ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

Μαθηματικός Λογισμός

Σημειώσεις – Συνέχεια

Κοφινάς Γιώργος

Τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών και Επικοινωνιακών Συστημάτων

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Συνέχεια

Ορισμός Η $f: X \to \mathbb{R}$ λέγεται συνεχής στο $x_0 \in X$ αν $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in X$ με $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Εν γένει, το $\delta(\varepsilon)$ εξαρτάται και από το x_0.

Υπάρχουν δύο περιπτώσεις για το $x_0 \in X$: ή το x_0 δεν είναι σημείο συσσώρευσης του X ή το x_0 είναι σημείο συσσώρευσης του X.

Πόρισμα Αν το $x_0 \in X$ δεν είναι σημείο συσσώρευσης του X, τότε η f είναι συνεχής στο x_0.

Απόδειξη Πράγματι, αφού το $x_0 \in X$ δεν είναι σημείο συσσώρευσης του X, άρα $\exists \delta > 0 : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap X = \{x_0\}$. Έτσι, το μόνο σημείο που ικανοποιεί τη συνθήκη $x \in X$, $|x - x_0| < \delta$ είναι το $x = x_0$, και άρα $\forall \varepsilon > 0$ είναι $|f(x) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$. Επομένως, η f είναι συνεχής στο x_0.

Πόρισμα Αν το $x_0 \in X$ είναι σημείο συσσώρευσης του X, τότε η f είναι συνεχής στο x_0 αν και μόνο αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Απόδειξη

Αν η f είναι συνεχής στο x_0, τότε προφανώς $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Αντίστροφα, αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, τότε $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0 : \forall x \in X$ $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Επίσης, για $x = x_0$ είναι $|f(x) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$, άρα τελικά $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x, |x - x_0| < \delta$ $\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Άρα f συνεχής στο x_0.

Η f λέγεται ασυνεχής στο $x_0 \in X$ αν δεν είναι συνεχής στο x_0.

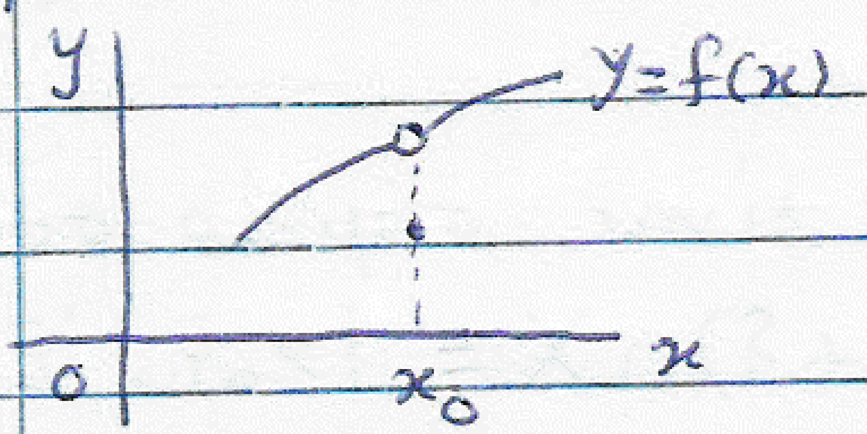
Αν $x_0 \in X$ σημείο συσσώρευσης του X, τότε η f λέγεται συνεχής από δεξιά στο x_0 αν $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ [αντ. f συνεχής από αριστερά στο x_0, αν $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$]

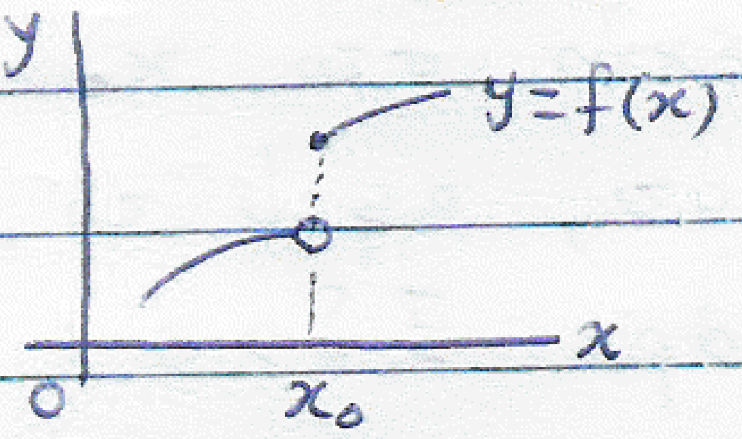
Αν $x_0 \in X$ σημείο συσσώρευσης του X, τότε f συνεχής στο x_0 αν και μόνο αν f συνεχής από δεξιά και από αριστερά στο x_0.

Η άρνηση του ορισμού της συνέχειας της f στο x_0 δίνει το κριτήριο της ασυνέχειας της f στο x_0:

Η f ασυνεχής στο $x_0 \in X \iff \exists\, \varepsilon > 0 : \forall\, \delta > 0,\ \exists\, x \in X$ με $|x - x_0| < \delta$, $|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$

Επομένως, η f είναι ασυνεχής στο x_0 είτε γιατί $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$, (αιρόμενη ασυνέχεια), είτε γιατί $\nexists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$





Η f λέγεται συνεχής στο $S \subseteq X$ αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του S (αντίστοιχα η f ασυνεχής στο $S \subseteq X$ αν δεν είναι συνεχής στο S)

π.χ. η $y = \frac{1}{x}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^*$ διότι είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της $X = \mathbb{R}^*$.

Λέμε διαισθητικά ότι μία συνάρτηση είναι συνεχής όταν τη ζωγραφίζουμε στο χαρτί χωρίς να σηκώνουμε το μολύβι από το χαρτί. Ωστόσο, η $f(x) = \begin{cases} x \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ είναι συνεχής, αλλά η παραπάνω περιγραφή δεν είναι εύκολο να υλοποιηθεί.

<u>Παράδειγμα</u>

Για τη συνάρτηση $f(x) = [x]$ είναι

$\lim\limits_{x\to n^+} [x] = n = [n]$, δηλ. η f συνεχής από δεξιά στο $n \in \mathbb{Z}$

$\lim\limits_{x\to n^-} [x] = n - 1$, δηλ. η f ασυνεχής από αριστερά στο $n \in \mathbb{Z}$

Εξάλλου, $\forall x_0 \in (n-1, n)$ είναι $\lim\limits_{x \to x_0} [x] = n-1 = [x_0]$, άρα η f συνεχής στο $(n-1, n)$. Τελικά η f συνεχής στο $[n, n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Παράδειγμα Η $f(x) = \sin x$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$,
διότι για το τυχόν $x_0 \in \mathbb{R}$ και $\varepsilon > 0$, αν $\delta = \varepsilon$ τότε αν $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |\sin x - \sin x_0| \leq |x - x_0| < \delta = \varepsilon$.

Παράδειγμα Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Πράγματι, έστω $x_0 \neq 0$ και $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $\delta = \min\left\{ \frac{|x_0|}{2}, \frac{\varepsilon |x_0|}{|x_0| + 2} \right\}$.

Αν $|x - x_0| < \delta$ τότε $|x - x_0| < \frac{|x_0|}{2}$, $|x - x_0| < \frac{\varepsilon |x_0|}{|x_0| + 2}$

Αλλά $||x| - |x_0|| \leq |x - x_0|$, άρα $||x| - |x_0|| < \frac{|x_0|}{2} \Rightarrow -\frac{|x_0|}{2} < |x| - |x_0| < \frac{|x_0|}{2}$

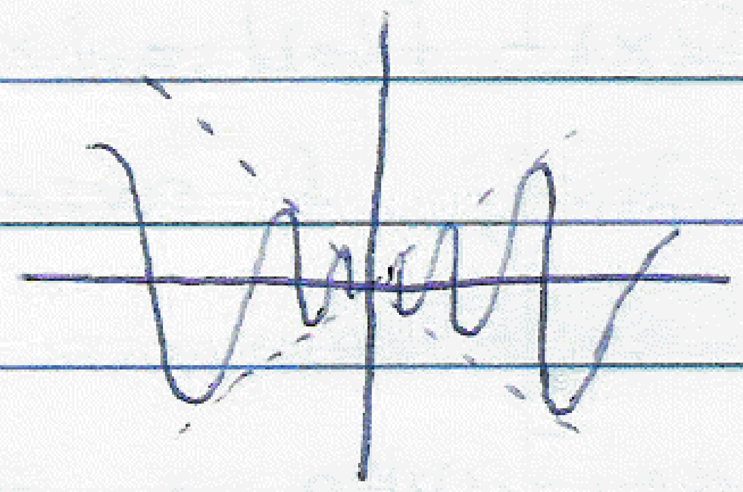
$\Rightarrow \frac{|x_0|}{2} < |x| < \frac{3|x_0|}{2} \Rightarrow \frac{1}{|x|} < \frac{2}{|x_0|}$

Επομένως

$$|f(x) - f(x_0)| = \left| x \sin \frac{1}{x} - x_0 \sin \frac{1}{x_0} \right| = \left| x \sin \frac{1}{x} - x_0 \sin \frac{1}{x} + x_0 \sin \frac{1}{x} - x_0 \sin \frac{1}{x_0} \right| =$$

$$= \left| (x - x_0) \sin \frac{1}{x} + x_0 \left(\sin \frac{1}{x} - \sin \frac{1}{x_0} \right) \right|$$

$$\leq |x - x_0| \left| \sin \frac{1}{x} \right| + |x_0| \left| \sin \frac{1}{x} - \sin \frac{1}{x_0} \right|$$



Αλλά

$$\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

$$\Rightarrow |\sin a - \sin b| = 2 \left| \cos \frac{a+b}{2} \right| \left| \sin \frac{a-b}{2} \right| \leq 2 \left| \sin \frac{a-b}{2} \right|$$

Επίσης $|\sin x| \leq |x|$, άρα $|\sin a - \sin b| \leq |a - b|$

Επομένως, $|f(x) - f(x_0)| \leq |x - x_0| \cdot 1 + |x_0| \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| = |x - x_0| + |x_0| \frac{|x - x_0|}{|x||x_0|}$

$$= |x - x_0| + \frac{|x - x_0|}{|x|} = |x - x_0| \left(1 + \frac{1}{|x|} \right) < |x - x_0| \left(1 + \frac{2}{|x_0|} \right)$$

$$= |x - x_0| \frac{|x_0| + 2}{|x_0|} < \frac{\varepsilon |x_0|}{|x_0| + 2} \frac{|x_0| + 2}{|x_0|} = \varepsilon$$

Άρα, η f συνεχής στο $\mathbb{R}^*$.

Επιπλέον, ξέρουμε ότι $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$, άρα f συνεχής στο 0.

Τελικά f συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα

Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

Πράγματι, έστω $x_0 \neq 0$ και $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $\delta = \min\left\{ 1, \frac{|x_0|}{2}, \frac{\varepsilon}{2|x_0| + 3} \right\}$.

Αν $|x - x_0| < \delta$ τότε $|x - x_0| < 1$, $|x - x_0| < \frac{|x_0|}{2}$, $|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{2|x_0| + 3}$.

Αλλά $|x| - |x_0| \leq ||x| - |x_0|| \leq |x - x_0|$, άρα

$|x| - |x_0| < 1$, $||x| - |x_0|| < \frac{|x_0|}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad |x| < |x_0|+1 \quad , \quad -\frac{|x_0|}{2} < |x|-|x_0| < \frac{|x_0|}{2}$

$\Rightarrow \quad |x| < |x_0|+1 \quad , \quad \frac{|x_0|}{2} < |x| < \frac{3|x_0|}{2} \Rightarrow |x|<|x_0|+1, \ \frac{1}{|x|} < \frac{2}{|x_0|}$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
|f(x)-f(x_0)| &= \left|x^2 \sin\frac{1}{x} - x_0^2 \sin\frac{1}{x_0}\right| \\
&= \left|x^2 \sin\frac{1}{x} - x_0^2 \sin\frac{1}{x} + x_0^2 \sin\frac{1}{x} - x_0^2 \sin\frac{1}{x_0}\right| \\
&= \left|(x^2-x_0^2)\sin\frac{1}{x} + x_0^2\left(\sin\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{x_0}\right)\right| \\
&\leq |x^2-x_0^2|\left|\sin\frac{1}{x}\right| + |x_0|^2\left|\sin\frac{1}{x}-\sin\frac{1}{x_0}\right| \\
&\leq |x-x_0||x+x_0|\cdot 1 + |x_0|^2\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right| \\
&\leq |x-x_0|(|x|+|x_0|) + |x_0|^2 \frac{|x-x_0|}{|x||x_0|} \\
&< |x-x_0|(2|x_0|+1) + 2|x-x_0| \\
&= |x-x_0|(2|x_0|+3) < \varepsilon
\end{aligned}$$

Άρα, η f συνεχής στο $\mathbb{R}^*$.

Για $x=0$ και $\varepsilon>0$, επιλέγουμε $\delta=\sqrt{\varepsilon}$, οπότε $\forall x\in\mathbb{R}$, $|x-0|<\delta \Rightarrow$
$|f(x)-f(0)| = \left|x^2\sin\frac{1}{x} - 0\right| \leq |x|^2 < \delta^2 = \varepsilon$, άρα f συνεχής στο 0.

Τελικά, f συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα

Η $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^*$ και ασυνεχής στο 0.

Πράγματι, έστω $x_0\neq 0$ και $\varepsilon>0$. Επιλέγουμε $\delta=\min\left\{\frac{|x_0|}{2}, \frac{\varepsilon|x_0|^2}{2}\right\}$.

Αν $|x-x_0|<\delta$ τότε $|x-x_0|<\frac{|x_0|}{2}$, $|x-x_0|<\frac{\varepsilon|x_0|^2}{2}$.

Αλλά $||x|-|x_0|| \leq |x-x_0|$, άρα $||x|-|x_0||<\frac{|x_0|}{2} \Rightarrow -\frac{|x_0|}{2} < |x|-|x_0| < \frac{|x_0|}{2}$

$\Rightarrow \frac{|x_0|}{2} < |x| < \frac{3|x_0|}{2} \Rightarrow \frac{1}{|x|} < \frac{2}{|x_0|}$

Επομένως

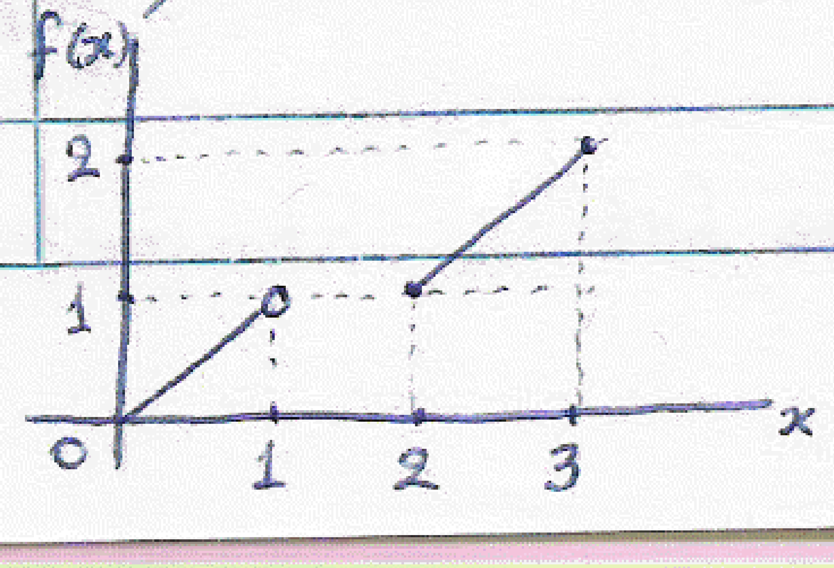
$$|f(x)-f(x_0)| = \left|\sin\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{x_0}\right| \leq \left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right| = \frac{|x-x_0|}{|x||x_0|} \leq \frac{2|x-x_0|}{|x_0|^2} < \varepsilon$$

Άρα, η f συνεχής στο $\mathbb{R}^*$.

Εξάλλου, έχουμε πει ότι $\nexists \lim\limits_{x\to 0} f(x)$, άρα f ασυνεχής στο 0.

Σχόλιο Η αντίστροφη μιας συνεχούς συνάρτησης δεν είναι κατ' ανάγκη συνεχής

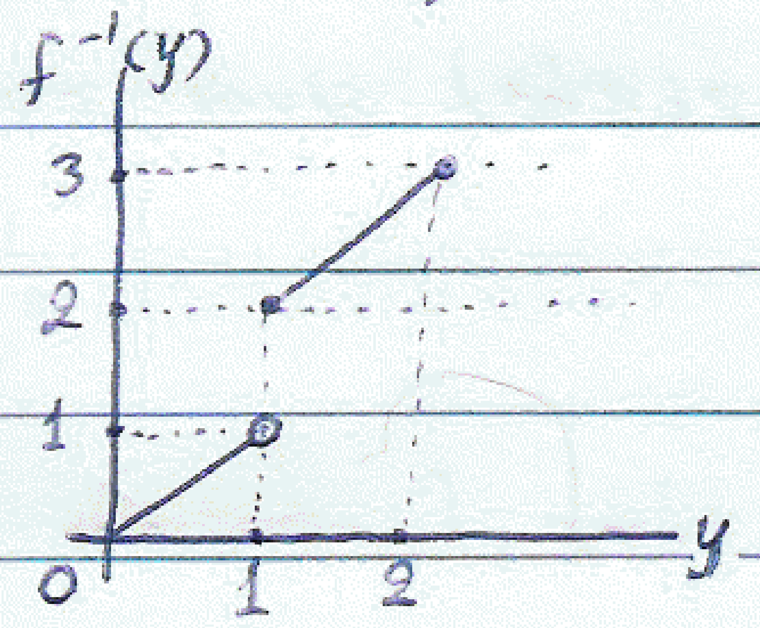
Πράγματι, έστω $f:[0,1)\cup[2,3]\to[0,2]$ με $f(x)=\begin{cases} x, & 0\leq x<1 \\ x-1, & 2\leq x\leq 3\end{cases}$



Η f είναι συνεχής, 1-1 και επί.

Η αντίστροφη συνάρτηση είναι

$f^{-1} : [0,2] \to \mathbb{R}$ με $f^{-1}(y) = \begin{cases} y, & 0 \le y < 1 \\ y+1, & 1 \le y \le 2 \end{cases}$



Η f^{-1} είναι ασυνεχή στο $y=1$.

Προφανώς, τα δύο διαγράμματα των f, f^{-1} είναι κατοπτρικά ως προς τη διαγώνιο, όπως πρέπει.

Ωστόσο, οι αντίστροφες των τριγωνομετρικών συναρτήσεων (που είναι συνεχείς) είναι συνεχείς συναρτήσεις και η λογαριθμική (ως αντίστροφη της εκθετικής που είναι συνεχή) είναι συνεχής.

Παράδειγμα Αν f συνεχή στο $x_0 \Rightarrow |f|$ συνεχή στο x_0

Πράγματι, ξέρουμε ότι $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = |\lim\limits_{x \to x_0} f(x)| = |f(x_0)|$

Το αντίστροφο δεν ισχύει, δηλ. μπορεί να είναι $|f|$ συνεχή στο x_0 και f ασυνεχή στο x_0.

Πράγματι, για $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ -1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ τότε f ασυνεχής $\forall x \in \mathbb{R}$, ενώ η $|f| = 1$ είναι συνεχής $\forall x \in \mathbb{R}$.

Πρόταση

Αν οι $f, g : X \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς στο x_0, τότε:

το άθροισμα $f+g$ είναι συνεχή στο x_0

το γινόμενο fg είναι συνεχή στο x_0

Αν $f(x_0) \neq 0$, η $\frac{1}{f}$ είναι συνεχή στο x_0

Απόδειξη

Πράγματι, αν το x_0 δεν είναι σημείο συσσώρευσης τότε προφανώς ισχύουν τα παραπάνω.

Αν το x_0 είναι σημείο συσσώρευσης, τότε αφού οι f, g είναι συνεχείς στο x_0, άρα $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$.

Αλλά $\lim\limits_{x \to x_0} (f+g)(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = f(x_0) + g(x_0) = (f+g)(x_0)$

$\Rightarrow f+g$ συνεχής στο x_0.

Όμοια για τις $f \cdot g$, $\frac{1}{f}$.

Επομένως, τα πολυώνυμα και οι ρητές συναρτήσεις (εκτός από τα σημεία μηδενισμού των παρονομαστών τους που δεν ορίζονται) είναι συνεχείς συναρτήσεις. Ομοίως η n-οστή ρίζα ως αντίστροφη συνάρτηση του μονωνύμου x^n (που είναι συνεχής) είναι συνεχής.

<u>Άσκηση</u>

Αν $f(x+y)=f(x)+f(y)$ και f συνεχής στο 0 τότε f συνεχής $\forall x$.

Πράγματι, $f(x)=f(x+0)=f(x)+f(0) \Rightarrow f(0)=0$.

Είναι $\lim\limits_{h\to 0} f(a+h)-f(a)=\lim\limits_{h\to 0}[f(a+h)-f(a)]=$

$=\lim\limits_{h\to 0}[f(a)+f(h)-f(a)]=\lim\limits_{h\to 0} f(h)$

Αλλά f συνεχής στο 0, άρα $\lim\limits_{h\to 0} f(h)=f(0)=0$.

Τελικά $\lim\limits_{h\to 0} f(a+h)=f(a) \Rightarrow f$ συνεχής στο a.

<u>Πρόταση</u>

Αν f συνεχής στο x_0, $\lim\limits_{t\to t_0} g(t)=x_0$, τότε $\lim\limits_{t\to t_0}(f\circ g)(t)=f(x_0)$

Η πρόταση αυτή διατυπώνεται και ως εξής:

Αν η f συνεχής στο σημείο $\lim\limits_{t\to t_0} g(t)$, τότε $\lim\limits_{t\to t_0}(f\circ g)(t)=f(\lim\limits_{t\to t_0} g(t))$

<u>Απόδειξη</u>

Αφού f συνεχής στο x_0, άρα $\forall \varepsilon>0$, $\exists \zeta>0: \forall x$, $|x-x_0|<\zeta$, $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

Αλλά $\lim\limits_{t\to t_0} g(t)=x_0$, άρα για το $\zeta>0$, $\exists \delta>0: \forall t$, $0<|t-t_0|<\delta$, $|g(t)-x_0|<\zeta$.

Επομένως, $g(t)\in D_f$ και $\forall t$, $0<|t-t_0|<\delta$, $|f(g(t))-f(x_0)|<\varepsilon$, άρα $\lim\limits_{t\to t_0}(f\circ g)(t)=f(x_0)$.

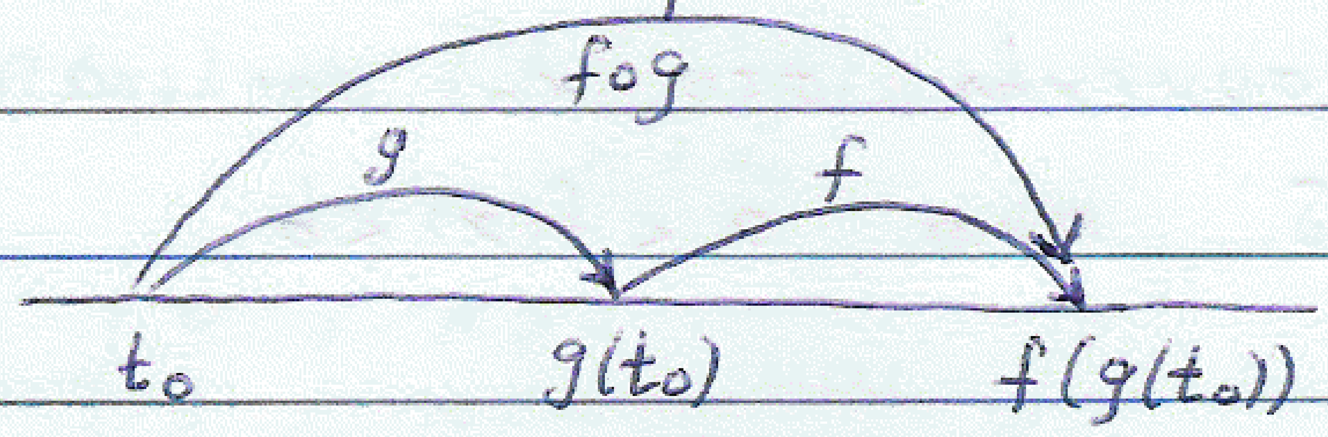
<u>Πόρισμα</u>

Αν g συνεχής στο t_0, f συνεχής στο $g(t_0)$, τότε $f\circ g$ συνεχής στο t_0.

<u>Απόδειξη</u>

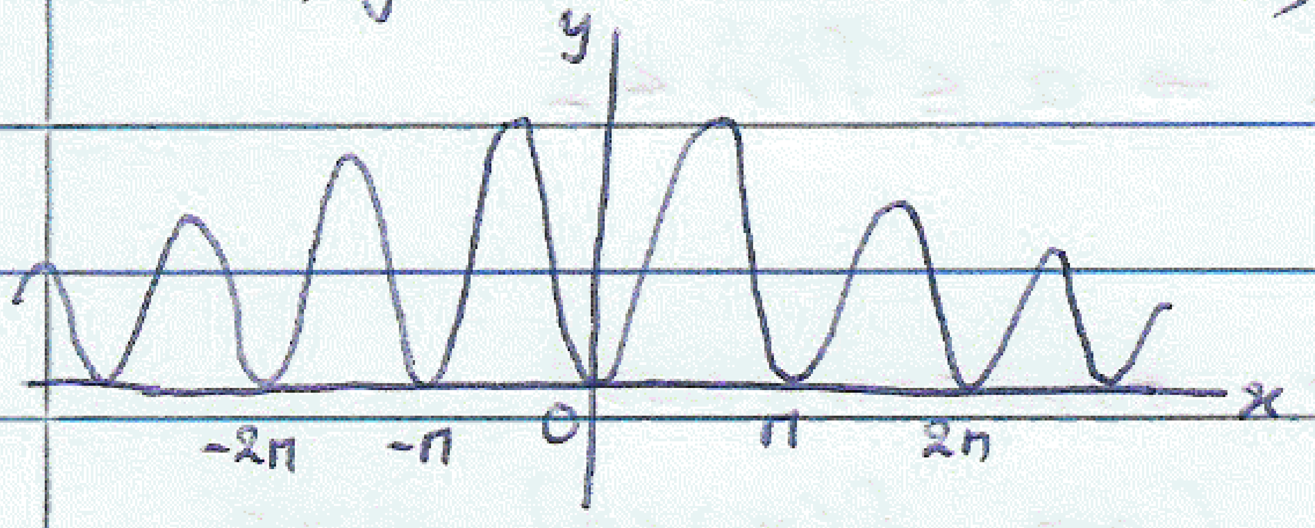
Αφού g συνεχής στο t_0, άρα $\lim\limits_{t\to t_0} g(t)=g(t_0)$. Αφού f συνεχής στο $g(t_0)$, άρα f συνεχής στο $\lim\limits_{t\to t_0} g(t)$. Από την προηγούμενη πρόταση $\lim\limits_{t\to t_0}(f\circ g)(t)=f(\lim\limits_{t\to t_0} g(t))=f(g(t_0))=(f\circ g)(t_0) \Rightarrow f\circ g$ συνεχής στο t_0.

Με άλλα λόγια μπορούμε να πούμε ότι η σύνθεση συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση.



<u>Παράδειγμα</u> Η $y=\left|\dfrac{x\sin x}{x^2+2}\right|$ είναι συνεχής

Πράγματι, αν $g(x)=\dfrac{x\sin x}{x^2+2}$ και $f(x)=|x|$ τότε $y=f(g(x))$.
Οι f,g είναι συνεχείς, άρα η y είναι συνεχής

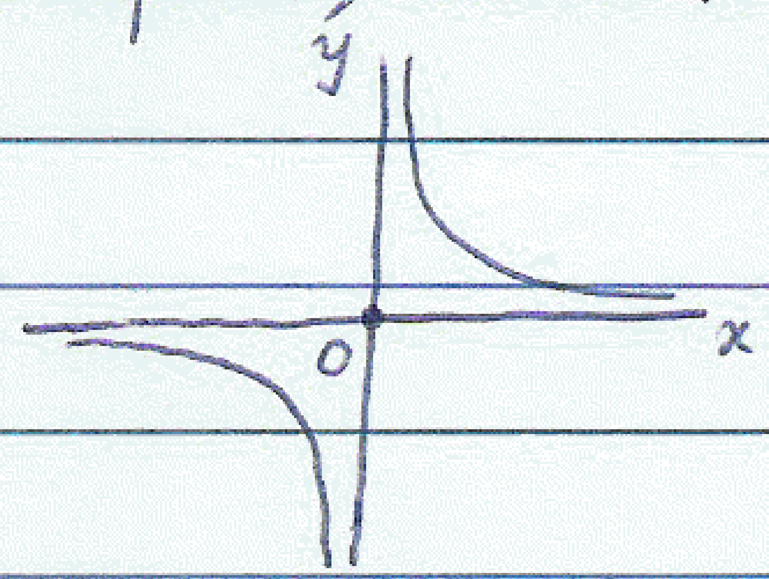


<u>Πρόταση</u> f συνεχής στο $x_0 \Rightarrow f$ τοπικά φραγμένη στο x_0
(δηλ. $\exists\, \delta>0,\ M>0 : \forall x\in X,\ |x-x_0|<\delta$ είναι $|f(x)|\leq M$)

<u>Απόδειξη</u>
Αφού f συνεχής στο x_0, άρα για $\varepsilon=1$, $\exists\, \delta>0 : \forall x\in X, |x-x_0|$
$\Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<1$
Αλλά $|f(x)|-|f(x_0)| \leq |f(x)-f(x_0)|$, άρα $|f(x)|-|f(x_0)|<1 \Rightarrow$
$|f(x)|<|f(x_0)|+1 \Rightarrow |f(x)|<M$, $M=|f(x_0)|+1$.

<u>Παράδειγμα</u>
Η $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ είναι ασυνεχής στο 0.

Πράγματι, η f δεν είναι φραγμένη σε καμμία περιοχή του 0.
Επομένως από την προηγούμενη πρόταση η f είναι ασυνεχής στο



Μια παραλλαγή της προηγούμενης πρότασης είναι η ακόλουθη

<u>Πρόταση</u> Αν f συνεχής στο x_0 και $a < f(x_0) < b$ τότε $\exists\, \delta > 0$: $\forall x \in X$, $|x - x_0| < \delta$ είναι $a < f(x) < b$

<u>Απόδειξη</u>

Αν $\varepsilon = \min\{b - f(x_0), f(x_0) - a\}$ τότε $\varepsilon \leq f(x_0) - a$, $\varepsilon \leq b - f(x_0)$

$\Rightarrow a \leq f(x_0) - \varepsilon < f(x_0) < f(x_0) + \varepsilon \leq b$

Αφού f συνεχής στο x_0, άρα $\exists\, \delta > 0$: $\forall x \in X$, $|x - x_0| < \delta$ είναι $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < f(x) - f(x_0) < \varepsilon \Rightarrow f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$

Άρα $\forall x \in X$, $|x - x_0| < \delta$ είναι

$a \leq f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon \leq b \Rightarrow a < f(x) < b$

<u>Πρόταση</u> (Διατήρηση προσήμου συνεχών συναρτήσεων)

Αν f συνεχής στο x_0 και $f(x_0) > 0$ (αντ. $f(x_0) < 0$) τότε $\exists\, \delta > 0$: $\forall x \in X$, $|x - x_0| < \delta$ είναι $f(x) > 0$ (αντ. $f(x) < 0$).

<u>Απόδειξη</u>

Αν $f(x_0) > 0$ τότε $\exists\, a, b > 0$: $a < f(x_0) < b$. Άρα, από την προηγούμενη πρόταση $\exists\, \delta > 0$: $\forall x \in X$, $|x - x_0| < \delta$ είναι $0 < a < f(x) < b$ $\Rightarrow f(x) > 0$.

Η πρόταση αυτή μπορεί να δειχθεί και απευθείας ως εξής:

Αφού f συνεχής στο x_0, άρα $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$: $\forall x \in X$, $|x - x_0| < \delta$ είναι $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Για $\varepsilon = \frac{1}{2} f(x_0)$ είναι $|f(x) - f(x_0)| < \frac{1}{2} f(x_0) \Rightarrow -\frac{1}{2} f(x_0) < f(x) - f(x_0) < \frac{1}{2} f(x_0)$ $\Rightarrow \frac{1}{2} f(x_0) < f(x) < \frac{3}{2} f(x_0)$. Αν $f(x_0) > 0$ τότε $f(x) > 0$.

Για το $f(x_0) < 0$ παίρνουμε $\varepsilon = -\frac{1}{2} f(x_0) > 0$ ή προχωράμε με τη συνάρτηση $-f$.

Άσκηση

Βρείτε με ένα παράδειγμα ότι αν η f δεν είναι συνεχής τότε εν γένει $\lim_{x \to x_0} f(g(x)) \neq f(\lim_{x \to x_0} g(x))$

Πράγματι, αν $f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq a \\ 1, & x = a \end{cases}$ και $g(x) = x - x_0 + a$, τότε $\lim_{x \to x_0} g(x) = a$, άρα $f(\lim_{x \to x_0} g(x)) = f(a) = 1$.

Ωστόσο, για $x \neq x_0$ είναι $g(x) \neq a$, άρα $\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = 0$.

Επομένως, $\lim_{x \to x_0} f(g(x)) \neq f(\lim_{x \to x_0} g(x))$.