ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Σημειώσεις – Διδιάστατα γραμμικά συστήματα (Μέρος Α)

Κοφινάς Γιώργος

Τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών και Επικοινωνιακών Συστημάτων

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Στοιχεία θεωρίας πινάκων

Ένας **$(m \times n)$ πίνακας** A πραγματικών ή μιγαδικών αριθμών είναι ένα αντικείμενο το οποίο περιγράφεται γράφοντας το ορθογώνιο σύνολο

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Μπορούμε να θεωρήσουμε τον A ως μια συνάρτηση
$$A : \{(i,j) : i,j \in \mathbb{Z}, 1 \le i \le m, 1 \le j \le n\} \longrightarrow \mathbb{R} :$$

$$(i,j) \longmapsto A(i,j) \equiv a_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Κάθε στοιχείο του ορθογώνιου συνόλου συμβολίζεται με a_{ij} και ονομάζεται ένα **στοιχείο** του πίνακα A.
Ένας $m \times n$ πίνακας έχει m γραμμές και n στήλες.
Το a_{ij} είναι το στοιχείο της i γραμμής και της j στήλης.

Ισότητα Επειδή δύο συναρτήσεις είναι ίσες αν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού και τον ίδιο τύπο, έπεται ότι **δύο πίνακες A, B είναι ίσοι** αν έχουν το ίδιο πλήθος γραμμών και στηλών και τα αντίστοιχα στοιχεία είναι ίσα, $a_{ij} = b_{ij}$ $\left(A(i,j) = B(i,j)\right)$.

Πρόσθεση Αν A, B είναι $(m \times n)$ πίνακες, τότε το άθροισμα $A+B$ είναι ένας $(m \times n)$ πίνακας όπου
$$(A+B)(i,j) = A(i,j) + B(i,j).$$
Δηλ., δύο πίνακες προστίθενται μόνο αν έχουν το ίδιο πλήθος γραμμών και το ίδιο πλήθος στηλών.

και κάθε στοιχείο του αθροίσματος βρίσκεται προσθέτοντας τα αντίστοιχα στοιχεία των A και B:

$$A+B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{n1}+b_{n1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

<u>Πολ/σμος χ r</u> Ο πολ/σμος ενός $(m \times n)$ πίνακα A επί τον αριθμό r γίνεται ως εξής:

$$rA = \begin{pmatrix} ra_{11} & ra_{12} & \cdots & ra_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ra_{mn} & ra_{m2} & & ra_{mn} \end{pmatrix}.$$

<u>Πρόταση</u>

Με τις παραπάνω πράξεις το σύνολο όλων των $(m \times n)$ πινάκων (πραγματικών ή μιγαδικών στοιχείων) είναι ένας (πραγματικός ή μιγαδικός) γραμμικός χώρος ως προς το σώμα $\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ αντίστοιχα.

↳ Μηδενικός πίνακας : όλα τα στοιχεία $=0$

↳ $-A$ = ο πίνακας με στοιχεία $-a_{ij}$.

Ένας πίνακας $(1 \times n)$ είναι ένα διάνυσμα-γραμμή, ενώ ένας $(n \times 1)$ πίνακας είναι ένα διάνυσμα-στήλη. Έτσι ο χώρος των $(n \times 1)$ ή $(1 \times n)$ πινάκων είναι ισόμορφος με τον $\mathbb{R}^n$, ενώ ο χώρος όλων των $(m \times n)$ πινάκων είναι ισόμορφος με τον $\mathbb{R}^{mn}$. (Ένας 1×1 πίνακας ταυτοποιείται με τον πραγματικό (ή μιγαδικό) αριθμό a_{11}.)

Πολ/σμος πινάκων

Αν $A: (m \times n)$ πίνακας και $B: (n \times p)$ πίνακας, το γινόμενο των A και B είναι ένας $(m \times p)$ πίνακας, C, τέτοιος ώστε

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj},$$

όπου: $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, p$.

Το γινόμενο ορίζεται μόνο όταν το πλήθος των στηλών του A ισούται με το πλήθος των γραμμών του B. Αν $\underset{\sim}{a}_i$ είναι η i-οστή γραμμή του A και $\underset{\sim}{b}^j$ η j-οστή στήλη του B, τότε τα $\underset{\sim}{a}_i$, $\underset{\sim}{b}^j$ είναι και τα δύο διανύσματα του $\mathbb{R}^n$ (ή $\mathbb{C}^n$) και

$$c_{ij} = \underset{\sim}{a}_i \cdot \underset{\sim}{b}^j .$$

Έτσι έχουμε:

$$AB = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{a}_1 \cdot \underset{\sim}{b}^1 & \underset{\sim}{a}_1 \cdot \underset{\sim}{b}^2 & \cdots & \underset{\sim}{a}_1 \cdot \underset{\sim}{b}^p \\ \underset{\sim}{a}_2 \cdot \underset{\sim}{b}^1 & \underset{\sim}{a}_2 \cdot \underset{\sim}{b}^2 & \cdots & \underset{\sim}{a}_2 \cdot \underset{\sim}{b}^p \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \underset{\sim}{a}_m \cdot \underset{\sim}{b}^1 & \underset{\sim}{a}_m \cdot \underset{\sim}{b}^2 & \cdots & \underset{\sim}{a}_m \cdot \underset{\sim}{b}^p \end{pmatrix}$$

Παραδείγματος χάριν,

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 12 \\ 3 & -1 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}.$$

<u>Πρόταση 1</u> (Προσεταιριστική ιδιότητα (·))
Αν A $(m \times n)$ πίνακας, B $(n \times p)$ πίνακας και C ένας $(p \times q)$ πίνακας, τότε $A(BC) = (AB)C$. (Έτσι δικαιολογείται να γράφουμε ABC για το γινόμενο τους).

<u>Πρόταση 2</u> (Επιμεριστική ιδιότητα)
A $(m \times n)$ πίνακας B, C $(n \times p)$ πίνακες. Τότε

$$A(B+C) = AB + AC.$$

Ομοίως ισχύει

$$(A+B)C = AC + BC.$$

Άρα μέσω των δύο επιμεριστικών ιδιοτήτων:

$$(A+B)(C+D) = AC + BC + AD + BD.$$

<u>Απόδειξη της Πρότασης 1</u>
Οι πίνακες $A(BC)$, $(AB)C$ είναι και οι δύο $(m \times q)$ πίνακες. Επιπλέον αν $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq q$,

$$[A(BC)](i,j) = \sum_{k=1}^{n} A(i,k)[BC](k,j) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \sum_{\ell=1}^{p} b_{k\ell} c_{\ell j} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{p} a_{ik} b_{k\ell} c_{\ell j} =$$

$$= \sum_{\ell=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{k\ell} c_{\ell j}$$

$$= \sum_{\ell=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{k\ell} \right) c_{\ell j} =$$

$$= \sum_{l=1}^{p} [AB](i,l)\; C(l,j)$$

$$= \big[(AB)\,C\big](i,j),$$

and. $(AB)\,C = A\,(BC)$.

2-Διάστατα Γραμμικά Συστήματα - Σταθεροί Συντελεστές

Πρόβλημα

Μία χημική αντίδραση μεταξύ δύο στοιχείων ικανοποιεί τον ακόλουθο Νόμο:

$$\dot{x} = -ax + by$$
$$\dot{y} = ax - by \quad , \; a, b > 0$$

όπου $x(t)$, $y(t)$ είναι οι μάζες των δύο στοιχείων την χρονική στιγμή t.

(a) Αποδείξτε ότι η μάζα διατηρείται

(b) Καθορίστε τα τελικά προϊόντα της αντίδρασης υποθέτοντας ότι $x(0) + y(0) = M$.

(c) Κάθε λύση $x(t), y(t)$ ορίζει μία καμπύλη στο επίπεδο XY. Δώστε μία γεωμετρική εικόνα της αντίδρασης σχεδιάζοντας αυτές τις καμπύλες. Βάλτε βέλη επάνω στις καμπύλες που να δείχνουν την κατεύθυνση της αντίδρασης καθώς αυξάνει ο χρόνος. Ποιά είναι η σημασία της γραμμής που περνά από την αρχή των αξόνων στην διεύθυνση $\binom{b}{a}$;

Προβλήματα όπως αυτό μας οδηγούν στην μελέτη 2-διάστατων συστημάτων της μορφής

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

για τις δύο άγνωστες συναρτήσεις x_1 και x_2. Οι συντελεστές $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ είναι σταθεροί πραγματικοί ή μιγαδικοί αριθμοί. Υπάρχουν δύο περιπτώσεις όπου το σύστημα (1) λύνεται άμεσα:

A) $\dot{x}_1 = \lambda_1 x_1$, $\quad \dot{x}_2 = \lambda_2 x_2$ $\quad (a_{12}=0$ και $a_{21}=0)$

B) $\dot{x}_1 = \lambda_1 x_1$, $\quad \dot{x}_2 = \lambda_2 x_2 + a_{21}x_1$ $\quad (a_{12}=0)$ $\qquad (2)$

Για το (α) η λύση ~~είναι (δύο γραμμικές πρώτης τάξης~~ $p_i = -\lambda_i$, $q_i = 0$)

$$\boxed{x_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}, \quad x_2(t) = c_2 e^{\lambda_2 t}. \qquad (2a)}$$

Για το (β), δεν θα γράψουμε την λύση ~~προς~~ το παρόν, αλλά βλέπουμε ότι η δεύτερη εξίσωση (για το x_2) είναι μια που γνωρίζουμε πως να την λύσουμε. (*←) Επανερχόμαστε λοιπόν στην (α) και όπως θα δούμε η παρακάτω συζήτηση απλοποιείται αν εισάγουμε έναν συμβολισμό που χρησιμοποιεί πίνακες. Ο σκοπός μας είναι να αλλάξουμε συν/νες έτσι ώστε η (1) να αναχθεί σε κάποια από τις απλές μορφές (2). Θα χρησιμοποιήσουμε επιπλέον μιγαδικούς αντί για πραγματικούς αριθμούς, και θα χρειαστούμε λίγα στοιχεία από την θεωρία πινάκων. (Δες ξεχωριστές σελίδες).

Έστω

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

όπου ο A είναι ένας 2x2 πίνακας μιγαδικών αριθμών και $\underline{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^2$. Τότε η (1) γράφεται,

$$(**) \qquad \boxed{\dot{\underline{x}} = A\,\underline{x}} \qquad (\dot{\underline{x}}(t) = A\,\underline{x}(t)). \qquad (3)$$

Έτσι μέσω πινάκων το σύστημα (1) γίνεται μία εξίσωση, (3), η οποία είναι $1^{\text{ης}}$ τάξης και διανυσματική. Το $\underline{y} = A\underline{x}$ είναι μια διανυσματική συνάρτηση μιάς πραγματικής μεταβλητής t με τιμές το διάνυσμα $\underline{y}(t) = A\,\underline{x}(t)$ στο $\mathbb{C}^2$. Ο πίνακας A ορίζει την γραμμική απεικόνιση ($\underline{v} = (v_1, v_2)$):

$$A : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2 : \underline{v} \longmapsto A\underline{v} = (a_{11}v_1 + a_{12}v_2, a_{21}v_1 + a_{22}v_2)$$

Άμεσα έπεται η ιδιότητα της γραμμικότητας: $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ και $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ διανύσματα στο $\mathbb{C}^2$, έχουμε:

$$A(c_1\underline{v}_1 + c_2\underline{v}_2) = c_1 A\underline{v}_1 + c_2 A\underline{v}_2. \qquad (***)$$

Ο A ονομάζεται ένας γραμμικός μετασχηματισμός του $\mathbb{C}^2$. Είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι: Η γραμμικότητα του A συνεπάγεται ότι κάθε γραμμικός συνδυασμός λύσεων της (3), είναι μία λύση της (3). Πράγματι, αν $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ σταθερές και $\underline{x}^1, \underline{x}^2$ δύο λύσεις της (3), τότε η $\underline{x} = c_1 \underline{x}^1 + c_2 \underline{x}^2$ είναι λύση της (3) αφού:

$$\dot{\underline{x}} = c_1 \dot{\underline{x}}^1(t) + c_2 \dot{x}^2(t) = c_1 A \underline{x}_1(t) + c_2 A x_2(t)$$

$$= A\left(c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)\right) = A\underline{x}.$$

Ο σκοπός μας είναι να βρούμε λύσεις της εξίσωσης (3), η οποία είναι ~~το~~ σύστημα (1) γραμμένο ~~σε~~ συμβολισμό πινάκων. Θα αποδείξουμε τώρα ότι το πρόβλημα της λύσης του γραμμικού συστήματος εξισώσεων (1) ή (3) μπορεί να αναχθεί σε ένα πρόβλημα γραμμικής άλγεβρας. Το αλγεβρικό πρόβλημα είναι αυτό του να λύσουμε την εξίσωση [Πρόβλημα Χαρακτηριστικών Τιμών ή Ιδιοτιμών]

$$\boxed{A\underline{v} = \lambda \underline{v}.} \qquad (4)$$

Θέλουμε να βρούμε ένα (μη-μηδενικό) διάνυσμα $\underline{v}$ και έναν αριθμό λ που να ικανοποιούν την (4). Το λ ονομάζεται μία ιδιοτιμή (ή χαρακτηριστική τιμή) του A και το $\underline{v}$ $(\neq \underline{0})$ ένα ιδιοδιάνυσμα (ή χαρακτηριστικό διάνυσμα) του A. Μέσω συνιστωσών, η εξ. (4) γράφεται ($\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$):

$$\left.\begin{aligned} a_{11} v_1 + a_{12} v_2 &= \lambda v_1 \\ a_{21} v_1 + a_{22} v_2 &= \lambda v_2 . \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Θέλουμε λοιπόν να βρούμε μη-τετριμμένες λύσεις των γραμμικών ομογενών (αλγεβρικών) εξισώσεων:

$$\left.\begin{aligned} (a_{11} - \lambda) v_1 + a_{12} v_2 &= 0, \\ a_{21} v_1 + (a_{22} - \lambda) v_2 &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Όπως γνωρίζουμε από την Γραμμική Άλγεβρα, το (6) έχει μη-τετριμμένη λύση αν και μόνο αν $\boxed{\phi(\lambda)=\lambda^2-(\mathrm{Tr}A)\lambda+\det A=0}$

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)-a_{12}a_{21}=0\,, \qquad (7)$$

και άρα οι ιδιοτιμές είναι οι ρίζες του πολυωνύμου

$$\phi(\lambda)=\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})\,, \qquad (7a)$$

που ονομάζεται το <u>χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A</u>. Η εξίσωση $\phi(\lambda)=0$ ονομάζεται η <u>χαρακτηριστική εξίσωση</u> του A και οι ιδιοτιμές λ_1, λ_2 ονομάζονται και <u>οι χαρακτηριστικές ρίζες</u> του A.

Έστω λ_1, λ_2 οι χαρακτηριστικές ρίζες του A. Τότε

$$\phi(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\,, \qquad (8)$$

και ισχύει ότι (από την 7a)

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1+\lambda_2 &= a_{11}+a_{22} = \mathrm{Tr}A \\ \lambda_1\lambda_2 &= a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} = \det A \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(1) Αν $\boxed{a_{12}=a_{21}=0}$, τότε η εξ. (6) μας λέει ότι

$$\lambda_1=a_{11}\,, \quad \lambda_2=a_{22}\,, \quad \left[A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\right]$$

ενώ οι $A\underline{v}_1=\lambda_1\underline{v}_1$, $A\underline{v}_2=\lambda_2\underline{v}_2$ γίνονται $\left\{\begin{aligned}\underline{v}_1&=(v_1^1, v_1^2)\\ \underline{v}_2&=(v_2^1, v_2^2)\end{aligned}\right\}$ (10):

$$\left\{\begin{aligned} 0\,v_1^1 &= 0\\ (a_{22}-\lambda_1)\,v_1^2 &= 0\end{aligned}\right\},\quad \left\{\begin{aligned} (a_{11}-\lambda_2)\,v_2^1 &= 0\\ 0\,v_2^2 &= 0\end{aligned}\right\}$$

δίνοντας τα ιδιοδιανύσματα:

$$\underline{v}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\,, \quad \underline{v}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\,,$$

(λόγω της μορφής του A)

το οποίο <u>αντιστοιχεί</u> στην περίπτωση (2A) [εξ. (2a)] όπου μπορούμε να γράψουμε την λύση άμεσα. Υποθέτουμε (2) τώρα ότι $\boxed{a_{12}\neq 0.}$

Από την (6) και από την χαρακτηριστική εξίσωση στην

$\boxed{\underline{2a}:\ \lambda_1\neq\lambda_2}$

(**)

μορφή (7) έπεται αμέσως ότι το χαρακτηριστικό διάνυσμα $\underline{v}_1$ για την λ_1 είναι το

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ \lambda_1 - a_{11} \end{pmatrix}, \qquad (11)$$

δηλ., $v_{11} = a_{12}$, $v_{12} = \lambda_1 - a_{11}$

και το v_2 της λ_2 είναι το

$$\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ \lambda_2 - a_{11} \end{pmatrix}. \qquad (12)$$

Αν $\lambda_1 \neq \lambda_2$, τότε εύκολα έπεται ότι τα $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. ($\Leftarrow$*)

Μπορούμε τώρα να φανταστούμε τα $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ ως μια βάση του $\mathbb{C}^2$ και να αναλύσουμε το διάνυσμα $\underline{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))$ ως προς αυτήν την βάση. Έχουμε μοναδικά ότι:

$$\underline{x}(t) = y_1(t)\,\underline{v}_1 + y_2(t)\,\underline{v}_2 . \qquad (13)$$

Η (13) είναι μία αλλαγή συντεταγμένων ($\underline{x} \to \underline{v}$) με νέους άξονες συντεταγμένων στις διευθύνσεις των $\underline{v}_1$ και $\underline{v}_2$. Πως μετασχηματίζεται η $\dot{\underline{x}} = A\underline{x}$ στις νέες συν/νες y_1, y_2; Αν

$$\underline{x} = y_1 \underline{v}_1 + y_2 \underline{v}_2 \qquad (14)$$

είναι μία λύση της (1) (ή της (3)) τότε

$$\dot{\underline{x}} = \underline{\dot{y}_1 \underline{v}_1 + \dot{y}_2 \underline{v}_2} = A\underline{x} = A(y_1\underline{v}_1 + y_2\underline{v}_2) =$$

$$= y_1 A\underline{v}_1 + y_2 A\underline{v}_2 = \underline{\lambda_1 y_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 y_2 \underline{v}_2} \qquad (15)$$

Άρα αφού τα $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, από τις υπογραμμισμένες παραστάσεις, έπεται ότι

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \lambda_1 y_1 \\ \dot{y}_2 &= \lambda_2 y_2 , \end{aligned} \qquad (16)$$

με λύση

$$y_1 = c_1 e^{\lambda_1 t}, \quad y_2 = c_2 e^{\lambda_2 t}, \qquad (17)$$

και έτσι η γενική λύση του (3) είναι (από την (14)):

$$\boxed{\underline{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \underline{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \underline{v}_2,} \qquad (18)$$

όπου $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $a_{12} \neq 0$, και επιπλέον $\boxed{\underline{v}_i = \begin{pmatrix} a_{12} \\ \lambda_i - a_{11} \end{pmatrix}}$

Αυτή η γενική λύση (18) γράφεται ως εξής:

$$\boxed{\left.\begin{aligned} x_1(t) &= a_{12} c_1 e^{\lambda_1 t} + a_{12} c_2 e^{\lambda_2 t} \\ x_2(t) &= (\lambda_1 - a_{11}) c_1 e^{\lambda_1 t} + (\lambda_2 - a_{11}) c_2 e^{\lambda_2 t}. \end{aligned}\right\} (19)}$$

Αντιστρόφως αποδείξτε ότι κάθε συνάρτηση αυτής της μορφής είναι μία λύση. Έτσι η (19) είναι η γενική λύση της (1) με $\lambda_1 \neq \lambda_2$ και $a_{12} \neq 0$.

<u>Παράδειγμα</u>: Λύσατε

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x + y \\ \dot{y} &= x - y \end{aligned} \qquad (20)$$

<u>Λύση</u>

Εδώ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ και η χαρ. εξίσωσή του είναι:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff \lambda^2 - 2 = 0.$$

Άρα $\lambda_1 = \sqrt{2}$, $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}-1 \end{pmatrix}$, $\lambda_2 = -\sqrt{2}$, $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2}-1 \end{pmatrix}$ και

η γενική λύση είναι:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{\sqrt{2}t} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}-1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-\sqrt{2}t} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2}-1 \end{pmatrix} \qquad (21)$$

δίνοντας την γενική λύση:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{\sqrt{2}t} + c_2 e^{-\sqrt{2}t} \\ y(t) &= (\sqrt{2}-1)\, c_1 e^{\sqrt{2}t} - (\sqrt{2}+1)\, c_2 e^{-\sqrt{2}t} \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

Ας δούμε τώρα τι γίνεται όταν $\boxed{(2b):\ \lambda_1=\lambda_2,\ a_{12}\neq 0.}$ Ένα ιδιοδιάνυσμα είναι το $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ \lambda - a_{11} \end{pmatrix}$, αλλά το δεύτερο είναι το

$$\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad (22a)$$

έτσι ώστε τα $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ να είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Κάνουμε την αλλαγή συν/νων,

$$x(t) = y_1(t)\,\underline{v}_1 + y_2(t)\,\underline{v}_2,$$

και τότε αν x είναι μία λύση του (1),

$$\dot{\underline{x}} = \dot{y}_1 \underline{v}_1 + \dot{y}_2 \underline{v}_2 = A(y_1 \underline{v}_1 + y_2 \underline{v}_2) = y_1 A \underline{v}_1 + y_2 A \underline{v}_2$$

$$= \lambda y_1 \underline{v}_1 + y_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} \qquad (23)$$

Ας υπολογίσουμε το $\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$. Αφού $\lambda=\lambda_1=\lambda_2$, $2\lambda = a_{11}+a_{22}$ και άρα

$$\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ 2\lambda - a_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ \lambda - a_{11} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \end{pmatrix} =$$

$$= \underline{v}_1 + \lambda \underline{v}_2 . \qquad (24)$$

Άρα η (23) γίνεται

$$\dot{y}_1 \underline{v}_1 + \dot{y}_2 \underline{v}_2 = (\lambda y_1 + y_2)\,\underline{v}_1 + \lambda y_2 \underline{v}_2 \qquad (25).$$

Επειδή και $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, η (25) δίνει την μορφή της (3) στο νέο σύστημα συν/νων όταν $\lambda_1=\lambda_2$ και $a_{12}\neq 0$, δηλαδή

$$\left.\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \lambda y_1 + y_2 \\ \dot{y}_2 &= \lambda y_2 \end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

Επομένως,

$$y_2(t) = c_1 e^{\lambda t}, \quad \dot{y}_1(t) = \lambda y_1(t) + c_1 e^{\lambda t}.$$

Γνωρίζουμε να λύνουμε αυτή την εξίσωση: Ο ολοκληρωτικός παράγοντας είναι $e^{-\lambda t}$ και η γενική λύση είναι $y_1(t) = c_2 e^{\lambda t} + c_1 t e^{\lambda t}$. Άρα η γενική λύση της (9) είναι

$$\boxed{\underline{x}(t) = (c_1 t + c_2) e^{\lambda t} \underline{v}_1 + c_1 e^{\lambda t} \underline{v}_2} \qquad (27)$$

ή αλλιώς,

$$\boxed{\begin{aligned} x_1(t) &= a_{12}(c_1 t + c_2) e^{\lambda t} \\ x_2(t) &= (\lambda - a_{11})(c_1 t + c_2) e^{\lambda t} + c_1 e^{\lambda t} \end{aligned}} \qquad (28)$$

όταν όπως είπαμε $a_{12} \neq 0$ και $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$.

Συμπέρασμα

Η λύση των 2-διάστατων γραμμικών συστημάτων

$$\dot{\underline{x}} = A \underline{x}$$

με σταθερούς συντελεστές ανάγεται στο αλγεβρικό πρόβλημα της λύσης του προβλήματος χαρακτηριστικών τιμών

$$A \underline{x} = \lambda \underline{x} \qquad (18)$$

και η γενική λύση του (3) δίνεται από τις εξ: (2a), ή (19), και (28) ή (27) και (22a).

Αυτό το συμπέρασμα ισχύει για n-διάστατα γραμμικά συστήματα με σταθερούς συντελεστές και οι μαθηματικές ιδέες στην n-διάστατη περίπτωση είναι οι ίδιες με αυτές που αναπτύξαμε εδώ.

Παράδειγμα: Λύσατε:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - y \\ \dot{y} &= x + 3y \end{aligned} \qquad (29)$$

Λύση

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2-4\lambda+4 = (\lambda-2)^2 = 0$$

και άρα οι ιδιοτιμές είναι ίσες, $\lambda_1=\lambda_2=2$.

Η γενική λύση είναι

$$x(t) = -(c_1t+c_2)\,e^{2\lambda}$$
$$y(t) = (c_1t+c_2+c_1)\,e^{2t}. \quad \boxtimes$$

~ · ~

Γυρνάμε τέλος στο αρχικό Πρόβλημα αυτής της παραγράφου. Έχουμε

$$A = \begin{pmatrix} -a & b \\ a & -b \end{pmatrix} \Rightarrow \phi(\lambda) = \begin{vmatrix} -a-\lambda & b \\ a & -b-\lambda \end{vmatrix} = (a+\lambda)(b+\lambda)-ab$$

$$= ab+\lambda(a+b)+\lambda^2-ab = \lambda^2+\lambda(a+b) = 0$$

δηλαδή οι ιδιοτιμές είναι

$$\lambda_1 = -(a+b)$$
$$\lambda_2 = 0,$$

και άρα η γενική λύση είναι

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{-(a+b)t}\begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}.$$

Αφού $x(0)+y(0) = M$ και $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$, έχουμε

$$c_1 b + c_2 b - bc_1 - c_2 a = M$$

δηλαδή $\quad c_2 (a+b) = M \quad$ ή

$$c_2 = \frac{M}{a+b} .$$

Τώρα,

$$\dot{x}(t) + \dot{y}(t) = 0 \Rightarrow 2bc_1 e^{-(a+b)t} + c_2 (a+b) = 0 \quad \text{ή}$$

$$2bc_1 e^{-(a+b)t}\big|_0 + M = 0$$

δηλαδή

$$c_1 = \frac{M}{2b}$$

Άρα η λύση με $x(0)+y(0)=M$ είναι

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \frac{M}{2b} \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix} e^{-(a+b)t} + \frac{M}{a+b} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} .$$

απ' όπου βρίσκουμε

$$\boxed{\begin{aligned} x(\infty) &= \frac{bM}{a+b} \\ y(\infty) &= \frac{Ma}{a+b} \end{aligned}}.$$

Η εύρεση των τιμών της λύσης καθώς $t \to \infty$, ονομάζεται το πρόβλημα της <u>ασυμπτωτικής συμπεριφοράς των λύσεων</u>, και αποτελεί το σημαντικότερο ίσως πρόβλημα στην μελέτη των διαφορικών εξισώσεων διότι σχετίζεται με το θεμελιώδες θέμα της πρόβλεψης της εξέλιξης ενός συστήματος.

Ας δούμε ένα παράδειγμα εφαρμογής της παραπάνω θεωρίας στην περίπτωση ενός γραμμικού συστήματος 3x3.

Παράδειγμα.

Λύσατε το σύστημα:

$$\dot{x} = x+y+2z$$
$$\dot{y} = 2y+2z$$
$$\dot{z} = x-y$$

ΛΥΣΗ

Το πρόβλημα ιδιοτιμών για αυτό το σύστημα είναι:

$$x+y+2z=\lambda x$$
$$2y+2z=\lambda y$$
$$x-y=\lambda z\ ,$$

ή,

$$(1-\lambda)x+y+2z=0$$
$$(2-\lambda)y+2z=0$$
$$x-y-\lambda z=0\ .$$

Για να βρούμε τις μη-τετριμμένες λύσεις, η ορίζουσα των συντελεστών πρέπει να μηδενίζεται:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 2 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda^3-3\lambda^2+2\lambda)=0.$$

Οι ιδιοτιμές είναι 0, 1, 2. Αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα:

$$\underset{\sim}{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \underset{\sim}{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \underset{\sim}{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Άρα θέτοντας $\underset{\sim}{r} = (x,y,z)^{\perp}$, οδηγούμαστε στην αλλαγή μεταβλητών

$$\underset{\sim}{r} = \bar{x}\,\underset{\sim}{u} + \bar{y}\,\underset{\sim}{v} + \bar{z}\,\underset{\sim}{w}\ ,$$

δηλαδή βρίσκουμε:

$$x = \bar{x} + \bar{y} + \bar{z}$$
$$y = \bar{x} + 2\bar{y} + \bar{z}$$
$$z = -\bar{x} - \bar{y} \,.$$

Για να είναι η $\underset{\sim}{r}$ λύση του συστήματος πρέπει και αρκεί:

$$\dot{\underset{\sim}{r}} = \underline{\dot{\bar{x}}\underset{\sim}{u} + \dot{\bar{y}}\underset{\sim}{v} + \dot{\bar{z}}\underset{\sim}{w}} = A\underset{\sim}{r} = \bar{x}A\underset{\sim}{u} + \bar{y}A\underset{\sim}{v} + \bar{z}A\underset{\sim}{w}$$

$$= \underline{0\bar{x}\underset{\sim}{u} + \bar{y}\underset{\sim}{v} + 2\bar{z}\underset{\sim}{w}},$$

όπου A είναι ο πίνακας

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

και οι αριθμοί $0, 1, 2$ είναι οι ιδιοτιμές του A, και $\underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{v}, \underset{\sim}{w}$ αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα: $A\underset{\sim}{u} = 0\underset{\sim}{u}$, $A\underset{\sim}{v} = 1\underset{\sim}{v}$, $A\underset{\sim}{w} = 2\underset{\sim}{w}$. Άρα:

$$\dot{\bar{x}} = 0 \,, \quad \dot{\bar{y}} = \bar{y} \,, \quad \dot{\bar{z}} = 2\bar{z}$$

και η γενική λύση είναι

$$\bar{x}(t) = c_1 \,, \quad \bar{y}(t) = c_2 e^{t} \,, \quad \bar{z}(t) = c_3 e^{2t}.$$

Έτσι ως προς τις αρχικές συν/νες, η γενική λύση είναι:

$$x(t) = c_1 + c_2 e^{t} + c_3 e^{2t}$$
$$y(t) = c_1 + 2c_2 e^{t} + c_3 e^{2t}$$
$$z(t) = -c_1 - c_2 e^{t} \,.$$

Γνωρίζοντας την γενική λύση του συστήματος (1), οδηγούμαστε στο ακόλουθο θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας των λύσεων του συστήματος (1):

Θεώρημα

Για κάθε πραγματικό αριθμό t_0 και σταθερό διάνυσμα $\underset{\sim}{x}^0$, η εξίσωση $\dot{\underset{\sim}{x}} = A\underset{\sim}{x}$ έχει μοναδική λύση στο διάστημα $(-\infty, \infty)$, η οποία ικανοποιεί: $\underset{\sim}{x}(t_0) = \underset{\sim}{x}^0$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Το αποδεικνύουμε μόνο για την περίπτωση $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $a_{12} \neq 0$.
Η γενική λύση γράφεται στην μορφή:

$$\underset{\sim}{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1(t-t_0)} \underset{\sim}{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2(t-t_0)} \underset{\sim}{v}_2$$

όπου c_1, c_2 αυθαίρετες σταθερές. Οι λύσεις που αναζητούμε ικανοποιούν την συνθήκη $\underset{\sim}{x}(t_0) = \underset{\sim}{x}^0$, δηλ., ζητούμε σταθερές c_1, c_2 που να ικανοποιούν:

$$c_1 \underset{\sim}{v}_1 + c_2 \underset{\sim}{v}_2 = \underset{\sim}{x}^0 .$$

Αφού όμως τα $\underset{\sim}{v}_1, \underset{\sim}{v}_2$ είναι εκ κατασκευής γραμμικώς ανεξάρτητα, έπεται ότι αυτή η αλγεβρική εξίσωση έχει <u>μοναδικές</u> λύσεις. Άρα η ΔΕ έχει μία μοναδική λύση που ικανοποιεί την συνθήκη $\underset{\sim}{x}(t_0) = \underset{\sim}{x}^0$.
Ομοίως για την περίπτωση $\lambda_1 = \lambda_2$. [Θα δώσει: $c_2 \underset{\sim}{v}_1 + c_1 \underset{\sim}{v}_2 = \underset{\sim}{x}^0$ από την (28)]

Παράδειγμα

Βρείτε την λύση του συστήματος

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = -2x - 3y ,$$

που ικανοποιεί $x(0) = 0$, $y(0) = 1$.

ΛΥΣΗ

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 ,$$

δηλ., οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = -1$ και $\lambda_2 = -2$. Τα ιδιοδιανύσματα είναι $\underset{\sim}{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\underset{\sim}{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, και η γενική λύση είναι,

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \cdot e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

ή,

$$x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}$$
$$y(t) = -c_1 e^{-t} - 2c_2 e^{-2t}.$$

Θέλουμε

$$\left.\begin{aligned} x(0) &= c_1 + c_2 = 0 \\ y(0) &= -c_1 - 2c_2 = 1, \end{aligned}\right\}$$

και άρα $c_1 = 1$, $c_2 = -1$, οπότε η λύση που ζητούμε είναι:

$$x(t) = e^{-t} - e^{-2t}$$
$$y(t) = -e^{-t} + 2e^{-2t}.$$

<u>Παράδειγμα</u>

Βρείτε την λύση του

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -5x + 2y \end{aligned}\right\}$$

που ικανοποιεί $x(0) = 1$, $y(0) = 0$.

<u>ΛΥΣΗ</u>

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -5 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff \lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0,$$

$\lambda_1 = 1+2i$, $\lambda_2 = 1-2i$. Η γενική λύση είναι:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{(1+2i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1+2i \end{pmatrix} + c_2 e^{(1-2i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \end{pmatrix},$$

ή,

$$x(t) = c_1 e^{(1+2i)t} + c_2 e^{(1-2i)t}$$
$$y(t) = (1+2i)c_1 e^{(1+2i)t} + (1-2i)c_2 e^{(1-2i)t} .$$

Θέλουμε

$$\left.\begin{aligned} x(0) &= c_1 + c_2 = 1 \\ y(0) &= (1+2i)c_1 + (1-2i)c_2 = 0 . \end{aligned}\right\}$$

Λύνοντας βρίσκουμε

$$c_1 = \frac{2+i}{4} , \quad c_2 = \frac{2-i}{4}$$

και έτσι

$$x(t) = \frac{2+i}{4} e^{(1+2i)t} + \frac{2-i}{4} e^{(1-2i)t}$$
$$= e^t \left(\cos 2t - \frac{1}{2} \sin 2t\right)$$

ενώ

$$y(t) = \dot{x}(t) = -\frac{5}{2} e^t \sin 2t .$$

Παρατηρούμε επίσης ότι το εν λόγω σύστημα είναι ισοδύναμο με την εξίσωση $2^{ης}$ τάξης

$$\ddot{x} - 2\dot{x} + 5x = 0 ,$$

με αρχικές συνθήκες $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$.