ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

Μαθηματικός Λογισμός

Σημειώσεις – Όρια

Κοφινάς Γιώργος

Τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών και Επικοινωνιακών Συστημάτων

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Όρια

Το όριο είναι η πιο σημαντική έννοια της ανάλυσης και την διαφοροποιεί από την άλγεβρα.

Ορισμός Ο αριθμός L ονομάζεται το όριο της $f: X \to \mathbb{R}$ στο x_0 αν $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in X$ με $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

Συμβολίζουμε $L = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

Για να έχει νόημα η παραπάνω έκφραση $\forall x \in X, 0 < |x - x_0| < \delta$ οφείλει το x_0 να είναι σημείο συσσώρευσης του X, δηλαδή σε κάθε ανοικτό διάστημα που περιέχει το x_0, $\exists x \in X, x \neq x_0$. Η έκφραση $\delta(\varepsilon)$ δεν σημαίνει ότι πρέπει να βρεθεί αναλυτική έκφραση. Εν γένει, το $\delta(\varepsilon)$ εξαρτάται και από το x_0.

Η άρνηση του παραπάνω ορισμού δίνει τον ορισμό του πότε η f δεν έχει όριο L στο x_0, δηλαδή:

Η $f: X \to \mathbb{R}$ δεν έχει όριο L στο x_0 αν $\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0$, $\exists x \in X$ με $0 < |x - x_0| < \delta$, $|f(x) - L| \geq \varepsilon$

Πρόταση Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, αυτό είναι μοναδικό

Απόδειξη

Αν υπάρχουν δύο όρια της f στο x_0, τα L_1, L_2 τότε

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_1 > 0 : \forall x,\ 0 < |x - x_0| < \delta_1,\ |f(x) - L_1| < \varepsilon$

$\exists \delta_2 > 0 : \forall x,\ 0 < |x - x_0| < \delta_2,\ |f(x) - L_2| < \varepsilon$

Αν $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, τότε $\forall x,\ 0 < |x - x_0| < \delta$, $|f(x) - L_1| < \varepsilon$, $|f(x) - L_2| < \varepsilon$

Άρα $\forall x,\ 0 < |x - x_0| < \delta$, $|L_1 - L_2| = |L_1 - f(x) + f(x) - L_2| \leq \leq |L_1 - f(x)| + |f(x) - L_2| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$. Άρα $L_1 - L_2 = 0$, αφού αν $L_1 - L_2 \neq 0$ διαλέγουμε $\varepsilon = \frac{|L_1 - L_2|}{4}$ και καταλήγουμε στο άτοπο $|L_1 - L_2| < \frac{|L_1 - L_2|}{2}$.

Παράδειγμα

α) $f(x) = x \sin\frac{1}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta = \varepsilon$, $0 < |x| < \delta \Rightarrow \left|x \sin\frac{1}{x}\right| = |x| \left|\sin\frac{1}{x}\right| \leq |x| < \varepsilon$

β) $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta = \sqrt{\varepsilon}$, $0 < |x| < \delta \Rightarrow \left|x^2 \sin\frac{1}{x}\right| = |x|^2 \left|\sin\frac{1}{x}\right| \leq |x|^2 < \delta^2 = \varepsilon$

γ) $f(x) = \sqrt{|x|}\, \sin\frac{1}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta = \varepsilon^2$, $0 < |x| < \delta \Rightarrow \left|\sqrt{|x|}\, \sin\frac{1}{x}\right| = \sqrt{|x|} \left|\sin\frac{1}{x}\right| \leq \sqrt{|x|} < \sqrt{\delta} = \varepsilon$

(δ) $f(x) = 5x - 3$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$

Έστω $\varepsilon > 0$ και $0 < |x-1| < \delta$. Για να είναι $|f(x) - 2| < \varepsilon \Leftrightarrow$
$|(5x-3) - 2| < \varepsilon \Leftrightarrow |5x - 5| < \varepsilon \Leftrightarrow |x-1| < \frac{\varepsilon}{5}$.
Άρα, αν επιλέξουμε $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$ τότε για $0 < |x-1| < \delta = \frac{\varepsilon}{5}$,
είναι $|f(x) - 2| = |(5x-3) - 2| = |5x - 5| = 5|x-1| < \varepsilon$

Παράδειγμα

$f(x) = \sin\frac{1}{x}$, $\nexists \lim\limits_{x\to 0} f(x)$

Επιλέγουμε $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Τότε $\forall \delta > 0$,

$\exists\, x_1 = \dfrac{1}{\pi/2 + 2\pi n} \in (-\delta, \delta)$, $\exists\, x_2 = \dfrac{1}{3\pi/2 + 2\pi m} \in (-\delta, \delta)$, $n, m \in \mathbb{N}$

με $f(x_1) = 1$, $f(x_2) = -1$.

Αν υποθέσαμε ότι $\exists \lim\limits_{x\to 0} f(x) = L$, τότε $\forall \varepsilon > 0$, άρα και για $\varepsilon = \frac{1}{2}$,
$\exists \delta > 0 : \forall x$, $0 < |x| < \delta$, $|f(x) - L| < \frac{1}{2}$.

Άρα, γι' αυτό το δ, αφού τα $0 \neq x_1, x_2 \in (-\delta, \delta)$, άρα θα είναι

$$|f(x_1) - L| < \frac{1}{2}, \quad |f(x_2) - L| < \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow |1 - L| < \frac{1}{2}, \quad |-1 - L| < \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} < 1 - L < \frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{2} < 1 + L < \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{2} < -L < -\frac{1}{2}, \quad -\frac{3}{2} < L < -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} < L < \frac{3}{2}, \quad -\frac{3}{2} < L < -\frac{1}{2} \quad \text{άτοπο}$$

Τελικά $\nexists \lim_{x \to 0} f(x)$.

Παράδειγμα.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \qquad \nexists \lim_{x \to a} f(x)$$

Επιλέγω $\varepsilon = \frac{1}{4}$, οπότε $\forall \delta > 0$, $\exists x_1, x_2 \in (a - \delta, a + \delta)$ με $x_1 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $x_2 \in \mathbb{Q}$, άρα $f(x_1) = 0$, $f(x_2) = 1$

Αν υποθέσουμε ότι $\exists \lim_{x \to a} f(x) = L$, τότε $\forall \varepsilon > 0$, άρα και για $\varepsilon = \frac{1}{4}$ $\exists \delta > 0 : \forall x, \ 0 < |x - a| < \delta, \ |f(x) - L| < \frac{1}{4}$.

Άρα, γι' αυτό το δ, αφού τα $0 \neq x_1, x_2 \in (a - \delta, a + \delta)$, άρα θα είναι

$$|f(x_1) - L| < \frac{1}{4}, \quad |f(x_2) - L| < \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow |0 - L| < \frac{1}{4}, \quad |1 - L| < \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{4} < L < \frac{1}{4}, \quad -\frac{1}{4} < 1 - L < \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{4} < L < \frac{1}{4}, \quad -\frac{5}{4} < -L < -\frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{4} < L < \frac{1}{4}, \quad \frac{3}{4} < L < \frac{5}{4} \quad \text{άτοπο}$$

Τελικά $\nexists \lim_{x \to a} f(x)$

Μπορούμε, προκειμένου να αποδείξουμε κάποιο όριο, αντί να χρησιμοποιούμε τον ορισμό, να στηριζόμαστε στην παρακάτω πρόταση.

Πρόταση Αν $\exists \zeta > 0, M > 0 : \forall x, \ 0 < |x - x_0| < \zeta, \ \frac{|f(x) - L|}{|x - x_0|} \leq M$, τότε $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$.

Απόδειξη

Έστω ότι $\exists\, J>0, M>0$ ώστε $\forall x,\ 0<|x-x_0|<J,\ \dfrac{|f(x)-L|}{|x-x_0|} \leq M$.

Για το τυχόν $\varepsilon>0$, επιλέγουμε $\delta=\min\{J, \frac{\varepsilon}{M}\}$.

Αν $J<\frac{\varepsilon}{M}$ τότε $\forall x,\ 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |x-x_0|<\frac{\varepsilon}{M} \Rightarrow |x-x_0|M<\varepsilon$

$\Rightarrow |f(x)-L| \leq |x-x_0|M<\varepsilon$

Αν $\frac{\varepsilon}{M}<J$ τότε $\forall x,\ 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |x-x_0|<\frac{\varepsilon}{M} \Rightarrow |x-x_0|M<\varepsilon$

$\Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$

Τελικά, $\forall x,\ 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$

Παράδειγμα

α) $f(x)=x^2$, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=a^2$

Είναι $\dfrac{|f(x)-L|}{|x-a|}=\dfrac{|x^2-a^2|}{|x-a|}=|x+a|$

Έστω $0<|x-a|<J$.

Λόγω της γνωστής ανισότητας

$$|x|-|y| \leq ||x|-|y|| \leq |x\pm y| \leq |x|+|y|$$

είναι $|x+a| \leq |x|+|a|$

$|x|-|a| \leq |x-a|<J \Rightarrow |x|<J+|a|$,

άρα $|x+a|<J+2|a| \Rightarrow \dfrac{|f(x)-L|}{|x-a|}<J+2|a|$, π.χ. για $J=1$.

Για $M=J+2|a|$ τότε $\dfrac{|f(x)-L|}{|x-a|}<M \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x)=L$

Αν θέλουμε να προσδιορίσουμε το αντίστοιχο δ του ορισμού, τότε με βάση την πρόταση είναι $\delta=\min\{J, \frac{\varepsilon}{J+2|a|}\}$.

Θα μπορούσε κάποιος να σκεφθεί μία άλλη απόδειξη του παραπάνω ορίου, η οποία όμως είναι λάθος:

Για το τυχόν $\varepsilon>0$, επιλέγουμε $\delta=\min\{\sqrt{a^2+\varepsilon}-a,\ a-\sqrt{a^2-\varepsilon}\}$.

Αν $|x-a|<\delta \Rightarrow |x-a|<\sqrt{a^2+\varepsilon}-a,\ |x-a|<a-\sqrt{a^2-\varepsilon}$

$\Rightarrow -\sqrt{a^2+\varepsilon}+a<x-a<\sqrt{a^2+\varepsilon}-a,\ -a+\sqrt{a^2-\varepsilon}<x-a<a-\sqrt{a^2-\varepsilon}$

$\Rightarrow x<\sqrt{a^2+\varepsilon},\ x>\sqrt{a^2-\varepsilon}$

$\Rightarrow \sqrt{a^2-\varepsilon}<x<\sqrt{a^2+\varepsilon} \Rightarrow a^2-\varepsilon<x^2<a^2+\varepsilon$

$\Rightarrow -\varepsilon < x^2 - a^2 < \varepsilon \Rightarrow |x^2 - a^2| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{x\to a} x^2 = a^2$

Η απόδειξη είναι λάθος διότι η έκφραση $\delta(\varepsilon)$ περιέχει την τετραγωνική ρίζα κάποιου αριθμού, σε αντίθεση με όλα τα άλλα παραδείγματα όπου δεν υπήρχαν τετραγωνικές ρίζες κλπ στην έκφραση του δ. Η ύπαρξη της τετραγωνικής ρίζας είναι ισοδύναμη με την συνέχεια της συνάρτησης x^2, επομένως είναι σα να κάνουμε κύκλο και να χρησιμοποιούμε αυτό που θέλουμε να αποδείξουμε.

β) $f(x) = x^3$, $\lim_{x\to a} f(x) = a^3$

Είναι $\dfrac{|f(x)-L|}{|x-a|} = \dfrac{|x^3-a^3|}{|x-a|} = |x^2+ax+a^2|$

Έστω $0<|x-a|<\jmath$.

Αφού $|x|-|a| \le |x-a| < \jmath \Rightarrow |x| < \jmath + |a|$

Άρα $|x^2+ax+a^2| \le |x^2| + |ax| + |a^2|$

$< (\jmath+|a|)^2 + |a|(\jmath+|a|) + |a|^2$

$= \jmath^2 + 3\jmath|a| + 3|a|^2 = M$, π.χ. για $\jmath = 1$

άρα $\dfrac{|f(x)-L|}{|x-a|} < M \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = L$

Το αντίστοιχο $\delta = \min\left\{\jmath, \dfrac{\varepsilon}{\jmath^2+3\jmath|a|+3|a|^2}\right\}$

Ο υπολογισμός ορίων μέσω του ε-δ ορισμού απαιτεί να μαντεύουμε το όριο προτού εφαρμόσουμε τον ορισμό. Ωστόσο υπάρχουν θεωρήματα που ανάγουν περίπλοκα όρια σε αλγεβρικούς υπολογισμούς απλούστερων ορίων. Δηλαδή, πρακτικά, ξεκινώντας από τα απλά όρια των συναρτήσεων $f(x) = c$, $g(x) = x$ προχωράμε προς άλλα περίπλοκα.

<u>Θεώρημα</u> Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = M$, τότε

α) $\lim_{x\to x_0} (f+g)(x) = L+M$

β) $\lim_{x \to x_0} (fg)(x) = LM$

γ) $\lim_{x \to x_0} \left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{L}$, $L \neq 0$

Άρα και $\lim_{x \to x_0} (f-g)(x) = L - M$

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{L}{M}$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x)^{n/m} = L^{n/m} \quad , \quad n, m \in \mathbb{Z}^*$$

Απόδειξη

α) $\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta_1, \delta_2 > 0 : \forall x, \ 0 < |x - x_0| < \delta_1, \ |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\forall x, \ 0 < |x - x_0| < \delta_2, \ |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2}$

Αν $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ τότε $\forall x, \ 0 < |x - x_0| < \delta, \ |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}, |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\Rightarrow |(f+g)(x) - (L+M)| = |f(x) - L + g(x) - M| \leq |f(x) - L| + |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Άρα $\lim_{x \to x_0} (f+g)(x) = L + M$

β) $\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta_1, \delta_2 > 0 : \forall x, \ 0 < |x - x_0| < \delta_1, \ |f(x) - L| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}$

$\forall x, \ 0 < |x - x_0| < \delta_2, \ |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{3(1+|M|)}$

$\exists \delta_3, \delta_4 > 0 : \forall x, \ 0 < |x - x_0| < \delta_3, \ |g(x) - M| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}$

$\forall x, \ 0 < |x - x_0| < \delta_4, \ |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{3(1+|L|)}$

Αν $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4\}$ τότε $\forall x, \ 0 < |x - x_0| < \delta$, ισχύουν και οι 4 παραπάνω ανισότητες. Άρα

$$fg - LM = [L + (f(x) - L)][M + (g(x) - M)] - LM$$
$$= L(g(x) - M) + M(f(x) - L) + (f(x) - L)(g(x) - M)$$
$$\Rightarrow |(fg)(x) - LM| \leq |L|\,|g(x) - M| + |M|\,|f(x) - L| + |f(x) - L|\,|g(x) - M|$$
$$\leq (1+|L|)\,|g(x) - M| + (1+|M|)\,|f(x) - L| + |f(x) - L|\,|g(x) - M|$$
$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}\sqrt{\frac{\varepsilon}{3}} = \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} (fg)(x) = LM$$

γ) $\forall \varepsilon>0, \ \exists \delta_1, \delta_2>0 : \forall x, \ 0<|x-x_0|<\delta_1, \ |f(x)-L|<\frac{|L|}{2}$

$\forall x, \ 0<|x-x_0|<\delta_2, \ |f(x)-L|<\frac{\varepsilon}{2}|L|^2$

Αν $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ τότε $\forall x, \ 0<|x-x_0|<\delta$ ισχύουν

$|f(x)-L|<\frac{|L|}{2}, \quad |f(x)-L|<\frac{\varepsilon}{2}|L|^2$

Αφού $||X|-|Y||\le|X-Y|$, άρα για $X=f(x)$, $Y=L$ είναι

$||f(x)|-|L||\le|f(x)-L|<\frac{|L|}{2}$

$\Rightarrow -\frac{|L|}{2}<|f(x)|-|L|<\frac{|L|}{2}$

$\Rightarrow \frac{|L|}{2}<|f(x)|<\frac{3|L|}{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{|f(x)|}<\frac{2}{|L|}<\frac{\frac{2}{3}}{|f(x)|}$

Άρα $\left|\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{L}\right|=\frac{|f(x)-L|}{|L|\,|f(x)|}<\frac{2|f(x)-L|}{|L|^2}<\frac{2}{|L|^2}\frac{\varepsilon}{2}|L|^2=\varepsilon$

$\Rightarrow \lim_{x\to x_0}\left(\frac{1}{f}\right)(x)=\frac{1}{L}$

Παράδειγμα

α) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-x}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{x(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x}=\frac{1+2}{1}=3$

β) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{2+x}-\sqrt{2})(\sqrt{2+x}+\sqrt{2})}{x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2})}=\lim_{x\to 0}\frac{2+x-2}{x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2})}=$

$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$

γ) $\lim_{x\to 1}\sqrt{\frac{x^4+x^2-1}{x^2+5}}=\sqrt{\lim_{x\to 1}\frac{x^4+x^2-1}{x^2+5}}=\sqrt{\frac{\lim_{x\to 1}(x^4+x^2-1)}{\lim_{x\to 1}(x^2+5)}}=$

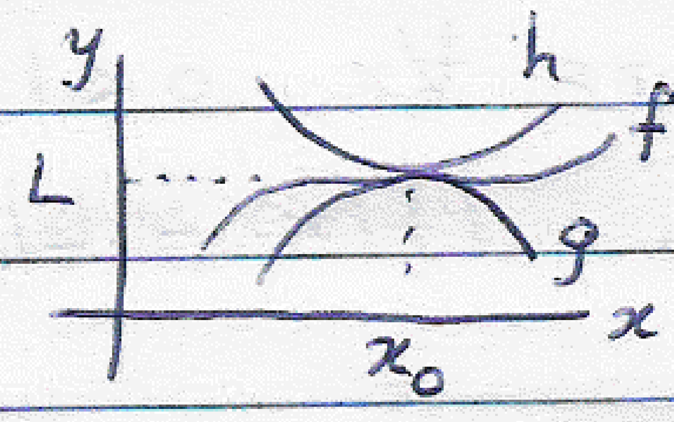
$=\sqrt{\frac{1^4+1^2-1}{1^2+5}}=\frac{1}{\sqrt{6}}$

δ) $\lim_{x\to y}\frac{x^n-y^n}{x-y}=\lim_{x\to y}(x^{n-1}+x^{n-2}y+\dots+xy^{n-2}+y^{n-1})$

$=y^{n-1}+y^{n-1}+\dots+y^{n-1}=ny^{n-1}$

Θεώρημα (σάντουιτς, φραξίματος, συμπίεσης)

Αν υπάρχει ανοικτό διάστημα I που περιέχει το x_0 ώστε $\forall x \in I,\ x \neq x_0$ είναι $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ και αν $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = L$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$



Απόδειξη

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L$, άρα $\exists \delta_1 > 0 : \forall x,\ 0 < |x - x_0| < \delta_1$,
$L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon$

Αφού $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = L$, άρα $\exists \delta_2 > 0 : \forall x,\ 0 < |x - x_0| < \delta_2$,

$L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon$

Αν $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ τότε $\forall x,\ 0 < |x - x_0| < \delta$ ισχύουν και οι δύο παραπάνω ανισότητες για τα $g(x), h(x)$, άρα

$$L - \varepsilon < g(x) \leq f(x) \leq h(x) < L + \varepsilon$$

$$\Rightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = L$$

Παράδειγμα

α) $\lim\limits_{\theta\to 0} \sin\theta = 0$

Είναι $-|\theta| \leq \sin\theta \leq |\theta|$ και $\lim\limits_{\theta\to 0}(-|\theta|) = \lim\limits_{\theta\to 0}|\theta| = 0$

άρα $\lim\limits_{\theta\to 0} \sin\theta = 0$

β) $\lim\limits_{\theta\to 0} \cos\theta = 1$

Είναι $0 \leq 1 - \cos\theta \leq |\theta|$ και $\lim\limits_{\theta\to 0}|\theta| = 0$,

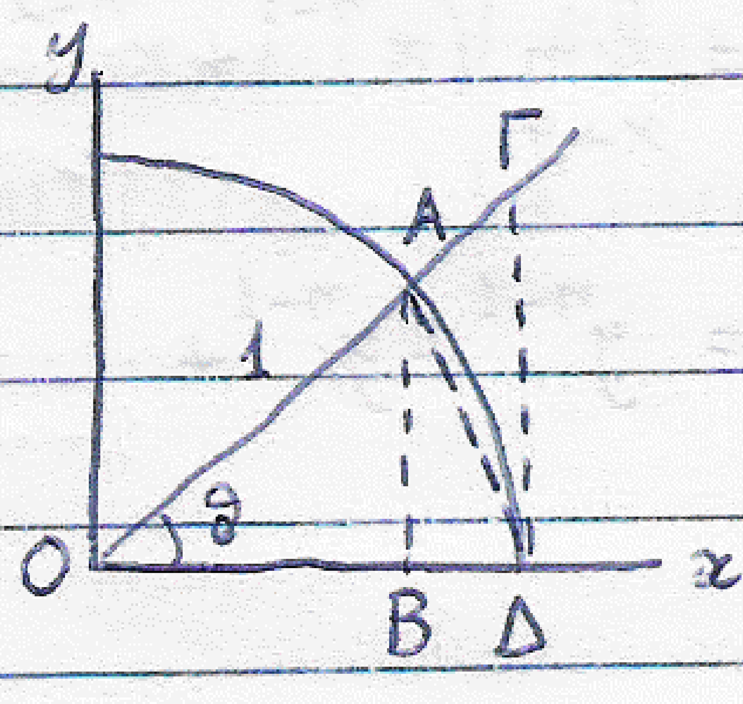
άρα $\lim\limits_{\theta\to 0}(1 - \cos\theta) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{\theta\to 0} \cos\theta = 1$

Ισχύει $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{\sin\theta}{\theta} = 1$, θ (rad)

$E_{O\overset{\triangle}{A}\Delta} = \frac{1}{2}(O\Delta)(AB) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin\theta$

$E_{O\overset{\frown}{A}\Delta} = \frac{1}{2} r^2 \theta = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \theta$

$E_{O\overset{\triangle}{\Gamma}\Delta} = \frac{1}{2}(O\Delta)(\Gamma\Delta) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan\theta$



$$E_{O\overset{\triangle}{A}\Delta} < E_{O\overset{\frown}{A}\Delta} < E_{O\overset{\triangle}{\Gamma}\Delta} \Rightarrow \frac{1}{2}\sin\vartheta < \frac{1}{2}\vartheta < \frac{1}{2}\tan\vartheta$$

$$\Rightarrow 1 < \frac{\vartheta}{\sin\vartheta} < \frac{1}{\cos\vartheta} \Rightarrow \cos\vartheta < \frac{\sin\vartheta}{\vartheta} < 1$$

Είναι $\lim\limits_{\vartheta\to 0}\cos\vartheta = 1 \Rightarrow \lim\limits_{\vartheta\to 0}\frac{\sin\vartheta}{\vartheta} = 1$

Παράδειγμα

α) $$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-2\sin^2\frac{x}{2})-1}{x} = -2\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x} =$$

$$= -\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x/2}{x/2}\sin\frac{x}{2}\right) = -\lim_{x\to 0}\frac{\sin x/2}{x/2}\cdot\lim_{x\to 0}\sin\frac{x}{2} = -1.0 = 0$$

ή $$\frac{\cos x - 1}{x} = \frac{(\cos x-1)(\cos x+1)}{x(\cos x+1)} = \frac{\cos^2 x - 1}{x(\cos x+1)} = \frac{-\sin^2 x}{x(\cos x+1)} = -\frac{\sin x}{x}\sin x\frac{1}{\cos x+1} \xrightarrow[x\to 0]{} -1\cdot 0\cdot\frac{1}{1+1}$$

β) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{5x} = \frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x} = \frac{2}{5}\cdot 1 = \frac{2}{5}$$

Πρόταση (όριο σύνθεσης)

Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$, $\lim\limits_{t\to t_0} g(t) = x_0$ και αν $\exists\, c>0 : \forall t$,

$0<|t-t_0|<c$, $g(t)\neq x_0$, τότε $\lim\limits_{t\to t_0} f(g(t)) = L$

Απόδειξη

Αφού $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$, άρα $\forall \varepsilon>0, \exists\, \zeta>0 : \forall x, 0<|x-x_0|<\zeta, |f(x)-L|<\varepsilon$

Θέτοντας $x=g(t)$ έχουμε $0<|g(t)-x_0|<\zeta$, $|f(g(t))-L|<\varepsilon$

Αφού $\lim\limits_{t\to t_0} g(t) = x_0$, άρα $\exists\, \delta_1>0 : \forall t, 0<|t-t_0|<\delta_1, |g(t)-x_0|<\zeta$

Επιπλέον, $\forall t$, $0<|t-t_0|<c$, $g(t)\neq x_0$

Άρα, αν $\delta = \min\{\delta_1, c\}$, τότε $\forall t, 0<|t-t_0|<\delta, 0<|g(t)-x_0|<\zeta$

$\Rightarrow \forall t, 0<|t-t_0|<\delta, |f(g(t))-L|<\varepsilon$

$\Rightarrow \lim\limits_{t\to t_0} f(g(t)) = L$

Ορισμός Ο αριθμός L ονομάζεται το δεξιό (αντ. αριστερό) πλευρικό όριο της $f: X \to \mathbb{R}$ στο x_0 αν $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0:$
$\forall x \in X,\ 0 < x - x_0 < \delta$ (αντ. $0 < x_0 - x < \delta$) $\Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

Συμβολίζουμε $L = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ (αντ. $L = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$)

Πρόταση $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L,\ \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L$

Απόδειξη

$\Rightarrow$) Προφανής

$\Leftarrow$) Έστω $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L$. Τότε

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_1, \delta_2 > 0 : \forall x,\ x_0 < x < x_0 + \delta_1,\ |f(x) - L| < \varepsilon$$
$$\forall x,\ x_0 - \delta_2 < x < x_0,\ |f(x) - L| < \varepsilon$$

Αν $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, τότε $\forall x$, $x_0 < x < x_0 + \delta \leq x_0 + \delta_1$ ή
$x_0 - \delta_2 \leq x_0 - \delta < x < x_0$ είναι $|f(x) - L| < \varepsilon$

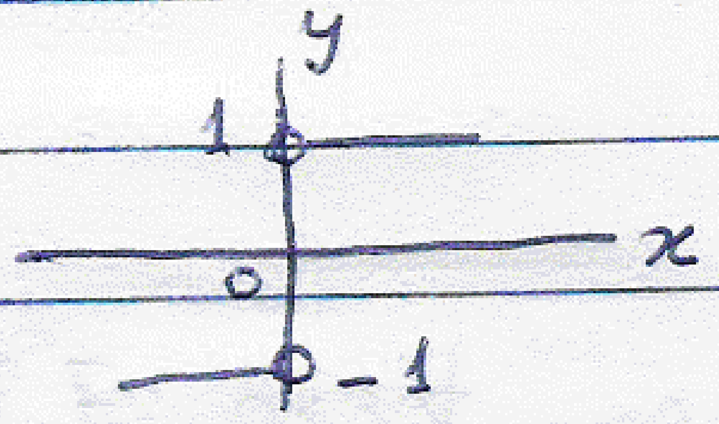
Άρα $\forall x,\ 0 < |x - x_0| < \delta,\ |f(x) - L| < \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$

Η άρνηση της παραπάνω πρότασης λέει:

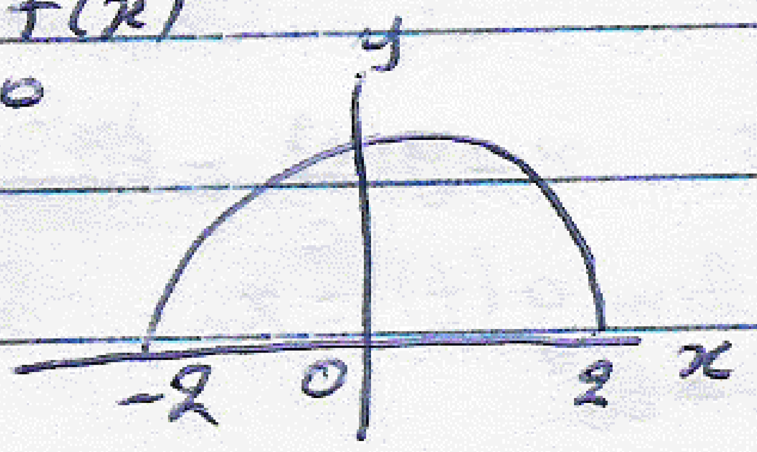
$$\nexists \lim_{x \to x_0} f(x) \Leftrightarrow \nexists \lim_{x \to x_0^+} f(x) \text{ ή } \nexists \lim_{x \to x_0^-} f(x) \text{ ή } \lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

Παράδειγμα

α) $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$



$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -1$, $\nexists \lim\limits_{x \to 0} f(x)$

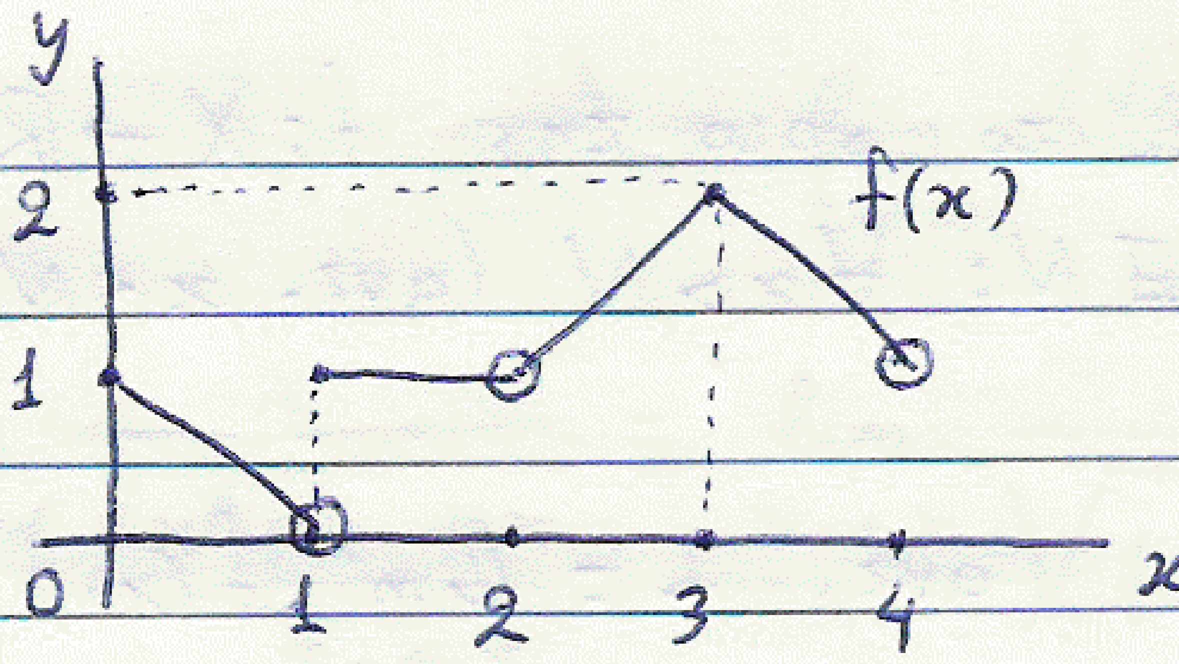


β) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$, $x \in [-2, 2]$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 0$, $\nexists \lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$, $\nexists \lim\limits_{x \to 2} f(x)$

$\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = 0$, $\nexists \lim\limits_{x \to -2^-} f(x)$, $\nexists \lim\limits_{x \to -2} f(x)$

γ)



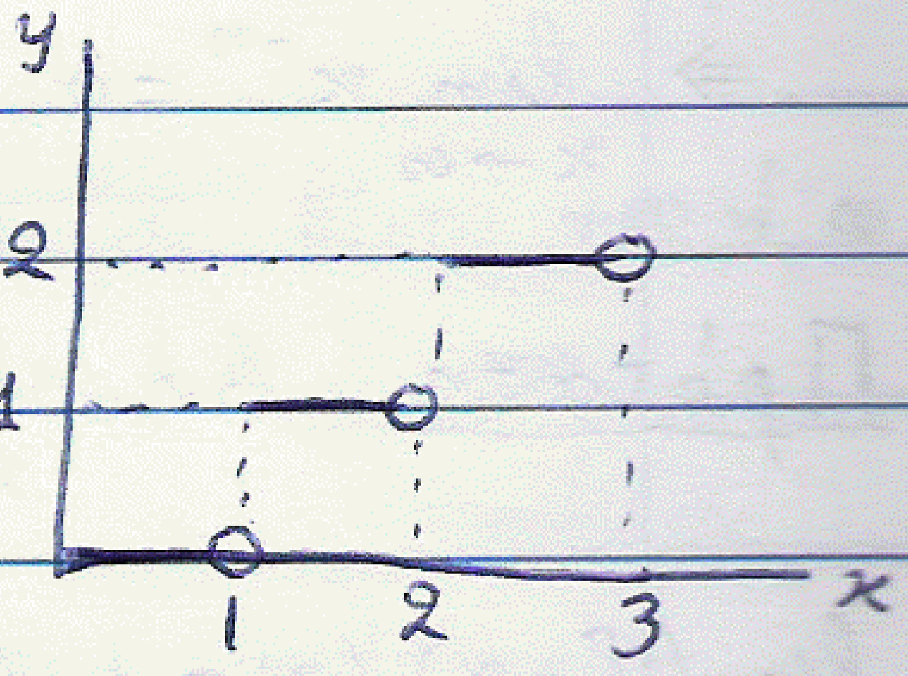
$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$, $\nexists \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, $\nexists \lim\limits_{x\to 0} f(x)$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1$, $\nexists \lim\limits_{x\to 1} f(x)$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3} f(x) = 2$

$\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = 1$, $\nexists \lim\limits_{x\to 4^+} f(x)$, $\nexists \lim\limits_{x\to 4} f(x)$



Παράδειγμα

$\lim\limits_{x\to n^-} [x] = n-1$, $\lim\limits_{x\to n^+} [x] = n$, $n \in \mathbb{Z}$

Αν $x \in [n-1, n)$, τότε $[x] = n-1$, άρα μαντεύουμε ότι $\lim\limits_{x\to n^-} [x] = n-1$

Αν $\varepsilon > 0$, τότε οποιοδήποτε $\delta \leq 1$ έχει $[n-\delta, n) \subseteq [n-1, n)$, άρα $\forall x$, $0 < n-x < \delta$ είναι $n-\delta < x < n$, άρα $[x] = n-1$, άρα $|[x]-(n-1)| = 0 < \varepsilon$,

δηλ. $\forall x$, $0 < n-x < \delta$, $|[x]-(n-1)| < \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{x\to n^-} [x] = n-1$

Πρόταση Αν $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = L$, $\lim\limits_{x\to x_0^+} g(x) = M$, τότε

$\lim\limits_{x\to x_0^+} (f+g)(x) = L+M$, $\lim\limits_{x\to x_0^+} (fg)(x) = LM$, $\lim\limits_{x\to x_0^+} \left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{L}$, $L \neq 0$

Όμοια για τα αριστερά πλευρικά όρια

Επίσης ισχύει η πρόταση σάντουιτς για τα πλευρικά όρια

Ορισμός Ο αριθμός L ονομάζεται το όριο της $f: X \to \mathbb{R}$ στο $+\infty$ ή ∞ (αντ. στο $-\infty$) αν $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N: \forall x > N$ (αντ. $x < N$) $\Rightarrow$ $|f(x) - L| < \varepsilon$

Συμβολίζουμε $L = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x)$ (αντ. $L = \lim_{x\to-\infty} f(x)$)

Η ευθεία $y = \lim_{x\to\infty} f(x)$ ή η $y = \lim_{x\to-\infty} f(x)$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη τη γραφικής παράστασης της $y = f(x)$.

Παράδειγμα

$$\lim_{x\to\infty} x^{-n} = 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Για κάθε $x > 1$ με $x > \frac{1}{\varepsilon}$ είναι $\frac{1}{x} < \varepsilon$

Αλλά $\left|\frac{1}{x^n} - 0\right| \le \left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{x}$, άρα $\left|\frac{1}{x^n} - 0\right| < \varepsilon$

Επομένως, αν $N = \max\{1, \frac{1}{\varepsilon}\}$ τότε $\forall x > N \Rightarrow \left|\frac{1}{x^n} - 0\right| < \varepsilon$

$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} x^{-n} = 0$

Πρόταση Αν $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L$, $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = M$ τότε

$\lim_{x\to\pm\infty} (f+g)(x) = L+M$, $\lim_{x\to\pm\infty} (fg)(x) = LM$, $\lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{L}$, $L \neq 0$

Επίσης ισχύει η πρόταση σάντουιτς

Παράδειγμα

α) $\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2 + 8x - 3}{3x^2 + 2} = \lim_{x\to\infty} \frac{5 + \frac{8}{x} - \frac{3}{x^2}}{3 + \frac{2}{x^2}} = \frac{5+0-0}{3+0} = \frac{5}{3}$

β) $\lim_{x\to\infty} \sin\frac{1}{x} = \lim_{t\to 0^+} \sin t = 0$

γ) $\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to-\infty} e^t = 0$

δ) $\lim_{x\to\infty} x \sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\sin t}{t} = 1$

ε) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\sqrt{x^2+x}-x)(\sqrt{x^2+x}+x)}{\sqrt{x^2+x}+x} =$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} = \dfrac{1}{2}$

στ) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sin x}{x} = 0$ διότι $|\sin x|\le 1 \Rightarrow 0 \le \left|\dfrac{\sin x}{x}\right| \le \dfrac{1}{|x|}$

και $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left|\dfrac{1}{x}\right| = 0$, άρα $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sin x}{x} = 0$

ζ) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin^3 x}{5x+6} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\sin^2 x\,\frac{\sin x}{x}}{5+\frac{6}{x}} = \dfrac{1}{5}$ διότι $|\sin x|\le 1$

η) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\sin x}{x^2+5} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x+\frac{5}{x}}\sin x = 0$, διότι $|\sin x|\le 1$

θ) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2(1+\sin^2 x)}{(x+\sin x)^2} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\sin^2 x}{\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)^2}$ $\nexists$, διότι $\left(1+\dfrac{\sin x}{x}\right)^2 \xrightarrow[x\to\infty]{} 1$

και $\nexists \lim\limits_{x\to\infty}\sin x$

<u>Ορισμός</u> Λέμε ότι το όριο της $f: X\to\mathbb{R}$ στο x_0 είναι $+\infty$ ή ∞ (αντ. $-\infty$) αν $\forall M>0,\ \exists\delta>0: \forall x\in X,\ 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow f(x)>M$ (αντ. $f(x)<-M$)

Συμβολίζουμε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ (αντ. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$)

Παρόμοια ορίζονται και τα πλευρικά όρια $\lim\limits_{x\to x_0^\pm} f(x) = \infty$

Η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της $y = f(x)$.

<u>Παράδειγμα</u>

$\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{x^2-4} = \infty$, $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{1}{x^2-4} = -\infty$

α) Έστω $M>0$. Τότε $\forall x,\ 0<x-2<\dfrac{1}{5M} \Rightarrow \dfrac{1}{5(x-2)}>M$

Εξάλλου, $\forall x,\ 0<x-2<1 \Rightarrow 2<x<3 \Rightarrow \dfrac{1}{5}<\dfrac{1}{x+2}<\dfrac{1}{4}$

Αν $\delta=\min\{1, \frac{1}{5M}\}$, τότε $\forall x,\ 0<x-2<\delta$, ισχύουν και οι δύο παραπάνω ανισότητες, άρα $\dfrac{1}{x^2-4} = \dfrac{1}{x+2}\,\dfrac{1}{x-2} > \dfrac{1}{5}\,\dfrac{1}{x-2} > M \Rightarrow \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{x^2-4} = \infty$

β) Έστω $M>0$. Τότε $\forall x$, $-\frac{1}{3M} < x-2 < 0 \Rightarrow \frac{1}{3(x-2)} < -M$

Εξάλλου, $\forall x$, $-1 < x-2 < 0 \Rightarrow 1 < x < 2 \Rightarrow \frac{1}{4} < \frac{1}{x+2} < \frac{1}{3}$

Αν $\delta = \min\{1, \frac{1}{3M}\}$, τότε $\forall x$, $-\delta < x-2 < 0$ ισχύουν και οι δύο παραπάνω ανισότητες, άρα $\frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{x+2}\,\frac{1}{x-2} < \frac{1}{3}\,\frac{1}{x-2} < -M$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2^-} \frac{1}{x^2-4} = -\infty$

Παράδειγμα

$$\lim_{x\to 2} \frac{x-4}{(x-2)^2} = -\infty$$

Έστω $M>0$. Για κάθε x, $|x-2|<1 \Leftrightarrow 1<x<3 \Leftrightarrow -3<x-4<-1$ είναι

$$\frac{x-4}{(x-2)^2} < \frac{-1}{(x-2)^2}$$

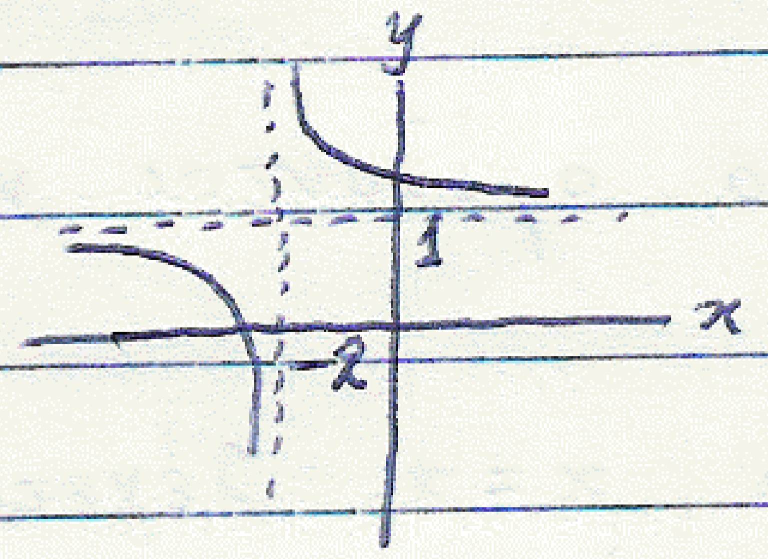
Εξάλλου $\forall x$, $|x-2| < \frac{1}{\sqrt{M}} \Rightarrow (x-2)^2 < \frac{1}{M} \Rightarrow \frac{1}{(x-2)^2} > M \Rightarrow -\frac{1}{(x-2)^2} < -M$

Αν $\delta = \min\{1, \frac{1}{\sqrt{M}}\}$ τότε $\forall x, 0<|x-2|<\delta$ είναι $\frac{x-4}{(x-2)^2} < \frac{-1}{(x-2)^2} < -M$,

άρα $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x-4}{(x-2)^2} = -\infty$

Παράδειγμα

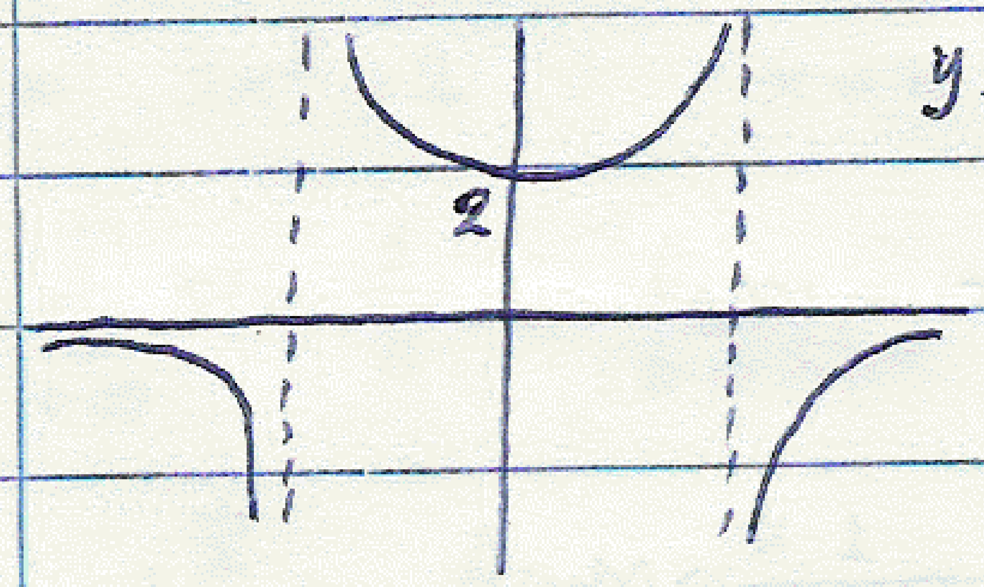
α) $\lim\limits_{x\to -2^+} \frac{x+3}{x+2} = \lim\limits_{x\to -2^+} \left(1+\frac{1}{x+2}\right) = +\infty$



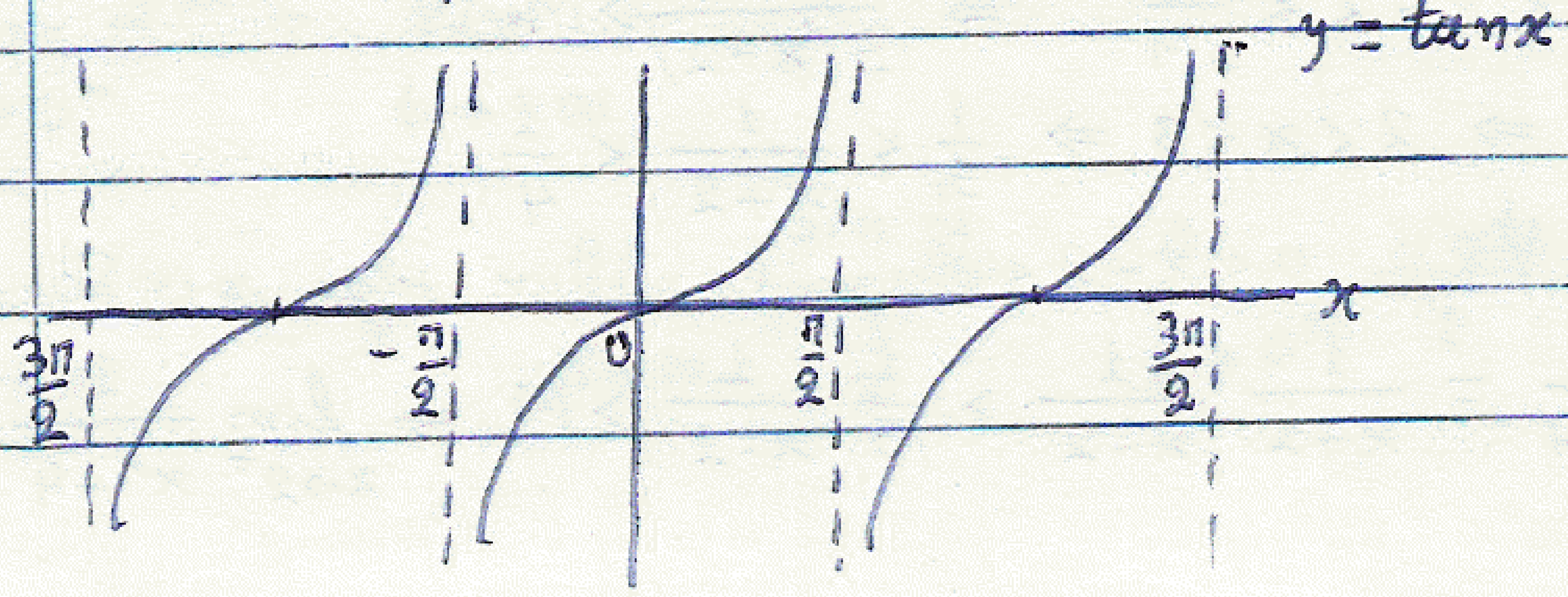
$\lim\limits_{x\to -2^-} \frac{x+3}{x+2} = \lim\limits_{x\to -2^-} \left(1+\frac{1}{x+2}\right) = -\infty$

Άρα $\nexists \lim\limits_{x\to -2} \frac{x+3}{x+2}$

β) $y = -\frac{8}{x^2-4}$



γ) $y = \tan x$



Ορισμός Λέμε ότι το όριο της $f: X \to \mathbb{R}$ στο ∞ είναι ∞ αν $\forall M>0,\ \exists N: \forall x>N \Rightarrow f(x)>M$

Αντίστοιχα για τις άλλες περιπτώσεις με $-\infty$.

Παράδειγμα

$$\lim_{x\to\infty} a x^n = \begin{cases} \infty, & a>0 \\ -\infty, & a<0 \end{cases} \qquad (n\in\mathbb{N})$$

Έστω $a>0$. Είναι $\forall n\geq 1,\ x\geq 1,\ a x^n \geq a x$

Έστω $M>0$. Τότε $\forall x,\ x>\frac{M}{a} \Rightarrow a x>M$.

Αν $N=\max\{1, \frac{M}{a}\}$, τότε $\forall x,\ x>N$ ισχύουν και οι δύο παραπάνω ανισότητες, άρα $a x^n \geq a x > M \Rightarrow \lim_{x\to\infty} a x^n = \infty$

Παράδειγμα

α) $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+4x-7}{7x^2-x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+\frac{4}{x}-\frac{7}{x^2}}{7-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = \infty$$

β) $$\lim_{x\to\infty} \left[x\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+\sqrt{\frac{1}{x}}} = \infty$$

γ) $\lim_{x\to\infty} \left[x\left(1+\sin^2 x\right)\right] = \infty$, αφού $1 \leq 1+\sin^2 x \leq 2$

δ) $$\lim_{x\to\infty} \left(x^2 \sin\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \left(x \frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right) = \left(\lim_{x\to\infty} x\right)\left(\lim_{x\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right) = \left(\lim_{x\to\infty} x\right)\left(\lim_{t\to 0^+} \frac{\sin t}{t}\right) = \infty$$

Για ρητές συναρτήσεις, αν ο βαθμός του αριθμητή είναι κατά μία μονάδα μεγαλύτερος από το βαθμό του παρανομαστή, τότε υπάρχει πλάγια ασύμπτωτη.

π.χ. $$f(x) = \frac{2x^2-3}{7x+4} = \left(\frac{2}{7}x - \frac{8}{49}\right) + \frac{-115}{49(7x+4)}$$

Για $x\to\pm\infty$, $f(x) \to \frac{2}{7}x - \frac{8}{49}$ $(\to\pm\infty)$

Άρα η $g(x) = \frac{2}{7}x - \frac{8}{49}$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της $f(x)$.

Άσκηση

Αν $\lim_{x \to a} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x \to a} |f(x)| = |L|$

Πράγματι, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x$ με $0 < |x - a| < \delta$ είναι $|f(x) - L| < \varepsilon$.
Αλλά $||f(x)| - |L|| \le |f(x) - L| < \varepsilon$, άρα $\lim_{x \to a} |f(x)| = |L|$.