ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Σημειώσεις – Ολοκληρωτικές Καμπύλες (Μέρος Α)

Κοφινάς Γιώργος

Τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών και Επικοινωνιακών Συστημάτων

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Α. Ακριβείς εξισώσεις

Θα μελετήσουμε το 2×2 σύστημα

$$\dot{x} = P(x,y) \qquad (1)$$
$$\dot{y} = Q(x,y)$$

με αγνώστους τις $x(t)$, $y(t)$. Θέτουμε $P=B$, $Q=-A$, και το (1) γράφεται:

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{x} &= B(x,y)\\ \dot{y} &= -A(x,y)\end{aligned}} \qquad (2)$$

ή, διαιρώντας κατά μέλη, υπό την μορφή μιας διαφορικής εξίσωσης

$$\boxed{A(x,y)\,\dot{x} + B(x,y)\,\dot{y} = 0.} \qquad (3)$$

Υποθέτουμε ότι οι A, B είναι συνεχείς στο ανοικτό $\mathcal{E}\subset\mathbb{R}^2$, και ονομάζουμε το επίπεδο $\mathbb{R}^2$, χώρο φάσεων ή χώρο καταστάσεων του συστήματος (1). Κάθε σημείο του χώρου φάσεων (x,y) αντιστοιχεί σε μια κατάσταση του συστήματος, ενώ το σύστημα των εξισώσεων (2) περιγράφει πώς το δυναμικό σύστημα μεταβάλλεται με τον χρόνο. Μια λύση των εξ.(1)-(3)

$$x = x(t),\ y=y(t)\ ,\ t\in(a,b),$$

ορίζει μια καμπύλη γ στον χώρο φάσεων. Σκεφτόμαστε ότι το σύστημα (2) ορίζει μια ροή στο χώρο φάσεων: Σε κάθε σημείο (x,y) η ταχύτητα ενός σωματιδίου της ροής που βρίσκεται στο εν λόγω σημείο είναι

$$(\dot{x},\dot{y}) = \big(B(x,y), -A(x,y)\big). \qquad (4)$$

Μια λύση του (2) περιγράφει την κίνηση ενός σωματιδίου της ροής και η καμπύλη γ είναι η τροχιά του σωματιδίου (ή καμπύλη λύσης).

Για μη γραμμικά συστήματα, όπως το (1), μας ενδιαφέρει να ανακαλύψουμε ποιοτικά χαρακτηριστικά των τροχιών, χωρίς να γνωρίζουμε τις λύσεις τους.

Αναμένουμε ότι τοπικά η τροχιά γ:

$$\gamma = \{ (x(t), y(t)) : t \in \mathbb{R} \},$$

δίνεται από το γράφημα μιας συνάρτησης Y,

$$\boxed{y = Y(x)}, \qquad (*)$$

αυτή προκύπτει απαλείφοντας το t. Από τον κανόνα αλυσίδας, και την $(*)$ έχουμε:

$$\dot{y} = \frac{dY}{dx}\dot{x} \quad \text{ή} \quad \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{dY}{dx} \qquad (**)$$

και το σύστημα (1) γίνεται, μέσω της $(**)$,

$$\boxed{\frac{dY}{dx} = \frac{Q(x,Y)}{P(x,Y)}}, \qquad (2a) : \underline{\text{Φασική εξίσωση.}}$$

με $P \neq 0$. Έτσι οδηγούμαστε στην διαφορική μορφή:

$$\omega = -Q\,dx + P\,dy$$

(αφού $dy = dY$), ή

$$\boxed{\omega = A\,dx + B\,dy.}$$

Γενικά η ω δεν είναι $=0$, εκτός κατά μήκος κάθε τροχιάς· όπου:

$$dx = P\,dt, \quad dy = Q\,dt,$$

και άρα:

$$\omega = (-QP + PQ)\,dt = 0, \quad \text{κατά μήκος τροχιών.}$$

Λέμε ότι κάθε τροχιά είναι λύση της εξίσωσης $\omega = 0$.

Χρησιμοποιώντας διαφορικές μορφές αντί για παραγώγους δεν δεσμευόμαστε με κάποια χρονική παραμετρικοποίηση $(x(t), y(t))$ των τροχιών: κάθε καμπύλη $(x(s), y(s))$, $s \in \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι:

$$\boxed{\omega = 0},$$

είναι μία τροχιά.

Το τελευταίο αυτό αποτέλεσμα θα το δούμε πιο αναλυτικά παρακάτω.

$A\dot{x}+B\dot{y}=0$

Ποιά είναι η σχέση μεταξύ της ΔΕ (3) και της διαφορικής μορφής:

$$\omega = A(x,y)\,dx + B(x,y)\,dy \quad ; \qquad (5)$$

Η απάντηση δίνεται από το Θεώρημα 1 παρακάτω.

Λέμε ότι η διαφορική μορφή (5) είναι ακριβής στο ανοικτό $E \subset \mathbb{R}^2$ αν υπάρχει συνάρτηση F ε/ω:

$$dF(x,y;\,dx,dy) = A(x,y)\,dx + B(x,y)\,dy, \qquad (6)$$

για όλα τα $(x,y)\in E$ και για όλα τα dx, dy. Συνήθως γράφουμε:

$\omega = dF$

$$\boxed{dF = A(x,y)\,dx + B(x,y)\,dy}, \qquad (7)$$

για απλότητα. Άρα από τον ορισμό του διαφορικού έπεται ότι η $A\,dx + B\,dy$ είναι ακριβής στο E αν και μόνο αν υπάρχει συνάρτηση F η οποία στο E να είναι λύση του συστήματος

$$\frac{\partial F}{\partial x} = A(x,y), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = B(x,y) \qquad (8),$$

δηλ., το σύστημα (1) είναι χαμιλτωνιανό.

Αυτό είναι και το κριτήριο για να είναι η (5) ακριβής.

Παραδείγματα: Εξετάστε αν οι ακόλουθες μορφές είναι ακριβείς:

$dF = A\,dx + B\,dy$

$\frac{\partial F}{\partial x} = A, \ \frac{\partial F}{\partial y} = B$

(1) $\cos y\,dx - x\sin y\,dy$

(2) $(y+x^2)\,dx + x\,dy$

(3) $x\,dy - y\,dx$

(4) $\left(\frac{3y^2}{2} + \frac{k}{\cancel{6}_{2}x^2} + \frac{P(t)}{2}\right)dx + xy\,dy$, k: σταθερά.

Λύση

(1) Υποθέτουμε ότι $dF = \cos y\,dx - x\sin y\,dy$. Τότε

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \cos y, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -x\sin y. \qquad (9)$$

Από την πρώτη εξίσωση των (9), έπεται ότι

$F(x,y) = x\cos y + u(y)$, για αυθαίρετο $u(y)$. Τότε
$$\frac{\partial F}{\partial y} = -x\sin y + u'(y),$$
και άρα, παίρνοντας $u=0$, έχουμε
$$dF = d(-x\sin y) = \cos y\, dx - x\sin y\, dy, \qquad (10)$$
δηλ., η διαφορική μορφή είναι ακριβής στο $\mathbb{R}^2$.

(2) Παρατηρούμε ότι $d(xy) = y\,dx + x\,dy$ και $d(\frac{1}{3}x^3) = x^2 dx$, και άρα $d(xy + \frac{1}{3}x^3) = (y+x^2)dx + x\,dy$, δηλ. η διαφορική μορφή είναι ακριβής σε όλο το $\mathbb{R}^2$.

(3) Ας υποθέσουμε ότι η $x\,dy - y\,dx$ είναι ακριβής, δηλ., $dF = x\,dy - y\,dx$. Τότε:
$$\frac{\partial F}{\partial y} = x, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = -y, \qquad (11)$$
και άρα από την πρώτη έπεται ότι,
$$F(x,y) = xy + u(x),$$
ενώ η δεύτερη μας λέει ότι,
$$\frac{\partial F}{\partial x} = y + u'(x) = -y. \qquad (12)$$
Το τελευταίο είναι αδύνατο να ισχύει σε κανένα ανοιχτό σύνολο του $\mathbb{R}^2$, και άρα η μορφή δεν είναι ακριβής σε κανένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$.

(4) Αν υποθέσουμε ότι η μορφή είναι ακριβής, τότε
$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{3y^2}{2} + \frac{k}{2\cancel{6}x^2} + \frac{P(t)}{2}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = xy. \qquad (13)$$
Από την δεύτερη εξίσωση έχουμε ότι:
$$F(x,y) = \frac{1}{2}xy^2 + u(x),$$

ενώ η πρώτη μας λέει ότι

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{2}y^2 + u'(x) = \frac{3y^2}{2} + \frac{k}{2\cancel{6}x^2} + \frac{P(t)}{2}$$

το οποίο δεν μπορεί να ισχύει, εν γένει, σε κανένα ανοικτό $E \subset \mathbb{R}^2$:

$$u'(x) = \frac{k}{2\cancel{6}x^2} + y^2 + \frac{P(t)}{2}. \qquad (14)$$

Εν τούτοις, αν

$$\frac{P(t)}{2} = -y^2, \qquad (15)$$

τότε έχουμε:

$$u(x) = -\frac{k}{2\cancel{6}x}, \qquad (16)$$

και έτσι καταλήγουμε ότι όταν ισχύει η (15) η μορφή είναι ακριβής και η συνάρτηση F είναι:

$$F(x,y) = \frac{1}{2}xy^2 - \frac{k}{2\cancel{6}x}, \quad x \neq 0.$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι για να εξετάσουμε αν μια διαφορική μορφή είναι ακριβής, εξ.(7), είναι κάτι πολύ απλό. Ποιές είναι οι συνέπειες της ακρίβειας μιας διαφορικής μορφής;

Ορισμός.
Έστω ότι $dF = A\,dx + B\,dy$ στο $E \subset \mathbb{R}^2$. Λέμε ότι η οικογένεια των καμπυλών (σταθμικές καμπύλες της F)

$$F(x,y) = c, \qquad (17)$$

είναι λύση (στο σύνολο E) της ΔΕ

$\omega = 0$ $$\boxed{A(x,y)\,dx + B(x,y)\,dy = 0.} \qquad (18)$$

Π.χ., οι λύσεις στο $\mathbb{R}^2$ της $x\,dx + y\,dy = 0$ είναι η οικογένεια των κύκλων $x^2+y^2=c^2$.

Θα δείξουμε ότι **αν** η $F(x,y)=c$ είναι λύση στο $\mathcal{E}$ της ΔΕ

$$A\,dx + B\,dy = 0,$$

τότε όλες οι λύσεις της (3), δηλ., της

$$A\dot{x} + B\dot{y} = 0,$$

δίνονται πεπλεγμένα από την $F(x,y)=c$.

Κατ' αρχάς ξεκινούμε με ένα παράδειγμα. Είδαμε ότι η μορφή $x\,dy - y\,dx$ δεν είναι ακριβής. Εν τούτοις, διαιρώντας με x^2, η μορφή γίνεται ακριβής $(x \neq 0)$:

$$d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2}.$$

Αν υπάρχει μια συνάρτηση $\mu(x,y)$ συνεχής και μη μηδενιζόμενη στο $\mathcal{E}$ και τέτοια ώστε η μορφή

$$\mu A\,dx + \mu B\,dy,$$

να γίνεται ακριβής στο $\mathcal{E}$ με

$$dF = \mu A\,dx + \mu B\,dy, \qquad (\mu\omega = dF) \quad (19)$$

τότε πάλι λέμε ότι η οικογένεια $F(x,y)=c$ είναι <u>λύση στο $\mathcal{E}$</u> της ΔΕ (18). Η συνάρτηση $\mu(x,y)$ ονομάζεται ένας <u>ολοκληρωτικός παράγοντας.</u>

Στο επόμενο θεώρημα μας δίνεται η σχέση μεταξύ της ΔΕ (3) και της ΔΕ (18).

<u>Θεώρημα 1.</u> (εν συντομία: (18) $\iff$ (3))

Αν $F(x,y)=c$ είναι λύση στο $\mathcal{E}$ της ΔΕ (18),

$$A(x,y)\,dx + B(x,y)\,dy = 0,$$

και αν γ είναι μια καμπύλη λύση στο $\mathcal{E}$ της ΔΕ (3) δηλ., της

$$A(x,y)\,\dot{x} + B(x,y)\,\dot{y} = 0,$$

τότε η γ κείται πάνω σε μια σταθμική καμπύλη $F(x,y)=c$. Αντιστρόφως, αν η γ είναι μια διαφορίσιμη καμπύλη που κείνται πάνω σε μια σταθμική καμπύλη $F(x,y)=c$, τότε η γ είναι μια καμπύλη λύση της ΔΕ (3):

$$A(x,y)\dot{x} + B(x,y)\dot{y} = 0.$$

<u>Σχολιο</u>

Από το θεώρημα ύπαρξης των λύσεων διαφορικών εξισώσεων (βλ. επόμενη παράγραφο) έπεται ότι για κάθε $(x_0,y_0)\in\mathcal{E}$ υπάρχουν διαφορίσιμες συναρτήσεις u,v σε μια περιοχή $\mathcal{N}=(-\delta,\delta)$ έτσι ώστε

$$F(u(t),v(t)) = F(x_0,y_0), \quad \forall t\in\mathcal{N}.$$

<u>Απόδειξη του θεωρήματος.</u>

($\Rightarrow$) Αφού η F είναι λύση της Εξίσωσης (18) στο $\mathcal{E}$, έχουμε

$$dF = \mu\,(A\,dx + B\,dy),$$

και άρα

$$\frac{dF}{dt} = D_t\left[F(u(t),v(t))\right] = \frac{\partial F}{\partial x}u'(t) + \frac{\partial F}{\partial y}v'(t)$$

$$= \mu(u(t),v(t))\left[A(u(t),v(t))\,u'(t) + B(u(t),v(t))\,v'(t)\right]. \qquad (20)$$

Επειδή εξ' υποθέσεως η καμπύλη γ

$$\gamma = \{x=u(t),\ y=v(t);\ t\in(a,b)\} \qquad (21)$$

είναι λύση στο $\mathcal{E}$ της ΔΕ $A\dot{x}+B\dot{y}=0$, έπεται άμεσα από την εξ. (20) ότι:

$$\frac{dF}{dt} = 0, \quad \text{στο } (a,b). \qquad (22)$$

Άρα

$$F(u(t),v(t)) = c, \quad \forall t\in(a,b)$$

για μια σταθερά c. Δηλ., η καμπύλη γ

όπως δίνεται από την σχέση (21) είναι μια σταθμική καμπύλη (δηλ. ανήκει στο σύνολο των καμπυλών $F(x,y)=c$).

($\Leftarrow$) Θέλουμε να δείξουμε ότι αν η γ είναι σταθμική τότε είναι λύση της (3). Αφού η γ βρίσκεται στην οικογένεια $F(x,y)=c$, τότε $dF/dt=0$, και από την εξ. (20) έπεται, επειδή ως ολοκληρωτικός παράγοντας το $\mu(x,y)\neq 0$ στο $\mathcal{E}$, ότι:

$$A(u(t),v(t))\,u'(t)+B(u(t),v(t))\,v'(t)=0. \qquad (23)$$

Αυτό μας λέει ότι η γ είναι λύση της $A\dot{x}+B\dot{y}=0$.

$\dot{x}=B$
$\dot{y}=-A$

$A\dot{x}+B\dot{y}=0$ $\boxtimes$

Θέλουμε τώρα να συνδέσουμε την ακρίβεια της μορφής (18) με τις λύσεις της εξ. (2), ενώ μέχρι τώρα συνδέσαμε τις λύσεις της (18) με εκείνες της (3). Προφανώς

$A\,dx+B\,dy=0$

κάθε λύση του συστήματος (2) είναι και λύση της (3)

$$A(x,y)\,\dot{x}+B(x,y)\,\dot{y}=0 \qquad (3)$$

αλλά το αντίστροφο δεν ισχύει: Δεν είναι κάθε λύση της (3), μια λύση του (2). Ο λόγος είναι ότι το διάνυσμα $(B(x,y),-A(x,y))$ είναι ένα "πεδίο <u>ταχυτήτων</u>" για το σύστημα (2), αφού

$$\begin{aligned}\dot{x}&=B(x,y)\\ \dot{y}&=-A(x,y)\end{aligned} \qquad (2)$$

αλλά <u>μόνο</u> ένα "πεδίο <u>διευθύνσεων</u>" για την (3): Η (3) μας πληροφορεί ότι η καμπύλη-λύση γ είναι σε κάθε σημείο (x,y) στην <u>διεύθυνση</u> του διανύσματος $(B(x,y),-A(x,y))$, αλλά δεν γνωρίζουμε το <u>μέτρο</u> της ταχύτητας της κίνησης, δηλ. του διανύσματος $(\dot{x}(t),\dot{y}(t))$. Εν τούτοις, αν οι A, B είναι <u>συνεχείς</u> στο ανοικτό $\mathcal{E}$, τότε κάθε λύση της (3) είναι λύση του (2), όπως μας λέει το ακόλουθο Θεώρημα.

NEXT (2)

Πρώτα χρειαζόμαστε την εξής έννοια.

<u>Ορισμός</u>

Μια συνάρτηση ορισμένη στο ανοικτό $E \subset \mathbb{R}^2$
$$F : E \to \mathbb{R} \;;\; (x,y) \longmapsto F(x,y)$$
ονομάζεται ένα <u>πρώτο ολοκλήρωμα</u> του συστήματος (2) αν η F είναι σταθερή πάνω σε κάθε λύση του συστήματος. Δηλ., αν $(u(t), v(t))$ είναι μια λύση του συστήματος (2) στο E για $t \in (a,b)$, τότε
$$F(u(t), v(t)) = c$$
για κάποια σταθερά c και για όλα τα $t \in (a,b)$. Οι σταθμικές καμπύλες
$$F(x,y) = c,$$
ονομάζονται <u>ολοκληρωτικές καμπύλες</u> του συστήματος (2).

Έχουμε τώρα το εξής θεμελιώδες αποτέλεσμα που μας λέει ότι κάτω από κάποιες συνθήκες κάθε λύση της (3) δηλ. τροχιά είναι μια ολοκληρωτική καμπύλη του (2).

<u>Θεώρημα 2</u> (εν συντομία: $(18) \xRightarrow{A,B\ \sigma\upsilon\nu} (2)$)

Η χαμιλτωνιανή είναι σταθερή κατά μήκος των τροχιών του συστήματος.

Αν οι A, B είναι συνεχείς στο ανοικτό $E \subset \mathbb{R}^2$ και αν η $F(x,y) = c$ είναι λύση της ΔΕ
$$A(x,y)\,dx + B(x,y)\,dy = 0, \qquad (18)$$
τότε το F είναι ένα πρώτο ολοκλήρωμα στο E του
$$\dot{x} = B(x,y)$$
$$\dot{y} = -A(x,y).$$

<u>Απόδειξη</u>

Αφού η $F(x,y) = c$ είναι λύση της (18), έχουμε ότι
$$\frac{\partial F}{\partial x} = \mu(x,y)\,A(x,y) \;,\; \frac{\partial F}{\partial y} = \mu(x,y)\,B(x,y)$$

δηλ.,

$$B(x,y) = \mu^{-1}(x,y)\,\frac{\partial F}{\partial y}$$

$$A(x,y) = \mu^{-1}(x,y)\,\frac{\partial F}{\partial x},$$

και άρα το σύστημα (2) γράφεται:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= B(x,y) = \mu^{-1}(x,y)\,\frac{\partial F}{\partial y} \\ \dot{y} &= -A(x,y) = -\mu^{-1}(x,y)\,\frac{\partial F}{\partial x}. \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

Αρκεί να δείξουμε ότι η F είναι σταθερή πάνω στις λύσεις του συστήματος (24). Έχουμε

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial F}{\partial y}\dot{y} = \mu^{-1}\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y} - \mu^{-1}\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial x}$$

$$= \mu^{-1}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial x}\right) = 0,$$

κατά μήκος κάθε λύσης. $\boxtimes$

Στα επόμενα παραδείγματα βλέπουμε πώς η γνώση των ολοκληρωτικών καμπυλών ενός μη γραμμικού συστήματος μας βοηθά στο να έχουμε μια καλή ποιοτική εικόνα για την συμπεριφορά των λύσεων του συστήματος. Δίνουμε πρώτα τις δύο απλούστερες μορφές μη γραμμικών εξισώσεων.

• <u>ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΧΩΡΙΖΟΜΕΝΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ</u>

Έστω $\mathcal{R}$ ένα ανοικτό ορθογώνιο. Αν στο $\mathcal{R}$ υπάρχει ένας ολοκληρωτικός παράγοντας έτσι ώστε

$$\mu(x,y)A(x,y)dx + \mu(x,y)B(x,y)dy = f(x)dx + g(y)dy, \quad (25)$$

τότε οι εξισώσεις (18) ή (3) ονομάζονται <u>χωριζομένων μεταβλητών</u>. Είναι ξεκάθαρο ότι η διαφορική μορφή χωριζομένων μεταβλητών

$$f(x)\,dx + g(y)\,dy,$$

είναι ακριβής στο $\mathcal{R}$: Για ένα σημείο $(x_0, y_0) \in \mathcal{R}$,

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} f(s)\,ds + \int_{y_0}^{y} g(s)\,ds, \qquad (26)$$

δηλ. $dF = f(x)\,dx + g(y)\,ds.$

- <u>ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ $1^{ης}$ τάξης</u>

Ξεκινούμε από την ΔΕ (18)

$$\omega = A(x,y)\,dx + B(x,y)\,dy = 0$$

και περιοριζόμαστε πάνω στην καμπύλη

$$\gamma: \quad x = t, \quad y = v(t), \quad t \in (a,b).$$

Τότε η (18) γίνεται:

$$\boxed{B(x,y)\frac{dy}{dx} + A(x,y) = 0.} \qquad (27)$$

Αν $dF = A\,dx + B\,dy$, τότε κάθε λύση της (27) είναι μια σταθμική καμπύλη από το σύνολο $F(x,y)=c$. Αντιστρόφως αν το γράφημα $y = v(x)$ στο $\mathcal{E}$ είναι στην σταθμική καμπύλη $F(x,y)=c$ και η v είναι διαφορίσιμη, τότε η $v(x)$ είναι λύση της (27).

Έτσι κάθε λύση της (27) περιγράφεται πεπλεγμένα από τις σταθμικές καμπύλες $F(x,y)=c$.

Ας δούμε τώρα διάφορα παραδείγματα όλων όσων αναπτύξαμε.

Παραδειγματα

1. Βρείτε όλες τις καμπύλες ορθογώνιες στην οικογένεια κύκλων $x^2+y^2=c^2$.

2. Λύσατε τις ΔΕ:

a. $y\,dx - x\,dy = 0$

b. $x^2(ye^x - y)\,dx + y^2x^3\sin y\,dy = 0.$

3. Λύσατε τις ΔΕ:

a. $(3x^2y^2+4y+1)\,dx + (2x^3y+4x)\,dy = 0$

b. $3\cos y\,dx - x\sin y\,dy = 0$

4. Βρείτε όλες τις λύσεις της ΔΕ:

$$\frac{dy}{dx} = y^2.$$

5. Μελετήστε την κίνηση υλικού σημείου που κινείται ευθύγραμμα και υπόκειται σε δύναμη επαναφοράς

$$F(x) = -x - x^2,$$

όπου x: απόσταση απο το σημείο 0.

[Υπόδειξη: Νόμος Νεύτωνος: $m\ddot{x} + x + x^2 = 0$.]

6. Βρείτε ένα πρώτο ολοκλήρωμα του συστήματος:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= y(1-x^2) \\ \dot{y} &= -x(1-y^2). \end{aligned}\right\}$$

7. Μελετείστε την κίνηση του απλού εκκρεμούς χωρίς τριβές,

$$u'' + \sin u = 0.$$

Ας δούμε κάθε ένα από τα παραπάνω με λεπτομέρεια.

1. Στο σημείο (x,y) (αυτή να που τελειώνει εκεί από το $(0,0)$) η εφαπτομένη του κύκλου είναι παράλληλη στο $(-y,x)$. Άρα η διαφορική εξίσωση για τις ζητούμενες καμπύλες είναι

$$(-y,x)\cdot(\dot{x},\dot{y}) = x\dot{y} - y\dot{x} = 0. \qquad (28)$$

Έτσι θεωρούμε την ΔΕ

$$x\,dy - y\,dx = 0, \qquad (29)$$

η οποία, γνωρίζουμε ότι δεν είναι ακριβής (βλ. εξ. (12)). Εν τούτοις,

$$d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2}, \quad x \neq 0,$$

και η $1/x^2$ είναι ένας ολοκληρωτικός παράγοντας. Άρα για $x\neq 0$, μια λύση είναι η οικογένεια $\frac{y}{x} = c$, δηλ. η λύση που ζητούμε είναι οι ευθείες που περνούν από την αρχή των αξόνων.

2. a. (το προηγούμενο παράδειγμα, εδώ με άλλο τρόπο).
Διαιρώντας με xy, έχουμε

$$\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} = 0,$$

και άρα

$$\ln x - \ln y = k, \quad x\neq 0,\ y\neq 0.$$

Αυτή γράφεται και

$$\frac{x}{y} = c.$$

b. Διαιρώντας με x^3y βρίσκουμε

$$\frac{1}{x}\left(e^x - 1\right)dx + y\sin y\,dy = 0,$$

η οποία είναι χωριζομένων μεταβλητών. Άρα όταν

$x>0$, $y>0$ (1ο τεταρτημόριο), έχουμε σαν λύση την συνάρτηση

$$F(x,y) = \int_1^x s^{-1}e^s ds - \ln x + \sin y - y\cos y\, dy = c.$$

– Μια μορφή $\omega = A dx + B dy$ λέγεται κλειστή αν

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}. \qquad (30)$$

Κάθε ακριβής μορφή είναι κλειστή: Αν η ω είναι ακριβής τότε $\exists F$, $dF = \omega$, δηλ. τότε ισχύει:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = A, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = B. \qquad (31)$$

Επειδή, αν η συνάρτηση $\mathcal{F} = DF \in C^1$ στο E, τότε η F είναι $C^2(E)$, έχουμε ότι

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \qquad (32)$$

και άρα από τις (32), (31) έπεται το ζητούμενο.
Μπορούμε να πούμε ότι η κλειστότητα μιας μορφής είναι αναγκαία συνθήκη για την ακρίβεια. Είναι ικανή μόνο αν $A, B \in C^1(R)$, R: ανοικτό ορθογώνιο:

Κάθε ακριβής είναι κλειστή.

Ορίζουμε:

$$\boxed{F(x,y) = \int_{x_0}^x A(s,y_0)\,ds + \int_{y_0}^y B(x,s)\,ds}, \qquad (33)$$

όπου (x_0,y_0) ένα σημείο του R. Τότε στο R έχουμε:

Το αντίστροφο ισχύει υπό προϋποθέσεις.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = A(x,y_0) + \int_{y_0}^y \frac{\partial A}{\partial s}(x,s)\,ds =$$

$$= A(x,y_0) + A(x,y) - A(x,y_0) = A(x,y), \qquad (34)$$

και ομοίως για την $\frac{\partial F}{\partial y} = B$, στο R. Δηλ. η $\omega = A dx + B dy$ είναι ακριβής.

3. a. $\frac{\partial A}{\partial y} = 6x^2y + 4$, $\frac{\partial B}{\partial x} = 6x^2y + 4$,

δηλ. η μορφή είναι κλειστή στο $\mathbb{R}^2$ και επειδή οι $A, B \in C^1(\mathbb{R}^2)$ έπεται ότι η μορφή είναι ακριβής.

Ορίζουμε

$$F(x,y) = \int_0^x A(s,0)\,ds + \int_0^y B(x,s)\,ds =$$

$$= \int_0^x ds + \int_0^y (2x^3 s + 4x)\,ds$$

$$= x + x^3y^2 + 4xy,$$

δηλ. η λύση στο $\mathbb{R}^2$ είναι η

$$x + x^3y^2 + 4xy = c.$$

b. Η εξίσωση δεν είναι ακριβής, και άρα κοιτάμε αν έχει κάποιον ολοκληρωτικό παράγοντα, $\mu(x,y)$. Αυτός θα υπάρχει αν μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση:

$$\frac{\partial(\mu A)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu B)}{\partial x}, \qquad (35)$$

για το $\mu(x,y)$. Δηλ., ζητούμε μια λύση της

$$-3(\sin y)\mu + 3\cos y \frac{\partial \mu}{\partial y} = -(\sin y)\mu - x \sin y \frac{\partial \mu}{\partial x}. \qquad (36)$$

Παρατηρούμε ότι αν θέσουμε

$$\mu(x,y) = \mu(x), \qquad (36)$$

δηλ., ζητούμε το μ να είναι συνάρτηση μόνο του x, τότε η εξ. (36) γράφεται:

$$\sin y \left[x \frac{d\mu}{dx} - 2\mu \right] = 0, \qquad (37)$$

με λύση $\mu(x) = x^2$, και ο $\mu = x^2$ είναι ένας ολοκληρωτικός παράγοντας για $x \neq 0$. Έτσι, η μορφή

$$3x^2 \cos y \, dx - x^3 \sin y \, dy$$

είναι ακριβής, και μια λύση για $x \neq 0$ είναι η οικογένεια

$$x^3 \cos y = c. \tag{38}$$

4. Έχουμε την διαφορική εξίσωση

$$dy - y^2 dx = 0. \tag{39}$$

Για $y \neq 0$, η ΔΕ είναι χωριζομένων μεταβλητών, διαιρώντας έχουμε

$$y^{-2} dy - dx = -d(y^{-1} + x),$$

και άρα ότι $y \neq 0$, οι λύσεις δίνονται από την οικογένεια

$$\frac{1}{y} + x = c,$$

δηλ., οι λύσεις για $y \neq 0$ είναι:

$$\boxed{y = \frac{1}{c - x}.} \tag{40}$$

Παρατηρούμε ότι για $x < c$,

$$y \to \infty, \quad \text{καθώς} \quad x \to c. \tag{41}$$

Η λύση εκείνη που ικανοποιεί την Α.Σ. $y(x_0) = y_0 \neq 0$ είναι η εξής. Λύνοντας για το c την

$$y_0 = \frac{1}{c - x_0},$$

έχουμε

$$c = \frac{1}{y_0} + x_0,$$

οπότε η λύση είναι:

$$y = \frac{1}{y_0^{-1} + x_0 - x}. \tag{41}$$

Αυτή, για $y_0 > 0$ ορίζεται στο διάστημα

$$x < y_0^{-1} + x_0, \tag{42}$$

ενώ όταν $y_0 < 0$, η λύση ορίζεται για

$$x > y_0^{-1} + x_0 . \qquad (43)$$

Όταν η Α.Σ. είναι $y_0 = 0$, η λύση είναι η $y = 0$. ⊠

5. Ο νόμος του Νεύτωνος είναι:

$$m\ddot{x} + x + x^2 = 0. \qquad (44)$$

Συμβολίζοντας με

$$y = m\dot{x}$$

την ορμή του υλικού σημείου, η (44) γράφεται:

$$\left.\begin{aligned} m\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x - x^2 . \end{aligned}\right\} \qquad (45)$$

Η διαφορική εξίσωση για το πρώτο ολοκλήρωμα από την (45), είναι

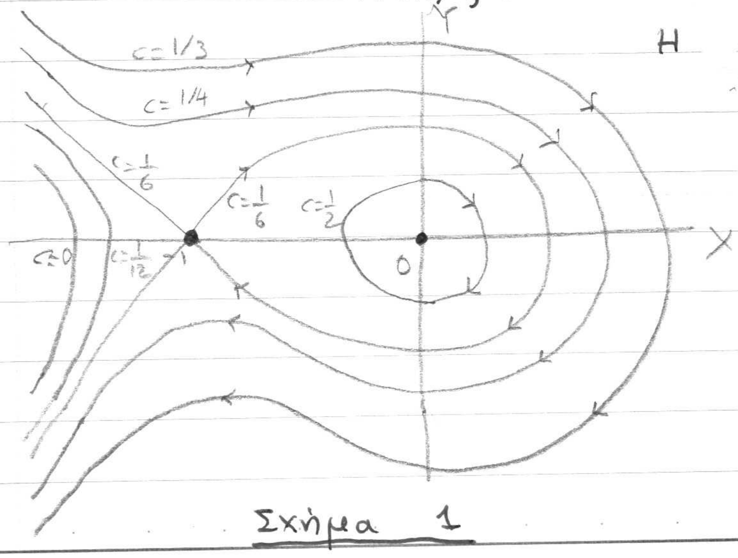
$$(x + x^2)\,dx + m^{-1} y\,dy = 0 , \qquad (46)$$

που είναι χωριζομένων μεταβλητών. Άρα το ολοκλήρωμα είναι η συνάρτηση (ολική ενέργεια του συστήματος):

$$H(x,y) = \underbrace{\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3}_{\text{δυναμική}} + \underbrace{\frac{1}{2m}y^2}_{\text{κινητική} = \frac{1}{2}\dot{x}^2} , \qquad (47)$$

και ο ολοκληρωτικές καμπύλες είναι οι

$$H(x,y) = c . \qquad (48)$$



Σχήμα 1

Η Η ονομάζεται και το ολοκλήρωμα ενέργειας και το γεγονός ότι το Η είναι σταθερό είναι ο νόμος διατήρησης της ενέργειας.

Από το Σχ. (1) βλέπουμε ότι οι ολοκληρωτικές καμπύλες μας

Βέλη

δίνουν πολλές πληροφορίες για την συμπεριφορά του συστήματος. Τα βέλη δείχνουν την διεύθυνση των λύσεων καθώς αυξάνει ο χρόνος: Αυτό το βλέπουμε ως εξής. Πάνω από τον x-άξονα $\dot{x} > 0$, και το x αυξάνει, ενώ κάτω του x-άξονα, $\dot{x} < 0$ και το x ελαττώνεται.

Σημεία ισορροπίας

Τα σημεία ισορροπίας του συστήματος καθορίζονται από την εξίσωση

$$(B, -A) = (0,0),$$

ή,

$$(y, x + x^2) = (0,0),$$

δηλ. έχουμε τα σημεία ισορροπίας

$$(0,0) \text{ και } (-1,0). \tag{49}$$

Αυτά τα σημεία είναι λύσεις του συστήματος και σε αυτά το πεδίο ταχυτήτων μηδενίζεται, αφού:

$$(\dot{x}, \dot{y}) = (B, -A). \tag{50}$$

Δηλ., αν το σύστημα ξεκινήσει σε μια από αυτές τις δύο καταστάσεις, παραμένει σε αυτές πάντοτε.

Αν το σύστημα είναι στην κατάσταση $(0,0)$ και διαταραχθεί ελαφρά, τότε θα κινηθεί πάνω σε μια από τις γειτονικές ολοκληρωτικές καμπύλες και, όπως βλέπουμε από το Σχ. 1, θα παραμείνει κοντά στην κατάσταση ισορροπίας $(0,0)$.

Ευστάθεια λύσεων

Αυτή η κατάσταση ισορροπίας ονομάζεται <u>ευσταθής</u> και επειδή οι ολοκληρωτικές καμπύλη γύρω της είναι κλειστές καμπύλες, την ονομάζουμε <u>κέντρο</u>. Οι κλειστές καμπύλες αντιστοιχούν σε περιοδικές λύσεις (γιατί;). Έτσι αν η τιμή της (ολικής) ενέργειας του συστήματος δεν είναι πολύ μεγάλη, το σύστημα ταλαντώνεται γύρω από την ευσταθή ισορροπία (για μεγάλες τιμές της ενέργειας οι λύσεις διαφεύγουν στο άπειρο καθώς $t \to \infty$.

Αν το σύστημα είναι στην θέση ισορροπίας $(-1,0)$, και διαταραχθεί ελαφρά, τότε δεν θα παραμείνει απαραίτητα κοντά σε αυτή τη θέση ισορροπίας: Εκτός από τις δύο συγκεκριμένες ολοκληρωτικές καμπύλες που προσεγγίζουν την θέση ισορροπίας $(-1,0)$, μια διαταραχή θα οδηγήσει το σύστημα είτε να διαφύγει ή να ταλαντωθεί γύρω από το $(0,0)$. Οι μέγιστες τιμές των ταλαντώσεων του $x(t)$ αντιστοιχούν στα σημεία όπου οι κλειστές ολοκληρωτικές καμπύλες τέμνουν τον x-άξονα.

6. Το αντίστοιχο διαφορικό σύστημα

$$x(1-y^2)\,dx + y(1-x^2)\,dy = 0 \qquad (51)$$

είναι χωριζομένων μεταβλητών. Χωρίζοντας τις μεταβλητές βρίσκουμε

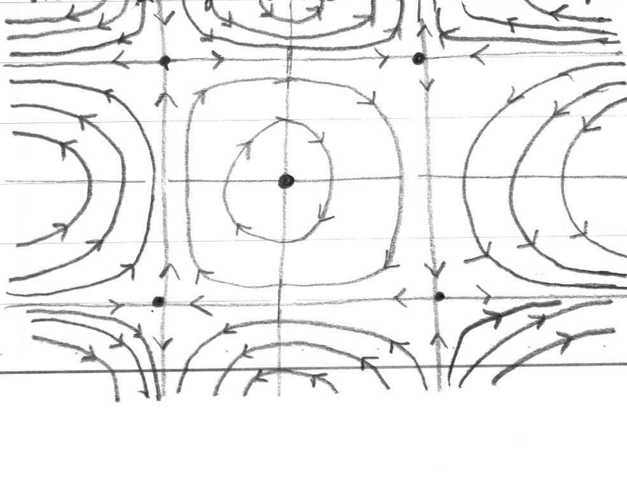
$$\frac{x\,dx}{1-x^2} + \frac{y\,dy}{1-y^2} = 0$$

$$\ln|1-x^2| + \ln|1-y^2| = \ln c$$

$$(1-x^2)(1-y^2) = c. \qquad (52)$$

Βεβαίως η εξίσωση (51) είναι ακριβής; και μπορούμε να φτάσουμε στο ολοκλήρωμα (52) χωρίς να μας απασχολεί τι γίνεται όταν μηδενίζεται το $(1-x^2)(1-y^2)$.

Σημεία ισορροπίας.



Το σύστημα έχει 5 σημεία ισορροπίας $\left(y(1-x^2), -x(1-y^2)\right) = (0,0)$, τα οποία είναι τα $(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$ και $(1,-1)$.

Τα σημεία ισορροπίας ονομάζονται και <u>κρίσιμα σημεία</u> (κατ' αναλογία με την μελέτη του min, max μιας συνάρτησης), είναι τα κρίσιμα σημεία του ολοκληρώματος. Πράγματι, για την

$$H(x,y) = (1-x^2)(1-y^2)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x} &= (1-y^2)(-2x) = -2x(1-y^2) \\ \frac{\partial H}{\partial y} &= (1-x^2)(-2y) = -2y(1-x^2) \end{aligned}\right\}$$ Η συνθήκη για ύπαρξη κρίσιμων σημείων είναι:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial H}{\partial y} = 0$$

δηλ. $$\left.\begin{aligned} x(1-y^2) &= 0 \\ y(1-x^2) &= 0 \end{aligned}\right\}$$ κλπ, όπως πριν.

Οι κλειστές καμπύλες γύρω από την αρχή αντιστοιχούν σε περιοδικές λύσεις. Αν η αρχική κατάσταση είναι μέσα στο τετράγωνο, τότε το σύστημα ταλαντώνεται γύρω από την αρχή. Έξω από το τετράγωνο, αν εξαιρέσουμε εκείνες τις λύσεις που προσεγγίζουν μια κατάσταση ισορροπίας, καθώς $t \to \infty$ οι λύσεις διαφεύγουν στο άπειρο. Αυτές οι ελάχιστες το πλήθος λύσεις είναι ιδιαίτερα <u>ασταθείς</u>: μια ελαφρά διαταραχή μεταφέρει το σύστημα σε μια λύση που πηγαίνει στο άπειρο ή ταλαντώνεται. Τα τέσσερα σημεία στις κορυφές είναι σαγματικά σημεία και είναι ασταθή.