ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Σημειώσεις – Ολοκληρωτικές Καμπύλες (Μέρος Β)

Κοφινάς Γιώργος

Τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών και Επικοινωνιακών Συστημάτων

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Η μελέτη των παραδειγμάτων 5,6 μας δείχνει την πολυπλοκότητα των δυνατών συμπεριφορών των λύσεων των μη γραμμικών συστημάτων. Και τα δύο έχουν το ίδιο γραμμικό σύστημα,

$$\dot{x} = y \,, \quad \dot{y} = -x \quad (\lambda_{1,2} = \pm i) \tag{53}$$

ως γραμμική προσέγγιση, αλλά συνολικά συμπεριφέρονται τελείως διαφορετικά. Σύμφωνα με το θεώρημα του Hartman, μόνο άν οι ιδιοτιμές του γραμμικοποιημένου συστήματος είναι υπερβολικές (δηλ., ούτε μηδέν, ούτε καθαρά φανταστικές), τότε οι τροχιές του μη γραμμικού συστήματος απεικονίζονται τοπολογικά σε εκείνες της γραμμικοποίησής του σε μια περιοχή του σημείου ισορροπίας. Εδώ οι ιδιοτιμές της γραμμικής προσέγγισης είναι καθαρά φανταστικές και άρα περιμένουμε τα δύο μη γραμμικά συστήματα να συμπεριφέρονται διαφορετικά κοντά στο σημείο ισορροπίας.

7. Από το πρώτο Κεφάλαιο έχουμε αποδείξει ότι η εξίσωση κίνησης είναι η

$$\ell \ddot{\theta} + g \sin\theta = 0. \tag{54}$$

Ορίζοντας μια νέα χρονική μεταβλητή μέσω της

$$t = \alpha \tau \,, \quad u(\tau) = \theta(\alpha \tau) \,, \tag{55}$$

οι παράγωγοι γίνονται

$$d/dt = \alpha^{-1}\, d/d\tau \,, \quad d^2/dt^2 = \alpha^{-2} d^2/d\tau^2 ,$$

και άρα η ΔΕ για την γωνία θ γίνεται: (55)

$$\alpha^{-2} \ell u'' + g \sin u = 0 . \tag{56}$$

Θέτοντας

$$\alpha^2 = \ell / g \,,$$

παίρνουμε τελικά,

$$\boxed{u'' + \sin u = 0 .} \tag{57}$$

Το ισοδύναμο σύστημα της (57) είναι

$$\left.\begin{aligned} u' &= v \\ v' &= -\sin u . \end{aligned}\right\} \quad (58)$$

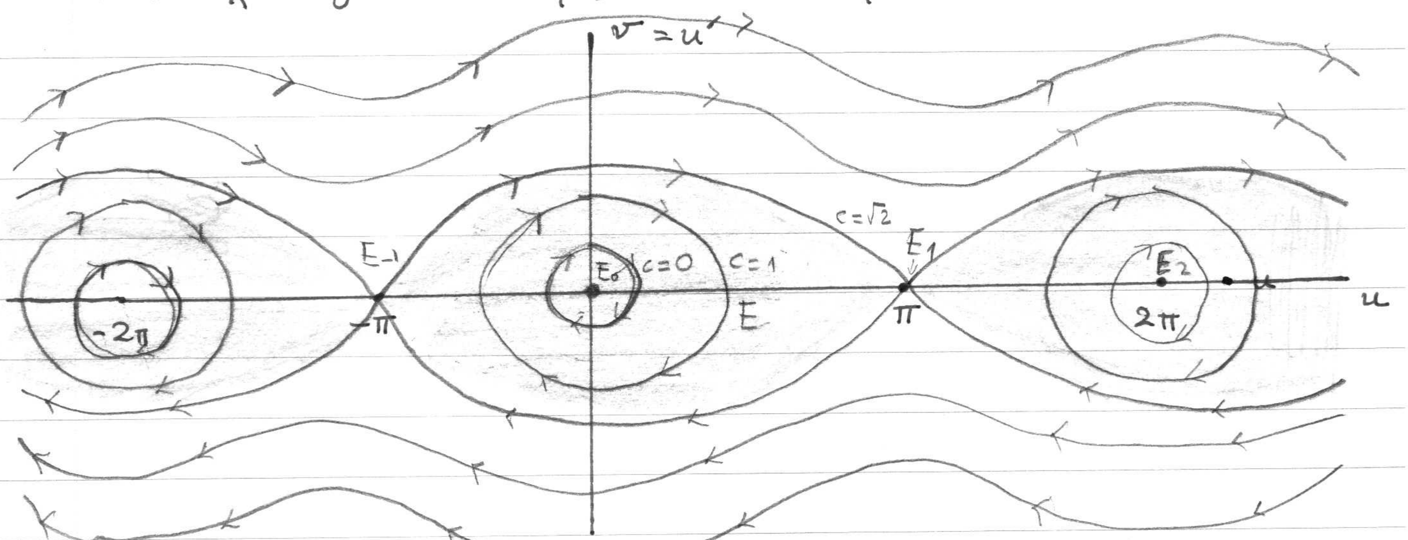
Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι η αντίστοιχη διαφορική μορφή είναι ακριβής και το ολοκλήρωμα είναι το

$$F(u,v) = \frac{1}{2} v^2 + 1 - \cos u . \qquad (59)$$

Οι ολοκληρωτικές καμπύλες γράφονται:

$$\boxed{v^2 + 4\sin^2 \frac{u}{2} = 2c^2,} \qquad (60)$$

και σχεδιάζονται όπως στο Σχήμα:



(i) Τα σημεία ισορροπίας ικανοποιούν

$$(v, -\sin u) = (0,0),$$

δηλ. είναι τα σημεία:

$$\underset{\sim}{E}_k = (k\pi, 0) \quad , \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots , \qquad (61)$$

τα οποία αντιστοιχούν στις καταστάσεις ισορροπίας του συστήματος, όπου όταν είμαστε σε κάποιο από τα $\underset{\sim}{E}_{2k}$ υπάρχει ισορροπία στο χαμηλότερο σημείο ισορροπίας του εκκρεμούς (ευσταθές κέντρο), ενώ τα $\underset{\sim}{E}_{2k+1}$ υπάρχει ασταθής ισορροπία στο υψηλότερο σημείο ($\theta = \pi$) και τα σημεία αυτά είναι (ασταθή) σαγματικά σημεία (όπως γνωρίζουμε για την αστάθεια στην ισορροπία στο πάνω (κορυφαίο) σημείο).

(ii) Όταν η αρχική κατάσταση $((u_0, v_0))$ του συστήματος βρίσκεται κοντά στην αρχή στο Εσωτερικό της γραμμοσκιασμένης περιοχής ($c^2<2$), το εκκρεμές ταλαντώνεται μπρος-πίσω γύρω από το σημείο $\underset{\sim}{E}_0$. Όταν έχουμε 'μικρές ταλαντώσεις', δηλ. $u \sim$ μικρό, τότε μπορούμε να πούμε ότι

$$\sin u \sim u \qquad (62)$$

και οι ολοκληρωτικές καμπύλες είναι περίπου κύκλοι:

$$v^2 + u^2 = 2c^2. \qquad (63)$$ $\left(\sin^2 u \to u^2 \Rightarrow \sin^2\frac{u}{2} \to \left(\frac{u}{2}\right)^2 = \frac{u^2}{4}\right)$

Εδώ η ΔΕ (57) γίνεται η γραμμική,

$$u'' + u = 0, \qquad (64)$$

και έχουμε

$$u(\tau) = a\sin(\tau+\delta), \quad v(t) = a\cos(\tau+\delta), \quad a=\sqrt{2}c.$$

Η περίοδος των μικρών ταλαντώσεων είναι 2π (65) ή σε χρόνο t είναι $2\pi\sqrt{\ell/g}$.

(iii) Καθώς η αρχική κατάσταση του εκκρεμούς τείνει στο σύνορο της γραμμοσκιασμένης περιοχής ($c^2 \to 2$), οι ολοκληρωτικές καμπύλες τείνουν να πάρουν το σχήμα του συνόρου: Από την (66), όταν $c^2=2$,

$$v^2 + 4\sin^2\frac{u}{2} = 4$$

ή

$$v^2 = 4\left(1-\sin^2\frac{u}{2}\right) \Rightarrow$$

Σχήμα του συνόρου: $$\boxed{v^2 = 4\cos^2\frac{u}{2}.} \qquad (65)$$

(iv) Το σύνορο αντιστοιχεί σε αρχικές συνθήκες για τις οποίες το εκκρεμές προσεγγίζει τις θέσεις E_1 ή E_{-1} και οι περίοδοι των ταλαντώσεων $\to \infty$ (βλ. (vii) παρακάτω).

(v) Αν η αρχική κατάσταση είναι εντός της γραμμοσκιασμένης περιοχής το εκκρεμές πλέον δεν ταλαντώνεται αλλά περιστρέφεται αντίθετα των δεικτών πάνω της περιοχής, και με την φορά των δεικτών κάτω της περιοχής.

(vi) Όταν οι ολοκληρωτικές καμπύλες τέμνουν τον x-άξονα ($v = u' = 0$) έχουμε ακρότατα για το u, ενώ με τον y-άξονα παίρνουμε τα ακρότατα του u' ($u = 0 \Rightarrow \sin u = 0 \Rightarrow u'' = 0$) (και την κάθετη ευθεία $u = \pi$).

(vii) Έστω τώρα ότι:

$$u(0) = 0 \quad , \quad v(0) = v_0 \quad , \quad 0 < v_0 < 2 , \qquad (66)$$

έτσι ώστε το εκκρεμές ταλαντώνεται. Έστω $(\theta_1, 0)$ το σημείο στο -άξονα όπου η ολοκληρωτική καμπύλη στην κατεύθυνση αυξανόμενου τ τέμνει το u-άξονα. Άρα θ_1 είναι το πλάτος αυτής της ταλάντωσης, και έστω τ_1 ο χρόνος που χρειάζεται το σύστημα να μεταβεί από την κατάσταση $(0, v_0)$ στην κατάσταση $(\theta_1, 0)$. Τότε

$$u(\tau_1) = \theta_1$$

και, λόγω συμμετρίας η περίοδος αυτής της ταλάντωσης είναι

$$4\tau_1$$

ή σε χρόνο t, είναι

$$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}}\,\tau_1 .$$

Πως εκφράζεται η περίοδος σαν συνάρτηση του πλάτους θ_1; Από το ολοκλήρωμα ενέργειας έχουμε:

$$v^2(\tau) + 4\sin^2\frac{u(\tau)}{2} = 2c^2 \qquad (\text{στο χρόνο } t)$$

$$= v_0^2 \qquad (\text{στο χρόνο } 0)$$

$$= 4\sin^2\frac{u(\tau_1)}{2} \qquad (\text{στο χρόνο } \tau_1)$$

$$= 4\sin^2\frac{\theta_1}{2}, \qquad (67)$$

όπου $u(\tau)$, $v(\tau)$ είναι οι λύσεις που ικανοποιούν τις αρχικές συνθήκες

$$u(0)=0\ , \quad v(0)=v_0 .$$

Άρα έχουμε από την εξ. (58α) και την (67) ότι

$$u'(\tau) = v(\tau) = \left(v_0^2 - 4\sin^2 \frac{u(\tau)}{2} \right)^{1/2}$$

$$= 2\left(k^2 - \sin^2 \frac{u(\tau)}{2} \right)^{1/2}, \qquad (68)$$

όπου θέσαμε

$$k = \frac{v_0}{2} = \sin \frac{\theta_1}{2} . \qquad (69)$$

Έτσι βρίσκουμε:

$$\frac{1}{2}\int_0^{u(\tau)} \frac{d\alpha}{\left(k^2 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right)^{1/2}} = \tau . \qquad (70)$$

Θέτοντας την ακόλουθη αλλαγή μεταβλητής,

$$\sin\frac{\alpha}{2} = k \sin\phi , \qquad (71)$$

βλέπουμε ότι

$$\tau = \int_0^{h(\tau)} \frac{d\phi}{(1-k^2\sin^2\phi)^{1/2}} , \qquad (72)$$

όπου:

$$k \sin h(\tau) = \sin \frac{u(\tau)}{2} . \qquad (73)$$

Το (72) είναι ένα <u>ελλειπτικό ολοκλήρωμα 1ου είδους</u> και η συνάρτηση που ορίζεται από αυτό το ολοκλήρωμα είναι η

$$F(z, k) = \int_0^{z} \frac{d\phi}{(1-k^2\sin^2\phi)^{1/2}} , \qquad (74)$$

όπου από πίνακες βρίσκουμε τους χρόνους που χρειαζόμαστε για να μετακινηθούμε μεταξύ σημείων κατά μήκος των ολοκληρωτικών καμπυλών.

Αντιστρόφως, δοθέντος του τ μπορούμε να υπολογίσουμε την γωνία $u(\tau)$: Επειδή $u(\tau_1)=\theta_1$, $\sin h(\tau_1)=1$ και $h(\tau_1)=\pi/2$. Η περίοδος της

(από την (73))
(και την (69))

ταλάντωσης πλάτους θ_1, είναι

$$4\tau_1 = 4\,F\left(\frac{\pi}{2}, \sin\frac{\theta_1}{2}\right), \qquad (75)$$

και σε πραγματικό χρόνο t, η περίοδος $T(\theta_1)$ είναι:

$$T(\theta_1) = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}}\; F\left(\frac{\pi}{2}, \sin\frac{\theta_1}{2}\right). \qquad (76)$$

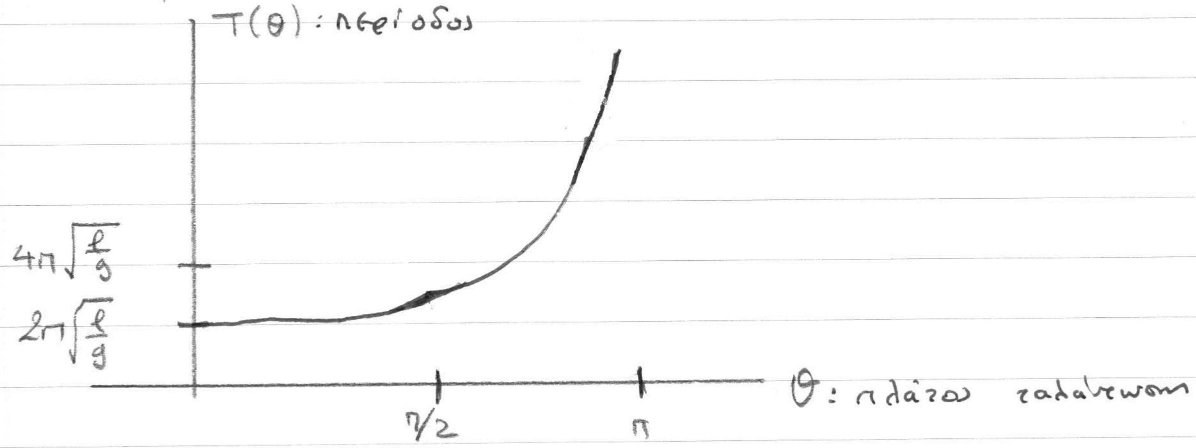
Μπορεί να αποδειχθεί ότι

$$T(\theta_1) \to \infty, \quad \text{καθώς } \theta_1 \to \pi. \qquad (77)$$

Επειδή από την (74) έχουμε ότι

$$F\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = \frac{\pi}{2},$$

και η F είναι συνεχής, έπεται ότι το $2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ είναι μια καλή προσέγγιση για ταλαντώσεις <u>μικρού</u> πλάτους (βλ. Σχήμα). Το $F(\pi/2, k)$ ονομάζεται το <u>πλήρες</u> ελλειπτικό ολοκλήρωμα $1^{ου}$ είδους.



~·~

Ισοκλινείς καμπύλες

Πρόσθετη πληροφορία για το ΔΣ (1) μπορούμε να έχουμε μελετώντας καμπύλες οι οποίες έχουν μόνο κάποια συνιστώσα του πεδίου ταχυτήτων $(\dot{x}, \dot{y})$ μηδενιζόμενη:

$$N_x = \{ (x,y) : P(x,y) = 0 \}$$

$$N_y = \{ (x,y) : Q(x,y) = 0 \}$$

Κάθε ένα από τα δύο σύνολα N_x, N_y σημείων του επιπέδου ορίζει μια 1-παραμετρική οικογένεια καμπυλών αφού ορίζεται από μιά εξίσωση. Στο N_x το διάνυσμα ταχύτητας $(0, \dot{y})$ είναι πάντοτε κάθετο, ενώ στο N_y πάντοτε οριζόντιο $(\dot{x}, 0)$.

Παρατηρούμε ότι τα σημεία ισορροπίας του ΔΣ (1)
$$\Sigma = \{ (x,y) : P = Q = 0 \}$$
αντιστοιχούν στην τομή των N_x, N_y:

$$\Sigma = N_x \cap N_y .$$

Η γνώση των ισοκλινών καμπυλών ενός ΔΣ είναι πολλές φορές χρήσιμη για την τοπική συμπεριφορά των λύσεων γύρω από τα σημεία ισορροπίας του συστήματος καθώς $t \to \infty$.

Άσκηση

Για το δυναμικό σύστημα

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= e^{x+y}(x+y) \\ \dot{y} &= e^{x+y}(x-y) \end{aligned}\right\} \quad (*)$$

η αντίστοιχη φασική εξίσωση είναι μια ομογενής ΣΔΕ.

1) Αποδείξτε ότι μέσω του μετασχηματισμού

$$z = y/x$$

η φασική εξίσωση γίνεται χωριζομένων μεταβλητών και οι τροχιές είναι μια οικογένεια υπερβολών.

2) Αποδείξτε ότι το σύστημα (*) είναι χαμιλτωνιανό, βρίσκοντας την χαμιλτωνιανή

$$H = \frac{1}{2}(y^2 - x^2) + xy$$

3) Βρείτε την γενική λύση του 2-διάστατου γραμμικού συστήματος με χαμιλτωνιανή (2).

4) Σχεδιάστε το πορτρέτο φάσεων του χαμιλτωνιανού συστήματος.

5. Μέθοδος μετ/σμού κλίμακας

- Lotka-Volterra
- Sprott-1
- Ant-1
- ~~[illegible]~~

Example: L-V $\quad \dot{x} = x(a - bx - cy)$

$$\dot{y} = y(d - ex - fy)$$

$$x = \alpha\xi, \quad y = \beta\eta, \quad t = \delta\tau \Rightarrow \boxed{\cdot = \frac{1}{\delta}\,'}$$

x' $\qquad dt = \delta\, d\tau \Rightarrow \cancel{\frac{d}{dt} = \frac{d}{\delta\, d\tau}}$

$$\frac{dx}{dt} = \alpha\frac{d\xi}{dt} = \alpha\frac{d\xi}{\delta\, d\tau} = \frac{\alpha}{\delta}\frac{d\xi}{d\tau} \Rightarrow \dot{x} = \frac{\alpha}{\delta}\xi'$$

$$\dot{y} = \frac{\beta}{\delta}\eta'$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\alpha}{\delta}\xi' &= \alpha\xi(a - b\alpha\xi - c\beta\eta) \\ \frac{\beta}{\delta}\eta' &= \beta\eta(d - e\alpha\xi - f\beta\eta) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} \xi' &= \delta\xi(a - b\alpha\xi - c\beta\eta) \\ \eta' &= \delta\eta(d - e\alpha\xi - f\beta\eta) \end{aligned}\right\}$$

Putting $\alpha = \frac{a}{b}, \quad \beta = \frac{d}{f},$ we find

$$\begin{cases} \xi' = \delta\xi\left(a - a\xi - \frac{cd}{f}\eta\right) = \delta a\xi\left(1 - \xi - \frac{cd}{fa}\eta\right) \\ \eta' = \delta\eta\left(d - e\frac{a}{b}\xi - d\eta\right) = \delta d\eta\left(1 - \frac{ea}{bd}\xi - \eta\right) \end{cases}$$

and if $\delta = \frac{1}{a}$

$$\boxed{\begin{aligned} \xi' &= \xi(1 - \xi - C\eta) \\ \eta' &= D\eta(1 - E\xi - \eta) \end{aligned}}$$

where: $D = \frac{d}{a}, \quad C = \frac{cd}{fa}, \quad E = ea/bd.$

Sprott 1

$$\begin{cases} \dot x = ayz \\ \dot y = bx - cy \\ \dot z = d - exy \end{cases} \qquad ae>0$$

$x=\alpha\xi$, $y=\beta\zeta$, $z=\gamma\eta$, $t=\delta\tau$

$\dot x = \frac{\alpha}{\delta}\xi'$, $\dot y = \frac{\beta}{\delta}\zeta'$, $\dot z = \frac{\gamma}{\delta}\eta'$, $\dot{} = \frac{1}{\delta}$,

$$\left.\begin{aligned} \frac{\alpha}{\delta}\xi' &= a\beta\gamma\zeta\eta \\ \frac{\beta}{\delta}\zeta' &= b\alpha\xi - c\beta\zeta \\ \frac{\gamma}{\delta}\eta' &= d - e\alpha\beta\xi\zeta \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \xi' &= \frac{a\beta\gamma\delta}{\alpha}\zeta\eta \\ \zeta' &= \frac{\delta b\alpha}{\beta}\xi - c\delta\zeta \\ \eta' &= \frac{d\delta}{\gamma} - \frac{e\alpha\beta\delta}{\gamma}\xi\zeta \end{aligned}$$

We need four eqns for the four unknowns: $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

(1) $\frac{a\beta\gamma\delta}{\alpha} = 1$

(2) $\frac{\delta b\alpha}{\beta} = 1$, (4) $\boxed{c\delta = 1}$

(3) $\frac{e\alpha\beta\delta}{\gamma} = 1$

$\delta = 1/c$.

~~$\alpha\delta = \frac{c^2}{ab}\cdot\frac{1}{c} = \frac{c}{ab}$~~

και ΤΕΛΙΚΑ:

$\Rightarrow \alpha = \pm\frac{c^2}{b\sqrt{ae}}$

$\beta = \frac{c}{\sqrt{ae}}$

(5) $\boxed{\gamma = \frac{c}{ab}}$

(1) $\Rightarrow$

$\frac{a\beta\gamma}{\alpha}\frac{1}{c} = 1 \Rightarrow \frac{\beta\gamma}{\alpha} = \frac{c}{a}$, $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{c}{a\gamma}$

~~But from~~ $\frac{c}{a\gamma} = \frac{b}{c} \Rightarrow \gamma = \frac{c}{ab}$

$c^2 = ab\gamma$

(2) $\Rightarrow$ $\frac{b\alpha}{c\beta} = 1$, $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{b}{c}$ → ~~$\frac{c}{a\gamma\alpha} = \frac{\alpha b}{c} \Rightarrow \alpha = \frac{c^2}{ab\gamma}$~~

$$\cancel{\frac{e\cdot\frac{c^2}{ab\gamma}\cdot\frac{c}{a\cancel{\gamma}}\cdot\frac{1}{\cancel{c}}}{\gamma} = 1}$$

$$\frac{e\,c^2}{a^2b\,\gamma} = 1 \rightsquigarrow \gamma = \frac{ec^2}{a^2b}$$

$$\rightsquigarrow \beta = \frac{c}{a}\cdot\frac{a^2b}{ec^2} = \frac{ab}{ec}$$

$$\rightsquigarrow \alpha = \frac{c^2}{ab}\cdot\frac{a^2b}{ec^2} = \frac{a}{e}$$

So we get:

$$\boxed{\begin{aligned} \zeta' &= \zeta\eta \\ \zeta' &= \xi - \zeta \\ \eta' &= A - \xi\zeta \end{aligned}}$$

(3)+(5) $\Rightarrow$

$$\frac{e\alpha\beta\,ab}{c\,c^2} = 1 \rightsquigarrow \frac{e\alpha\beta ab}{c^3} = 1$$

$$\alpha\beta = \frac{c^3}{eab}$$

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{c}{a\gamma} = \frac{\alpha}{\alpha\frac{c^2}{ab}} = \frac{b}{c} \rightsquigarrow \beta = \frac{b}{c}\alpha$$

$$A = \frac{d\delta}{\gamma} = d\cdot\frac{1}{c}\cdot\frac{a^2b}{ec^2} = \frac{da^2b}{ec^3} \qquad = \frac{dab}{c^3}$$

$$\alpha^2\frac{b}{c} = \frac{c^3}{eab} \rightsquigarrow \alpha^2 = \frac{c^4}{eab^2} \rightsquigarrow \boxed{\alpha = \frac{c^2}{\sqrt{ea}\,|b|}}, \quad \boxed{\beta = \frac{1}{\sqrt{ea}}}$$

Antoniadis 1

$$\dot{x} = y$$

$$\dot{y} = -\frac{\lambda A}{16} z^2 x$$

$$\dot{z} = -y\frac{z}{x}$$

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{A\lambda}{16}\frac{z^2}{3} + \frac{kH^2}{x^2}$$

$$\xi' = \zeta$$

$$\zeta' = -\eta^2\xi$$

$$\eta' = -\frac{1}{\gamma}\frac{\zeta\eta}{\xi}$$

$$\gamma^2 = \frac{16}{A\lambda}$$

$$\frac{\zeta^2}{\xi^2} = \frac{\eta^2}{3} + \frac{1}{\xi^2}$$

Must have!

$\lambda > 0$

$x = \alpha\xi$, $y = \beta\zeta$, $z = \gamma\eta$, $t = \delta\tau$ $\quad \dot{} = \frac{1}{\delta}$,

$\dot{x} = \frac{\alpha}{\delta}\xi'$, $\dot{y} = \frac{\beta}{\delta}\zeta'$, $\dot{z} = \frac{\gamma}{\delta}\eta'$, $\dot{} = \frac{1}{\delta}$,

$$\frac{\alpha}{\delta}\xi' = \beta\zeta$$

$$\frac{\beta}{\delta}\zeta' = -\frac{\lambda A}{16}\gamma^2\alpha\eta^2\xi$$

$$\frac{\gamma}{\delta}\eta' = -\frac{\zeta\eta}{\xi}$$

$$\frac{\beta^2}{\alpha^2}\frac{\zeta^2}{\xi^2} = \frac{A\lambda}{48}\gamma^2\eta^2 + \frac{kH^2}{\alpha^2\xi^2}$$

$$\xi' = \frac{\beta\delta}{\alpha}\zeta$$

$$\zeta' = -\frac{\lambda A}{16}\frac{\delta\gamma^2\alpha}{\beta}\eta^2\xi$$

$$\eta' = -\frac{\delta}{\gamma}\frac{\zeta\eta}{\xi}$$

$$\rightarrow \frac{\beta^2}{\alpha^2}\frac{\zeta^2}{\xi^2} = \frac{A\lambda}{48}\gamma^2\eta^2 + \frac{kH^2}{\alpha^2\xi^2}$$

$\beta = \alpha = kH^2$, $\delta = 1$

$\gamma^2 = \frac{16}{A\lambda}$, $\gamma = \frac{4}{\sqrt{A\lambda}}$ $\Rightarrow$

$$\xi' = \zeta$$

$$\zeta' = -\eta^2\xi$$

$$\eta' = -\frac{1}{\gamma}\frac{\zeta\eta}{\xi}$$

$$\boxed{\frac{\zeta^2}{\xi^2} = \frac{\eta^2}{3} + \frac{1}{\xi^2}}$$

$A\lambda > 0$