Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Ασύρματες Επικοινωνίες

Ενότητα 1 : Εισαγωγικά στοιχεία Εφαρμοσμένων Μαθηματικών, Φυσικής και Κυκλωμάτων

Δημοσθένης Βουγιούκας (dvouyiou@aegean.gr)

Μόνιμος Επίκουρος Καθηγητής

Τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών & Επικοινωνιακών Συστημάτων

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα

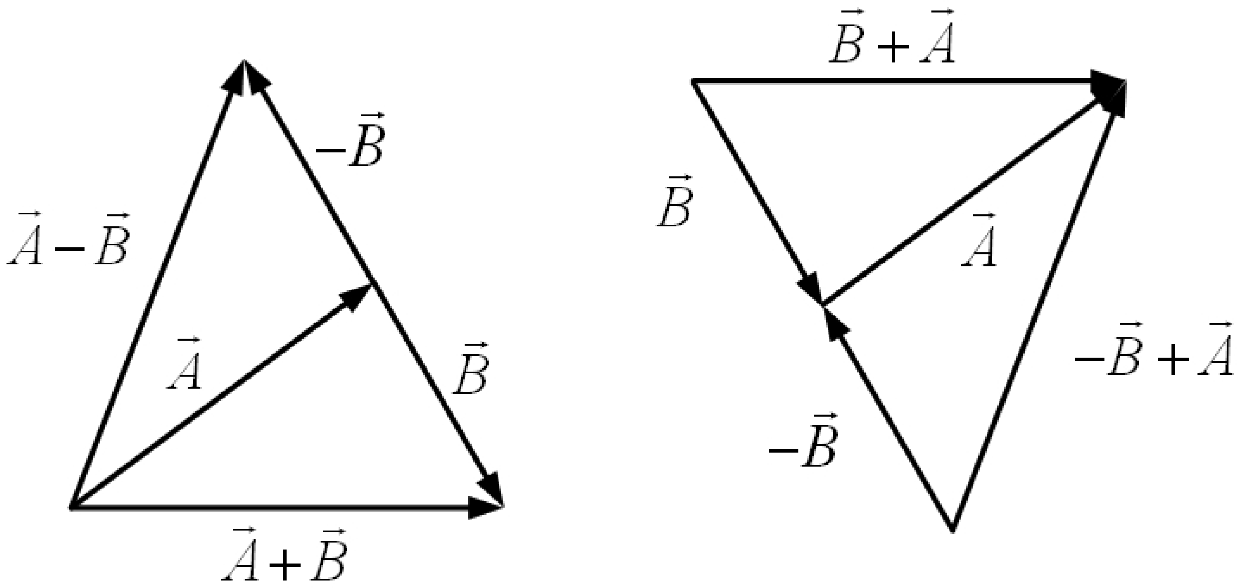
- Στοιχεία Διανυσματικής Ανάλυσης
- Συστήματα Συντεταγμένων
- Επικαμπύλια και Επιφανειακά Ολοκληρώματα
- Στοιχεία Κυκλωμάτων
- Ημιτονοειδής Μόνιμη Κατάσταση και Φασιθέτες

Στοιχεία Διανυσματικής Ανάλυσης

- ***Μεγέθη***
  - *Βαθμωτό* : Ένα μέγεθος που χαρακτηρίζεται μόνο από μέτρο και αλγεβρικό πρόσημο. Περιγράφεται δηλαδή από ένα απλό αριθμό.
    - Παραδείγματα : Μάζα, χρόνος, θερμοκρασία, έργο.
  - *Διάνυσμα* : Ένα μέγεθος που έχει κατεύθυνση και μέτρο.
    - Παραδείγματα : Δύναμη, ταχύτητα, μετατόπιση, επιτάχυνση.
  - *Πεδίο* : Αν σε κάθε σημείο μιας περιοχής υπάρχει μια αντίστοιχη τιμή μιας φυσικής συνάρτησης, η περιοχή καλείται πεδίο. Τα πεδία μπορεί να είναι Βαθμωτά ή Διανυσματικά ανάλογα με τη συνάρτηση. Αν η τιμή της συνάρτησης είναι βαθμωτό μέγεθος, τότε έχουμε βαθμωτό πεδίο.
    - Παραδείγματα Βαθμωτών Πεδίων : Η θερμοκρασία της ατμόσφαιρας, το ύψος της επιφάνειας της γης από τη θάλασσα.
    - Παραδείγματα Διανυσματικών Πεδίων : Η ταχύτητα του ανέμου στην ατμόσφαιρα, η δύναμη της βαρύτητας σε μια μάζα στο διάστημα, η δύναμη σε φορτισμένο σωματίδιο που βρίσκεται σε ένα ηλεκτρικό πεδίο.

Στοιχεία Διανυσματικής Ανάλυσης

- ***Άθροισμα & Διαφορά Δύο Διανυσμάτων***



Ισχύει η Αντιμεταθετική ιδιότητα, δηλαδή:

$$\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$$

$$\vec{A}-\vec{B}=-\vec{B}+\vec{A}$$

Στοιχεία Διανυσματικής Ανάλυσης

- ***Πολλαπλασιασμός ή Διαίρεση Διανύσματος με Βαθμωτό Μέγεθος***
  - Μπορούμε να πολλαπλασιάζουμε ή να διαιρούμε ένα διάνυσμα με βαθμωτό μέγεθος, μεταβάλλοντας το μέτρο του, αλλά όχι και την κατεύθυνσή του.

$$\vec{C} = a\vec{B} \qquad \text{ή} \qquad \vec{C} = \frac{\vec{B}}{a}$$

  - Δηλαδή προκύπτει ένα νέο διάνυσμα με την ίδια κατεύθυνση και μέτρο το γινόμενο (ή το πηλίκο) των μέτρων του βαθμωτού και του διανύσματος.

Στοιχεία Διανυσματικής Ανάλυσης

- ***Τρισδιάστατο Διάνυσμα***
  - Ένα τρισδιάστατο διάνυσμα περιγράφεται πλήρως από τις προβολές του στους άξονες *x*,*y*,*z*.

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{A}_z = A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}$$

  - όπου $\vec{A}_x, \vec{A}_y, \vec{A}_z$ οι συνιστώσες του διανύσματος $\vec{A}$, A_x, A_y, A_z, τα μέτρα των προβολών στους άξονες *x*,*y*,*z* και $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ τα μοναδιαία διανύσματα στην κατεύθυνση των αξόνων

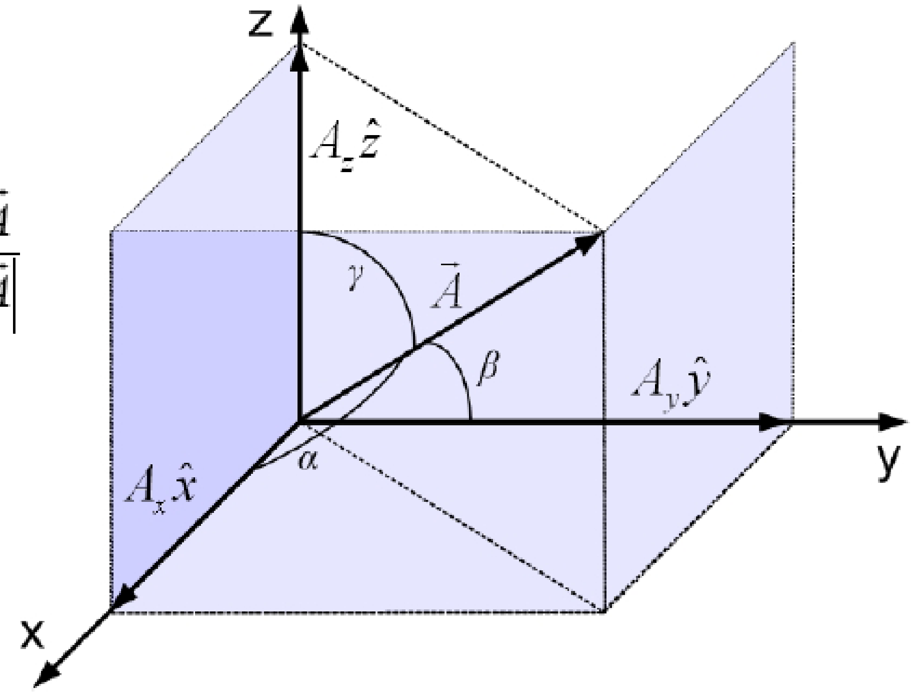
Στοιχεία Διανυσματικής Ανάλυσης

- ***Τρισδιάστατο Διάνυσμα***
  - Μέτρο

$$\left|\vec{A}\right| = A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

  - Μοναδιαίο Διάνυσμα

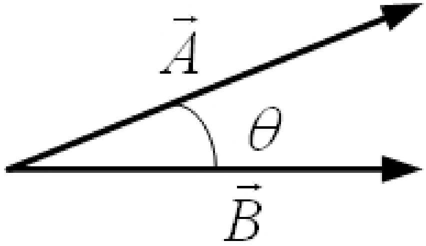
$$\hat{A} = \frac{A_x}{\left|\vec{A}\right|}\hat{x} + \frac{A_y}{\left|\vec{A}\right|}\hat{y} + \frac{A_z}{\left|\vec{A}\right|}\hat{z} = \frac{\vec{A}}{\left|\vec{A}\right|}$$



Στοιχεία Διανυσματικής Ανάλυσης

- ***Εσωτερικό Γινόμενο Διανυσμάτων ή Βαθμωτό Γινόμενο (scalar product ή dot product)***
  - Το εσωτερικό γινόμενο είναι βαθμωτό μέγεθος με μέτρο ίσο με το γινόμενο των μέτρων των διανυσμάτων επί το συνημίτονο της γωνίας που σχηματίζουν τα δύο διανύσματα.

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = AB\cos\theta$$



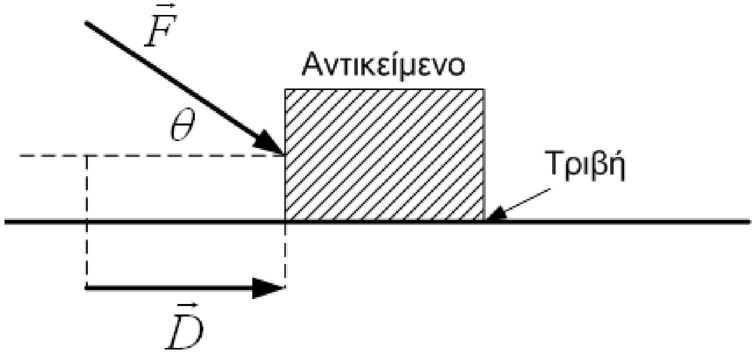
Στοιχεία Διανυσματικής Ανάλυσης

- ***Εσωτερικό Γινόμενο Διανυσμάτων ή Βαθμωτό Γινόμενο (scalar product ή dot product)***
  - Παράδειγμα Δύναμης - Απόστασης

$$\vec{A} = A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}$$

$$\vec{B} = B_x\hat{x} + B_y\hat{y} + B_z\hat{z}$$

$$\text{Ε}\rho\gamma o = \vec{F}\bullet\vec{D}$$



$$\begin{aligned}\vec{A}\bullet\vec{B} = {} & A_xB_x(\hat{x}\bullet\hat{x}) + A_xB_y(\hat{x}\bullet\hat{y}) + A_xB_z(\hat{x}\bullet\hat{z}) + \\ & + A_yB_x(\hat{y}\bullet\hat{x}) + A_yB_y(\hat{y}\bullet\hat{y}) + A_yB_z(\hat{y}\bullet\hat{z}) + \\ & + A_zB_x(\hat{z}\bullet\hat{x}) + A_zB_y(\hat{z}\bullet\hat{y}) + A_zB_z(\hat{z}\bullet\hat{z})\end{aligned}$$

$$\hat{x}\bullet\hat{x} = \hat{y}\bullet\hat{y} = \hat{z}\bullet\hat{z} = 1$$

$$\hat{x}\bullet\hat{y} = \hat{y}\bullet\hat{z} = \hat{z}\bullet\hat{x} = \hat{y}\bullet\hat{x} = \hat{z}\bullet\hat{y} = \hat{x}\bullet\hat{z} = 0$$

$$\boxed{\vec{A}\bullet\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}$$

Στοιχεία Διανυσματικής Ανάλυσης

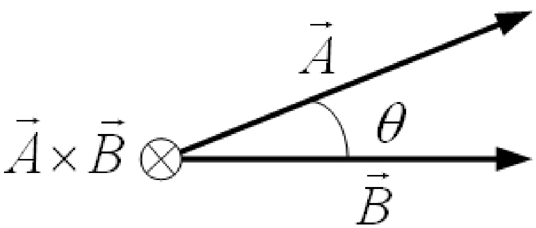
- ***Εξωτερικό Γινόμενο Διανυσμάτων ή Διανυσματικό Γινόμενο (vector product ή cross product)***
  - Είναι διάνυσμα του οποίου το μέτρο είναι το γινόμενο των μέτρων των δύο διανυσμάτων επί το ημίτονο της γωνίας που σχηματίζουν τα δύο διανύσματα, δηλαδή

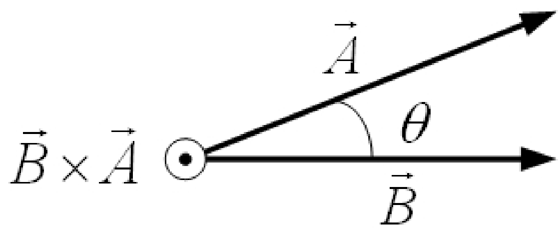
$$\left|\vec{A} \times \vec{B}\right| = AB \sin\theta$$

  - Η κατεύθυνση του διανύσματος είναι κάθετη στο επίπεδο που περιέχει τα δύο διανύσματα, ακολουθώντας το δεξιόστροφο κοχλία. Το μέτρο του εξωτερικού γινομένου είναι ουσιαστικά το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που έχει πλευρές τα δύο διανύσματα.

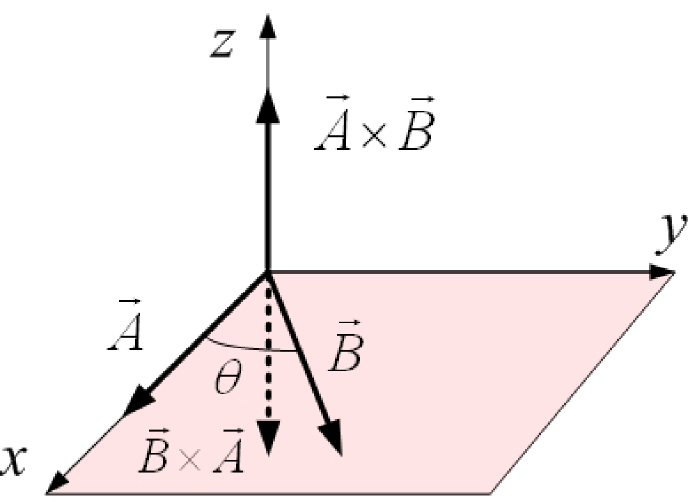
Στοιχεία Διανυσματικής Ανάλυσης

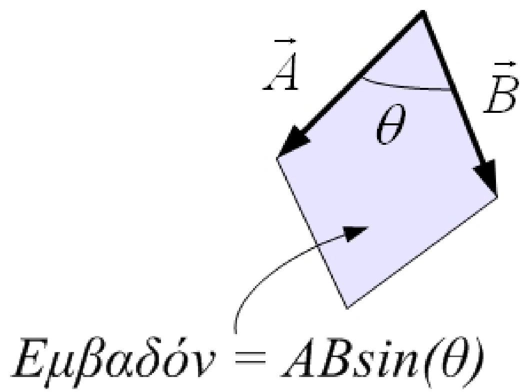
- ***Εξωτερικό Γινόμενο Διανυσμάτων ή Διανυσματικό Γινόμενο (vector product ή cross product)***





$$\vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A}$$





Δεν ισχύει η αντιμεταθετική, αλλά ισχύει η επιμεριστική

$$\left(\vec{A}+\vec{B}\right)\times\vec{C} = \vec{A}\times\vec{C}+\vec{B}\times\vec{C}$$

Στοιχεία Διανυσματικής Ανάλυσης

- ***Εξωτερικό Γινόμενο Διανυσμάτων ή Διανυσματικό Γινόμενο (vector product ή cross product)***

$$\vec{A}\times\vec{B} = A_x B_x(\hat{x}\times\hat{x}) + A_x B_y(\hat{x}\times\hat{y}) + A_x B_z(\hat{x}\times\hat{z}) +$$
$$+ A_y B_x(\hat{y}\times\hat{x}) + A_y B_y(\hat{y}\times\hat{y}) + A_y B_z(\hat{y}\times\hat{z}) +$$
$$+ A_z B_x(\hat{z}\times\hat{x}) + A_z B_y(\hat{z}\times\hat{y}) + A_z B_z(\hat{z}\times\hat{z})$$

$$\hat{x}\times\hat{x} = \hat{y}\times\hat{y} = \hat{z}\times\hat{z} = 0$$
$$\hat{x}\times\hat{y} = \hat{z} = -\hat{y}\times\hat{x}$$
$$\hat{y}\times\hat{z} = \hat{x} = -\hat{z}\times\hat{y}$$
$$\hat{z}\times\hat{x} = \hat{y} = -\hat{x}\times\hat{z}$$

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\vec{A}\times\vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y)\hat{x} + (A_z B_x - A_x B_z)\hat{y} + (A_x B_y - A_y B_x)\hat{z}}$$

Στοιχεία Διανυσματικής Ανάλυσης

- ***Διαφόριση – Ο Τελεστής Ανάδελτα*** $\vec{\nabla}$
  - Ο διαφορικός διανυσματικός τελεστής ανάδελτα $\vec{\nabla}$ ορίζεται ως:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z}$$

  - Υπάρχουν 3 διαφορετικές εφαρμογές ανάλογα με τον τύπο του γινομένου που εφαρμόζεται:
    - Η κλίση (grad V) → **Διανυσματική Συνάρτηση**
    - Η απόκλιση (div $\vec{A}$) → **Βαθμωτή Συνάρτηση**
    - Η περιστροφή ή στροβιλισμός (curl $\vec{A}$) ή (rot $\vec{A}$) → **Διανυσματική Συνάρτηση**

Στοιχεία Διανυσματικής Ανάλυσης

- ***Διαφόριση – Ο Τελεστής Ανάδελτα*** $\vec{\nabla}$
  - Η κλίση (grad V)

$$\vec{\nabla} V(x,y,z) = \frac{\partial V(x,y,z)}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial V(x,y,z)}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial V(x,y,z)}{\partial z}\hat{z} \quad = grad\ V$$

  - Η απόκλιση (div $\vec{A}$)

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{A}(x,y,z) = \frac{\partial A_x(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial A_y(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial A_z(x,y,z)}{\partial z} \quad = div\ \vec{A}$$

  - Η περιστροφή ή στροβιλισμός (curl $\vec{A}$) ή (rot $\vec{A}$)

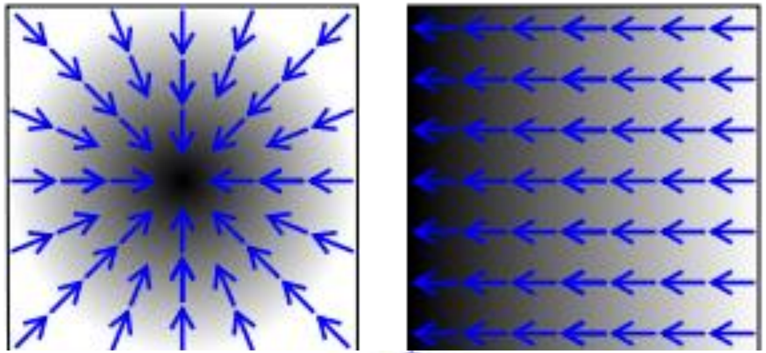
$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \\ \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{z} \quad = curl\ \vec{A}$$

Στοιχεία Διανυσματικής Ανάλυσης

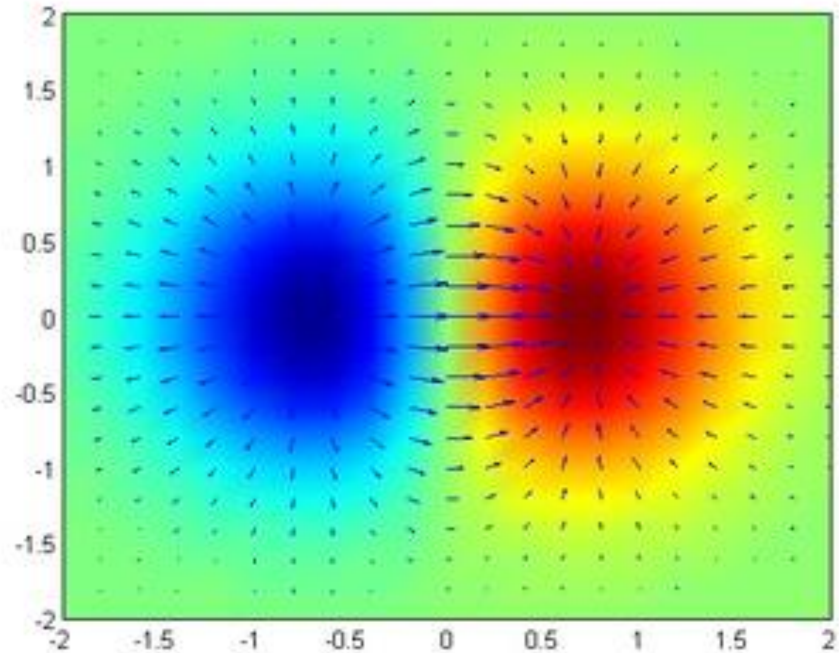
- ***Επεξήγηση των Τριών Γινομένων με τον Τελεστή Ανάδελτα***
  - Από την κλίση ενός βαθμωτού μεγέθους (π.χ. θερμοκρασία) προκύπτει ένα διανυσματικό μέγεθος με κατεύθυνση την κατεύθυνση της μέγιστης μεταβολής της θερμοκρασίας στο χώρο με τις τρεις επιμέρους συνιστώσες να υποδεικνύουν τη μεταβολή τους.
  - Από την απόκλιση (divergence ή div) ενός διανυσματικού πεδίου προκύπτει βαθμωτό πεδίο και φανερώνει αν το πεδίο αποκλίνει ή συγκλίνει σε ένα σημείο του χώρου. Συνδέεται με το ρυθμό μεταβολής πυκνότητας στον όγκο και την ύπαρξη εξερχόμενων ή εισερχόμενων ροών.
  - Από το στροβιλισμό ή περιστροφή ενός διανύσματος προκύπτει πάλι διανυσματικό μέγεθος που εξηγείται με τη χρήση του παραδείγματος των ρευστών.

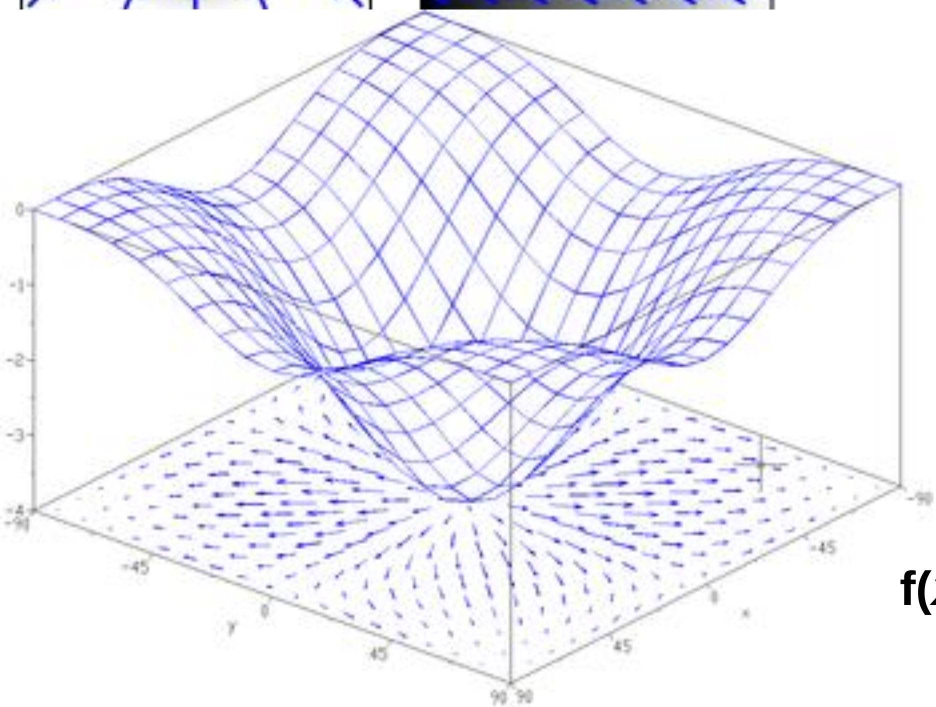
Στοιχεία Διανυσματικής Ανάλυσης

- ***Επεξήγηση της κλίσης***



$$f(x,y) = xe^{-x^2-y^2}$$



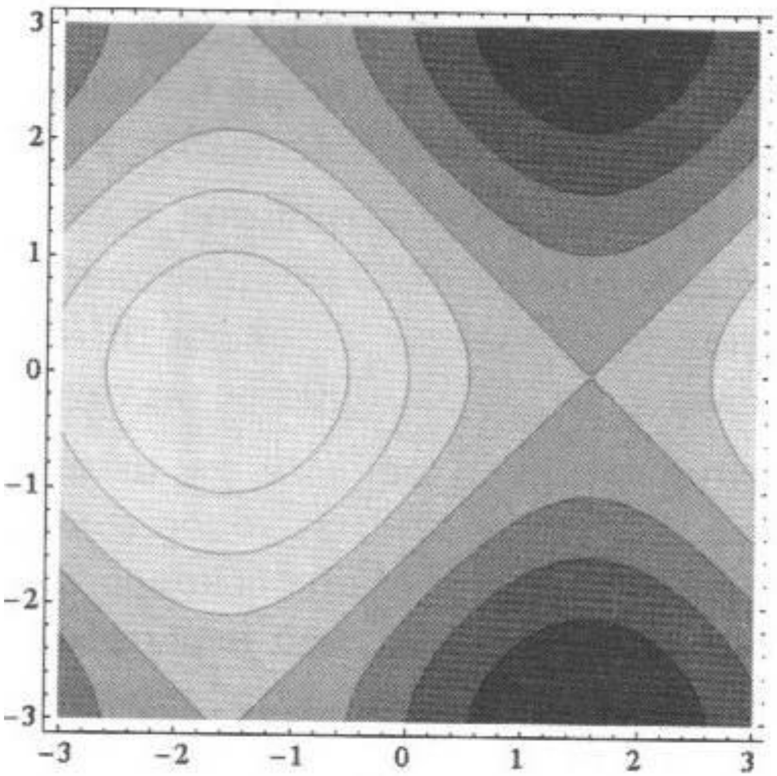


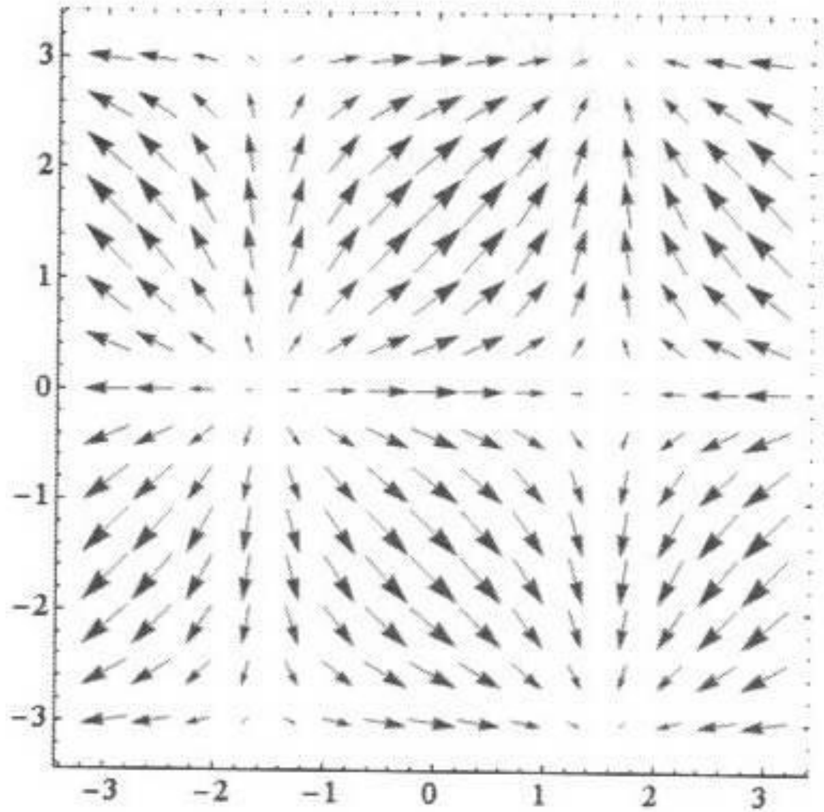
$$f(x,y) = -(\cos^2 x + \cos^2 y)^2$$

Στοιχεία Διανυσματικής Ανάλυσης

- ***Επεξήγηση της απόκλισης***

$$A(x,y)=\cos(x)\hat{x}+\sin(y)\hat{y}$$

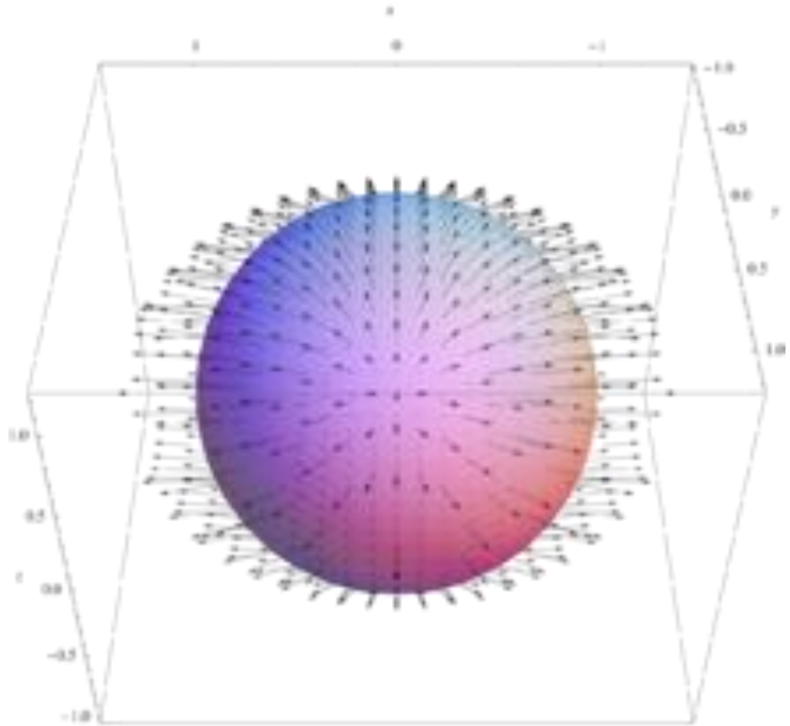




$$\nabla\cdot A(x,y)=-\sin(x)+\cos(y)$$

Στοιχεία Διανυσματικής Ανάλυσης

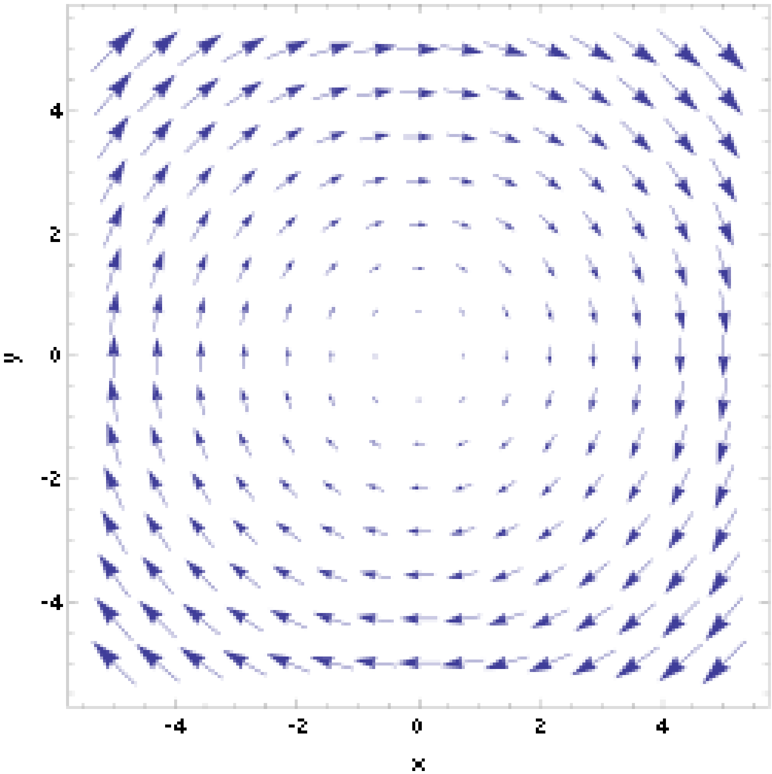
- ***Επεξήγηση της απόκλισης***

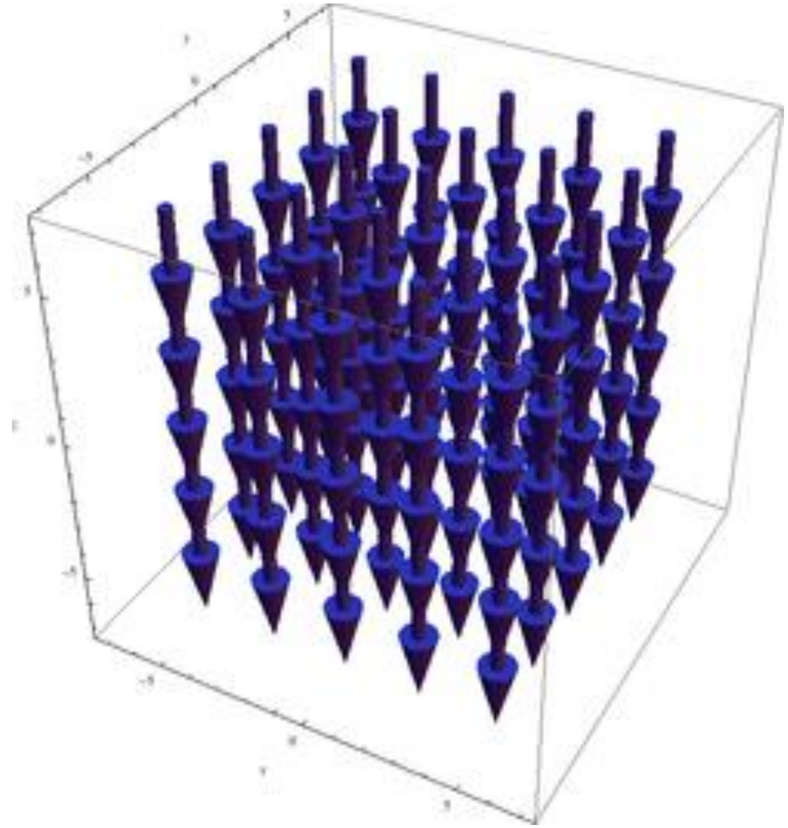


Στοιχεία Διανυσματικής Ανάλυσης

- ***Επεξήγηση του στροβιλισμού***

$$\mathbf{F}(x, y, z) = y\hat{\boldsymbol{x}} - x\hat{\boldsymbol{y}}.$$



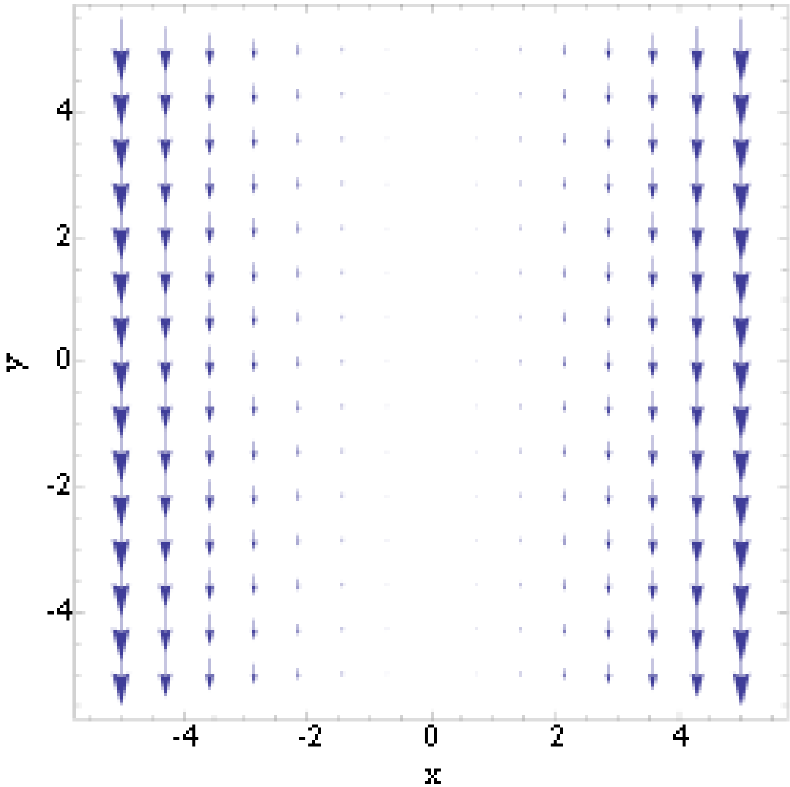


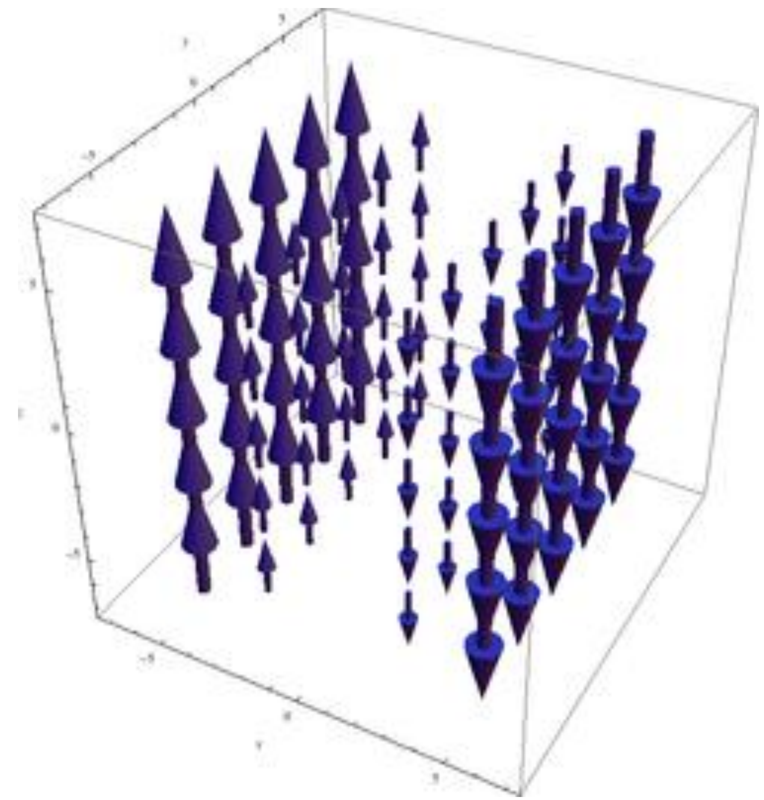
$$\nabla \times \mathbf{F} = 0\hat{\boldsymbol{x}} + 0\hat{\boldsymbol{y}} + \left[\frac{\partial}{\partial x}(-x) - \frac{\partial}{\partial y}y\right]\hat{\boldsymbol{z}} = -2\hat{\boldsymbol{z}}$$

Στοιχεία Διανυσματικής Ανάλυσης

- ***Επεξήγηση του στροβιλισμού***

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -x^2 \hat{\boldsymbol{y}}.$$



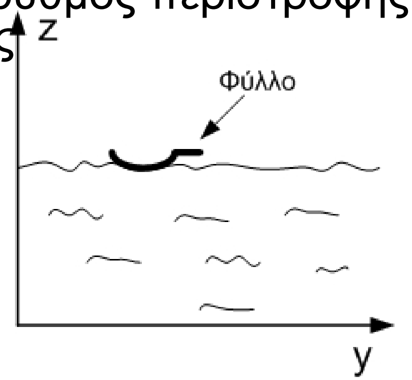


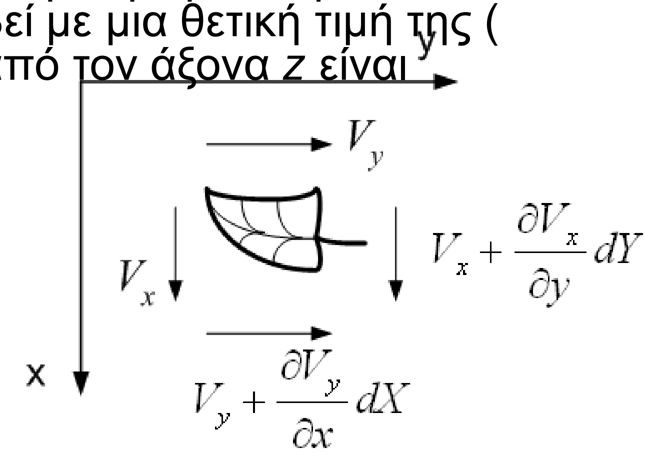
$$\nabla \times \mathbf{F} = 0\hat{\boldsymbol{x}} + 0\hat{\boldsymbol{y}} + \frac{\partial}{\partial x}(-x^2)\hat{\boldsymbol{z}} = -2x\hat{\boldsymbol{z}}.$$

Στοιχεία Διανυσματικής Ανάλυσης

- ***Επεξήγηση των Τριών Γινομένων με τον Τελεστή Ανάδελτα***
  - Αν η ταχύτητα στην επιφάνεια είναι αποκλειστικά στην κατεύθυνση *y* και είναι και ομοιόμορφη σε όλη την επιφάνεια, τότε το φύλλο απλά θα μετατοπίζεται στην κατεύθυνση της ροής.
  - Αν όμως υπάρχουν κάποιοι στρόβιλοι ή δύνες στη ροή, δηλαδή μεταβαλλόμενες συνιστώσες, V_x, V_y, ως προς τις κατευθύνσεις *y*, *x* , αντίστοιχα, τότε επιπλέον της μετατόπισης το φύλλο θα υπόκειται και σε μια περιστροφική κίνηση. *Ο ρυθμός περιστροφής ή γωνιακή ταχύτητα σε κάθε σημείο, είναι ένα μέτρο του στροβιλισμού του διανύσματος της ταχύτητας του ρευστού στο εν λόγω σημείο.*
  - Μια περιστροφή γύρω από τον άξονα *z* συνεπάγεται μια συνιστώσα του διανύσματος του στροβιλισμού στην κατεύθυνση *z*. Μια θετική τιμή αυτής της συνιστώσας σημαίνει περιστροφή του φύλλου από τον άξονα *x* προς τον άξονα *y* . Μια θετική τιμή της ($\partial V_x / \partial y$) θα τείνει να περιστρέψει το φύλλο από τον άξονα *y* προς τον άξονα *x*. Το αντίθετο θα συμβεί με μια θετική τιμή της ($\partial V_y / \partial x$). Άρα ο ρυθμός περιστροφής γύρω από τον άξονα *z* είναι ανάλογος της διαφοράς

$$\left(\vec{\nabla}\times\vec{V}\right)_z = \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}$$





Στοιχεία Διανυσματικής Ανάλυσης

- ***Διαφόριση – Ο Τελεστής Laplace*** ∇^2
  - Ορίζεται ως:

$$\nabla^2 = \vec{\nabla} \bullet \vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

  - Εφαρμόζοντας τον τελεστή σε βαθμωτό μέγεθος προκύπτει βαθμωτό μέγεθος

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

  - Εφαρμόζοντάς τον σε διανυσματικό μέγεθος προκύπτει διανυσματικό μέγεθος

$$\nabla^2 \vec{A} = \nabla^2 A_x \hat{x} + \nabla^2 A_y \hat{y} + \nabla^2 A_z \hat{z}$$

Στοιχεία Διανυσματικής Ανάλυσης

- ***Χρήσιμες Ταυτότητες***

$$div\ \ curl\ \ \vec{A} = \vec{\nabla}\bullet\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right) = 0$$

$$curl\ \ grad\ \ V = \vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}V\right) = 0$$

$$div\ \ grad\ \ V = \vec{\nabla}\bullet\left(\vec{\nabla}V\right) = \nabla^2 V$$

$$\vec{A}\bullet\left(\vec{B}\times\vec{C}\right) = \vec{C}\bullet\left(\vec{A}\times\vec{B}\right) = \vec{B}\bullet\left(\vec{C}\times\vec{A}\right)$$

$$\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right) = \left(\vec{A}\bullet\vec{C}\right)\vec{B} - \left(\vec{A}\bullet\vec{B}\right)\vec{C}$$

$$\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\times\vec{C} = \left(\vec{A}\bullet\vec{C}\right)\vec{B} - \left(\vec{B}\bullet\vec{C}\right)\vec{A}$$

$$\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right) \neq \left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\times\vec{C}$$

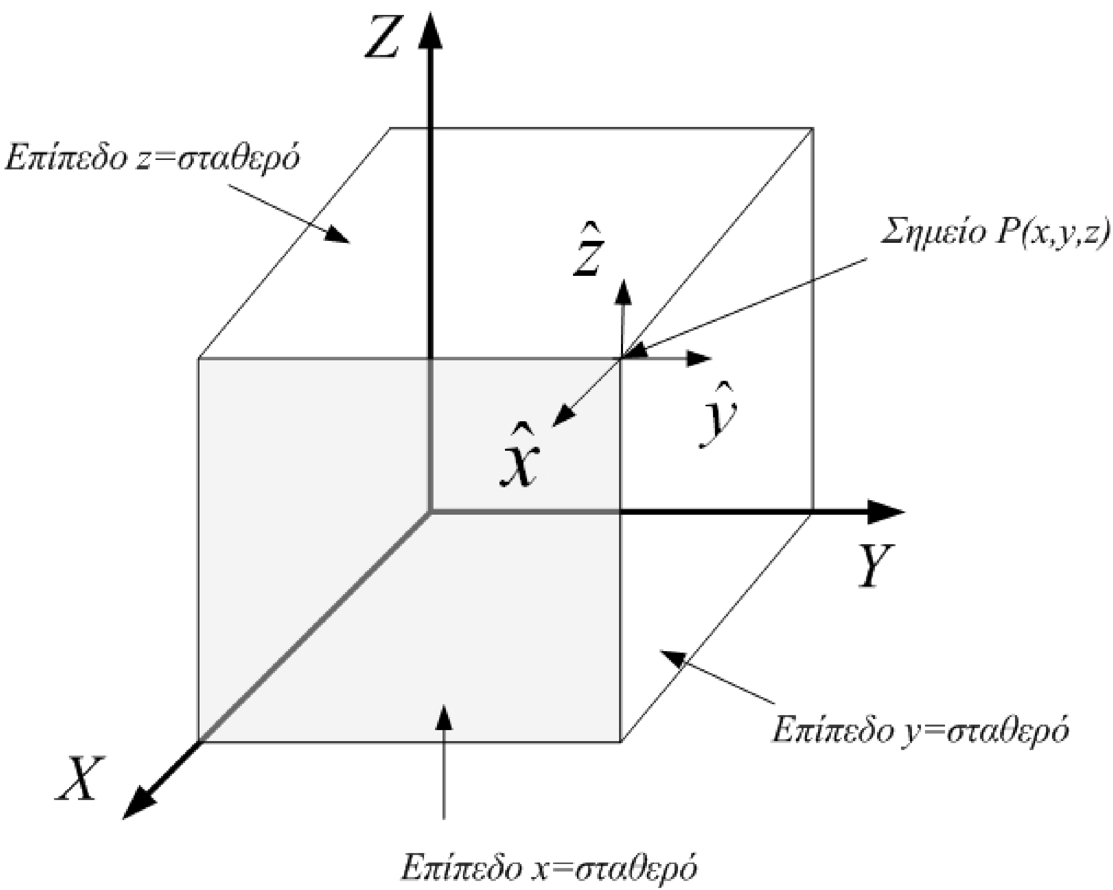
Συστήματα Συντεταγμένων

- ***Καρτεσιανό Σύστημα***
  - Στοιχειώδης απόσταση

$$dL = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

  - Στοιχειώδης όγκος

$$dV = dxdydz$$



Συστήματα Συντεταγμένων

- ***Σφαιρικό Σύστημα***
  - Διάνυσμα

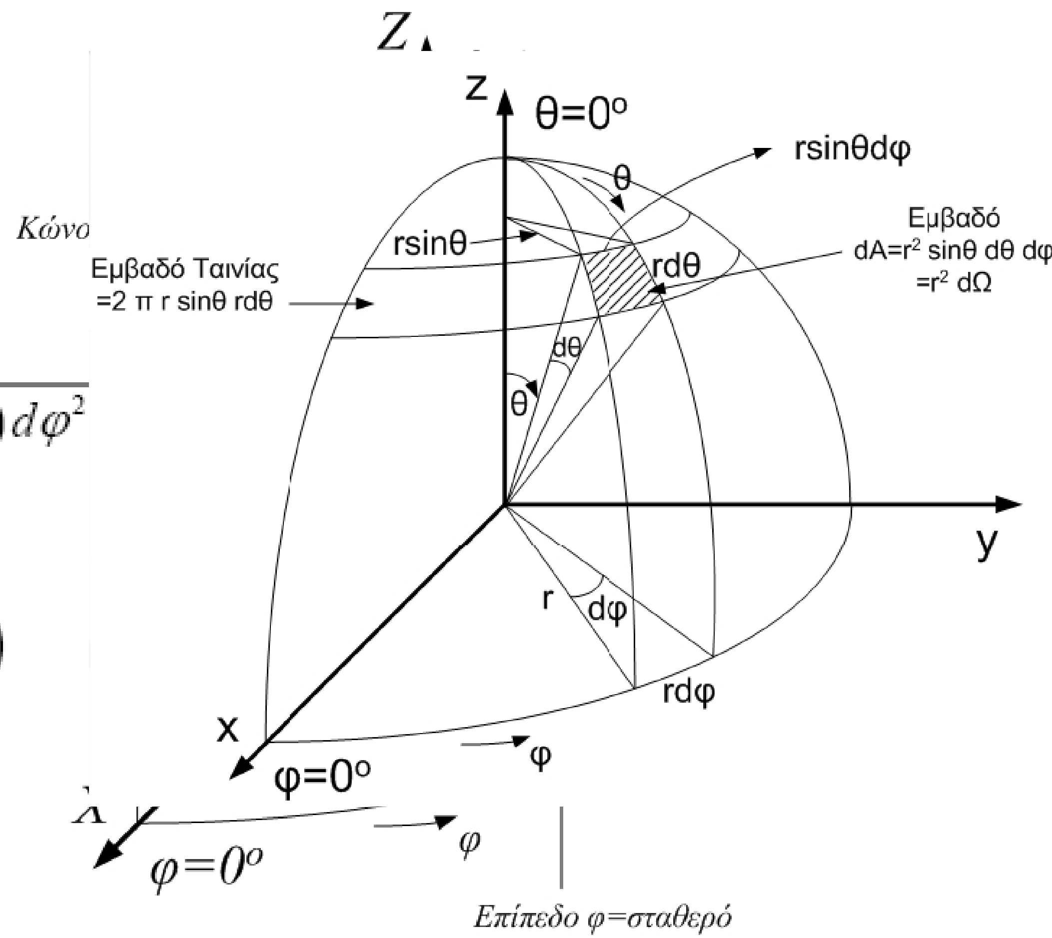
$$\vec{A} = A_r\hat{r} + A_\theta\hat{\theta} + A_\varphi\hat{\varphi}$$

  - Στοιχειώδης απόσταση

$$dL = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\varphi^2}$$

  - Στοιχειώδης όγκος

$$dV = (dr)(rd\theta)(r\sin(\theta)d\varphi)$$



Συστήματα Συντεταγμένων

- ***Τελεστές Διαφόρισης στο Σφαιρικό Σύστημα***

$$\vec{\nabla} V=\hat{r}\frac{\partial V}{\partial r}+\hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}+\hat{\varphi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}$$

$$\vec{\nabla}\bullet\vec{A}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta A_\theta\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{A}=\hat{r}\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta A_\varphi\right)-\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right]+\hat{\theta}\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}-\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\varphi\right)\right]+$$

$$+\hat{\varphi}\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\theta\right)-\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]$$

$$\nabla^2 V=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}$$

$$\nabla^2\vec{A}=\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\bullet\vec{A}\right)-\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{A}$$

- ***Κυλινδρικό Σύστημα***
  - Διάνυσμα

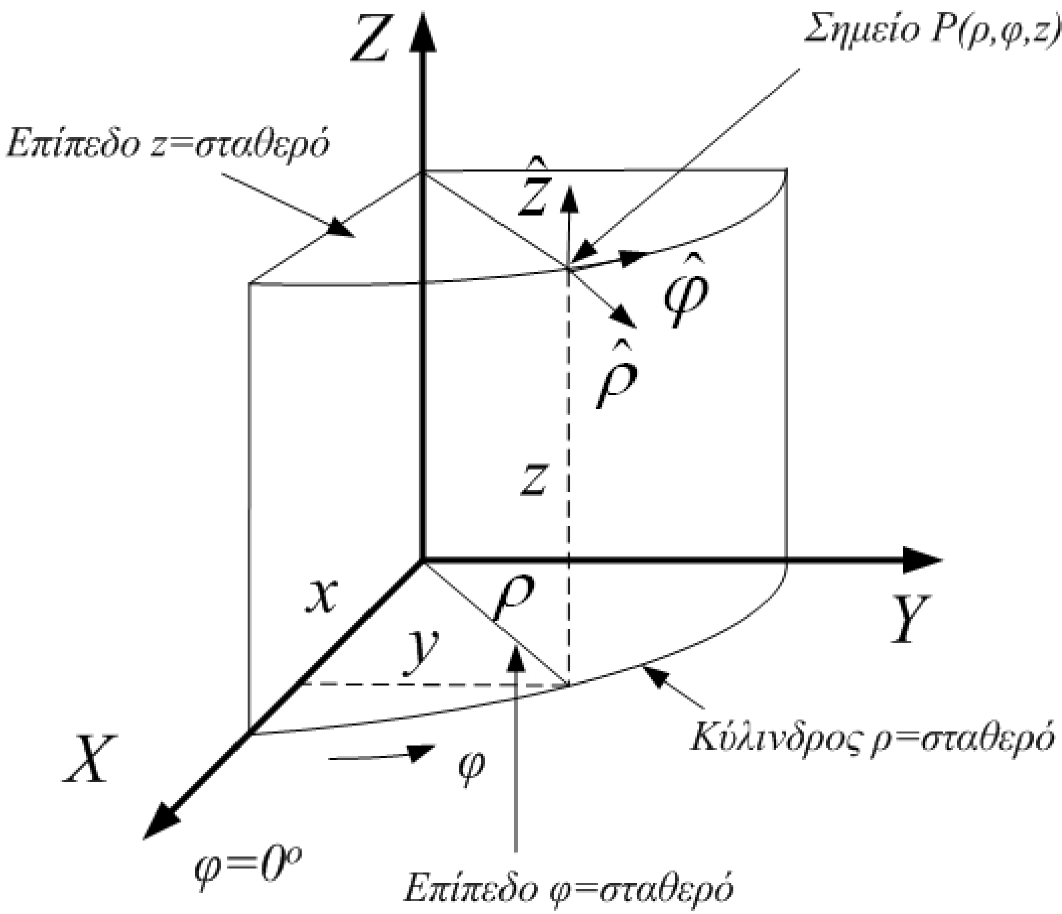
$$\vec{A} = A_\rho \hat{\rho} + A_\varphi \hat{\varphi} + A_z \hat{z}$$

  - Στοιχειώδης απόσταση

$$dL = \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2}$$

  - Στοιχειώδης όγκος

$$dV = (dr)(r d\varphi)(dz)$$



Συστήματα Συντεταγμένων

- ***Τελεστές Διαφόρισης στο Κυλινδρικό Σύστημα***

$$\vec{\nabla}V = \hat{\rho}\frac{\partial V}{\partial \rho} + \hat{\varphi}\frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \varphi} + \hat{z}\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla}\bullet\vec{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho A_\rho\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

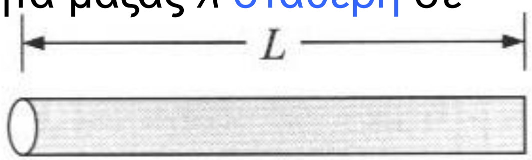
$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \hat{\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right) + \hat{\varphi}\left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right) + \hat{z}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(\rho A_\varphi\right)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi}\right)$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

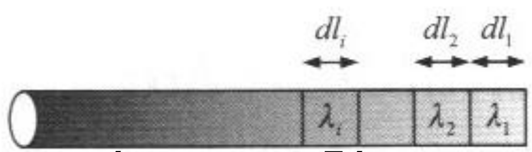
$$\nabla^2\vec{A} = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\bullet\vec{A}\right) - \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{A}$$

Επικαμπύλιο Ολοκλήρωμα

- Τα επικαμπύλια ολοκληρώματα χρησιμοποιούνται ευρέως στη φυσική και στις επιστήμες του μηχανικού.
- Βαθμωτή Συνάρτηση
  - Θεωρούμε ένα σύρμα μήκους *L*, με γραμμική πυκνότητα μάζας *λ* σταθερή σε όλο το μήκος του. Τότε: $\text{M}\alpha\zeta\alpha = \lambda L$



  - Αν η πυκνότητα είναι μεταβαλλόμενη κατά το μήκος του, τότε θα πρέπει να διαιρέσουμε το σύρμα σε μικρά τμήματα, ώστε η πυκνότητα να θεωρείται σταθερή. Τότε: $\text{M}\alpha\zeta\alpha = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i dl_i$



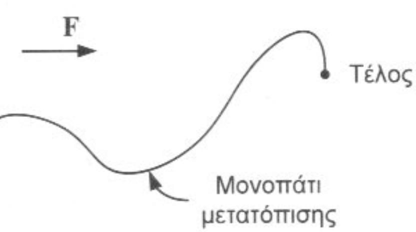
  - Αν θεωρήσουμε ότι το μήκος του στοιχειώδους τμήματος τείνει στο μηδέν, τότε το άθροισμα γίνεται επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της βαθμωτής συνάρτησης λ(l):

$$\text{M}\alpha\zeta\alpha = \int_0^L \lambda(l)dl$$

Επικαμπύλιο Ολοκλήρωμα

- Διανυσματική Συνάρτηση
  - Έστω ότι υπάρχει ένα ηλεκτρικό πεδίο μέσα στο οποίο θέλουμε να μετακινήσουμε ένα θετικό δοκιμαστικό φορτίο. Η μετακίνηση αυτή συνεπάγεται την κατανάλωση έργου από τη δύναμη.
  - Αν η δύναμη $\vec{F}$ και η μετατόπιση $d\vec{l}$ είναι συγγραμικά διανύσματα, τότε το έργο είναι: $W = |\vec{F}||d\vec{l}|$
  - Αν δεν είναι συγγραμμικά πρέπει να υπολογίσουμε τη συνιστώσα της δύναμης στην κατεύθυνση της μετατόπισης, δηλ. $W = \vec{F}d\vec{l} = |\vec{F}||d\vec{l}|\cos\theta$
  - Αν η γωνία δεν είναι σταθερή, πρέπει να χωρίσουμε τη μετατόπιση σε στοιχειώσεις μετατοπίσεις και να υπολογίσουμε το στοιχειώδες έργο.

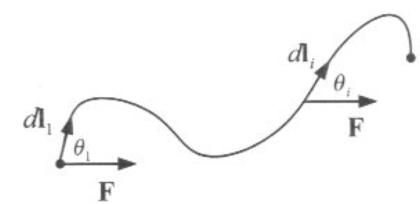
$$dW_i = \vec{F}d\vec{l}_i \qquad W = \sum_{i=1}^{N} dW_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}d\vec{l}_i \quad d\vec{l} \to 0 \quad W = \int_P^B \vec{F}d\vec{l} = \int_A^B \vec{F}d\vec{l}$$



  - Αν η δύναμη δεν είναι ομοιόμορφη, το μέτρο και η κατεύθυνση μεταβάλλονται.

$$\text{Κυκλοφορια} = \oint_P \vec{A}d\vec{l}$$

Διανυσματικό Πεδίο

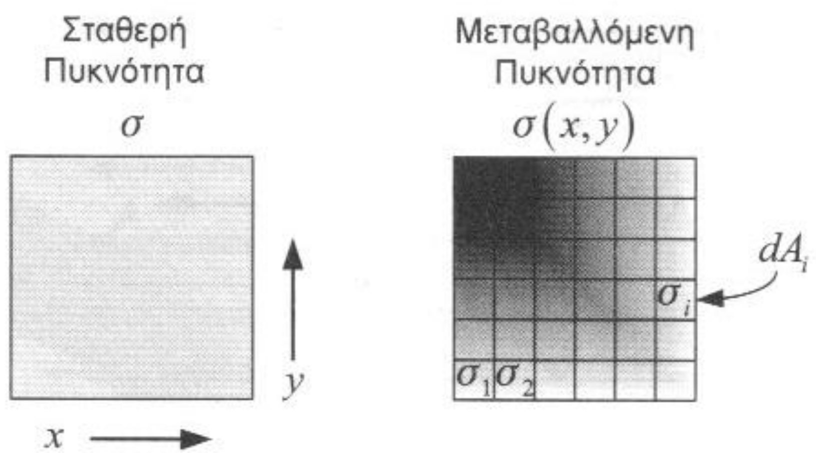


Επιφανειακό Ολοκλήρωμα

- Βαθμωτή Συνάρτηση
  - Θεωρούμε επιφάνεια με εμβαδόν *A*, με επιφανειακή πυκνότητα μάζας σ σταθερή σε όλη την επιφάνεια. Τότε: $\mathrm{M}\alpha\zeta\alpha = \sigma A$
  - Αν η πυκνότητα είναι μεταβαλλόμενη κατά το μήκος του σ(x,y), τότε θα πρέπει να διαιρέσουμε την επιφάνεια σε μικρά τμήματα dA_i ώστε η πυκνότητα να θεωρείται σταθερή.

    Τότε: $\mathrm{M}\alpha\zeta\alpha = \sum_{i=1}^{N} \sigma_i dA_i$
  - Αν θεωρήσουμε ότι η στοιχειώδης επιφάνεια τείνει στο μηδέν, τότε το άθροισμα γίνεται επιφανειακό ολοκλήρωμα της βαθμωτής συνάρτησης σ(x,y):

$$N \to \infty \qquad \mathrm{M}\alpha\zeta\alpha = \int_A \sigma(x,y)dA$$



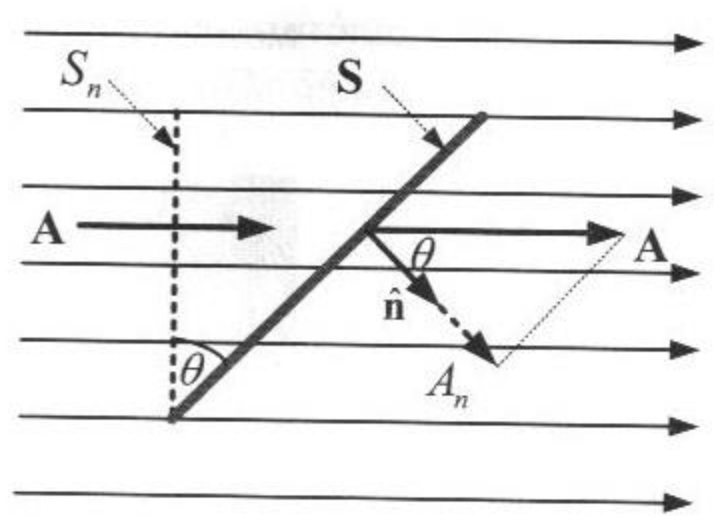
Επιφανειακό Ολοκλήρωμα

- Διανυσματική Συνάρτηση
  - Χρησιμοποιείται η έννοια της ροής ενός διανυσματικού πεδίου μέσα από μία επιφάνεια. Η επιφάνεια $\vec{S}$ είναι διάνυσμα με μέτρο ίσο με το εμβαδόν της επιφάνειας και κατεύθυνση κάθετη στην επιφάνεια που ορίζεται από το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{n}$
  - Αν το πεδίο $\vec{A}$ είναι ομοιόμορφο σε όλη την επιφάνεια η οποία επιπλέον είναι και κάθετη στην κατεύθυνση του πεδίου, τότε η ροή ορίζεται ως: $\Phi = |\vec{A}||\vec{S}|$
  - Αν το πεδίο $\vec{A}$ είναι ομοιόμορφο, αλλά η επιφάνεια δεν είναι κάθετη στο πεδίο, τότε η ροή υπολογίζεται με τη συνιστώσα του πεδίου που είναι κάθετη στην επιφάνεια:

$$\Phi = \vec{A}\cdot\vec{S} = |\vec{A}||\vec{S}|\cos\theta = \vec{A}\cdot\hat{n}|\vec{S}| = A_n|\vec{S}| = |\vec{A}|S_n$$

$$A_n = \vec{A}\cdot\hat{n} = |\vec{A}|\cos\theta$$

$$S_n = S\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = |\vec{S}|\cos\theta$$



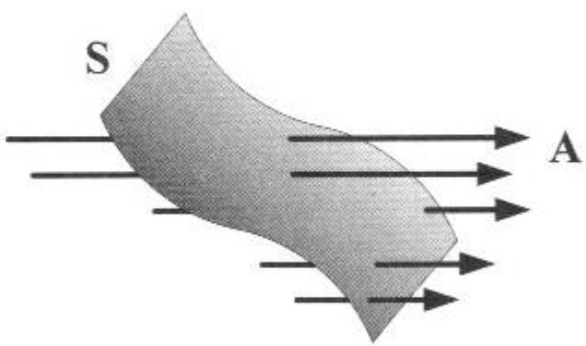
Επιφανειακό Ολοκλήρωμα

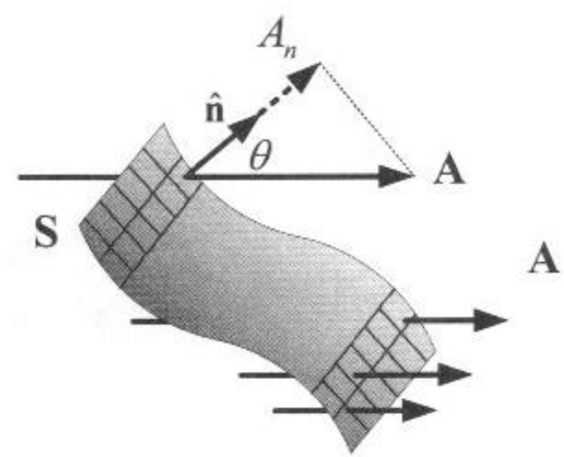
- Διανυσματική Συνάρτηση
  - Στην πράξη τα πεδία δεν είναι χωρικά ομοιόμορφα και οι επιφάνειες δεν είναι επίπεδες.
  - Πρέπει να χωρίσουμε την επιφάνεια σε στοιχειώσεις επιφάνειες $d\vec{S}_i$ οι οποίες έχουν διαφορετικό μοναδιαίο $\hat{n}_i$
  - Για να υπολογίσουμε τη ροή του πεδίο μέσα από τη στοιχειώδη επιφάνεια πρέπει να προβάλουμε το πεδίο $\vec{A}_i$ στο μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{n}_i$
  - Η συνολική ροή είναι: $\Phi = \sum_{i=1}^{N} \vec{A}_i d\vec{S}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{A}_i \cdot \hat{n} dS_i$

$$\Phi = \int_S \vec{A}_i d\vec{S} = \int_S \vec{A}_i \cdot \hat{n} dS$$

$d\vec{S}_i \to 0$

$$\Phi = \oint_S \vec{A}_i d\vec{S} = \oint_S \vec{A}_i \cdot \hat{n} dS$$





Κυκλοφορία και Ροή Διανυσματικού Πεδίου

- Το διάνυσμα αυτό μπορεί να αναλυθεί σε τρεις συνιστώσες, μία κάθετη και δύο εφαπτομενικές συνιστώσες οι οποίες συμβολίζονται αντίστοιχα με τους δείκτες n, t_1, t_2.
- Το αποτέλεσμα της δράσης της κάθετης συνιστώσας είναι η εξερχόμενη ροή από την επιφάνεια, ενώ των εφαπτομενικών συνιστωσών είναι η κυκλοφορία γύρω από κλειστές γραμμές.
  - Ροή διαμέσου Ανοιχτής Επιφάνειας:

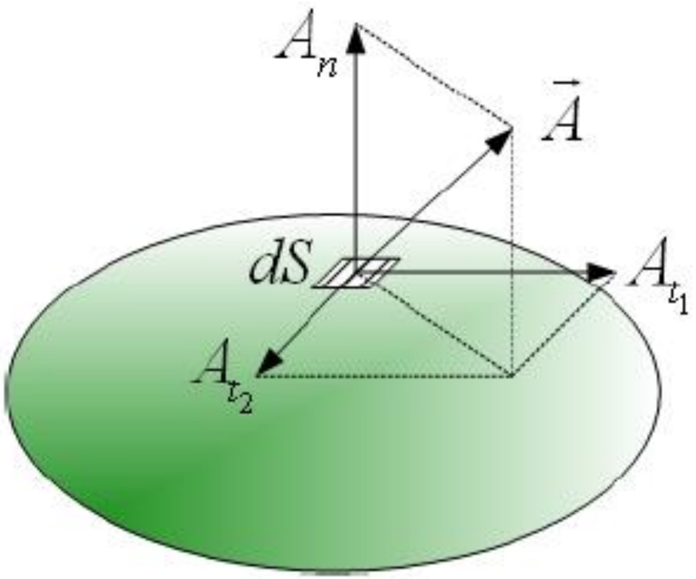
$$\int A_n dS = \int \vec{A} \bullet d\vec{S}$$

  - Ροή διαμέσου Κλειστής Επιφάνειας:

$$\oint_S A_n dS = \oint_S \vec{A} \bullet d\vec{S}$$

  - Κυκλοφορία σε κλειστή γραμμή:

$$\oint_l A_t dl = \oint_l \vec{A} \bullet d\vec{l}$$



Στοιχεία Κυκλωμάτων

- ***Αντίσταση***
  - Η αντίσταση είναι το ηλεκτρικό στοιχείο το οποίο καταναλώνει ενέργεια υπό μορφή θερμότητας.
  - Το αντίστροφο της αντιστάσεως είναι η αγωγιμότητα η οποία έχει μονάδες (*ohm*$^{-1}$=*siemens*=*mho*)
  - Νόμος Ohm

$$v(t) = i(t)R$$

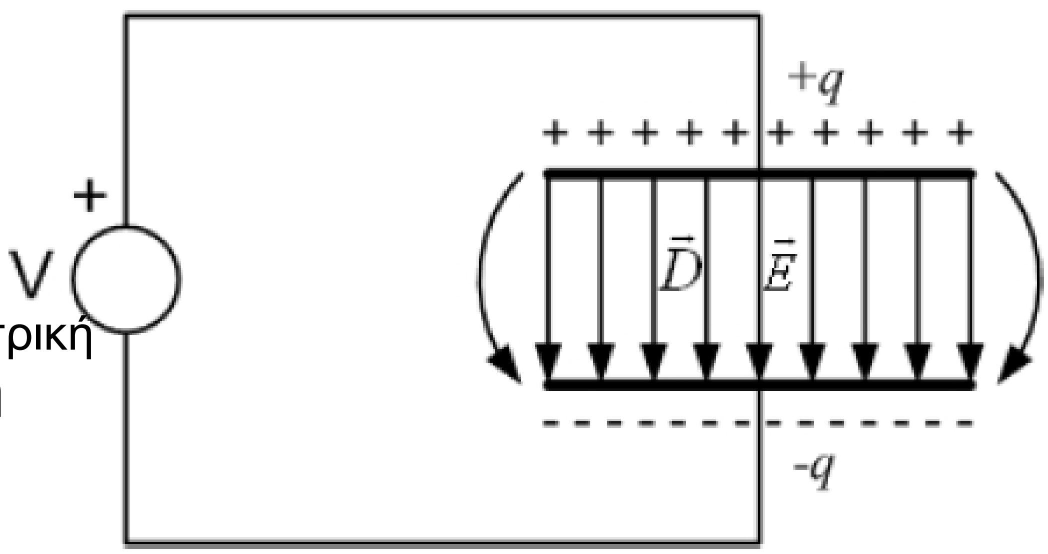
Στοιχεία Κυκλωμάτων

- ***Πυκνωτής***
  - Ο πυκνωτής ή στοιχείο χωρητικότητας είναι εκείνο το στοιχείο που συντελεί στην αποθήκευση ηλεκτρικής ενέργειας λόγω του ηλεκτρικού φορτίου που υπάρχει στις αγώγιμες επιφάνειες που αποτελούν τον οπλισμό του.

$$q = Cv \qquad \vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

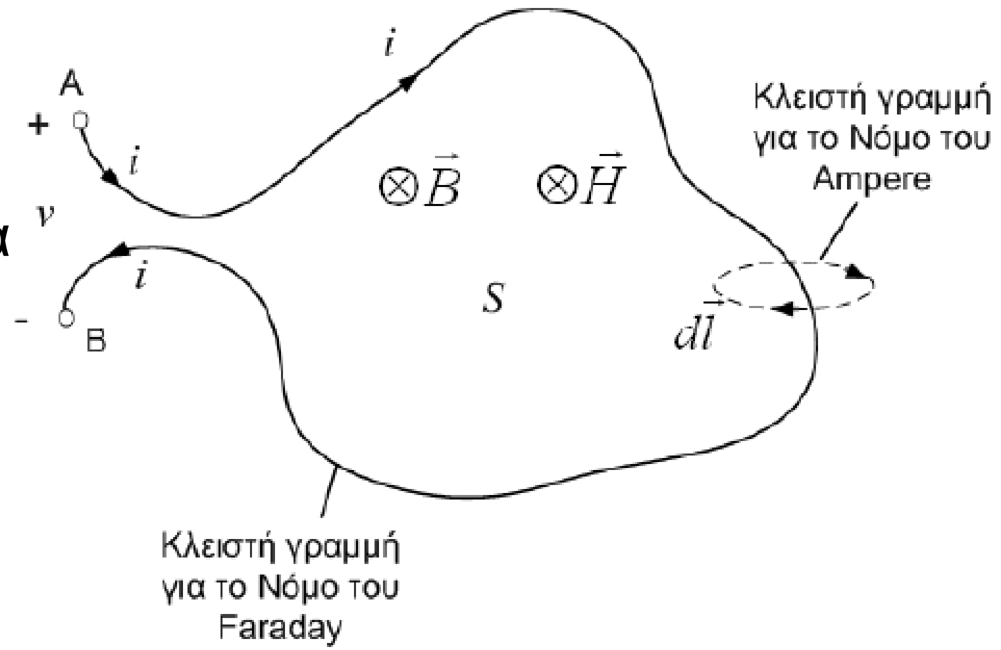
$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} \Rightarrow i(t) = C\frac{dv}{dt}$$

$\vec{E}$ η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου μετρούμενη σε (*Volt/m*), $\vec{D}$ η διηλεκτρική μετατόπιση σε (*Coulomb/m*^{2}) και $\boldsymbol{\varepsilon}$ η διηλεκτρική σταθερά του υλικού μετρούμενη σε (*Farad/m*).



Στοιχεία Κυκλωμάτων

- ***Πηνίο ή Στοιχείο Αυτεπαγωγής***
  - Το πηνίο είναι το στοιχείο εκείνο που συντελεί στην αποθήκευση μαγνητικής ενέργειας λόγω της μαγνητικής ροής.
- Το μαγνητικό πεδίο δημιουργεί μια μαγνητική ροή και κατά συνέπεια μια πυκνότητα μαγνητικής ροής.



Στοιχεία Κυκλωμάτων

- ## *Πηνίο ή Στοιχείο Αυτεπαγωγής*
  - Πυκνότητα Μαγνητικής Ροής: $\boxed{\vec{B} = \mu \vec{H}}$
    - όπου $\vec{B}$ η πυκνότητα μετρούμενη σε *Weber/m*^{2} =*Volt·sec/m*^{2}, $\vec{H}$ η ένταση μετρούμενη σε (*Ampere/m*) και ***μ*** η μαγνητική διαπερατότητα μετρούμενη σε (*Henry/m* = *Weber/Ampere·m*).
  - Νόμος του Ampere: $\boxed{\oint \vec{H} \bullet d\vec{l} = i}$
  - Μαγνητική Ροή: $\boxed{\Psi_m = Li}$
    - όπου ***L*** είναι ο συντελεστής αυτεπαγωγής του πηνίου
  - Νόμος του Faraday: $\boxed{v(t) = \dfrac{d\Psi_m}{dt}} \Longrightarrow v(t) = L\dfrac{di}{dt}$

Ημιτονοειδής Μόνιμη Κατάσταση και Φασιθέτες

- Όταν αναφερόμαστε σε δίκτυα που βρίσκονται στην ημιτονοειδή μόνιμη κατάσταση εννοούμε ότι:
  - Όλες οι διεγέρσεις είναι ημιτονοειδείς της ίδιας συχνότητας
  - Οι διεγέρσεις έχουν εφαρμοσθεί στο μακρινό παρελθόν και άρα αποκρίσεις που οφείλονται σε αρχικές συνθήκες έχουν μηδενιστεί.
- Επειδή για κάθε δίκτυο που αποτελείται από ιδανικές αντιστάσεις, ιδανικούς πυκνωτές και ιδανικά πηνία οι εξισώσεις που περιγράφουν τη λειτουργία του καταλήγουν σε μια συνήθη γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές, το πρόβλημα στην ημιτονοειδή μόνιμη κατάσταση είναι η εύρεση μιας ειδικής λύσης όταν οι διεγέρσεις είναι ημιτονοειδείς και της ίδιας συχνότητας.
- Ένα σημαντικό αποτέλεσμα της μαθηματικής θεωρίας των διαφορικών εξισώσεων είναι ότι μια συνήθης γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές και με ημιτονοειδή διέγερση, αν έχει λύση μόνιμης κατάστασης, δηλαδή η απόκριση δεν απειρίζεται για $t \to \infty$, τότε η λύση είναι ημιτονοειδούς μορφής και της ίδιας συχνότητας με τη διέγερση.

Ημιτονοειδής Μόνιμη Κατάσταση και Φασιθέτες

Ημιτονοειδείς Διεγέρσεις Συνεχούς Χρόνου

- Ημιτονοειδές Σήμα:

$$u(t) = U_{\max}\cos(2\pi f_o t + \varphi_u) \qquad -\infty < t < \infty$$

- όπου U_{max} το *πλάτος*, f_o η *συχνότητα*, φ_u η *αρχική φάση ή σταθερά φάσης*, ω*t* η *χρονική μεταβολή της φάσης* και $(\omega t + \varphi_u)$ η *στιγμιαία φάση*.
- Ένα ημιτονοειδές σήμα είναι περιοδικό με περίοδο $T_o = 1/f_o$, δηλαδή $u(t+T_o) = u(t)$.
- Πολλές φορές αντί της συχνότητας f_o χρησιμοποιείται η κυκλική συχνότητα ω_o (rad/sec), οπότε:

$$u(t) = U_{\max}\cos(\omega_o t + \varphi_u)$$

Ημιτονοειδής Μόνιμη Κατάσταση και Φασιθέτες

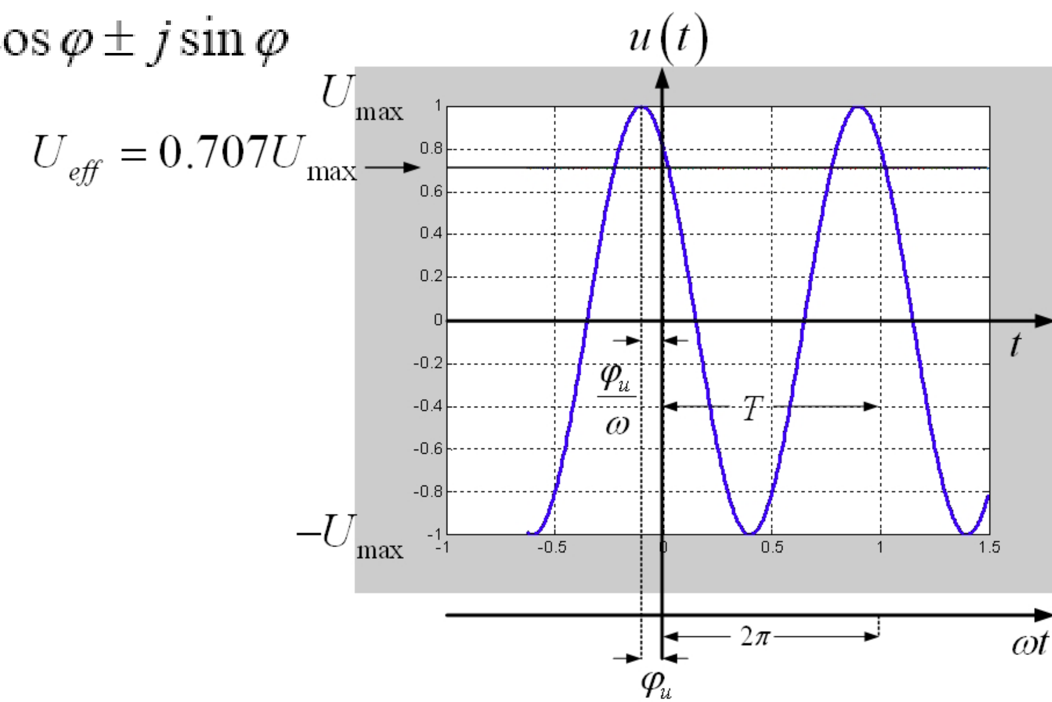
Ημιτονοειδείς Διεγέρσεις Συνεχούς Χρόνου

- Ενεργός τιμή ή ενδεικνύμενη τιμή ή rms τιμή:

$$U_{eff} = U_{rms} = \frac{U_{\max}}{\sqrt{2}} = 0.707 U_{\max}$$

- Τύπος του Euler:

$$e^{\pm j\varphi} = \cos\varphi \pm j\sin\varphi$$



$$\cos\varphi = \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2}$$

$$\sin\varphi = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j}$$

Ημιτονοειδής Μόνιμη Κατάσταση και Φασιθέτες

- ***Ημιτονοειδείς Διεγέρσεις Συνεχούς Χρόνου***
  - Μιγαδικός αριθμός C:

$$C = a + jb = R \cdot \mathrm{e}^{j\vartheta}$$

$$R = |C| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\vartheta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

  - όπου α = Re[C] το πραγματικό μέρος του C και b = Im[C] το φανταστικό μέρος του C .
  - Παραστατικός μιγάς ή φασιθέτης (phasor):

$$\tilde{U} = U_{\max} e^{j\varphi_u}$$

Ημιτονοειδής Μόνιμη Κατάσταση και Φασιθέτες

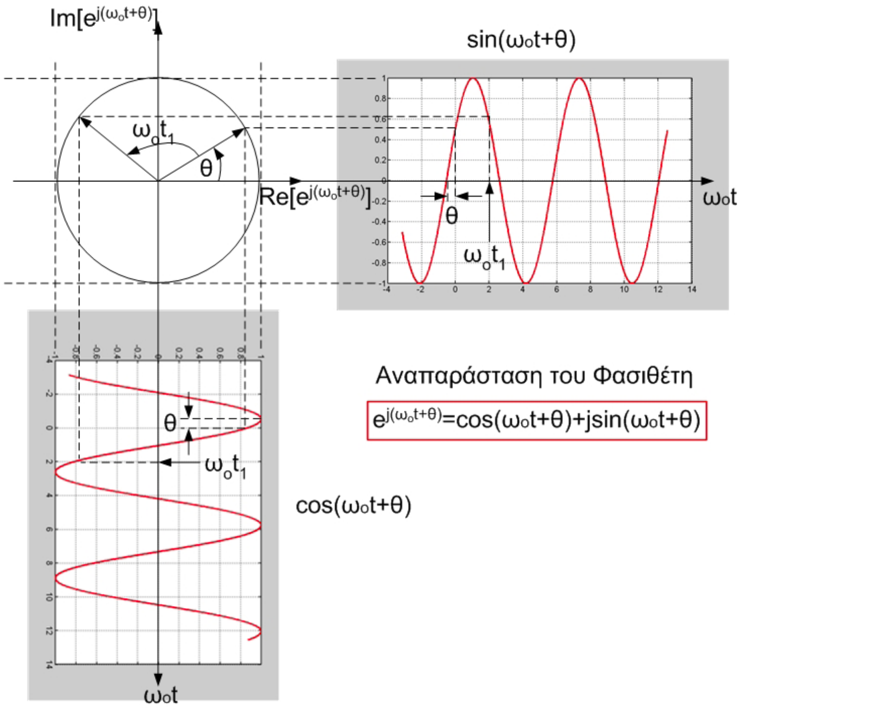
- ***Ημιτονοειδείς Διεγέρσεις Συνεχούς Χρόνου***
  - Ο φασιθέτης μαζί με την κυκλική συχνότητα ω_o καθορίζουν πλήρως το ημιτονοειδές μέγεθος

$$u(t) = U_{\max}\cos(\omega_o t + \varphi_u) = U_{\max}\operatorname{Re}\left[e^{j(\omega_o t + \varphi_u)}\right]$$
$$= U_{\max}\operatorname{Re}\left[e^{j\omega_o t}e^{j\varphi_u}\right] = \operatorname{Re}\left[U_{\max}e^{j\varphi_u}e^{j\omega_o t}\right]$$
$$= \operatorname{Re}\left[\tilde{U}e^{j\omega_o t}\right]$$

$$Ae^{j(\omega_o t + \theta)} = A\cos(\omega_o t + \theta) + jA\sin(\omega_o t + \theta)$$

- ***Ημιτονοειδείς Διεγέρσεις Συνεχούς Χρόνου***
  - Το γινόμενο του φασιθέτη με την εκθετική συνάρτηση $e^{j\omega_o t}$, αναπαρίσταται γραφικά από ένα περιστρεφόμενο διάνυσμα με μέτρο ίσο με το μέτρο του μιγαδικού.
  - Η περιστροφή γίνεται με γωνιακή ταχύτητα ίση με την κυκλική συχνότητα του ημιτονοειδούς, αντίθετα με τη φορά του ρολογιού.

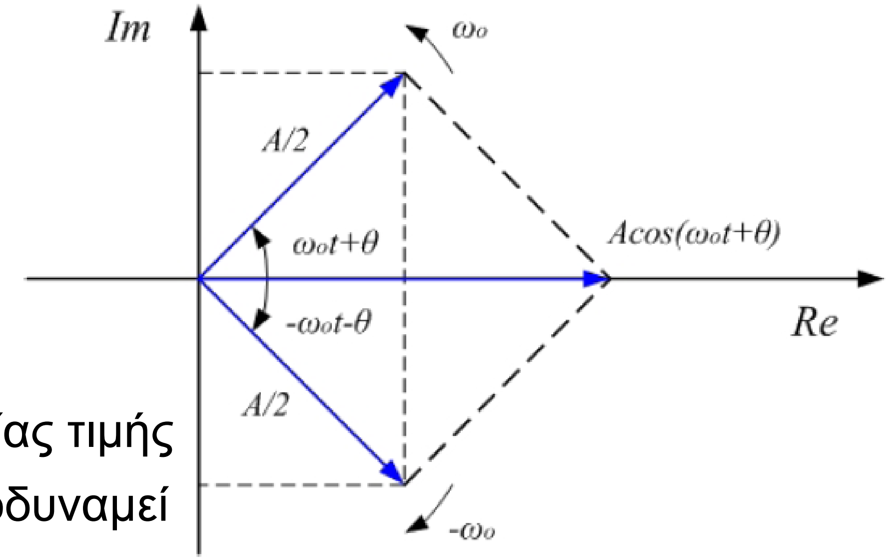
$$Ae^{j(\omega_o t+\theta)} = A\cos(\omega_o t+\theta) + jA\sin(\omega_o t+\theta)$$



Ημιτονοειδής Μόνιμη Κατάσταση και Φασιθέτες

- ***Ημιτονοειδείς Διεγέρσεις Συνεχούς Χρόνου***
  - Θετική και Αρνητική Συχνότητα

$$A\cos\left(\omega_o t+\theta\right)=\frac{A}{2}\left\{e^{j(\omega_o t+\theta)}+e^{j(-\omega_o t-\theta)}\right\}$$



  - Η χρονική παραγώγιση της στιγμιαίας τιμής μιας ημιτονοειδούς συνάρτησης ισοδυναμεί με πολλαπλασιασμό του φασιθέτη της συνάρτησης με τον παράγοντα (jω)

$$\frac{du(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\left\{\mathrm{Re}\left[\tilde{U}e^{j\omega t}\right]\right\}=\mathrm{Re}\left[\left(j\omega\tilde{U}\right)e^{j\omega t}\right]$$

Ημιτονοειδής Μόνιμη Κατάσταση και Φασιθέτες

- ***Ημιτονοειδής Απόκριση Γραμμικών Συστημάτων στη Μόνιμη Κατάσταση***
  - Η σχέση που συνδέει τις στιγμιαίες τιμές της τάσης και του ρεύματος στον αντιστάτη είναι: $u(t)=Ri(t)$
  - Στην ημιτονοειδή μόνιμη κατασταση ισχύει:

$$\left.\begin{array}{l} u(t)=\mathrm{Re}\left[\tilde{U}e^{j\omega t}\right] \\ i(t)=\mathrm{Re}\left[\tilde{I}e^{j\omega t}\right] \end{array}\right\} \Rightarrow \tilde{U}e^{j\omega t}=R\tilde{I}e^{j\omega t} \Rightarrow \tilde{U}=R\tilde{I} \Rightarrow \tilde{I}=\frac{\tilde{U}}{R}$$

  - Για τον πυκνωτή:

$$i(t)=C\frac{du(t)}{dt} \Rightarrow \tilde{I}e^{j\omega t}=C\frac{d}{dt}\left(\tilde{U}e^{j\omega t}\right)=j\omega C\tilde{U}e^{j\omega t} \Rightarrow \tilde{I}=j\omega C\tilde{U} \Rightarrow \tilde{U}=\frac{1}{j\omega C}\tilde{I}$$

  - Για το πηνίο:

$$u(t)=L\frac{di(t)}{dt} \Rightarrow \tilde{U}e^{j\omega t}=L\frac{d}{dt}\left(\tilde{I}e^{j\omega t}\right)=j\omega L\tilde{I}e^{j\omega t} \Rightarrow \tilde{U}=j\omega L\tilde{I} \Rightarrow \tilde{I}=\frac{1}{j\omega L}\tilde{U}$$

Ημιτονοειδής Μόνιμη Κατάσταση και Φασιθέτες

- ***Σχέσεις Τάσης – Ρεύματος για τα βασικά στοιχεία***

Στοιχείο Συστήματος	Σχέση Τάσης-Ρεύματος	Ημιτονοειδής Μόνιμη Κατάσταση
Αντίσταση	$u(t) = Ri(t)$	$\tilde{U} = R\tilde{I} \Rightarrow \tilde{I} = \frac{\tilde{U}}{R}$
Πυκνωτής	$i(t) = C\frac{du(t)}{dt}$	$\tilde{I} = j\omega C\tilde{U} \Rightarrow \tilde{U} = \frac{1}{j\omega C}\tilde{I}$
Πηνίο	$u(t) = L\frac{di(t)}{dt}$	$\tilde{U} = j\omega L\tilde{I} \Rightarrow \tilde{I} = \frac{1}{j\omega L}\tilde{U}$

Φασιθέτης (phasor) $\tilde{U} = U_{\max} e^{j\varphi_u}$

Διαφορική Λύση $\xrightarrow[\left(\frac{d}{dt}\right)]{j\omega}$ Αλγεβρική Λύση

Ημιτονοειδής Μόνιμη Κατάσταση και Φασιθέτες

- ***Σύνθετη Μιγαδική Αντίσταση***

$$\tilde{U} = \tilde{Z}\tilde{I}$$

$$\tilde{I} = \tilde{Y}\tilde{U}$$

  - όπου $\tilde{Z}$ η *σύνθετη μιγαδική αντίσταση* *(complex impedance)* και $\tilde{Y}$ η *σύνθετη μιγαδική αγωγιμότητα* *(complex admittance) οι* οποίες ορίζονται αντίστοιχα ως ο λόγος των φασιθετών τάσης (ρεύματος) και ρεύματος (τάσης) σε ένα στοιχείο, για ημιτονοειδή μόνιμη κατάσταση.
  - Η σύνθετη αντίσταση εξαρτάται γενικά από τη συχνότητα, δηλαδή

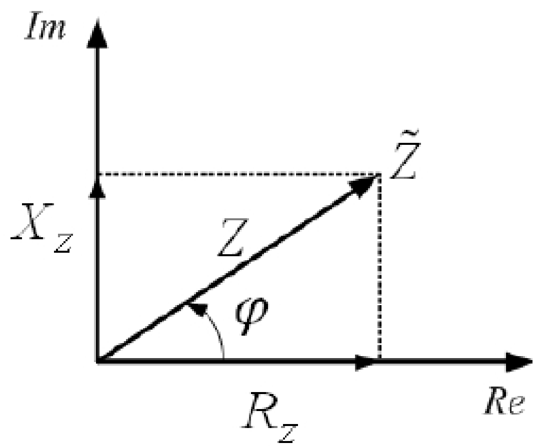
$$\tilde{Z} = \tilde{Z}(j\omega)$$

- ***Σύνθετη Μιγαδική Αντίσταση***
  - Σύνθετη αντίσταση αντιστάτη: $\tilde{Z} = R$
  - Σύνθετη μιγαδική αντίσταση πυκνωτή: $\tilde{Z} = \frac{1}{j\omega C} = \frac{-j}{\omega C}$
  - Σύνθετη μιγαδική αντίσταση πηνίου: $\tilde{Z} = j\omega L$

$$\tilde{Z} = \frac{\tilde{U}}{\tilde{I}} = \frac{U_{\max}}{I_{\max}} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = \frac{U_{eff}}{I_{eff}} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = Ze^{j\varphi} = R_Z + jX_Z$$

Αντίσταση: $R_Z = \mathrm{Re}\left[\tilde{Z}\right] = Z\cos\varphi$

Αντίδραση: $X_Z = \mathrm{Im}\left[\tilde{Z}\right] = Z\sin\varphi$



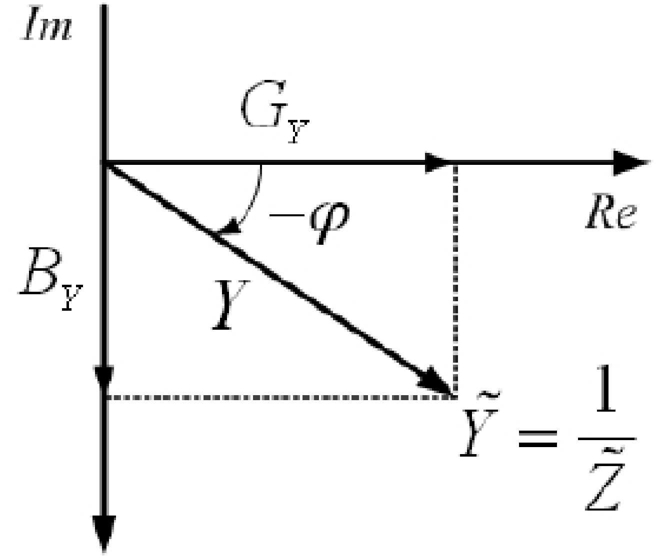
- ***Σύνθετη Μιγαδική Αγωγιμότητα***

$$\tilde{Y} = \frac{1}{\tilde{Z}} = \frac{\tilde{I}}{\tilde{U}} = \frac{I_{\max}}{U_{\max}} e^{j(\varphi_i - \varphi_u)} = \frac{I_{eff}}{U_{eff}} e^{j(\varphi_i - \varphi_u)} = Ye^{-j\varphi} = G_Y + jB_Y$$

$$Y = \left|\tilde{Y}\right| = \sqrt{G_Y^2 + B_Y^2}$$

Αγωγιμότητα: $G_Y = \mathrm{Re}\left[\tilde{Y}\right] = Y\cos\varphi$

Δεκτικότητα: $B_Y = \mathrm{Im}\left[\tilde{Y}\right] = -Y\sin\varphi$



- ***Σύνθετη Μιγαδική Αγωγιμότητα***
  - Αν η διαφορά φάσης φ της σύνθετης μιγαδικής αντίστασης είναι μηδενική τότε λέμε ότι η σύνθετη μιγαδική αντίσταση είναι καθαρά ωμική.
  - Αν ισχύει $\varphi = \pm\pi/2$, τότε λέμε ότι η σύνθετη μιγαδική αντίσταση είναι καθαρά αντίδραση.
    - Ειδικότερα αν $\varphi = \pi/2$ τότε είναι καθαρά επαγωγική, ενώ αν $\varphi = -\pi/2$ τότε είναι καθαρά χωρητική.
    - Ενδιάμεσα, δηλαδή για $0<\varphi<\pi/2$ είναι επαγωγική, ενώ για $-\pi/2<\varphi<0$ είναι χωρητική.

Ημιτονοειδής Μόνιμη Κατάσταση και Φασιθέτες

- ***Ισχύς***
  - Πραγματική Ισχύς: $P = U_{eff} I_{eff} \cos(\varphi)$
  - Άεργος Ισχύς: $Q = U_{eff} I_{eff} \sin(\varphi)$
  - Μιγαδική Ισχύς: $\tilde{S} = P + jQ = U_{eff} I_{eff} \left[\cos(\varphi) + j\sin(\varphi)\right] = Se^{j\varphi}$
  - Φαινόμενη Ισχύς: $S = U_{eff} I_{eff} = \frac{1}{2} U_{\max} I_{\max} = \sqrt{P^2 + Q^2}$
  - Συντελεστής Ισχύος: $\Sigma.\mathrm{I}. = \frac{P}{S} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}} = \frac{U_{eff} I_{eff} \cos(\varphi)}{U_{eff} I_{eff}} = \cos(\varphi)$