ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

Μαθηματικός Λογισμός

Σημειώσεις – Θεωρήματα συνεχών συναρτήσεων

Κοφινάς Γιώργος

Τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών και Επικοινωνιακών Συστημάτων

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

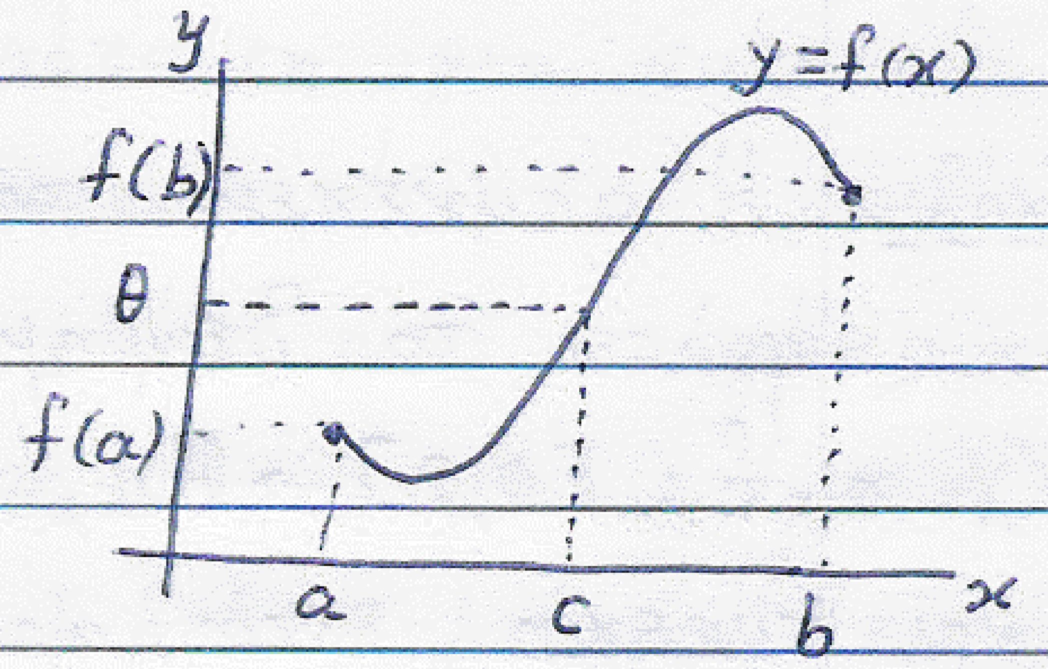
Θεωρήματα συνεχών συναρτήσεων

Υπάρχουν 3 σημαντικά θεωρήματα των συνεχών συναρτήσεων (θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, θεώρημα φραξίματος, θεώρημα μέγιστης-ελάχιστης τιμής) και διάφορες προτάσεις και πορίσματα που έπονται. Σε αντίθεση με την έννοια της συνέχειας σε ένα σημείο, στα θεωρήματα αυτά περιγράφεται η συμπεριφορά μιας συνάρτησης σε ολόκληρο διάστημα και τέτοιες "σφαιρικές" (global) ιδιότητες μιας συνάρτησης είναι πάντα πολύ πιο δύσκολες να αποδειχθούν απ' ότι οι "τοπικές" ιδιότητες και επομένως είναι και μεγαλύτερης ισχύος. Η απόδειξη των θεωρημάτων αυτών στηρίζεται στην ιδιότητα της πληρότητας των πραγματικών αριθμών. Επειδή τα θεωρήματα αυτά είναι διαισθητικά απλά, εμφανίσθηκαν σχετικά γρήγορα (~1800).

<u>Θεώρημα</u> (ενδιάμεση τιμή)

Αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής, $f(a)<\theta<f(b)$ ή $f(b)<\theta<f(a)$ τότε $\exists c\in(a,b): f(c)=\theta$

Δηλαδή, μια συνάρτηση συνεχής σε κλειστό διάστημα $[a,b]$ παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ $f(a)$ και $f(b)$



Πριν αποδείξουμε το θεώρημα θα αποδείξουμε μια ειδική μορφή του θεωρήματος (για $\theta=0$) που το χαρακτηρίζουμε ως λήμμα.

<u>Λήμμα</u>

Αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής, $f(a)<0<f(b)$ τότε $\exists c\in(a,b): f(c)=0$

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $A=\{x\in[a,b]: f \text{ αρνητική στο } [a,x]\}$

Αφού $f(a)<0$, άρα $a\in A \Rightarrow A\neq\emptyset$. Εξάλλου $A\subseteq[a,b]$, άρα A φραγμένο. Επομένως, από το αξίωμα της πληρότητας $\exists \sup A=c$, $a\le c\le b$.

Αλλά $f(a)<0 \Rightarrow \exists \delta_1>0: \forall x\in[a,a+\delta_1)$, $f(x)<0 \Rightarrow [a,a+\delta_1)\subseteq A$

$\Rightarrow c > a$

Εξάλλου $f(b) > 0 \Rightarrow \exists \delta_2 > 0 : \forall x \in (b-\delta_2, b]$, $f(x) > 0$

$\Rightarrow (b-\delta_2, b] \cap A = \emptyset \Rightarrow c < b$

Άρα $a < c < b$

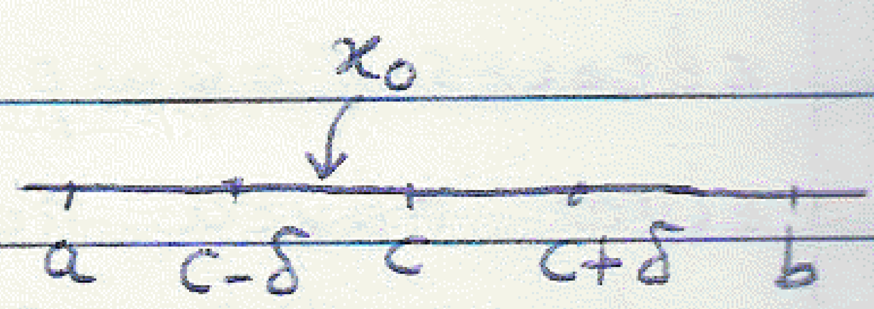
Θα δείξουμε ότι $f(c) = 0$ αποκλείοντας τις περιπτώσεις $f(c) > 0$ και $f(c) < 0$

- Έστω $f(c) > 0$. Αφού f συνεχής στο c, άρα $\exists \delta > 0 : \forall x \in (c-\delta, c+\delta)$, $f(x) > 0$.

  Αλλά $c = \sup A$, άρα $\exists x_0 \in (c-\delta, c) : x_0 \in A$

  $\Rightarrow \forall x \in [a, x_0]$, $f(x) < 0$

  $\Rightarrow f(x_0) < 0$ άτοπο αφού $x_0 \in (c-\delta, c+\delta)$



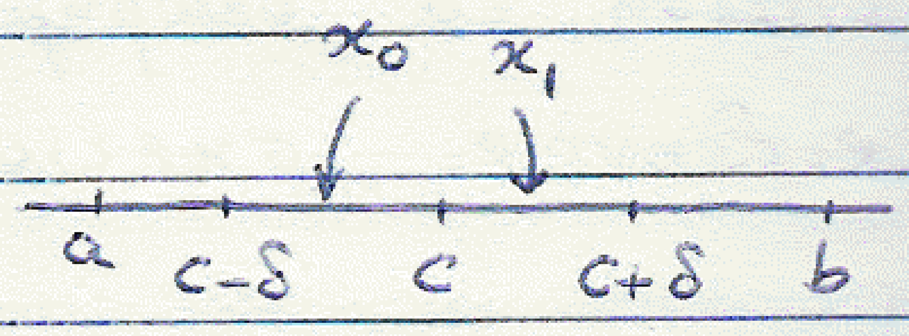
- Έστω $f(c) < 0$. Αφού f συνεχής στο c, άρα $\exists \delta > 0 : \forall x \in (c-\delta, c+\delta)$, $f(x) < 0$.

  Αλλά $c = \sup A$, άρα $\exists x_0 \in (c-\delta, c) : x_0 \in A$

  $\Rightarrow \forall x \in [a, x_0]$, $f(x) < 0$

  Αν $x_1 \in (c, c+\delta)$, τότε $[x_0, x_1] \subset (c-\delta, c+\delta)$

  $\Rightarrow \forall x \in [x_0, x_1]$, $f(x) < 0$



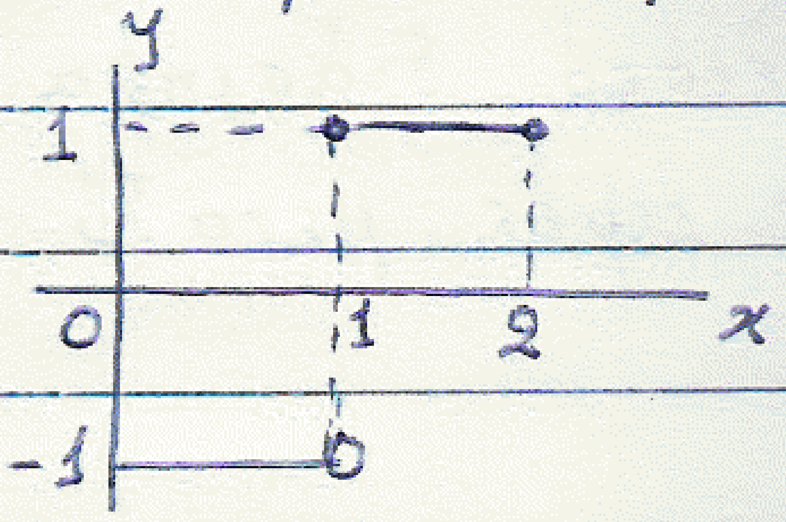
Τελικά, $\forall x \in [a, x_1]$, $f(x) < 0 \Rightarrow x_1 \in A$ άτοπο, αφού $x_1 > c = \sup A$

<u>Σχόλιο</u> Η ασυνέχεια της f ακόμα και σε ένα σημείο αρκεί για να ακυρώσει το θεώρημα

π.χ. η $f : [0,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -1, & 0 \le x < 1 \\ 1, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$

είναι συνεχής εκτός από το σημείο 1 που είναι ασυνεχής. Είναι $f(0) = -1 < 0$, $f(2) = 1 > 0$

αλλά $\nexists\, c \in (0,2) : f(c) = 0$.



<u>Απόδειξη του θ. ενδιάμεσης τιμής</u>

Έστω $f(a) < \theta < f(b)$.

Αν $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - \theta$ τότε η g είναι συνεχής και $g(a) = f(a) - \theta < 0$, $g(b) = f(b) - \theta > 0$. Άρα , $\exists c \in (a,b) : g(c) = 0$

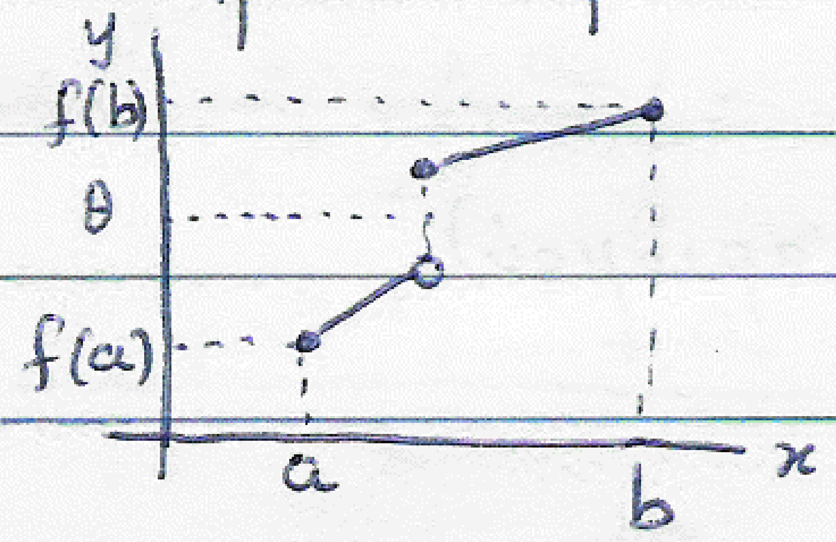
$\Rightarrow f(c) = \theta$.

Για την περίπτωση $f(b) < \theta < f(a)$ θεωρούμε τη συνάρτηση $-f$ η οποία είναι συνεχής στο $[a,b]$ και είναι $-f(a) < -\theta < -f(b)$.

Επομένως, $\exists c \in (a,b): -f(c) = -\theta \Rightarrow f(c) = \theta$

<u>Σχόλιο</u> Όπως και προηγουμένως, η ασυνέχεια της f ακόμα και σ' ένα σημείο αρκεί να ακυρώσει το θεώρημα

π.χ.



$\nexists c: f(c) = \theta$

<u>Παράδειγμα</u> Προσεγγιστικός υπολογισμός της ρίζας της εξίσωσης $3x^2 + 2x - 4 = 0$

Έστω $f(x) = 3x^2 + 2x - 4$ συνεχής. Είναι $f(0) = -4 < 0$, $f(1) = 1 > 0$.

Άρα $\exists c \in (0,1): f(c) = 0$.

Επιλέγουμε το σημείο 1 επειδή το σφάλμα είναι μικρότερο, δηλ. $|f(1)| < |f(0)|$ και ψάχνουμε για σημείο με αρνητική τιμή.

Είναι $f(0.9) = -0.01 < 0$. Άρα, $\exists c \in (0.9, 1): f(c) = 0$. Επιλέγουμε το 0.9 επειδή $|f(0.9)| < |f(1)|$ και ψάχνουμε σημείο με θετική τιμή και συνεχίζουμε.

Παρακάτω θα διατυπώσουμε μια πρόταση για συνεχείς συναρτήσεις που έχει σχέση με διαστήματα.

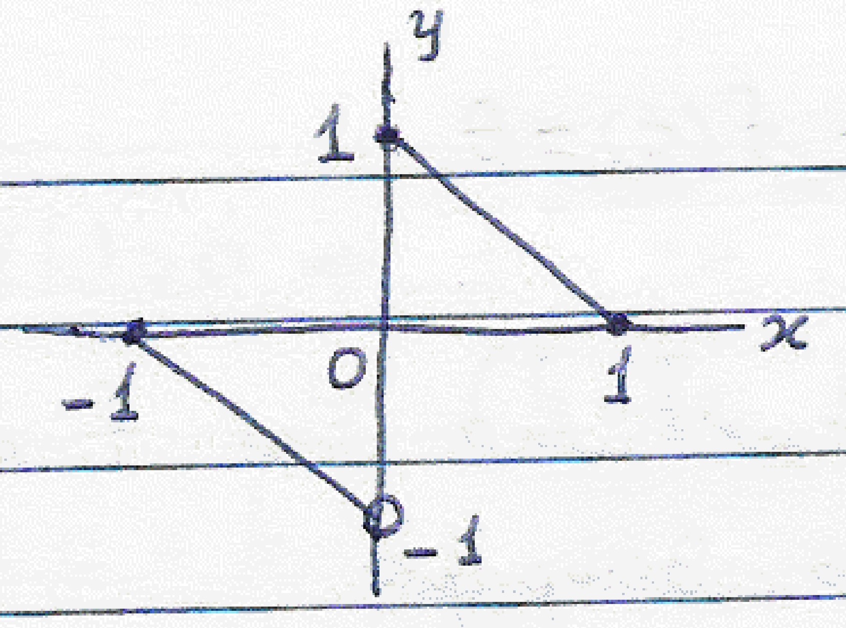
Όταν λέμε διάστημα I του $\mathbb{R}$ εννοούμε, ως γνωστόν, κάποιο από τα σύνολα (a,b), $[a,b)$, $(a,b]$, $[a,b]$, $(-\infty, a)$, $(-\infty, a]$, $(b, +\infty)$, $[b, +\infty)$. Δηλαδή I διάστημα $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ είναι $(x_1, x_2) \subseteq I$

<u>Πρόταση</u> Αν I διάστημα του $\mathbb{R}$ και $f: I \to \mathbb{R}$ συνεχής, τότε $f(I)$ διάστημα.

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $J = f(I)$ και $y_1, y_2 \in J$ με $y_1 < y_2$. Αν $y \in (y_1, y_2)$ τότε αφού η f συνεχής, $\exists c \in I: f(c) = y \Rightarrow y \in J \Rightarrow J$ διάστημα.

<u>Σχόλιο</u> Μπορεί το $f(I)$ να είναι διάστημα και η f να μην είναι συνεχής, π.χ. η $f: [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -x-1, & -1 \le x < 0 \\ -x+1, & 0 \le x \le 1 \end{cases}$ είναι ασυνεχής



στο 0, αλλά $f([-1,1]) = (-1,1]$ που είναι διάστημα.

<u>Πρόταση</u> (ύπαρξη η-οστής ρίζας θετικού αριθμού)

$\forall p \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists!\, x \geq 0 : x^n = p$

<u>Απόδειξη</u>

Η ύπαρξη της η-οστής ρίζας μπορεί να δειχθεί ανεξάρτητα χρησιμοποιώντας την πληρότητα των πραγματικών αριθμών ή ευκολότερα (όπως θα κάνουμε εδώ) χρησιμοποιώντας το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής.

Πράγματι, αν $p = 0$ τότε ο $x = 0$ έχει $x^n = 0^n = 0 = p$.

Έστω $p > 0$. Τότε $\exists \beta > 0 : 0 < p < \beta^n$ (αν $p < 1$ τότε π.χ. $\beta = 1$; αν $p > 1$ τότε π.χ. $\beta = p$). Ορίζουμε τη συνάρτηση $f : [0, \beta] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$. Είναι $f(0) = 0$, $f(\beta) = \beta^n$. Η f είναι συνεχής και $f(0) < p < f(\beta)$, άρα $\exists x \in (0, \beta) : f(x) = p \Rightarrow \exists x > 0 : x^n = p$. Ο x είναι μοναδικός διότι αν $x < y \Rightarrow x^n < y^n$.

<u>Σχόλιο</u> Ύπαρξη η-οστής ρίζας (n = περιττό) πραγματικού αριθμού

Δηλαδή, $\forall a \in \mathbb{R}$, $\forall n$ = περιττός, $\exists!\, x \in \mathbb{R} : x^n = a$

Πράγματι, αν $p \geq 0$, $\exists x \geq 0 : x^n = p \Rightarrow (-x)^n = -p \Rightarrow (-x)^n = a$, $a = -p \leq 0$

<u>Πρόταση</u> (ύπαρξη ρίζας πολυωνύμου)

Η εξίσωση $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 = 0$, $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$, n = περιττός έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$. Για μεγάλα $|x|$ είναι $f(x) \simeq x^n$ και αφού n = περιττός, άρα για $x \to \infty \Rightarrow f(x) > 0$ ενώ για $x \to -\infty$, $f(x) < 0$, άρα διαισθητικά το αναμένουμε.

Για $x \neq 0$, $f(x) = x^n \left(1 + \dfrac{a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0}{x^n}\right)$

Θέτουμε $M = 1 + |a_{n-1}| + \dots + |a_0| > 1$. Αν $|x| > M$ τότε

$$|a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_0| \le |a_{n-1}||x|^{n-1}+\dots+|a_0|$$
$$\le (|a_{n-1}|+\dots+|a_0|)\,|x|^{n-1}$$
$$= (M-1)|x|^{n-1} < M|x|^{n-1} < |x||x|^{n-1} = |x|^n$$

$$\Rightarrow \left|\frac{a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_0}{x^n}\right| = \frac{|a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_0|}{|x|^n} < \frac{|x|^n}{|x|^n} = 1$$

$$\Rightarrow -1 < \frac{a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_0}{x^n} < 1 \Rightarrow 1+\frac{a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_0}{x^n} > 0, \ \forall |x|>M$$

Έστω $x_1 < -M \Rightarrow |x_1| > M \Rightarrow 1+\dfrac{a_{n-1}x_1^{n-1}+\dots+a_0}{x_1^n} > 0$

Αλλά $x_1^n < 0$, άρα $f(x_1) < 0$

Όμοια, έστω $x_2 > M \Rightarrow |x_2| > M \Rightarrow 1+\dfrac{a_{n-1}x_2^{n-1}+\dots+a_0}{x_2^n} > 0$

Αλλά $x_2^n > 0$, άρα $f(x_2) > 0$

Άρα, αφού f συνεχής και $f(x_1) < 0 < f(x_2)$, $\exists x \in (x_1, x_2): f(x) = 0$

$\Rightarrow \exists x \in \mathbb{R}: \ x^n + a_{n-1}x^n + \dots + a_0 = 0$

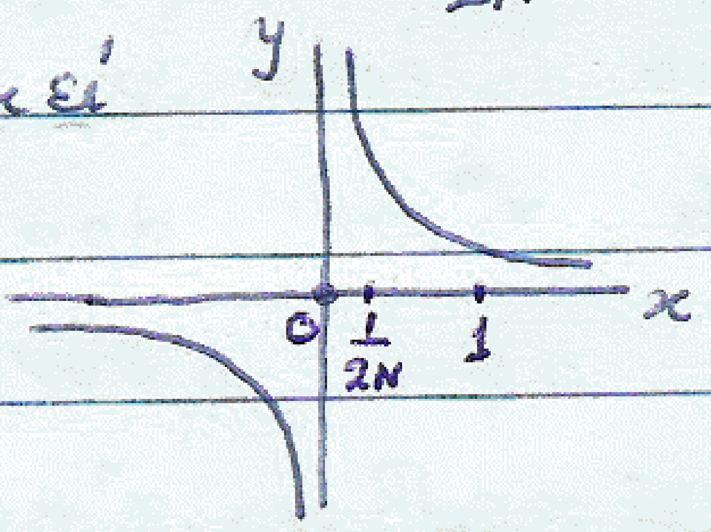
<u>Σχόλιο</u> Για $n=$ άρτιος δεν μπορούμε να πούμε αν υπάρχει ρίζα, αφού η εξίσωση $x^2-1=0$ έχει ρίζες, ενώ η $x^2+1=0$ όχι.
Θα αποδείξουμε όμως κάποιες προτάσεις για $n=$άρτιος αργότερα

<u>Θεώρημα</u> (φραξίματος συνεχούς συνάρτησης)
Αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής, τότε f φραγμένη

<u>Απόδειξη</u>
Έστω $A = \{x \in [a,b] : f \text{ φραγμένη στο } [a,x]\}$
Αφού $f(a)$ πεπερασμένο, άρα $a \in A \Rightarrow A \neq \emptyset$. Εξάλλου A φραγμένο άνω (π.χ. από το b). Επομένως, από το αξίωμα της πληρότητας $\exists \sup A = c$, $a \le c \le b$.
Αφού f συνεχής στο a, άρα f τοπικά φραγμένη στο a, δηλ. $\exists \delta_1 > 0 : f$ φραγμένη στο $[a, a+\delta_1) \Rightarrow [a, a+\delta_1) \subseteq A \Rightarrow c > a$.
Έστω $c < b$. Θα δείξουμε ότι αυτό είναι άτοπο και άρα $c = b$.
Αφού f συνεχής στο $c > a$, άρα τοπικά φραγμένη στο c, δηλ. $\exists \delta > 0: f$ φραγμένη στο $(c-\delta, c+\delta)$
Αφού $c = \sup A$, άρα $\exists x_0 \in (c-\delta, c) : x_0 \in A \Rightarrow f$ φραγμένη στο $[a, x_0]$.
Αν $x_1 \in (c, c+\delta)$, τότε $[x_0, x_1] \subset (c-\delta, c+\delta) \Rightarrow f$ φραγμένη στο $[x_0, x_1]$.

Τελικά, f φραγμένη στο $[a, x_1] \Rightarrow x_1 \in A$ άτοπο, αφού $x_1 > c = \sup A$.
Άρα $c = b$.
Επίσης, f συνεχής στο b, άρα f τοπικά φραγμένη στο b, δηλ. $\exists\, \delta_2 > 0$: f φραγμένη στο $(b-\delta_2, b]$. Υπάρχει $x_2 \in (b-\delta_2, b]$: $x_2 \in A \Rightarrow f$ φραγμένη στο $[a, x_2]$. Αλλά f φραγμένη και στο $[x_2, b]$. Άρα τελικά f φραγμένη στο $[a,b]$.

<u>Σχόλιο</u> Η ασυνέχεια της f ακόμα και σε ένα σημείο αρκεί να ανατρέψει το θεώρημα, π.χ. η $f(x) = \begin{cases} 1/x, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ είναι ασυνεχής στο 0 και η f δεν είναι φραγμένη, αφού αν $N > 0$ τότε $f\left(\frac{1}{2N}\right) = 2N > N$.
Η συνέχεια της f στο ανοικτό $(0,1)$ δεν αρκεί να εξασφαλίσει το φράξιμο της f στο $(0,1)$

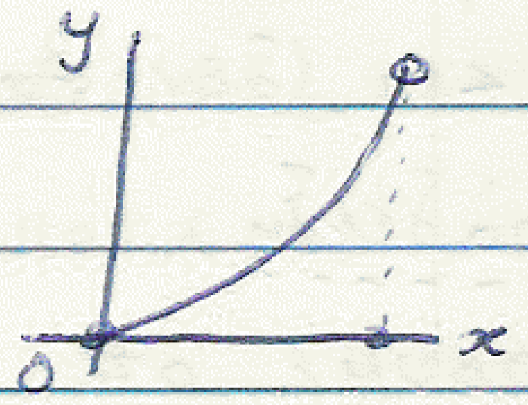


<u>Θεώρημα</u> (μέγιστης - ελάχιστης τιμής)
Αν $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής, τότε η f παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή, δηλ. $\exists\, x_1, x_2 \in [a,b]: f(x) \geq f(x_1),\ f(x) \leq f(x_2),\ \forall x \in [a,b]$, άρα $f([a,b]) = [f(x_1), f(x_2)]$
(δηλαδή τα συμπαγή διαστήματα - κλειστά και φραγμένα - απεικονίζονται μέσω συνεχούς συνάρτησης σε συμπαγή διαστήματα)

<u>Απόδειξη</u>
Αφού f συνεχής στο $[a,b]$, άρα f φραγμένη στο $[a,b]$, άρα το σύνολο $A = \{f(x) : x \in [a,b]\}$ είναι φραγμένο. Άρα $\exists \sup A = c$. Επομένως, $\forall x \in [a,b]$, $f(x) \leq c$ και επίσης $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_0 \in [a,b] : f(x_0) > c - \varepsilon$ $\Rightarrow 0 \leq c - f(x_0) < \varepsilon$. Υποθέτουμε ότι $\forall x \in [a,b]$ είναι $f(x) \neq c$.
Τότε η συνάρτηση $g(x) = \frac{1}{c - f(x)}$, $x \in [a,b]$ είναι συνεχής στο $[a,b]$ (άρα και φραγμένη).
Επομένως, $g(x_0) = \frac{1}{c - f(x_0)} > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow g$ όχι φραγμένη στο $[a,b]$, άτοπο.
Τελικά $\exists\, x_2 \in [a,b] : f(x_2) = c \Rightarrow \exists\, x_2 \in [a,b] : f(x_2) \geq f(x),\ \forall x \in [a,b]$
Ομοίως, η συνάρτηση $-f$ είναι συνεχής στο $[a,b]$. Άρα $\exists\, x_1 \in [a,b]$ $: -f(x) \leq -f(x_1),\ \forall x \in [a,b] \Rightarrow f(x) \geq f(x_1),\ \forall x \in [a,b]$.

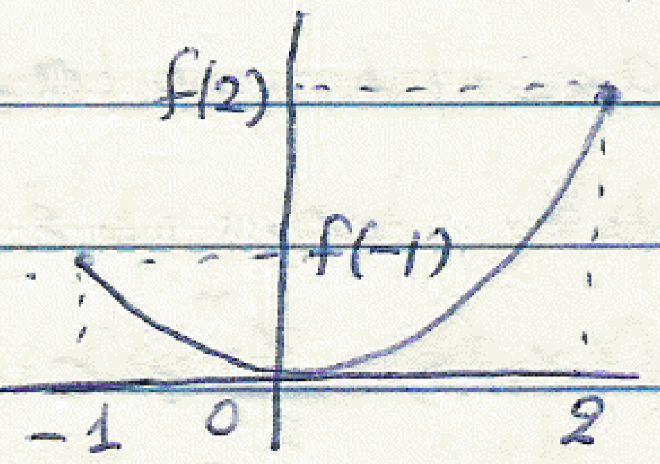
Σχόλια

1) Η ασυνέχεια της f ακόμα και σε ένα σημείο αρκεί να ακυρωθεί το θεώρημα, π.χ. η $f(x)=\begin{cases} x^2, & 0\le x<1 \\ 0, & x=1 \end{cases}$ είναι συνεχής στο $[0,1)$ αλλά όχι στο $[0,1]$.



Η f είναι φανερό ότι είναι φραγμένη.
Ωστόσο, η f δεν έχει μέγιστη τιμή στο $[0,1]$ διότι $\sup\{f(x) : 0\le x<1\}=1$ και $\nexists x\in[0,1) : f(x)=x^2=1$.
Άρα το θεώρημα μέγιστης τιμής είναι ισχυρότερο από το θεώρημα φραξίματος.

2) Εν γένει $f([a,b])\neq[f(a),f(b)]$, π.χ. η $f:[-1,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$ έχει $f([-1,2])=[0,4]\neq[1,4]=[f(-1),f(2)]$



Πρόταση

Αν $f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_0$, $a_0,a_1,\dots,a_{n-1}\in\mathbb{R}$, n = άρτιος, τότε $\exists x_0\in\mathbb{R} : f(x)\geq f(x_0)$, $\forall x\in\mathbb{R}$

Απόδειξη

Αν $x\neq0$, $f(x)=x^n\left(1+\dfrac{a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_0}{x^n}\right)$

Θέτουμε $M=1+|a_{n-1}|+\dots+|a_0|>1$. Αν $|x|>2M$ τότε

$$|a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_0|\leq|a_{n-1}|\,|x|^{n-1}+\dots+|a_0|$$
$$\leq(|a_{n-1}|+\dots+|a_0|)\,|x|^{n-1}$$
$$=(M-1)|x|^{n-1}<M|x|^{n-1}$$

$$\Rightarrow\left|\frac{a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_0}{x^n}\right|=\frac{|a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_0|}{|x|^n}\leq\frac{M|x|^{n-1}}{|x|^n}=\frac{M}{|x|}<\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}<\frac{a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_0}{x^n}<\frac{1}{2}\Rightarrow 1+\frac{a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_0}{x^n}>\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow f(x)\geq\dfrac{x^n}{2}$, $\forall|x|>2M$

Έστω $\xi>0 : \xi^n\geq2f(0)$, $\xi>2M$

Τότε $\forall|x|\geq\xi\Rightarrow|x|>2M\Rightarrow f(x)\geq\dfrac{x^n}{2}=\dfrac{|x|^n}{2}\geq\dfrac{\xi^n}{2}\geq f(0)$

Αφού f συνεχής στο $[-\xi,\xi]\Rightarrow\exists x_0\in[-\xi,\xi] : f(x)\geq f(x_0)$, $\forall x\in[-\xi,\xi]$

$\Rightarrow f(0)\geq f(x_0)$

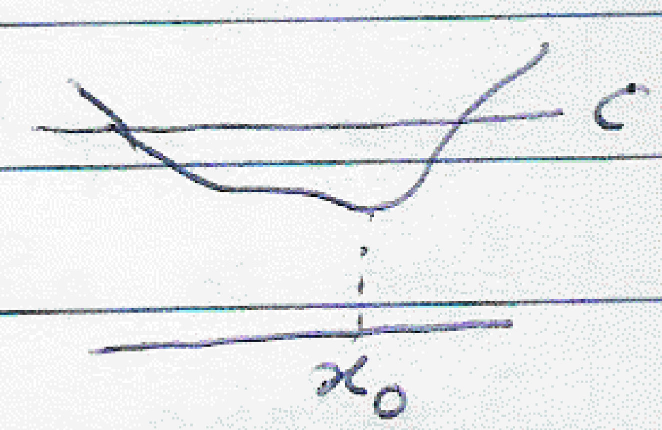
Τελικά, $\forall|x|\geq\xi$, $f(x)\geq f(x_0)$ και $\forall|x|\leq\xi$, $f(x)\geq f(x_0)$, άρα $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)\geq f(x_0)$.

Πρόταση

Για την εξίσωση $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 = c$, $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, c \in \mathbb{R}$, n = άρτιος, υπάρχει $m \in \mathbb{R}$: $\forall c \geq m$ η εξίσωση έχει λύση, ενώ $\forall c < m$ δεν έχει λύση

Απόδειξη

Ξέρουμε ότι $\exists x_0 \in \mathbb{R}: f(x) \geq f(x_0), \forall x \in \mathbb{R}$



Αν $f(x_0) = c$ τότε x_0 ρίζα της εξίσωσης

Αν $f(x_0) > c$ τότε $f(x) > c, \forall x \in \mathbb{R}$, άρα η εξίσωση δεν έχει λύση.

Έστω $f(x_0) < c$. Έχουμε δείξει ότι $f(x) \geq \frac{x^n}{2}, \forall |x| > 2M$,

$M = 1 + |a_{n-1}| + \dots + |a_0|$

Θεωρούμε x_1 με $x_1^n > 2c$, $|x_1| > M$

Τότε $f(x_1) \geq \frac{x_1^n}{2} > c > f(x_0)$

Άρα, από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, $\exists x_2 \in [x_0, x_1]: f(x_2) = c$.

Επομένως, $\forall c \geq f(x_0) \equiv m$, υπάρχει λύση, ενώ $\forall c < f(x_0) = m$ δεν υπάρχει

Θεώρημα

f συνεχής, 1-1 σε διάστημα $\Rightarrow$ f γνήσια μονότονη, f^{-1} συνεχής

Απόδειξη

(i) Έστω $a_0 < b_0$ στοιχεία του διαστήματος. Αφού f 1-1, άρα ή $f(b_0) - f(a_0) > 0$ ή $f(b_0) - f(a_0) < 0$. Για την περίπτωση $f(b_0) - f(a_0) > 0$ θα δείξουμε ότι $\forall a_1, b_1$ με $a_1 < b_1$ είναι $f(a_1) < f(b_1)$, δηλαδή f γνήσια αύξουσα (αντίστοιχα για την περίπτωση $f(b_0) - f(a_0) < 0$ η f είναι γνήσια φθίνουσα).

Έστω $x_t = (1-t)a_0 + ta_1$, $y_t = (1-t)b_0 + tb_1$, $0 \leq t \leq 1$

Τότε $x_0 = a_0$, $x_1 = a_1$, $y_0 = b_0$, $y_1 = b_1$. Το x_t καλύπτει όλα τα σημεία μεταξύ a_0 και a_1, δηλαδή $a_0 \leq x_t \leq a_1$ ή $a_1 \leq x_t \leq a_0$. Αντίστοιχα το y_t.

Είναι $x_t - y_t = (1-t)(a_0 - b_0) + t(a_1 - b_1) < 0$

Έστω η συνάρτηση $g(t) = f(y_t) - f(x_t)$, $0 \leq t \leq 1$. Αφού f συνεχής και x_t, y_t συνεχείς, άρα g συνεχής στο $[0,1]$.

Αφού $x_t < y_t$, f 1-1 $\Rightarrow f(x_t) \neq f(y_t) \Rightarrow g(t) \neq 0$. Άρα $g(t) > 0$ στο $[0,1]$ ή $g(t) < 0$ στο $[0,1]$ διότι αν ήταν αλλού $g > 0$ και αλλού $g < 0$ τότε κάπου θα ήταν $g = 0$.

Αλλά $g(0) = f(y_0) - f(x_0) = f(b_0) - f(a_0) > 0$, άρα $g(t) > 0$, $\forall t$

$\Rightarrow g(1) > 0 \Rightarrow f(y_1) - f(x_1) > 0 \Rightarrow f(b_1) - f(a_1) > 0 \Rightarrow f(a_1) < f(b_1)$

(ii) Έστω f γνήσια αύξουσα. Για το τυχόν $b \in D_{f^{-1}}$, $\exists a \in D_f : b = f(a)$.

Αν $\varepsilon > 0$ τότε $a - \varepsilon < a < a + \varepsilon$, άρα $f(a-\varepsilon) < f(a) < f(a+\varepsilon)$

Επιλέγουμε $\delta = \min\{f(a+\varepsilon) - f(a), f(a) - f(a-\varepsilon)\}$ οπότε

$$f(a-\varepsilon) \le f(a) - \delta, \qquad f(a) + \delta \le f(a+\varepsilon)$$

Για $|x - f(a)| < \delta \Rightarrow f(a) - \delta < x < f(a) + \delta$

$$\Rightarrow f(a-\varepsilon) \le f(a) - \delta < x < f(a) + \delta \le f(a+\varepsilon)$$

$$\Rightarrow f(a-\varepsilon) < x < f(a+\varepsilon)$$

Αφού f γνήσια αύξουσα, άρα f^{-1} γνήσια αύξουσα, άρα

$f^{-1}(f(a-\varepsilon)) < f^{-1}(x) < f^{-1}(f(a+\varepsilon))$

$\Rightarrow a - \varepsilon < f^{-1}(x) < a + \varepsilon \Rightarrow f^{-1}(f(a)) - \varepsilon < f^{-1}(x) < f^{-1}(f(a)) + \varepsilon$

$\Rightarrow |f^{-1}(x) - f^{-1}(f(a))| < \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{x \to f(a)} f^{-1}(x) = f^{-1}(f(a)) \Rightarrow \lim\limits_{x \to b} f^{-1}(x) = f^{-1}(b)$

$\Rightarrow f^{-1}$ συνεχής στο b.

Για f γνήσια φθίνουσα, θεωρούμε τη συνάρτηση $-f$ που είναι γνήσια αύξουσα.