ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

Μαθηματικός Λογισμός

Σημειώσεις – Εφαρμογές παραγώγων

Κοφινάς Γιώργος

Τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών και Επικοινωνιακών Συστημάτων

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

<u>Εφαρμογές των παραγώγων</u>

Η αξία της παραγώγου f' (πέραν από τη χρησιμότητα της στον ολοκληρωτικό λογισμό) έγκειται στο ότι παρέχει αρκετή πληροφορία για την ίδια τη συνάρτηση f.

<u>Ορισμός</u> Λέμε ότι η συνάρτηση f έχει τοπικό μέγιστο $f(c)$ στο σημείο c, αν $\exists \delta > 0 : \forall x \in (c-\delta, c+\delta) \cap D_f$, $f(x) \leq f(c)$.
Αντίστοιχα, για τοπικό ελάχιστο $f(x) \geq f(c)$.

Όμοια, λέμε ότι η f έχει ολικό μέγιστο $f(c)$ στο σημείο c αν $f(x) \leq f(c)$, $\forall x \in D_f$.
Αντίστοιχα, για ολικό ελάχιστο $f(x) \geq f(c)$.

<u>Σχόλιο</u> Ολικά ακρότατα μπορεί να υπάρχουν ή να υπάρχει το ένα από τα δύο ή να μην υπάρχουν καθόλου.

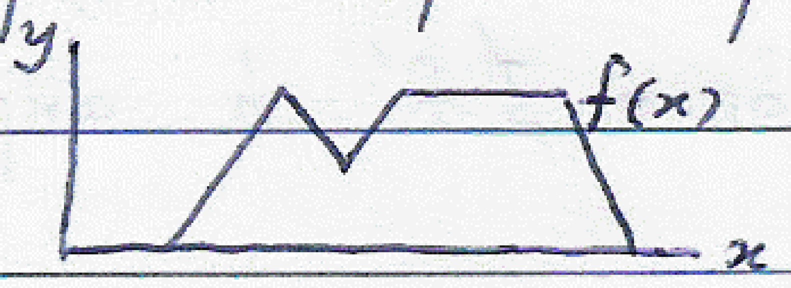
π.χ. η $y=x^2$ στο $(-\infty, +\infty)$, $\nexists$ ολικό μέγιστο, $\exists$ ολικό ελάχιστο 0 για $x=$

η $y=x^2$ στο $[0,2]$, $\exists$ ολικό μέγιστο 4 για $x=2$
$\exists$ ολικό ελάχιστο 0 για $x=0$

η $y=x^2$ στο $(0,2]$, $\exists$ ολικό μέγιστο 4 για $x=2$
$\nexists$ ολικό ελάχιστο

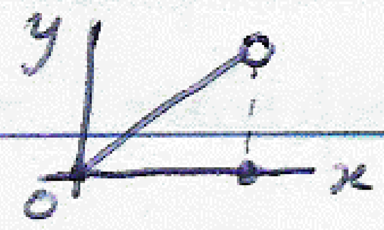
η $y=x^2$ στο $(0,2)$, $\nexists$ ολικά ακρότατα

Ακόμα μπορεί να υπάρχουν περισσότερα του ενός σημεία μεγίστου $c \in D_f$, π.χ.



Πάντως, αν $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής, τότε $\exists$ ολικό ελάχιστο και ολικό μέγιστο, αφού $f([a,b])$ είναι κλειστό διάστημα.
Η ύπαρξη όμως ακόμα και ενός σημείου ασυνέχειας μπορεί να αναιρέσει την ύπαρξη ολικού μεγίστου/ελαχίστου σε κλειστό διάστημ

π.χ. $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$



<u>Πρόταση</u> Αν η f έχει τοπικό ακρότατο σ' ένα εσωτερικό σημείο c και $\exists f'(c)$, τότε $f'(c) = 0$.

Απόδειξη

Έστω $f(c)$ τοπικό μέγιστο. Σε μια γειτονιά του c θα είναι $f(x) \le f(c)$, $\forall x \in (c-\delta, c+\delta) \cap D_f$.

Αφού $\exists f'(c)$, άρα $\exists f'_+(c)$, $f'_-(c)$ και $f'(c) = f'_+(c) = f'_-(c)$.

Αλλά $f'_+(c) = \lim\limits_{x \to c^+} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} \le 0$ αφού $x > c$

και $f'_-(c) = \lim\limits_{x \to c^-} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} \ge 0$ αφού $x < c$

Άρα $f'(c) = 0$. Όμοια για $f(c)$ τοπικό ελάχιστο (ή θεωρούμε $-f$)

Σημείωση: Στην παραπάνω πρόταση δεν χρησιμοποιείται παραγωγισιμότητα ή συνέχεια της f παρά μόνο στο c.

Η εύρεση των ακροτάτων είναι σχετικά δύσκολη υπόθεση και τα σημεία όπου $f'=0$ δεν σημαίνει απαραιτήτως ότι είναι ακρότατα. Δηλαδή το αντίστροφο της παραπάνω πρότασης δεν ισχύει, π.χ. $f(x) = x^3$, είναι $f'(0)=0$, αλλά η f δεν έχει ούτε τοπικά ούτε ολικά ακρότατα.

Λόγω της σημασίας των σημείων c με $f'(c)=0$, έχουν ειδική ονομασία, λέγονται κρίσιμα σημεία, και οι τιμές $f(c)$ λέγονται κρίσιμες τιμές.

Πόρισμα Τα σημεία ακροτάτων (ολικά, τοπικά) είναι ή κρίσιμα σημεία της f ή σημεία όπου $\nexists f'$ ή ακραία σημεία του D_f (αν υπάρχουν).

Απόδειξη

Ένα σημείο του D_f ή είναι εσωτερικό όπου $\exists f'$ ή είναι εσωτερικό όπου $\nexists f'$ ή είναι ακραίο σημείο. Αλλά ένα εσωτερικό σημείο ακροτάτου όπου $\exists f'$ έχει από την παραπάνω πρόταση $f'=0$, άρα είναι κρίσιμο. Αν ειδικά $f'=0$ στο άκρο, τότε ήδη το σημείο αυτό ανήκει στην κατηγορία 3 των ακραίων σημείων του D_f.

Επομένως, ψάχνοντας για ακρότατα, θα πρέπει να τα αναζητούμε μόνο ανάμεσα στις 3 αυτές κατηγορίες, με το φόβο πάντα μην τυχόν κάποιο κρίσιμο σημείο αποτυγχάνει να είναι ακρότατο. Επομένως, δεν έχουμε ακόμα διατυπώσει μεθοδολογία εύρεσης ακροτάτων. Στα παρακάτω παραδείγματα θα πάρουμε μια ιδέα, χωρίς να είναι πλήρης, μιας και θα κάνουμε και διαγράμματα για να σιγουρευτούμε για τα ακρότατα.

Παράδειγμα

1) $f(x) = x^3 - x$, $x \in [-1, 2]$

$f'(x) = 3x^2 - 1$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \in [-1, 2]$ κρίσιμα σημεία.

Το $D = [-1, 2]$ είναι κλειστό διάστημα, άρα υπάρχει ολικό μέγιστο και ολικό ελάχιστο που πρέπει να αναζητηθούν στα 4 σημεία: $-1, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 2$.

Είναι $f(-1) = 0$

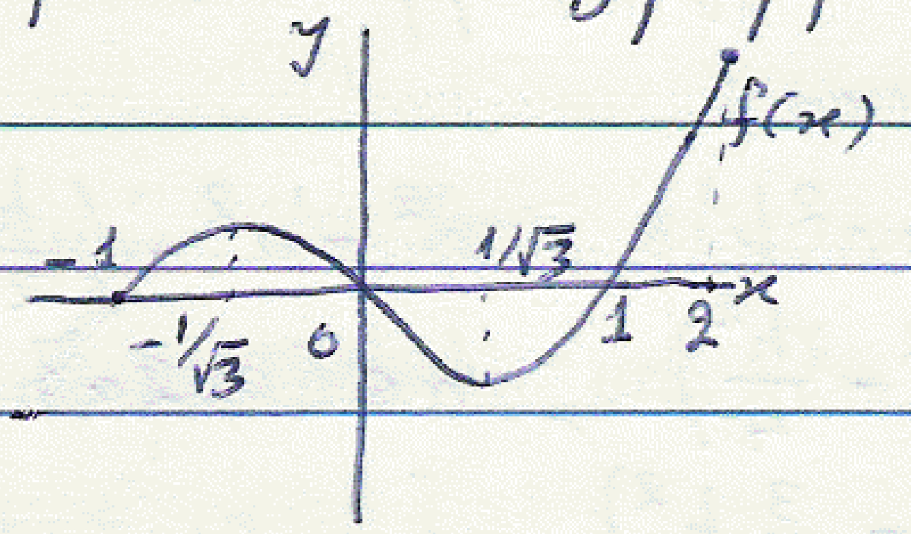
$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 - \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$f(2) = 6$

Άρα $f_{min} = -\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{3}}$ στο $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $f_{max} = 6$ στο $x = 2$.

Εδώ δεν χρειάζεται να κάνουμε το διάγραμμα, αλλά για επιβεβαίωση



2) $f(x) = x^{2/3}$, $x \in [-2, 3]$

$f'(x) = \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}} \neq 0$

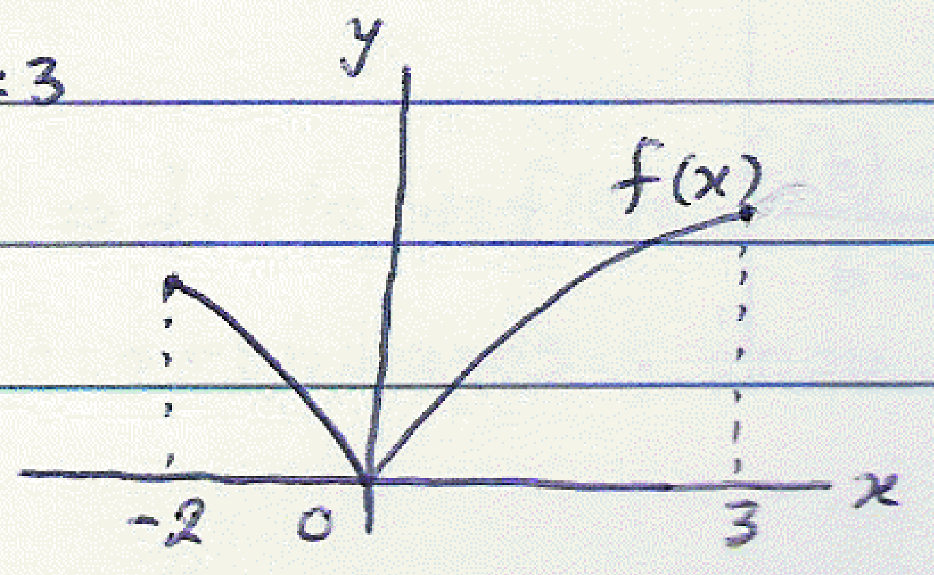
$\nexists f'(0)$

Άρα τα ακρότατα αναζητούνται μεταξύ των $-2, 0, 3$.

Είναι $f(-2) = (-2)^{2/3} = \sqrt[3]{4}$, τοπικό μέγιστο στο $x = -2$

$f(0) = 0$, ολικό ελάχιστο στο $x = 0$

$f(3) = 3^{2/3} = \sqrt[3]{9}$, ολικό μέγιστο στο $x = 3$

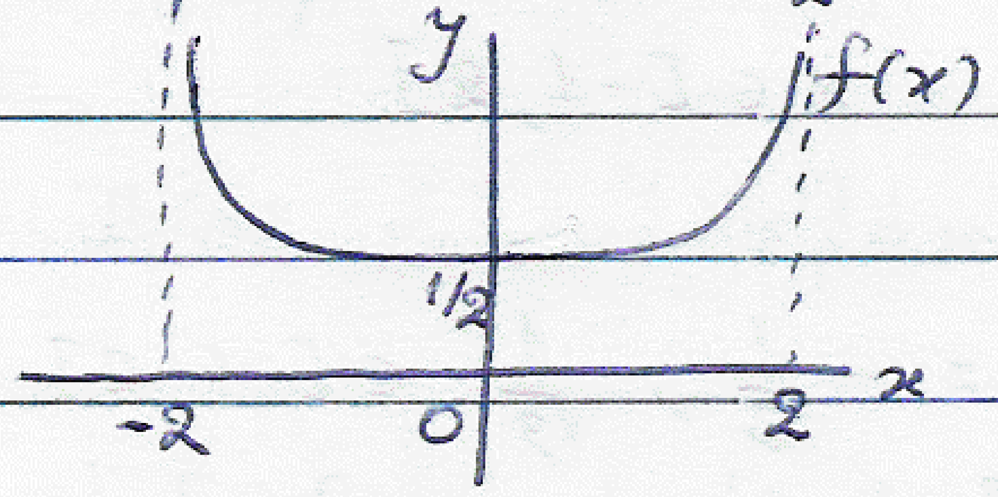


3) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$, $x\in(-2,2)$

Δεν υπάρχουν άκρα, άρα τα ακρότατα αναζητούνται στα κρίσιμα σημεία.

$f'(x) = \dfrac{x}{(4-x^2)^{3/2}}$

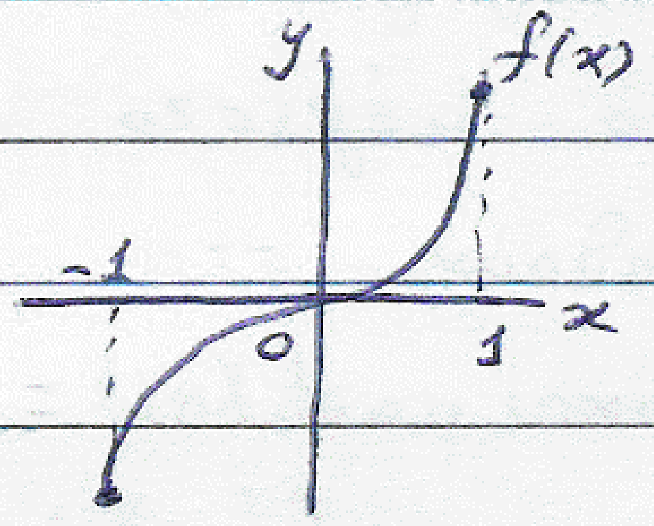
$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$, ολικό ελάχιστο $f(0)=\frac{1}{2}$.



4) $f(x)=x^3$, $x\in[-1,1]$

$f'(x)=3x^2$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$



Άρα τα υποψήφια για ακρότατα: $-1, 0, 1$.

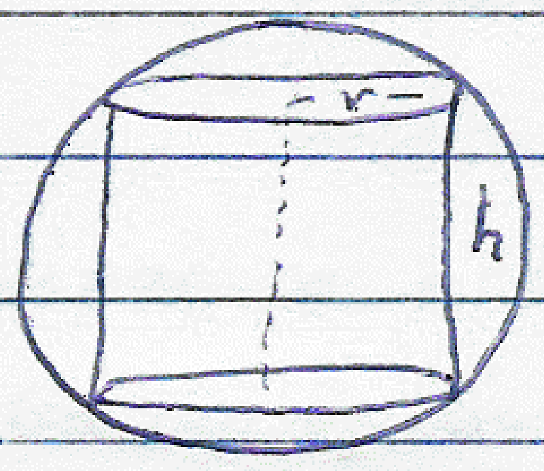
Είναι $f(-1)=-1$, $f(0)=0$, $f(1)=1$

Άρα $f(-1)=1$ ολικό ελάχιστο, $f(1)=1$ ολικό μέγιστο

Το $f(0)=0$ δεν είναι ούτε τοπικό μέγιστο ούτε τοπικό ελάχιστο

5) Για κύλινδρο εγγεγραμμένο σε σφαίρα ακτίνας a, ποιος έχει το μέγιστο όγκο;

Είναι $V=\pi r^2 h$, $r^2=a^2-\left(\frac{h}{2}\right)^2$



$V(h)=\pi h\left(a^2-\frac{h^2}{4}\right)$, $h\in[0,2a]$

$V'(h)=\pi\left(a^3-\frac{3}{4}h^2\right)$

$V'(h)=0 \Leftrightarrow h=\frac{2a}{\sqrt{3}}$

Τα ακρότατα είναι μεταξύ των $0, \frac{2a}{\sqrt{3}}, 2a$

Είναι $V(0)=0$, $V\left(\frac{2a}{\sqrt{3}}\right)=\frac{4}{\sqrt{3}}\pi a^3$, $V(2a)=0$

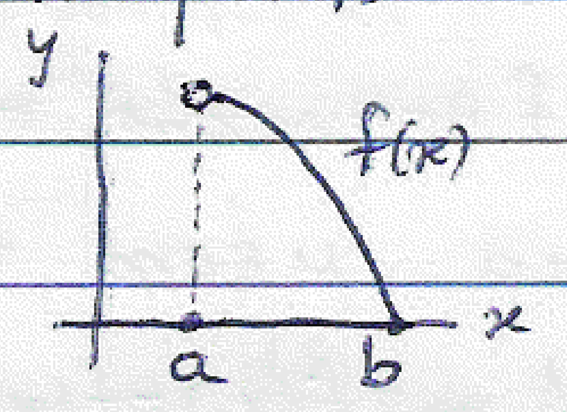
Άρα $V_{max}=\frac{4}{\sqrt{3}}\pi a^3$ για $h=\frac{2a}{\sqrt{3}}$, $r=\sqrt{\frac{2}{3}}$

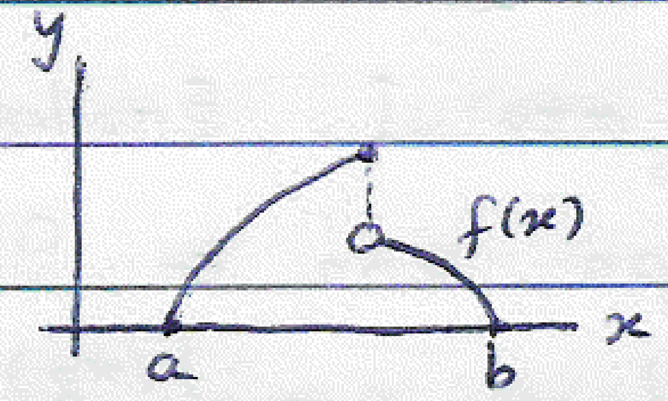
Το θεώρημα μέσης τιμής είναι ίσως το σημαντικότερο αποτέλεσμα σχετικά με παραγώγους.
Μια ειδική περίπτωση του θεωρήματος μέσης τιμής είναι το θεώρημα Rolle.

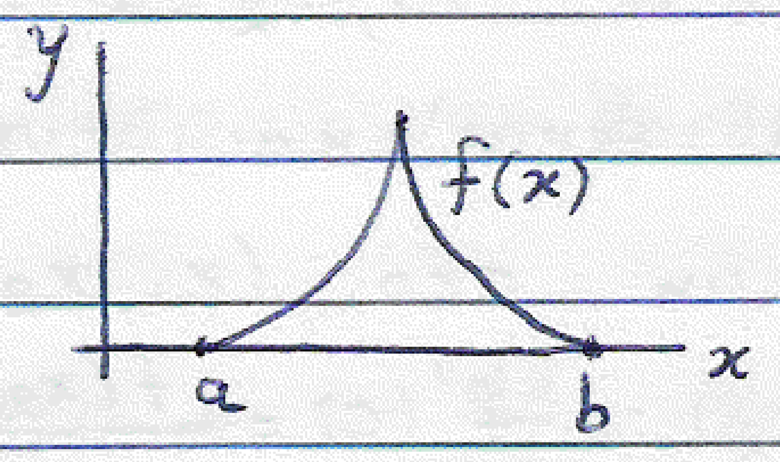
<u>Θεώρημα</u> (Rolle)
f συνεχής στο $[a,b]$, παραγωγίσιμη στο (a,b), $f(a)=f(b)$
$\Rightarrow \exists\, c\in(a,b) : f'(c)=0$

<u>Απόδειξη</u>
Αφού f συνεχής στο $[a,b]$, άρα υπάρχει ολικό μέγιστο και ολικό ελάχιστο της f.
Αν $c\in(a,b)$ είναι σημείο ολικού μεγίστου, τότε αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο (a,b) θα είναι παραγωγίσιμη και στο c. Άρα $f'(c)=0$ και τελειώσαμε.
Αν $c\in(a,b)$ είναι σημείο ολικού ελαχίστου, τότε πάλι $f'(c)=0$ και τελειώσαμε.
Αν και η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή είναι στα άκρα του $[a,b]$ τότε αφού $f(a)=f(b)$, άρα το μέγιστο και το ελάχιστο συμπίπτουν, άρα $f=$σταθερή και μπορεί να επιλεγεί οποιοδήποτε $c\in(a,b)$ με $f'(c)=0$.

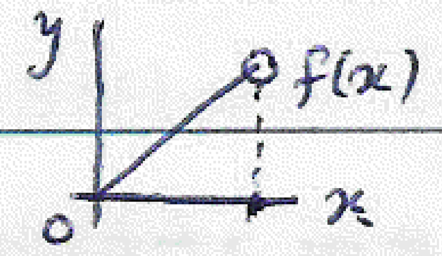
<u>Σχόλιο</u> Αν η f δεν είναι συνεχής ή δεν είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο, αρκεί για να ακυρωθεί η ύπαρξη οριζόντιας εφαπτόμενης.







π.χ. $f(x)=x-[x]$



π.χ. $f(x)=1-|x|$

<u>Θεώρημα</u> (μέσης τιμής)
f συνεχής στο $[a,b]$, παραγωγίσιμη στο $(a,b) \Rightarrow \exists\, c\in(a,b): f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$
Δηλαδή, υπάρχει σημείο στο εσωτερικό του διαστήματος, όπου ο

στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής ισούται με το μέσο ρυθμό μεταβολής στο $[a,b]$

Απόδειξη

Αν $h(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ τότε h συνεχής στο $[a,b]$, παραγωγίσιμη στο (a,b) και $h(a)=h(b)=f(a)$. Από το θεώρημα Rolle $\exists\, c\in(a,b): h'(c)=0 \Rightarrow f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0 \Rightarrow f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Παράδειγμα

$f(x)=x^2,\quad x\in[0,2]$

Είναι $f(0)=0,\ f(2)=4$

$\exists\, c\in(0,2):\ f'(c)=\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{4-0}{2-0}=2$

Μάλιστα $f'(c)=2c$, άρα $2c=2\Rightarrow c=1$.

Μέχρι τώρα οι προτάσεις ήταν της μορφής όπου πληροφορία για την f έδινε πληροφορία για την f'. Τώρα ξεκινάμε την αντίθετη, πιο σημαντική κατεύθυνση, όπου πληροφορία για την f' δίνει πληροφορία για την f.

Πόρισμα 1

Αν $f'(x)=0,\ \forall x\in I$ (I διάστημα), τότε $f=$ σταθερή στο I

Απόδειξη

Η υπόθεση $f'(x)=0$ σημαίνει $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=0$ και δεν είναι προφανές πώς αυτό το όριο μπορεί να δώσει πληροφορία για την f. Έστω τυχόντα $x_1,x_2\in I$ με $x_1<x_2$. Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο I, άρα είναι και συνεχής στο I. Επομένως f συνεχής στο $[x_1,x_2]$, παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2), άρα από το θεώρημα μέσης τιμής, $\exists\, c\in(x_1,x_2):\ f'(c)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\Rightarrow 0=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\Rightarrow f(x_1)=f(x_2),\ \forall x_1,x_2\in I$.

Άρα f σταθερή στο I.

Το αντίστροφο του πορίσματος 1 είναι αληθές και προφανές.

Επίσης, αν η f ορίζεται σε δύο ή περισσότερα διαστήματα, τότε δεν ισχύει το πόρισμα, π.χ. η  έχει $f'=0$, $f\neq$ σταθερή.

Πόρισμα 2

Αν $f'(x) = g'(x)$, $\forall x \in I$ (I διάστημα), τότε $f = g + c$, c=σταθερά

Απόδειξη

$\forall x \in I$ είναι $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$, άρα $f - g = c \Leftrightarrow f = g + c$

Παράδειγμα

1) $f'(x) = \sin x$, η f περνάει από το $(0,2)$. Βρείτε την f.

Αφού η $g(x) = -\cos x$ έχει $g'(x) = \sin x$, άρα $f'(x) = g'(x) \Rightarrow$

$f(x) = g(x) + c \Rightarrow f(x) = -\cos x + c$.

$f(0) = -\cos 0 + c = c - 1 \Rightarrow 2 = c - 1 \Rightarrow c = 3$.

Τελικά $f(x) = -\cos x + 3$

2) $f'(x) = \sin^4 2x \cdot \cos 2x$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$

Είναι

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \sin^5 2x + c = \frac{1}{10} \sin^5 2x + c$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{10} \sin^5 \pi + c = 0 + c \Rightarrow 3 = c$$

Άρα $f(x) = \frac{1}{10} \sin^5 2x + 3$

Διαφορική εξίσωση λέγεται μια εξίσωση που περιέχει την άγνωστη συνάρτηση $y(x)$ και παραγώγους της, δηλ. $F(x, y, y', \ldots) =$

Μια συνάρτηση $y(x)$ που ικανοποιεί τη δ.ε. λέγεται λύση της δ.ε.

π.χ. η $y(x) = -\cos x + c$ είναι λύση της δ.ε. $y' = \sin x$.

Παράδειγμα

$\frac{d^2 s}{dt^2} = -9.8$, $s(0) = 3$, $v(0) = \frac{ds}{dt}(0) = 160$. Να βρεθεί το $s(3)$

Είναι $v = \frac{ds}{dt} = -9.8t + c$, όπου $v(0) = c = 160 \Rightarrow v = \frac{ds}{dt} = -9.8t + 160$

Άρα

$$s(t) = -\frac{9.8}{2} t^2 + 160t + C', \text{ όπου } s(0) = C' = 3, \text{ άρα}$$

$$s(t) = -4.9t^2 + 160t + 3$$

$$\Rightarrow s(3) = -4.9(3)^2 + 160(3) + 3 = 438.9\,m$$

Πρόταση

Αν $f'(x)>0$, $\forall x\in I$ (I διάστημα), τότε f γνήσια αύξουσα στο I.

Αντίστοιχα, αν $f'(x)<0$, $\forall x\in I$, τότε f γνήσια φθίνουσα στο I.

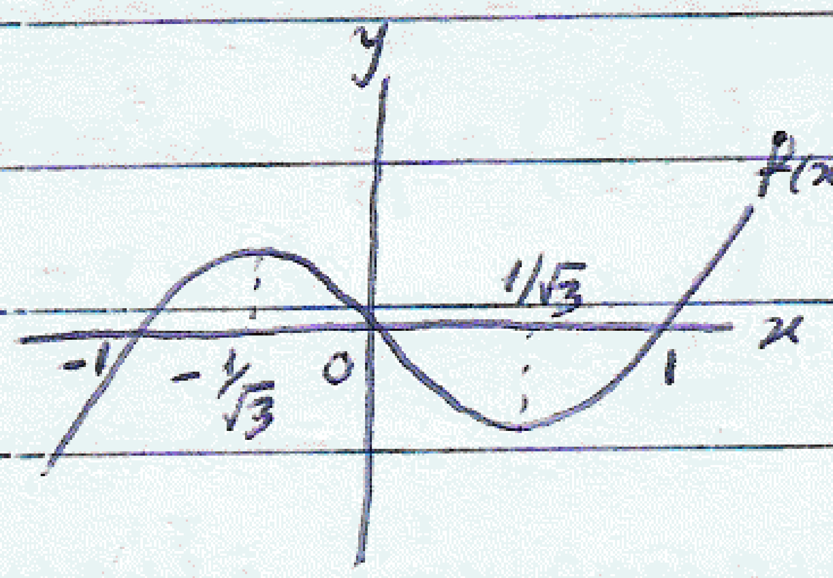
Απόδειξη

Έστω $f'(x)>0$ και τυχόντα $x_1, x_2 \in I$ με $x_1<x_2$. Αφού f παραγωγίσιμη στο I, άρα και συνεχής στο I. Επομένως f συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2), άρα από το θεώρημα μέσης τιμής $\exists\, c\in(x_1,x_2)$: $f'(c)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$. Αλλά $f'(c)>0$, άρα $f(x_2)-f(x_1)>0 \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$, δηλαδή f γνήσια αύξουσα.

Όμοια για $f'(x)<0$

Σχόλιο Το αντίστροφο της παραπάνω πρότασης δεν ισχύει, διότι η $f(x)=x^3$ είναι γνήσια αύξουσα, αλλά έχει $f'(x)\geq 0$ και όχι $f'(x)>0$. Επίσης, για $f'(x)\geq 0$, η f είναι αύξουσα (αντ. για φθίνουσα), όπως φαίνεται από την απόδειξη.

Παράδειγμα



$f(x)=x^3-x$, $x\in(-\infty,\infty)$

$f'(x)=3x^2-1$

$f'(x)>0 \Leftrightarrow x^2>\frac{1}{3} \Leftrightarrow x>\frac{1}{\sqrt{3}}, x<-\frac{1}{\sqrt{3}}$

$f'(x)<0 \Leftrightarrow x^2<\frac{1}{3} \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{3}}<x<\frac{1}{\sqrt{3}}$

Άρα f γνήσια αύξουσα στο $(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{3}})\cup(\frac{1}{\sqrt{3}},\infty)$ και γνήσια φθίνουσα στο $(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$.

Καταλήγουμε επομένως στην 1η μέθοδο εύρεσης τοπικών ακροτάτων, η οποία δεν χρήζει απομνημόνευσης, θα είναι προφανές το τι γίνεται ανά περίπτωση.

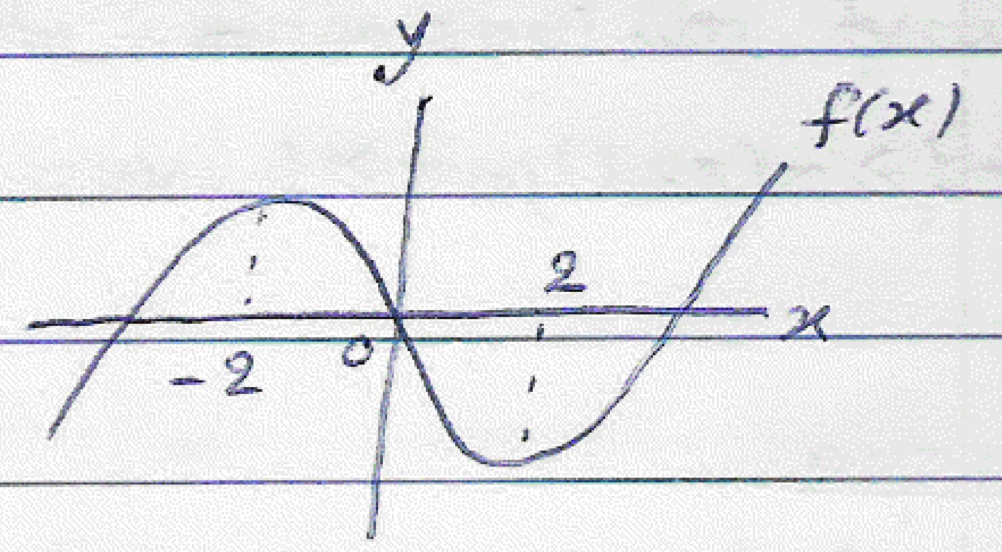
Θεώρημα (1ο κριτήριο τοπικών ακροτάτων)

- Αν $f'>0$ σε κάποιο διάστημα αριστερά του c και $f'<0$ σε κάποιο διάστημα δεξιά του c, τότε το c είναι σημείο τοπικού μεγίστου
- Αν $f'<0$ σε κάποιο διάστημα αριστερά του c και $f'>0$ σε κάποιο διάστημα δεξιά του c, τότε το c είναι σημείο τοπικού ελαχίστου
- Αν f' έχει το ίδιο πρόσημο σε κάποιο διάστημα αριστερά του c και δεξιά του c, τότε το c δεν είναι σημείο τοπικού ακροτάτου.

Παράδειγμα

1) $f(x) = x^3 - 12x - 5$

$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x+2)(x-2)$



	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
f'	+	−	+	
f	↗	↘	↗	

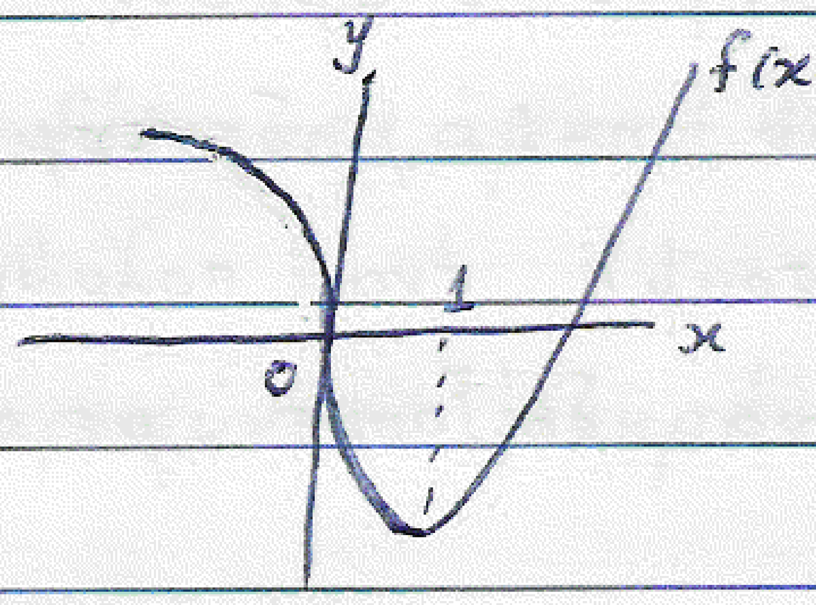
Επομένως, στο $x=-2$ εμφανίζει τοπικό μέγιστο, στο $x=2$ τοπικό ελάχιστο

2) $f(x) = x^{1/3}(x-4) = x^{4/3} - 4x^{1/3}$

$f'(x) = \frac{4}{3}x^{1/3} - \frac{4}{3}x^{-2/3} = \frac{4(x-1)}{3x^{2/3}}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$\nexists f'(0)$



	$-\infty$	0	1	$+\infty$
f'	−	−	+	
f	↘	↘	↗	

Άρα, υπάρχει τοπικό ελάχιστο στο $x=1$ ίσο με $f(1) = -3$ (μάλιστα είναι ολικό ελάχιστο).

Παράδειγμα

1) Να δειχθεί ότι $\sin x \leq x$, $x \geq 0$

Αν $f(x) = x - \sin x$, $f(0) = 0$

$f'(x) = 1 - \cos x$

$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \cos x \geq 0 \Leftrightarrow \cos x \leq 1$ που ισχύει $\forall x$

Άρα η f είναι αύξουσα, επομένως $f(x) \geq f(0)$, $\forall x \geq 0 \Rightarrow$

$x - \sin x \geq 0$, $\forall x \geq 0 \Rightarrow \sin x \leq x$, $x \geq 0$

Με τον τρόπο αυτό μπορούν να δειχθούν πολλές ανισότητες

2) Να δειχθεί ότι $x^n - 1 \geq n(x-1)$, $x \geq 1$, $n \in N^*$

Αν $f(x) = x^n - 1 - n(x-1)$, $f(1) = 0$

$f'(x) = nx^{n-1} - n = n(x^{n-1} - 1)$

$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x^{n-1} - 1 \geq 0$, που ισχύει $\forall x \geq 1$

Άρα f αύξουσα $\Rightarrow f(x) \geq f(1)$, $\forall x \geq 1 \Rightarrow x^n - 1 - n(x-1) \geq 0, \forall x \geq 1$

$\Rightarrow x^n - 1 \geq n(x-1)$, $x \geq 1$

Πόρισμα

Ένα πολυώνυμο βαθμού n έχει το πολύ n διαστήματα όπου είναι γνήσια αύξον ή γνήσια φθίνον.

Απόδειξη

Καταρχήν παρατηρούμε ότι αν μια συνάρτηση $f(x)$ έχει n διαφορετικές ρίζες τότε η f' έχει τουλάχιστον $n-1$ διαφορετικές ρίζες. Πράγματι, αν $f(x_1) = f(x_2) = 0$ τότε από το θ. Rolle $\exists x \in (x_1, x_2)$: $f'(x) = 0$. Αφού υπάρχουν $n-1$ τέτοια διαστήματα ριζών, θα υπάρχουν τουλάχιστον $n-1$ μηδενισμοί της f'.

Αν θεωρήσουμε ένα πολυώνυμο βαθμού n, $f(x) = a_n x^n + \dots + a_0$, τότε μπορούμε να δείξουμε με επαγωγή ότι το f έχει το πολύ n διαφορετικές ρίζες.

Πράγματι, για $n=1$ το $f(x) = a_1 x + a_0$ έχει μία ρίζα. Έστω ότι ισχύει για την τιμή n. Αν το πολυώνυμο $n+1$ βαθμού $g(x) = b_{n+1} x^{n+1} + \dots + b_0$ είχε περισσότερες από $n+1$ διαφορετικές ρίζες, τότε με βάση το προηγούμενο, το πολυώνυμο n βαθμού $g'(x)$ θα είχε τουλάχιστον $n+1$ διαφορετικές ρίζες, άτοπο αφού εξ' υποθέσεως έχει το πολύ n διαφορετικές ρίζες. Άρα το g έχει το πολύ $n+1$ διαφορετικές ρίζες και αποδείχθηκε η επαγωγή.

Αν θεωρήσουμε ένα πολυώνυμο n βαθμού $f(x) = a_n x^n + \dots + a_0$, τότε η παράγωγος f' είναι πολυώνυμο $n-1$ βαθμού, άρα έχει το πολύ $n-1$ ρίζες, δηλαδή η f έχει το πολύ $n-1$ κρίσιμα σημεία. Επειδή η f' είναι συνεχής, άρα στο διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών κρίσιμων σημείων ή στα ακραία διαστήματα μέχρι το $\pm\infty$, η f' θα είναι ή θετική ή αρνητική. Δηλαδή στα διαστήματα αυτά η f θα είναι ή γνήσια αύξουσα ή γνήσια φθίνουσα. Επειδή υπάρχουν το πολύ n τέτοια διαστήματα, άρα υπάρχουν το πολύ n διαστήματα όπου η f είναι γνήσια αύξουσα ή γνήσια φθίνουσα.

Η 2η μέθοδος εύρεσης τοπικών ακροτάτων, στις περιπτώσεις που μπορεί να εφαρμοστεί, είναι ευκολότερη από την 1η γιατί εξαρτάται μόνο από τη συμπεριφορά της συνάρτησης στα κρίσιμα σημεία.

Θεώρημα (2ο κριτήριο τοπικών ακροτάτων)
Έστω f παραγωγίσιμη σε μια περιοχή του c.
Αν $f'(c)=0$, $f''(c)<0$, τότε η f έχει τοπικό μέγιστο στο c
Αντίστοιχα, αν $f'(c)=0$, $f''(c)>0$ η f έχει τοπικό ελάχιστο στο c

Απόδειξη
Αφού f παραγωγίσιμη σε μια περιοχή του c, άρα $\exists f'(c+h)$ για $|h|$ αρκούντως μικρό.
Είναι $f''(c)=\lim_{h\to 0}\frac{f'(c+h)-f'(c)}{h}$, αλλά $f'(c)=0$, άρα $f''(c)=\lim_{h\to 0}\frac{f'(c+h)}{h}$

Αν $f''(c)<0$, τότε $\frac{f'(c+h)}{h}<0$ για $|h|$ αρκούντως μικρό.
Άρα, αν $h<0$, είναι $f'(c+h)>0$
αν $h>0$, είναι $f'(c+h)<0$
Δηλαδή, η f είναι γνήσια αύξουσα αριστερά του c και γνήσια φθίνουσα δεξιά του c, επομένως έχει τοπικό μέγιστο στο c.
Όμοια για $f''(c)>0$.

Σχόλιο Το κριτήριο αυτό δεν μπορεί να εφαρμοστεί όταν $f''(c)=0$ π.χ. για $f(x)=x^3, x^4$ ή ακόμα όταν $\nexists f''(c)$, π.χ. για $f(x)=x^{4/3}$ (αν και υπάρχει τοπικό ελάχιστο στο 0) ή ακόμα όταν $\nexists f'(c)$, π.χ. για $f(x)=|x|$ (επίσης υπάρχει τοπικό ελάχιστο στο 0)

Παράδειγμα
1) $f(x)=x^3-x$
$f'(x)=3x^2-1$, $f''(x)=6x$
$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$
$f''\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{6}{\sqrt{3}}<0$, $f''\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{6}{\sqrt{3}}>0$

Άρα, στο $x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ υπάρχει τοπικό μέγιστο και στο $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ τοπικό ελάχιστο.

2) $f(x) = x^3 - 12x - 5$

$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x^2-4)$, $f''(x) = 6x$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = -2, 2$

$f''(-2) = -12 < 0 \Rightarrow \exists$ τοπικό μέγιστο στο $x=-2$

$f''(2) = 12 > 0 \Rightarrow \exists$ τοπικό ελάχιστο στο $x=2$

<u>Πρόταση</u> (αντίστροφο του 2ου κριτηρίου τοπικών ακροτάτων)
Έστω f παραγωγίσιμη σε μια περιοχή του c.
Αν c σημείο τοπικού μεγίστου και $\exists f''(c)$, τότε $f''(c) \leq 0$
Αντίστοιχα για τοπικό ελάχιστο είναι $f''(c) \geq 0$

<u>Απόδειξη</u>
Έστω c σημείο τοπικού μεγίστου. Αφού f παραγωγίσιμη σε μια περιοχή του c, άρα το c είναι εσωτερικό σημείο τοπικού ακροτάτου, άρα $f'(c) = 0$.
Αν υποθέσουμε ότι είναι $f''(c) > 0$, τότε η f από το 2ο κριτήριο τοπικών ακροτάτων θα έχει τοπικό ελάχιστο στο c. Άρα f=σταθερή σε κάποια περιοχή του c.
Άρα $f''(c) = 0$, άτοπο. Τελικά $f''(c) \leq 0$
Όμοια για τοπικό ελάχιστο.

<u>Σχόλιο</u> Τα $\leq, \geq$ δεν μπορούν να αντικατασταθούν από $<, >$
π.χ η $f(x) = x^4$ έχει τοπικό ελάχιστο στο 0, αλλά $f''(0) = 0$.

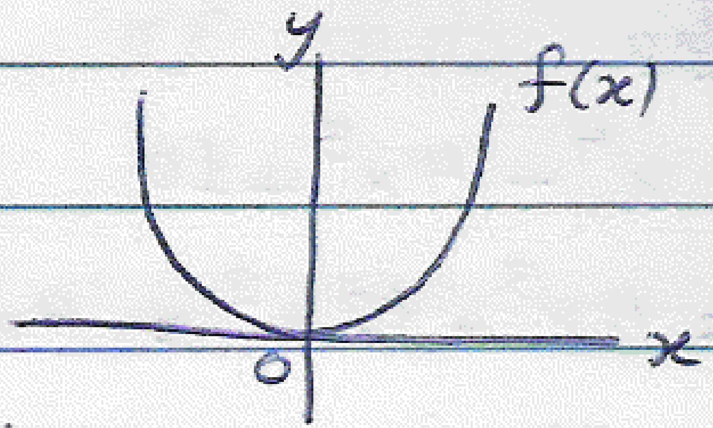
<u>Ορισμός</u> Αν f παραγωγίσιμη στο (a,b) λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα άνω ή ότι είναι κυρτή, convex (αντ. η f στρέφει τα κοίλα κάτω, κοίλη, concave) αν η f' είναι γνήσια αύξουσα στο (a,b) (αντ. γνήσια φθίνουσα)

<u>Πρόταση</u> Αν η f είναι διπλά παραγωγίσιμη, τότε στρέφει τα κοίλα άνω στα διαστήματα με $f''>0$ και κάτω όπου $f''<0$.

<u>Απόδειξη</u>
Πράγματι, σε κάθε διάστημα με $f''>0$, η f' είναι γνήσια αύξουσα, επομένως κυρτή. Αντίστοιχα για το $f''<0$.

Παράδειγμα

1) $f(x) = x^2 \quad , \quad x \in (-\infty, \infty)$



$f'(x) = 2x$

$f''(x) = 2$, άρα f έχει παντού κοίλα άνω

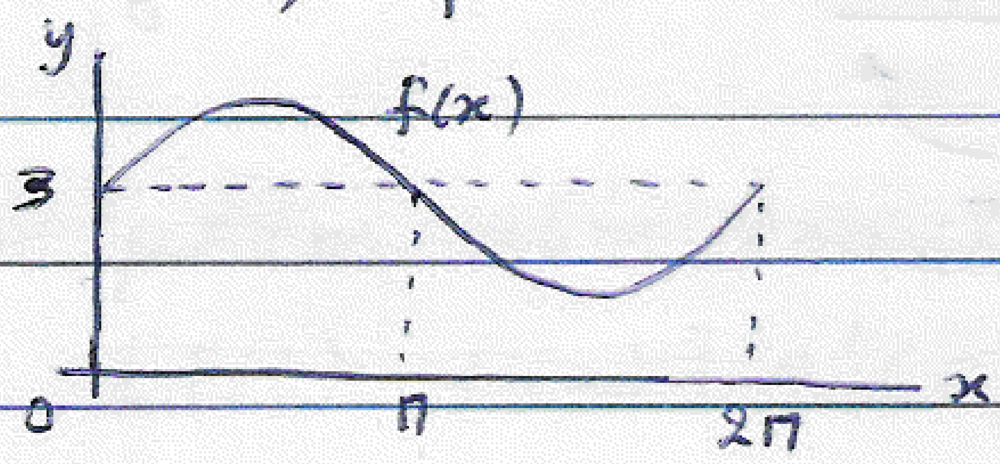
2) $f(x) = 3 + \sin x \quad , \quad x \in [0, 2\pi]$

$f'(x) = \cos x$

$f''(x) = -\sin x$

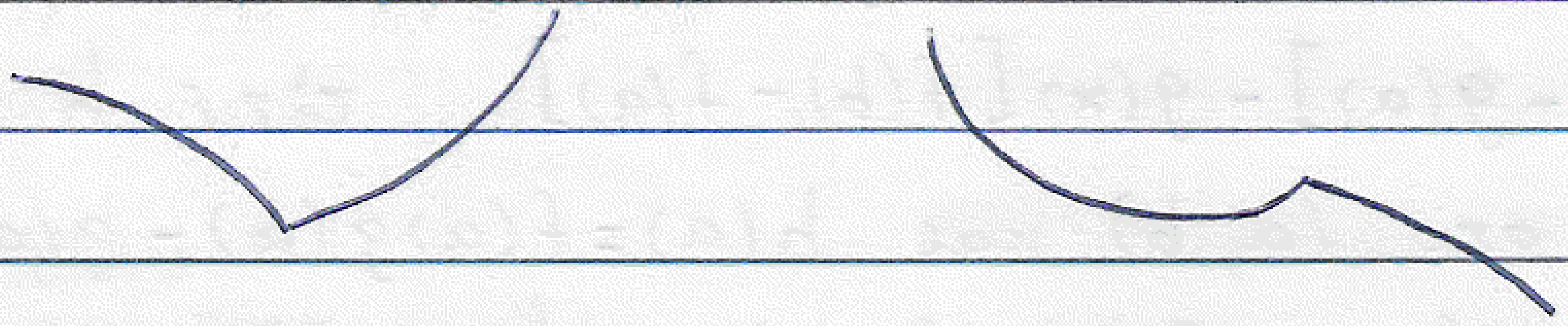
Στο $(0, \pi)$ είναι $f'' < 0$, άρα η f έχει τα κοίλα κάτω

Στο $(\pi, 2\pi)$ είναι $f'' > 0$, άρα η f έχει τα κοίλα άνω



Ορισμός Ένα σημείο της γραφικής παράστασης όπου υπάρχει εφαπτομένη (ακόμη και κατακόρυφη) και που αλλάζει η κοιλότητα της συνάρτησης δεξιά και αριστερά, λέγεται σημείο καμπής.

Χρειαζόμαστε την ύπαρξη της εφαπτομένης στο σημείο για να αποφύγουμε καταστάσεις όπου υπάρχει αλλαγή της κοιλότητας δεξιά και αριστερά, αλλά υπάρχει σπάσιμο και αυτό δεν θεωρείται σημείο καμπής



Στο σημείο καμπής ή $\exists f''$ (οπότε $f'' = 0$) ή $\nexists f''$

π.χ. $f(x) = x^3$, $f''(0) = 0$, όπου το $x = 0$ είναι σημείο καμπής

$f(x) = x^{1/3}$, $\nexists f''(0)$ $(f''(0) = \infty)$, όπου το $x = 0$ είναι σημείο καμπής

Ωστόσο μπορεί να είναι $f''(c) = 0$ και το c να μην είναι σημείο καμπής,
π.χ. $f(x) = x^4$, $f''(0) = 0$, αλλά το $x = 0$ δεν είναι σημείο καμπής.
Δηλαδή, όπως το $f'(c) = 0$ μπορεί να μην είναι ακρότατο, έτσι και το $f''(c) = 0$ μπορεί να μην είναι σημείο καμπής.

Παράδειγμα

$f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$

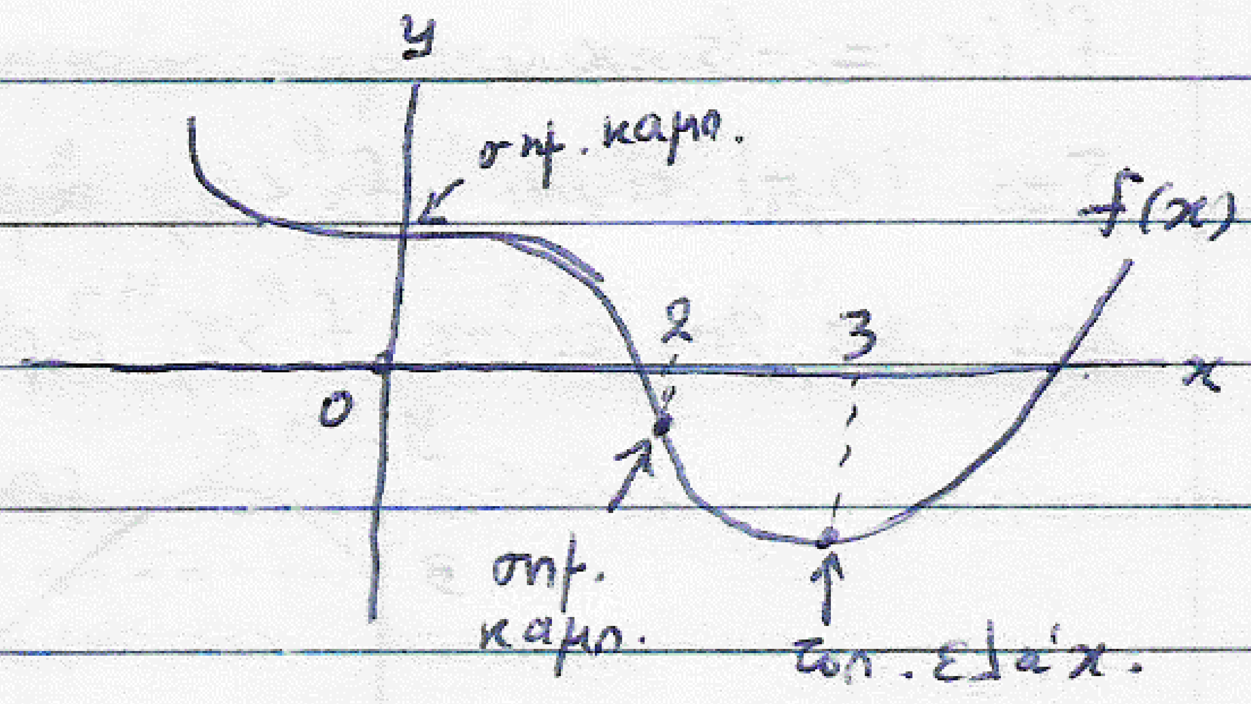
$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3)$

$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x-2)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, 3$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, 2$

	$-\infty$ — 0	0 — 2	2 — 3	3 — $+\infty$
f'	$-$	$-$	$-$	$+$
f''	$+$	$-$	$+$	$+$
f	↘	↘	↘	↗
		σημ. καμπ. (0)	σημ. καμπ. (2)	τοπ. ελάχ. (3)



Υπάρχουν κάποιες ενδιαφέρουσες ακόμη προτάσεις συνέπειες του θεωρήματος μέσης τιμής, όχι σε σχέση με διαγράμματα και ακρότατα.

Θεώρημα (μέσης τιμής του Cauchy)

f, g συνεχείς στο $[a,b]$, παραγωγίσιμες στο $(a,b) \Rightarrow$

$\exists\, c \in (a,b): \quad [f(b)-f(a)]\, g'(c) = [g(b)-g(a)]\, f'(c)$

Απόδειξη

Αν $h(x) = f(x)[g(b)-g(a)] - g(x)[f(b)-f(a)]$, τότε h συνεχής στο $[a,b]$, παραγωγίσιμη στο (a,b) και $h(a) = f(a)g(b) - g(a)f(b) = h(b)$.
Από το θεώρημα Rolle, $\exists\, c \in (a,b): h'(c) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(c)[g(b)-g(a)] - g'(c)[f(b)-f(a)] = 0$

Σχόλιο Το θεώρημα μέσης τιμής του Cauchy είναι γενικότερο από το θεώρημα μέσης τιμής διότι για $g(x) = x$ είναι $f(b)-f(a) = (b-a)f'(c)$

Θεώρημα (κανόνας L' Hôpital)

Αν $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, $\exists \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Απόδειξη

Αφού $\exists \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, άρα $\exists\ f'(x), g'(x)$ σε κάποιο διάστημα $(a-\delta, a+\delta)$ εκτός ίσως από το $x=a$. Επίσης $g'(x)\neq 0, x\in(a-\delta, a+\delta)$ εκτός ίσως του $x=a$.

Αν επεκτείνουμε ή τροποποιήσουμε τις f, g ώστε $f(a)=g(a)=0$, τότε f, g συνεχείς στο a (κανονικά είναι $\tilde{f}, \tilde{g}$).

Έστω $t\in(a, a+\delta)$. Αν υποθέσουμε ότι $g(t)=0$ τότε από το Θ. Rolle για την g στο $[a,t]$ θα υπάρχει $c\in(a,t)$: $g'(c)=0$, άτοπο, αφού $g'(x)\neq 0$, $\forall x\in(a-\delta, a+\delta)\setminus\{a\}$. Άρα $g(t)\neq 0$, $\forall t\in(a, a+\delta)$.

Από το θεώρημα μέσης τιμής του Cauchy για τις f, g στο $[a,t]$, $\exists\ c_t\in(a,t)$: $[f(t)-f(a)]\,g'(c_t) = [g(t)-g(a)]\,f'(c_t)$

$$\Rightarrow [f(t)-0]\,g'(c_t) = [g(t)-0]\,f'(c_t)$$

$$\Rightarrow \frac{f(t)}{g(t)} = \frac{f'(c_t)}{g'(c_t)}$$

Αλλά για $t\to a$ είναι $c_t\to a$, άρα

$$\lim_{t\to a}\frac{f'(c_t)}{g'(c_t)} = \lim_{t\to a}\frac{f'(t)}{g'(t)} \Rightarrow \lim_{t\to a}\frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{t\to a}\frac{f'(t)}{g'(t)}.$$

<u>Σχόλιο</u> Ο κανόνας του L'Hôpital εφαρμόζεται και για πλευρικά όρια.

<u>Παράδειγμα</u>

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x-\sin x}{x} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3-\cos x}{1} = 2$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}}{1} = \dfrac{1}{2}$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1-\frac{x}{2}}{x^2} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{1}{2}}{2x} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{4}\frac{1}{(1+x)^{3/2}}}{2} = -\dfrac{1}{8}$

4) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{x^2} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\cos x}{2x} = \infty$

5) $\lim\limits_{x\to (\frac{\pi}{2})^-}\dfrac{\sec x}{1+\tan x} = \dfrac{\infty}{\infty} = \lim\limits_{x\to (\frac{\pi}{2})^-}\dfrac{\sec x . \tan x}{\sec^2 x} = \lim\limits_{x\to (\frac{\pi}{2})^-}\sin x = 1$

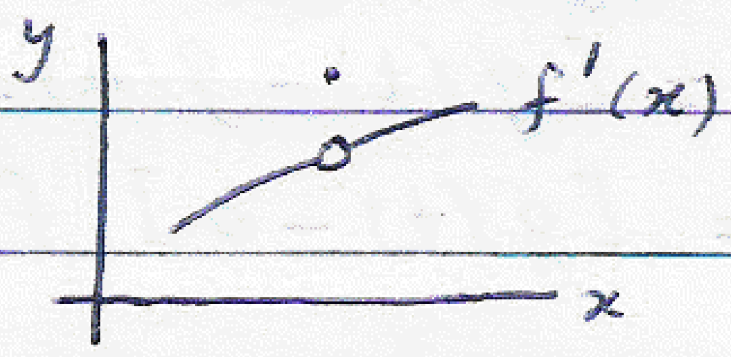
6) $\lim_{x\to\infty}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)=\infty\cdot 0 \overset{h=\frac{1}{x}}{=} \lim_{h\to 0^+}\frac{\sin h}{h}=\frac{0}{0}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\cos h}{1}=1$

7) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\begin{cases} x\to 0^+, & \infty-\infty \\ x\to 0^-, & -\infty-(-\infty)\end{cases}=$

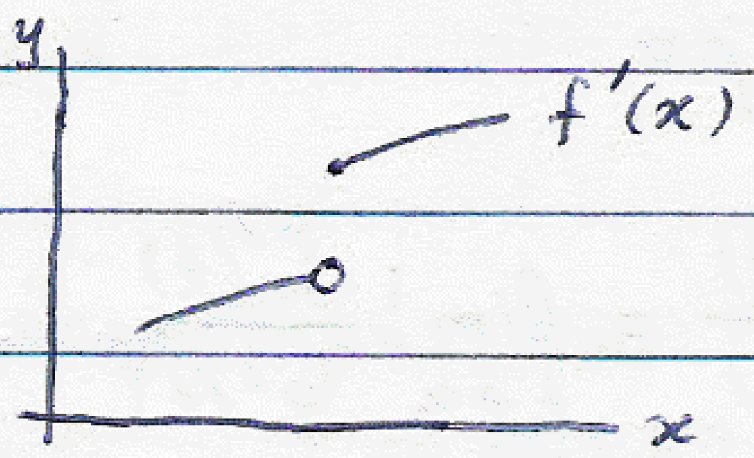
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x+x\cos x}=\frac{0}{0}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\cos x-x\sin x}=\frac{0}{2}=0$$

Το παρακάτω θεώρημα λέει ότι η f' δεν μπορεί να έχει αιρώμενη ασυνέχεια, δηλαδή δεν μπορεί να είναι



Όμως, μπορεί η f' να έχει ουσιώδη ασυνέχεια, δηλαδή μπορεί να είναι



π.χ. $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0\end{cases}$

f συνεχής, f' ασυνεχής στο 0

<u>Θεώρημα</u>

Έστω f συνεχής στο a, $\exists f'$ σε κάποιο διάστημα γύρω από το a, εκτός ίσως το ίδιο το a. Έστω ακόμα $\exists \lim_{x\to a} f'(x)$. Τότε

$\exists f'(a)=\lim_{x\to a} f'(x)$

<u>Απόδειξη</u>

Για αρκετά μικρό $h>0$, η f είναι συνεχής στο $[a,a+h]$ και παραγωγίσιμη στο $(a,a+h)$. Όμοια για $h<0$. Άρα, από το θεώρημα μέσης τιμής, $\exists\, c_h\in(a,a+h):\ f'(c_h)=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Αφού $c_h\in(a,a+h)$, άρα για $h\to 0$ είναι $c_h\to a$, επομένως $\exists \lim_{h\to 0} f'(c_h)=\lim_{x\to a} f'(x)$.

Αλλά $\lim_{h\to 0} f'(c_h)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \Rightarrow \lim_{h\to 0} f'(c_h)=f'(a) \Rightarrow \lim_{x\to a} f'(x)=f'(a)$

Γραφική επίλυση αυτόνομων δ.ε

Αυτόνομη λέγεται μια δ.ε. της μορφής $y' = F(y)$.
Οι τιμές του y με $y'=0$ λέγονται τιμές ισορροπίας ή σημεία ηρεμίας. Εδώ η έμφαση δίνεται στις τιμές του y για τις οποίες $y'=0$ και όχι στις τιμές του x για τις οποίες $y'=0$, όπως κάναμε στη μελέτη μιας συνάρτησης $f(x)$.

Για να σχεδιάσουμε το χώρο των λύσεων της δ.ε. τοποθετούμε πρώτα στον άξονα y (ευθεία φάσεων της δ.ε.) τις τιμές ισορροπίας και αναγράφουμε τα διαστήματα όπου οι y', y'' είναι θετικές ή αρνητικές. Έτσι καταλαβαίνουμε που είναι αύξουσα και που φθίνουσα η λύση, όπως επίσης που είναι κοίλη ή κυρτή.

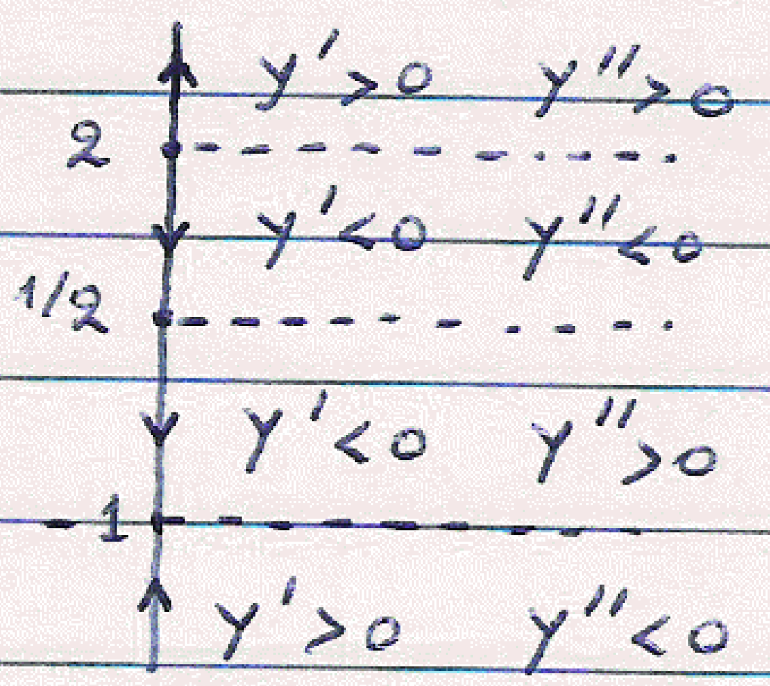
Παράδειγμα

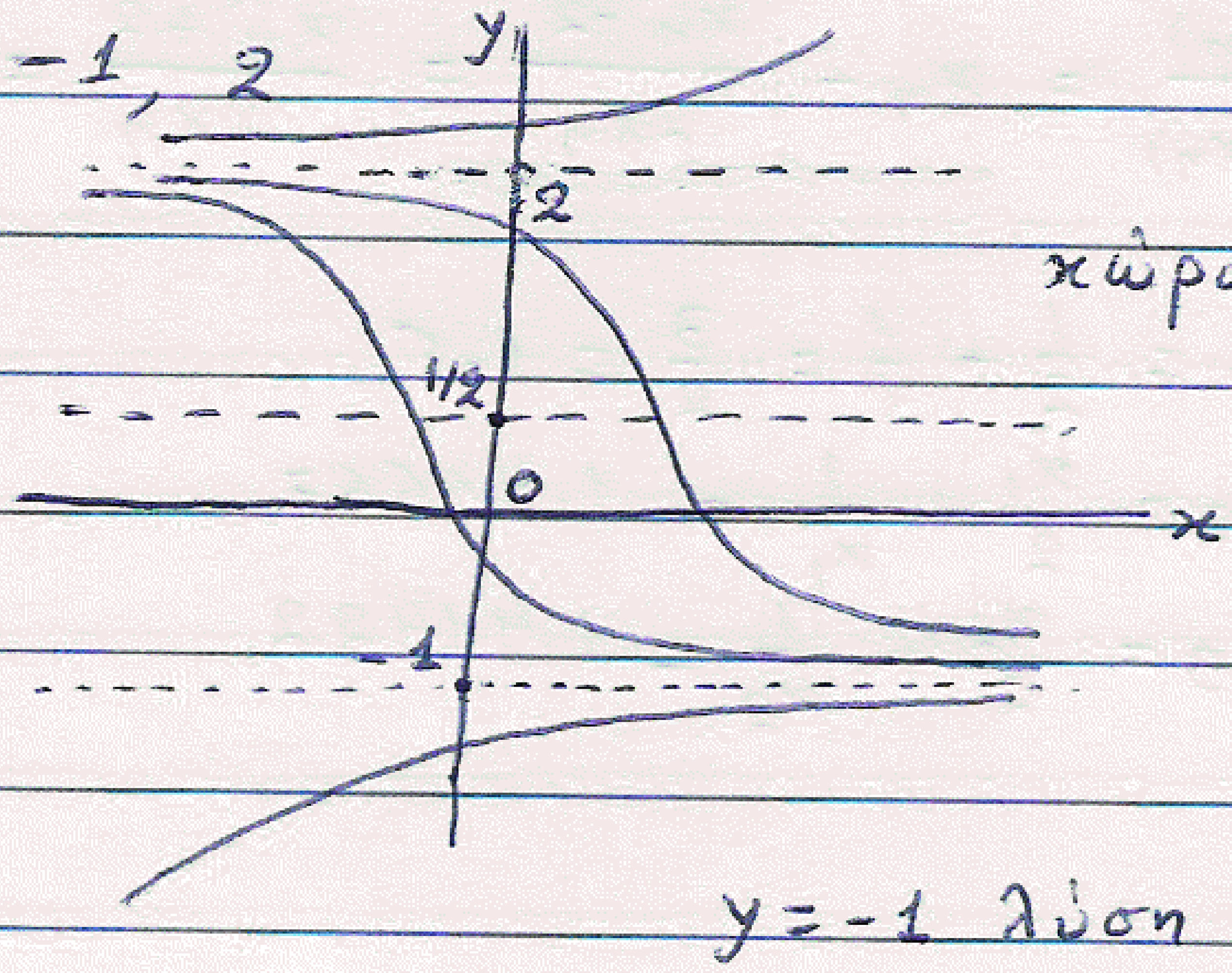
$$y' = (y+1)(y-2) = y^2 - y - 2$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow y = -1 \text{ ή } 2$$

$$y'' = 2yy' - y' = (2y-1)y' = (2y-1)(y+1)(y-2)$$

$$y'' = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}, -1, 2$$





χώρος λύσεων δ.ε.

$y = -1$ λύση ευσταθούς ισορροπίας

$y = 2$ λύση ασταθούς ισορροπίας

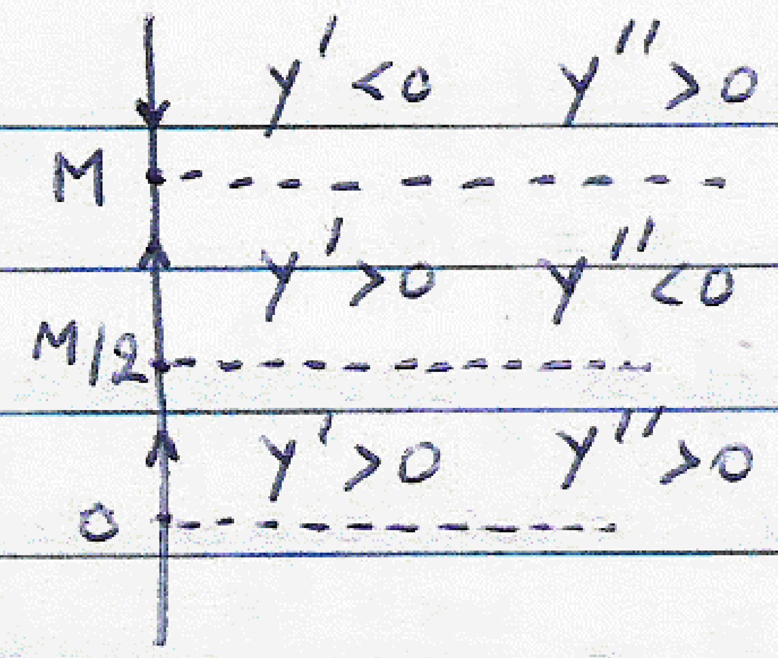
Παράδειγμα

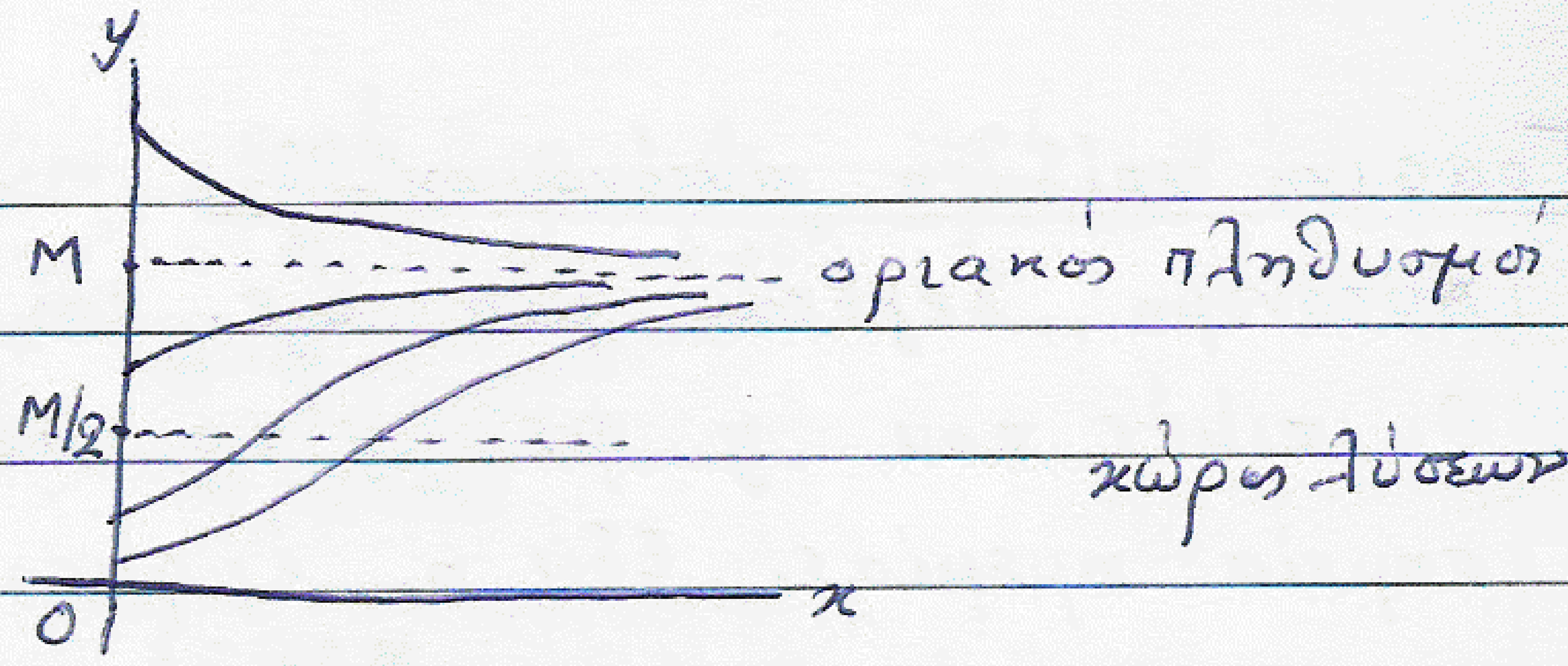
$y' = r(M-y)y$ μοντέλο λογιστικής αύξησης πληθυσμού $y(x) = P(t)$

$y' = 0 \Leftrightarrow y = 0, M$ τιμές ισορροπίας

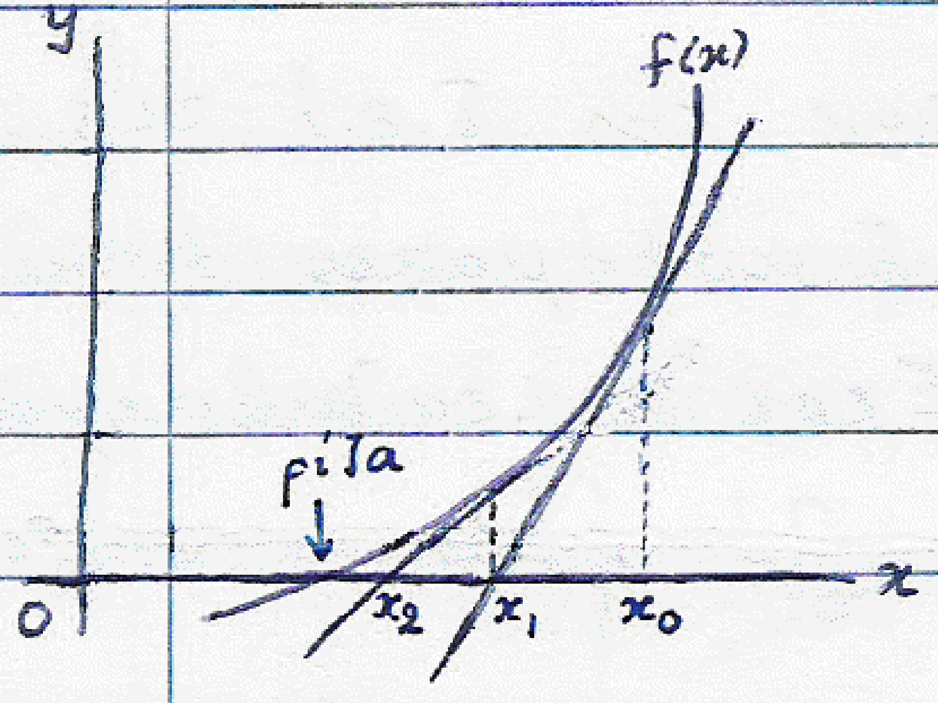
$$y'' = rMy' - 2ryy' = r(M-2y)y' = r^2(M-2y)(M-y)y$$

$$y'' = 0 \Leftrightarrow y = \frac{M}{2}, M, 0$$





<u>Μέθοδος Newton-Raphson</u> εύρεσης ριζών της εξίσωσης $f(x)=0$



Η η-γραμμικοποίηση $y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n)$ τέμνει τον άξονα x στο x_{n+1} όπου

$$0 - f(x_n) = f'(x_n)(x_{n+1} - x_n)$$

$$\Leftrightarrow \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$\text{Ρίζα} = \lim_{n\to\infty} x_n$$

<u>Παράδειγμα</u>

$f(x) = x^2 - 2 = 0$ (εύρεση του $\sqrt{2}$)

$f'(x) = 2x$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$$

Για $x_0 = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{1} = \frac{3}{2} = 1.5$

$\Rightarrow x_2 = \frac{x_1}{2} + \frac{1}{x_1} = 1.41667$

$\Rightarrow x_3 = \frac{x_2}{2} + \frac{1}{x_2} = 1.41422$

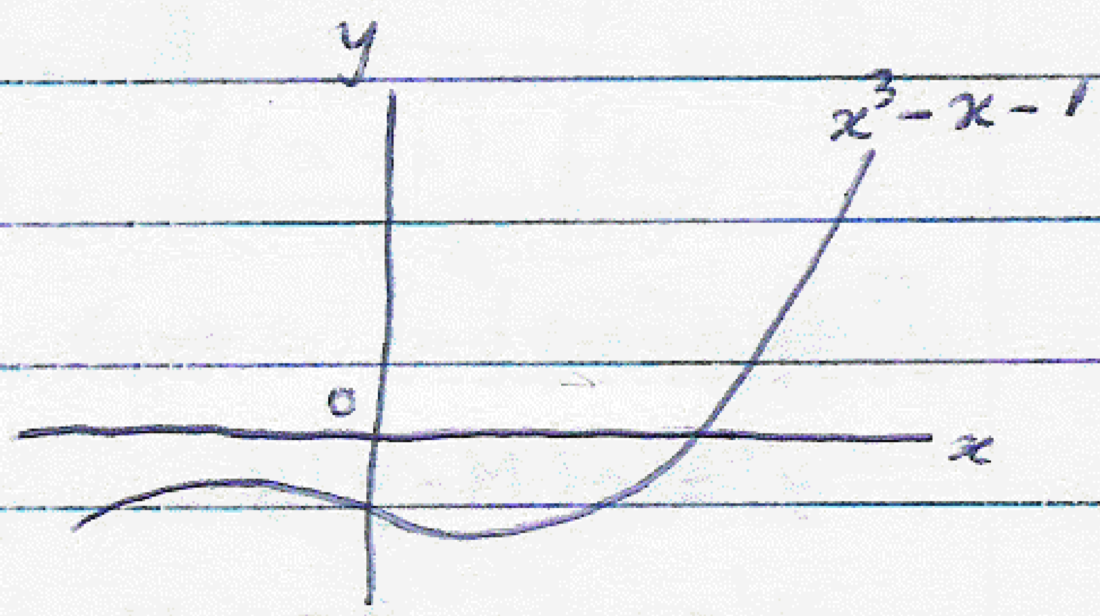
<u>Παράδειγμα</u>

$y = x^3 - x$, σημείο τομής με $y = 1$

$x^3 - x = 1 \Leftrightarrow x^3 - x - 1 = 0$

$f(x) = x^3 - x - 1$

$f'(x) = 3x^2 - 1$



$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 - x_n - 1}{3x_n^2 - 1} = \frac{2x_n^3 + 1}{3x_n^2 - 1}$$

Για $x_0 = 1 \Rightarrow x_1 = 1.5 \Rightarrow x_2 = 1.3478 \Rightarrow x_3 = 1.3252 \Rightarrow x_4 = 1.3247$

$\Rightarrow x_5 = 1.3247\ldots$