ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

Μαθηματικός Λογισμός

Σημειώσεις – Ολοκλήρωμα

Κοφινάς Γιώργος

Τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών και Επικοινωνιακών Συστημάτων

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Το ολοκλήρωμα Riemann

<u>Ορισμός</u> Διαμέριση P του διαστήματος $[a,b]$ λέγεται ένα πεπερασμένο σύνολο σημείων του $[a,b]$ εκ των οποίων ένα είναι το a και ένα είναι το b. Επιλέγοντας τη φυσική αρίθμηση των αριθμών αυτών έχουμε $P=\{a=x_0<x_1<\dots<x_{n-1}<x_n=b\}$

Συμβολίζουμε το σύνολο όλων των διαμερίσεων του $[a,b]$ με $\mathcal{P}[a,b]$ ή $\mathcal{P}$.

<u>Ορισμός</u> Αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη (δηλ. $\exists\, m,M\in\mathbb{R}: m\le f(x)\le M$, $\forall x\in[a,b]$) και $P\in\mathcal{P}$ τότε ορίζουμε

$$m_k(f)\equiv m_k=\inf\{f(x):\ x_{k-1}\le x\le x_k\}\ ,\quad k=1,2,\dots,n$$

$$M_k(f)\equiv M_k=\sup\{f(x):\ x_{k-1}\le x\le x_k\}$$

Βάζουμε inf, sup και όχι min, max γιατί δεν έχουμε υποθέσει ότι f συνεχής. Προφανώς $m\le m_k\le M_k\le M$

$$L(f,P)=\sum_{k=1}^{n} m_k(x_k-x_{k-1})\qquad \text{"κάτω άθροισμα της } f \text{ ως προς } P\text{"}$$

$$U(f,P)=\sum_{k=1}^{n} M_k(x_k-x_{k-1})\qquad \text{"άνω άθροισμα της } f \text{ ως προς } P\text{"}$$

Ισχύει $\underline{m(b-a)\le L(f,P)\le U(f,P)\le M(b-a)}$, $\forall P\in\mathcal{P}$

διότι $m(b-a)=\sum_{k=1}^{n} m(x_k-x_{k-1})\le\sum_{k=1}^{n} m_k(x_k-x_{k-1})\le\sum_{k=1}^{n} M_k(x_k-x_{k-1})\le$

$$\le\sum_{k=1}^{n} M(x_k-x_{k-1})=M(b-a)$$

$$\Rightarrow m(b-a)\le L(f,P)\le U(f,P)\le M(b-a)$$

<u>Λήμμα</u> Αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη, τότε

$$L(f,P)\le L(f,P')\le U(f,P')\le U(f,P),\quad \forall P,P'\in\mathcal{P},\ P\subseteq P'$$

<u>Απόδειξη</u>

Για $P=P'$ είναι προφανής. Έστω $P'=P\cup\{u'\}$. Τότε $P=\{a=x_0<x_1<\dots<x_n=b\}$ και $\exists\, \ell$, $0\le\ell\le n$ με $P'=\{a=x_0<x_1<\dots<x_{\ell-1}<u'<x_\ell<\dots<x_n=b\}$.

Έστω $m^*=\inf\{f(x),\ x_{\ell-1}\le x\le u'\}$, $m^{**}=\inf\{f(x),\ u'\le x\le x_\ell\}$

Προφανώς $m_\ell\le m^*, m^{**}$.

Είναι $L(f,P)=\sum_{k=1}^{\ell-1} m_k(x_k-x_{k-1})+m_\ell(x_\ell-x_{\ell-1})+\sum_{k=\ell+1}^{n} m_k(x_k-x_{k-1})$

$$L(f,P')=\sum_{k=1}^{\ell-1} m_k(x_k-x_{k-1})+m^*(u'-x_{\ell-1})+m^{**}(x_\ell-u')+\sum_{k=\ell+1}^{n} m_k(x_k-x_{k-1})$$

$$\Rightarrow L(f,P') - L(f,P) = m^{*}(u'-x_{\ell-1}) + m^{**}(x_\ell - u') - m_\ell(x_\ell - x_{\ell-1})$$
$$\geq m_\ell(u'-x_{\ell-1}) + m_\ell(x_\ell - u') - m_\ell(x_\ell - x_{\ell-1}) = 0$$
$$\Rightarrow L(f,P) \leq L(f,P')$$

Επαγωγικά, προσθέτοντας στη διαμέριση από ένα σημείο κάθε φορά, π.χ. $P'' = P' \cup \{u''\}$ τότε $L(f,P) \leq L(f,P') \leq L(f,P'') \leq \dots$

Η δεύτερη ανισότητα είναι γνωστή, ενώ η τρίτη αποδεικνύεται όμοια με την πρώτη με τις αντίστροφες ανισότητες.

<u>Πρόταση</u> Αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη, τότε
$$L(f,P_1) \leq U(f,P_2) \quad , \forall P_1, P_2 \in \mathcal{P}$$

<u>Απόδειξη</u>

Αν $P = P_1 \cup P_2$ τότε $P_1 \subseteq P$, $P_2 \subseteq P$, άρα $L(f,P_1) \leq L(f,P) \leq U(f,P) \leq U(f,P_2)$

<u>Ορισμός</u> Αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη, τότε
$$\underline{\int_a^b} f \equiv \sup\{L(f,P), P\in\mathcal{P}\}$$ "κάτω ολοκλήρωμα της f στο $[a,b]$"
$$\overline{\int_a^b} f \equiv \inf\{U(f,P), P\in\mathcal{P}\}$$ "άνω ολοκλήρωμα της f στο $[a,b]$"

<u>Λήμμα</u> Αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη, τότε
$$m(b-a) \leq L(f,P) \leq \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f \leq U(f,P) \leq M(b-a) \quad , \forall P\in\mathcal{P}$$

<u>Απόδειξη</u>

$\forall P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ είναι $L(f,P_1) \leq U(f,P_2) \Rightarrow \sup\{L(f,P_1), P_1\in\mathcal{P}\} \leq U(f,P_2), \forall P_2 \in \mathcal{P}$

$\Rightarrow \underline{\int_a^b} f \leq U(f,P_2), \forall P_2\in\mathcal{P} \Rightarrow \underline{\int_a^b} f \leq \inf\{U(f,P_2), P_2\in\mathcal{P}\} \Rightarrow \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$

Εξάλλου
$$L(f,P) \leq \underline{\int_a^b} f \quad , \quad \overline{\int_a^b} f \leq U(f,P) \quad , \forall P\in\mathcal{P}$$
Άρα
$$L(f,P) \leq \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f \leq U(f,P)$$

<u>Παράδειγμα</u> $f(x) = c \quad , x\in[a,b]$

Αν $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ τότε $m_k = M_k = c$ και

$L(f,P) = \sum_{k=1}^{n} c(x_k - x_{k-1}) = c(b-a)$, $U(f,P) = \sum_{k=1}^{n} c(x_k - x_{k-1}) = c(b-a)$

Άρα
$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$$

Παράδειγμα $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$, $x \in [a, b]$

Αν $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ τότε $m_k = 0$, αφού στο $[x_{k-1}, x_k]$ υπάρχει άρρητος και $M_k = 1$, αφού στο $[x_{k-1}, x_k]$ υπάρχει ρητός.

Άρα $L(f,P) = \sum_{k=1}^{n} 0 \cdot (x_k - x_{k-1}) = 0$, $U(f,P) = \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot (x_k - x_{k-1}) = b - a$

$\Rightarrow \underline{\int_a^b} f = 0 \neq 1 = \overline{\int_a^b} f$

Ορισμός Αν $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη και ισχύει $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$ τότε η f λέγεται (Riemann) ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και συμβολίζουμε

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f = \int_a^b f = \int_a^b f(x)\,dx$$

Πρόταση Αν $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη, τότε

$$m(b-a) \le L(f,P) \le \int_a^b f \le U(f,P) \le M(b-a) \quad , \ \forall P \in \mathcal{P}$$

Απόδειξη

Είναι $m(b-a) \le L(f,P) \le \underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f \le U(f,P) \le M(b-a)$ και $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$

Παράδειγμα

a) $\int_a^b c\,dx = b - a$

b) $\nexists \int_a^b f$, $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

Άσκηση Προσέγγιση του $\int_1^5 f(x)\,dx$, $f(x) = \frac{1}{x}$

Έστω $P = \{x_0 = 1, x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = 2, x_3 = \frac{5}{2}, x_4 = 3, x_5 = 4, x_6 = 5\} \in \mathcal{P}[1,5]$

Είναι $L(f,P) = \sum_{k=1}^{6} m_k (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{6} f(x_k)(x_k - x_{k-1}) =$

$= f(\frac{3}{2})(\frac{3}{2} - 1) + f(2)(2 - \frac{3}{2}) + f(\frac{5}{2})(\frac{5}{2} - 2) + f(3)(3 - \frac{5}{2}) + f(4)(4-3) + f(5)(5-4)$

$= \frac{7}{5} = 1.40$

$U(f,P) = \sum_{k=1}^{6} M_k (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{6} f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) =$

$= f(1)(\frac{3}{2} - 1) + f(\frac{3}{2})(2 - \frac{3}{2}) + f(2)(\frac{5}{2} - 2) + f(\frac{5}{2})(3 - \frac{5}{2}) + f(3)(4-3) + f(4)(5-4)$

$= \frac{28}{15} = 1.87$

Άρα $1.40 < \int_1^5 \frac{1}{x}\,dx < 1.87$ και μπορούμε να συνεχίσουμε αυξάνοντας την ακρίβεια. Ακριβώς είναι $\int_1^5 \frac{1}{x}\,dx = \ln 5 \simeq 1.609$

Θεώρημα (κριτήριο Riemann)

Αν $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη τότε f ολοκληρώσιμη ανν $\forall \varepsilon > 0$, $\exists P \in \mathcal{P}$ με $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$

Απόδειξη

Έστω ότι $\exists P \in \mathcal{P}$ με $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$. Είναι

$$L(f,P) \le \underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f \le U(f,P)$$

$$\Rightarrow 0 \le \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \le U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f \Rightarrow f \text{ ολοκληρώσιμη}$$

Αντίστροφα, αν f ολοκληρώσιμη, τότε $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f = \int_a^b f$

$\Rightarrow \int_a^b f = \sup\{L(f,P),\ P \in \mathcal{P}\} = \inf\{U(f,P),\ P\in\mathcal{P}\}$

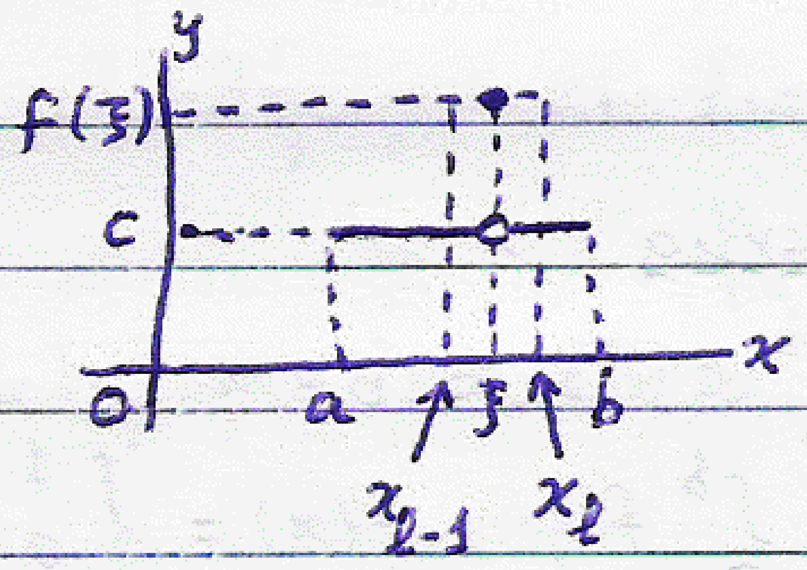
$\Rightarrow \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists P_1 \in \mathcal{P}: \int_a^b f - \frac{\varepsilon}{2} < L(f,P_1)$

$\qquad \exists P_2 \in \mathcal{P}: U(f,P_2) < \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow \quad U(f,P_2) - L(f,P_1) < \varepsilon$

και η διαμέριση $P = P_1 \cup P_2$ έχει

$$U(f,P) - L(f,P) \le U(f,P_2) - L(f,P_1) < \varepsilon$$



Παράδειγμα $\quad f(x) = \begin{cases} c, & x \ne \xi \\ f(\xi), & x = \xi \end{cases}$

Αν $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$, $\xi \in [x_{\ell-1}, x_\ell]$

τότε $\quad m_k = M_k = c, \quad k \ne \ell$

$\qquad m_\ell = \min\{c, f(\xi)\}, \quad M_\ell = \max\{c, f(\xi)\}$

$$L(f,P) = \sum_{k=1}^{\ell-1} m_k (x_k - x_{k-1}) + m_\ell (x_\ell - x_{\ell-1}) + \sum_{k=\ell+1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1})$$

$$= c\sum_{k=1}^{\ell-1} (x_k - x_{k-1}) + m_\ell (x_\ell - x_{\ell-1}) + c \sum_{k=\ell+1}^{n} (x_k - x_{k-1})$$

$$U(f,P) = \sum_{k=1}^{\ell-1} M_k (x_k - x_{k-1}) + M_\ell (x_\ell - x_{\ell-1}) + \sum_{k=\ell+1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1})$$

$$= c\sum_{k=1}^{\ell-1} (x_k - x_{k-1}) + M_\ell (x_\ell - x_{\ell-1}) + c \sum_{k=\ell+1}^{n} (x_k - x_{k-1})$$

$$\Rightarrow U(f,P) - L(f,P) = (M_\ell - m_\ell)(x_\ell - x_{\ell-1}) = |c - f(\xi)|\,(x_\ell - x_{\ell-1})$$

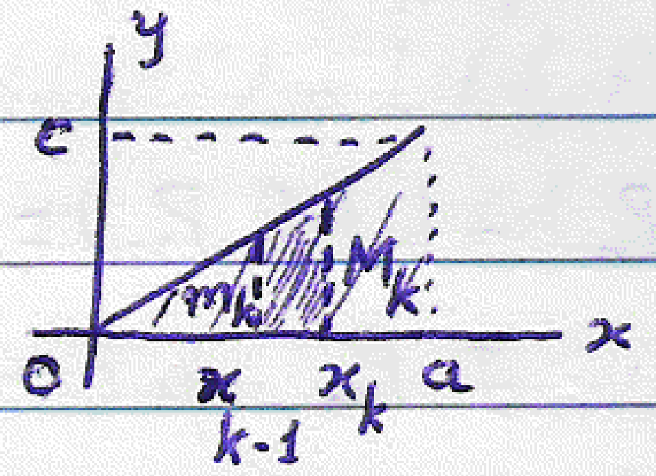
Αν για το τυχόν $\varepsilon > 0$, επιλέξω $x_\ell - x_{\ell-1} < \dfrac{\varepsilon}{|c - f(\xi)|}$ τότε

$U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon \Rightarrow f$ ολοκληρώσιμη

Επίσης $\forall P \in \mathcal{P}$, $L(f,P) \le c \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = c(b-a)$

$\qquad U(f,P) \ge c\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = c(b-a)$

Άρα $L(f,P) \leq c(b-a) \leq U(f,P) \Rightarrow \int_a^b f = c(b-a)$



<u>Παράδειγμα</u> $\quad f(x) = \frac{c}{a}x, \quad x \in [0,a]$

Αν $P_n = \{0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = a\}$ με $x_k = \frac{ka}{n}$, $k = 0,1,\dots,n$

τότε

$$L(f,P_n) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) = \frac{c}{a}\sum_{k=1}^{n} x_{k-1}(x_k - x_{k-1})$$

$$= \frac{c}{a}\sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)a}{n}\left(\frac{ka}{n} - \frac{(k-1)a}{n}\right) = \frac{ac}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(k-1) = \frac{ac}{n^2}\sum_{\ell=0}^{n-1}\ell =$$

$$= \frac{ac}{n^2}\,\frac{n(n-1)}{2} = \frac{ac}{2}\,\frac{n-1}{n}$$

$$U(f,P_n) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k - x_{k-1}) = \frac{c}{a}\sum_{k=1}^{n} x_k(x_k - x_{k-1})$$

$$= \frac{c}{a}\sum_{k=1}^{n} \frac{ka}{n}\left(\frac{ka}{n} - \frac{(k-1)a}{n}\right) = \frac{ac}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{ac}{n^2}\,\frac{n(n+1)}{2} = \frac{ac}{2}\,\frac{n+1}{n}$$

$\Rightarrow U(f,P_n) - L(f,P_n) = \frac{ac}{n}$

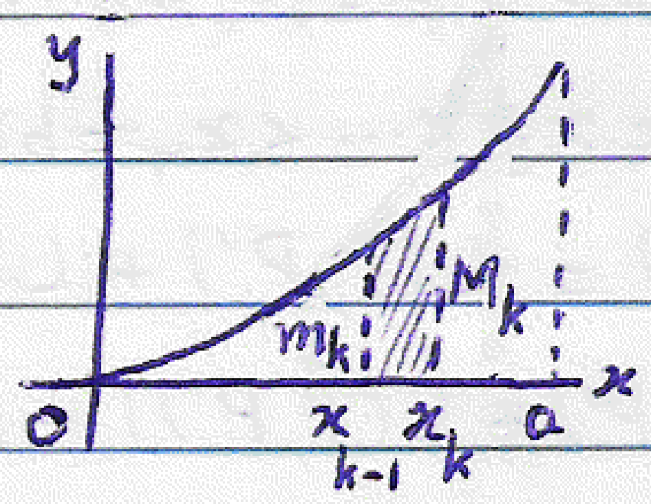
Άρα $\forall \varepsilon > 0$, $\exists P_n$ με $\frac{ac}{n} < \varepsilon$, οπότε $U(f,P_n) - L(f,P_n) < \varepsilon$

$\Rightarrow f$ ολοκληρώσιμη.

Για κάθε n είναι $L(f,P_n) \leq \frac{ac}{2}$, $U(f,P_n) \geq \frac{ac}{2}$

$\Rightarrow L(f,P_n) \leq \frac{ac}{2} \leq U(f,P_n) \Rightarrow \int_0^a f = \frac{ac}{2}$

Επίσης, θα μπορούσαμε να πούμε ότι για $n \to \infty$, $L(f,P_n) \to \frac{ac}{2}$, $U(f,P_n) \to \frac{ac}{2}$, άρα $\int_0^a f = \frac{ac}{2}$.



<u>Παράδειγμα</u> $\quad f(x) = x^2, \quad x \in [0,a]$

Αν $P_n = \{0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = a\}$ με $x_k = \frac{ka}{n}$, $k = 0,1,\dots,n$

τότε

$$L(f,P_n) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} x_{k-1}^2(x_k - x_{k-1}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)^2a^2}{n^2}\left(\frac{ka}{n} - \frac{(k-1)a}{n}\right) = \frac{a^3}{n^3}\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2 = \frac{a^3}{n^3}\sum_{\ell=0}^{n-1}\ell^2 =$$

$$= \frac{a^3}{n^3}\,\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{a^3}{6}\,\frac{(n-1)(2n-1)}{n^2} = \frac{a^3}{6}\,\frac{2n^2-3n+1}{n^2}$$

$$U(f,P_n) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2(x_k - x_{k-1}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2 a^2}{n^2}\left(\frac{ka}{n} - \frac{(k-1)a}{n}\right) = \frac{a^3}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{a^3}{n^3}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{a^3}{6}\,\frac{2n^2+3n+1}{n^2}$$

$$\Rightarrow U(f,P_n) - L(f,P_n) = \frac{a^3}{n}$$

Αν $\varepsilon>0$, $\exists P_n$ με $\frac{a^3}{n}<\varepsilon$, οπότε $U(f,P_n)-L(f,P_n)<\varepsilon \Rightarrow$ f ολοκληρώσιμη.

Για κάθε n είναι

$$L(f,P_n) < \frac{a^3}{6}\,\frac{2n^2-3n+3}{n^2} = \frac{a^3}{6}\,\frac{2n^2-3(n-1)}{n^2} < \frac{a^3}{6}\,\frac{2n^2}{n^2} = \frac{a^3}{3}$$

$$U(f,P_n) > \frac{a^3}{6}\,\frac{2n^2}{n^2} = \frac{a^3}{3}$$

$$\Rightarrow L(f,P_n) < \frac{a^3}{3} < U(f,P_n) \Rightarrow \int_0^a f = \frac{a^3}{3}$$

Επίσης, θα μπορούσαμε να πούμε ότι για $n\to\infty$ είναι

$$L(f,P_n)\to \frac{a^3}{3},\quad U(f,P_n)\to\frac{a^3}{3},\ \text{άρα}\ \int_0^a f = \frac{a^3}{3}$$

<u>Πρόταση</u> (προσθετικότητα του ολοκληρώματος Riemann)

Έστω $a<c<b$. Αν f ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ τότε f ολοκληρώσιμη στα $[a,c]$, $[c,b]$. Αν f ολοκληρώσιμη στα $[a,c]$, $[c,b]$ τότε f ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Αν f ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ τότε

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

<u>Απόδειξη</u>

Έστω f ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Τότε $\forall\varepsilon>0$, $\exists P=\{a=x_0<\dots<x_\ell=c<\dots<x_n=b\}$ με $U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon$. Αν $P'=\{a=x_0<\dots<x_\ell=c\}\in\mathcal{P}[a,c]$, $P''=\{c=x_\ell<\dots<x_n=b\}\in\mathcal{P}[c,b]$ τότε

$$L(f,P)=L(f,P')+L(f,P''),\quad U(f,P)=U(f,P')+U(f,P'')$$

$$\Rightarrow [U(f,P')-L(f,P')]+[U(f,P'')-L(f,P'')] = U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon$$

Αφού $U(f,P')\geq L(f,P')$, $U(f,P'')\geq L(f,P'')$, άρα

$$U(f,P')-L(f,P')<\varepsilon,\quad U(f,P'')-L(f,P'')<\varepsilon$$

$\Rightarrow$ f ολοκληρώσιμη στα $[a,c]$, $[c,b]$.

Είναι $L(f,P')\leq \int_a^c f\leq U(f,P')$, $L(f,P'')\leq\int_c^b f\leq U(f,P'')$

$$\Rightarrow L(f,P')+L(f,P'')\leq \int_a^c f+\int_c^b f\leq U(f,P')+U(f,P'')$$

$$\Rightarrow L(f,P)\leq\int_a^c f+\int_c^b f\leq U(f,P)\Rightarrow \int_a^b f = \int_a^c f+\int_c^b f$$

Αντίστροφα, έστω f ολοκληρώσιμη στα $[a,c]$, $[c,b]$. Αν $\varepsilon>0$ τότε $\exists P'\in\mathcal{P}[a,c]$, $P''\in\mathcal{P}[c,b]$ με

$$U(f,P')-L(f,P')<\frac{\varepsilon}{2},\quad U(f,P'')-L(f,P'')<\frac{\varepsilon}{2}$$

Αν $P = P_1 \cup P_2$ τότε $L(f,P) = L(f,P') + L(f,P'')$, $U(f,P) = U(f,P') + U(f,P'')$,

άρα $U(f,P) - L(f,P) = [U(f,P') - L(f,P')] + [U(f,P'') - L(f,P'')]$

$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow f$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$

Αν ορίσουμε $\int_a^a f = 0$

$\int_a^b f = -\int_b^a f \quad , a > b$

τότε $\forall a,b,c$ ισχύει $\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f$

<u>Πρόταση</u> (γραμμικότητα του ολοκληρώματος Riemann)

Αν f, g ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, τότε:

(1) $f+g$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$

(2) λf ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και $\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$

<u>Απόδειξη</u>

(1) Αν $P = \{a = x_0 < \dots < x_n = b\} \in \mathcal{P}$ τότε

$m_k(f+g) \geq m_k(f) + m_k(g), \quad M_k(f+g) \leq M_k(f) + M_k(g)$

Άρα $L(f,P) + L(g,P) = \sum_{k=1}^n m_k(f)(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=1}^n m_k(g)(x_k - x_{k-1})$

$= \sum_{k=1}^n [m_k(f) + m_k(g)](x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^n m_k(f+g)(x_k - x_{k-1}) = L(f+g,P) \leq$

$\leq U(f+g,P) = \sum_{k=1}^n M_k(f+g)(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^n M_k(f)(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=1}^n M_k(g)(x_k - x_{k-1})$

$= U(f,P) + U(g,P)$

$\Rightarrow L(f,P) + L(g,P) \leq L(f+g,P) \leq U(f+g,P) \leq U(f,P) + U(g,P)$

Εξάλλου, αφού f,g ολοκληρώσιμες, άρα $\forall \varepsilon > 0, \ \exists P_1, P_2 \in \mathcal{P}$:

$U(f,P_1) - L(f,P_1) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad U(g,P_2) - U(g,P_2) < \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow [U(f,P_1) + U(g,P_2)] - [L(f,P_1) + L(g,P_2)] < \varepsilon$

Αν $P = P_1 \cup P_2$ τότε

$[U(f,P) + U(g,P)] - [L(f,P) + L(g,P)] \leq [U(f,P_1) + U(g,P_2)] - [L(f,P_1) + L(g,P_2)] < \varepsilon$

$\Rightarrow U(f+g,P) - L(f+g,P) \leq [U(f,P) + U(g,P)] - [L(f,P) + L(g,P)] < \varepsilon$

$\Rightarrow f+g$ ολοκληρώσιμη

Επίσης $L(f,P) + L(g,P) \leq L(f+g,P) \leq \int_a^b (f+g) \leq U(f+g,P) \leq U(f,P) + U(g,P)$

και $L(f,P) + L(g,P) \leq \int_a^b f + \int_a^b g \leq U(f,P) + U(g,P) \Rightarrow \int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$

(2) Αφού f ολοκληρώσιμη, άρα $\forall \varepsilon > 0, \ \exists P \in \mathcal{P}: U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$

Αν $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ τότε

- $\lambda \geq 0$: $m_k(\lambda f) = \lambda m_k(f), \quad M_k(\lambda f) = \lambda M_k(f)$,

άρα $\lambda L(f,P) = \lambda \sum_{k=1}^n m_k(f)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n m_k(\lambda f)(x_k - x_{k-1}) = L(\lambda f, P) \leq$

$$\leq U(\lambda f,P)=\sum_{k=1}^{n} M_k(\lambda f)(x_k-x_{k-1})=\lambda\sum_{k=1}^{n} M_k(f)(x_k-x_{k-1})=\lambda U(f,P)$$

$$\Rightarrow \lambda L(f,P)=L(\lambda f,P)\leq U(\lambda f,P)=\lambda U(f,P)$$

$\Rightarrow U(\lambda f,P)-L(\lambda f,P)=\lambda[U(f,P)-L(f,P)]<\lambda\varepsilon \Rightarrow \lambda f$ ολοκληρώσιμη

Επίσης $\lambda L(f,P)=L(\lambda f,P)\leq \int_a^b \lambda f \leq U(\lambda f,P)=\lambda U(f,P)$

και $\lambda L(f,P)\leq \lambda\int_a^b f\leq \lambda U(f,P)$

άρα $\int_a^b \lambda f=\lambda\int_a^b f$

- $\lambda<0$: $m_k(\lambda f)=\lambda M_k(f)$, $M_k(\lambda f)=\lambda m_k(f)$,

άρα $\lambda U(f,P)=\lambda\sum_{k=1}^{n} M_k(f)(x_k-x_{k-1})=\sum_{k=1}^{n} m_k(\lambda f)(x_k-x_{k-1})=$

$=L(\lambda f,P)\leq U(\lambda f,P)=\sum_{k=1}^{n} M_k(\lambda f)(x_k-x_{k-1})=\lambda\sum_{k=1}^{n} m_k(f)(x_k-x_{k-1})=\lambda L(f,P)$

$\Rightarrow \lambda U(f,P)=L(\lambda f,P)\leq U(\lambda f,P)=\lambda L(f,P)$

$\Rightarrow U(\lambda f,P)-L(\lambda f,P)=\lambda[L(f,P)-U(f,P)]=|\lambda|[U(f,P)-L(f,P)]<|\lambda|\varepsilon$

Επίσης $\lambda U(f,P)=L(\lambda f,P)\leq\int_a^b\lambda f\leq U(\lambda f,P)=\lambda L(f,P)$

και $L(f,P)\leq\int_a^b f\leq U(f,P)\Rightarrow \lambda U(f,P)\leq\lambda\int_a^b f\leq\lambda L(f,P)$

άρα $\int_a^b\lambda f=\lambda\int_a^b f$

<u>Πρόταση</u> Αν f,g ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$ τότε $f\cdot g$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $f(x),g(x)\geq 0$. $\forall P\in\mathcal{P}$ είναι

$0\leq m_k(f)\leq f(x)\leq M_k(f)$, $0\leq m_k(g)\leq g(x)\leq M_k(g)$, $\forall x\in[x_{k-1},x_k]$

$\Rightarrow m_k(f)\,m_k(g)\leq f(x)\,g(x)\leq M_k(f)\,M_k(g)$

$\Rightarrow m_k(f)\,m_k(g)\leq m_k(fg)$, $M_k(fg)\leq M_k(f)\,M_k(g)$

Άρα $U(fg,P)-L(fg,P)=\sum_{k=1}^{n} M_k(fg)(x_k-x_{k-1})-\sum_{k=1}^{n} m_k(fg)(x_k-x_{k-1})$

$$=\sum_{k=1}^{n}[M_k(fg)-m_k(fg)](x_k-x_{k-1})$$

$$\leq\sum_{k=1}^{n}[M_k(f)M_k(g)-m_k(f)m_k(g)](x_k-x_{k-1})$$

$$=\sum_{k=1}^{n} M_k(g)[M_k(f)-m_k(f)](x_k-x_{k-1})+\sum_{k=1}^{n} m_k(f)[M_k(g)-m_k(g)](x_k-x_{k-1})$$

Αλλά f,g ολοκληρώσιμες $\Rightarrow f,g$ φραγμένες $\Rightarrow f(x),g(x)\leq M$, $\forall x\in[a,b]$

$\Rightarrow m_k(f)\leq M$, $M_k(g)\leq M$

Άρα $U(fg,P)-L(fg,P)\leq M\left\{\sum_{k=1}^{n}[M_k(f)-m_k(f)](x_k-x_{k-1})+\sum_{k=1}^{n}[M_k(g)-m_k(g)](x_k-x_{k-1})\right\}$

$$= M\{[U(f,P)-L(f,P)]+[U(g,P)-L(g,P)]\}$$

Αφού f,g ολοκληρώσιμες, άρα $\forall \varepsilon>0$, $\exists P_1, P_2 \in \mathcal{P}$:
$$U(f,P_1)-L(f,P_1)<\frac{\varepsilon}{2M}, \quad U(g,P_2)-L(g,P_2)<\frac{\varepsilon}{2M}$$
Αν $P=P_1\cup P_2$ τότε
$$[U(f,P)-L(f,P)]+[U(g,P)-L(g,P)]\le[U(f,P_1)-L(f,P_1)]+[U(g,P_2)-L(g,P_2)]$$
$$<\frac{\varepsilon}{2M}+\frac{\varepsilon}{2M}=\frac{\varepsilon}{M}$$
$$\Rightarrow U(fg,P)-U(fg,P)<\varepsilon \Rightarrow f \text{ ολοκληρώσιμη}$$
Αν είναι $f\le 0$ και/ή $g\le 0$ τότε πάλι προκύπτει το ίδιο αποτέλεσμα. Στη γενική περίπτωση $f=\max\{f,0\}+\min\{f,0\}$, $g=\max\{g,0\}+\min\{g,0\}$, άρα η fg είναι άθροισμα 4 γινομένων που το καθένα είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση, άρα fg ολοκληρώσιμη

<u>Πρόταση</u> Αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη και $|f(x)|\ge\delta>0$, $\forall x\in[a,b]$ τότε $\frac{1}{f}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$

<u>Απόδειξη</u>

Αν $P=\{a=x_0<x_1<\dots<x_n=b\}\in\mathcal{P}$ τότε $\forall x,y\in[x_{k-1},x_k]$ είναι
$$\left|\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{f(y)}\right|=\frac{|f(x)-f(y)|}{|f(x)||f(y)|}\le\frac{1}{\delta^2}|f(x)-f(y)|\le\frac{1}{\delta^2}[M_k(f)-m_k(f)], \text{ άρα}$$
$$M_k\left(\tfrac{1}{f}\right)-m_k\left(\tfrac{1}{f}\right)\le\frac{1}{\delta^2}[M_k(f)-m_k(f)]$$
Άρα
$$U\left(\tfrac{1}{f},P\right)-L\left(\tfrac{1}{f},P\right)=\sum_{k=1}^{n}\left[M_k\left(\tfrac{1}{f}\right)-m_k\left(\tfrac{1}{f}\right)\right](x_k-x_{k-1})$$
$$\le\frac{1}{\delta^2}\sum_{k=1}^{n}[M_k(f)-m_k(f)](x_k-x_{k-1})$$
$$=\frac{1}{\delta^2}[U(f,P)-L(f,P)]$$
Αλλά f ολοκληρώσιμη, άρα $\forall\varepsilon>0$ και για $\varepsilon\delta^2>0$, $\exists P\in\mathcal{P}$ ώστε
$$U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon\delta^2$$
Τελικά $U\left(\frac{1}{f},P\right)-L\left(\frac{1}{f},P\right)<\frac{1}{\delta^2}\varepsilon\delta^2=\varepsilon \Rightarrow \frac{1}{f}$ ολοκληρώσιμη.

<u>Πρόταση</u> Αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη τότε $|f|$ ολοκληρώσιμη.

<u>Απόδειξη</u>

Αν $P=\{a=x_0<x_1<\dots<x_n=b\}\in\mathcal{P}$ τότε $\forall x,y\in[x_{k-1},x_k]$ είναι
$$||f(x)|-|f(y)||\le|f(x)-f(y)|\le M_k(f)-m_k(f)\Rightarrow M_k(|f|)-m_k(|f|)\le M_k(f)-m_k(f)$$
Άρα $U(|f|,P)-L(|f|,P)=\sum_{k=1}^{n}M_k(|f|)(x_k-x_{k-1})-\sum_{k=1}^{n}m_k(|f|)(x_k-x_{k-1})$

$$= \sum_{k=1}^{n} [M_k(|f|) - m_k(|f|)](x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{n} [M_k(f) - m_k(f)](x_k - x_{k-1}) = U(f,P) - L(f,P)$$

Αλλά f ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, άρα $\forall \varepsilon > 0$, $\exists P \in \mathcal{P}$:

$U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon \Rightarrow U(|f|, P) - L(|f|, P) < \varepsilon \Rightarrow |f|$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$

<u>Πόρισμα</u> Αν $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες, τότε οι $\max\{f,g\}$, $\min\{f,g\}$ ολοκληρώσιμες.

<u>Απόδειξη</u>

Είναι $\max\{f,g\} = \frac{1}{2}(f+g+|f-g|)$, $\min\{f,g\} = \frac{1}{2}(f+g-|f-g|)$.

Αφού f,g ολοκληρώσιμες, άρα $f \pm g$, $|f-g|$ ολοκληρώσιμες, άρα $\max\{f,g\}$, $\min\{f,g\}$ ολοκληρώσιμες.

<u>Πρόταση</u> Αν $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες και $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a,b]$ τότε $\int_a^b f \leq \int_a^b g$

<u>Απόδειξη</u>

Αφού $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a,b]$, άρα $L(f,P) \leq L(g,P)$, $\forall P \in \mathcal{P}$

$\Rightarrow \int_a^b f = \underline{\int_a^b} f \leq \underline{\int_a^b} g = \int_a^b g$

<u>Πρόταση</u> Αν $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη τότε $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$

<u>Απόδειξη</u>

Είναι $-|f|(x) \leq f(x) \leq |f|(x) \Rightarrow -\int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f| \Rightarrow \left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$

Η πιο σημαντική κλάση ολοκληρώσιμων συναρτήσεων είναι οι συνεχείς.

<u>Θεώρημα</u> Αν $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής, τότε f ολοκληρώσιμη

<u>Απόδειξη</u>

Αφού f συνεχής στο $[a,b]$, άρα f ομοιόμορφα συνεχής στο $[a,b]$, επομένως, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0 : \forall x,y \in [a,b]$, $|x-y| < \delta$, $|f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$.

Επίσης f φραγμένη στο $[a,b]$.

Αν $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\} \in \mathcal{P}$ με $|x_k - x_{k-1}| < \delta$, $\forall k = 1, \dots, n$ τότε $\forall k = 1, \dots, n$, $\forall x,y \in [x_{k-1}, x_k]$, $f(x) - f(y) < \frac{\varepsilon}{b-a}$.

Αλλά αφού f συνεχής στο $[a,b]$, άρα η f έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο $[x_{k-1}, x_k]$, δηλ. $\exists \xi_k, \eta_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $M_k = f(\xi_k)$, $m_k = f(\eta_k)$.

Άρα $M_k - m_k = f(\xi_k) - f(\eta_k) < \frac{\varepsilon}{b-a}$.

Τελικά $U(f,P) - L(f,P) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon$

$\Rightarrow f$ ολοκληρώσιμη

Άλλη απόδειξη (χωρίς χρήση ομοιόμορφης συνέχειας)

Αφού f συνεχής στο $[a,b]$, άρα f φραγμένη στο $[a,b]$.

Έστω $L(x) = \underline{\int_a^x} f$, $U(x) = \overline{\int_a^x} f$

Αν $x \in (a,b)$ και $h>0$, έστω

$m_h = \inf\{f(t),\ x \le t \le x+h\}$, $M_h = \sup\{f(t),\ x \le t \le x+h\}$

Είναι $m_h \cdot h \le \underline{\int_x^{x+h}} f \le \overline{\int_x^{x+h}} f \le M_h \cdot h$

$$\Rightarrow m_h \cdot h \le L(x+h) - L(x) \le U(x+h) - U(x) \le M_h \cdot h$$

$$\Rightarrow m_h \le \frac{L(x+h)-L(x)}{h} \le \frac{U(x+h)-U(x)}{h} \le M_h$$

Αν $h<0$ και $m_h = \inf\{f(t),\ x+h \le t \le x\}$, $M_h = \sup\{f(t),\ x+h \le t \le x\}$

τότε $m_h \cdot (-h) \le \underline{\int_{x+h}^{x}} f \le \overline{\int_{x+h}^{x}} f \le M_h \cdot (-h)$

$$\Rightarrow m_h \cdot (-h) \le L(x) - L(x+h) \le U(x) - U(x+h) \le M_h \cdot (-h)$$

$$\Rightarrow m_h \cdot h \ge L(x+h) - L(x) \ge U(x+h) - U(x) \ge M_h \cdot h$$

$$\Rightarrow m_h \le \frac{L(x+h)-L(x)}{h} \le \frac{U(x+h)-U(x)}{h} \le M_h$$

Αφού f συνεχής στο x, άρα $\lim\limits_{h\to 0} m_h = \lim\limits_{h \to 0} M_h = f(x) \Rightarrow L'(x) = U'(x) = f(x)$

$\Rightarrow \exists\, c:\ U(x) = L(x) + c$, $\forall x \in (a,b)$

Αλλά $U(a) = L(a) = 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow U(x) = L(x) \Rightarrow U(b) = L(b) \Rightarrow$

$\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f \Rightarrow \exists \int_a^b f \Rightarrow f$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$

<u>Θεώρημα</u> Αν $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ μονότονη, τότε f ολοκληρώσιμη

<u>Απόδειξη</u>

Έστω f αύξουσα. Τότε $f(a) \le f(x) \le f(b)$, $\forall x \in [a,b]$, άρα f φραγμένη.

Για το τυχόν $\varepsilon>0$ επιλέγουμε $n \in \mathbb{N}^*$ με $\frac{b-a}{n}[f(b)-f(a)] < \varepsilon$.

Αν $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\} \in \mathcal{P}$ με $x_k = a + \frac{k(b-a)}{n}$, $k = 1, \dots, n$,

τότε αφού f αύξουσα θα είναι $m_k = f(x_{k-1})$, $M_k = f(x_k)$, $k = 1, \dots, n$.

Άρα $U(f,P) - L(f,P) = \sum\limits_{k=1}^{n} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) = \frac{b-a}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} [f(x_k) - f(x_{k-1})]$

$= \frac{b-a}{n}[f(b) - f(a)] < \varepsilon$

$\Rightarrow f$ ολοκληρώσιμη

Θεώρημα (μέσης τιμής ολοκληρώματος)

Αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής, $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη με $g(x)\geq 0$ $\forall x\in[a,b]$ τότε $\exists\, c\in[a,b]$ με $\int_a^b fg = f(c)\int_a^b g$

Απόδειξη

Αφού f συνεχής στο $[a,b]$, άρα f ολοκληρώσιμη, άρα fg ολοκληρώσιμη. Έστω $m=\inf\{f(x),\, x\in[a,b]\}$, $M=\sup\{f(x),\, x\in[a,b]\}$.

Τότε $m\cdot g(x)\leq f(x)\,g(x)\leq M\cdot g(x) \Rightarrow m\int_a^b g\leq \int_a^b fg\leq M\int_a^b g$

Αν $\int_a^b g=0$ τότε $\int_a^b fg=0$ και ισχύει ότι

$$\int_a^b fg = f(c)\int_a^b g, \quad \forall c\in[a,b]$$

Αν $\int_a^b g\neq 0$ τότε

$$m\leq \frac{\int_a^b fg}{\int_a^b g}\leq M \qquad \text{αφού } \int_a^b g>0$$

Αφού f συνεχής στο $[a,b]$, άρα $\exists\, x_0, x_1\in[a,b]$ με $m=f(x_0)$, $M=f(x_1)$.

Άρα $f(x_0)\leq \dfrac{\int_a^b fg}{\int_a^b g}\leq f(x_1)$.

Από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, $\exists\, c\in[a,b]$ με

$$f(c)=\frac{\int_a^b fg}{\int_a^b g} \Rightarrow \int_a^b fg = f(c)\int_a^b g$$

Πόρισμα Αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής, τότε $\exists\, c\in[a,b]$ με

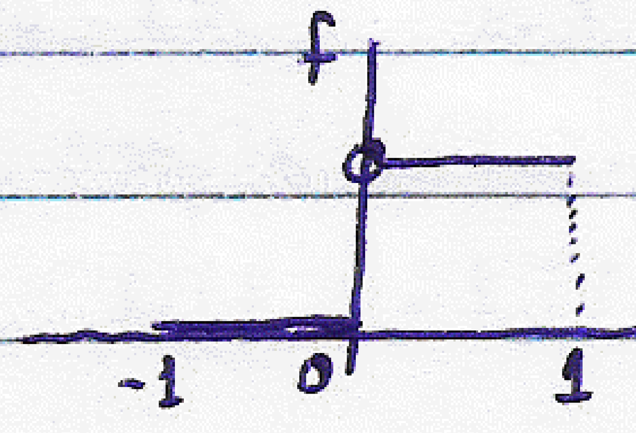
$$\int_a^b f = f(c)\cdot(b-a)$$

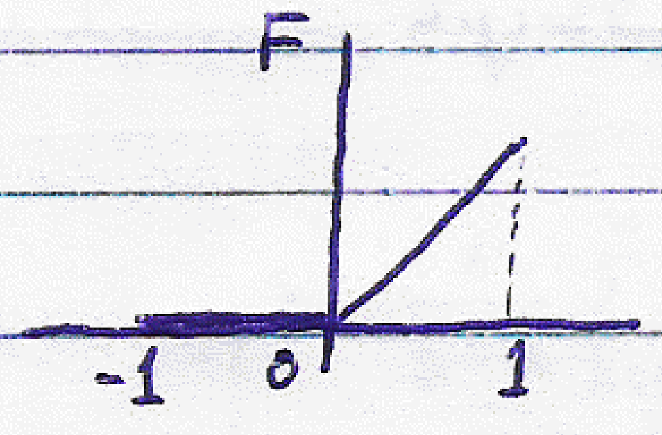
Απόδειξη

Προκύπτει από το προηγούμενο για $g(x)=1$.

Μπορεί, όπως είδαμε, η f να είναι ολοκληρώσιμη χωρίς να είναι συνεχής (π.χ. f μονότονη). Ωστόσο το παρακάτω θεώρημα δείχνει ότι το ολοκλήρωμα $\int_a^x f$ ("αόριστο ολοκλήρωμα της f" / "παράγουσα της f") είναι συνεχής συνάρτηση, δηλαδή η ολοκλήρωση εξομαλύνει (αντίστροφα προς τη συμπεριφορά της παραγώγισης), π.χ.

$$f(x)=\begin{cases}0, & -1\leq x<0\\ 1, & 0\leq x\leq 1\end{cases} \qquad F(x)=\int_{-1}^x f(t)\,dt=\begin{cases}0, & -1\leq x<0\\ x, & 0\leq x\leq 1\end{cases}$$





Θεώρημα Αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη τότε η $F(x)=\int_a^x f$ συνεχής στο $[a,b]$

Απόδειξη

Αφού f ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, άρα f φραγμένη, άρα $\exists M\in\mathbb{R}$: $|f(x)|\le M$, $\forall x\in[a,b]$.

Αν $c\in[a,b]$, $h>0$ τότε $F(c+h)-F(c)=\int_a^{c+h} f-\int_a^c f=\int_c^{c+h} f$ και

$-M\le f(x)\le M \Rightarrow -M\cdot h\le \int_c^{c+h} f \le M\cdot h \Rightarrow -M\cdot h\le F(c+h)-F(c)\le M\cdot h$

Αν $h<0$ τότε $-M\cdot(-h)\le \int_{c+h}^{c} f\le M\cdot(-h)\Rightarrow M\cdot h\le -\int_c^{c+h} f\le -M\cdot h\Rightarrow$

$M\cdot h\le F(c)-F(c+h)\le -M\cdot h \Rightarrow M\cdot h\le F(c+h)-F(c)\le -M\cdot h$

Τελικά $|F(c+h)-F(c)|\le M\cdot|h|$, $\forall h\in\mathbb{R}$

Αν $\varepsilon>0$ και $|h|<\frac{\varepsilon}{M}$ τότε $|F(c+h)-F(c)|<\varepsilon \Rightarrow \lim_{h\to 0} F(c+h)=F(c)$

$\Rightarrow F$ συνεχής στο c.

Θεώρημα (1ο θεμελιώδες θεώρημα απειροστικού λογισμού)

Αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $x_0\in[a,b]$ και ολοκληρώσιμη, τότε η $F:[a,b]\to\mathbb{R}$, $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με $F'(x_0)=f(x_0)$, δηλ. $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt\Big|_{x_0}=f(x_0)$

(Για $x_0=a,b$ εννοείται $F'(x_0)=F'_{\pm}(x_0)$)

Απόδειξη

Έστω $x_0\in(a,b)$, αντίστοιχα και για $x_0=a,b$. Αφού f συνεχής στο x_0, άρα $\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0:\ \forall t\in[a,b],\ |t-x_0|<\delta,\ |f(t)-f(x_0)|<\varepsilon$.

$\forall x\in[a,b]$, $x\neq x_0$ είναι

$$\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}-f(x_0)\right|=\left|\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt-\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} f(x_0)\,dt\right|=$$

$$=\frac{1}{|x-x_0|}\left|\int_{x_0}^{x}[f(t)-f(x_0)]\,dt\right|<\frac{1}{|x-x_0|}\left|\int_{x_0}^{x}\varepsilon\,dt\right|=\frac{1}{|x-x_0|}\varepsilon\,|x-x_0|=\varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=f(x_0)\ \Rightarrow\ F'(x_0)=f(x_0)$$

Σχόλιο Η $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ με $x<a$ έχει πάλι $F'(x)=f(x)$, διότι για $a\le y\le b$ η $G(y)=\int_y^b f=\int_a^b f-\int_a^y f\Rightarrow G'(y)=-f(y)$, άρα η $F(x)=-\int_x^a f \Rightarrow F'(x)=-[-f(x)]=f(x)$

Σχόλιο Κάθε συνεχής συνάρτηση έχει παράγουσα (αφού είναι ολοκληρώσιμη)

Σχόλιο Κάνοντας χρήση του 1ου θεμελιώδους θεωρήματος του απειρο-

στικού λογισμού μπορούμε να αποδείξουμε πάλι ευκολότερα το θεώρημα μέσης τιμής του ολοκληρώματος. Δηλαδή, αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής τότε η $F(x)=\int_a^x f$, $x\in[a,b]$ παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ με $F'(x)=f(x)$. Επίσης F συνεχής στο $[a,b]$. Από το θεώρημα μέσης τιμής για την F, $\exists\, c\in[a,b]: F'(c)=\frac{F(b)-F(a)}{b-a} \Leftrightarrow$
$F(b)-0=F'(c)\cdot(b-a) \Leftrightarrow \int_a^b f = f(c)\cdot(b-a)$

<u>Θεώρημα</u> (2ο θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού)
Αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής και $f=F'$ τότε $\int_a^b f = F(b)-F(a)$, δηλ. $\int_a^b F'(x)\,dx = F(b)-F(a)$.

<u>Απόδειξη</u>
Αν $G(x)=\int_a^x f$ τότε από το 1ο θεμελιώδες θεώρημα είναι $G'=f=F'$, άρα $G=F+c$, απ' όπου $G(a)=F(a)+c \Rightarrow 0=F(a)+c \Rightarrow$
$c=-F(a) \Rightarrow G(x)=F(x)-F(a) \Rightarrow G(b)=F(b)-F(a) \Rightarrow$
$\int_a^b f = F(b)-F(a)$

<u>Σχόλιο</u> Υπάρχει μια πιο ισχυρή εκδοχή του παραπάνω θεωρήματος όπου η f είναι ολοκληρώσιμη αντί για συνεχής (η απόδειξη είναι πιο δύσκολη αφού δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί το 1ο θεμελιώδες θεώρημα).

<u>Παράδειγμα</u>

1) $f(x)=\frac{d}{dx}\int_a^{x^3}\frac{1}{1+\sin^2 t}\,dt = \frac{d}{dx}(F\circ g)(x)$, $F(x)=\int_a^x \frac{1}{1+\sin^2 t}\,dt$, $g(x)=x^3$

$$\Rightarrow f(x)=F'(g(x))\cdot g'(x) = F'(x^3)\cdot 3x^2 = \frac{1}{1+\sin^2 x^3}\cdot 3x^2$$

2) $\frac{d}{dx}\int_a^{\sin x}\frac{1}{1+\sin^2 t}\,dt = \frac{1}{1+\sin^2(\sin x)}\cdot\cos x$

3) $f(x)=\int_a^{\int_a^x \frac{1}{1+\sin^2 t}dt}\frac{1}{1+\sin^2 t}\,dt = (F\circ F)(x)$, $F(x)=\int_a^x \frac{1}{1+\sin^2 t}\,dt$

$$f'(x)=F'(F(x))\cdot F'(x) = \frac{1}{1+\sin^2\left(\int_a^x \frac{1}{1+\sin^2 t}dt\right)}\cdot\frac{1}{1+\sin^2 x}$$