ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

Μαθηματικός Λογισμός

Σημειώσεις – Πληρότητα

Κοφινάς Γιώργος

Τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών και Επικοινωνιακών Συστημάτων

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Πληρότητα των πραγματικών αριθμών

Οι ιδιότητες (αξιώματα) των πραγματικών αριθμών είναι τριών κατηγοριών

- αλγεβρικές (συνιστούν τους συνήθεις κανόνες της αριθμητικής): πρόσθεση πραγματικών αριθμών (ύπαρξη μηδενός, ύπαρξη αντιθέτου, προσεταιριστικότητα, αντιμεταθετικότητα), πολλαπλασιασμός πραγματικών αριθμών (ύπαρξη μονάδας, ύπαρξη αντιστρόφου, προσεταιριστικότητα, αντιμεταθετικότητα), επιμερισμός.
- διάταξης (απεικόνιση των πραγματικών αριθμών μέσω της ευθείας): τριχοτομία, μεταβατικότητα, συμβατότητα διάταξης με πρόσθεση/πολλαπλασιασμό.
- πληρότητας (υπάρχουν αρκετοί πραγματικοί αριθμοί ώστε να συμπληρώνεται η πραγματική ευθεία, δηλαδή δεν υπάρχουν τρύπες-κενά στο $\mathbb{R}$) : ύπαρξη supremum/infimum φραγμένου συνόλου.

Η πληρότητα είναι σημαντική ιδιότητα για την απόδειξη διαφόρων θεωρημάτων του απειροστικού λογισμού.

Επομένως, το $\mathbb{R}$ είναι πλήρες διατεταγμένο σώμα (και μάλιστα το μοναδικό σύνολο με αυτές τις ιδιότητες). Συγκεκριμένη κατασκευή των πραγματικών μπορεί να γίνει μέσω της χρήσης των δεκαδικών αριθμών με άπειρα ψηφία ή μέσω των τομών Dedekind κ.λ.π. Το $\mathbb{Q}$ είναι μόνο διατεταγμένο σώμα, που ικανοποιεί την Αρχιμήδειο ιδιότητα η οποία είναι απόρροια της πληρότητας (άλλα διατεταγμένα σώματα δεν ικανοποιούν την Αρχιμήδειο ιδιότητα).

<u>Ορισμός</u> Το $A \subseteq \mathbb{R}$ λέγεται

"φραγμένο άνω" $\longleftrightarrow$ $\exists\, \alpha \in \mathbb{R} \;:\; x \le \alpha,\ \forall x \in A$ (α "άνω φράγμα")

"φραγμένο κάτω" $\longleftrightarrow$ $\exists\, \beta \in \mathbb{R} \;:\; \beta \le x,\ \forall x \in A$ (β "κάτω φράγμα")

"φραγμένο" $\longleftrightarrow$ A φραγμένο άνω και κάτω

<u>Ορισμός</u> Το $\alpha \in \mathbb{R}$ λέγεται ελάχιστο άνω φράγμα (supremum) του $A \subseteq \mathbb{R}$ (συμβολίζουμε $\alpha = \sup A$) αν

- το α είναι άνω φράγμα του A
- αν το β είναι άνω φράγμα του A τότε $\alpha \leq \beta$

Όμοια, το $\alpha \in \mathbb{R}$ λέγεται μέγιστο κάτω φράγμα (infimum) του $A \subseteq \mathbb{R}$ (συμβολίζουμε $\alpha = \inf A$) αν
- το α είναι κάτω φράγμα του A
- αν το β είναι κάτω φράγμα του A τότε $\beta \leq \alpha$

Προφανώς, το $\sup A$ αν υπάρχει είναι μοναδικό, διότι αν υπάρχουν δύο $\sup A$ τα α, β τότε $\alpha \leq \beta$ και $\beta \leq \alpha$, άρα $\alpha = \beta$.

<u>Αρχή πληρότητας των πραγματικών αριθμών</u>
Κάθε μη-κενό φραγμένο άνω υποσύνολο A τού $\mathbb{R}$ έχει supremum

<u>Πρόταση</u> Κάθε μη-κενό φραγμένο κάτω υποσύνολο A τού $\mathbb{R}$ έχει infimum
<u>Απόδειξη</u>
Έστω $-A = \{-x,\ x \in A\}$. Αφού A φραγμένο κάτω, για κάθε κάτω φράγμα α θα είναι $\alpha \leq x$, $\forall x \in A \Rightarrow -x \leq -\alpha$, $\forall x \in A \Rightarrow$ $y \leq -\alpha$, $\forall y \in -A$ $\Rightarrow$ $-\alpha$ άνω φράγμα του $-A$ $\Rightarrow$ $-A$ φραγμένο άνω $\Rightarrow \exists\ \beta = \sup(-A) \Rightarrow \beta$ άνω φράγμα του $-A \Rightarrow y \leq \beta$, $\forall y \in -A \Rightarrow$ $-\beta \leq -y$, $\forall y \in -A \Rightarrow -\beta \leq x$, $\forall x \in A$ $\Rightarrow -\beta$ κάτω φράγμα του A.
Για το τυχόν κάτω φράγμα α του A έχουμε δείξει ότι το $-\alpha$ είναι άνω φράγμα του $-A$ και αφού $\beta = \sup(-A)$, άρα $\beta \leq -\alpha \Rightarrow$ $\alpha \leq -\beta$. Αφού $-\beta$ κάτω φράγμα του A και α τυχόν κάτω φράγμα του A, άρα $-\beta = \inf A$. Μάλιστα ισχύει ότι $\inf A = -\sup(-A)$

<u>Παραδείγματα</u>
1) $A = \{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$
Είναι $1 = \sup A \in A$, $0 = \inf A \notin A$
2) $A = \{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{Z}^*\} = \{\dots, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$
Είναι $1 = \sup A \in A$, $-1 = \inf A \in A$
3) $A = \{x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x \leq \sqrt{2}\}$
Είναι $\sqrt{2} = \sup A \notin A$, $0 = \inf A \in A$

4) $A=\{x\in\mathbb{R}: x^2+x+1\geq 0\}=\mathbb{R}$ αφού $\Delta=-3<0$

Άρα $\nexists\ \sup A$, $\nexists\ \inf A$

5) $A=\{x\in\mathbb{R}: x<0,\ x^2+x-1<0\}=\left(-\frac{\sqrt{5}+1}{2},0\right)$ (η άλλη ρίζα $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$)

Άρα $0=\sup A\notin A$, $-\frac{\sqrt{5}+1}{2}=\inf A\notin A$

6) $A=\{\frac{1}{n}+(-1)^n,\ n\in\mathbb{N}^*\}=\{\frac{1}{2}+1,\frac{1}{4}+1,\frac{1}{6}+1,\dots\}\cup\{0,\frac{1}{3}-1,\frac{1}{5}-1,\dots\}$

Άρα $\frac{1}{2}+1=\sup A\in A$, $-1=\inf A\notin A$

<u>Πρόταση</u> (Αρχιμήδειος ιδιότητα των πραγματικών αριθμών)

Το $\mathbb{N}$ δεν είναι φραγμένο άνω

<u>Απόδειξη</u>

Έστω ότι το $\mathbb{N}$ είναι φραγμένο άνω. Τότε $\exists\ \alpha=\sup\mathbb{N}\Rightarrow n\leq\alpha,\ \forall n\in\mathbb{N}$ $\Rightarrow n+1\leq\alpha,\ \forall n\in\mathbb{N}$ (αφού $n+1\in\mathbb{N}$) $\Rightarrow n\leq\alpha-1,\ \forall n\in\mathbb{N}\Rightarrow$ $\alpha-1$ άνω φράγμα του $\mathbb{N}$, άτοπο αφού το α είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του $\mathbb{N}$.

<u>Πόρισμα</u> $\forall\varepsilon>0,\ \exists\ n\in\mathbb{N}^*: \frac{1}{n}<\varepsilon$

<u>Απόδειξη</u>

Αφού $\mathbb{N}$ όχι φραγμένο άνω, άρα το $\frac{1}{\varepsilon}$ όχι άνω φράγμα του $\mathbb{N}$, άρα $\exists\ n\in\mathbb{N}^*$ με $n>\frac{1}{\varepsilon}\Leftrightarrow\frac{1}{n}<\varepsilon$.

<u>Πόρισμα</u> $\forall x\in\mathbb{R},\ \exists!\ n\in\mathbb{Z}: n\leq x<n+1$ (συμβολίζουμε $n=[x]$)

<u>Απόδειξη</u>

Αφού $\mathbb{N}$ όχι φραγμένο άνω, άρα $\exists\ n_1,n_2\in\mathbb{N}$ με $n_1>x$, $n_2>-x$ $\Rightarrow -n_2<x<n_1$.

Αν $A=\{n\in\mathbb{N}: n-n_2>x\}$ τότε $(n_1+n_2)-n_2=n_1>x\Rightarrow n_1+n_2\in A$ $\Rightarrow A\neq\emptyset$.

Έστω $n_0=\min A$, οπότε $n_0-n_2>x$. Θέτουμε $m=n_0-n_2-1\in\mathbb{Z}$, οπότε $m+1>x$. Αφού $n_0-1\notin A$, άρα $(n_0-1)-n_2\leq x\Leftrightarrow m\leq x$. Δηλαδή $m\leq x<m+1$ με $m\in\mathbb{Z}$.

Ο m είναι μοναδικός διότι αν και κάποιος άλλος $k\in\mathbb{Z}$ έχει $k\leq x<k+1$, τότε $m\leq x<k+1$ και $k\leq x<m+1$, οπότε $m=k$.

Παρατήρηση (Ευκλείδειος αλγόριθμος της διαίρεσης)

$$m\in\mathbb{Z},\quad n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow \exists!\ \alpha,\beta\in\mathbb{Z} : m=n\alpha+\beta,\ 0\le\beta<n$$

Απόδειξη

Έστω $\alpha=\left[\frac{m}{n}\right]\in\mathbb{Z}$ και $\beta=m-n\alpha\in\mathbb{Z}$.

Τότε $\alpha\le\frac{m}{n}<\alpha+1 \Rightarrow 0\le\frac{m}{n}-\alpha<1 \Rightarrow 0\le\frac{\beta}{n}<1 \Rightarrow 0\le\beta<n$

Άρα $\exists\ \alpha,\beta\in\mathbb{Z}$ με $m=n\alpha+\beta$, $0\le\beta<n$

Πρόταση (πυκνότητα των ρητών στο $\mathbb{R}$)

$$\alpha,\beta\in\mathbb{R},\quad \alpha<\beta \Rightarrow \exists\ \gamma\in\mathbb{Q} : \alpha<\gamma<\beta$$

Απόδειξη

- $\alpha>0$. Αφού $\beta-\alpha>0$, $\exists\ n\in\mathbb{N}^* : \frac{1}{n}<\beta-\alpha$.

Το σύνολο $\frac{1}{n}\mathbb{N}$ δεν είναι φραγμένο άνω διότι αν ήταν και x ήταν ένα άνω φράγμα του $\frac{1}{n}\mathbb{N}$, τότε $\exists\ N\in\mathbb{N}^* : \frac{1}{N}<\frac{1}{nx} \Leftrightarrow \frac{N}{n}>x$, άτοπο αφού x άνω φράγμα του $\frac{1}{n}\mathbb{N}$.

Επομένως το σύνολο $A=\{k\in\mathbb{N} : \frac{k}{n}>\alpha\}$ είναι μη-κενό.

Έστω $m=\min A \Rightarrow \frac{m-1}{n}\le\alpha<\frac{m}{n} \Rightarrow \frac{m}{n}=\frac{m-1}{n}+\frac{1}{n}\le\alpha+\frac{1}{n}<\alpha+\beta-\alpha=\beta$

$\Rightarrow \alpha<\frac{m}{n}<\beta \Rightarrow \alpha<\gamma<\beta$, $\gamma=\frac{m}{n}\in\mathbb{Q}$

- $\alpha<0$. Τότε $\exists\ m\in\mathbb{N} : m+\alpha>0 \Rightarrow 0<m+\alpha<m+\beta \Rightarrow \exists\ \delta\in\mathbb{Q} : m+\alpha<\delta<m+\beta$

$\Rightarrow \alpha<\delta-m<\beta \Rightarrow \alpha<\gamma<\beta$, $\gamma=\delta-m\in\mathbb{Q}$

Παρατήρηση (πυκνότητα των αρρήτων στο $\mathbb{R}$)

$$\alpha,\beta\in\mathbb{R},\quad \alpha<\beta \Rightarrow \exists\ \gamma\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} : \alpha<\gamma<\beta$$

Απόδειξη

Αν $\alpha<\beta \Rightarrow \frac{\alpha}{\sqrt{2}}<\frac{\beta}{\sqrt{2}} \Rightarrow \exists\ \delta\in\mathbb{Q} : \frac{\alpha}{\sqrt{2}}<\delta<\frac{\beta}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha<\sqrt{2}\,\delta<\beta$

$\Rightarrow \alpha<\gamma<\beta$, $\gamma=\sqrt{2}\,\delta\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.