ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Σημειώσεις – Θεωρία Ύπαρξης και Μοναδικότητας

Κοφινάς Γιώργος

Τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών και Επικοινωνιακών Συστημάτων

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Το βασικό κίνητρο για την μελέτη της ύπαρξης και μοναδικότητας λύσεων διαφορικών εξισώσεων είναι πολύ απλό: Σε εισαγωγικά μαθήματα διαφορικών εξισώσεων μαθαίνει κανείς πώς να βρίσκει τις λύσεις των σχετικών ΔΕ εφαρμόζοντας κάποιες μεθόδους. Αυτές οι μέθοδοι εφαρμόζονται κυρίως σε συγκεκριμένες μορφές εξισώσεων. Είναι όμως σαφές ότι οι πιό θεμελιώδεις και σημαντικές ΔΕ (που εμφανίζονται για παράδειγμα στην θεωρία της σχετικότητας αλλά και σε πολλούς άλλους τομείς της επιστήμης) δεν μπορούν να λυθούν με εφαρμογή αυτών των μεθόδων. Στην πραγματικότητα οι εν λόγω φυσικοί νόμοι είναι τόσο περίπλοκοι που το πρώτο ερώτημα που πρέπει να απασχολήσει τον ερευνητή είναι κάτω από ποιές συνθήκες οι ΔΕ έχουν λύσεις, και επιπλέον πότε αυτές οι λύσεις είναι μοναδικές. Το τι εννοούμε όταν λέμε ότι "μια ΔΕ έχει λύση" έχει συχνά ενδιαφέρον.

Με την μελέτη κριτηρίων μέσω των οποίων μια ΔΕ (της οποίας δεν γνωρίζουμε την λύση!) έχει μοναδική λύση ανοίγει ο δρόμος για την εξερεύνηση ποιοτικών χαρακτηριστικών των λύσεων της ΔΕ, έστω και αν δεν γνωρίζουμε την γενική λύση της. Τέτοια ποιοτικά χαρακτηριστικά των λύσεων είναι η ασυμπτωτική τους συμπεριφορά, η συμπεριφορά κοντά σε ιδιομορφίες, η ευστάθεια, η χαοτική ή μη συμπεριφορά των λύσεων κ.ο.κ.

Συμπερασματικά, η μελέτη της ύπαρξης και μοναδικότητας των λύσεων διαφορικών εξισώσεων είναι το πρώτο βήμα για την βαθύτερη μελέτη τους.

Όπως είπε ο Laplace (1814): αν γνωρίζαμε ακριβώς τις αρχικές συνθήκες του συστήματος των ΔΕ που περιγράφουν την δυναμική ενός κλειστού σύμπαντος, τότε θα ήταν δυνατόν — κατ' αρχήν — να κατασκευάσουμε την λύση.

Μας ενδιαφέρουν κυρίως <u>αυτόνομα</u> συστήματα

$$\dot{x} = f(x) \quad , \qquad (1)$$

$t \in I \subset \mathbb{R}$, $f : U \to \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^n$, $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$, αλλά για πληρότητα θα αποδείξουμε το θεώρημα Υ+Μ παρακάτω για ένα μη-αυτόνομο σύστημα της μορφής

$$\dot{x} = f\big(x(t), t\big), \qquad f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n. \qquad (2)$$

(Παρατηρείστε ότι το (2), γράφοντας

$$t = \theta \ , \ \dot{\theta} = 1 ,$$

γίνεται ένα αυτόνομο σύστημα της μορφής

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, \theta) \\ \dot{\theta} &= 1 \end{aligned}\right\} \text{.)}$$

Το (2) γράφεται

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), t) \\ &\ \vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), t) \end{aligned}\right\} (3)$$

και γίνεται σε αυτήν την μορφή ένα σύστημα n ΔΕ $1^{ης}$ τάξης για τις n συναρτήσεις $x_1, \dots, x_n$.

Η $n^{ης}$ τάξης ΔΕ

$$\frac{d^n x}{dt^n} = F\big(x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}(t), t\big) \qquad (4)$$

είναι ειδική περίπτωση του συστήματος (3): θέτοντας

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x \\ x_2 &= \dot{x} \\ &\ \vdots \\ x_n &= x^{(n-1)} \end{aligned}\right\} (5)$$

η εξ. (4) γίνεται ισοδύναμη με το σύστημα

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= F(x_1, x_2, \dots, x_n, t). \end{aligned}\right\} (6)$$

Αν x είναι μια λύση της εξ. (4), τότε η

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv (x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)})$$

είναι μια λύση του (6), και αντίστροφα αν $(x_1, \dots, x_n)$ είναι μια λύση του (6), τότε η x_1 είναι λύση της (4).

Θέτουμε τώρα τους εξής συμβολισμούς:

$$I = [t_0 - a, t_0 + a]$$

$$V = \{ v \in \mathbb{R}^n : |v - v^0| \leq b \}$$

$$E = V \times I = \{ (v, t) : v \in V, t \in I \}$$

$\hookrightarrow \subset \mathbb{R}^{n+1}$ συμπαγές.

$$C = \{ x : x : I \to \mathbb{R}^n \text{ συνεχής} \}$$

$$C \supset F = \{ x : x : I \to V \subset \mathbb{R}^n \text{ συνεχής} \}$$

Το graph$(x) \subset E$, $x \in F$, όπως προκύπτει από τον παραπάνω συμβολισμό.

Έστω τώρα ότι η f είναι συνεχής στο E (έχουμε βλ., στο μυαλό μας το μη αυτόνομο σύστημα (2)). Μας ενδιαφέρουν τελεστές του τύπου $T : F \to F$ όπου

$$x \longmapsto \boxed{y(t) = T(x)(t) = v^0 + \int_{t_0}^{t} f(x(\tau), \tau)\, d\tau.} \quad (7)$$

Παρατηρούμε το εξής

<u>Λήμμα 1</u>

Κάθε συνάρτηση $x \in F$ είναι λύση του (2) που ικανοποιεί $x(t_0) = v^0$ αν και μόνο αν το x είναι ένα σταθερό σημείο του T από την (7) $(T(x) = x)$.

Απόδειξη

($\Leftarrow$) Αν το x είναι ένα σταθερό σημείο του T, $T(x)=x$ στο σύνολο F, τότε

$$x(t) = v^0 + \int_{t_0}^{t} f(x(\tau),\tau)\,d\tau \ , \ t\in I \qquad (8)$$

και άρα:

$$\dot{x}(t) = f(x(t),t), \qquad t\in I,$$

όπου $x(t_0)=v^0$.

($\Rightarrow$) Αν x είναι μια λύση του (2) ε/ω $x(t_0)=v^0$, τότε ολοκληρώνοντας παίρνουμε την (8). (αφού f συνεχής $\Rightarrow$ $\dot{x}$ συνεχής $\Rightarrow$ x C^1 $\Rightarrow$ x συνεχής $\Rightarrow$ x ολοκληρώσιμη) (και άρα ολοκληρώσιμη.)

$\boxtimes$

Για την απόδειξη του θεμελιώδους θεωρήματος του Picard χρειαζόμαστε δύο ορισμούς: "Συστολή" και "συνθήκη Lipschitz". Όπως θα δούμε μια απεικόνιση συστέλλει σε ένα σύνολο σημείων ή συναρτήσεων αν μετασχηματίζει κάθε ζεύγος σημείων ή συναρτήσεων σε ένα ζεύγος που έχει τα δύο του στοιχεία κοντύτερα από ότι πριν την εφαρμογή της συστολής.
Η ύπαρξη μοναδικής λύσης της (2) που περνά από δοθέν σημείο, κάτω από κατάλληλες συνθήκες, εξασφαλίζεται αποδεικνύοντας ότι (1) ο τελεστής (7) συστέλλει στο F και (2) απεικονίζει όλο το F στο εαυτό του. Τα δύο αυτά μας οδηγούν στο ότι ο (7) έχει μοναδικό σταθερό σημείο στο F, που είναι ακριβώς εκείνη η μοναδική λύση που αναζητούμε.

Θα ορίσουμε την έννοια της συστολής και στο $\mathbb{R}$ αλλά και στο σύνολο F (βλ. συμβολισμό παραπάνω). Πρώτα χρειαζόμαστε μια έννοια απόλυτης τιμής (απόστασης) στο σύνολο των συναρτήσεων, F. Αν I, F όπως στον συμβολισμό, τότε για κάθε $x\in F$ ορίζουμε την sup-νόρμα (ή νόρμα supremum)

$$\|x\| = \max\{ |x(t)| : t \in I \}, \qquad (9)$$

και είναι προφανές ότι η νόρμα, όπως ορίζεται εδώ, έχει τις ιδιότητες της μετρικής στο F: $(\|\cdot\| : F \times F \to \mathbb{R})$

$$\left.\begin{array}{l} \|x\| \geq 0, \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \\ \|cx\| = |c|\,\|x\|. \end{array}\right\} \qquad (10)$$

Επειδή ορίζουμε για μια ακολουθία συναρτήσεων $\{x^n\} \in F$, την σύγκλιση

$$\lim_{n\to\infty} x^n = x \iff \lim_{n\to\infty} \|x^n - x\| = 0, \qquad (11)$$

έπεται το ακόλουθο για την σημειακή σύγκλιση.

Λήμμα 2

Η σύγκλιση μιας ακολουθίας συναρτήσεων στο F είναι ομοιόμορφη σύγκλιση της ακολουθίας στο I.Ι

Ορισμός

Μια συνάρτηση (ή τελεστής $T : F \to C$) $T : I \to \mathbb{R}$ ονομάζεται συστολή αν

$$\left.\begin{array}{c} |T(x) - T(y)| \leq \lambda\, |x-y| \\ \\ (\|T(x) - T(y)\| \leq \lambda\, \|x-y\|) \end{array}\right\} (12)$$

για όλα τα $x, y \in I$ και κάποιο $\lambda \in (0,1)$.
$(x, y \in F)$

ΠΡΟΤΑΣΗ

(i) Κάθε συστολή είναι μια συνεχής συνάρτηση ($f : I \to \mathbb{R}$)

(ii) Αν ο $T : I \to \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμος στο I και αν $|T'(x)| \leq \lambda < 1$ στο I, τότε ο T είναι συστολή στο I.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

(ii) Μέσω του θεωρήματος μέσης τιμής.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η $f: U \to \mathbb{R}^n$ του συστήματος (2) είναι συνεχής. Ένα βασικό ερώτημα είναι:

Πότε ο τελεστής (7) είναι συστολή;

Προφανώς, πρέπει να βρούμε κατάλληλες συνθήκες (1) για την f και (2) για το μέγεθος του πεδίου που ολοκληρώνουμε στην (7), δηλ., γιά το μέγεθος του $I = [t_0 - a, t_0 + a]$.

Παρατηρούμε ότι αν

$$y^1 = T(x^1) \quad , \quad y^2 = T(x^2)$$

όπου οι x^1, x^2 είναι συναρτήσεις στο F, τότε:

$$|y^1(t) - y^2(t)| = \left| \int_{t_0}^{t} \left[f(x^1(\tau), \tau) - f(x^2(\tau), \tau) \right] d\tau \right|$$

$$\leq \left| \int_{t_0}^{t} \left| f(x^1(\tau), \tau) - f(x^2(\tau), \tau) \right| d\tau \right|, \quad (13)$$

και άρα για να προχωρήσουμε χρειαζόμαστε κάποια συνθήκη για την διαφορά

$$\left| f(x^1(\tau), \tau) - f(x^2(\tau), \tau) \right|. \qquad (14)$$

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ.</u>

Λέμε ότι η συνάρτηση f ικανοποιεί μια <u>συνθήκη Lipschitz στο E ως προς v</u> αν υπάρχει πραγματικός αριθμός K έτσι ώστε

$$\left| f(v^1, t) - f(v^2, t) \right| \leq K \left| v^1 - v^2 \right|, \qquad (15)$$

γιά όλα τα $(v^1, t), (v^2, t) \in E$. Λέμε ότι $f \in Lip(E)$.

Αν η f είναι Lip, τότε η (13) γίνεται

$$|y^1(t) - y^2(t)| \leq \left| \int_{t_0}^{t} \left| f(x^1(\tau), \tau) - f(x^2(\tau), \tau) \right| d\tau \right|$$

$$\leq$$

εδώ χρησιμοποιείται η συνθήκη Lip

$$\leq K \left| \int_{t_0}^{t} |x^1(\tau) - x^2(\tau)| \, d\tau \right|$$

$$\leq K \left| \int_{t_0}^{t} \|x^1 - x^2\| \, d\tau \right| \quad (\text{αφού } \|\cdot\| = \max |\cdot|)$$

$$= K |t - t_0| \, \|x^1 - x^2\|. \qquad (16)$$

Δηλ. από την (16) και τον ορισμό των y^1, y^2 παραπάνω, προκύπτει ότι για κάθε $x^1, x^2 \in F$

$$\|T(x^1) - T(x^2)\| \leq aK \|x^1 - x^2\|. \qquad (17)$$

Άρα, επιλέγοντας το a έτσι ώστε

$$aK < 1, \qquad (18)$$

έπεται ότι η T είναι συστολή. Άρα αποδείξαμε ότι:

Λήμμα A

Αν η f είναι συνεχής και Lipschitz ως προς v στο E, τότε για αρκούντως μικρό a (βλ. (18)), ο τελεστής (7) είναι μια συστολή στο σύνολο F.

Θα δείξουμε τώρα ότι για αρκούντως μικρό $a > 0$ ο τελεστής T (7) (που όπως δείξαμε στο παραπάνω Λήμμα είναι συστολή) απεικονίζει το F στον εαυτό του, $T(F) \subset F$.

Θέτουμε:

$$M = \max \{ |f(v,t)| : (v,t) \in E_1 \}. \qquad (19)$$

όπου E_1 είναι το κλειστό ορθογώνιο περί του (v^0, t_0):

$$E_1 = \{ (v,t) : |v - v^0| \leq b, \ |t - t_0| \leq a_1 \} \qquad (20)$$

και θεωρούμε το αντίστοιχο σύνολο

$$F_1 = \{ x : I_1 \to V \subset \mathbb{R}^n \text{ συνεχής} \}.$$

(*) ~~Πιο σωστό είναι να πούμε σε μια περιοχή~~ $\cancel{E_1 = \{ (v,t) : |v - v^0| < b, \ |t - t_0| < a_1 \} = V_1 \times I_1}$ ~~του σημείου~~ $\cancel{(v^0, t_0)}$.

Τότε για κάθε ένα

$x \in F_1$,

έχουμε ότι η εικόνα $y = T(x)$ ικανοποιεί:

$$|y(t) - v^0| = \left| \int_{t_0}^{t} f(x(\tau), \tau)\, d\tau \right|$$

$$\leq \left| \int_{t_0}^{t} |f(x(\tau), \tau)|\, d\tau \right|$$

$$\leq M\,|t - t_0| \leq M a_1, \qquad (21)$$

για όλα τα $t \in I_1$. Επιλέγουμε το μέγεθος του I, a, έτσι ώστε:

$$a \leq a_1 \quad \text{και} \quad M a \leq b. \qquad (22)$$

Τότε επειδή η νόρμα στο F είναι μέγιστη τιμή,

$$\|y - v^0\| = \|T(x) - v^0\| \leq b, \qquad (23)$$

για όλα τα $x \in F$. Δηλ., για αρκούντως μικρό a έχουμε ότι

$$T(F) \subset F. \qquad (24)$$

Δηλαδή αποδείξαμε ότι:

<u>ΛΗΜΜΑ Β</u>

Αν η f είναι συνεχής στο κλειστό ορθογώνιο E_1, όπου το $E_1 \supset E$, τότε $T(F) \subset F$, για αρκούντως μικρό a:

$$a \leq b/M. \qquad (25)$$

Παίρνοντας ως a το ελάχιστο:

$$a = \min\left\{\frac{1}{K}, \frac{b}{M}\right\}, \qquad (26)$$

καταλήγουμε στο θεμελιώδες:

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>

Αν η f είναι συνεχής και Lip ως προς v σε μια περιοχή E_1 του (v^0, t_0), τότε για κάποιο $a > 0$ υπάρχει μοναδική λύση στο διάστημα $I = [t_0 - a, t_0 + a]$ της ΔΕ $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$ που ικανοποιεί την Α.Σ. $x(t_0) = v^0$. $\boxtimes$

Η απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος ολοκληρώνεται αν αποδείξουμε ότι κάθε συστολή του συνόλου F που απεικονίζει το F στο εαυτόν του, έχει μοναδικό σταθερό σημείο $\bar{x}$ στο F. Αυτό το σταθερό σημείο είναι η μοναδική λύση που αναζητούμε. Παρατηρούμε επιπλέον ότι για a, b αρκούντως μικρά και κάθε αρχική συνάρτηση x^0 του F, η ακολουθία των διαδοχικών προσεγγίσεων

"Προσεγγίσεις Picard" :
$$\left\{\begin{array}{l} x^1 = T(x^0) \\ x^2 = T(x^1) = T^{(2)}(x^0) \\ \cdots \\ x^n = T(x^{n-1}) = T^{(n)}(x^0) \end{array}\right\}$$

(ως συνέπεια του Λήμματος 2) συγκλίνει ομοιόμορφα στο I στην λύση της ΔΕ $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$ που ικανοποιεί $x(t_0) = v^0$. Μπορούμε, π.χ., να πάρουμε ως αρχική συνάρτηση την

$$x^0(t) = v^0.$$

Δεν είναι εύκολο με την μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων να κατασκευάζουμε λύσεις ΔΕ, (*) αλλά το παραπάνω θεμελιώδες θεώρημα Υ+Μ των λύσεων ΔΕ έχει άλλες εφαρμογές.

Ας ολοκληρώσουμε τώρα την απόδειξη του θεμελιώδους θεωρήματος. Δείχνουμε πρώτα την προαναφερθείσα ιδιότητα των συστολών που απεικονίζουν το σύνολο που συστέλλουν στον εαυτό του για συστολές του διαστήματος $I \subset \mathbb{R}$, και κατόπιν για το σύνολο συναρτήσεων F, όπως παραπάνω.

Κατ' αρχάς χρειαζόμαστε τα εξής δύο αποτελέσματα.

[(*) βλ. άλλη σελίδα για ένα παράδειγμα]

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΩΝ PICARD

(*) Προσεγγίσεις Picard για την $1^{ης}$ τάξης, γραμμική ΔΕ: $\dot{x} = ax$.

ΛΥΣΗ

Ο τελεστής (7) γίνεται:

$$T(u) = x_0 + a\int_0^t u(s)\,ds.$$

Επιλέγουμε ως (αυθαίρετη) αρχική συνάρτηση την

$$u_0(t) = x_0,$$

και τότε η πρώτη προσέγγιση είναι:

$$u_1(t) = T(u_0)(t) = x_0 + ax_0 t,$$

ενώ μετά βρίσκουμε:

$$u_2(t) = x_0 + a\int_0^t x_0(1+as)\,ds =$$

$$= x_0\left(1 + at + \frac{a^2}{2}t^2\right)$$

$$u_3(t) = x_0 + a\int_0^t x_0\left(1+as+\frac{a^2}{2}s^2\right)ds$$

$$= x_0\left(1 + at + \frac{a^2}{2}t^2 + \frac{a^3}{6}t^3\right).$$

Άρα συμπεραίνουμε ότι αυτή η ακολουθία προσεγγίσεων παράγει την δυναμοσειρά της – πολύ γνωστής μας πλέον – λύσης της $\dot{x} = ax$, δηλ., της

$$x_0 e^{at}.$$

Παρατηρούμε ότι στην ίδια λύση θα καταλήγαμε αν ξεκινούσαμε από κάποια άλλη αρχική συνάρτηση.

ΑΣΚΗΣΗ: Π.χ., υπολογίστε τις προσεγγίσεις Picard ξεκινώντας από την αρχική συνάρτηση

$$u_0(t) = t.$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: βεβαίως δεν ισχυριζόμαστε ότι οι προσεγγίσεις συγκλίνουν για κάθε επιλογή της u_0.

ΛΗΜΜΑ (*)

Έστω $\{x_n : n=0,1,2,\dots\}$ ακολουθία σημείων του $\mathbb{R}$ έτσι ώστε για κάποιο $\lambda \in (0,1)$

$$|x_n - x_{n-1}| \le \lambda |x_{n-1} - x_{n-2}| , \quad n \ge 2 .$$

Τότε:

(i) Για $n \ge 0$, $k \ge 1$

$$|x_{n+k} - x_n| \le \frac{\lambda^n}{1-\lambda} |x_1 - x_0| . \qquad (27)$$

(ii) Η ακολουθία $\{x_n\}$ είναι φραγμένη.

(iii) Η ακολουθία $\{x_n\}$ έχει ένα μοναδικό οριακό σημείο και άρα συγκλίνει. ☒

ΛΗΜΜΑ. (**)

Έστω $\{x^n\}$ μια ακολουθία συναρτήσεων στο C έτσι ώστε για κάποιο $\lambda \in (0,1)$

$$\| x^n - x^{n-1} \| \le \lambda \| x^{n-1} - x^{n-2} \| , \quad n \ge 2 . \qquad (28)$$

Τότε η $\{x^n\}$ συγκλίνει. ☒

Τότε το πρώτο θεώρημα για τις συστολές έχει ως εξής.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν η T είναι συστολή του κλειστού διαστήματος $I \subset \mathbb{R}$ και $T(I) \subset I$, τότε η T έχει ένα μοναδικό σταθερό σημείο $\bar{x}$ στο I. Ειδικότερα αν x_0 είναι ένα σημείο του I, τότε

$$x_n = T^{(n)}(x_0) \to \bar{x} , \quad \text{καθώς } n \to \infty ,$$

και ισχύει ότι:

$$|\bar{x} - x_n| \le \frac{\lambda}{1-\lambda} |x_n - x_{n-1}| . \qquad (29)$$

Απόδειξη

Αρχίζουμε με την μοναδικότητα. Έστω $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ δύο σταθερά σημεία στο I. Τότε

$$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| = |T(\bar{x}_1) - T(\bar{x}_2)| \leq \lambda |\bar{x}_1 - \bar{x}_2|.$$

Αν $|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| \neq 0$, τότε $\lambda \geq 1$ – ΑΤΟΠΟ, εξ' υποθέσεως $\lambda < 1$. Άρα $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$.

Για την ύπαρξη, έστω ένα σημείο $x_0 \in I$, και η ακολουθία διαδοχικών προσεγγίσεων,

$$x_n = T(x_{n-1}) = T^{(n)}(x_0).$$

Τότε έχουμε:

$$|x_n - x_{n-1}| = |T(x_{n-1}) - T(x_{n-2})| \leq \lambda |x_{n-1} - x_{n-2}|,$$

και από το λήμμα έπεται ότι η $\{x_n\}$ συγκλίνει – έστω ότι,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}.$$

Αφού το διάστημα I είναι κλειστό, έχουμε ότι $\bar{x} \in I$. Τότε επειδή η T είναι συνεχής στο I,

$$\bar{x} = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} T(x_{n-1}) = T(\lim x_n) = T(\bar{x}),$$

δηλ. το $\bar{x}$ είναι το (μοναδικό) σταθερό σημείο του T.

Για την τελευταία ανισότητα του θεωρήματος, έχουμε:

$$|\bar{x} - x_n| = |T(\bar{x}) - T(x_{n-1})| \leq \lambda |\bar{x} - x_{n-1}| \leq$$

$$\leq \lambda \left[|x_n - x_{n-1}| + |\bar{x} - x_n| \right],$$

δηλ.,

$$(1-\lambda) |\bar{x} - x_n| \leq \lambda |x_n - x_{n-1}|. \quad \boxtimes$$

Το τελευταίο θεώρημα για την συστολή είναι στην περίπτωση του συνόλου συναρτήσεων F. Η απόδειξη είναι ανάλογη με την παραπάνω.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω u μια συνάρτηση στο C και η μπάλα

$$F = \{ x : \|x - u\| \leq b \},$$

ακτίνας b. Αν η T είναι συστολή που στέλνει την F στον εαυτόν της, $T(F) \subset F$, τότε η T έχει ένα μοναδικό σταθερό σημείο $\bar{x}$ στην F. Ειδικότερα, αν $x^0 \in F$, μια συνάρτηση, τότε η ακολουθία των διαδοχικών προσεγγίσεων

$$x^n = T^{(n)}(x^0) \to \bar{x}, \text{ καθώς } n \to \infty$$

και έχουμε:

$$\|\bar{x} - x^n\| \leq \frac{\lambda}{1-\lambda} \|x^n - x^{n-1}\|. \qquad (30)$$

Απόδειξη.

Ανάλογη με την προηγούμενη με την $\|x\|$ στην θέση της $|x|$, και το F στην θέση του I. Η σύγκλιση στο $\mathbb{R}$ αντικαθίσταται με ομοιόμορφη σύγκλιση συναρτήσεων, ενώ αντί για το λήμμα (*) έχουμε το λήμμα (**), κλπ. ☐

7

ΛΥΣΕΙΣ ΜΕ ΣΕΙΡΕΣ

&

ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΕΣ

ΔΙΑΣΠΑΣΕΙΣ

ΜΕΘΟΔΟΣ 1η: Σειρά Taylor

Ας υποθέσουμε ότι η ΔΕ (1) έχει λύση, αναλυτική συνάρτηση σε κάποια περιοχή του σημείου $x=0$:

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \quad (5)$$

Γνωρίζουμε ότι οι συντελεστές στην μορφή (5) είναι:

$$n!\, a_n = y^{(n)}(0). \quad (6)$$

Από την ΔΕ (1), μπορούμε τότε να υπολογίσουμε όσες διαδοχικές παραγώγους στο μηδέν επιθυμούμε:

$$y(0) = 0 = a_0 \quad (\text{εξ' υποθέσεως})$$

$$y'(0) = 1 + y(0) = 1 = a_1$$

$$y''(x) = (1-x)^{-1} y'(x) + (1-x)^{-2} y(x)$$

και άρα: $y''(0) = 1 = 2a_2$

$$y'''(x) = (1-x)^{-1} y''(x) + 2(1-x)^{-2} y'(x) + 2(1-x)^{-3} y(x)$$

και άρα: $y'''(0) = 3 = 3!\, a_3$.

Έτσι έχουμε την εξής προσεγγιστική λύση:

$$y(x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3. \quad (7)$$

Για αυτή την συγκεκριμένη εξίσωση ισχύει ότι:

$$y^{(n)}(0) = \frac{1}{2} n!, \quad \text{και} \quad a_n = \frac{1}{2}. \quad (8)$$

ΜΕΘΟΔΟΣ 2η: ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΕΟΙ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ

Γράφουμε την εξίσωση (1) ως εξής:

$$(1-x)\frac{dy}{dx} = 1 - x + y. \quad (9)$$

Ας υποθέσουμε ότι ενδιαφερόμαστε για προσεγγίσεις έως 3ης τάξης. Οι τρεις τελείες δείχνουν υψηλότερης τάξης όρους. Αντικαθιστώντας την σειρά (5) στην ΔΕ (9), παίρνουμε

$$(1-x)(a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \cdots)$$
$$= 1 - x + a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3. \qquad (10)$$

Εξισώνουμε τους συντελεστές ιδίων δυνάμεων και βρίσκουμε

$$\left.\begin{array}{ll} x^0: & a_1 = 1 + a_0 \\ x^1: & 2a_2 - a_1 = -1 + a_1 \\ x^2: & 3a_3 - 2a_2 = a_2 \end{array}\right\} \quad (11)$$

Επειδή

$$a_0 = y(0) = 0,$$

βρίσκουμε

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 1 \\ a_2 = -\frac{1}{2} + a_1 = \frac{1}{2} \\ a_3 = a_2 = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \quad (12)$$

και έτσι η προσέγγιση που ζητούμε είναι η:

$$y(x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3. \qquad (13)$$

Μπορούμε να υπολογίσουμε τον γενικό όρο a_n αντικαθιστώντας

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

στην ΔΕ (9):

$$(1-x)\left(\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}\right) = 1 - x + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \qquad (14)$$

Συλλέγοντας όρους βρίσκουμε:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 - x$$

ή

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+1)a_{n+1}x^n - n a_n x^n - a_n x^n\right] = 1-x$$

ή

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+1)a_{n+1} - (n+1)a_n\right]x^n = 1-x. \qquad (15)$$

Άρα:

$$\left.\begin{aligned} a_1 - a_0 &= 1 \\ 2a_2 - 2a_1 &= -1 \\ (n+1)(a_{n+1}-a_n) &= 0 \quad , n \geq 2 \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Λύνοντας έχουμε:

$$a_1 = 1 + a_0 = 1$$

$$a_2 = -\frac{1}{2} + a_1 = \frac{1}{2}$$

$$a_{n+1} = a_n = \frac{1}{2} \quad , \quad n \geq 2 \; .$$

Άρα τελικά:

$$y(x) = x + \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty} x^n \quad , \quad |x| < 1 \; . \qquad (17)$$

Η σειρά συγκλίνει στο διάστημα $(-1,1)$. Το μέγιστο διάστημα στο οποίο συγκλίνει η λύση που ικανοποιεί $y(0)=0$ είναι το $(-\infty, 1)$. Η προσεγγιστική λύση με όρους μέχρι $3^{ης}$ τάξης είναι καλή για μικρά x και όχι τόσο καλή για $x \sim 1$.

Ας δούμε τώρα ένα παράδειγμα εφαρμογής των δύο μεθόδων σε μια ΔΕ $2^{ης}$ τάξης.

Παράδειγμα. Βρείτε προσεγγίσεις με σειρές της λύσης του προβλήματος της κίνησης του εκκρεμούς

$$u'' + \sin u = 0 \quad , \quad u(0) = 0 \quad , \quad u'(0) = u_0 \; . \qquad (18)$$

ΛΥΣΗ

ΜΕΘΟΔΟΣ 1η Έστω η λύση στην μορφή

$$u(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots .$$

Τότε έχουμε διαδοχικά:

$$u(0) = 0 = a_0, \quad u'(0) = u_0 = a_1 .$$

$$u''(0) = -\sin u(0) = 0 = 2!\, a_2 .$$

$$u'''(0) = -u'(0)\cos u(0) = -u_0 = 3!\, a_3 .$$

$$u^{(4)}(0) = -u''(0)\cos u(0) + (u'(0))^2 \sin u(0) = $$
$$= 0 = 4!\, a_4 .$$

$$u^{(5)}(0) = -u'''(0)\cos u(0) + 3\, u''(0)\, u'(0) \sin u(0)$$
$$+ (u'(0))^3 \cos u(0) = u_0 + u_0^3 = 5!\, a_5 ,$$

και έτσι η λύση είναι:

$$u(t) = u_0 t - \frac{1}{3!} u_0 t^3 + \frac{1}{5!} u_0 (1 + u_0^2) t^5 + \cdots .$$

ΜΕΘΟΔΟΣ 2η Παρατηρούμε ότι η λύση είναι περιττή συνάρτηση, και άρα μπορούμε να γράψουμε

$$u(t) = a_1 t + a_3 t^3 + a_5 t^5 + \cdots . \qquad (19)$$

Δηλ. η συμμετρία μειώνουμε τους συντελεστές που πρέπει να υπολογίσουμε στους μισούς. Αντικαθιστούμε το sin u με την σειρά του και το $u(t)$ με την σειρά του (19), και η εξ. (18) γίνεται:

$$3 \cdot 2 a_3 t + 5 \cdot 4 a_5 t^3 + \cdots + (a_1 t + a_3 t^3 + \cdots)$$
$$- \frac{1}{3!} (a_1 t + a_3 t^3 + \cdots)^3 + \cdots = 0 , \qquad (20)$$

όπου οι τελείες σημαίνουν όρους τάξης μεγαλύτερης του 3. Εξισώνοντας ίσες δυνάμεις του t, βρίσκουμε:

$$\left.\begin{aligned} 6 a_3 + a_1 &= 0 \\ 20 a_5 + a_3 - \tfrac{1}{3} a_1^3 &= 0 . \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

Επειδή
$$u'(0) = a_1 = u_0 ,$$
έχουμε αμέσως ότι:
$$\left.\begin{aligned} a_3 &= -\frac{1}{6} u_0 \\ a_5 &= \frac{1}{20}\left(\frac{1}{6} u_0 + \frac{1}{3} u_0^3\right) \end{aligned}\right\} \quad (22)$$
και μια προσεγγιστική λύση είναι
$$u(t) = u_0 t - \frac{u_0}{3!} t^3 + \frac{u_0 (1+u_0^2)}{5!} t^5 . \quad (23)$$

Ο υπολογισμός όμως του γενικού όρου είναι ανέφικτος, αφού ο επόμενος όρος τάξης t^5 είναι, από την εξ. (20):
$$7 \cdot 6 a_7 + a_5 - \frac{3}{3!} a_1^2 a_3 + \frac{1}{5!} a_1^5 = 0 . \quad (24)$$

Τα δύο παραδείγματα παραπάνω, δηλ., οι ΔΕ (1) και (18), αποτελούν μόνο μια εισαγωγή στην θεωρία των προσεγγιστικών λύσεων γραμμικών (όπως η (1)) και μη γραμμικών (όπως η (18)) ΔΕ.
Το βασικό χαρακτηριστικό της εν λόγω θεωρίας είναι η αναζήτηση αναπτυγμάτων γύρω από σημεία τα οποία είναι είτε συνήθη (όπου οι συντελεστές (ή η ίδια η εξίσωση) είναι αναλυτικοί) ή ιδιόμορφα. Το μεγαλύτερο ενδιαφέρον βρίσκεται στην μελέτη της συμπεριφοράς των λύσεων καθώς το $t \to t_*$, t_*: ιδιομορφία. Οι γραμμικές εξισώσεις έχουν μόνο ακίνητες (fixed) ιδιομορφίες, δηλ. ιδιομορφίες όπου οι συντελεστές της ΔΕ είναι ιδιόμορφοι, ενώ οι μη γραμμικές ΔΕ έχουν, επιπλέον και κινήσιμες (ή αυθόρμητες) ιδιομορφίες, οι οποίες έχουν θέση που εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες.

Ο Νεύτων έλυσε την ΔΕ

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{y}{1-x}, \quad y(0)=0 \qquad (1)$$

με τον εξής τρόπο: Αναπτύσσοντας το $(1-x)^{-1}$, η (1) γράφεται

$$\frac{dy}{dx} = 1 + y\left(1+x+x^2+\cdots\right)$$

και άρα η λύση y είναι κατά τον Νεύτωνα η εξής:

$$y(x) = x + \frac{1}{2}\left(x^2+x^3+\cdots\right). \qquad (2)$$

Θα δούμε σε λίγο πώς γίνεται αυτό. Παρατηρούμε ότι επειδή

$$x^2+x^3+\cdots = \frac{x^2}{1-x}, \qquad (3)$$

η λύση γράφεται

$$y(x) = x + \frac{x^2}{2(1-x)}. \qquad (4)$$

Στις μη γραμμικές εξισώσεις και συστήματα μας ενδιαφέρουν οι λίγοι πρώτοι όροι σε ένα ανάπτυγμα της λύσης σε σειρά, αφού ο γενικός όρος δεν μπορεί εν γένει να υπολογισθεί. Επιπλέον, ακόμη και όταν είναι γνωστός, η σειρά δεν αντιστοιχεί, γενικά, στο ανάπτυγμα κάποιας από τις γνωστές συναρτήσεις.

Υπάρχουν διάφορες μέθοδοι για να βρίσκουμε την λύση μιας ΔΕ σε μορφή σειράς. Η απλούστερη είναι η εξής.