# ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

## ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

## Σημειώσεις – Γραμμική 1ης τάξης (Μέρος Α)

Κοφινάς Γιώργος

Τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών και Επικοινωνιακών Συστημάτων

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

## Άδειες Χρήσης



## Χρηματοδότηση


- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

$\dot{} \to \cdot$
$y \to x$
$x \to t$

## 2. Η ΔΕ $y' = f$

Θεωρείστε το εξής φυσικό <u>πρόβλημα</u>: Ένα μικρό σωμάτιο βάλλεται κατακόρυφα από την επιφάνεια της Γής με αρχική ταχύτητα 1000 m/s. Αγνοώντας ατμοσφαιρικά φαινόμενα και υποθέτοντας ότι η δύναμη της βαρύτητας είναι σταθερή, εκτιμείστε το μέγιστο ύψος που φτάνει το σωμάτιο.

Έστω $y(t)$ η απόσταση (σε m) του σωμάτιου πάνω απο την Γη σε χρόνο t sec αφού βλήθηκε από την Γη. Άρα οι αρχικές συνθήκες της κίνησης του σωμάτιου είναι

$$\left.\begin{array}{l} y(0) = 0 \\ \text{και} \\ \dot{y}(0) = 1000 \end{array}\right\} \text{Αρχικές Συνθήκες.} \qquad (1)$$

Εστω $g$ η (σταθερή) επιτάχυνση ($m/s^2$) της βαρύτητας. Ο νόμος που διέπει την κίνηση του σωμάτιου είναι ο νόμος του Νεύτωνος δηλ.,

$$\boxed{\ddot{y} = -g} \qquad (2)$$

As εξετάσουμε ποιά από τα τέσσερα στάδια της μαθηματικής μοντελοποίησης του προβλήματος, δηλ.,

1. Μαθηματική δομή
2. Φυσικός Νόμος
3. Ανάλυση του νόμου
4. Πειραματικά δεδομένα,

γνωρίζουμε. Το (2.) δίνεται απο την (2). Το (1) είναι βεβαίως ο Απειροστικός Λογισμός. Οι Νεύτων και Leibniz ανεξάρτητα ανακάλυψαν τα θεμελιώδη θεωρήματα του Απειροστικού Λογισμού και αυτά οδηγούν στο θεμελιώδες θεώρημα ύπαρξης και μονοσημάντου των διαφορικών εξισώσεων το οποίο τώρα αποδεικνύουμε και το οποίο οδηγεί στην μελέτη του τρίτου βήματος (3.) της μαθηματικής μοντελοποίησης για το παραπάνω πρόβλημα.

<u>Θεώρημα</u>

Αν $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι μία συνεχής συνάρτηση, $x_0 \in I$ και αν $y_0$ είναι ένας αριθμός στο $(-\infty, \infty)$, τότε η ΔΕ

$$y' = f \qquad \left[\text{ή } \; y'(x) = f(x)\right] \tag{3}$$

έχει μοναδική λύση στο $I$ που ικανοποιεί

$$y(x_0) = y_0 . \tag{4}$$

Η λύση είναι η εξής:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f . \tag{5}$$

<u>Παρατήρηση</u>

Πολλές φορές στις διαφορικές εξισώσεις χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\int f$ του αόριστου ολοκληρώματος της $f$. Αν η $f$ είναι συνεχής στο διάστημα $I$ τότε έχουμε την ισοδυναμία:

$$\boxed{F = \int f \iff F \text{ είναι μία λύση της } y' = f} \tag{6}$$

Αν $c$ είναι μία σταθερά, τότε η $\int f + c$ είναι η γενική λύση της $y' = f$. ■

<u>Απόδειξη του θεωρήματος</u>

($\Leftarrow$) Έστω ότι η $y$ είναι μία λύση της (3) που ικανοποιεί την (4). Τότε από το 2ο Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού* έχουμε,

$$\int_{x_0}^{x} f = \int_{x_0}^{x} y' = y(x) - y(x_0) = y(x) - y_0 \tag{7}$$

και άρα,

---

* $F'$ συνεχής στο $I$, $a, b \in I \Rightarrow \int_a^b F' = F(b) - F(a)$

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f \quad . \qquad (8)$$

($\Rightarrow$) Το 1ο Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού μας λέει ότι η συνάρτηση που ορίζεται από την (8) είναι μία λύση(*), και προφανώς αυτή ικανοποιεί την αρχική συνθήκη (4). ■

Ας επιστρέψουμε τώρα στην εξ. (2). Από το 2ο Θ.Θ.Α.Λ. έχουμε

$$\int_0^t \ddot{y} = \dot{y}(t) - \dot{y}(0) = -\int_0^t g = -gt$$

κι άρα,

$$\dot{y}(t) = \overbrace{\dot{y}(0) - gt}^{f}, \qquad (9)$$

και έτσι,

$$y(t) = y(0) + \int_0^t (\dot{y}(0) - g\tau)\, d\tau$$

$$= y(0) + \dot{y}(0)\, t - \frac{1}{2} g t^2 .$$

Άρα,

$$y(t) = y(0) + \dot{y}(0)\, t - \frac{1}{2} g t^2 = \dot{y}(0)\, t - \frac{1}{2} g t^2 . \qquad (10)$$

Από την (9) έχουμε ότι την στιγμή

$$t = \frac{\dot{y}(0)}{g} \qquad (11)$$

η ταχύτητα μηδενίζεται,

$$\dot{y}(t) = 0$$

και αφού $\ddot{y}(t) < 0 \quad \forall t$, έπεται ότι το $y_{max}$ αντιστοιχεί σε αυτόν το χρόνο, δηλ.,

---

* $D_t \int_a^t f = f(t)$, $f$ συνεχής στο $I$, $a, t \in I$.

$$y_{max} = \dot{y}(0)\,\frac{\dot{y}(0)}{g} - \frac{\dot{y}^2(0)}{2g} \Rightarrow$$

$$\boxed{y_{max} = \frac{\dot{y}^2(0)}{2g}.} \qquad (12)$$

Η επιτάχυνση $g \simeq 9.8\,m/s^2$ και $\dot{y}(0) = 1000\,m/s$. Άρα βρίσκουμε την εκτίμηση του μέγιστου ύψους του σωματίου,

$$\boxed{y_{max} \cong 51020\ m}. \qquad (13)$$

Παράδειγμα

Λύστε την εξίσωση

$$y' = \frac{1}{y}.$$

Απάντηση

Υποθέτουμε ότι η εξίσωση έχει λύση σε κάποιο διάστημα. Επειδή $y'y = 1$, έχουμε

$$yy' = \frac{1}{2}D(y^2) = 1 \qquad (14)$$

και άρα από το 2º ΘΘΛ έχουμε

$$y^2 = 2x + c.$$

Άρα (αφού η $y$ πρέπει να είναι διαφορίσιμη)

$$y(x) = \begin{cases} +\sqrt{2x+c} \\ -\sqrt{2x+c} \end{cases} \quad \text{στο} \quad \left(-\frac{c}{2}, \infty\right). \qquad (15)$$

Αυτή είναι και η γενική λύση της (14). Αν θεωρήσουμε την αρχική συνθήκη $y(0) = 1$, τότε $c = 1$ και $y(x) = \sqrt{2x+1}$ στο $\left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$.

Παρατηρείστε ότι στα τελευταία παράδειγματα χρησιμοποιήσαμε το αόριστο ολοκλήρωμα, κάτι που γενικότερα στις διαφορικές εξισώσεις χρησιμοποιείται ευρέως: Αν η $f$ είναι συνεχής στο διάστημα $I$ τότε η $F = \int f$ ανν η $F$ είναι μία λύση της ΔΕ $y' = F$ στο διάστημα $I$. Η $y = \int f + c$, $c$: σταθ., είναι η γενική λύση της ΔΕ $y' = f$, το οποίο σημαίνει ότι αν γνωρίζουμε μία λύση της ΔΕ τότε το άθροισμα μιας σταθεράς και αυτής της λύσης είναι μία λύση στο $I$, και όλες οι λύσεις της ΔΕ είναι αυτής της μορφής. Έτσι, για αυτού του τύπου την ΔΕ, χρειαζόμαστε να έχουμε καλή γνώση των μεθόδων ολοκλήρωσης. Αυτό προϋποθέτει γνώση των παραγώγων και των δύο θεμελιωδών θεωρημάτων του απειροστικού λογισμού. Π.χ. για να λύσουμε την ΔΕ

$$y' = 1 + \cos,$$

λέμε ότι

$$\begin{aligned} y &= \int (1 + \cos) + c \\ &= \int 1 + \int \cos + c \\ &= I + \sin + c. \end{aligned}$$

Το πρόβλημα της λύσης της ΔΕ $y' = f$ είναι ισοδύναμο με τον υπολογισμό ενός ολοκληρώματος μέσω του $2^{ου}$ ΘΘΛ, δηλ.,

$$y' = f \Rightarrow \int f = y.$$

Για να βρούμε την λύση $y$ αρκεί να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\int f$. Κάθε τύπος που δίνει την παράγωγο μιας συνάρτησης, είναι ένας τύπος που υπολογίζει ένα ολοκλήρωμα. Έτσι η θεωρία των μεθόδων ολοκλήρωσης είναι η θεωρία της ΔΕ $y' = f$.

Για να εμπλουτίσουμε την θεωρία της διαφορικής εξίσωσης $y' = f$ με περισσότερα παραδείγματα, ανακαλούμε τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων μέσω γνωστών τύπων παραγώγων και <u>του 2ου ΘΘΛ.</u> Ξεκινούμε από τους ακόλουθους τύπους παραγώγων τους οποίους θεωρούμε θεμελιώδεις για ότι ακολουθεί.

<u>Θεώρημα 1.</u>

Σε κάποιο διάστημα $I$ ισχύει:

1) $D\,I^{n+1} = (n+1)\,I^n$, $n$ ακέραιος

2) $D\left(\frac{1}{n+1} f^{n+1}\right) = f^n f'$, $n \neq -1$, $f'$ συνεχής

3) $D \sin = \cos$

4) $D \cos = -\sin$

5) $D \tan = \sec^2$

6) $D \cot = -\csc^2$

7) $u v' = D(uv) - u'v$ (παραγοντική παραγώγιση)

8) Αν $y'(x) = f(x)$ και $z(t) = y(u(t))$, τότε
$$z'(t) = y'(u(t))\,u'(t) = f(u(t))\,u'(t),$$
όπου $u'$ συνεχής. (Αλλαγή μεταβλητής)

Το προηγούμενο θεώρημα οδηγεί σε αντίστοιχα αποτελέσματα για ολοκληρώματα, μέσω του $2^{ου}$ ΘΘΛ, τι αποδείξεις των οποίων είναι όλες άμεσες.

<u>Θεώρημα 2.</u>

1. $\displaystyle\int x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad n \neq -1.$

2. $\displaystyle\int f^n f' = \frac{1}{n+1} f^{n+1}, \quad n \neq -1.$

3. $\displaystyle\int \cos = \sin$

4. $\displaystyle\int \sin = -\cos$

5. $\displaystyle\int \sec^2 = \tan$

6. $\displaystyle\int \csc^2 = -\cot$

7. $\displaystyle\int u v' = uv - \int u' v$, (κατά παράγοντες ολοκλήρωση)

8. $\displaystyle\int_a^b f = \int_\alpha^\beta (f \circ u)\, u'$, (ολοκλήρωση με αντικατάσταση),

   $a = u(\alpha), \quad b = u(\beta).$

Με βάση το θεώρημα 2, μπορούμε να υπολογίζουμε πολλών τύπων ολοκληρώματα – δηλ., λύσεις της $y' = f$. Ας δούμε κάποια παραδείγματα, αρχίζοντας με την χρήση του $2^{ου}$ ΘΘΛ.

1. $\int \sin^3 = \frac{1}{3}\cos^3 - \cos$ , στο $(-\infty, \infty)$.

$(ή: \ y' = \sin^3)$

Λύση

$$D\left(\frac{1}{3}\cos^3 - \cos\right) = -\cos^2\sin + \sin = \sin(1-\cos^2) = \sin^3.$$

2. $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2(a^2+x^2)^{1/2}}$ , στο $(-\infty, \infty)$.

$$\left(ή \quad y' = \frac{1}{(a^2+x^2)^{3/2}}\right)$$

ΛΥΣΗ

$$D_x\left[\frac{x}{a^2(a^2+x^2)^{1/2}}\right] = \frac{1}{a^2}\left[(a^2+x^2)^{-1/2} - x^2(a^2+x^2)^{-3/2}\right]$$

$$= \frac{1}{a^2}(a^2+x^2)^{-3/2}(a^2+x^2-x^2) = \frac{1}{(a^2+x^2)^{3/2}}.$$

3. $\int x(1+x^2)^{1/2}dx$

ή $(y' = x(1+x^2)^{1/2})$

ΛΥΣΗ

$$\int x(1+x^2)^{1/2}dx = \frac{1}{2}\int (1+x^2)^{1/2} D_x(1+x^2)\,dx$$

$$= \frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2}.$$

μέσω του Θ.2, 2.

$\underline{\underline{4}}$ $\int \cos^3$

$(\acute{\eta}: y' = \cos^3)$.

**ΛΥΣΗ**

$\int \cos^3 = \int \cos^2 \cos = \int (1-\sin^2)\cos = \int \cos - \int \cos \sin^2$

$= \int \cos - \int \sin^2 D\sin = \sin - \frac{1}{3}\sin^3$.

$\underline{\underline{5.}}$ $\int \cos at \, dt = \frac{1}{a} \sin at, \quad a \neq 0.$

$(\acute{\eta}: \; y' = \cos at)$

**ΛΥΣΗ**

$\int \cos at \, dt = \frac{1}{a} \int D_t (\sin at)\, dt = \frac{1}{a} \sin at, \quad a \neq 0.$

$\underline{\underline{6.}}$ $\int x^2 \sqrt{x+1}\, dx = \frac{2(15x^2-12x+8)}{105} (x+1)^{3/2},$

$(\acute{\eta} \;\; y' = x^2\sqrt{x+1})$

**ΛΥΣΗ**

Παραγωγίζουμε την υποτιθέμενη λύση:

$\left[\frac{2(15x^2-12x+8)}{105}(x+1)^{3/2}\right]' = \frac{2}{105}\left[(30x-12)(x+1)^{3/2} + \right.$

$\left. + \frac{3(15x^2-12x+8)}{2}(x+1)^{1/2}\right] = \frac{2(x+1)^{1/2}}{105}\left[(30x-12)(x+1)\right.$

$\left. + \frac{3(15x^2-12x+8)}{2}\right] = \frac{2}{105}(x+1)^{1/2}\left[30x^2 + 18\cancel{x} - \cancel{12} + \frac{45x^2}{2} - \cancel{18x} + \cancel{12}\right]$

$= x^2\sqrt{x+1}$.

7. Υπολογίστε το ορισμένο ολοκλήρωμα
$$\int_0^5 x^2 \sqrt{x+1}\, dx .$$

ΛΥΣΗ

Επειδή η ΔΕ $y' = x^2\sqrt{x+1}$ έχει γενική λύση
$$y(x) = y(0) + \int_0^x t^2 \sqrt{t+1}\, dt ,$$

συμπεραίνουμε ότι η τιμή του εν λόγω ορισμένου ολοκληρώματος αντιστοιχεί στην τιμή της λύσης $y(5)$ η οποία διέρχεται από την αρχική συνθήκη $y(0)=0$. Από την Άσκηση 6 έχουμε ότι αρκεί να υπολογίσουμε την τιμή της παράστασης που δίνει το ολοκλήρωμα για $x=5$. Αυτό δίνει αποτέλεσμα 90.1.

8. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα
$$\int (2t+1)(t^2+t+1)^3\, dt .$$
$$\left(y' = (2x+1)(x^2+x+1)^3 .\right)$$

ΛΥΣΗ

Μέσω του Θεωρ. 2.2.:
$$\int (2t+1)(t^2+t+1)^3 dt = \int (t^2+t+1)^3\, d(t^2+t+1)$$
$$= \frac{1}{4}(t^2+t+1)^4 + c .$$

9. Ομοίως το $\int \cos \sin^3$.
$$\left(y' = \cos x \sin^3 x\right).$$

ΛΥΣΗ: $\int \cos x \sin^3 x\, dx = \int \sin^3 x\, d\sin x = \frac{1}{4}\sin^4 x + c .$

10. Ομοίως: $\int (2x+1)^5$.

$(y' = (2x+1)^5)$

ΛΥΣΗ

$$\int (2x+1)^5 = \frac{1}{2}\int (2x+1)^5 \, d(2x+1) = \frac{1}{12}(2x+1)^6 + c.$$

11. Ομοίως: $\int \sin a\theta \, d\theta$.

$(y' = \sin a\theta)$

ΛΥΣΗ

Επειδή $d(\cos a\theta) = -a \sin a\theta \, d\theta \Rightarrow \sin a\theta \, d\theta = -\frac{1}{a} d(\cos a\theta)$

έχουμε:

$$\int \sin a\theta \, d\theta = -\frac{1}{a}\int d \cos(a\theta) = -\frac{1}{a}\cos(a\theta) + c$$

12. Ομοίως: $\int \frac{t}{\sqrt{a^2+t^2}} dt$.

$$\left(y' = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\right)$$

ΛΥΣΗ

$$\int \frac{t}{\sqrt{a^2+t^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(a^2+t^2)}{\sqrt{a^2+t^2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}(a^2+t^2)^{1/2} + c$$

$$= \sqrt{a^2+t^2} + c$$

13. Αποδείξτε ότι $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\sqrt{1-x^2}$, στο $[-1,1]$.

$$\left(y' = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in [-1,1]\right)$$

ΛΥΣΗ: $(-\sqrt{1-x^2})' = -\frac{1}{2}(1-x^2)^{-1/2}\cdot(-2x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Προχωρούμε τώρα σε ένα παράδειγμα ΔΕ της μορφής $y' = f(x)$ που λύνονται υπολογίζοντας τα ολοκληρώματα μέσω "ολοκλήρωσης κατά παράγοντες," Θ.2.7, (βλ. ασκ. 1d.).

14. Να λυθεί η ΔΕ $y' = \ln(1+x^2)$.

ΛΥΣΗ

$$\int \ln(1+x^2)\,dx = \int (x)' \ln(1+x^2)\,dx = x\ln(1+x^2) -$$

$$\int x\left[\ln(1+x^2)\right]' dx = x\ln(1+x^2) - 2\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx,$$

άρα αρκεί να υπολογίσουμε το $\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$. Θέτουμε

$x = \tan u \iff u = \arctan x$, και άρα

$$1+x^2 = 1+\tan^2 u = \sec^2 u.$$

Έτσι,

$$\frac{x^2}{1+x^2} = \frac{\tan^2 u}{\sec^2 u},$$

ενώ,

$$dx = d\tan u = \sec^2 u\,du.$$

Άρα

$$\frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \frac{\tan^2 u}{\sec^2 u}\sec^2 u\,du = \tan^2 u\,du$$

και έτσι

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \int \tan^2 u\,du = \int (\sec^2 u - 1)\,du = \tan u - u$$

$$= x - \arctan x.$$

Άρα

$$y = x\ln(1+x^2) - 2x + 2\arctan x.$$

(ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΗ : $y' = \ln(1+x^2) + \frac{2x^2}{1+x^2} - 2 + \frac{2}{1+x^2} = \ln(1+x^2) +$
$+ \frac{2x^2 - 2 - 2x^2 + 2}{1+x^2} = \ln(1+x^2)$.)

15. Να λυθεί η ΔΕ $y' = \cos^2 x$, και να βρεθεί η τιμή της λύσης με αρχική συνθήκη $y(0)=0$ στο σημείο $2\pi$.

ΛΥΣΗ

$y' = \cos^2 \Rightarrow y(x) = \int \cos^2 x + c$, είναι η γενική λύση της ΔΕ. Έχουμε:

$$\int \cos^2 = \int \cos\cos = \int \cos D\sin \overset{\downarrow}{=} \cos\sin - \int \sin D\cos =$$

$$= \cos\sin + \int \sin^2 = \cos\sin + \int (1-\cos^2) = \cos\sin + I - \int\cos^2 .$$

Άρα:

$$2\int \cos^2 = \cos\sin + I \quad \text{ή} \quad \int \cos^2 = \frac{1}{2}(I + \cos\sin).$$

Έτσι

$$y(x) = \frac{1}{2}(x + \cos x \sin x) + c .$$

Επειδή $y(0)=0 \Rightarrow$

$$0 = \frac{1}{2}(0 + \cos 0 \sin 0) + c$$

δηλ.,

$$c=0$$

και άρα η λύση που περνά από το 0 είναι η

$$y(x) = \frac{1}{2}(x + \cos x \sin x).$$

Τότε,

$$y(2\pi) = \frac{1}{2}(2\pi + \cos 2\pi \sin 2\pi) = \pi .$$

Ας δούμε τέλος παραδείγματα λύσεως της ΔΕ $y' = f$ με χρήση "ολοκλήρωσης με αντικατάσταση", Θ.2.8.

**16.** Να λυθεί η ΔΕ $y' = \sqrt{4-x^2}$, και να υπολογιστεί η τιμή της λύσης με αρχική συνθήκη $y(0)=0$ στο σημείο $x=2$.

ΛΥΣΗ

Αρκεί να υπολογίσουμε το $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$. Μέσω αλλαγής της μεταβλητής $x$, επιχειρούμε να διώξουμε το ριζικό. Θέτοντας,

$$x = u(t) = 2\sin t,$$

έχουμε

$$dx = 2\cos t\, dt$$

και έτσι

Στην αλλαγή μεταβλητής προσέχουμε δύο πράγματα: 1ο: Πως αλλάζει το $dx$, 2ον: πως αλλάζουν τα άκρα ολοκλήρωσης. Ασχολούμαστε και με τα δύα αυτά διαδοχικά.

$$\begin{aligned}\sqrt{4-x^2}\,dx &= 2\sqrt{4-4\sin^2 t}\,\cos t\, dt\\ &= 4\sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\, dt\\ &= 4\,|\cos|\cos\, dt.\\ &= 4\cos^2 dt, \quad \text{στο } t\in[0,\pi/2].\end{aligned}$$

Έτσι, από την άσκηση 14 για το $\int \cos^2$ έχουμε (παρατηρούμε τα άκρα λόγω της αλλαγής μεταβλητής)

$$\int_0^2 \sqrt{4-I^2} = 4\int_0^{\pi/2} \cos^2 = 2\int_0^{\pi/2} (I + \cos\cdot\sin) = \pi.$$

**17.** Ομοίως: $\int_0^2 x^5\sqrt{8-x^3}\,dx$.

ΛΥΣΗ

Πάλι επιχειρούμε να διώξουμε το ριζικό. Θέτοντας

$t = 8-x^3 \Rightarrow x^3 = 8-t$, $3x^2dx = -dt \rightsquigarrow dx = -dt/3x^2$.

και έτσι:

$$\int_0^2 x^5\sqrt{8-x^3}\,dx = -\frac{1}{3}\int_8^0 (8-t)\sqrt{t}\,dt.$$

διότι για $x=0 \rightsquigarrow t=8$ και για $x=2 \rightsquigarrow t=0$.

Άρα:

$$\int_0^2 x^5\sqrt{8-x^3}\,dx = \frac{1}{3}\int_0^8 (8-t)\sqrt{t}\,dt = -\frac{1}{3}\int_0^8 t^{3/2}\,dt + \frac{8}{3}\int_0^8 t^{1/2}\,dt$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\frac{5}{2}}\,t^{5/2}\Big]_0^8 + \frac{8}{3}\cdot\frac{1}{\frac{3}{2}}\,t^{3/2}\Big]_0^8 =$$

$$= -\frac{2}{15}\,8^{5/2} + \frac{16}{9}\,8^{3/2} \overset{!}{=} \frac{2^9\sqrt{2}}{45}.$$