ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Σημειώσεις – Γραμμική 1ης τάξης (Μέρος Β)

Κοφινάς Γιώργος

Τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών και Επικοινωνιακών Συστημάτων

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Μαθηματική Μοντελοποίηση

Φυλλάδιο Ασκήσεων 2

1. Καθορίστε όλες τις λύσεις στο διάστημα $(-\infty,\infty)$ των ΔΕ

a. $y' = 1 + \cos$, b. $y'(x) = x^2 - 3x^5$

c. $u'(t) = e^{-t^2}$, d. $x'(s) = \ln(1+s^2)$

2. Καθορίστε την συνάρτηση που ορίζεται από τα εξής Π.Α.Τ.:

a) $y'(x) = 1/x$ στο $(0,\infty)$, $y(1)=0$

b) $y'(x) = 1/x$ στο $(-\infty,0)$, $y(-1)=0$

c) $y' = f$, όπου $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ όταν $x \neq 0$ και $f(0)=1$, και $y(0)=10$.

3. Δείξτε ότι $e^{ax}[y'(x) + a y(x)] = D_x(e^{ax} y(x))$. Άρα λύσατε (δηλαδή καθορίστε όλες τις λύσεις ~~[illegible]~~) των ΔΕ:

a) $y' - 2y = 0$ b) $y' = 2y + 6$

c) $\begin{cases} y'(x) + 4y(x) = x \\ y(0) = 1 \end{cases}$ d) $\ddot{x} + \dot{x} = 0$

4. Λύσατε την ΔΕ

$$\dot{\underline{r}}(t) + a\,\underline{r}(t) = \underline{0}, \quad \text{με } \underset{\sim}{r}(0) = \underset{\sim}{c}.$$

5. Λύσατε τις ΔΕ

a) $y(x)\,y'(x) = x$

b) $y(x)\,y'(x) = x$ $y(0)=1$

c) $y(x)\,y'(x) = -x$ $y(0)=1$

d) $y'(x) = \dfrac{y(x)}{x}$ στο $(0,\infty)$.

6. Υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις g στο $(-\infty,\infty)$ που να ικανοποιούν στο $(-\infty,\infty)$ τις εξής σχέσεις:

a) $x^2 = \int_a^x g$;

b) $5e^x = 1 + \int_a^x g$;

Πρόβλημα: Ραδιενεργή διάσπαση

$A = Z + N$

Οι περισσότεροι πυρήνες είναι ευσταθείς συνδυασμοί νουκλεονίων. Θυμίζουμε ότι ένας ατομικός πυρήνας είναι ένα σμήνος πρωτονίων και νετρονίων (μέσα στα άτομα) διαμέτρου της τάξεως των 10^{-14} m. Και τα δύο είδη νουκλεονίων έχουν σπιν 1/2 και υπακούουν την απαγορευτική αρχή του Pauli. Ατομικός αριθμός, Z, είναι το συνολικό πλήθος των πρωτονίων, ενώ μαζικός αριθμός, A, είναι το συνολικό πλήθος των νουκλεονίων. Πυρήνες με το ίδιο Z ονομάζονται ισότοπα, ενώ με το ίδιο A ισοβαρείς.

Η πυρηνική ευστάθεια δεν μπορεί να είναι αποτέλεσμα ηλεκτρομαγνητικής αλληλεπίδρασης, αλλά υποδεικνύει την ύπαρξη πυρηνικών δυνάμεων, πολύ ισχυρότερων των ηλεκτρομαγνητικών.

Εν τούτοις, υπάρχουν πολλά παραδείγματα ασταθών πυρήνων. Αυτοί ονομάζονται και ραδιενεργοί πυρήνες και το βασικό τους χαρακτηριστικό είναι ότι τείνουν σε ευσταθείς σχηματισμούς απελευθερώνοντας κάποια σωματίδια καθώς και ενέργεια. Τα σωμάτια που απελευθερώνονται ονομάζονται σωμάτια α και σωμάτια β. Τα σωμάτια α είναι πυρήνες ηλίου, ${}^4_2He$, (2 πρωτόνια δύο νετρόνια), ενώ τα σωμάτια β είναι ηλεκτρόνια (αρνητικό φορτίο −e) ή ποζιτρόνια (θετικό φορτίο, +e). Στη λεγόμενη β-διάσπαση εκλύεται ένα νετρίνο, και στα δύο είδη διασπάσεων α και β, απελευθερώνονται νέοι πυρήνες.

Παραδείγματα ραδιενεργών πυρήνων είναι ο ${}^{14}C$, τα ισότοπα με $Z > 81$ $(A > 206)$, το ${}^{238}U$ κλπ.

Έχει παρατηρηθεί ότι όλες οι ραδιενεργές αντιδράσεις ακολουθούν ένα εκθετικό νόμο διάσπασης: Αν N_0 είναι ο αρχικός αριθμός ασταθών πυρήνων (ή ατόμων), ο αριθμός των πυρήνων που απομένουν μετά χρόνο t είναι:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t},$$

λ μια σταθερά που χαρακτηρίζει κάθε πυρήνα και ονομάζεται σταθερά διάσπασης: Μονάδες $[T^{-1}]$. Δύο ακόμη ποσότητες παίζουν σημαντικό ρόλο εδώ:

- Ο χρόνος ημι-ζωής T: Η περίοδος κατά την οποία ο αριθμός πυρήνων στην αρχή της περιόδου μειώνεται στο μισό.
- Ο ρυθμός πυρηνικής διάσπασης ή δραστηριότητας: $\dot{N}$. Θα δούμε αμέσως ότι

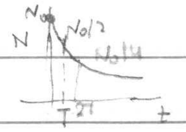
$$\dot{N} \propto N$$

- Μονάδα μέτρησης του $\dot{N}$: το ένα curie, Ci, που ορίζεται ως η δραστηριότητα μιας ουσίας όταν 3.7×10^{10} πυρήνες διασπώνται κάθε δευτερόλεπτο. Αυτή η δραστηριότητα είναι περίπου ίση με εκείνη 1gr Ra:

$$1 \text{ Ci} = 3.7 \times 10^{10} \text{ s}^{-1}$$

Οι νόμοι της ραδιενεργής διάσπασης είναι στατιστικοί δηλ., ισχύουν μόνο όταν ο αριθμός των πυρήνων είναι πολύ μεγάλος. Άρα αφού δεν μπορούμε να ομιλούμε για την ημιζωή ενός στοιχείου ή να προβλέψουμε με ακρίβεια πότε ένα στοιχείο θα διασπαστεί, η σταθερά διάσπασης λ δίνει την πιθανότητα ανά μονάδα χρόνου για έναν πυρήνα να διασπασθεί. Επίσης το N ενώ στην πραγματικότητα παίρνει διακριτές τιμές, προσεγγιστικά θα το θεωρούμε μια συνεχή συνάρτηση.

Ο ρυθμός της ραδιενεργού διάσπασης ενός στοιχείου είναι ανάλογος με τον αριθμό των ατόμων που έχει το στοιχείο. Αν $N(t)$ είναι ο αριθμός των ατόμων, τότε



Πυρηνική δραστηριότητα : $\dot{N} = -\lambda N$

όπου λ : σταθερά διάσπασης. Ο χρόνος T στο οποίο η μισή ποσότητα του αρχικού αριθμού ατόμων διασπάται ονομάζεται η ημι-ζωή του στοιχείου. Αποδείξτε ότι η ημι-ζωή και η σταθερά διάσπασης σχετίζονται μέσω του τύπου

$$T\lambda = \ln 2 = 0,693 .$$

Παρατηρούμε ότι ο νόμος που περιγράφει αυτό το πρόβλημα είναι η ΔΕ

$$\dot{N} + \lambda N = 0. \qquad (1)$$

Αυτή η ΔΕ ανήκει στο σύνολο εκείνων των ΔΕ που είναι της μορφής

(2) $$A x' + B x = C \qquad \left[A(t)\, x'(t) + B(t) x(t) = C(t)\right]$$

και ονομάζονται <u>πρώτης τάξης, γραμμικές ΔΕ</u>. Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις A, B, C είναι συνεχείς σε κάποιο διάστημα $I \subset \mathbb{R}$ και $A(t) \neq 0$ $\forall t \in I$. Τότε η (1) είναι ισοδύναμη στο I με την (δηλ., έχει τις ίδιες λύσεις στο I)

$$x' + \frac{B}{A} x = \frac{C}{A},$$

η οποία είναι μία ΔΕ της μορφής:

(3) $$x' + p x = q \qquad \left[x'(t) + p(t) x(t) = q(t)\right]$$

όπου $p(t), q(t)$ συνεχείς στο I. Θ.δ.ο. πολ/ζοντας και τα δύο μέλη της (3) με μία συνάρτηση, <u>τον ολοκληρωτικό παράγοντα</u>, το Α.Μ. γίνεται μία παράγωγος και η (3) γίνεται

(4) $$y' = g .$$

Για ένα $t_0 \in I$, θέτουμε

$$P = \int_{t_0} p,$$

δηλ.,

$$P(t) = \int_{t_0}^{t} p(s)\,ds, \quad \forall t \in I, \tag{5}$$

και από το 1° ΘΘΑΛ βρίσκουμε ότι

$$P' = p, \quad [\,P'(t) = p(t)\,], \text{ στο } I. \tag{6}$$

Πολ/ζοντας το Α.Μ της ΔΕ (3) με την συνάρτηση

$$\boxed{\text{Ολοκληρωτικός παράγοντας}: \quad e^{P(t)} = e^{\int_{t_0}^{t} p(s)ds}} \tag{7}$$

έχουμε ότι:

$$\text{Α.Μ.}: \quad e^{P(t)}\left(x'(t) + p(t)x(t)\right) = D_t\left(e^{P(t)}x(t)\right), \tag{8}$$

ενώ πολ/ζοντας το ΔΜ της (3) με $e^{P(t)}$ βρίσκουμε:

$$\text{ΔΜ}: \quad e^{P(t)}q(t). \tag{9}$$

Αφού το $e^{P(t)}$ δεν μηδενίζεται ποτέ, έπεται ότι η (3) είναι ισοδύναμη με την

$$D_t\big(\underbrace{e^{P(t)}x(t)}_{y(t)}\big) = \underbrace{e^{P(t)}q(t)}_{g(t)} \tag{10}$$

η οποία είναι της μορφής $y' = g$ της προηγούμενης παραγράφου.
Από το Θεώρημα της προηγούμενης παραγράφου έπεται ότι η (10) έχει μοναδική λύση που περνά από το $x(t_0) = x_0$,

$$e^{P(t)}x(t) = e^{P(t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{P(s)}q(s)\,ds,$$

ή, αφού $P(t_0) = 0$ $(\Rightarrow e^{P(t_0)} = 1)$,

$$\boxed{x(t) = e^{-P(t)}x_0 + e^{-P(t)}\int_{t_0}^{t} e^{P(s)}q(s)\,ds}. \tag{11}$$

Έτσι, πολ/ζοντας επί τον ολοκληρωτικό παράγοντα έχουμε στα χέρια μας μία μέθοδο λύσης της ΔΕ. Έτσι έχουμε αποδείξει το ακόλουθο θεώρημα ύπαρξης - μοναδικότητας.

Θεώρημα

Αν p, q είναι συνεχείς σε ένα διάστημα I, αν $t_0 \in I$, και αν x_0 είναι ένας πραγματικός αριθμός, τότε η ΔΕ

$$\dot{x} + px = q$$

έχει μοναδική λύση στο I που ικανοποιεί $x(t_0) = x_0$, και δίνεται από την σχέση (11). $\boxtimes$

Επανερχόμαστε τώρα στο αρχικό μας πρόβλημα,

$$\dot{N} + \lambda N = 0.$$

Ένας ολοκληρωτικός παράγοντας είναι ως εξής: Επειδή

$$P(t) = \int^t p(\tau)d\tau = \int^t \lambda d\tau = \lambda t,$$

και άρα: $e^{P(t)} = e^{\lambda t}$ - ολοκληρωτικός παράγοντας. Έτσι:

$$e^{\lambda\tau}\left(\dot{N}(\tau) + \lambda N(\tau)\right) = D_\tau\left(e^{\lambda\tau} N(\tau)\right) = 0.$$

Θέτοντας $N(0) = N_0$ και ολοκληρώνοντας έχουμε:

$$\int_0^t D_\tau\left[e^{\lambda\tau} N(\tau)\right] d\tau = e^{\lambda t} N(t) - N_0 = 0$$

δηλαδή η λύση είναι:

$$\boxed{N(t) = N_0\, e^{-\lambda t}} \qquad (12)$$

Εξ' ορισμού της ημιζωής T, ($\frac{1}{2}N_0$ να διασπασθεί) έχουμε:

$$N(T) = \frac{1}{2}N_0 = N_0\, e^{-\lambda T}$$

και άρα

$$e^{\lambda T} = 2,$$

ή

$$\boxed{\lambda T = \ln 2}. \qquad \boxtimes \qquad (13)$$

Παράδειγμα: Λύσατε:

a. $\dot{x} + 3x = \cos$

b. $\begin{cases} \dot{x}(t) - 2t\,x(t) = e^{2t} \\ x(0) = 1 \end{cases}$

Απάντηση

a) Ένας ολοκληρωτικός παράγοντας είναι ο e^{3t}:

$$e^{3t}\left(\dot{x}(t)+3x(t)\right)=D_t\left(e^{3t}x(t)\right)=e^{3t}\cos t.$$

Ολοκληρώνοντας έχουμε,

$$e^{3t}x(t)=\int e^{3t}\cos t\,dt$$

$$\overset{*}{=}\frac{e^{3t}}{10}(3\cos t+\sin t)+c,$$ (βλ. άλλη σελίδα)

και άρα η συνάρτηση

$$x(t)=ce^{-3t}+\frac{3}{10}\cos t+\frac{1}{10}\sin t,$$

είναι η γενική λύση της εξίσωσης.

b) Επειδή $p(t)=-2t$, ένας ολοκλ. παρ είναι ο $e^{-t^2}=e^{P(t)}$.
Άρα,

$$e^{-t^2}\left(\dot{x}(t)-2t\,x(t)\right)=D_t\left(e^{-t^2}x(t)\right)=e^{-t^2+2t},$$

και άρα

$$e^{-t^2}x(t)-x(0)=\int_0^t e^{-s^2+2s}\,ds,$$

ή, χρησιμοποιώντας το ότι $x(0)=1$,

$$x(t)=e^{t^2}+e^{t^2}\int_0^t e^{-s^2+2s}\,ds.$$

$\int_0^t e^{-s^2+2s}\,ds$ δεν υπολογίζεται μέσω στοιχειωδών συναρτήσεων αλλά μέσω των τιμών της <u>συνάρτησης σφάλματος</u>:

$$\mathrm{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-u^2}\,du. \qquad (14)$$

(Αυτές οι τιμές υπολογίζονται είτε από διαθέσιμους πίνακες ή αριθμητικά.) Έχουμε:

$$\int_0^t e^{-s^2+2s}\,ds=e\int_0^t e^{-(s-1)^2}\,ds\overset{(u=s-1)}{=}e\int_{-1}^{t-1}e^{-u^2}\,du$$

$(\leftarrow)$ $$\overset{*}{=}e\int_0^{t-1}e^{-u^2}\,du+e\int_0^1 e^{-u^2}\,du=\frac{e\sqrt{\pi}}{2}\left\{\mathrm{erf}(t-1)+\mathrm{erf}(1)\right\}$$

και άρα:

$$x(t)=e^{t^2}+\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{t^2+1}\left[\mathrm{erf}(t-1)+\mathrm{erf}(1)\right].$$

$(\leftarrow)$ $\int_{-1}^{t-1}e^{-u^2}=\int_{-1}^{0}e^{-u^2}+\int_0^{t-1}=\int_0^1 e^{-(-u)^2}+\int_0^{t-1}$ $\left[\text{διότι: } \int_{-t}^{0}f(x)\,dx=\int_0^t f(-x)\,dx\right]$

(*) Υπολογισμός του $\int e^{at}\cos t\, dt$

$$\int e^{at}\cos t\, dt = \frac{1}{a}\cos t\, e^{at} - \frac{1}{a}\int (-\sin t)\, e^{at}\, dt =$$

$$\left[\begin{array}{ll} u = \cos t, & du = -\sin t \\ Dv = e^{at}, & v = \frac{1}{a} e^{at} \end{array}\right] = \frac{1}{a}\cos t\, e^{at} + \frac{1}{a}\int \sin t\, e^{at}\, dt =$$

$$= \frac{1}{a}\cos t\, e^{at} + \frac{1}{a}\left[\frac{1}{a}\sin t\, e^{at} - \frac{1}{a}\int e^{at}\cos t\, dt\right] =$$

$$\left[\begin{array}{ll} u = \sin t, & Du = \cos t \\ Dv = e^{at}, & v = \frac{1}{a} e^{at} \end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{a}\cos t\, e^{at} + \frac{1}{a^2}\sin t\, e^{at} - \frac{1}{a^2}\int e^{at}\cos t\, dt$$

Άρα:

$$\left(1 + \frac{1}{a^2}\right)\int e^{at}\cos t\, dt = \frac{1}{a^2}\left(a\cos t + \sin at\right) e^{at}$$

ή

$$\boxed{\int e^{at}\cos t\, dt = \frac{1}{a^2+1}\left(a\cos t + \sin t\right) e^{at}}$$

~ • ~

Εισάγοντας τώρα την μιγαδική εκθετική συνάρτηση θα δούμε ότι η θεωρία που αναπτύξαμε μέχρι τώρα μας βοηθά να λύσουμε, μέσω της <u>μιγαδικής</u> γραμμικής ΔΕ 1ης τάξης, ένα 2x2 <u>σύστημα</u> ΔΕ.

Μαθηματική Μοντελοποίηση

Φυλλάδιο Ασκήσεων 3

1. Λύσατε τις ακόλουθες εξισώσεις:

1. $\dot{x}+3x=0$, 2. $\dot{x}+bx=0$ 3. $\dot{x}+3x=e^{3t}$, 4. $\dot{x}+3x=e^{-3t}$

5. $\dot{x}+x=t^2$, $x(1)=3$

6. $\dot{x}-tx=0$, $x(0)=0$

7. $\dot{x}+tx=t$, $x(1)=0$

8. $\dot{x}-tx=1$, $x(0)=0$

9. $\dot{x}+tx=1$, $x(0)=2$

10. $y'=\dfrac{y-x}{x}$

(2.) Το στοιχείο Θόριο C έχει χρόνο ημιζωής 61 min. Πόσος χρόνος χρειάζεται έτσι ώστε 90% Θορίου C να διασπασθεί;

(3.) Υποθέσατε ότι η y είναι μία θετική συνάρτηση και λύση σε ένα διάστημα I της εξίσωσης Bernoulli

$$y'+py=qy^n \quad , \; n: \text{σταθερά} \neq 0,1.$$

Αποδείξτε ότι η $z=y^{1-n}$ είναι μια λύση στο I της γραμμικής ΔΕ

$$z'+(1-n)pz=(1-n)q.$$

Λύσατε την εξίσωση Bernoulli

$$y'(x)+xy(x)=y^{1/2}(x).$$

(4.) Αν N(t) συμβολίζει τον αριθμό των ατόμων ενός πληθυσμού την χρονική στιγμή t, είναι γνωστό ότι για απομονωμένους, ομογενείς πληθυσμούς, ο ρυθμός αύξησης του πληθυσμού μπορεί να προσεγγισθεί από την ΔΕ

$$N'=KN(c-N) \quad : \text{"Λογιστική εξίσωση"}.$$

Ο αριθμός c παριστάνει τον μέγιστο πληθυσμό τον οποίον μπορεί να υποστηρίξει το περιβάλλον. Γνωρίζουμε από θεωρήματα ύπαρξης- μονοσημάντου ότι αυτή η εξίσωση έχει μοναδική λύση που ικανοποιεί : $N(0) = N_0$. Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα του προβλήματος 3, αποδείξτε ότι η λύση της λογιστικής εξίσωσης είναι:

$$N(t) = \frac{c}{1 + b e^{-kct}} , \quad b = \frac{c}{N(0)} - 1 .$$

5. Βασιζόμενοι σε κάθε ένα από τα ακόλουθα δύο σύνολα στοιχείων για την αύξηση του πληθυσμού στις Η.Π.Α., προβλέψατε τον πληθυσμό το έτος 1960:

	Απογραφή	Πληθυσμός σε εκατομμύρια
a)	1800	5
	1850	25
	1900	76
b)	1920	106
	1930	123
	1940	132

6. Αποδείξτε την εξίσωση (17).

7. Αποδείξτε τις ιδιότητες (19), (20), (21), (22).

8. Αν λ είναι ένας μιγαδικός αριθμός, αποδείξτε ότι η συνάρτηση $x(t) = e^{\lambda t}$ είναι η μοναδική λύση της

$$\dot{x} = \lambda x , \quad x(0) = 1 .$$

9. Δείξτε ότι η $x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$ είναι μία λύση της

$$\ddot{x} - (\lambda_1 + \lambda_2)\dot{x} + \lambda_1 \lambda_2 x = 0 .$$