ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

Μαθηματικός Λογισμός

Σημειώσεις – Συναρτήσεις

Κοφινάς Γιώργος

Τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών και Επικοινωνιακών Συστημάτων

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Συναρτήσεις

Η έννοια της συνάρτησης, παρότι μπορεί να φαίνεται προφανής, εξελίχθηκε με μεγάλη βραδύτητα (17ος αιώνας Euler, 18ος αιώνας Fourier) για να πάρει τη σημερινή της διατύπωση μέσω πρακτικών αναγκών που προέκυπταν από μαθηματικά προβλήματα (γεωμετρικά, λύσεις διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους, κ.λπ).

Ορισμός Μία συνάρτηση από το σύνολο X στο σύνολο Y είναι ένα υποσύνολο f του καρτεσιανού γινομένου $X \times Y$, έτσι ώστε $\forall x \in X$, $\exists! y \in Y$ με $(x,y) \in f$, δηλ. $f = \{(x,y) \in X \times Y : \forall x \in X, \exists! y \in Y\} \subseteq X \times Y$.
Συμβολίζουμε $f : X \to Y$ και $y = f(x)$ αντί για $(x,y) \in f$.

X "πεδίο ορισμού" της f, $Dom(f)$

Y "σύνολο αφίξεως" της f

$y = f(x)$ "τιμή της f στο x"

$f(X) = \{y \in Y : \exists x \in X,\ y = f(x)\}$ "σύνολο τιμών της f"

$A \subseteq X$, $f(A) = \{y \in Y : \exists x \in A,\ y = f(x)\}$ "εικόνα του A"

$B \subseteq Y$, $f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$ "αντίστροφη εικόνα του B"

f "πραγματική" συνάρτηση αν $Y \subseteq \mathbb{R}$

Από τον παραπάνω ορισμό της συνάρτησης φαίνεται ότι συνάρτηση είναι απλώς κάποιος κανόνας που αντιστοιχεί στοιχεία συνόλου σε στοιχεία συνόλου και δεν χρειάζεται να υπάρχει μια αλγεβρική φόρμουλα γι' αυτό. Περαιτέρω, από αυτόν τον κανόνα ενδέχεται να μην μπορούμε στην πράξη να πούμε ένα στοιχείο πού απεικονίζεται. Ή ακόμα και να μην είναι απλό να πούμε αν κάποιο στοιχείο ανήκει ή όχι στο πεδίο ορισμού της f.

Παραδείγματα

(i) $f = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x < y\}$ όχι συνάρτηση γιατί π.χ. $3<4$ και $3<5$.

(ii) $f = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 1\}$ όχι συνάρτηση γιατί π.χ. $(0,1) \in f$ και $(0,-1) \in f$.

(iii) $f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} : xy = 1\}$ είναι συνάρτηση και γράφουμε
$y = f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}^*$

(iv) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : n \to f(n) = a_n$ είναι συνάρτηση ("ακολουθία" αριθμών)

(v) $f(x) = \frac{x^3+1}{x^2+1}$ είναι συνάρτηση (εννοείται $x \in \mathbb{R}$ εκτός αν το πεδίο ορισμού περιορίζεται ρητώς)

(vi) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus Q \end{cases}$ είναι συνάρτηση. Δεν υπάρχει εδώ μια αλγεβρική φόρμουλα της f

(vii) $f(x) = \begin{cases} 1, & x = 5 \\ -1, & x = 7 \\ 2, & x \neq 5,7,\ x = a + b\sqrt{2},\ a,b \in Q \end{cases}$ Το $\pi \in Dom(f)$; δεν είναι εύκολο να το πούμε

(viii) $f_x(t) = t^3 + x$, $\forall t$ είναι συνάρτηση που $t \to t^3 + x$ (για κάποιο x) και είναι διαφορετική από τη συνάρτηση $x \to t^3 + x$ (για κάποιο t)

(ix) $f(x) = \begin{cases} n, & \text{ακριβώς } n\text{-πλήθος 7άρια υπάρχουν στη δεκαδική μορφή του } x \\ 1, & \text{άπειρα 7άρια υπάρχουν στη δεκαδική μορφή του } x \end{cases}$

είναι συνάρτηση. Ποιο το $f(\pi)$;

<u>Ορισμός</u> $f : X \to Y$ συνάρτηση

- f "επί" $\Leftrightarrow$ $f(X) = Y$
- f "1-1" $\Leftrightarrow$ $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
- $id_X : X \to X : id_X(x) = x$ "ταυτοτική" συνάρτηση του X (1-1 και επί)
- $f : X \to Y$ 1-1 $\Rightarrow$ $f^{-1} : f(X) \to X : f^{-1}(y) = x$ "αντίστροφη" της f

  Ισχύει $f^{-1} \circ f = id_X$, $\forall x \in X$ και $f \circ f^{-1} = id_{f(X)}$, $\forall y \in f(X)$
- $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, $f(X) \subseteq Y \Rightarrow g \circ f : X \to Z : (g \circ f)(x) = g(f(x))$ "σύνθεση"

  Ισχύει $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ "προσεταιριστικότητα"

<u>Πρόταση</u> $f : X \to Y$ συνάρτηση

(i) $B \subseteq A \subseteq X \Rightarrow f(B) \subseteq f(A)$, $A \subseteq f^{-1}(f(A))$
f 1-1 $\Rightarrow A = f^{-1}(f(A))$

(ii) $A, B \subseteq X \Rightarrow f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$, $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$
f 1-1 $\Rightarrow f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

(iii) $B \subseteq A \subseteq Y \Rightarrow f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(A)$, $f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$, $f(f^{-1}(A)) \subseteq A$
f επί $\Rightarrow f(f^{-1}(A)) = A$

(iv) $A, B \subseteq Y \Rightarrow f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$, $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

Απόδειξη

Εύκολη

Για τις πραγματικές συναρτήσεις ορίζονται οι συνήθεις πράξεις (πρόσθεση συναρτήσεων, βαθμωτό γινόμενο, γινόμενο συναρτήσεων, πηλίκο συναρτήσεων) και αν επιπλέον $X \subseteq \mathbb{R}$ ορίζονται οι έννοιες της αύξουσας και φθίνουσας συνάρτησης.

Ισχύει : f γνήσια αύξουσα (φθίνουσα) $\Leftrightarrow f^{-1}$ γνήσια αύξουσα (φθίνουσα)

Ορισμός Έστω $f: X \to \mathbb{R}$

f "φραγμένη άνω (κάτω)" $\longleftrightarrow f(x) \leq M \ (\geq M), \ \forall x \in X$

f "φραγμένη" $\longleftrightarrow |f(x)| \leq M, \ \forall x \in X \ \left(\|f\| \equiv \sup\{|f(x)|, x \in X\} \right)$

Παράδειγμα

$$g(x) = x^2 \quad , \quad h(x) = \begin{cases} 0 \ , & x \in \mathbb{Q} \\ 1 \ , & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

(i) $h(x) \leq x$ ισχύει για $x \geq 1$ ή για $x \geq 0, x \in \mathbb{Q}$

(ii) $h(x) \leq g(x)$ ισχύει για $|x| < 1$, $x \in \mathbb{Q}$ ή για $|x| \geq 1$

(iii) $g \circ h = h$ διότι $g(h(x)) - h(x) = 0$

(iv) Η συνάρτηση $g \circ g - g$ μηδενίζεται για $g(g(x)) = g(x) \Leftrightarrow g(x^2) = g(x)$
$\Leftrightarrow (x^2)^2 = x^2 \Leftrightarrow x^4 = x^2 \Leftrightarrow x = \pm 1, 0$

Άσκηση

(i) $(g+h) \circ f = g \circ f + h \circ f$, (ii) $f \circ (g+h) \neq f \circ g + f \circ h$

(iii) $\dfrac{1}{f \circ g} = \dfrac{1}{f} \circ g$, (iv) $\dfrac{1}{f \circ g} \neq f \circ \dfrac{1}{g}$

(i) $[(g+h) \circ f](x) = (g+h)(f(x)) = g(f(x)) + h(f(x)) = (g \circ f)(x) + (h \circ f)(x) =$
$= (g \circ f + h \circ f)(x) \Rightarrow (g+h) \circ f = g \circ f + h \circ f$

(ii) Αν $g(x) = h(x) = 1$ τότε $[f \circ (g+h)](x) = f((g+h)(x)) = f(g(x) + h(x)) =$
$= f(1+1) = f(2)$

$(f \circ g + f \circ h)(x) = f(g(x)) + f(h(x)) = f(1) + f(1)$

Εν γένει $f(2) \neq f(1) + f(1)$, άρα $f \circ (g+h) \neq f \circ g + f \circ h$

(iii) $\dfrac{1}{f\circ g}(x) = \dfrac{1}{f(g(x))} = \dfrac{1}{f}(g(x)) = \left(\dfrac{1}{f}\circ g\right)(x) \Rightarrow \dfrac{1}{f\circ g} = \dfrac{1}{f}\circ g$

(iv) Για $g(x)=2$ είναι $\dfrac{1}{f\circ g}(x) = \dfrac{1}{f(g(x))} = \dfrac{1}{f(2)}$

και $\left(f\circ \dfrac{1}{g}\right)(x) = f\left(\dfrac{1}{g}(x)\right) = f\left(\dfrac{1}{g(x)}\right) = f\left(\dfrac{1}{2}\right)$

Εν γένει $\dfrac{1}{f(2)} \neq f\left(\dfrac{1}{2}\right)$, άρα $\dfrac{1}{f\circ g} \neq f\circ \dfrac{1}{g}$

<u>Άσκηση</u>

$f(x+y)=f(x)+f(y)$, $\forall x,y \Rightarrow \exists c : f(x)=cx$, $\forall x\in\mathbb{Q}$

Αν $n\in\mathbb{N}^*$ τότε $f(n)=f(1+1+\cdots+1) = f(1)+\cdots+f(1) = nf(1) = cn$, $c=f(1)$
Επίσης $f(x)=f(x+0)=f(x)+f(0) \Rightarrow f(0)=f(0)+f(0) \Rightarrow f(0)=0 \Rightarrow$
$f(x)+f(-x) = f(x+(-x)) = f(0) = 0 \Rightarrow f(-x)=-f(x)$
$\Rightarrow f(-n) = -f(n) = -cn = c(-n)$, $n\in\mathbb{N}^*$
Τελικά $f(n)=cn$, $n\in\mathbb{Z}$.
Εξάλλου, αν $n\in\mathbb{N}^*$ είναι $nf\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}\right) =$
$= f\left(n\cdot\frac{1}{n}\right) = f(1) = c \Rightarrow f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{c}{n}$
Άρα $f\left(\frac{1}{-n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = -f\left(\frac{1}{n}\right) = -\frac{c}{n} = \frac{c}{-n}$, $n\in\mathbb{N}$
Τελικά $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{c}{n}$, $n\in\mathbb{Z}^*$.
Αν $x\in\mathbb{Q}$ τότε $x=\frac{m}{n}$, $m\in\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{Z}^* \Rightarrow f(x) = f\left(\frac{m}{n}\right) = f(\underbrace{\tfrac{1}{n}+\cdots+\tfrac{1}{n}}_{m})$
$= f\left(\frac{1}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{n}\right) = mf\left(\frac{1}{n}\right) = m\frac{c}{n} = c\frac{m}{n} = cx$
$\Rightarrow f(x)=cx$, $x\in\mathbb{Q}$, $c=f(1)$

<u>Άσκηση</u>

Κάθε $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ αναλύεται κατά μοναδικό τρόπο σε άθροισμα μιας άρτιας και μιας περιττής συνάρτησης

Πράγματι, αν $f_e(x) \equiv \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$, $f_o(x) \equiv \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$ τότε
$f_e(x)+f_o(x) = f(x)$ με
$f_e(-x) = \dfrac{f(-x)+f(x)}{2} = f_e(x)$, δηλ. f_e άρτια συνάρτηση
$f_o(-x) = \dfrac{f(-x)-f(x)}{2} = -f_o(x)$, δηλ. f_o περιττή συνάρτηση
Περαιτέρω, αυτή η ανάλυση είναι μοναδική, διότι αν $f(x)=f_e(x)+f_o(x)$,

όπου $f_e(-x) = f_e(x)$, $f_o(-x) = -f_o(x)$, τότε
$f(-x) = f_e(-x) + f_o(-x) \Rightarrow f(-x) = f_e(x) - f_o(x)$.
Άρα $f_e(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$, $f_o(x) = \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$ μοναδικές εκφράσεις.

__Άσκηση__
$f(x+y) = f(x)+f(y)$, $f(xy) = f(x)f(y)$, $\forall x,y \Rightarrow f(x)=x, \forall x$ ή $f(x)=0$

Το $f(x)=0$ ικανοποιεί τις σχέσεις. Έστω $f(x)\neq 0$. Τότε $\exists a$:
$f(a)\neq 0$
Είναι $f(a) = f(a\cdot 1) = f(a)f(1) \Rightarrow f(1)=1$
Αφού $f(x+y)=f(x)+f(y)$ ξέρουμε ότι $f(x)=f(1)x$, $\forall x\in\mathbb{Q} \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x)=x, \ \forall x\in \mathbb{Q}$
Αν $c>0$, $\exists d: c=d^2 \Rightarrow f(c) = f(d^2) = f(d\cdot d) = f(d)f(d) = [f(d)]^2 \geq 0$
Αλλά $f(c)\neq 0$ διότι αν $f(c)=0$ τότε $f(x) = f(c\cdot\frac{x}{c}) = f(c)f(\frac{x}{c}) = 0$, $\forall x$ που είναι άτοπο. Επομένως, $f(x)>0$, $x>0$
Αν $x>y \Rightarrow x-y>0 \Rightarrow f(x-y)>0$. Αλλά $f(x-y) = f(x+(-y)) = f(x)+f(-y)$
$= f(x)+f(-1)f(y) = f(x)-f(y)$. Άρα $f(x)-f(y)>0 \Rightarrow f(x)>f(y) \Rightarrow f$ γνήσια αύξουσα.
Έστω ότι $\exists x: f(x)>x$. Λόγω της πυκνότητας των ρητών στο $\mathbb{R}$, $\exists r\in\mathbb{Q}: x<r<f(x) \Rightarrow f(x)<f(r)=r<f(x)$ άτοπο.
Έστω ότι $\exists x: f(x)<x \Rightarrow \exists r\in\mathbb{Q}: f(x)<r<x \Rightarrow$
$f(x)<r=f(r)<f(x)$ άτοπο.
Τελικά $f(x)=x$, $\forall x$

__Άσκηση__
(i) $\nexists f,g: f(x)+g(y)=xy$, $\forall x,y$
(ii) $\nexists f,g: f(x)g(y)=x+y$, $\forall x,y$
(iii) $\exists f,g: f(x+y)=g(xy)$, $\forall x,y$

(i) $f(x)+g(0)=0$, $\forall x \Rightarrow f(x)=-g(0)$, $\forall x$
$f(x)+g(y)=xy \Rightarrow -g(0)+g(y)=xy$, $\forall x,y \stackrel{x=0}{\Rightarrow} -g(0)+g(y)=0 \Rightarrow$
$g(y)=g(0)$, $\forall y$
$f(x)+g(y)=xy \Rightarrow -g(0)+g(0)=xy$, $\forall x,y \Rightarrow 0=xy$, $\forall x,y$ άτοπο

(ii) $f(x)g(y)=x+y \overset{y=0}{\Rightarrow} f(x)g(0)=x+0 \Rightarrow f(x)=\dfrac{x}{g(0)}, \forall x$

$f(x)g(y)=x+y \overset{x=0}{\Rightarrow} f(0)g(y)=0+y \Rightarrow g(y)=\dfrac{y}{f(0)}, \forall y$

$f(x)g(y)=x+y \Rightarrow \dfrac{x}{g(0)}\dfrac{y}{f(0)}=x+y, \forall x,y \overset{y=0}{\Rightarrow} 0=x, \forall x$ άτοπο

(iii) Αν $f(x)=c$, $g(x)=c$, $\forall x$ τότε
$f(x+y)=c$, $g(xy)=c$, άρα $f(x+y)=g(xy)$, $\forall x,y$.

Άσκηση

$$f(y)-f(x)\le (y-x)^2, \forall x,y \Rightarrow f=\text{σταθερά}$$

Είναι $f(y)-f(x) = f(x+(y-x)) - f(x+0(y-x)) \overset{\forall n\in\mathbb{N}^*}{=}$

$= f(x+\frac{1}{n}(y-x)) + f(x+\frac{2}{n}(y-x)) + \dots + f(x+\frac{n}{n}(y-x))$

$- f(x+\frac{0}{n}(y-x)) - f(x+\frac{1}{n}(y-x)) - \dots - f(x+\frac{n-1}{n}(y-x))$

$= \sum_{k=1}^{n} f(x+\frac{k}{n}(y-x)) - \sum_{k=1}^{n} f(x+\frac{k-1}{n}(y-x))$

$= \sum_{k=1}^{n}\left[f(x+\frac{k}{n}(y-x)) - f(x+\frac{k-1}{n}(y-x))\right]$

$\Rightarrow |f(y)-f(x)| = \left|\sum_{k=1}^{n}\left[f(x+\frac{k}{n}(y-x)) - f(x+\frac{k-1}{n}(y-x))\right]\right|$

$\le \sum_{k=1}^{n}\left|f(x+\frac{k}{n}(y-x)) - f(x+\frac{k-1}{n}(y-x))\right|$

$\le \sum_{k=1}^{n}\left[(x+\frac{k}{n}(y-x)) - (x+\frac{k-1}{n}(y-x))\right]^2$

$= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n}(y-x)\right)^2 = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2}(y-x)^2 = \dfrac{(y-x)^2}{n}, \forall n\in\mathbb{N}^*$

$\Rightarrow f(y)=f(x), \forall x,y \Rightarrow f=$ σταθερά

Άσκηση

$$f\circ g=1,\ h\circ f=1 \Rightarrow g=h$$

Είναι $h\circ f\circ g = h\circ(f\circ g) = h\circ 1 = h$ και $h\circ f\circ g = (h\circ f)\circ g = 1\circ g = g$,
άρα $g=h$.