ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Σημειώσεις – Γραμμικές Ταλαντώσεις

Κοφινάς Γιώργος

Τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών και Επικοινωνιακών Συστημάτων

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

7.1. Το ομογενές σύστημα

Ξεκινούμε μελετώντας με μεγαλύτερη λεπτομέρεια την συμπεριφορά των λύσεων του ομογενούς συστήματος

$$\dot{x} = Ax. \qquad (1)$$

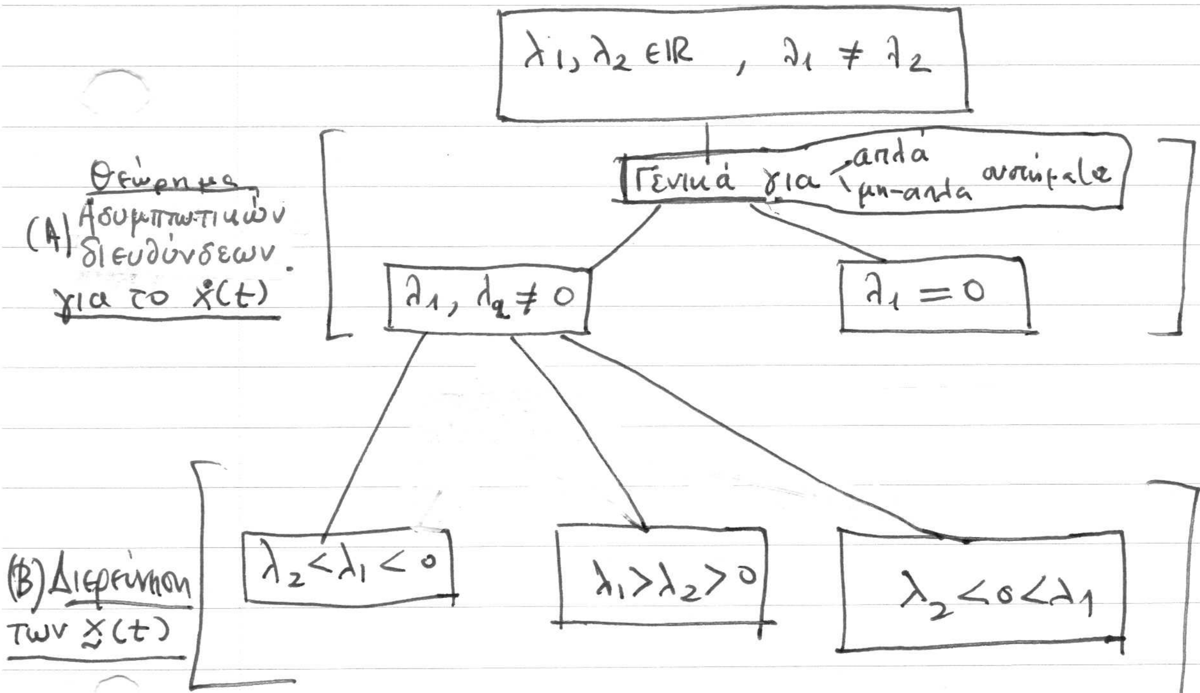
Έστω λ_1, λ_2 οι ιδιοτιμές του A. Ο χαρακτήρας των λύσεων του (1) εξαρτάται απο την φύση των ιδιοτιμών λ_1, λ_2. Η μελέτη θα γίνει με σχεδόν αλγοριθμικό τρόπο: Υπάρχουν τρεις περιπτώσεις:

(1) $\boxed{\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \ \lambda_1 \neq \lambda_2}$

(2) $\boxed{\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}}$

(3) $\boxed{\lambda_1 = \lambda_2 \ (\text{αναγκαστικά } \in \mathbb{R})}$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ (1): Ο αλγόριθμος της (1) περίπτωσης είναι:



(A) Γενικά

Υποθέτουμε χ.β.γ ότι $\lambda_1 > \lambda_2$. Τα $\underset{\sim}{v}_1, \underset{\sim}{v}_2$ είναι αναγκαστικά πραγματικά ιδιοδιανύσματα, και η γενική λύση είναι

$$\boxed{\underset{\sim}{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \underset{\sim}{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \underset{\sim}{v}_2 .} \qquad (2)$$

Θεμελιώδης παρατήρηση

Κάθε λύση $\underset{\sim}{x}(t)$ από την (2) ορίζει μια καμπύλη γ του επιπέδου: Αν $\underset{\sim}{x}(t) = (x(t), y(t))$, τότε η τροχιά $\gamma := \{ (x(t), y(t)) : t \in \mathbb{R} \}$ (*)

1ος Σκοπός

Θέλουμε να μελετήσουμε τι συμβαίνει στην διεύθυνση της καμπύλης γ καθώς $t \to \infty$ και καθώς $t \to -\infty$.

Ερώτηση 1η: Πώς ορίζεται η διεύθυνση της γ;

Σχόλιο

Η μελέτη του 1ου σκοπού εξαρτάται προφανώς από την φύση της καμπύλης γ. Υπάρχουν σημαντικές λύσεις (δηλ. καμπύλες γ) για τις οποίες οι διευθύνσεις δεν ορίζονται - αυτές είναι σημεία στο επίπεδο:

Ορισμός

Ένα σημείο $\underset{\sim}{x}^0$ ονομάζεται κρίσιμο σημείο ή σημείο ισορροπίας του συστήματος (1) αν

$$A \underset{\sim}{x}^0 = \underset{\sim}{0} . \qquad (3)$$

Αν $\underset{\sim}{x}^0$ είναι ένα κρίσιμο σημείο, τότε η καμπύλη που αντιστοιχεί στην λύση

$$\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{x}^0 ,$$

είναι ένα σημείο.

Ερώτημ 2: Ποιά είναι τα κρίσιμα σημεία του (1);

~~Οι~~ απαντήσεις και στις δύο ερωτήσεις εξαρτώνται από το αν οι ιδιοτιμές είναι ή όχι μη μηδενικές. Ας αρχίσουμε από την δεύτερη ερώτηση.

<u>Κρίσιμα σημεία</u>

Αν $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$, τότε επειδή

$$\mathrm{Det} A = \lambda_1 \lambda_2 ,$$

έπεται ότι

$$\mathrm{Det}\, A \neq 0,$$

και άρα ο A είναι μη ιδιόμορφος, δηλ.,

$$A \underset{\sim}{x}^0 = \underset{\sim}{0} \;\Rightarrow\; \underset{\sim}{x}^0 = \underset{\sim}{0},$$

και έτσι το μοναδικό κρίσιμο σημείο είναι το $\underset{\sim}{0}$.

Συνοψίζοντας, έχουμε το εξής αποτέλεσμα.

<u>Πρόταση 1.</u>

Αν $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$, τότε το μοναδικό κρίσιμο σημείο του συστήματος $\dot{\underset{\sim}{x}} = A\underset{\sim}{x}$ είναι το $\underset{\sim}{0}$. $\boxtimes$

Αν $\lambda_1 = 0$, τότε επειδή $\mathrm{DeA} = \lambda_1 \lambda_2 = 0$ έχουμε ότι για μη μηδενικά $\underset{\sim}{v}^1$:

$$A \underset{\sim}{v}^1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{12} \\ -a_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12} - a_{11}a_{12} \\ a_{12}a_{21} - a_{22}a_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\mathrm{Det} A \end{pmatrix} = \underset{\sim}{0},$$

και άρα έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

<u>Πρόταση 2</u>

Αν $\lambda_1 = 0$, τότε κάθε σημείο της ευθείας που περνά από το $\underset{\sim}{0}$ και έχει διεύθυνση αυτήν του $\underset{\sim}{v}^1$,

$$\mathcal{L}_1 = \{ \mu \underset{\sim}{v}^1 : \mu \in \mathbb{R} \}$$

είναι κρίσιμο σημείο του συστήματος $\dot{\underset{\sim}{x}} = A\underset{\sim}{x}$. $\boxtimes$

Αυτές οι δύο προτάσεις απαντούν πλήρως την Ερώτηση 2.
(Πολλές φορές όταν $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq 0$, λέμε ότι το $\dot{\underset{\sim}{x}} = A\underset{\sim}{x}$

είναι <u>απλό</u> (Det$A \neq 0$, A: μη ιδιόμορφος), <u>μη απλό</u> αν μια από τις λ_1, λ_2 είναι μηδέν.)

Ερχόμαστε τώρα στο πρώτο ερώτημα. Ονομάζουμε <u>σύνηθες σημείο</u> κάθε σημείο του επιπέδου που <u>δεν</u> είναι κρίσιμο σημείο του συστήματος $\dot{\underset{\sim}{x}} = A\underset{\sim}{x}$. Σε κάθε σύνηθες σημείο, το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα της γ είναι:

$$\frac{\dot{\underset{\sim}{x}}(t)}{|\dot{\underset{\sim}{x}}(t)|} = \frac{c_1\lambda_1 e^{\lambda_1 t}\underset{\sim}{v}^1 + c_2\lambda_2 e^{\lambda_2 t}\underset{\sim}{v}^2}{\left[c_1^2\lambda_1^2 e^{2\lambda_1 t} + 2c_1c_2\lambda_1\lambda_2 e^{(\lambda_1+\lambda_2)t}\underset{\sim}{v}^1\cdot\underset{\sim}{v}^2 + c_2^2\lambda_2^2 e^{2\lambda_2 t}\right]^{1/2}} \quad (4)$$

Έτσι υπάρχουν δύο περιπτώσεις για τον 1ο σκοπό:

(1) Στην περίπτωση που το σύστημα είναι μη απλό, (έστω π.χ. $\lambda_1 = 0$), τότε η (4) γίνεται:

$$\frac{\dot{\underset{\sim}{x}}(t)}{|\dot{\underset{\sim}{x}}(t)|} = \pm\underset{\sim}{v}^2, \quad (5)$$

και άρα κάθε καμπύλη γ είναι ευθεία παράλληλη με το $\underset{\sim}{v}^2$. Έτσι όλες οι καμπύλες των λύσεων του (1) είναι παράλληλες με την ευθεία $\mathcal{L}_2$ που περιέχει το $\underset{\sim}{v}^2$. Ομοίως όταν $\lambda_2 = 0$, τότε όλες οι καμπύλες λύσεων είναι παράλληλες με την $\mathcal{L}_1 = \{\mu\underset{\sim}{v}^1 : \mu \in \mathbb{R}\}$.

(2) Στην περίπτωση που το σύστημα είναι απλό, όταν δηλ., $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$, τότε έχουμε το εξής αποτέλεσμα. (βλ. πρώτα σχόλια μετά την απόδειξη.)

<u>Ασυμπτωτικές διευθύνσεις</u>

<u>Θεώρημα 1</u>: Έστω $\lambda_1 > \lambda_2$. Τότε

(i) Αν $c_1\lambda_1 \neq 0$, το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης λύσης γ τείνει στο $\pm\underset{\sim}{v}^1$ καθώς $t \to \infty$.

~~εξηγείται έτσι διότι είναι~~ οι τροχιές και όχι ως προς την $\mathcal{L}_1$.

(ii) Αν $c_2\lambda_2 \neq 0$, τότε το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης λύσης γ τείνει στο $\pm \underset{\sim}{v}^2$ καθώς $t \to -\infty$.

Απόδειξη

(i) Από την (4), διαιρώντας αριθμητή και παρονομαστή με $e^{\lambda_1 t}$, έχουμε:

$$\frac{\dot{\underset{\sim}{x}}(t)}{|\dot{\underset{\sim}{x}}(t)|} = \frac{c_1\lambda_1 \underset{\sim}{v}^1 + c_2\lambda_2 e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}\underset{\sim}{v}^2}{\left[c_1^2\lambda_1^2 + 2c_1c_2\lambda_1\lambda_2 e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}\underset{\sim}{v}^1\cdot\underset{\sim}{v}^2 + c_2^2\lambda_2^2 e^{2(\lambda_2-\lambda_1)t}\right]^{1/2}} \tag{5}$$

και επειδή $(\lambda_2-\lambda_1)t < 0$, καθώς $t \to \infty$, έπεται ότι:

$$\frac{\dot{\underset{\sim}{x}}(t)}{|\dot{\underset{\sim}{x}}(t)|} \to \pm \underset{\sim}{v}^1, \text{ καθώς } t \to \infty, \tag{6}$$

ενώ οι όροι που περιέχουν το $e^{(\lambda_2-\lambda_1)t} \to 0$ καθώς $t \to \infty$.

(ii) Ομοίως, από την (4) διαιρώντας με $e^{\lambda_2 t}$,

$$\frac{\dot{\underset{\sim}{x}}(t)}{|\dot{\underset{\sim}{x}}(t)|} = \frac{c_1\lambda_1 e^{(\lambda_1-\lambda_2)t}\underset{\sim}{v}^1 + c_2\lambda_2 \underset{\sim}{v}^2}{\left[c_1^2\lambda_1^2 e^{2(\lambda_1-\lambda_2)t} + 2c_1c_2\lambda_1\lambda_2 e^{(\lambda_1-\lambda_2)t}\underset{\sim}{v}^1\cdot\underset{\sim}{v}^2 + c_2^2\lambda_2^2\right]^{1/2}}, \tag{7}$$

και επειδή $(\lambda_1-\lambda_2)t<0$, $t \to -\infty$, έπεται ότι:

$$\frac{\dot{\underset{\sim}{x}}(t)}{|\dot{\underset{\sim}{x}}(t)|} \to \pm \underset{\sim}{v}^2, \text{ καθώς } t \to -\infty. \tag{8}$$

$\boxtimes$

Η περίπτωση όπου $c_1\lambda_1 = 0$ είναι ξεκάθαρη: όταν $\lambda_1 = 0$, έχει ήδη μελετηθεί προηγουμένως. Όταν $c_1 = 0$, έπεται από την εξ. (2) ότι

$$\underset{\sim}{x}(t) = c_2 e^{\lambda_2 t}\underset{\sim}{v}^2, \tag{9}$$

δηλ. η λύση ξεκινά πάνω στην ευθεία $\mathcal{L}_2 = \{\mu \underset{\sim}{v}^2\}$ και παραμένει πάντα πάνω σ'αυτήν.

Ομοίως για την περίπτωση $c_2\lambda_2 = 0$.

Δηλ. Ενώ για τις διευθύνσεις παίζει ρόλο το μέγεθος και το αν είναι ή όχι μηδέν, για τις ίδιες τις καμπύλες παίζει ρόλο το πρόσημο. μαζί βέβαια πάντοτε με την μορφή των λύσεων, εξ. (2).

(Β) Απομένει, μετά τον ασυμπτωτικό υπολογισμό του $\underset{\sim}{\dot{x}}(t)$, ο υπολογισμός της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς των ίδιων των καμπυλών λύσεων $\underset{\sim}{x}(t)$. Αυτό εξαρτάται από

2ος σκοπός: τα πρόσημα των ιδιοτιμών του συστήματος. Υπάρχουν τρεις περιπτώσεις, κάθε μια από τις οποίες, σε συνδυασμό με το (Α), οδηγεί στην εικόνα της γενικής συμπεριφοράς των λύσεων του συστήματος.

(Β1) Αρνητικές ιδιοτιμές : $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$.

Από την εξ. (2) έπεται άμεσα ότι:

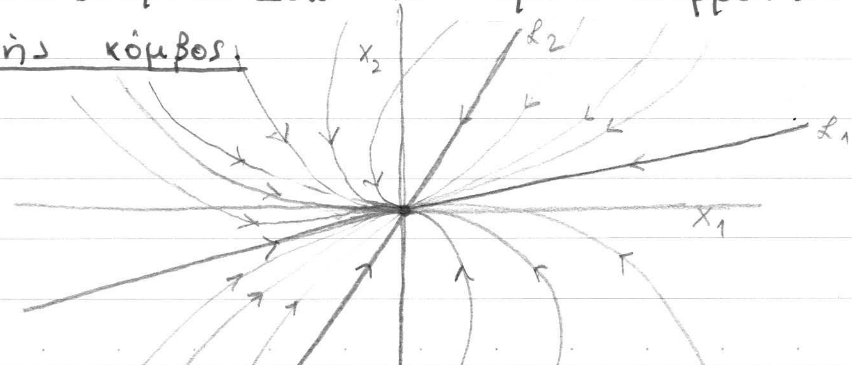
Πόρισμα 1

(i) Κάθε λύση $\underset{\sim}{x}(t) \to \underset{\sim}{0}$, καθώς $t \to \infty$. (10)

(ii) Κάθε λύση $\underset{\sim}{x}(t) \to \infty$, καθώς $t \to -\infty$. $(\underset{\sim}{x}(0) \neq \underset{\sim}{0})$ (11)

Εξαιτίας του (i), το κρίσιμο σημείο στην αρχή των αξόνων, $\underset{\sim}{0}$, ονομάζεται και ασυμπτωτικά ευσταθές. Ανεξάρτητα από το πόσο μακρυά από την αρχή (δηλ. την θέση ισορροπίας $\underset{\sim}{0}$) διαταράσσεται το σύστημα, πάντοτε επιστρέφει σε αυτήν την θέση.

Με βάση τις μέχρι τώρα πληροφορίες*, μπορούμε να σχεδιάσουμε τις καμπύλες λύσεων στην περίπτωση (1) που εξετάζουμε. Εδώ το σημείο ισορροπίας $\underset{\sim}{0}$ ονομάζεται ευσταθής κόμβος.



ΣΧΗΜΑ 1

* Θεώρ.(1i), Πορ.(1i).

Κάθε σημείο του επιπέδου $\underset{\sim}{x}(t)$ <u>οδηγείται</u> καθώς ο χρόνος $t \to \infty$ στο σημείο $\underset{\sim}{0}$, κατά μήκος της καμπύλης λύσης (τροχιάς) που διέρχεται από το εν λόγω σημείο με κατεύθυνση που δίνεται από το βέλος στο παραπάνω διάγραμμα και σημαίνει αυξανόμενο χρόνο, $t \to \infty$.

(B2) Θετικές ιδιοτιμές: $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$.

Παρόμοια συμπεράσματα με εκείνα της (B1), αλλά ο χρόνος αντιστρέφεται, αντικατάσταση του t με το $-t$. Αυτό οδηγεί στην αντιστροφή των βελών στο προηγούμενο σχήμα, και έτσι αυθαίρετα κοντά στην αρχή υπάρχουν λύσεις οι οποίες <u>διαφεύγουν</u> από κάθε δοθείσα γειτονιά της αρχής. Το σημείο ισορροπίας ονομάζεται <u>ασταθής κόμβος</u> και είναι 'ασταθές'.

(B3) Μια θετική και μια αρνητική ιδιοτιμή: $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$.

Απο την γενική λύση (2):

$$\underset{\sim}{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \underset{\sim}{v}^1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \underset{\sim}{v}^2,$$

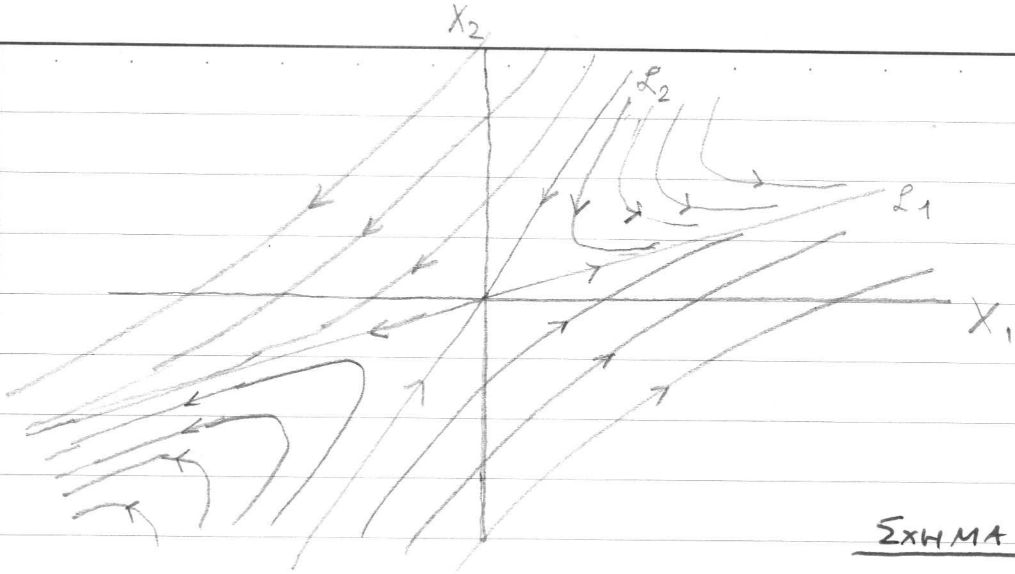
προκύπτει ότι υπάρχουν μόνο δύο καμπύλες λύσεων οι οποίες προσεγγίζουν την αρχή, η

$$c_1 = 0 \quad , \quad c_2 > 0 \quad , \qquad (12)$$

και η

$$c_1 = 0 \quad , \quad c_2 < 0 . \qquad (13)$$

'Ολες οι άλλες (δηλ. εκείνες που έχουν $c_1 \neq 0$) προσεγγίζουν το άπειρο καθώς $t \to \infty$. Η αρχή είναι <u>ασταθής</u> και ονομάζεται ένα <u>σαγματικό σημείο</u>. Βλ. Σχήμα:



ΣΧΗΜΑ 2.

Παρατηρούμε ότι η φορά των βελών στις $\mathcal{L}_1$ και $\mathcal{L}_2$ 'καθοδηγεί' το πώς θα είναι ο σχεδιασμός των υπολοίπων καμπυλών λύσεων, στα τέσσερα μέρη που χωρίζουν αυτές οι δύο ευθείες όλο το επίπεδο.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ (2) : Οι ιδιοτιμές είναι μιγαδικές: $\lambda_1 = \beta + i\omega$, $\lambda_2 = \beta - i\omega$.

Ο αλγόριθμος της $2^{ης}$ περίπτωσης είναι:

ΜΕΡΟΣ (Α)

ΜΕΡΟΣ (Β)

~ · ~

ΜΕΡΟΣ (Α) Όταν ο A είναι πραγματικός, τότε με μιγαδικές ιδιοτιμές, τα ιδιοδιανύσματα είναι μιγαδικά συζυγή. Η γενική πραγματική λύση (2) γράφεται (βλ. και ανάλογη συζήτηση προηγούμενου κεφαλαίου)

$$\left.\begin{aligned} \underset{\sim}{x}(t) &= c_1 \underset{\sim}{v}^1 e^{(\beta+i\omega)t} + \bar{c}_1 \bar{\underset{\sim}{v}}^1 e^{(\beta-i\omega)t} \\ &= 2\,\mathrm{Re}\left(c_1 \underset{\sim}{v}^1 e^{(\beta+i\omega)t}\right), \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

με $c_1 \in \mathbb{C}$. Επειδή το $\underset{\sim}{v}^1$ είναι μιγαδικό διάνυσμα, θέτουμε

$$\underset{\sim}{v}^1 = \underset{\sim}{u} + i\underset{\sim}{v}, \qquad (15)$$

όπου τα $\underset{\sim}{u}$, $\underset{\sim}{v}$ είναι πραγματικά διανύσματα.

Πρόταση 3

Αν το $\underset{\sim}{v}^1$ είναι ιδιοδιάνυσμα και $\underset{\sim}{v}^1 = \underset{\sim}{u} + i\underset{\sim}{v}$, τότε τα $\underset{\sim}{u}$, $\underset{\sim}{v}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα.

Απόδειξη (στα κίτρινα φύλλα)

$z = a + ib$
$\bar z = a - ib$
$\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}(z + \bar z)$
$\mathrm{Im}\, z = \frac{1}{2i}(z - \bar z)$
$z - \bar z = 2ib$

$\alpha u + \beta v = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 0 \quad , u, v \in \mathbb{R}^2$

we know

$\cancel{c_1(u + iv) + c_2(u - iv) = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = 0}$

$\Downarrow$

$\cancel{(c_1 + c_2)u + i(c_1 - c_2)v = 0}$

$\cancel{Au = \lambda_1 u \quad , \quad Av = \lambda_2 v}$

$\cancel{\alpha A u + \beta A v = 0 \Rightarrow \alpha\lambda_1 u} + \beta\lambda_2 v = 0$

$$\left.\begin{array}{l} v^1 = u + iv \quad , \\ A v^1 = \lambda_1 v^1 \\ A \bar v^1 = \bar\lambda_1 \bar v^1 . \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$A(u + iv) = \lambda_1(u + iv) \Rightarrow Au + iAv = \lambda_1 u + i\lambda_1 v$

$A(u - iv) = \bar\lambda_1(u - iv) \Rightarrow Au - iAv = \bar\lambda_1 u - i\bar\lambda_1 v$

$$\left.\begin{array}{l} 2Au = (\lambda_1 + \bar\lambda_1)u + i(\lambda_1 - \bar\lambda_1)v \\ 2iAv = (\lambda_1 - \bar\lambda_1)u + i(\lambda_1 + \bar\lambda_1)v \end{array}\right\} 2Av = -i(\lambda_1 - \bar\lambda_1)u + (\lambda_1 + \bar\lambda_1)v .$$

$\alpha u + \beta v = 0 \Leftrightarrow 2\alpha Au + 2\beta Av = 0$

$\alpha(\lambda_1 + \bar\lambda_1)u + \alpha i(\lambda_1 - \bar\lambda_1)v - i\beta(\lambda_1 - \bar\lambda_1)u + \beta(\lambda_1 + \bar\lambda_1)v =$

$= 0 \Leftrightarrow \cancel{u\left(\alpha(\lambda_1 + \bar\lambda_1) - i\alpha(\lambda_1 - \bar\lambda_1)\right)}$

$+ \cancel{v\left(\alpha i(\lambda_1 - \bar\lambda_1) + \beta(\lambda_1 + \bar\lambda_1)\right)} = 0$

$\alpha\lambda_1(u + iv) + \alpha\bar\lambda_1(u - iv) \quad \cancel{- i\beta\lambda_1(u + iv) + i\beta\bar\lambda_1(u - iv)} = 0$

$\alpha \quad + \beta\lambda_1(v - iu) + \beta\bar\lambda_1(v + iu)$

$\cancel{\alpha\lambda_1 v^1 + \alpha\bar\lambda_1 \bar v^1 - i\beta\lambda_1 v^1 + i\beta\bar\lambda_1 \bar v^1 = 0}$

$\cancel{(\alpha - i\beta)\lambda_1 v^1 + (\alpha + i\beta)\bar\lambda_1 \bar v^1 = 0 \Leftrightarrow 2\,\mathrm{Re}\left((\alpha - i\beta)\lambda_1 v^1\right) = 0}$

$\cancel{(\alpha - i\beta)\lambda_1 \quad 2\,\mathrm{Re}(\alpha\lambda_1 v^1) - i(\beta\lambda_1 v^1) + \frac{1}{2i}\mathrm{Im}(\beta\lambda_1 v^1)}$

$\alpha(\lambda_1 v^1 + \bar\lambda_1 \bar v^1) - i\beta(\lambda_1 v^1 - \bar\lambda_1 \bar v^1) = \alpha \quad \cancel{-i(\beta\lambda_1 v^1 - \beta\bar\lambda_1 \bar v^1)} =$

$$= \cancel{\alpha\lambda_1 v^1 + \alpha\bar{\lambda}_1 \bar{v}^1 - i\beta\lambda_1 (u+iv) - i\beta\bar{\lambda}_1 (u-iv)}$$

$$\left(\begin{aligned} & v - iu = \tfrac{1}{i}(iv+u) = -i\,(u+iv). \\ & v + iu = +\tfrac{1}{i}(iv-u) = -\tfrac{1}{i}(u-iv) = +i\,(u-iv) \end{aligned} \right)$$

$$= \alpha\lambda_1 v^1 + \alpha\bar{\lambda}_1 \bar{v}^1 - i\beta\lambda_1 v^1 + i\beta\bar{\lambda}_1 \bar{v}^1$$

$$= (\alpha - i\beta)\lambda_1 v^1 + (\alpha + i\beta)\bar{\lambda}_1 \bar{v}^1 =$$

$$= \cancel{(\alpha - i\beta)(\lambda_1 v^1 + \bar{\lambda}_1 \bar{v}^1)} = \cancel{2(a-iB)\,\mathrm{Re}(\lambda_1 v^1)}$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\left[(a - iB)\lambda_1 \underset{\sim}{v}^1\right] = \underset{\sim}{0}$$

Θέτοντας: $\lambda_1 = \rho + i\omega$ και, $\underset{\sim}{v}^1 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ \lambda_1 - a_{11} \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\mathrm{Re}\left[(\alpha - iB)(\rho + i\omega)\begin{pmatrix} a_{12} \\ \lambda_1 - a_{11} \end{pmatrix}\right] =$$

$$(a - iB)(\rho + i\omega) + (a + i\beta)(\rho - i\omega)$$

$$= \mathrm{Re}\begin{pmatrix} (\alpha\rho + \beta\omega,\ \alpha\omega - B\rho)\, a_{12} \\ (\quad \text{—}\ // \quad)\ (\rho - a_{11} + i\omega) \end{pmatrix} =$$

$$\mathrm{Re}\begin{pmatrix} (\alpha\rho + \beta\omega)a_{12}, & (\alpha\omega - \beta\rho)a_{12} \\ (\alpha\rho + \beta\omega)(\rho - a_{11}) - (\alpha\omega - \beta\rho)\omega, & (\alpha\rho + \beta\omega)\omega + (\alpha\omega - \beta\rho)(\rho - a_{11}) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} & (\alpha\rho + \beta\omega)a_{12} = 0 \\ & (\alpha\rho + \beta\omega)(\rho - a_{11}) - (\alpha\omega - \beta\rho)\omega = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} & \alpha\rho + \beta\omega = 0 \\ & (\alpha\omega - \beta\rho)\omega = 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} & \alpha = 0 \\ & \beta = 0 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha\not\beta + \beta w &= 0 \\ \alpha w - \beta\not\beta &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \cancel{\alpha\not\beta + \beta w + \alpha w - \beta\not\beta = 0}$$

$$\cancel{\alpha(\not\beta + w) + \beta(w - \not\beta) = 0}$$

If $\not\beta = 0 \Rightarrow \beta = 0$ και $\alpha = 0$.

If $\not\beta \neq 0$, then

(i.e., purely imaginary eigenvalues)

$$\alpha = -\frac{\beta w}{\not\beta} \Rightarrow \frac{-\beta w^2}{\not\beta} - \beta\not\beta = 0$$

$$\cancel{\frac{\beta w^2}{\not\beta}}$$

$$-\beta\left(\frac{w^2}{\not\beta} + \not\beta\right) = 0$$

$$-\beta\left(\frac{w^2 + \not\beta^2}{\not\beta}\right) = 0 \Rightarrow \beta = 0$$

και άρα $\alpha = 0$.

Θέτοντας

$$\boxed{2c_1 = a e^{i\delta},} \qquad (15)$$

η εξ. (14) γράφεται διαδοχικά:

$$\underset{\sim}{x}(t) = 2\,\mathrm{Re}\left(c_1 \underset{\sim}{v}^1 e^{(\beta+i\omega)t}\right)$$

$$= \mathrm{Re}\left(a e^{\beta t} e^{i(\omega t+\delta)} \underset{\sim}{v}^1\right)$$

$$= a e^{\beta t}\,\mathrm{Re}\left[\left(\cos(\omega t+\delta)+i\sin(\omega t+\delta)\right)\left(\underset{\sim}{u}+i\underset{\sim}{v}\right)\right]$$

$$= a e^{\beta t}\,\mathrm{Re}\left[\cos(\omega t+\delta)\underset{\sim}{u} - \sin(\omega t+\delta)\underset{\sim}{v},\ \cos(\omega t+\delta)\underset{\sim}{v}+\sin(\omega t+\delta)\underset{\sim}{u}\right] \Rightarrow$$

Δηλαδή, η

$$\boxed{\underset{\sim}{x}(t) = a e^{\beta t}\left(\cos(\omega t+\delta)\underset{\sim}{u} - \sin(\omega t+\delta)\underset{\sim}{v}\right)}, \quad (16)$$

είναι η γενική πραγματική λύση του συστήματος $\dot{\underset{\sim}{x}} = A\underset{\sim}{x}$ στην περίπτωση των μιγαδικών ιδιοτιμών. Παρατηρούμε ότι, από την (16), όταν

$$\omega t + \delta = k\pi, \qquad (17)$$

έχουμε ότι $\sin(\omega t+\delta) = 0$, και η λύση είναι στην διεύθυνση του $\underset{\sim}{u}$. Ενώ όταν

$$\omega t + \delta = (2k+1)\pi/2, \qquad (18)$$

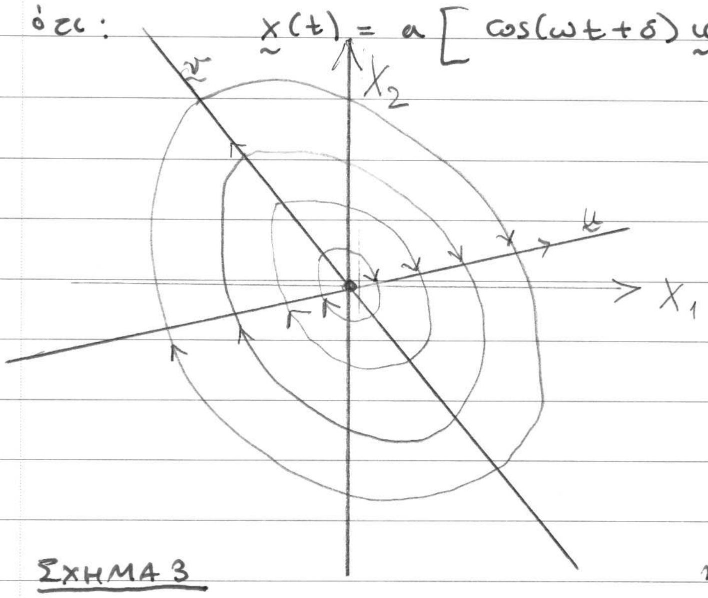
η λύση είναι στην διεύθυνση του $\underset{\sim}{v}$. Κάθε λύση έχει δύο συνιστώσες, μια στην διεύθυνση του $\underset{\sim}{u}$ και μια κατά μήκος του $\underset{\sim}{v}$: Και οι δύο ταλαντώνονται με διαφορά φάσης 90°.

ΜΕΡΟΣ (Β)

(Β1) Καθαρά φανταστικές ιδιοτιμές: $\lambda_1 = i\omega$, $\lambda_2 = -i\omega$.

Επειδή $\beta = Re\lambda_1 = 0$, από την εξ. (16) προκύπτει ότι:

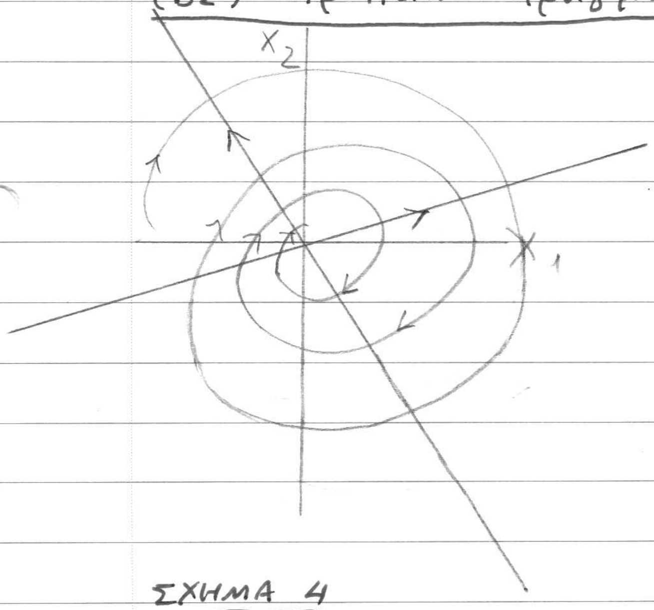
$$\underset{\sim}{x}(t) = a\left[\cos(\omega t+\delta)\underset{\sim}{u} - \sin(\omega t+\delta)\underset{\sim}{v}\right]. \quad (17)$$



ΣΧΗΜΑ 3

Κάθε λύση είναι περιοδική με περίοδο $2\pi/\omega$. Αν τα $\underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{v}$ ήταν κάθετα, οι καμπύλες λύσεων θα ήταν ελλείψεις, τώρα είναι παραμορφωμένες ελλείψεις. Καμπύλες λύσεων κοντά στην αρχή παραμένουν κοντά. Το κρίσιμο σημείο 'αρχή' είναι λοιπόν 'ευσταθές' και ονομάζεται <u>κέντρο</u>.

(Β2) Αρνητικά πραγματικά μέρη: $\beta < 0$.



ΣΧΗΜΑ 4

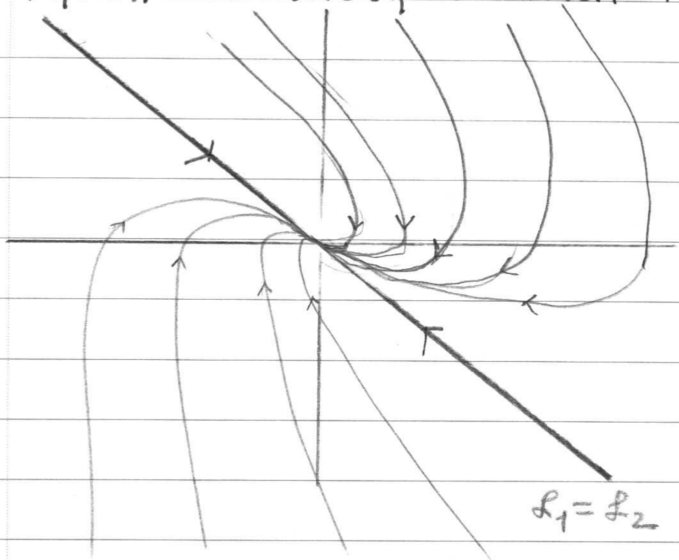
Βλέπουμε από την (16) ότι $\underset{\sim}{x}(t) \to \underset{\sim}{0}$, καθώς $t \to \infty$. Οι διαδοχικές τομές με τις ευθείες που διέρχονται από την αρχή και έχουν διευθύνσεις τα $\underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{v}$ κινούνται προς την αρχή καθώς αυξάνεται ο χρόνος, και έτσι οι καμπύλες λύσεων κινούνται σπειροειδώς προς την αρχή. Το σημείο της αρχής είναι ασυμπτωτικά ευσταθές και ονομάζεται <u>ευσταθής εστία</u>.

(B3) Θετικά πραγματικά μέρη $(\beta>0)$.

Εδώ οι καμπύλες λύσεων κινούνται σπειροειδώς μακριά από την αρχή. Η αρχή είναι ασταθής και ονομάζεται ασταθής εστία. Βλ. προηγούμενο σχήμα όπου τα βέλη θα έχουν τώρα αντίθετη φορά.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 3: Ίσες ιδιοτιμές: $\lambda_1=\lambda_2$.

Επειδή οι ιδιοτιμές είναι πραγματικές, το σχήμα που δίνει τις καμπύλες λύσεων είναι παρόμοιο με το Σχήμα 1. Αν οι ιδιοτιμές είναι αρνητικές, τότε όλες οι λύσεις προσεγγίζουν το μηδέν καθώς $t\to\infty$. Οι λύσεις δεν ταλαντώνονται και η αρχή είναι πάλι ευσταθής κόμβος. Αν οι ιδιοτιμές είναι θετικές, η αρχή είναι ασταθής και ονομάζεται ασταθής κόμβος.



ΣΧΗΜΑ 9

~·~

ευσ. ασ. κόμβος (χοάνη, πηγή), σαγματικό σημείο, κέντρο, εστία (ευσ. ασ.)

7.2. Το μη ομογενές σύστημα

Μελετούμε τώρα το πλήρες, μη ομογενές σύστημα

$$\dot{\underset{\sim}{x}} = A\underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{f} .$$

Ιδιαίτερα μας ενδιαφέρει η μελέτη των περιοδικών λύσεων, που ονομάζονται και εξαναγκασμένες ταλαντώσεις σε αντιδιαστολή με ~~τις~~ περιοδικές λύσεις που μελετήσαμε στην προηγούμενη παράγραφο για το ομογενές σύστημα, που μπορούμε να τις ονομάσουμε και ελεύθερες ταλαντώσεις.

Είδαμε ότι στο ομογενές σύστημα $\dot{\underset{\sim}{x}} = A\underset{\sim}{x}$ υπάρχουν μη τετριμμένες περιοδικές λύσεις αν και μόνο αν οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι καθαρά φανταστικές, τότε εαν $\lambda = i\omega$, όλες οι λύσεις (πλην της τετριμμένης λύσης) είναι περιοδικές με περίοδο $2\pi/\omega$ (μια συνάρτηση $\underset{\sim}{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ ονομάζεται περιοδική με περίοδο τον αριθμό $T \neq 0$ αν $\forall t \in (-\infty, \infty)$ ισχύει $\underset{\sim}{g}(t+T) = \underset{\sim}{g}(t)$. Οι τετριμμένες περιοδικές συναρτήσεις είναι οι σταθερές, ενώ κάθε μη τετριμμένη περιοδική λύση έχει μια ελάχιστη θετική περίοδο T).

Στην παρούσα παράγραφο εξετάζουμε εξαναγκασμένες ταλαντώσεις, δηλ., τις περιοδικές λύσεις της εξίσωσης

$$\dot{\underset{\sim}{x}} = A\underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{f} , \quad \underset{\sim}{f} \neq \underset{\sim}{0} . \qquad (1)$$

Η πρώτη παρατήρηση είναι ότι περιοδικές λύσεις υπάρχουν μόνο όταν ο όρος εξαναγκασμού, $\underset{\sim}{f}$, είναι περιοδικός: Έχουμε το εξής αποτέλεσμα.

Λήμμα 1.

Αν η $\dot{\underset{\sim}{x}} = A\underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{f}$ έχει μια περιοδική λύση με ελάχιστη περίοδο T_0, τότε η $\underset{\sim}{f}$ είναι περιοδική με περίοδο T_0. Αν T είναι η ελάχιστη περίοδος της $\underset{\sim}{f}$, τότε έχουμε ότι $T_0 = kT$, $k \in \mathbb{Z}^+$.

Απόδειξη

Έστω $\underset{\sim}{x}$ η περιοδική λύση της $\dot{\underset{\sim}{x}} = A\underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{f}$ με ελάχιστη περίοδο T_0. Τότε η $\dot{\underset{\sim}{x}}$ είναι επίσης περιοδική με περίοδο T_0. Επειδή,

$$\underset{\sim}{f}(t) = \dot{\underset{\sim}{x}}(t) - A\underset{\sim}{x}(t), \qquad (2)$$

έπεται ότι η $\underset{\sim}{f}$ είναι περιοδική με περίοδο T_0. Αν η $\underset{\sim}{f}$ έχει ελάχιστη περίοδο T, τότε οι μόνες περίοδοι της $\underset{\sim}{f}$ που είναι θετικές είναι οι αριθμοί

$$T,\ 2T,\ \ldots,\ kT,\ \ldots . \qquad (3)$$

Άρα για κάποιον θετικό ακέραιο, έχουμε $T_0 = kT$. ☒

Βλέπουμε λοιπόν, εξαιτίας του Λήμματος, ότι οι περίοδοι του εξαναγκασμού και των λύσεων σχετίζονται. Αυτό μας οδηγεί στον εξής ορισμό: Επειδή αν T_0 είναι η περίοδος της περιοδικής λύσης και $T_0 = kT$, $k > 1$, έχουμε ότι οι συχνότητες σχετίζονται ως εξής:

$$\frac{1}{T_0} = \frac{1}{kT}, \qquad (4)$$

κάθε περιοδική λύση με $T_0 = kT$, $k > 1$, θα ονομάζεται υφαρμονική λύση τάξεως k.

Π.χ., η γενική λύση του ταλαντωτή

$$\ddot{x} + x = \cos 2t, \qquad (5)$$

είναι η συνάρτηση

$$a\cos(t+\delta) - \frac{1}{3}\cos 2t, \qquad (6)$$

Η ελάχιστη περίοδος του όρου εξαναγκασμού είναι π ($\cos 2t$ είναι ο εξαναγκασμός). Αν $a \neq 0$, η ελάχιστη περίοδος της λύσης (6) είναι 2π και άρα όλες αυτές οι λύσεις είναι υφαρμονικές τάξης 2. Αν $a = 0$, τότε η μοναδική λύση περιόδου π είναι η $-\frac{1}{3}\cos 2t$.

Πότε μιά εξίσωση έχει πάντοτε περιοδικές λύσεις;
Αν έχει, τότε γνωρίζουμε ότι η $\underset{\sim}{f}$ είναι περιοδική αλλά το αντίστροφο δεν ισχύει. Π.χ., η εξίσωση

$$\ddot{x} + x = \cos t , \qquad (7)$$

έχει γενική λύση την

$$a\cos(t+\delta) + \frac{1}{2}t\sin t , \qquad (8)$$

και άρα δεν υπάρχουν περιοδικές λύσεις, ακόμα και αν ο εξαναγκασμός ($\cos t$) είναι περιοδική συνάρτηση. Στο παράδειγμα αυτό ισχύει, εν τούτοις, ότι υπάρχει μια ελεύθερη ταλάντωση (λύση της ομογενούς) της οποίας η περίοδος ισούται με την περίοδο του όρου εξαναγκασμού (αυτή είναι η $x(t) = \cos t$, βλ. εξ. (6.44)). Θα δείξουμε ότι αν δεν ισχύει αυτό, τότε πάντοτε υπάρχουν περιοδικές λύσεις.

Το κεντρικό αποτέλεσμα είναι το εξής.

Θεώρημα 1

Έστω ότι η $\underset{\sim}{f}$ είναι συνεχής και περιοδική περιόδου T. Η εξίσωση $\dot{\underset{\sim}{x}} = A\underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{f}$ έχει μια μοναδική περιοδική λύση περιόδου T αν και μόνο αν η ομογενής εξίσωση $\dot{\underset{\sim}{x}} = A\underset{\sim}{x}$ δεν έχει μη μηδενικές περιοδικές λύσεις περιόδου T.

Πόρισμα 1

Έστω ότι η $\underset{\sim}{f}$ είναι συνεχής και περιοδική με ελάχιστη περίοδο T. Αν η ομογενής εξίσωση δεν έχει μη μηδενικές περιοδικές λύσεις περιόδου kT για κάθε θετικό ακέραιο k, τότε η $\dot{\underset{\sim}{x}} = A\underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{f}$ έχει μια μοναδική περιοδική λύση, και αυτή η περιοδική λύση έχει περίοδο T.

Για τις αποδείξεις του Θεωρήματος 1 και του Πορίσματος 1 χρειαζόμαστε τα εξής δύο λήμματα.

Λήμμα 2.

Η ομογενής εξίσωση $\dot{\underset{\sim}{x}} = A\underset{\sim}{x}$ έχει μια μη μηδενική περιοδική λύση αν και μόνο αν ο πίνακας $I - e^{AT}$ είναι ιδιόμορφος.

Απόδειξη

Η γενική λύση είναι $\underset{\sim}{x}(t) = e^{At}\underset{\sim}{c}$. Τότε υπάρχει μια περιοδική λύση περιόδου T αν και μόνο αν

$$e^{A(t+T)}\underset{\sim}{c} = e^{At}\underset{\sim}{c}, \text{ για κάθε } t$$

ή,

$$e^{At}e^{AT}\underset{\sim}{c} = e^{At}Ic, \text{ για κάθε } t,$$

ή, δηλ., αν η εξίσωση:

$$(I - e^{At})\underset{\sim}{c} = \underset{\sim}{0}$$

έχει μια μη μηδενική λύση $\underset{\sim}{c}$. Αυτό μπορεί να συμβεί αν και μόνο αν ο $I - e^{At}$ είναι ιδιόμορφος. ☒

Το σημαντικό με το λήμμα 2 δεν είναι τόσο το γεγονός ότι μας δίνει ένα κριτήριο για την ύπαρξη περιοδικών λύσεων του ομογενούς συστήματος $\dot{\underset{\sim}{x}} = A\underset{\sim}{x}$ (το οποίο ήδη γνωρίζουμε από την §7.1), αλλά το ότι μας πληροφορεί για το πότε ο $I - e^{AT}$ είναι μη ιδιόμορφος.

Λήμμα 3

Αν η $\underset{\sim}{f}$ είναι περιοδική με περίοδο T, τότε μια λύση $\underset{\sim}{x}$ της μη ομογενούς εξίσωσης $\dot{\underset{\sim}{x}} = A\underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{f}$ είναι περιοδική με περίοδο T αν και μόνο αν $\underset{\sim}{x}(0) = \underset{\sim}{x}(T)$.

Απόδειξη

($\Rightarrow$) Προφανές: Αν η $\underset{\sim}{x}(t)$ είναι περιοδική με περίοδο T, τότε έχουμε ότι $\underset{\sim}{x}(t+T) = x(t)$ $\forall t$, τότε $\underset{\sim}{x}(T) = \underset{\sim}{x}(0)$.

($\Leftarrow$) Έστω ότι $\underset{\sim}{x}(t)$ είναι μια λύση και $\underset{\sim}{x}(0) = \underset{\sim}{x}(T)$.

Θέτοντας $\underset{\sim}{y}(t) = \underset{\sim}{x}(t+T)$, βρίσκουμε

$$\dot{\underset{\sim}{y}}(t) = \frac{d}{dt}\underset{\sim}{x}(t+T) = \dot{\underset{\sim}{x}}(t+T)$$

$$= A\underset{\sim}{x}(t+T) + \underset{\sim}{f}(t+T)$$

$$= A\underset{\sim}{y}(t) + \underset{\sim}{f}(t)$$

και άρα η $\underset{\sim}{y}(t)$ είναι και αυτή λύση. Επιπλέον, επειδή

$$\underset{\sim}{y}(0) = \underset{\sim}{x}(T) = \underset{\sim}{x}(0),$$

έχουμε από το θεώρημα μοναδικότητας των λύσεων ότι

$$\underset{\sim}{x}(t+T) = \underset{\sim}{y}(t) = \underset{\sim}{x}(t), \quad \forall t. \quad \boxtimes$$

Ερχόμαστε τώρα στις αποδείξεις του θεωρήματος και του πορίσματος.

Απόδειξη του Θεωρήματος 1:

Η γενική λύση είναι

$$\underset{\sim}{x}(t) = e^{At}\underset{\sim}{c} + \int_0^t e^{A(t-s)}\underset{\sim}{f}(s)\,ds,$$

και από το Λήμμα 3, υπάρχει μια περιοδική λύση με περίοδο T αν και μόνο αν

$$\underset{\sim}{c} = e^{AT}\underset{\sim}{c} + \int_0^T e^{A(T-s)}\underset{\sim}{f}(s)\,ds$$

δηλ., αν και μόνο αν:

$$(I - e^{AT})\,\underset{\sim}{c} = \int_0^T e^{A(T-s)}\,\underset{\sim}{f}(s)\,ds,$$

Δηλ., αν και μόνο αν αυτή η εξίσωση έχει μια μοναδική λύση $\underset{\sim}{c}$. Αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν ο $I - e^{AT}$ είναι μη ιδιόμορφος, και το θεώρημα έπεται από το Λήμμα 2. ⊠

Απόδειξη του Πορίσματος 1:

Από το Λήμμα 1 γνωρίζουμε ότι οι μόνες δυνατές περιοδικές λύσεις είναι εκείνες με περίοδο $T_0 = kT$, όπου $k = 1, 2, \ldots$. Από το προηγούμενο θεώρημα έπεται ότι για κάθε $k = 1, 2, \ldots$ υπάρχει μοναδική περιοδική λύση περιόδου kT. Άρα αφού η περιοδική λύση με περίοδο T έχει επίσης περίοδο kT για οποιονδήποτε θετικό ακέραιο k, έπεται ότι αυτή είναι η μοναδική περιοδική λύση. ⊠

ΣΧΟΛΙΟ (Για το Θεώρημα 1)

Από το Θεώρημα 1 προκύπτει η ύπαρξη και μοναδικότητα μιας περιοδικής λύσης περιόδου T. Παρατηρούμε ότι η αντίστοιχη ομογενής εξίσωση της Εξ. (7) δεν έχει μη μηδενικές περιοδικές λύσεις περιόδου ίσης με π. Η μη ομογενής εξίσωση έχει μια μοναδική περιοδική λύση περιόδου π, αλλά έχει επίσης άπειρες περιοδικές λύσεις.

ΣΧΟΛΙΟ: Αν η $\underset{\sim}{f}$ είναι περιοδική, τότε η $\dot{\underline{x}} = A\underline{x} + \underline{f}$, όταν οι ιδιοτιμές του A έχουν μη μηδενικά πραγματικά μέρη, έχει μια μοναδική περιοδική λύση. Αν αυτά είναι αρνητικά τότε κάθε λύση είναι της μορφής

$$\underset{\sim}{y} + \underset{\sim}{\bar{x}}$$

όπου $\underset{\sim}{y}$ είναι η γενική λύση της ομογενούς $\dot{\underset{\sim}{x}} = A\underset{\sim}{x}$ και $\underset{\sim}{\bar{x}}$ η περιοδική λύση της μη ομογενούς. Αν τα πραγματικά μέρη είναι αρνητικά τότε

$$y(t) \to 0 \ , \ t \to \infty$$

και άρα κάθε λύση της μη ομογενούς εξίσωσης τείνει στην περιοδική λύση $\underset{\sim}{\bar{x}}$ καθώς $t \to \infty$. Η $\bar{x}$ σε αυτή την περίπτωση ονομάζεται η λύση στάσιμης κατάστασης. Όταν οι ιδιοτιμές έχουν (+) πραγματικά μέρη, τότε υπάρχουν λύσεις $\underset{\sim}{y}(t)$ της ομογενούς έτσι ώστε

$$|\underset{\sim}{y}(t)| \to \infty \ , \ \text{καθώς} \ t \to \infty .$$

για κάθε $c \in \mathbb{R}$ η

$$c\underset{\sim}{y} + \underset{\sim}{\bar{x}}$$

είναι μια λύση της μη ομογενούς $\dot{\underset{\sim}{x}} = A\underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{f}$, έπεται ότι αυθαίρετα κοντά στην περιοδική λύση υπάρχουν λύσεις που δεν παραμένουν κοντά ⇒ η περιοδική λύση είναι ασταθής.