ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Σημειώσεις – Εισαγωγή

Κοφινάς Γιώργος

Τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών και Επικοινωνιακών Συστημάτων

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

1α. Μαθηματική μοντελοποίηση

Η βασική χρησιμότητα των ΔΕ είναι στην διατύπωση και μελέτη των νόμων που διέπουν φυσικά και άλλα φαινόμενα. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται <u>μαθηματική μοντελοποίηση</u> και συνίσταται στην κατασκευή και μελέτη μαθηματικών μοντέλων για την περιγραφή φυσικών φαινομένων.

Η μαθηματική μοντελοποίηση ενός φυσικού φαινομένου αποτελείται από τις εξής φάσεις (ή στάδια):

1. Μαθηματική δομή

2. Διατύπωση του νόμου ως ΔΕ

3. Μελέτη των λύσεων της ΔΕ

4. Πειραματική επαλήθευση

Ας περιγράψουμε κάθε ένα απο τα τέσσερα βασικά στάδια της μαθηματικής μοντελοποίησης ώστε να δούμε την σημασία των διαφορικών εξισώσεων.

1. Μαθηματική δομή.

Ως παράδειγμα μπορούμε να θεωρήσουμε την ευκλείδιο γεωμετρία, ή τον απειροστικό λογισμό ή την γραμμική άλγεβρα. Ο μαθηματικός ανακαλύπτει μια μαθηματική δομή και την μελετά ως ανεξάρτητη οντότητα. Αποδεικνύει και καταγράφει τις προτάσεις, τα θεωρήματα, τα πορίσματα της δομής που ανακάλυψε ως συνέπειες κάποιων λίγων προτάσεων τις οποίες δέχεται ως προφανείς, τα αξιώματα. Σε αυτό το στάδιο η ανάπτυξη της μαθηματικής δομής δεν έχει κάποια σχέση με τις όποιες πιθανές εφαρμογές της, υπάρχει στο μυαλό των μαθηματικών που την μελετούν και αναπτύσσεται αυτόνομα. Όταν η ανάπτυξη της μαθηματικής δομής φτάσει σε κάποιο σημείο μαθηματικής "ωριμότητας", τότε περνάμε στο δεύτερο στάδιο της μαθηματικής μοντελοποίησης.

2. Διατύπωση του νόμου ως ΔΕ.

Ο φυσικός (ή γενικότερα κάποιος επιστήμονας - χημικός, μηχανικός κλπ) ψάχνει για μαθηματικές δομές, αναπτυγμένες από μαθηματικούς, ώστε να τις χρησιμοποιήσει για την διατύπωση των νόμων που διέπουν τα φυσικά φαινόμενα. Π.χ., οι νόμοι της κλασσικής μηχανικής (νόμοι του Νεύτωνος) διατυπώνονται χρησιμοποιώντας τον απειροστικό λογισμό. Ας δούμε τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνος: αυτός συσχετίζει την μάζα m ενός υλικού σημείου, την δύναμη $\underset{\sim}{F}$ που εξασκείται σε αυτό και την επιτάχυνση, η δεύτερη παράγωγος της θέσης του υλικού σημείου, $\ddot{x}$, ως προς τον χρόνο t, και μας λέει ότι αυτές οι τρεις φυσικές ποσότητες συσχετίζονται μεταξύ τους ως εξής:

$$\ddot{x} = F/m. \qquad (*)$$

Αν γνωρίζουμε την μάζα m του υλικού σημείου και την δύναμη που ασκείται σε αυτό, F, τότε ο νόμος $(*)$ μας περιγράφει πλήρως την κίνηση του υλικού σημείου κάθε χρονική στιγμή. Οι γνωστές συναρτήσεις εδώ είναι η F και η θετική σταθερά m, ενώ ζητούμε την θέση $x(t)$ ως συνάρτηση του χρόνου. Ο νόμος $(*)$ ονομάζεται μια ΔΕ.

3. Μελέτη των λύσεων της ΔΕ.

Ο φυσικός "πήρε" από τον μαθηματικό την μαθηματική δομή που του χρησίμευσε για την διατύπωση του φυσ. νόμου, και τώρα καλείται να "δώσει" πίσω κι αυτός κάτι: Δίνει λοιπόν πίσω στον μαθηματικό την ΔΕ που ανακάλυψε (και η οποία όπως είπαμε διέπει το φυσικό φαινόμενο) προς μελέτη. Ο μαθηματικός καλείται τώρα να μελετήσει τις διαφορικές εξισώσεις που παίρνει από τους διάφορους επιστήμονες, να τις εντάξει σε κατηγορίες και για κάθε μια κατηγορία ΔΕ καλείται να αναπτύξει μαθηματικές μεθόδους που θα επιτρέπουν την εξαγωγή συμπερασμάτων για την συμπεριφορά των άγνωστων συναρτήσεων που περιλαμβάνονται στην ΔΕ και περιγράφουν τους αγνώστους του προβλήματος. Αυτές οι άγνωστες συναρτήσεις οι οποίες ικανοποιούν την ΔΕ που παίρνει ο μαθηματικός από τον φυσικό (ή επιστήμονα) του δεύτερου σταδίου της μαθηματικής μοντελοποίησης ονομάζονται <u>λύσεις της ΔΕ</u>. Σκοπός κάθε μαθηματικού που ασχολείται με τις ΔΕ είναι η μελέτη των λύσεων των ΔΕ. Λίγες είναι εκείνες οι ΔΕ των οποίων οι λύσεις μπορούν να βρεθούν πλήρως, ενώ οι περισσότερες κατηγορίες ΔΕ (και οι πιο ενδιαφέρουσες!) δεν λύνονται. Αυτό που προσπαθεί κανείς να κάνει είναι να αναπτύξει μια θεωρία από την οποία να προκύπτει η <u>συμπεριφορά</u> των λύσεων της ΔΕ:

- Αν οι λύσεις υπάρχουν για κάθε χρονική στιγμή, ή αν μετά από κάποια στιγμή παύουν να υπάρχουν
- Αν οι λύσεις είναι ομαλές πάντοτε ή αν παρουσιάζουν σημεία ανωμαλίας, ασυνέχειας κλπ.
- Πόσο μεγάλη μπορεί να γίνει η τιμή κάθε

λύσης της ΔΕ

- Κάτω από ποιές συνθήκες είναι οι λύσεις μοναδικές

κλπ. Αυτού του είδους τα ερωτήματα απασχολούν τον μαθηματικό που ασχολείται με τις διαφορικές εξισώσεις, και οι απαντήσεις σε τέτοια ερωτήματα είναι πολύ χρήσιμες στον επιστήμονα του επόμενου σταδίου της μαθηματικής μοντελοποίησης.

4. Πειραματική επαλήθευση.

Ο μαθηματικός του προηγούμενου σταδίου της μαθηματικής μοντελοποίησης 'πήρε' από τον επιστήμονα την ΔΕ προς μελέτη και άρα πρέπει τώρα κι αυτός κάτι να 'δώσει' πίσω στον φυσικό: Δίνει λοιπόν τα αποτελέσματα της μελέτης των λύσεων της ΔΕ. Αυτά χρησιμοποιεί ο επιστήμονας, έστω φυσικός, για να κρίνει αν οι λύσεις της θεωρίας που περιγράφεται από τον φυσικό νόμο (τον οποίο ο μαθηματικός μελέτησε ως ΔΕ) ανταποκρίνονται ή όχι στην πραγματικότητα, δηλ. στα πειραματικά ή παρατηρησιακά δεδομένα που έχει συλλέξει με την σειρά του ο φυσικός που ασχολείται με την πειραματική επαλήθευση ή διάψευση των φυσικών θεωριών. Αν δεν ανταποκρίνονται στην πραγματικότητα οι λύσεις του φυσικού νόμου τις οποίες μελέτησε ο μαθηματικός, τότε η θεωρία πρέπει να εγκαταλειφθεί ή τουλάχιστον να τροποποιηθεί σε τέτοιο βαθμό και με τέτοιο τρόπο ώστε την επόμενη φορά που θα επαναληφθεί ο 'κύκλος' της μαθηματικής μοντελοποίησης να προκύψουν σωστά πειραματικά αποτελέσματα.

Αν όμως οι λύσεις της ΔΕ, όπως τις μελέτησε ο μαθηματικός του σταδίου 3 και όπως τώρα ελέγχει ο φυσικός, ανταποκρίνονται στις απαιτήσεις και τους περιορισμούς που θέτει το πείραμα και η παρατήρηση, τότε η θεωρία αποκτά μεγάλη σημασία, αφού περιγράφει κάποιο μέρος του φυσικού κόσμου. Μαζί της αποκτά μεγάλη σημασία και η μαθηματική δομή του πρώτου σταδίου, και έτσι <u>κλείνει ο κύκλος</u> της μαθηματικής μοντελοποίησης.

~ · ~

Οι ΔΕ είναι ο σημαντικότερος κλάδος των μαθηματικών αφού, όπως είδαμε, χρησιμοποιείται για την μαθηματική μοντελοποίηση των διαφόρων φαινομένων. Τα φαινόμενα που μπορούν να περιγραφούν μέσω των ΔΕ και της παραπάνω διαδικασίας της μαθηματικής μοντελοποίησης που μόλις περιγράψαμε είναι τεράστιας ποικιλίας; Εμφανίζονται στην οικονομία, στην χημεία, την βιολογία, την πληροφορική, και φυσικά στην φυσική. Οι ΔΕ δίνουν την γέφυρα μεταξύ των μαθηματικών και όλων των άλλων επιστημών οι οποίες χρειάζονται τα μαθηματικά για την ανάπτυξή τους.

~ · ~

Στο μάθημα αυτό επιχειρούμε μια σύντομη εισαγωγή στον κόσμο των ΔΕ ελπίζοντας ότι θα κεντρίσουμε το ενδιαφέρον των φοιτητών για την περαιτέρω μελέτη και εμβάθυνση σε κάποιον απο τους πάμπολλους τομείς της απέραντης επιστήμης των Διαφορικών εξισώσεων.

1b. Παραδείγματα μαθηματικών μοντέλων

Όπως ήδη είπαμε, η κατασκευή μαθηματικών μοντέλων συνίσταται στα εξής βήματα:

1. Μαθηματική δομή	2. Νόμος ως ΔΕ.
3. Μελέτη των λύσεων της ΔΕ.	4. Πειραματική επαλήθευση

Σκοπός αυτής της παραγράφου είναι να δώσουμε μερικά σημαντικά παραδείγματα Φυσικών Νόμων με την μορφή ΔΕ οι οποίοι περιγράφουν μοντέλα συγκεκριμένων κλάσεων Φυσικών Φαινομένων.

Το κεντρικό πρόβλημα στις ΔΕ είναι η μελέτη ενός συνόλου συναρτήσεων ορισμένου από την απαίτηση ότι κάθε συνάρτηση που ανήκει στο εν λόγω σύνολο και κάποιες από τις παραγώγους της έχουν συγκεκριμένες ιδιότητες.

<u>Παράδειγμα</u>

Έστω το σύνολο όλων των συναρτήσεων από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$ με την ιδιότητα ότι η παράγωγος κάθε συνάρτησης στο $\mathbb{R}$ είναι η ίδια η συνάρτηση. Αυτή η απαίτηση περιγράφεται από την εξίσωση

$$y' = y \quad \text{στο} \quad (-\infty, \infty) \qquad (1a)$$

ή με άλλα λόγια

$$y'(x) = y(x) \quad , \quad x \in (-\infty, \infty). \qquad (1b)$$

Η (1a) ονομάζεται μία <u>Διαφορική Εξίσωση</u> και κάθε συνάρτηση με αυτήν την ιδιότητα ονομάζεται μία <u>λύση</u> της ΔΕ. Γνωρίζουμε ότι $D(\exp) = \exp$ και άρα η $y = \exp$ είναι μία λύση της εξίσωσης (1a). Με άλλα λόγια η $y(x) = e^x$ είναι μία λύση της (1b).

Θέτοντας $c =$ σταθερά και $y(x) = ce^x$, βλέπουμε ότι

$$y'(x) = ce^x = y(x)$$

και άρα η συνάρτηση

$$y(x) = ce^x \qquad (2)$$

είναι μία λύση για κάθε τιμή της σταθεράς c. Έχει η (1) άλλες λύσεις εκτός από την (2); Για να απαντήσουμε αυτήν την ερώτηση έστω ότι η συνάρτηση u είναι μία λύση της (1). Τότε

$$u'(x) - u(x) = 0$$

και άρα

$$e^{-x}\left(u'(x) - u(x)\right) = \frac{d}{dx}\left(e^{-x}u(x)\right) = 0$$

δηλαδή έχουμε ότι

$$e^{-x}u(x) = c$$

ή

$$u(x) = ce^x.$$

Άρα κάθε λύση της (1) στο $(-\infty, \infty)$ είναι της μορφής (2). Η ce^x ονομάζεται η <u>Γενική Λύση</u> της (1). Κάθε λύση της (1) έχει την μορφή της γενικής λύσης και όλες οι συναρτήσεις αυτής της μορφής είναι λύσεις της (1)

Το σύνολο των συναρτήσεων που ορίζεται από μία ΔΕ μπορεί να περιορισθεί περαιτέρω από αυτό που ονομάζεται <u>Αρχικές Συνθήκες</u> ή <u>Συνοριακές Συνθήκες</u>. Στο προηγούμενο Παράδειγμα, ζητούμε τώρα όλες τις συναρτήσεις $y(x)$ έτσι ώστε:

$$y' = y \quad \text{στο } (-\infty, \infty) \qquad (3)$$

$$y(0) = 1 \quad \leftarrow \text{Αρχική Συνθήκη.} \qquad (4)$$

Γνωρίζουμε ότι η γενική λύση της (3) είναι η $y(x) = ce^x$. Επειδή $y(0) = c = 1$ έπεται ότι η συνάρτηση

$$y = e^x$$

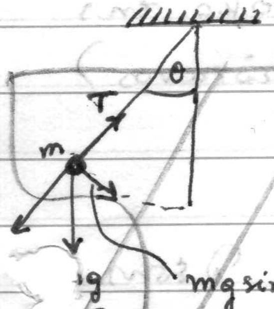
είναι η μοναδική συνάρτηση που λύνει τις (3), (4). [Π.Α.Τ.]

'Αλλα παραδείγματα διαφορικών εξισώσεων είναι:

(1) $\boxed{\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0}$ $\left(\ddot{\theta}(t) + g\sin\theta(t) = 0\right)$ (5)

<u>Εξίσωση κίνησης εκκρεμούς</u>

<u>Απόδειξη</u> (⊛ βλέπε πίσω σελίδα ⊛



Η εφαπτομενική συνιστώσα του βάρους $m\underline{g}$

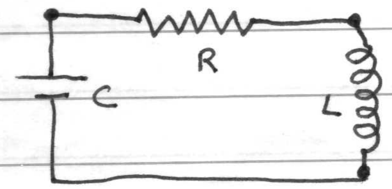
$$F_{εφ} = -mg\sin\theta$$

τείνει να επαναφέρει την μάζα m στην θέση ισορροπίας. Από τον Νόμο του Νεύτωνος $F = ma = m\ddot{\theta}$ έχουμε

$$m\ddot{\theta} + mg\sin\theta = 0$$

και θέτοντας $m=1$ και $g=1$ παίρνουμε τον νόμο (5) που διέπει την κίνηση του εκκρεμούς. Μια καλύτερη απόδειξη της (5), αργότερα.

(2) <u>Κύκλωμα RLC</u> (βλ. Alonso-Finn, vol. 2, σελ. 259)



Έστω το κύκλωμα RLC του σχήματος, $q =$ το ηλεκτρικό φορτίο, $\dot{q} = dq/dt$: το ηλεκτρικό ρεύμα και $\mathcal{E}$ η ΗΕΔ (R: αντίσταση και C: πυκνωτής) (ή $\mathcal{E}$: (πηνίο) τάση.) Από το γνωστό θεώρημα των βρόγχων (ισοδύναμο με την αρχή της διατήρησης του φορτίου) έχουμε ότι (L: αυτεπαγωγή του κυκλώματος ≠ μαγν. ροή / ρεύμα)

$$\boxed{L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = E} \qquad (6)$$

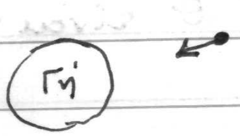
ή αλλιώς:

$$L\ddot{q}(t) + R\dot{q}(t) + \frac{1}{C}q(t) = E(t).$$

Όπως θα δούμε, αυτό είναι ένα παράδειγμα <u>γραμμικού</u> ταλαντωτή (ελεύθερες ταλαντώσεις)

(3) <u>Πρόβλημα των δύο σωμάτων</u> (πλανητών ή ηλεκτρονίου-πυρήνα)

Η εξίσωση του Νεύτωνος για το Π.Α.Σ (πλανήτης + Γή) γίνεται



$$\boxed{m\ddot{\underline{r}} = -k\frac{\underline{r}}{r^3}}, \quad r = |\underline{r}| \qquad (7)$$

$(K = GMm)$

→ <u>μνεία</u>: ΓΘΣ και κβ, για τις δύο διαφορετικές κλίμακες.

(4) Εξίσωση Laplace

Ο Laplace το 1787 εισάγαγε την ακόλουθη ΔΕ για να περιγράψει τους δακτυλίους του Κρόνου:

Εξίσωση Laplace :
$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0} \qquad (8)$$

(5) Εξίσωση Mathieu

Ο Mathieu το 1868 ανακάλυψε την ακόλουθη ΔΕ σε μελέτες σχετικές με το πως ταλαντώνεται μια ελλειπτική μεμβράνη:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} + (a + b\cos 2x)\, y = 0} \qquad (9)$$

(συνέχεια παραδειγμάτων στην επομ. σελ.)

Σε ότι ακολουθεί μελετούμε Σ.Δ.Ε. δηλ., διαφορικές εξισώσεις της μορφής,

$$\underline{y}^{(m)}(t) = \underline{F}\left(t, \underline{y}(t), \dot{y}(t), \ldots, y^{(m-1)}(t)\right) \qquad (10)$$

όπου:

- $$F : \mathbb{R}^{nm+1} \to \mathbb{R}^n , \quad y^{(k)} = \frac{d^k y}{dt^k} .$$

Μια συνάρτηση

$$\underline{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$

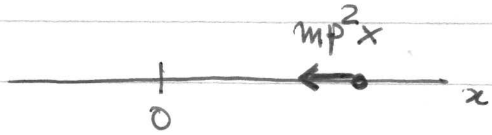
ονομάζεται <u>μια λύση της ΔΕ</u> (10) αν ισχύει ότι:

$$\underline{g}^{(m)}(t) = F\left(t, \underline{g}(t), \dot{g}(t), \ldots, g^{(m-1)}(t)\right).$$

Αφού το πεδίο τιμών της F είναι στο $\mathbb{R}^n$, η ΔΕ (10) είναι <u>ένα σύστημα n διαφορικών εξισώσεων m τάξης</u> (m είναι η υψηλότερη τάξη των παραγώγων που εμφανίζονται στις εξισώσεις).

(6.) Απλός αρμονικός ταλαντωτής

$$\boxed{\ddot{x} + p^2 x = 0}$$



Ο ΑΑΤ αποτελείται από ένα υλικό σημείο που κινείται πάνω σε μια ευθεία γραμμή (Ox-άξονας). Έλκεται προς την αρχή O από μία <u>δύναμη επαναφοράς</u>

$$-mp^2x\,\underset{\sim}{i}$$

όπου $\underset{\sim}{i}$ είναι το 1-αιο διάνυσμα στην διεύθυνση του άξονα Ox, m η μάζα του υλικού σημείου και p μια σταθερά. Η επιτάχυνση είναι $\ddot{x}\,\underset{\sim}{i}$ και άρα η εξίσωση κίνησης είναι

$$m\ddot{x}\,\underset{\sim}{i} = -mp^2x\,\underset{\sim}{i},$$

ή, σε βαθμωτή μορφή,

$$\ddot{x} + p^2x = 0.$$

(7) Ταλαντωτής με διαταραχή (ή εξαναγκασμό)

Πολλές φορές επιπλέον της δύναμης επαναφοράς, υπάρχει και μια <u>δύναμη διαταραχής</u> της οποίας η συνιστώσα στην τική διεύθυνση του άξονα Ox είναι $mQ(t)$, $Q(t)$ είναι μια συνάρτηση του χρόνου. Τότε η εξίσωση κίνησης τροποποιείται και δίνεται από την διαφορική εξίσωση

$$m\ddot{x}\,\underset{\sim}{i} = -mp^2x\,\underset{\sim}{i} + mQ\,\underset{\sim}{i},$$

ή, σε βαθμωτή μορφή

$$\boxed{\ddot{x} + p^2x = Q(t)}$$

(8) Ταλαντωτής με απόσβεση

Αν επιπλέον υπάρχει μια δύναμη αντίστασης ανάλογη της ταχύτητας, που ονομάζουμε <u>δύναμη απόσβεσης</u>, της μορφής

$$-2m\mu\dot{x}\,, \quad \mu > 0 \text{ σταθερά},$$

τότε η εξίσωση κίνησης τροποποιείται ως εξής:

$$m\ddot{x}\,\underset{\sim}{i} = mp^2 x\,\underset{\sim}{i} - 2m\mu\dot{x}\,\underset{\sim}{i}$$

ή, σε βαθμωτή μορφή,

$$\boxed{\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + p^2 x = 0},$$

ενώ υπάρχουν δύο βασικές περιπτώσεις σε αυτό το πρόβλημα, η <u>ελαφρά απόσβεση</u>, $\mu < p$, και η <u>βαριά απόσβεση</u>, $\mu > p$.

Η εξίσωση κίνησης

$$\boxed{\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + p^2 x = Q(t)}$$

χαρακτηρίζει ταλαντωτές με διοταραχή και απόσβεση.

(9) <u>Υδροδυναμική</u>

– Θεωρούμε την 1-διάστατη, χρονικά εξαρτημένη ροή ενός συμπιεστού ρευστού (υγρού ή αέριου). 1-διάσταση σημαίνει ότι οι βασικές θερμοδυναμικές ποσότητες του ρευστού, η πυκνότητα ρ, η πίεση p, η εσωτερική ενέργεια ανά μονάδα όγκου, e, καθώς και η ταχύτητα u, όλες εξαρτώνται (εκτός από τον χρόνο t) από <u>μία και μόνο χωρική</u> μεταβλητή, έστω την x. Τότε η κίνηση περιγράφεται από τις εξισώσεις Euler που έχουν την μορφή:

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ &\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0 \\ &\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial(eu)}{\partial x} + p\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \end{aligned}}$$

~·~

Υπάρχει γενικά μεγάλη ποικιλία γεωμετρικών, φυσικών καθώς και πιθανοθεωρητικών φαινομένων τα οποία μοντελοποιούνται μέσω διαφορικών εξισώσεων.

Φυλλάδιο 1

Μαθηματική Μοντελοποίηση

1. Αποδείξτε ότι κάθε μία από τις ακόλουθες συναρτήσεις είναι μία λύση στο I της δοθείσης Δ.Ε.

a) $y = \sin$, $y'' + y = 0$, $I = (-\infty, \infty)$

b) $y = c_1 \sin + c_2 \cos$, $y'' + y = 0$, $I = (-\infty, \infty)$

c) $y(x) = \sinh x = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$, $y'' - y = 0$ $I = (-\infty, \infty)$

d) $y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$, $2y' - y^3 = 0$ $I = (-\infty, 1)$

e) $z(t) = e^{\beta t}(\cos\omega t + i \sin\omega t)$, $\dot{z} = (\beta + i\omega) z$, $I = (-\infty, \infty)$.

2. Αποδείξτε ότι η $e^{\lambda_1 t}$ είναι μία λύση της ΔΕ

$$a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0, \quad (b^2 - 4ac \geq 0),$$

αν και μόνο αν το λ_1 είναι μία ρίζα του $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$.

3. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση

$$u(\underline{r}) = u(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{1}{|\underline{r}|}, \quad \underline{r} = (x, y, z) \neq \underline{0}$$

είναι μία λύση της εξίσωσης Laplace.

4. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση

$$u(\underline{r}) = \frac{1}{|\underline{r}|}, \quad \underline{r} \neq \underline{0}$$

είναι μία λύση της ΔΕ

$$\underline{\nabla} u = -\frac{\underline{r}}{|\underline{r}|^3}, \quad \underline{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right).$$