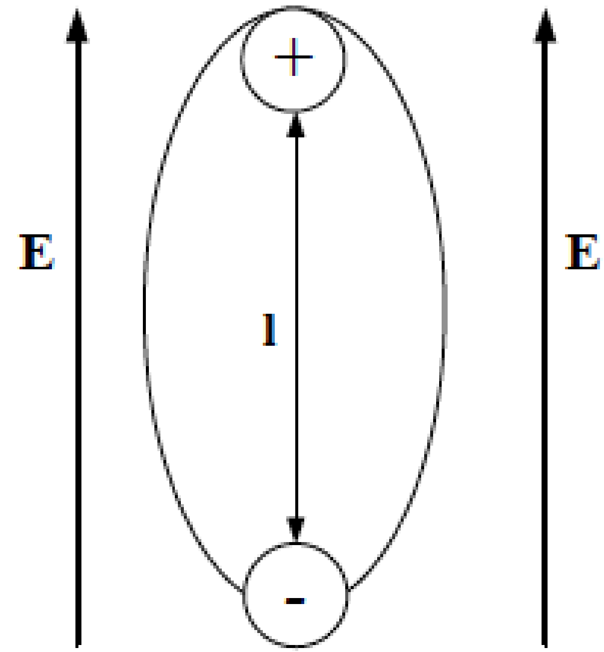
$$D = \frac{\Psi_e}{4\pi r^2} = \frac{Q}{4\pi r^2} \quad \left(\frac{Coulomb}{m^2}\right)$$

Επέκταση στα Διηλεκτρικά Υλικά

- Μοντέλου Ατόμου Διηλεκτρικού Υλικού



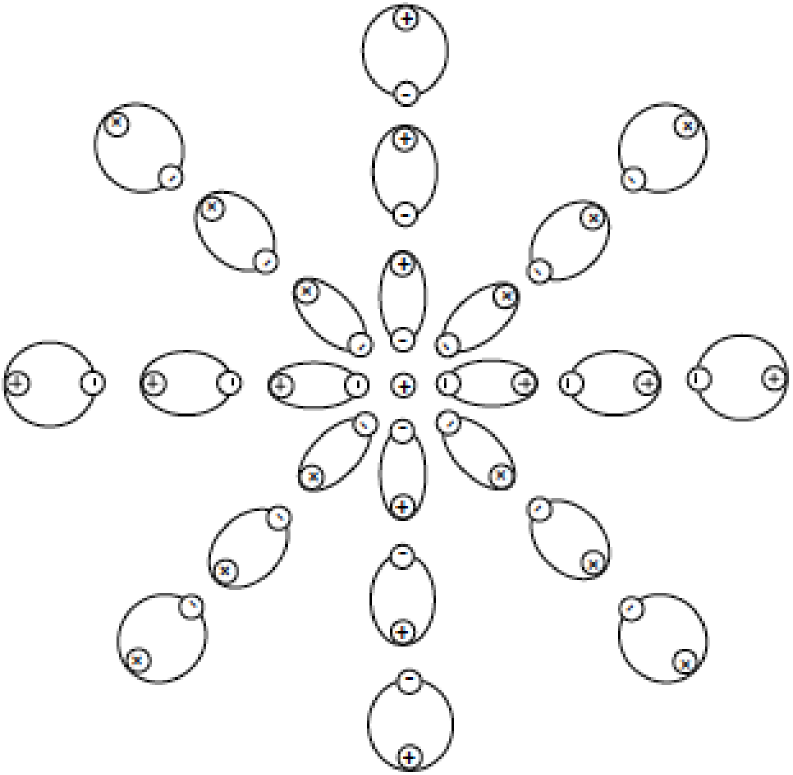
Απουσία Ηλεκτρ. Πεδίου



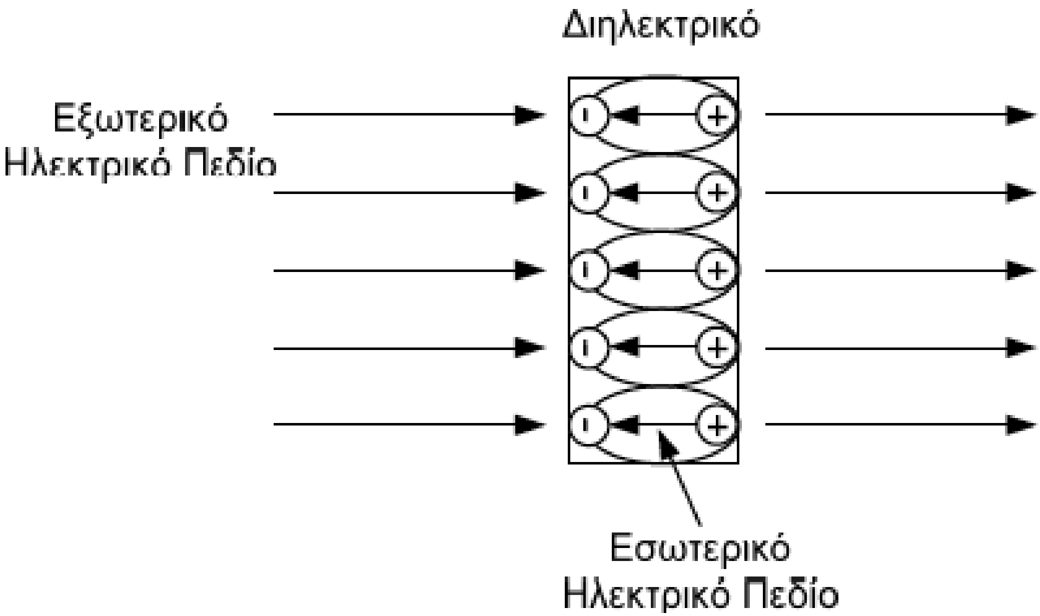
Παρουσία Ηλεκτρ. Πεδίου

Επέκταση στα Διηλεκτρικά Υλικά

- Πόλωση Διηλεκτρικού υπό την παρουσία ελεύθερου φορτίου



- Πόλωση υπό την παρουσία απροσδιόριστης πηγής



Ηλεκτροστατικά Πεδία

- ***Πυκνότητα Ηλεκτρικής Ροής ή Διηλεκτρική Μετατόπιση***
  - Η διηλεκτρική μετατόπιση σε κάθε σημείο εξαρτάται από την κατεύθυνση που έχει η επιφάνεια στην οποία γίνεται ο υπολογισμός. Δηλαδή είναι μια διανυσματική ποσότητα με κατεύθυνση εκείνη την κάθετη στην επιφάνεια που μεγιστοποιεί τη μετατόπιση μέσα από την επιφάνεια.
  - Στην περίπτωση ενός μεμονωμένου φορτίου η κατεύθυνση αυτή είναι η ακτινική και είναι ίδια με την κατεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου:

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = \frac{Q}{4\pi r^2}\hat{r}}$$

  - Ισχύει:

$$\Psi_e = \oint_S \vec{D} \bullet d\vec{S}$$

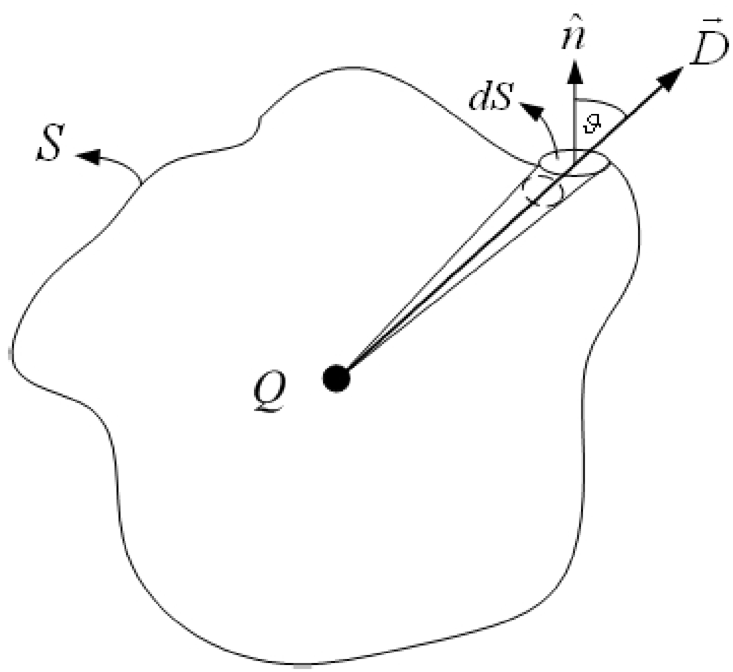
Ολοκλήρωση σε κλειστή επιφάνεια

Ηλεκτροστατικά Πεδία

- ***Νόμος του Gauss***
  - Η συνολική ηλεκτρική μετατόπιση ή η ηλεκτρική ροή διαμέσου μιας οποιασδήποτε κλειστής επιφάνειας που εσωκλείει φορτία, ισούται με το ποσό του εσώκλειστου φορτίου.

$$\Psi_{\varepsilon} = \oint_S \vec{D} \bullet d\vec{S} = \int_V \rho_v dV$$

$$d\Psi_{\varepsilon} = D dS \cos\vartheta$$

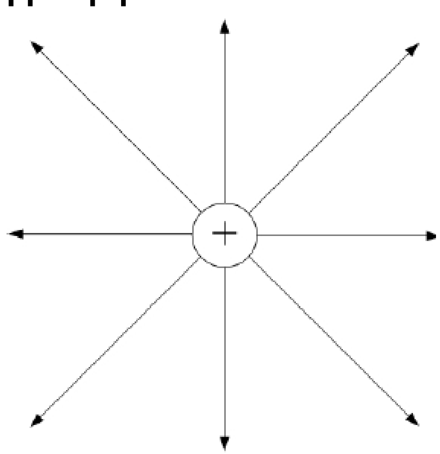


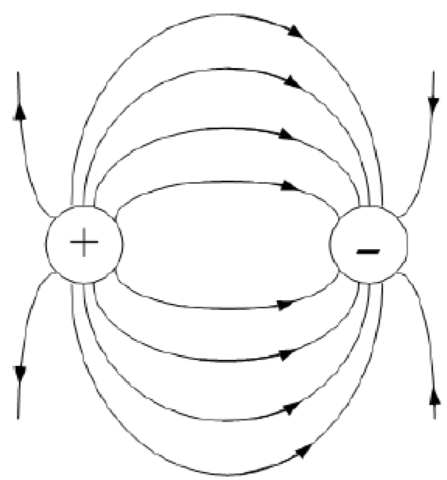
Ηλεκτρική Ροή Διαμέσου μίας Κλειστής επιφάνειας

Ηλεκτροστατικά Πεδία

- ***Δυναμικές Γραμμές και Γραμμές Ηλεκτρικής Ροής***
  - Σχεδιάζονται ώστε να υποδεικνύουν την κατεύθυνση του πεδίου ή της δύναμης που θα ασκούνταν σε ένα μικρό δοκιμαστικό θετικό φορτίο το οποίο θα τοποθετούνταν μέσα στο πεδίο.
  - Η πυκνότητα των δυναμικών γραμμών είναι μεγαλύτερη εκεί όπου η δύναμη που ασκείται στο δοκιμαστικό φορτίο και κατά συνέπεια και το πεδίο είναι πιο ισχυρό.
  - Οι γραμμές ηλεκτρικής ροής αντίστοιχα απεικονίζουν την πυκνότητα ηλεκτρικής ροής ή διηλεκτρικής μετατόπισης.
  - Η κατεύθυνσή τους δείχνει την κατεύθυνση του $\bar{D}$ και η πυκνότητα των γραμμών το πλάτος του $\bar{D}$.

Οι δυναμικές γραμμές δεν τέμνονται και δεν εφάπτονται





Ηλεκτροστατικά Πεδία

- ***Η συνάρτηση δυναμικού***
  - Θεωρούμε ένα φορτίο Q και ένα δεύτερο δοκιμαστικό στοιχειώδες ομώνυμο φορτίο q το οποίο μετακινείται από το άπειρο, κατά μήκος μιας ακτινικής γραμμής, σε σημείο με απόσταση R από το αρχικό φορτίο Q.
  - Το Έργο που απαιτείται για τη μετακίνηση του q αντίθετα στη δύναμη F θα είναι:

$$\text{Εργο} = \int_{\infty}^{R} \vec{F} \bullet d\vec{r} = -\int_{\infty}^{R} \frac{Qq}{4\pi\varepsilon r^2} dr = -\frac{Qq}{4\pi\varepsilon} \int_{\infty}^{R} \frac{1}{r^2} dr = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon R} \qquad (Joule)$$

$$V = \frac{\text{Εργο}}{q} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon R} \qquad \left(\frac{Joule}{Coulomb} = Volt \right)$$

(Βαθμωτό) Δυναμικό

$$E = \frac{Newton}{Coulomb} = \frac{Joule}{Coulomb} \frac{1}{m} = \frac{Volt}{m}$$

Μονάδα Έντασης Ηλεκτρ. Πεδίου

Ηλεκτροστατικά Πεδία

- ***Η συνάρτηση δυναμικού***
  - Αν δύο σημεία απέχουν απειροστή απόσταση *dl*, τότε το έργο που θα παραχθεί από μια εξωτερική δύναμη για να μετακινήσει ένα μοναδιαίο θετικό φορτίο από το ένα σημείο στο άλλο:

$$dW = dV = -\vec{E} \bullet d\vec{l} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz = -\vec{E} \bullet d\vec{l} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial V}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{z} \right) \bullet \left(\hat{x} dx + \hat{y} dy + \hat{z} dz \right) = -\vec{E} \bullet d\vec{l} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} V \bullet d\vec{l} = -\vec{E} \bullet d\vec{l} \Rightarrow$$

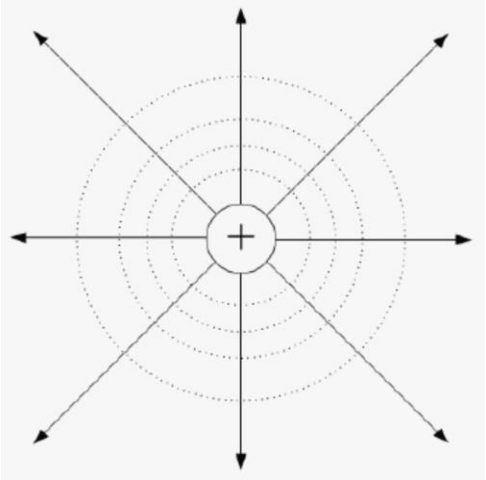
$$\Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

$$V_{AB} = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \Longleftarrow \textbf{Διαφορά Δυναμικού} \Longrightarrow \oint \vec{E} \bullet d\vec{l} = 0$$

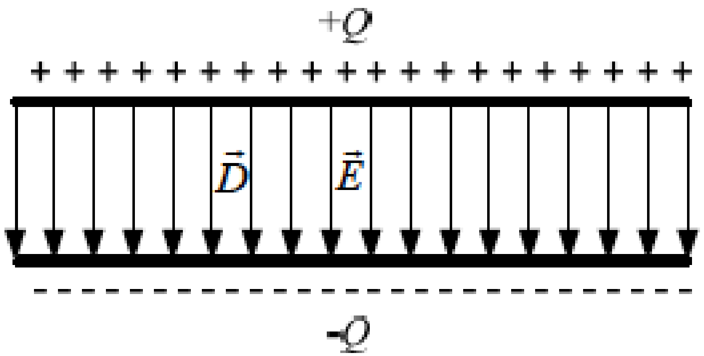
Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

Ηλεκτροστατικά Πεδία

- ***Ισοδυναμικές Επιφάνειες***
  - Μια επιφάνεια καλείται ισοδυναμική όταν σε κάθε σημείο της επιφάνειας το δυναμικό είναι σταθερό. Η κίνηση ενός φορτίου πάνω στην ισοδυναμική επιφάνεια απαιτεί μηδενικό έργο.
  - Επειδή δύο οποιαδήποτε σημεία της επιφάνειας έχουν το ίδιο δυναμικό, δεν υπάρχει διαφορά δυναμικού και κατά συνέπεια το ηλεκτρικό πεδίο κατά μήκος της επιφάνειας, δηλαδή η εφαπτομενική συνιστώσα του είναι μηδενική.
  - Άρα το ηλεκτρικό πεδίο πρέπει να είναι πάντα κάθετο σε μια ισοδυναμική επιφάνεια. Συνεπώς οι δυναμικές γραμμές και οι ισοδυναμικές επιφάνειες είναι πάντα ορθογώνιες.



Χωρητικότητα – Ιδανικός Πυκνωτής



$$C = \frac{Q}{V_{AB}}$$

N. Gauss

$$V_{AB} = -\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_A^B \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon} \cdot d\mathbf{l} = \frac{|\mathbf{D}|}{\varepsilon} d = \frac{\rho_s}{\varepsilon} d$$

$$C = \frac{\varepsilon Q}{\rho_s d} = \frac{\varepsilon \rho_s A}{\rho_s d} = \frac{\varepsilon A}{d} \qquad (\text{Farads})$$

Ηλεκτροστατικά Πεδία

- ***Το Θεώρημα της Απόκλισης (ή Gauss)***
  - Συνδέει ένα χωρικό ολοκλήρωμα, ένα ολοκλήρωμα σε όγκο, με το επιφανειακό ολοκλήρωμα στην επιφάνεια που περικλείει τον όγκο.
  - Νόμος Gauss: Η απόκλιση του ηλεκτρικού πεδίου, δηλαδή η ηλεκτρική ροή που εξέρχεται από μια κλειστή επιφάνεια με όγκο V, είναι ίση με το ηλεκτρικό φορτίο που περικλείεται από την κλειστή αυτή επιφάνεια.

$$\int_V \vec{\nabla} \bullet \vec{D} dV = \oint_S \vec{D} \bullet d\vec{S} = \Psi_e = Q$$

Νόμος Gauss $$\oint_S \vec{D} \bullet d\vec{S} = \int_V \rho_v dV$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \bullet \vec{D} = div\vec{D} = \rho_v}$$

απόκλιση

Ηλεκτροστατικά Πεδία

- ***Οι εξισώσεις Poisson και Laplace***
  - Σε ομογενή και ισοτροπικά μέσα, οι εξισώσεις μας δίνουν τη σχέση του ρυθμού μεταβολής της συνάρτησης του δυναμικού στις κατευθύνσεις των τριών συνιστωσών.

$$\left.\begin{aligned}\vec{\nabla}\bullet\varepsilon\vec{E} = \varepsilon\vec{\nabla}\bullet\vec{E} = \rho_v \Rightarrow \vec{\nabla}\bullet\vec{E} = \frac{\rho_v}{\varepsilon}\\ \vec{E} = -\vec{\nabla}V\end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\varepsilon}}$$

Εξίσωση Poisson

  - Στον ελεύθερο χώρο χωρίς φορτία ($\rho = 0$)

$$\boxed{\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0}$$

$$\vec{\nabla}\bullet\vec{E} = 0$$

Εξίσωση Laplace

Οριακές Συνθήκες για Διηλεκτρικά Μέσα

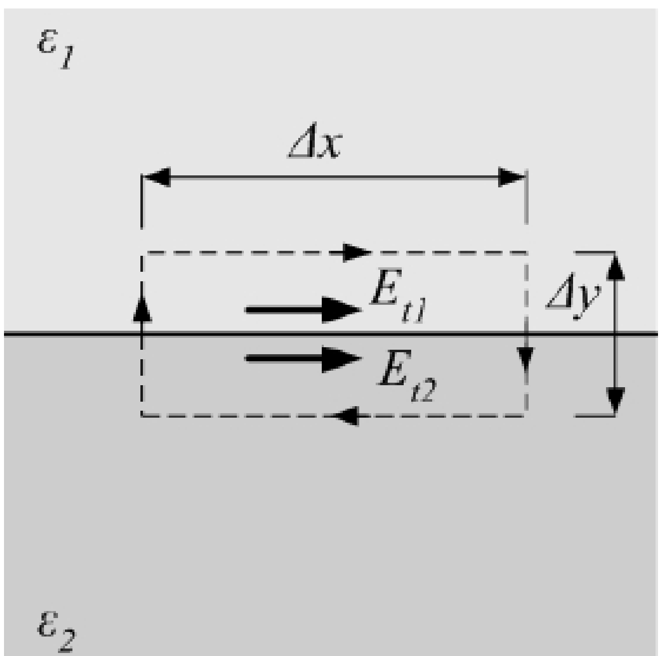
$$\oint \vec{E}\bullet d\vec{l} = E_{t1}\Delta x - E_{t2}\Delta x = 0$$

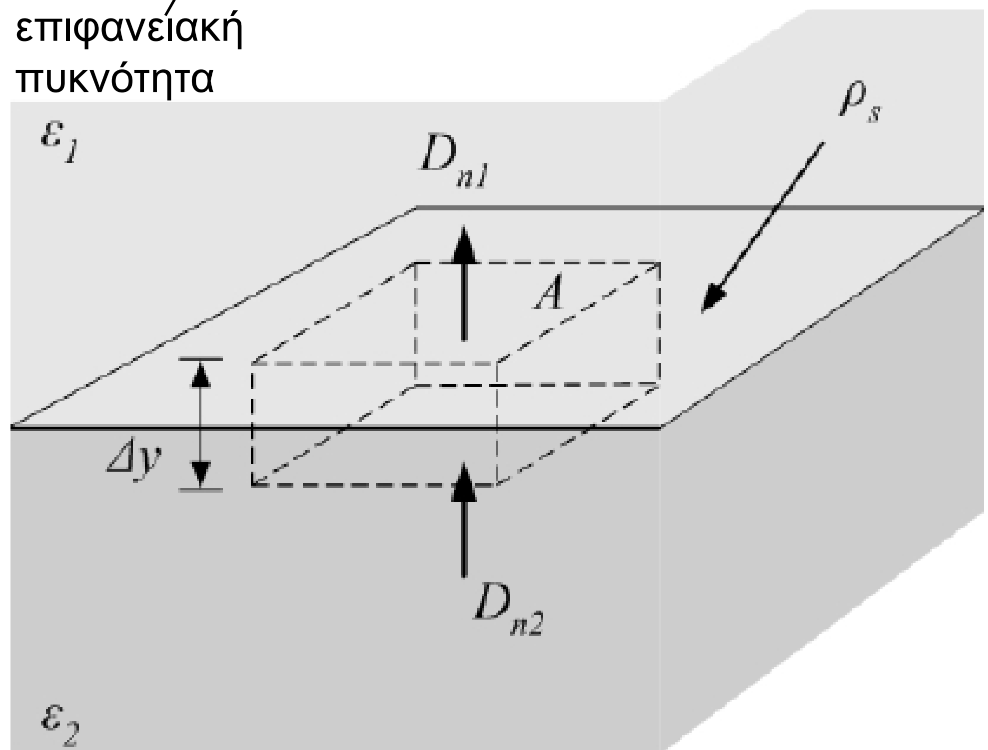
$$\Rightarrow \; E_{t1} = E_{t2}$$

$$\overbrace{\oiint \vec{D}\bullet d\vec{S} = \rho_s A}^{\text{Νόμος Gauss}} \Rightarrow \left(D_{n1}\hat{n}\bullet A\hat{n}\right) - \left(D_{n2}\hat{n}\bullet A\hat{n}\right) = \rho_s A$$

$$\Rightarrow D_{n1} - D_{n2} = \rho_s$$

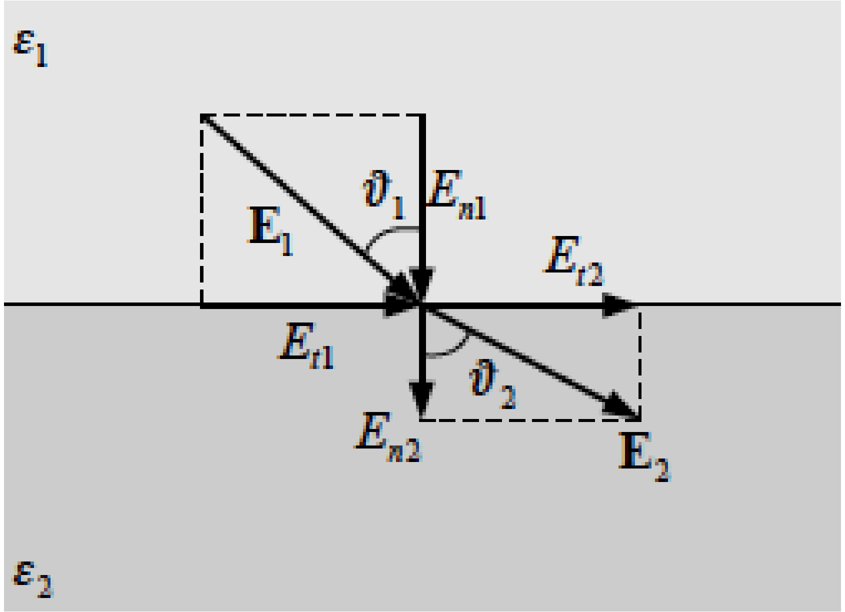
επιφανειακή
πυκνότητα





Οριακές Συνθήκες για Διηλεκτρικά Μέσα

$$\left(\varepsilon_2 > \varepsilon_1\right)$$



$$\vartheta_1 = \tan^{-1}\frac{E_{t1}}{E_{n1}}$$

$$\vartheta_2 = \tan^{-1}\frac{E_{t2}}{E_{n2}}$$

$$\boxed{\vartheta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\tan\vartheta_1\right)}$$

Οριακές Συνθήκες για Διηλεκτρικά Μέσα

Συνιστώσα Πεδίου	**Οριακές Σχέσεις**	**Προϋποθέσεις**
Εφαπτόμενη	$E_{t1}= E_{t2}$	Διαχωριστική επιφάνεια δύο οποιονδήποτε μέσων
Εφαπτόμενη	$E_{t1}=0$	Το μέσον 1 είναι διηλεκτρικό, το μέσον 2 αγωγός
Κάθετη	$D_{n1}- D_{n2}=\rho_s$	Φορτισμένη διαχωριστική επιφάνεια δύο οποιονδήποτε μέσων
Κάθετη	$D_{n1}=D_{n2}$	Δύο οποιαδήποτε μέσα με διαχωριστική επιφάνεια χωρίς φορτίο
Κάθετη	$D_{n1}=\rho_s$	Το μέσον 1 είναι διηλεκτρικό, το μέσον 2 είναι αγωγός με επιφανειακό φορτίο

Πεδία Ροής Ηλεκτρικού Ρεύματος

- ***Μικροσκοπικός Νόμος του Ohm***:

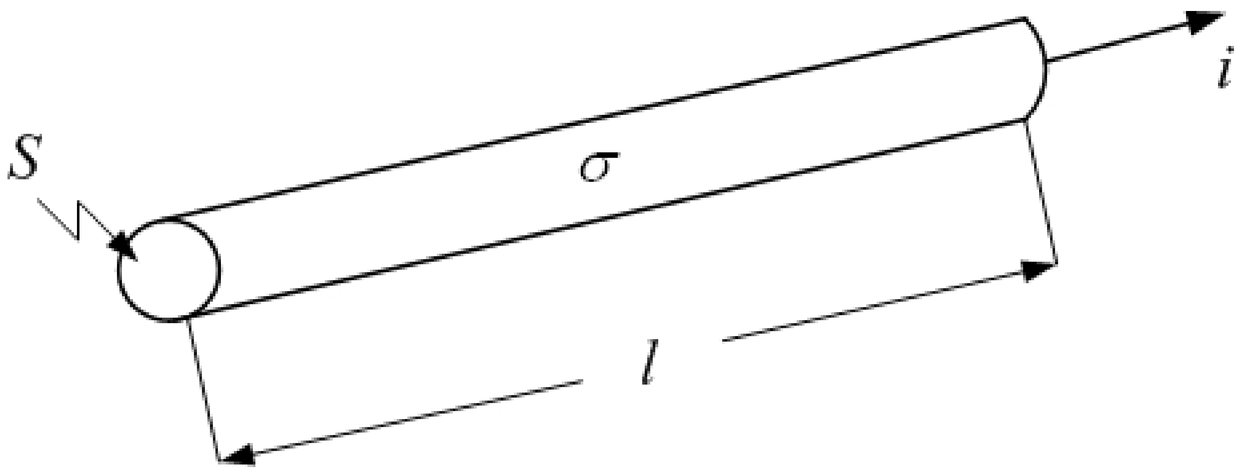
$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

όπου *σ* είναι η ειδική ηλεκτρική αγωγιμότητα

$$i(Ampere) = \int_S \vec{J} \bullet d\vec{S} = J(Ampere/m^2) \cdot S(m^2)$$

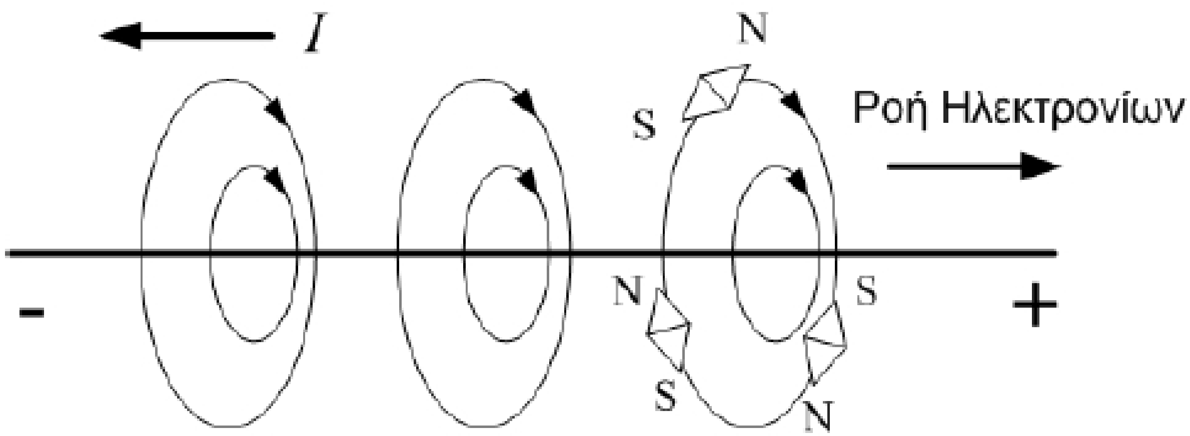
$$v(Volt) = \int_l \vec{E} \bullet d\vec{l} = E(Volt/m) \cdot l(m)$$

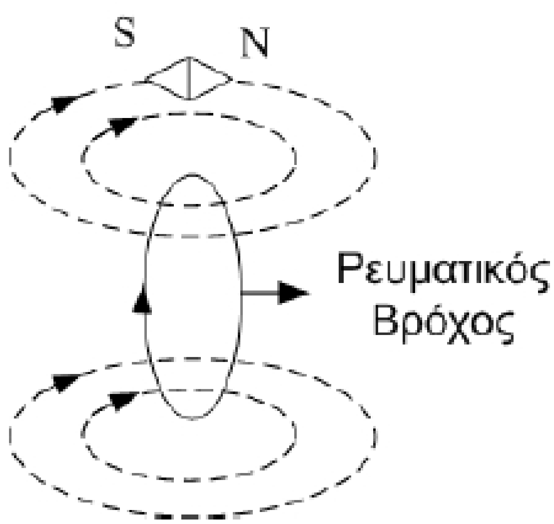
$$\Rightarrow \frac{i}{S} = \sigma \frac{v}{l} \Rightarrow v = \underbrace{\frac{l}{\sigma S}}_{R} i$$



Στατικά Μαγνητικά Πεδία

- Στην περιοχή ενός αγωγού που διαρρέεται από ρεύμα αναπτύσσεται μαγνητικό πεδίο η ύπαρξη του οποίου γίνεται εμφανής αν πλησιάσουμε μια πυξίδα.
- Η πυξίδα που τίθεται στο μαγνητικό πεδίο θα ευθυγραμμιστεί με τις δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου, με το βόρειο πόλο να δείχνει προς την κατεύθυνση των δυναμικών γραμμών.



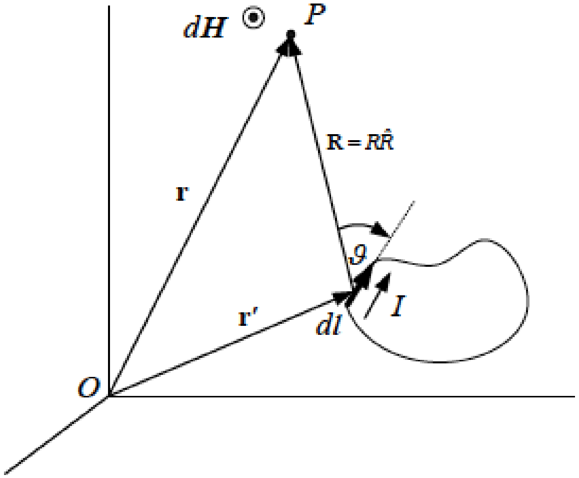


Στατικά Μαγνητικά Πεδία

- ***Ο Νόμος του Ampere για ρευματικό στοιχείο***
  - Η ποσότητα *I·dl* ονομάζεται ρευματικό στοιχείο και είναι διανυσματικό μέγεθος με κατεύθυνση εκείνη του ρεύματος.

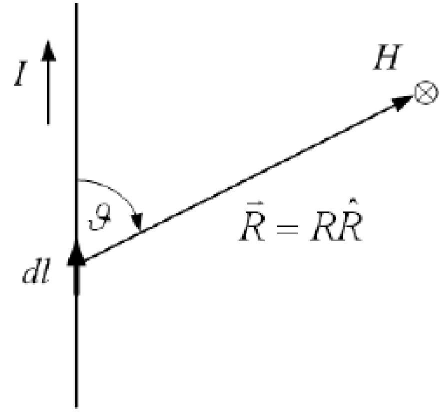
$$d\vec{H} = \frac{I d\vec{l} \times \hat{R}}{4\pi R^2}$$

Νόμος των Bio-Savart.



$$dH(\vec{r}) = \frac{I \cdot dl(\vec{r}\,')\sin\vartheta}{4\pi R^2} \qquad \vec{H} = \oint \frac{I d\vec{l} \times \hat{R}}{4\pi R^2}$$

Μέτρο $H = \dfrac{I}{2\pi r}$ (A/m) Για άπειρου μήκους αγωγό



$$\boxed{\oint \vec{H} \bullet d\vec{L} = I}$$

Νόμος του Ampere.

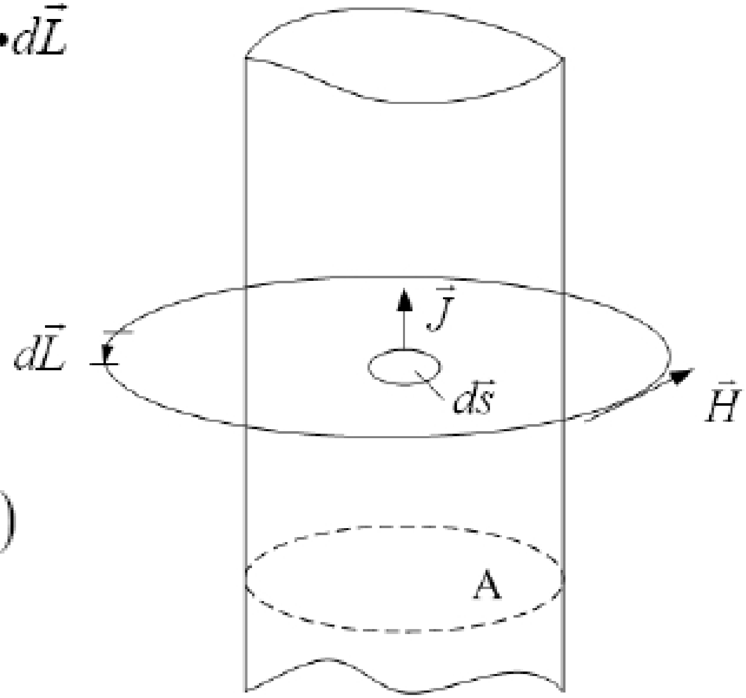
Στατικά Μαγνητικά Πεδία

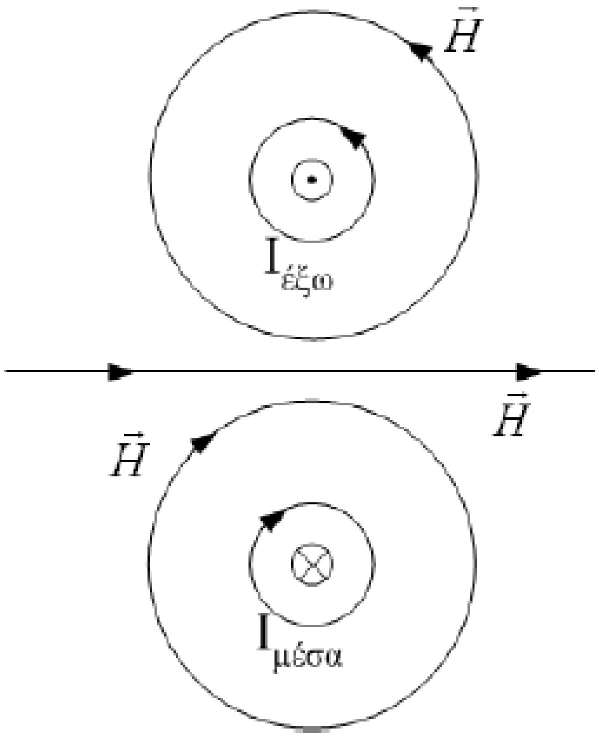
- ***Ο Νόμος του Ampere για ρευματικό στοιχείο***
  - Αγωγός με διατομή *Α* που διαρρέεται από ρεύμα

$$I = \int_S \vec{J} \bullet d\vec{s} = \oint \vec{H} \bullet d\vec{L}$$

Ομοιόμορφη
Πυκν. Ρεύματος

$$I = JA\left(Ampere\right)$$





Στατικά Μαγνητικά Πεδία

- ## *Μαγνητική Ροή και Πυκνότητα Μαγνητικής Ροής*

$$\Psi_m = \iint \mu\vec{H} \bullet d\vec{S} \;(webers)$$

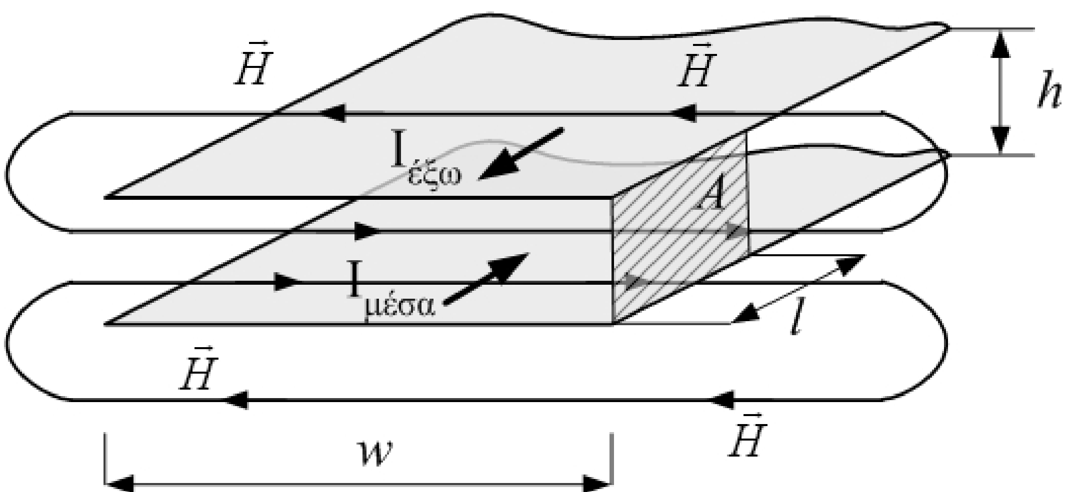
- Για επιφάνεια κάθετη στην ένταση του μαγνητικού πεδίου και ομοιόμορφη ένταση

$$hl = A$$

$$\Psi_m = \mu H h l \;(webers) \Rightarrow \Psi_m = \mu H A$$

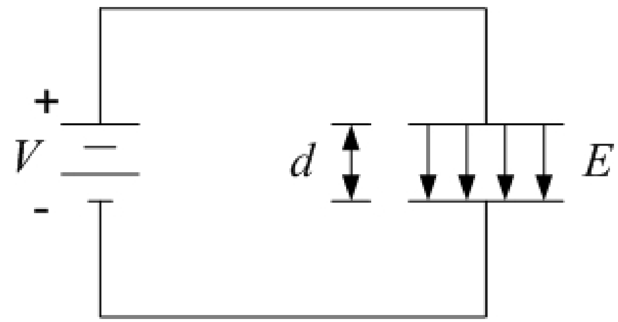
- Πυκνότητα μαγνητικής ροής: $\boxed{\vec{B} = \mu\vec{H}}$ (*Tesla*=*Weber*/*m*^{2})

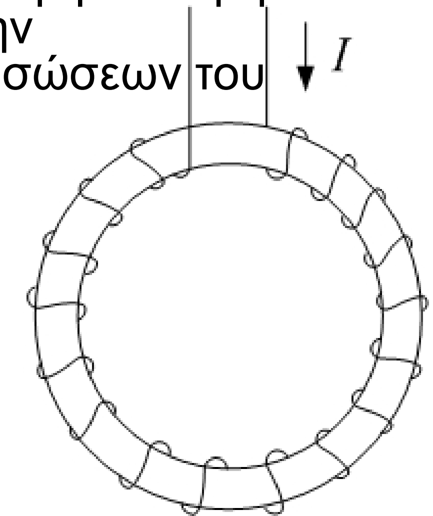
$$\Psi_m = \int_S \vec{B} \bullet d\vec{S} = \int_S B_n dS$$



Στατικά Μαγνητικά Πεδία

- ***Σχέση των Μεγεθών*** $\vec{E}, \vec{H}, \vec{D}, \vec{B}$
  - Υπάρχουν 2 θεωρήσεις:
    - Η μία θεωρεί τα μεγέθη *D* και *H* ανάλογα, όπως επίσης και τα *E* και *B* ανάλογα, με τη λογική ότι η διηλεκτρική μετατόπιση *D* συσχετίζεται άμεσα με τις πηγές της που είναι τα φορτία και είναι ανεξάρτητη από τις ιδιότητες του μέσου στο οποίο υπάρχουν τα φορτία. Παρόμοια η ένταση *H* συνδέεται άμεσα με τις πηγές της που είναι τα ρεύματα και είναι ανεξάρτητη από τις ιδιότητες του μέσου όπου αναπτύσσεται το μαγνητικό πεδίο.
    - Η δεύτερη θεώρηση αντιμετωπίζει τις εντάσεις *E* και *H* ανάλογα μεγέθη όπως επίσης και τα *D* και *B* ανάλογα μεγέθη. Αυτή η δεύτερη θεώρηση παρέχει ένα πολύ σημαντικό πλεονέκτημα στην ηλεκτρομαγνητική θεωρία που είναι η συμμετρία των εξισώσεων του Maxwell.





Στατικά Μαγνητικά Πεδία

- ***Οριακές Συνθήκες για τα Μαγνητικά Πεδία***
  - Σε πλήρη αναλογία με τα ηλεκτρικά πεδία, μπορούμε να δείξουμε ότι οι εφαπτομενικές συνιστώσες της έντασης *H* του μαγνητικού πεδίου είναι συνεχείς στη διαχωριστική επιφάνεια μεταξύ δύο διηλεκτρικών:

$$H_{t1} = H_{t2}$$

  - Ομοίως, για τις κάθετες συνιστώσες της πυκνότητας μαγνητικής ροής Β:

$$B_{n1} = B_{n2}$$

Στατικά Μαγνητικά Πεδία

- ***Μαγνητικό Διανυσματικό Δυναμικό***
  - Στην περίπτωση του μαγνητικού πεδίου μπορούμε να ορίσουμε ένα μαγνητικό δυναμικό του οποίου η διαφόριση στο χώρο να μας δίνει την πυκνότητα μαγνητικής ροής.
  - Οι ιδιότητες μιας τέτοιας συνάρτησης δυναμικού μπορούν να προκύψουν λαμβάνοντας υπόψη τις πηγές του μαγνητικού πεδίου που θεωρήσαμε ότι είναι τα ρευματικά στοιχεία.

$$\boxed{\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}}$$

$$d\vec{A} = \frac{\mu I d\vec{l}}{4\pi R} \Rightarrow \vec{A} = \int \frac{\mu I d\vec{l}}{4\pi R} \Rightarrow \vec{A} = \int_V \frac{\mu \vec{J} dV}{4\pi R}$$

Ανακεφαλαίωση

$$\vec{J} = \rho_v \vec{v}$$

$$i = \int \vec{J} \bullet d\vec{S}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{\Delta q} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{r}$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = \frac{Q}{4\pi r^2}\hat{r}$$

Νόμος Gauss $$\Psi_e = \oint_S \vec{D} \bullet d\vec{S} = \int_V \rho_v dV$$

(Βαθμωτό) Δυναμικό $$V = \frac{\mathrm{E}\rho\gamma o}{q} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon R}$$

$$E = -\nabla V$$

Θεώρημα Gauss $$\vec{\nabla} \bullet \vec{D} = div\vec{D} = \rho_v$$

Εξίσωση Poisson $$\nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\varepsilon}$$

Εξίσωση Laplace $$\nabla^2 V = 0$$

Νόμος του Ohm $$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

Νόμος του Ampere $$I = \int_S \vec{J} \bullet d\vec{s} = \oint \vec{H} \bullet d\vec{L}$$

$$\Psi_m = \mu H A$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$