ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Σημειώσεις – Διδιάστατα γραμμικά συστήματα (Μέρος Δ)

Κοφινάς Γιώργος

Τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών και Επικοινωνιακών Συστημάτων

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Η μη-ομογενής εξίσωση $\ddot{x} + b\dot{x} + cx = f$:

Ο ταλαντωτής με απόσβεση και εξαναγκασμό

(2)

Μελετούμε τώρα μια σημαντική ειδική περίπτωση του συστήματος της παραγράφου 7, όπου η γενική του λύση έχει ιδιαίτερα απλή μορφή. Περιγράφεται από την εξίσωση:

$$\ddot{x} + b\dot{x} + cx = f \,, \qquad (1)$$

η οποία είναι <u>ισοδύναμη</u> με το σύστημα,

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -cx - by + f. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Η f είναι συνεχής στο $I \subset \mathbb{R}$. Θέτουμε:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c & -b \end{pmatrix}, \quad \underline{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}.$$

Γνωρίζουμε πως να βρίσουμε τις πρωταρχικές λύσεις,

$$\underline{p}^1 = \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix}, \quad \underline{p}_2 = \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix},$$

του ομογενούς συστήματος

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -cx - by. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Η συνάρτηση $p_{11}(t)$ είναι λύση της ομογενούς εξίσωσης, $\left(\begin{aligned} p_{21} &= \dot{p}_{11} \text{ και} \\ p_{22} &= \dot{p}_{12} \end{aligned}\right)$

$$\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0, \qquad (4)$$

με αρχικές συνθήκες

$$x(0) = 1 \,, \quad \dot{x}(0) = 0 \,,$$

ενώ η $p_{12}(t)$ ικανοποιεί την (4) με αρχικές συνθήκες

$$x(0) = 0 \,, \quad \dot{x}(0) = 1.$$

Άρα γνωρίζουμε την πρωταρχική λύση-πίνακα:

$$P(t) = \left(p_{ij}(t)\right) = e^{At} = \begin{pmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) \end{pmatrix}$$

και έτσι την γενική λύση:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{At}\underline{c} + \int_0^t e^{A(t-s)} \underline{f}(s)\, ds. \qquad (5)$$

Στην περίπτωση που εξετάζουμε έχουμε ότι:

$$e^{A(t-s)}\underline{f}(s) = \begin{pmatrix} p_{11}(t-s) & p_{12}(t-s) \\ p_{21}(t-s) & p_{22}(t-s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f(s) \end{pmatrix},$$

και άρα η γενική λύση της (1) είναι

$$x(t) = c_1 p_{11}(t) + c_2 p_{12}(t) + \int_0^t p_{12}(t-s) f(s)\, ds \qquad (6)$$

Θέτοντας $v(t) = p_{11}(t)$ και $w(t) = p_{12}(t)$, έχουμε:

<u>Θεώρημα</u>

Έστω v, w οι λύσεις της $\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$ με αρχικές συνθήκες $v(0) = 1$, $\dot{v}(0) = 0$, $w(0) = 0$, $\dot{w}(0) = 1$. Τότε η γενική λύση της $\ddot{x} + b\dot{x} + cx = f$ είναι:

$$\boxed{x(t) = c_1 v(t) + c_2 w(t) + \int_0^t w(t-s) f(s)\, ds. \quad \boxtimes \qquad (7)}$$

Το $\int_0^t w(t-s) f(s)\, ds$ είναι η ειδική λύση της $\ddot{x} + b\dot{x} + cx = f$ με αρχικές συνθήκες $x(0) = \dot{x}(0) = 0$. Άρα η γενική λύση του ταλαντωτή με απόσβεση και εξαναγκασμό είναι η γενική λύση του ταλαντωτή με απόσβεση (ομογενής εξίσωση) σύν μία ειδική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης.

<u>Παράδειγμα</u> Λύσατε: $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = e^t$, $x(0) = \dot{x}(0) = 0$.

<u>Λύση 1η</u>: (Πρέπει να βρίσκουμε την γεν. λύση της <u>ομ.</u> για να βρίσκουμε το $w(t)$)

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι,

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0,$$

και η -1 είναι πολλαπλή ρίζα. Άρα η γενική λύση της ομογενούς είναι $(c_1 + tc_2)e^{-t}$, και άρα η $p_{12}(t) = w(t) = te^{-t}$.

Άρα η επιθυμητή λύση είναι η ειδική λύση:

$$x(t) = \int_0^t (t-s)e^{-(t-s)} e^s\, ds = te^{-t}\int_0^t e^{2s}\, ds -$$

(υπολογισμός του $\int^t w(t-s) f(s)\, ds$)

$$-e^{-t}\int_0^t se^{2s}ds = \frac{1}{4}e^t - \frac{1}{4}(1+2t)e^{-t}. \quad \boxtimes$$

<u>Λύση 2η</u>

Κοιτάμε γιά μία ειδική λύση της μορφή ce^t. Αντικαθιστώντας στην εξίσωση βρίσκουμε

$$c+2c+c=1, \quad \acute{\eta} \quad c=\frac{1}{4}$$

Άρα η γενική λύση είναι

$$x(t) = (c_1+c_2t)e^{-t} + \frac{1}{4}e^t.$$

Οι αρχικές συνθήκες είναι

$$x(0) = c_1 + \frac{1}{4} = 0$$
$$\dot{x}(0) = -c_1 + c_2 + \frac{1}{4} = 0.$$

Άρα $c_1 = -\frac{1}{4}$, $c_2 = -\frac{1}{2}$ και η επιθυμητή λύση είναι

$$x(t) = -\frac{1}{4}(1+2t)e^{-t} + \frac{1}{4}e^t. \quad \boxtimes$$

<u>Παράδειγμα</u> Λύσατε: $\ddot{x}+x=f$, $x(0)=\dot{x}(0)=0$, όπου

$$f(t) = \begin{cases} 0 & , \ t<0 \\ t & , \ 0\le t<\pi \\ 2\pi-t & , \ \pi\le t<2\pi \\ 0 & \ 2\pi\le t \end{cases}$$

<u>Λύση</u>

Η λύση w της ομογενούς εξίσωσης που ικανοποιεί $w(0)=0$, $\dot{w}(0)=1$ είναι: $(* \leftarrow)$

$$w(t) = \sin t.$$

Άρα, επειδή η λύση που ψάχνουμε είναι μόνο ο τελευταίος όρος της (7), έχουμε:

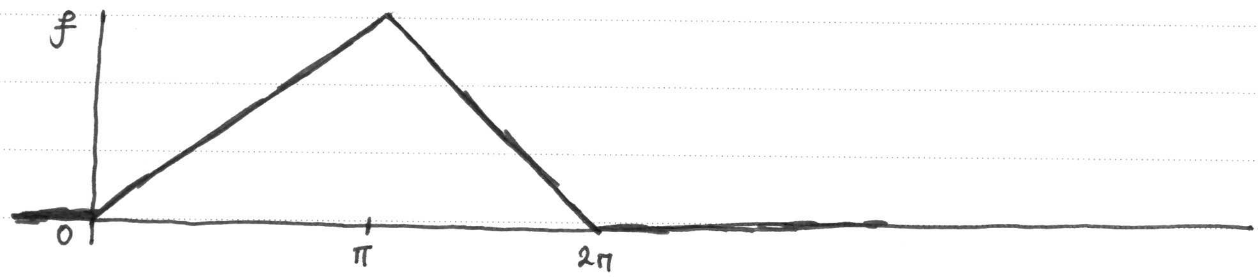
$$x(t) = \int_0^t f(s)\sin(t-s)\,ds,$$

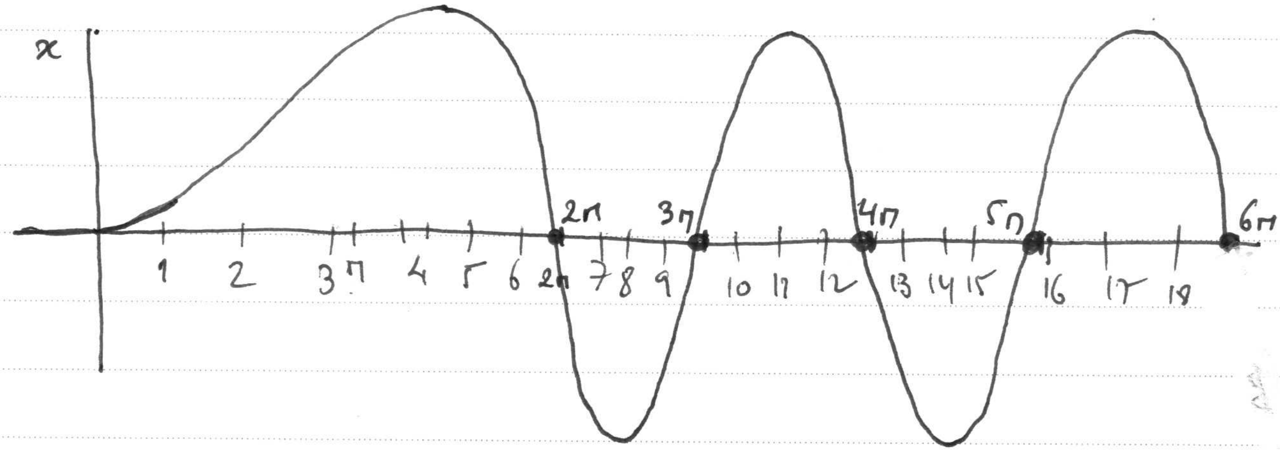
και άρα

$$x(t)=\begin{cases} 0, & t<0, \\ \int_0^t s\sin(t-s)\,ds, & 0\le t<\pi, \\ \int_0^\pi s\sin(t-s)\,ds+\int_\pi^t (2\pi-s)\sin(t-s)\,ds, & \pi\le t<2\pi, \\ \int_0^\pi s\sin(t-s)\,ds+\int_\pi^{2\pi} (2\pi-s)\sin(t-s)\,ds, & 2\pi\le t. \end{cases}$$

$$\overset{(*)}{=}\begin{cases} 0, & t<0 \\ t-\sin t, & 0\le t<\pi \\ 2\pi-t-3\sin t, & \pi\le t<2\pi \\ -4\sin t, & 2\pi\le t \end{cases}$$

Η f είναι μία εξωτερική δύναμη ή μία τάση κ.τ.λ. που εφαρμόζεται στο σύστημα και ονομάζεται "η είσοδος". Στον χρόνο $t=0$ το σύστημα ηρεμεί στην θέση ισορροπίας του. Η λύση x είναι "η έξοδος" που αντιστοιχεί στην είσοδο f:





$\rightarrow \circledast$

$\int s \sin(t-s)\,ds$

$u = t-s$, $s = t-u$, $ds = -du$

$\int s \sin(t-s)\,ds = \int (t-u) \sin u\,(-du) = \int (u-t) \sin u\,du =$

$= \int u \sin u\,du - t\int \sin u\,du = \circledast$

$\int u \sin u\,du = \int u(-\cos u)'\,du = -(u\cos u) + \int \cos u\,du =$

$= -u\cos u + \sin u$

$\int \sin u\,du = -\cos u$

Άρα

$\circledast = -u\cos u + \sin u + t\cos u =$

$= \cos u\,(t-u) - \sin u = s\cos(t-s) + \sin(t-s)$

$\int_0^t \cdots = \left[s\cos(t-s) + \sin(t-s)\right]_0^t = t - \sin t$, κλπ.

Μαθηματική Μοντελοποίηση

Φυλλάδιο Ασκήσεων 7

1. Λύσατε:

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = t^2 - t \quad , \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0$$

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + x = \cos t \quad , \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0$$

$$2\ddot{x} + 7\dot{x} + 3x = 5 - e^t \quad , \quad x(0) = 0 \ , \ \dot{x}(0) = 1$$

$$\ddot{x} + 4\dot{x} = e^t \quad , \quad x(0) = x_0 \ , \ \dot{x}(0) = \dot{x}_0$$

$$\ddot{x} + c^2 x = e^t \quad , \quad x(0) = x_0 \ , \ \dot{x}(0) = \dot{x}_0$$

2. Έστω ότι οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς σε ένα διάστημα I και ότι $0 \in I$. Η συνάρτηση $f * g$ που ορίζεται ως

$$(f*g)(t) = \int_0^t f(t-s)\,g(s)\,ds$$

ονομάζεται <u>η συνέλιξη</u> των f και g. Αποδείξτε ότι $f*g = g*f$ δηλαδή ότι

$$\int_0^t f(t-s)\,g(s)\,ds = \int_0^t f(s)\,g(t-s)\,ds .$$

<u>Σημείωση</u>: Αυτό το αποτέλεσμα χρησιμοποιείται ενίοτε γιά να απλουστευθεί ο υπολογισμός του $\int_0^t w(t-s)\,f(s)\,ds$.

3. Λύσατε:

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = f \quad , \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0$$

όπου

$$f(t) = \begin{cases} 0 , & t<0 \\ 1 , & 0 \le t < 1 \\ 0 , & t \ge 1 \end{cases} \quad \text{και} \quad f(t) = \begin{cases} 0 , & t<0 \\ t , & 0 \le t < 1 \\ 0 , & t \ge 1 \end{cases} .$$

ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΗΣ

ΥΠΕΡΘΕΣΗΣ

Η αρχή της υπέρθεσης είναι χαρακτηριστική ιδιότητα των γραμμικών συστημάτων, ενώ η απουσία της στα μη-γραμμικά συστήματα περιπλέκει την μελέτη τους κάνοντας τα να συμπεριφέρονται με τελείως διαφορετικό τρόπο από τα γραμμικά. Η μοντελοποίηση μη-γραμμικών δυναμικών συστημάτων με γραμμικά δυναμικά συστήματα αποτελεί προσέγγιση που δεν είναι επαρκής για την πλήρη περιγραφή τους.

Θα εργαστούμε με το <u>γενικό</u>, μη-ομογενές γραμμικό σύστημα

$$\dot{\underset{\sim}{x}}(t) = A(t)\,\underset{\sim}{x}(t) + \underset{\sim}{f}(t), \qquad (1)$$

όπου η συνάρτηση-πίνακας $A(t)$ και η διανυσματική συνάρτηση $\underset{\sim}{f}(t)$ είναι συνεχείς στο $(-\infty,\infty)$.
Θυμίζουμε την γραμμικότητα του $A(t)\,\underset{\sim}{x}(t)$:

$$A(t)\left[c_1\underset{\sim}{x}^1(t) + c_2\underset{\sim}{x}^2(t)\right] = c_1 A(t)\,\underset{\sim}{x}^1(t) + c_2 A(t)\,\underset{\sim}{x}^2(t).$$

Η <u>αρχή της υπέρθεσης</u> περιγράφεται στο ακόλουθο θεώρημα και είναι άμεση συνέπεια της γραμμικής φύσης του $A(t)$ (t).

<u>Θεώρημα</u> (Αρχή της υπέρθεσης)

Αν $\underset{\sim}{y}^1$ είναι μια λύση του συστήματος

$$\dot{\underset{\sim}{x}}(t) = A(t)\,\underset{\sim}{x}(t) + \underset{\sim}{f}^1(t),$$

και $\underset{\sim}{y}^2$ είναι μια λύση του συστήματος

$$\dot{\underset{\sim}{x}}(t) = A(t)\,\underset{\sim}{x}(t) + \underset{\sim}{f}^2(t),$$

τότε η $\underset{\sim}{y} = c_1\underset{\sim}{y}^1 + c_2\underset{\sim}{y}^2$ είναι λύση του συστήματος:

$$\dot{\underset{\sim}{x}}(t) = A(t)\,\underset{\sim}{x}(t) + c_1\underset{\sim}{f}^1(t) + c_2\underset{\sim}{f}^2(t).$$

Απόδειξη

Μέ άμεσο υπολογισμό:

$$\dot{\underset{\sim}{y}} = c_1 \dot{\underset{\sim}{y}}^1 + c_2 \dot{\underset{\sim}{y}}^2 = c_1 A \underset{\sim}{y}^1 + c_1 \underset{\sim}{f}^1 + c_2 A \underset{\sim}{y}^2 + c_2 \underset{\sim}{f}^2 =$$

$$= A (c_1 \underset{\sim}{y}^1 + c_2 \underset{\sim}{y}^2) + c_1 \underset{\sim}{f}^1 + c_2 \underset{\sim}{f}^2$$

$$= A \underset{\sim}{y} + c_1 \underset{\sim}{f}^1 + c_2 \underset{\sim}{f}^2 . \quad \boxtimes$$

Όταν ο A είναι σταθερός πίνακας και η $\underset{\sim}{f}(t)$ συνεχής στο διάστημα $(-\infty, \infty)$, έχουμε δείξει ότι το σύστημα (1) έχει μοναδική λύση στο $(-\infty,\infty)$ η οποία ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $\underset{\sim}{x}(t_0) = \underset{\sim}{x}_0$ με $t_0 \in (-\infty, \infty)$. Δηλαδή κάθε λύση του (1) ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$. Θα δεχθούμε χωρίς απόδειξη ότι κάθε λύση του (1) ορίζεται σε όλο το διάστημα $(-\infty, \infty)$ όταν ο A είναι συνεχής και η $\underset{\sim}{f}$ συνεχής. Σε αυτήν την περίπτωση παρατηρούμε ότι οι όποιες "ανωμαλίες" στις λύσεις του (1) είναι ανωμαλίες στους συντελεστές $A(t)$, $\underset{\sim}{f}(t)$. Αυτή είναι μια χαρακτηριστική ιδιότητα των γραμμικών συστημάτων των οποίων η γενική λύση είναι, όπως έχουμε ήδη δείξει, της μορφής:

$$x(t) = e^{At}\underset{\sim}{c} + \int_0^t e^{A(t-s)} \underset{\sim}{f}(s)\, ds .$$

(Στα μη-γραμμικά συστήματα η κατάσταση είναι πολύ πιο περίπλοκη και ενδιαφέρουσα.)

Πόρισμα

Κάθε γραμμικός συνδυασμός λύσεων της ομογενούς εξίσωσης

$$\dot{\underset{\sim}{x}}(t) = A(t)\,\underset{\sim}{x}(t)$$

είναι επίσης λύση.

Απόδειξη

Θέτοντας $\underset{\sim}{f}^1 = \underset{\sim}{f}^2 = \underset{\sim}{0}$ στο θεώρημα υπέρθεσης. $\boxtimes$

Πόρισμα

Η γενική λύση της μη-ομογενούς εξίσωσης

$$\dot{\underset{\sim}{x}}(t) = A(t)\,\underset{\sim}{x}(t) + \underset{\sim}{f}(t),$$

δίνεται από την γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης συν οποιαδήποτε ειδική λύση της μη-ομογενούς.

Απόδειξη

Έστω $\underset{\sim}{y}$ μια ειδική λύση της $\dot{\underset{\sim}{x}} = A\underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{f}$ και έστω $\underset{\sim}{x}$ μια οποιαδήποτε άλλη λύση. Τότε από το θεώρημα υπέρθεσης η συνάρτηση $\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{y}$ είναι μια λύση της ομογενούς εξίσωσης. Δηλ.,

$$\underset{\sim}{x}(t) - \underset{\sim}{y}(t) = P(t)\,\underset{\sim}{c}$$

και άρα

$$\underset{\sim}{x}(t) = P(t)\,\underset{\sim}{c} + \underset{\sim}{y}.$$

Από την αρχή υπέρθεσης, κάθε συνάρτηση της παραπάνω μορφής είναι μια λύση της μη-ομογενούς εξίσωσης, και άρα αυτή είναι και η γενική λύση. $\boxtimes$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι το σύστημα ξεκινά την εξέλιξή του από την θέση ηρεμίας του, $\underset{\sim}{x}(0)=\underset{\sim}{0}$. Τότε το σύστημα (1) έχει μια μοναδική λύση που ικανοποιεί αυτήν την αρχική συνθήκη. Ας δούμε το σύστημα (1) υπό την ακόλουθη οπτική γωνία: Εμπνευσμένοι από την αρχή της υπέρθεσης, ας θεωρήσουμε ως δεδομένη συνάρτηση την $A(t)$ και ας αντιστοιχίσουμε με κάθε συνεχή $\underset{\sim}{f}$ στο $(-\infty,\infty)$ την λύση $\underset{\sim}{y}$. Συμβολίζουμε αυτή την αντιστοιχία ως εξής:

$$\underset{\sim}{y} = L(\underset{\sim}{f}), \qquad (2)$$

όπου ο μετασχηματισμός L είναι ορισμένος στον χώρο όλων των συνεχών συναρτήσεων $\underset{\sim}{f}$ στο $(-\infty,\infty)$.

Δηλαδή αντιστοιχούμε

$$\left.\begin{matrix} \underset{\sim}{f} \xrightarrow{\;L\;} \underset{\sim}{y} \\ \text{"είσοδος"} \qquad \text{"έξοδος" ή "απόκριση"} \end{matrix}\right\} \quad \underset{\sim}{f} \longrightarrow \boxed{L} \longrightarrow L(\underset{\sim}{f})$$

με τις ονομασίες όπως φαίνονται. Η βασικότερη ιδιότητα του L είναι η ακόλουθη.

<u>Πρόταση</u> Ο L είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός,

$$L(c_1\underset{\sim}{f}^1 + c_2\underset{\sim}{f}^2) = c_1 L(\underset{\sim}{f}^1) + c_2 L(\underset{\sim}{f}^2). \qquad (3)$$

<u>Απόδειξη</u>

Απλό, μέσω της αρχής της υπέρθεσης: Οι συναρτήσεις $\underset{\sim}{y}^1 = L(\underset{\sim}{f}^1)$ και $\underset{\sim}{y}^2 = L(\underset{\sim}{f}^2)$ είναι λύσεις των $\dot{\underset{\sim}{x}} = A\underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{f}^1$, $\dot{\underset{\sim}{x}} = A\underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{f}^2$, που ικανοποιούν: $\underset{\sim}{x}(0)=\underset{\sim}{0}$. Άρα από την αρχή της υπέρθεσης έχουμε ότι η συνάρτηση $c_1\underset{\sim}{y}^1 + c_2\underset{\sim}{y}^2$ είναι μια λύση της $\dot{\underset{\sim}{x}} = A\underset{\sim}{x} + c_1\underset{\sim}{f}^1 + c_2\underset{\sim}{f}^2$, και ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $\underset{\sim}{x}(0)=\underset{\sim}{0}$. Άρα έχουμε:

$$L(c_1\underset{\sim}{f}^1+c_2\underset{\sim}{f}^2) = c_1\underset{\sim}{y}^1 + c_2\underset{\sim}{y}^2 = c_1 L(\underset{\sim}{f}^1) + c_2 L(\underset{\sim}{f}^2). \boxtimes$$

Μπορούμε, χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό L, να διατυπώσουμε την αρχή της υπέρθεσης μέσω των εννοιών 'είσοδος' και 'έξοδος':

"Αν προστεθούν οι είσοδοι, προστίθενται και οι έξοδοι: $L(\underset{\sim}{f}^1+\underset{\sim}{f}^2) = L(\underset{\sim}{f}^1)+L(\underset{\sim}{f}^2)$, και επιπλέον, αν η είσοδος πολ/στεί επί μια σταθερά, τότε και η έξοδος πολ/ζεται επί την ίδια σταθερά: $L(c\underset{\sim}{f}) = c\,L(\underset{\sim}{f})$." Σχηματικά έχουμε:

$$\underset{\sim}{f}^1+\underset{\sim}{f}^2 \longrightarrow \boxed{\;L\;} \longrightarrow L(\underset{\sim}{f}^1)+L(\underset{\sim}{f}^2)$$

$$c\underset{\sim}{f} \longrightarrow \boxed{\;L\;} \longrightarrow c\,L(\underset{\sim}{f}).$$

Για να διατυπώσουμε επιπλέον ιδιότητες της "απόκρισης" $\underset{\sim}{y}(t)$ του συστήματος (1) για σταθερό ή χρονο-εξαρτημένο πίνακα $A(t)$, χρειαζόμαστε την ακριβή μορφή της $\underset{\sim}{y}(t)$ μέσω της εισόδου $\underset{\sim}{f}(t)$. Αυτό δεν είναι δύσκολο να γίνει. Η λύση της $\dot{\underset{\sim}{x}}=A\underset{\sim}{x}+\underset{\sim}{f}$ που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $\underset{\sim}{x}(0)=\underset{\sim}{c}$ είναι:

$$x(t) = P(t)\underset{\sim}{c} + \int_0^t P(t)\,P^{-1}(s)\,\underset{\sim}{f}(s)\,ds \qquad (4).$$

<u>Απόδειξη της (4)</u>

η πρωταρχική λύση-πίνακας της εξίσωσης

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t).$$

Θα χρειαστούμε την παράγωγο του $P^{-1}(t)$. Έχουμε:

$$(P^{-1})^{\bullet} = -P^{-1}P^{-1}\dot{P} = -P^{-1}\underbrace{P^{-1}A_1P}_{} =$$

$$= -P^{-1}\underbrace{AP_1^{-1}}_{}P = -P^{-1}AI = -P^{-1}A.$$

Τότε ο $P^{-1}(t)$ είναι ένας ολοκληρωτικός παράγοντας της εξίσωσης $\dot{\underset{\sim}{x}} = A\underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{f}$:

$$(P^{-1}\underset{\sim}{x})^{\bullet} = (P^{-1})^{\bullet}\underset{\sim}{x} + P^{-1}\dot{\underset{\sim}{x}} =$$

$$= -P^{-1}A\underset{\sim}{x} + P^{-1}\dot{\underset{\sim}{x}} = P^{-1}(\dot{\underset{\sim}{x}} - A\underset{\sim}{x}),$$

και επειδή

$$\dot{\underset{\sim}{x}} - A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{f},$$

έχουμε ότι:

$$(P^{-1}\underset{\sim}{x})^{\bullet} = P^{-1}\underset{\sim}{f}. \qquad (5)$$

Σημειώνουμε ότι επειδή $P(0) = I$, έπεται ότι $P^{-1}(0) = I^{-1} = I$, και άρα ολοκληρώνοντας από 0 έως t την εξ. (5) βρίσκουμε

$$P^{-1}(t)\underset{\sim}{x}(t) - \underset{\sim}{x}(0) = \int_0^t P^{-1}(s)\underset{\sim}{f}(s)\,ds. \qquad (6)$$

Άρα η λύση που περνά από την αρχική συνθήκη $\underset{\sim}{x}(0) = \underset{\sim}{c}$ είναι η:

$$\underset{\sim}{x}(t) = P(t)\underset{\sim}{c} + P(t)\int_0^t P^{-1}(s)\underset{\sim}{f}(s)\,ds. \qquad (7)$$

⊠

Επειδή, περαιτέρω, η απόκριση $\underset{\sim}{y}(t)$ είναι εξ' ορισμού η λύση που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $\underset{\sim}{x}(0) = \underset{\sim}{0}$, έπεται από την (7) ότι:

$$\underset{\sim}{y}(t) = \int_0^t P(t)P^{-1}(s)\underset{\sim}{f}(s)\,ds, \qquad (8)$$

και στην ειδική περίπτωση όπου ο A είναι σταθερός πίνακας, επειδή $P(t) = e^{At}$, η (8) γίνεται:

$$\underset{\sim}{y}(t) = \int_0^t e^{A(t-s)} \underset{\sim}{f}(s)\, ds . \qquad (9)$$

Μια σημαντική ιδιότητα που προκύπτει άμεσα από την εξ. (9) είναι ότι επειδή $s \in [0,t]$, "η έξοδος $y(t)$ εξαρτάται μόνο από προηγούμενες τιμές της εισόδου $\underset{\sim}{f}(s)$".
Δηλ., με άλλα λόγια το σύστημα δεν μπορεί να προκαταλάβει ή να προβλέψει την είσοδο. Το σύστημα ξεκινά να εξελίσσεται την στιγμή $t=0$, εκείνη δηλ. την στιγμή που εφαρμόζεται (ασκείται) η είσοδος, έτσι ώστε $\underset{\sim}{f}(t) = 0$ για $t<0$. Άρα $\underset{\sim}{y}(t) = 0$, $t<0$, και για $t>0$ προκύπτει το συμπέρασμα που είπαμε.

Μια άλλη ιδιότητα, η οποία όπως θα δούμε μας δείχνει την διαφορά μεταξύ σταθερών και μη-σταθερών συντελεστών, είναι η εξής.

<u>Πρόταση:</u> Στο σύστημα $\dot{\underset{\sim}{x}} = A\underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{f}(t)$, A: σταθερός πίνακας, αν $y = L(\underset{\sim}{f})$ και $y^* = L(\underset{\sim}{f}^*)$, όπου $\underset{\sim}{f}^*(t) = \underset{\sim}{f}(t-\delta)$ και $f(\tilde{t}) = 0$ για $t<0$, τότε $\underset{\sim}{y}^*(t) = \underset{\sim}{y}(t-\delta)$.

<u>Απόδειξη.</u>

Αλλάζοντας μεταβλητές στο ολοκλήρωμα (9), έχουμε:

$$\underset{\sim}{y}^*(t) = \int_0^t e^{A(t-s)} \underset{\sim}{f}(s-\delta)\, ds =$$

$$= \int_\delta^t e^{A(t-s)} \underset{\sim}{f}(s-\delta)\, ds =$$

$$= \int_\delta^t e^{A(t-\delta+\delta-s)} \underset{\sim}{f}(s-\delta)\, ds = \quad , \quad u = s-\delta,$$

$$= \int_{\delta-\delta}^{t-\delta} e^{A(t-\delta-u)} \underset{\sim}{f}(u)\, du =$$

$$= \int_0^{t} e^{A(t-\delta-u)} \underset{\sim}{f}(u)\, du = y^*(t-\delta).$$

Ορολογία. Το σύστημα

$$\dot{\underset{\sim}{x}} = A\underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{f}(t)$$

ονομάζεται στάσιμο αν A: σταθερός πίνακας. $\boxtimes$

Η παραπάνω Πρόταση μάς λέει ότι σε ένα στάσιμο σύστημα αν η είσοδος μετατοπιστεί χρονικά κατά χρόνο δ, τότε η έξοδος μετατοπίζεται χρονικά κατά την ίδια χρονική διάρκεια. Έτσι, σε ένα στάσιμο σύστημα, ανεξάρτητα τού πότε εφαρμόζεται η είσοδος, η έξοδος θα παραμένει πάντοτε η ίδια. Αυτή είναι και η διαφορά μεταξύ στάσιμων και μη-στάσιμων συστημάτων ($A = A(t)$), στα τελευταία το ίδιο το σύστημα αλλάζει με την πάροδο του χρόνου. Τα στάσιμα συστήματα παραμένουν πάντοτε τα ίδια. Μπορούμε να εκφράσουμε αυτήν την διαφορά στάσιμων και μη-στάσιμων συστημάτων και μέσω της πρωταρχικής λύσης-πίνακα P.

Πρόταση. Έστω ότι ο $A(t)$ είναι ένας πίνακας συνεχής $\forall t$. Τότε ο A είναι ένας σταθερός πίνακας αν και μόνο αν ισχύει: $P(t)\,P^{-1}(s) = P(t-s)$, $\forall t, s$. (10)

(Σημείωση.
Η εξ. (10) δεν ισχύει για μη-σταθερούς πίνακες A. $\boxtimes$)

Απόδειξη της Πρότασης.

($\Rightarrow$) Θέτοντας $P(t) = e^{At}$, έπεται άμεσα το αποτέλεσμα.

($\Leftarrow$)

Ερχόμαστε τέλος στην μελέτη της $2^{ης}$ τάξης, γραμμικής ΔΕ

$$\ddot{x}(t) + b(t)\,\dot{x}(t) + c(t)\,x(t) = f(t), \qquad (11)$$

με μεταβαλλτούς συντελεστές b, c, f. Αυτή είναι ειδική περίπτωση του συστήματος (1). Ένα ισοδύναμο σύστημα της εξ. (11), είναι το

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}(t) &= y(t) \\ \dot{y}(t) &= -c(t)\,x(t) - b(t)\,y(t) + f(t). \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Εδώ έχουμε:

$$\underset{\sim}{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c & -b \end{pmatrix}, \quad \underset{\sim}{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix},$$

και η λύση της εξ. (11) είναι η πρώτη συνιστώσα του $\underset{\sim}{x}$. Το θεώρημα υπέρθεσης μάς λέει ότι αν η x_i είναι λύση της $\ddot{x}(t) + b(t)\dot{x}(t) + c(t)x(t) = f_i(t)$, τότε η $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i$ είναι λύση της —— " —— $= \sum_{i=1}^{n} c_i f_i$.

Για σταθερά b και c, η λύση που αντιστοιχεί στην (9), δηλαδή η έξοδος για είσοδο f είναι:

$$x(t) = \int_0^t w(t-s)\, f(s)\, ds, \qquad (13)$$

όπου w είναι η λύση της ομογενούς εξίσωσης

$$\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$$

που ικανοποιεί $w(0) = 0$, $\dot{w}(0) = 1$, κατά τα γνωστά.

Παράδειγμα

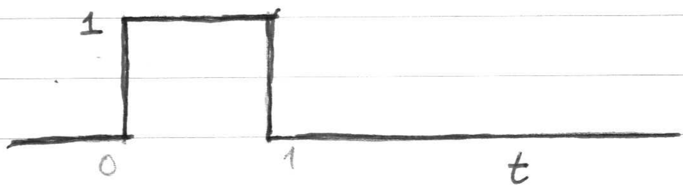
Καθορίστε την απόκριση (έξοδο) του συστήματος

$$\ddot{x} + 6\dot{x} + 5x = f,$$

στον τετραγωνικό παλμό

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t<0 \\ 1, & 0 \le t < 1 \\ 0, & t \geq 1. \end{cases}$$

Λυση



Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι η:

$$\lambda^2 + 6\lambda + 5 = 0,$$

με ιδιοτιμές $\lambda = -1, -5$.