ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Σημειώσεις – Γραμμική 1ης τάξης (Μέρος Γ)

Κοφινάς Γιώργος

Τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών και Επικοινωνιακών Συστημάτων

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

<u>Παράδειγμα</u> (Άσκηση 2 από το Φυλλάδιο Ασκήσεων 3)

Το στοιχείο Θόριο C έχει ημιζωή 61 min. Πόσος χρόνος χρειάζεται έτσι ώστε 90% Θορίου C να διασπασθεί;

<u>ΛΥΣΗ</u>

Απο την ημιζωή $T = 61\,min$, μπορούμε να καθορίσουμε την σταθερά λ:

$$\lambda T = \ln 2 \rightarrow \lambda = T^{-1} \cdot \ln 2 = 0{,}011\ s^{-1}$$

Επειδή την στιγμή t <u>απομένουν</u> $N(t)$ πυρήνες όπου

$$\frac{N(t)}{N_0} = e^{-\lambda t},$$

έχουμε ότι

$$\ln \frac{N}{N_0} = -\lambda t.$$

Εδώ θέλουμε: $N/N_0 = 0.1$, ενώ $\lambda = 0{,}011$. Επειδή $\ln(N/N_0) = \ln 0.1 = -2{,}3025$, βρίσκουμε ότι: Η χρονική στιγμή που θα έχει απομείνει το 10% της αρχικής ποσότητας Θόριου C, ικανοποιεί

$$t = \frac{-1}{\lambda} \ln \frac{N}{N_0}$$

$$= 90{,}9090 \times 2{,}3025 = 209{,}3179\ min.$$

Αυτός ο αριθμός είναι προσεγγιστικός και η πραγματική τιμή είναι κάπως μικρότερη (~202 min)

<u>Παράδειγμα</u> (ραδιενεργή χρονολόγηση)

Από την σχέση (αποδείξτε την!)

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda(t-t_0)}$$

έπεται ότι μπορούμε να λύσουμε για την 'ηλικία' της ουσίας $t - t_0$:

$$t - t_0 = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{N_0}{N},$$

όπου t_0 είναι η στιγμή που σχηματίστηκε η ουσία. Η σταθερά λ είναι γνωστή (ή υπολογίσιμη εύκολα) και ο υπολογισμός του N είναι και αυτός εύκολος. Άρα αν γνωρίζαμε την αρχική ποσότητα N_0, τότε θα μπορούσαμε να βρούμε την ηλικία του στοιχείου, $\frac{1}{\lambda} \ln(N_0/N)$.

Άσκηση 3.3

$z=y^{1-n}$, $z'+(1-n)pz=(1-n)q$ με

$$y'+py=qy^n.$$

Έχουμε ($z=y\cdot y^{-n}$)

$$z'=(1-n)y^{-n}y'.$$

Άρα

$$z'+(1-n)pz = \cancel{(1-n)\frac{z}{y}+(1-n)pz=(1-n)z\left(\frac{1}{y}+p\right)}$$

$$\cancel{=(1-n)\frac{z}{y}(1+py)=(1-n)(1+qy^n-y')}$$

$$=(1-n)y^{-n}y'+(1-n)py^{1-n}=(1-n)y^{-n}(y'+py)=$$

$$=(1-n)y^{-n}qy^{n}=(1-n)q.$$

Άρα για $n=1/2$, γνωρίζουμε ότι η

$$z=y^{1/2}$$

είναι μιά λύση της

$$z'+\frac{1}{2}pz=\frac{1}{2}q. \quad , \quad p=x,\ q=1.$$

Για αυτήν ένας ο.π. είναι

$$e^{P(t)}=e^{\int\frac{p}{2}dt}=e^{\frac{1}{4}t^2}$$

και άρα

$$D_t\left(e^{\int\frac{p}{2}dt}z(t)\right)=\frac{1}{2}q\,e^{\int p/2\,dt}$$

$$\Rightarrow e^{\int\frac{p}{2}dt}z(t)=z_0+\frac{1}{2}\int^t q\,e^{\int\frac{p}{2}dt}ds$$

$$z(t)=y^{1/2}=e^{-P(t)}z_0+\frac{1}{2}e^{-P(t)}\int^t q\,e^{P(t)}ds$$

$$=e^{-P(t)}\left(z_0+\frac{1}{2}\int_0^x q\,e^{P(t)}dt\right)\Rightarrow y^{1/2}=e^{-\frac{1}{4}x^2}\left(z_0+\frac{1}{2}\int_0^x e^{\frac{1}{4}t^2}\right)$$

$$\Rightarrow y=e^{-\frac{1}{2}t^2}\left(z_0+\frac{1}{2}\int_0 e^{\frac{t^2}{4}}ds\right)^2.$$

ή

$$y(x)=e^{-t^2/2}\left(c+\frac{1}{2}\int^x e^{t^2/4}dt\right)^2$$

Άσκηση 3.4

Η λογιστική εξίσωση $\dot{N} - kcN = -kN^2$ είναι μια εξίσωση Bernoulli με $\underline{n=2}$, $p=-kc$, $q=-k$.

Η συνάρτηση

$$z = N^{-1}$$

είναι, σύμφωνα με την άσκηση 3.3, λύση της

$$\dot{z} + kcz = k. \quad , p = kc \quad , q = k$$

Ένας ο.π. αυτής είναι ως εξής:

$$P(t) = \int^t p(s)\,ds = kct$$

και άρα

$$e^{P(t)} = e^{kct}.$$

Έτσι

$$\left(e^{P(t)} z(t)\right)^{\cdot} = e^{P(t)} q(t) = k e^{kct} \Rightarrow$$

$$e^{kct} z(t) = k\int e^{kct}\,dt = \frac{k}{kc} e^{kct} + c_1$$

$$= c^{-1} e^{kct} + c_1$$

$$z(t) = e^{-kct}\left(c^{-1} e^{kct} + c_1\right)$$

$$= c^{-1} + c_1 e^{-kct} \quad , c_1 \cancel{= N_0}.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{N(t)} = \frac{1}{c} + c_1 e^{-kct} = \frac{1 + c c_1 e^{-kct}}{c}$$

$$\Rightarrow N(t) = \frac{c}{1 + c c_1 e^{-kct}} = \frac{c}{1 + b e^{-kct}},$$

Υπολογισμός του c_1:

$$N(0) = N_0 \Rightarrow \frac{1}{N_0} = \frac{1}{c} + c_1 \Rightarrow c_1 = \frac{1}{N_0} - \frac{1}{c}$$

όπου $b = \frac{c}{N_0} - 1$.

Η μιγαδική εκθετική συνάρτηση

~~και άρα η λύση είναι~~

$$\cancel{x(t) = e^{t^2} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{t^2+1}\left[\mathrm{erf}(t-1) + \mathrm{erf}(1)\right]} . \qquad (15)$$

Είναι χρήσιμο σε ό,τι ακολουθεί να έχουμε την επέκταση της εκθετικής συνάρτησης από το $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ στην εκθετική συνάρτηση $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ και να μελετήσουμε κάποιες από τις θεμελιώδεις ιδιότητες αυτής της συνάρτησης. Αυτό κάνουμε στο υπόλοιπο αυτού του κεφαλαίου.

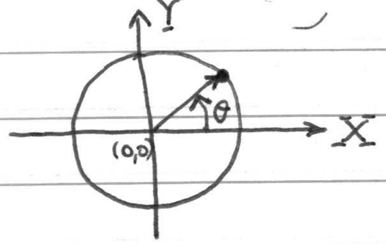
Αρχίζουμε από τον γνωστό ορισμό του μιγαδικού εκθετικού:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \quad \theta \in \mathbb{R}, \qquad (16)$$

και έτσι στο μιγαδικό επίπεδο το $e^{i\theta}$ είναι το σημείο

$$e^{i\theta} = (\cos\theta, \sin\theta), \quad \text{(βλ. Σχήμα)}$$

ή, το μοναδιαίο διάνυσμα με αρχή το $(0,0)$ και κλίση, ως προς τον πραγματικό άξονα, θ. Αλλιώς, το $e^{i\theta}$ είναι ο μιγαδικός αριθμός $z = e^{i\theta}$ με: $|z| = 1$ και $\mathrm{Arg}\, z = \theta$. (*)



Τότε από τις προσθετικές ιδιότητες του sin και cos (**) προκύπτει ότι

$$e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)} . \qquad (17) \leftarrow \text{σημ}$$

Η μιγαδική εκθετική συνάρτηση $\exp(z) = e^z$ ορίζεται ως εξής: για κάθε $z = x+iy$ στο $\mathbb{C}$, $\exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto \exp(z) \equiv e^z$

όπου: $e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y), \ \forall z \in \mathbb{C}, z = x+iy$ (18)

Αν περιορίσουμε το $z \in \mathbb{R}$ τότε η $\exp(z)$ γίνεται η γνωστή πραγματική εκθετική συνάρτηση $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Εύκολα θα δείξετε ότι ισχύουν οι ακόλουθες θεμελιώδεις ιδιότητες της e^z (ΑΣΚΗΣΗ):

1. $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}, \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$ (19)
2. $e^z \neq 0$ και $(e^z)^{-1} = e^{-z}, \quad \forall z \in \mathbb{C}$ (20)
3. $e^z = 1 \iff z = 2\pi n i$ για κάποιο ακέραιο n. (21)
4. $e^{z_1} = e^{z_2} \iff z_1 = z_2 + 2\pi n i$ — // — . (22)

(*) Αν $z = x+iy$, τότε εισάγοντας πολικές συν/νες, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, έχουμε: $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, ή μέσω του μιγαδικού εκθετικού, $z = re^{i\theta}$. Εδώ $|z| = r$ και $\mathrm{Arg}\, z = \theta$.

(**) $\sin(a+b) = \cos a \sin b + \cos b \sin a$, $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.

(συν ←) <u>Απόδειξη της (17)</u>

$$\begin{aligned} e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} &= (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = \\ &= (\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + \\ &\quad i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2) \\ &= \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2) \\ &= e^{i(\theta_1+\theta_2)}. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε επιπλέον ότι το μιγαδικό εκθετικό μας δίνει έναν καλύτερο δρόμο για την τριγωνομετρία, απ' ότι οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

Ως άμεση συνέπεια του ορισμού του $e^{i\theta}$, έχουμε:

$$\cos\theta = \mathrm{Re}(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin\theta = \mathrm{Im}(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

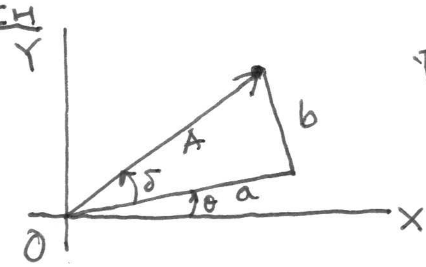
<u>Παράδειγμα</u>: Αποδείξτε ότι: $2\sin a\cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b)$.

<u>ΛΥΣΗ</u>

$$\begin{aligned} 2\sin a\cos b &= 2\,\frac{e^{ia} - e^{-ia}}{2i} \cdot \frac{e^{ib} + e^{-ib}}{2} \\ &= \frac{1}{2i}\left\{ e^{i(a+b)} - e^{-i(a+b)} + e^{i(a-b)} - e^{-i(a-b)} \right\} \\ &= \sin(a+b) + \sin(a-b) \end{aligned}$$

<u>Παράδειγμα</u>: Αποδείξτε ότι: $a\sin\theta + b\cos\theta = A\sin(\theta+\delta)$, όπου: $a+ib = Ae^{i\delta}$, δηλ.: $A = \sqrt{a^2+b^2}$ και $\delta = \mathrm{Arg}(a+ib)$.

<u>ΛΥΣΗ</u>



Έχουμε:

$$\begin{aligned} (a+ib)e^{i\theta} &= (a+ib)(\cos\theta + i\sin\theta) \\ &= (a\cos\theta - b\sin\theta) + i(a\sin\theta + b\cos\theta). \end{aligned}$$

Επιπλέον,

$$(a+ib)e^{i\theta} = Ae^{i\delta}e^{i\theta} = Ae^{i(\theta+\delta)} =$$
$$= A\left(\cos(\theta+\delta) + i\sin(\theta+\delta)\right).$$

Άρα:

$$A\cos(\theta+\delta) + iA\sin(\theta+\delta) = (a\cos\theta - b\sin\theta) + i(a\sin\theta + b\cos\theta).$$

Εξισώνοντας πραγματικά και φανταστικά μέρη, έχουμε

$$a\cos\theta - b\sin\theta = A\cos(\theta+\delta)$$
$$a\sin\theta + b\cos\theta = A\sin(\theta+\delta).$$

~ · ~

Επανερχόμαστε τώρα στον ορισμό της μιγαδικής εκθετικής συνάρτησης.

~ · ~

Στις ΔΕ ενδιαφερόμαστε για την ακόλουθη συνάρτηση:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : t \longmapsto f(t) = e^{\lambda t}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Για κάθε $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, θέτουμε $f = u + iv = (u, v)$, δηλ.,

$$f(t) = u(t) + i\,v(t),$$

και έτσι μπορούμε να θεωρήσουμε την f ως

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2.$$

Έτσι για την $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ έχουμε έτοιμες τις έννοιες του ορίου και της παραγώγου, ως εκείνες που ισχύουν για $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, και άρα επιπλέον ισχύει ότι:

$$f = u + iv \text{ συνεχής} \iff u, v \text{ συνεχείς}.$$

και

$$f' = u' + iv'.$$

Για το $\int f$ έχουμε αντιστοίχως τον εξής ορισμό.

Ορισμός

Αν $f = u + iv$ είναι $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ και u, v ολοκληρώσιμες στο $I \subset \mathbb{R}$, ορίζουμε $\forall a, b \in I$,

$$\int_a^b f = \int_a^b u + i \int_a^b v .$$

Προφανώς τα ΘΘΑΛ ισχύουν για συναρτήσεις από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{C}$.

ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ: 1 το θεμελιώδες θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας για την $y' = f$ $\left(\underbrace{f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}}_{\text{συνεχής}}\right)$ ισχύει. Επίσης 2 τα αποτελέσματά μας για την εξίσωση $x' + px = q$ για $p, q: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ισχύουν και εδώ, αφού ισχύει ο ακόλουθος ισχυρισμός.

Ισχυρισμός. Για $\lambda \in \mathbb{C}$, $\boxed{D_t(e^{\lambda t}) = \lambda e^{\lambda t}}$.

Απόδειξη

Έστω $f(t) = e^{\lambda t}$ με $\lambda = \alpha + i\beta$. Τότε

$$f(t) = e^{\lambda t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t)$$

και άρα,

$$\begin{aligned} f'(t) = D_t(e^{\lambda t}) &= \alpha e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t) + \beta e^{\alpha t}(-\sin\beta t + i\cos\beta t) \\ &= \alpha e^{\alpha t} e^{i\beta t} + i\beta e^{\alpha t} e^{i\beta t} \\ &= (\alpha + i\beta) e^{(\alpha+i\beta)t} = \lambda e^{\lambda t} \end{aligned}$$

Άρα

$$D_t(e^{\lambda t}) = \lambda e^{\lambda t}. \quad \boxtimes$$

→ Βλέπε άλλη σελίδα που είναι μετά το παρακάτω παράδειγμα.

Παράδειγμα Λύσατε το σύστημα,

$$\dot{x} = ax - by$$
$$\dot{y} = bx + ay .$$

Λύση

Έστω $z = x + iy$. Τότε οι x, y είναι λύσεις αν και μόνο αν

$$\begin{aligned} \dot{z} = \dot{x} + i\dot{y} &= (ax - by) + i(bx + ay) \\ &= (a+ib)x + (a+ib)iy \end{aligned}$$

$$= (a+ib)z.$$

Άρα

$$z(t) = C\, e^{(a+ib)t}.$$

Θέτω $C = C_1 + iC_2$ και έχω: $z(t) = (C_1+iC_2)e^{at}(\cos bt + i\sin bt)$, ή

$$x(t) = e^{at}(C_1 \cos bt - C_2 \sin bt)$$

$$y(t) = e^{at}(C_1 \sin bt + C_2 \cos bt)$$

Ή αλλιώς, θέτοντας

$$C = Ae^{i\delta},$$

βρίσκουμε

$$x(t) = \mathrm{Re}\left[A\cdot e^{i\delta} e^{(a+ib)t}\right] = Ae^{at}\cos(bt+\delta)$$

$$y(t) = \mathrm{Im}\left[A e^{i\delta} e^{(a+ib)t}\right] = Ae^{at}\sin(bt+\delta).$$

Ο ισχυρισμός μας δίνει την δυνατότητα να υπολογίσουμε με ένα πολύ απλό εναλλακτικό τρόπο, μέσω ενός μιγαδικού επιχειρήματος, το ακόλουθο ολοκλήρωμα.

<u>Παράδειγμα</u>: Αν $a, b \in \mathbb{R}$ με $a^2+b^2 \neq 0$, υπολογίστε το

$$\int e^{at} \cos bt \, dt.$$

<u>ΛΥΣΗ</u>

Θέτοντας $\lambda = a+bi$, από τον προηγούμενο ισχυρισμό μέσω του $2^{ου}$ ΘΘΛ: έχουμε

$$\int e^{(a+ib)t} dt = \frac{1}{a+ib} e^{(a+ib)t}.$$

Άρα εξισώνοντας πραγματικά και φανταστικά μέρη, βρίσκουμε

$$\int e^{at} \cos bt \, dt = \frac{e^{at}}{a^2+b^2} (a \cos bt + b \sin bt)$$

και

$$\int e^{at} \sin bt \, dt = \frac{e^{at}}{a^2+b^2} (a \sin bt - b \cos bt).$$

Οι σχετικές πράξεις είναι ως εξής:

$$\frac{1}{a+ib} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right) \quad \text{και άρα} \quad \frac{1}{a+ib} e^{(a+ib)t} =$$

$$= \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right) e^{at} (\cos bt, \sin bt) =$$

ενώ το $1^{ο}$ μέλος: $\int e^{(a+ib)t} dt = \int e^{at} (\cos bt, \sin bt) dt$

$$= \left(\int e^{at} \cos bt \, dt, \int e^{at} \sin bt \, dt \right).$$

$$= \frac{e^{at}}{a^2+b^2}(a,-b)(\cos bt, \sin bt) =$$

$$= \frac{e^{at}}{a^2+b^2}\left(a\cos bt + b\sin bt\,,\ a\sin bt - b\cos bt\right)$$

ΤΕΛΟΣ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΟΣ

ΣΥΝΟΨΗ: Η ΔΕ 1ης τάξης

$$\dot{x} + p(t)\,x = q(t),$$

λύνεται ως εξής: Εισάγοντας την συνάρτηση $P(t)$, όπου:

$$P := \int_{t_0} p\ , \qquad P(t) = \int_{t_0}^{t} p(s)\,ds,$$

έχουμε ότι,

$$P'(t) = p(t).$$

Πολ/ζοντας κατά μέλη με τον ολοκληρωτικό παράγοντα:

$$e^{P(t)},$$

βρίσκουμε:

$$e^{P(t)}(\dot{x} + p(t)\,x) \equiv \left(e^{P(t)}x(t)\right)^{\cdot} = e^{P(t)}q(t).$$

Άρα

$$e^{P(t)}x(t) = e^{P(t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{P(s)}q(s)\,ds$$

Επειδή $P(t_0) = 0$ και άρα $e^{P(t_0)} = 1$, έπεται:

$$\boxed{x(t) = e^{-P(t)}x_0 + e^{-P(t)}\int_{t_0}^{t} e^{P(s)}q(s)\,ds.}$$

Επιπλέον, κάθε συνάρτηση $x(t)$ αυτής της μορφής είναι λύση της ΔΕ $\dot{x} + px = q$. Άρα όλες οι λύσεις της $\dot{x} + px = q$ είναι αυτής της μορφής.