# ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

## ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

## Σημειώσεις – Διαφορικές Εξισώσεις 2ης τάξης (2ο μέρος)

Κοφινάς Γιώργος

Τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών και Επικοινωνιακών Συστημάτων

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

## Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

# Δ.Ε. 2ης τάξης ειδικής μορφής

(1) Δ.Ε. που δεν περιέχουν το $y$ $F(y'', y', x) = 0$. Έχουν συμμετρία στις μετατοπίσεις του $y$ (εξαρτημένη μεταβλητή), δηλ. η Δ.Ε. παραμένει αναλλοίωτη για $y \to y + a$.

Για $y' = u$, η Δ.Ε. ανάγεται σε 1ης τάξης.

Πράγματι, για $y' = u \Rightarrow y'' = u' \Rightarrow F(u', u, x) = 0$ που είναι Δ.Ε. 1ης τάξης.

(2) Δ.Ε. που έχουν συμμετρία κλίμακας ως προς $y$, δηλ. η Δ.Ε. παραμένει αναλλοίωτη για $y \to \lambda y$.

Για $y = e^u$, η Δ.Ε. ανάγεται σε Δ.Ε. που δεν έχει $u$ (συμμετρία μετατόπισης της εξαρτημένης μεταβλητής).

Πράγματι, για $y = e^u \Leftrightarrow u = \ln y$, αφού η Δ.Ε. ως προς $y$ είναι αναλλοίωτη για $y \to \lambda y$, άρα η καινούργια Δ.Ε. ως προς $u$ θα είναι αναλλοίωτη για $u \to u + \ln\lambda$, δηλ. θα είναι αναλλοίωτη σε μετατοπίσεις της εξαρτημένης μεταβλητή $u$. Άρα στην καινούργια Δ.Ε. ως προς $u$, δεν θα υπάρχει το $u$ και έτσι ανάγεται σε 1ης τάξης. Αυτό φαίνεται και από το ότι για $y = e^u \Rightarrow y' = e^u u'$, $y'' = e^u(u'' + u'^2)$, οπότε το $e^u$ βγαίνει κοινός παράγοντας (σε κάποια δύναμη) και η καινούργια Δ.Ε. δεν έχει $u$.

π.χ. οι Δ.Ε. $y'' + Py' + Qy = 0$, $yy'' + Ay'^2 + Byy' = 0$, $y^2 y'' + Ayy'y'' + By'^3 = 0$ με βαθμούς ομογένειας 1, 2, 3 αντίστοιχα ως προς τις μεταβλητές $y, y', y''$ ανάγονται για $y = e^u$ στις Δ.Ε. $u'' + u'^2 + Pu' + Q = 0$, $u'' + u'^2 + Au'^2 + Bu' = 0$, $u'' + u'^2 + Au'(u'' + u'^2) + Bu'^3 = 0$, που δεν περιέχουν το $u$. Περαιτέρω, η $y'' + Py' + Qy = 0$ για $u' = v$ γίνεται $v' + v^2 + Pv + Q = 0$ που είναι Ricatti (άρα πρέπει να βρεθεί μια μερική λύση, όπως και για την $y'' + Py' + Qy = 0$).

π.χ. $yy'' = y'^2 + yy'$

Η Δ.Ε. έχει συμμετρία κλίμακας $y \to \lambda y$ (είναι ομογενής βαθμού 2)

Για $y = e^u \Rightarrow y' = e^u u'$, $y'' = e^u(u'' + u'^2)$, άρα

$e^{2u}(u'' + u'^2) = e^{2u}u'^2 + e^{2u}u' \Leftrightarrow u'' + u'^2 = u'^2 + u' \Leftrightarrow u'' = u'$ που δεν περιέχει το $u$.

Για $u' = v$ είναι $v' = v \Leftrightarrow (\ln|v|)' = 1 \Leftrightarrow \ln|v| = x + \tilde{c} \Leftrightarrow |v| = e^{\tilde{c}} e^x \Leftrightarrow$

$v = ce^x \Leftrightarrow u' = ce^x \Leftrightarrow u = ce^x + \kappa \Leftrightarrow \ln y = ce^x + \kappa \Leftrightarrow y = Ge^{ce^x}$.

(3) Δ.Ε. που δεν περιέχουν το $x$, $F(y'',y',y)=0$ "αυτόνομες Δ.Ε."

Έχουν συμμετρία στις μετατοπίσεις της ανεξάρτητης μεταβλητής $x$, δηλ. η Δ.Ε. παραμένει αναλλοίωτη για $x\to x+a$ (αφού $y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{d(x+a)}$), π.χ. στην εξίσωση Newton $m\ddot{x}=F(x,\dot{x})$, όταν η $F$ δεν εξαρτάται εκπεφρασμένα από το χρόνο, οπότε η αρχή μέτρησης του χρόνου δεν παίζει ρόλο, παρά μόνο οι αρχικές συνθήκες μιας αρχικής χρονικής στιγμής.

Εναλλάσοντας τους ρόλους της εξαρτημένης με την ανεξάρτητη μεταβλητή, δηλ. θεωρώντας $x(y)$ αντί για $y(x)$, προκύπτει Δ.Ε. που δεν περιέχει την εξαρτημένη μεταβλητή.

Πράγματι, είναι $y'=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{dx/dy}=\frac{1}{\dot{x}}$

$$y''=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{dx/dy}\right)=\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{dx/dy}\right)\frac{dy}{dx}=\frac{1}{dx/dy}\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{dx/dy}\right)=\frac{1}{\dot{x}}\left(\frac{1}{\dot{x}}\right)^{\cdot}, \text{ όπου } \cdot=\frac{d}{dy}$$

Άρα $F(y'',y',y)=0 \Leftrightarrow G(\ddot{x},\dot{x},y)=0$, δεν περιέχει το $x$. Για $\dot{x}(y)=u(y)$ ανάγεται σε πρώτης τάξης ($y'=\frac{1}{u}$, $y''=\frac{1}{u}\left(\frac{1}{u}\right)^{\cdot}$).

Ωστόσο είναι πιο εύκολο να θέτουμε $\dot{x}(y)=\frac{1}{v(y)} \Leftrightarrow v(y)=y'$,

$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dy'}{dy}\frac{dy}{dx}=v\frac{dv}{dy}$, άρα $H\left(\frac{dv}{dy},v,y\right)=0$,

π.χ. στην εξίσωση Newton $\frac{d^2x}{dt^2}=F\left(x,\frac{dx}{dt}\right)$, θέτοντας $v=\frac{dx}{dt}=\frac{1}{dt/dx}$ είναι

$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}=v\frac{dv}{dx}$, άρα $v\frac{dv}{dx}=F(x,v)$ 1ης τάξης.

π.χ. $yy''=y'^2$

Η Δ.Ε. δεν εξαρτάται από το $x$, άρα $v=y'$, $y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dy'}{dy}\frac{dy}{dx}=v\frac{dv}{dy}$ και

$yv\frac{dv}{dy}=v^2 \Leftrightarrow y\frac{dv}{dy}=v \Leftrightarrow \frac{dv}{v}=\frac{dy}{y} \Leftrightarrow v=cy \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=cy \Leftrightarrow \frac{dy}{y}=c\,dx \Leftrightarrow$

$\ln|y|=cx+\tilde{c} \Leftrightarrow y=Ce^{cx}$, $C,c\in\mathbb{R}$. Αλλιώς, αφού η Δ.Ε. είναι ομογενής βαθμού 2, άρα για $y=e^u \Rightarrow y'=e^u u'$, $y''=e^u(u''+u'^2)$, άρα $e^{2u}(u''+u'^2)=e^{2u}u'^2 \Leftrightarrow u''=0 \Leftrightarrow$ $u'=\alpha \Leftrightarrow u=\alpha x+\beta \Leftrightarrow y=e^{\beta}e^{\alpha x}$. Εδώ η σταθερά ολοκλήρωσης βγήκε θετική, αλλά το $y$ της αρχικής Δ.Ε. μπορεί να είναι και αρνητικό, άρα τελικά $y=Ce^{\alpha x}$, $C,\alpha\in\mathbb{R}$.

(4) Δ.Ε. που έχουν συμμετρία κλίμακας ως προς $x$, δηλ. η Δ.Ε. παραμένει αναλλοίωτη για $x \to \lambda x$ (άρα $y \to y$, $y' \to \frac{1}{\lambda} y'$, $y'' \to \frac{1}{\lambda^2} y''$),

π.χ. $xy'' + y' + \frac{1}{x} y = 0$ μετ/ται στην $\lambda x \frac{1}{\lambda^2} y'' + \frac{1}{\lambda} y' + \frac{1}{\lambda x} y = 0$ που είναι η ίδια (είναι και ομογενής βαθμού 1 ως προς $y$)

π.χ. $xy'y'' + y'^2 + \frac{1}{x^2} y = 0$ μετ/ται στην $\lambda x \frac{1}{\lambda} y' \frac{1}{\lambda^2} y'' + \frac{1}{\lambda^2} y'^2 + \frac{1}{\lambda^2 x^2} y = 0$ ίδια

Για $x = e^t$ η Δ.Ε. ανάγεται σε Δ.Ε. που δεν έχει $t$ (συμμετρία μετατόπισης της ανεξάρτητης μεταβλητής).

Πράγματι, για $x = e^t \Leftrightarrow t = \ln x$, αφού η Δ.Ε. ως προς $x$ είναι αναλλοίωτη για $x \to \lambda x$, άρα η καινούργια Δ.Ε. ως προς $t$ θα είναι αναλλοίωτη για $t \to t + \ln\lambda$, δηλ. θα είναι αναλλοίωτη σε μετατοπίσεις της ανεξάρτητης μεταβλητής $t$. Άρα στην καινούργια Δ.Ε. ως προς $t$, δεν θα υπάρχει το $t$.

π.χ. $xy'y'' + y'^2 + \frac{1}{x^2} y = 0$ αναλλοίωτη για $x \to \lambda x$

Για $x = e^t \Leftrightarrow t = \ln x$, $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right) = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x}\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$$

Άρα $x\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)\frac{1}{x}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{1}{x^2} y = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0$, δεν περιέχει το $t$.

Άρα για $v = \frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dy}\frac{dy}{dt} = v\frac{dv}{dy}$, άρα $v^2 \frac{dv}{dy} + y = 0 \Leftrightarrow \frac{v^3}{3} + \frac{y^2}{2} = c \Leftrightarrow$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{dy}{dt}\right)^3 + \frac{y^2}{2} = c \Leftrightarrow \frac{1}{3}\left(\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}\right)^3 + \frac{y^2}{2} = c \Leftrightarrow \frac{1}{3}\left(\frac{dy}{dx}x\right)^3 + \frac{y^2}{2} = c \Leftrightarrow \left(x\frac{dy}{dx}\right)^3 = 3\left(c - \frac{y^2}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow x\frac{dy}{dx} = \sqrt[3]{3}\left(c - \frac{y^2}{2}\right)^{1/3} \Leftrightarrow \frac{dy}{\left(c - \frac{y^2}{2}\right)^{1/3}} = \sqrt[3]{3}\frac{dx}{x} \Leftrightarrow \int \frac{dy}{\left(c - \frac{y^2}{2}\right)^{1/3}} = \sqrt[3]{3}\ln x + \tilde{c}$$

Σχόλιο Ο μετ/μός $v(y) = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = y'e^t = xy'$ ενσωματώνει τα 2 βήματα, αφού $y' = \frac{1}{x} v$, $y'' = -\frac{1}{x^2} v + \frac{1}{x}\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{x^2} v + \frac{1}{x}\frac{dv}{dy} y' = -\frac{1}{x^2} v + \frac{1}{x^2}\frac{dv}{dy} v = \frac{1}{x^2}\left(v\frac{dv}{dy} - v\right)$

π.χ. στο προηγούμενο παράδειγμα $x \cdot \frac{1}{x^2}\left(v\frac{dv}{dy} - v\right)\frac{1}{x} v + \frac{1}{x^2} v^2 + \frac{1}{x^2} y = 0 \Leftrightarrow v^2\frac{dv}{dy} + y = 0.$

Παράδειγμα $x^2 y' + xy = e^{-xy}$ αναλλοίωτη για $x \to \lambda x$, $y \to \frac{1}{\lambda} y$ (μεικτή συμμετρία κλίμακας). Για $u = xy$ (αδιάστατο) $\Rightarrow y = \frac{u}{x} \Rightarrow y' = \frac{u'}{x} - \frac{u}{x^2}$, άρα $xu' - u + u = e^{-u} \Leftrightarrow xu' = e^{-u}$ αναλλοίωτη για $x \to \lambda x$. Είναι $e^u du = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow$ $e^u = \ln|x| + c \Leftrightarrow e^u = \ln|x| + c \Leftrightarrow e^{xy} = \ln|x| + c \Leftrightarrow y = \frac{1}{x}\ln(\ln|x| + c)$.

Παράδειγμα $y'' + \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = 0$ αναλλοίωτη για τη μεικτή συμμετρία κλίμακας $x \to \lambda x$, $y \to \lambda^2 y$. Για $u = \frac{y}{x^2}$ (αδιάστατο), $y' = 2xu + x^2 u'$, $y'' = x^2 u'' + 4xu' + 2u$, άρα $x^2 u'' + 5xu' + 5u = 0$ έχει συμμετρία κλίμακας $x \to \lambda x$ και συμμετρία κλίμακας $u \to \mu u$.

<u>Παράδειγμα</u> $xyy'' - xy'^2 - yy' = 0$

Έχει συμμετρία κλίμακας $y \to \mu y$ (πιο εύκολο), αλλά επίσης συμμετρία κλίμακας $x \to \lambda x$ (αυτό θα εφαρμόσουμε).

Για $x = e^t \Leftrightarrow t = \ln x$, $y' = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$, $y'' = \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$, άρα

$xy\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) - x\frac{1}{x^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 - y\frac{1}{x}\frac{dy}{dt} = 0 \Leftrightarrow y\frac{d^2y}{dt^2} - \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 - 2y\frac{dy}{dt} = 0$, δεν περιέχει το $t$. Για $v = \frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt^2} = v\frac{dv}{dy}$, άρα

$yv\frac{dv}{dy} - v^2 - 2yv = 0 \Leftrightarrow y\frac{dv}{dy} - v - 2y = 0 \Leftrightarrow \frac{dv}{dy} = \frac{1}{y}v + 2 \Leftrightarrow v(y) = y(c + 2\ln y) \Leftrightarrow$

$\frac{dy}{dt} = y(c + 2\ln y) \Leftrightarrow \frac{dy}{y(c+2\ln y)} = dt \Leftrightarrow t + \tilde{c} = \int \frac{dy}{y(c+2\ln y)} \Leftrightarrow$

$\ln x + \tilde{c} = \int \frac{dy}{y(c+2\ln y)} = \int \frac{d\ln y}{c + 2\ln y} = \frac{1}{2}\ln(c + 2\ln y) \Leftrightarrow y = \alpha e^{\beta x^2}$.

## Γραμμικές Δ.Ε. 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές

$ay''+by'+cy=R(x)$ (1) $a,b,c\in\mathbb{R}$

$ay''+by'+cy=0$ (*) ομογενής

Πρόταση Αν $b^2-4ac>0$, η γενική λύση της (*) είναι $y(x)=c_1e^{\rho_1x}+c_2e^{\rho_2x}$, όπου $\rho_1,\rho_2\in\mathbb{R}$ είναι οι 2 ρίζες της $a\rho^2+b\rho+c=0$.

Αν $b^2-4ac<0$, η γενική λύση της (*) είναι

$y(x)=e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x)=Ae^{\alpha x}\sin(\beta x+\vartheta)$, $A=\sqrt{c_1^2+c_2^2}$, $\tan\vartheta=\frac{c_1}{c_2}$, όπου $\rho_1=\alpha+i\beta$, $\rho_2=\alpha-i\beta$ είναι οι 2 συζυγείς μιγαδικές ρίζες της $a\rho^2+b\rho+c=0$.

Αν $b^2-4ac=0$, η γενική λύση της (*) είναι $y(x)=(c_1+c_2x)e^{\rho x}$, όπου $\rho\in\mathbb{R}$ είναι η διπλή ρίζα της $a\rho^2+b\rho+c=0$.

Πράγματι, θέτοντας $y=e^{\rho x}$ προκύπτει $a\rho^2e^{\rho x}+b\rho e^{\rho x}+ce^{\rho x}=0\Leftrightarrow$ $a\rho^2+b\rho+c=0$ (χαρακτηριστική εξίσωση Δ.Ε.). Αν $\Delta=b^2-4ac>0$, τότε $\exists\,\rho_1,\rho_2\in\mathbb{R}$ διακριτές, άρα οι $e^{\rho_1x}$, $e^{\rho_2x}$ είναι λύσεις της (*). Αυτές είναι Γρ. Ανεξ. γιατί $W(x)=\begin{vmatrix}e^{\rho_1x} & e^{\rho_2x}\\ \rho_1e^{\rho_1x} & \rho_2e^{\rho_2x}\end{vmatrix}=(\rho_2-\rho_1)e^{(\rho_1+\rho_2)x}\neq0$. Άρα η γενική λύση της (*) είναι $y(x)=c_1e^{\rho_1x}+c_2e^{\rho_2x}$.

Αν $\Delta<0$, τότε $\rho_1=\alpha+i\beta$, $\rho_2=\alpha-i\beta$, άρα οι $e^{(\alpha+i\beta)x}$, $e^{(\alpha-i\beta)x}$ είναι λύσεις της (*). Αυτές είναι Γρ. Ανεξ. διότι $W(x)=\begin{vmatrix}e^{(\alpha+i\beta)x} & e^{(\alpha-i\beta)x}\\ (\alpha+i\beta)e^{(\alpha+i\beta)x} & (\alpha-i\beta)e^{(\alpha-i\beta)x}\end{vmatrix}$ $=-2i\beta e^{2\alpha x}\neq0$. Άρα η γενική λύση της (*) είναι $y(x)=c_+e^{(\alpha+i\beta)x}+c_-e^{(\alpha-i\beta)x}$, όπου όμως επειδή οφείλει $y(x)\in\mathbb{R}$, άρα θα πρέπει $c_-=c_+^*$ αφού ήδη $e^{(\alpha-i\beta)x}=[e^{(\alpha+i\beta)x}]^*$. Είναι $y(x)=e^{\alpha x}(c_+e^{i\beta x}+c_-e^{-i\beta x})=$

$=e^{\alpha x}[c_+(\cos\beta x+i\sin\beta x)+c_-(\cos\beta x-i\sin\beta x)]$

$=e^{\alpha x}[(c_++c_-)\cos\beta x+i(c_+-c_-)\sin\beta x]=e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x)$, όπου

$c_1=c_++c_-=c_++c_+^*\in\mathbb{R}$, $c_2=i(c_+-c_-)=i(c_+-c_+^*)\in\mathbb{R}$.

Είναι $A\sin(\beta x+\vartheta)=c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x\Leftrightarrow$

$A\sin\beta x\cos\vartheta+A\cos\beta x\sin\vartheta=c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x\Leftrightarrow A\cos\vartheta=c_2$, $A\sin\vartheta=c_1$

$\Rightarrow A=\sqrt{c_1^2+c_2^2}$, $\tan\vartheta=\frac{c_1}{c_2}$

Αν $\Delta=0$, τότε $\rho=-\frac{b}{2a}\in\mathbb{R}$ είναι η διπλή ρίζα του πολυωνύμου ως προς $\rho$, άρα $y_1=e^{\rho x}$ είναι μια λύση της (*). Για να βρούμε μια δεύτερη Γρ. Ανεξ. λύση θέτουμε $y=y_1u$, $v=u'$ και είναι $v'+\left(\frac{b}{a}+2\frac{y_1'}{y_1}\right)v=0\Leftrightarrow v'+\left(\frac{b}{a}+2\rho\right)v=0\Leftrightarrow v'=0\Leftrightarrow v=c_2\Leftrightarrow u'=c_2\Leftrightarrow$ $u=c_2x+c_1\Leftrightarrow y=e^{\rho x}(c_2x+c_1)$, άρα η $y_2=xe^{\rho x}$. Πράγματι, $W=$

$\begin{vmatrix} e^{px} & xe^{px} \\ pe^{px} & e^{px}+pxe^{px} \end{vmatrix} = e^{2px} \neq 0$ και η γενική λύση είναι $y=(c_1+c_2x)e^{px}$.

Παράδειγμα $2y''-y'-y=0$

Θέτουμε $y=e^{px}$, άρα η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $2p^2-p-1=0 \Leftrightarrow$ $p_1=-\frac{1}{2}$, $p_2=1$. Η γενική λύση είναι $y(x)=c_1e^{-\frac{x}{2}}+c_2e^{x}$.

Παράδειγμα $y''-y=0$

Για $y=e^{px} \Rightarrow p^2-1=0 \Leftrightarrow p_1=1$, $p_2=-1$

Άρα $y(x)=c_1e^{x}+c_2e^{-x}=c_+\cosh x+c_-\sinh x$

Παράδειγμα $y''-4y'+5y=0$

Για $y=e^{px} \Rightarrow p^2-4p+5=0 \Rightarrow p_1=2+i$, $p_2=2-i$.

Άρα $y(x)=e^{2x}(c_1\cos x+c_2\sin x)$

Παράδειγμα $y''+y=0$

Για $y=e^{px} \Rightarrow p^2+1=0 \Rightarrow p_1=i$, $p_2=-i$

Άρα $y(x)=c_1\cos x+c_2\sin x$

Παράδειγμα $y''+2\alpha y'+(\alpha^2+\pi^2)y=0$, $y(0)=3$, $y'(0)=-3\alpha$

Για $y=e^{px} \Rightarrow p^2+2\alpha p+(\alpha^2+\pi^2)=0 \Rightarrow p_1=-\alpha+i\pi$, $p_2=-\alpha-i\pi$

Άρα $y(x)=e^{-\alpha x}(c_1\cos\pi x+c_2\sin\pi x)$

$y(0)=c_1=3$ , $y'(0)=-3\alpha$

$y'(x)=e^{-\alpha x}[(\pi c_2-\alpha c_1)\cos\pi x-(\alpha c_2+\pi c_1)\sin\pi x]$

$y'(0)=\pi c_2-\alpha c_1=-3\alpha \Rightarrow c_2=0$, άρα $y(x)=3e^{-\alpha x}\cos\pi x$

Παράδειγμα $y''+y=0$, $y(0)=-1$, $y'(0)=-\sqrt{3}$

$y(x)=c_1\cos x+c_2\sin x \Rightarrow y(x)=-\cos x-\sqrt{3}\sin x=A\sin(x+\vartheta)=$

$=A\sin x\cdot\cos\vartheta+A\cos x\sin\vartheta \Leftrightarrow A\cos\vartheta=-\sqrt{3}$, $A\sin\vartheta=-1$

$A=\sqrt{3+1}=2$, $\tan\vartheta=\frac{1}{\sqrt{3}}$ με $\vartheta\in(\pi,\frac{3\pi}{2})$, άρα $\vartheta=\pi+\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{6}$

Άρα $y(x)=2\sin(x+\frac{7\pi}{6})$

Παράδειγμα $y''-2y'+y=0$. Για $y=e^{px} \Rightarrow p^2-2p+1=0 \Leftrightarrow p=1$ διπλή ρίζα.

Άρα $y(x)=(c_1+c_2x)e^{x}$

Παράδειγμα $4y''-4y'+1=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=-1$

Για $y=e^{px} \Rightarrow 4p^2-4p+1=0 \Leftrightarrow p=\frac{1}{2}$ διπλή ρίζα

Άρα $y(x)=(c_1+c_2x)e^{x/2} \Rightarrow y'(x)=c_2e^{x/2}+\frac{1}{2}(c_1+c_2x)e^{x/2}$

$\Rightarrow y(x)=\frac{1}{2}(2-3x)e^{x/2}$.

Παράδειγμα $\quad 2xy'' + (1-\sqrt{x})y' - 3y = 0, \quad x>0$

Για $t=\sqrt{x}$, $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2t}\frac{dy}{dt}$

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{dy}{dt}\right) = -\frac{1}{4}\frac{1}{x^{3/2}}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{4}\frac{1}{t^3}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{4t^2}\frac{d^2y}{dt^2}$$

Άρα $2t^2\left(\frac{1}{4t^2}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{1}{4t^3}\frac{dy}{dt}\right) + (1-t)\frac{1}{2t}\frac{dy}{dt} - 3y = 0 \Leftrightarrow$

$$\frac{1}{2}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{1}{2t}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{2t}\frac{dy}{dt} - \frac{1}{2}\frac{dy}{dt} - 3y = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} - 6y = 0$$

Για $y = e^{\rho t} \Rightarrow \rho^2 - \rho - 6 = 0 \Leftrightarrow \rho_1 = 3, \ \rho_2 = -2$

Άρα $y = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-2t} = c_1 e^{3\sqrt{x}} + c_2 e^{-2\sqrt{x}}$

Συμβολισμός $\quad D = \frac{d}{dx}, \quad D^2 = DD = \frac{d}{dx}\frac{d}{dx} = \frac{d^2}{dx^2}$

$$L = a\frac{d^2}{dx^2} + b\frac{d}{dx} + c = aD^2 + bD + c = F(D)$$

Δ.Ε. $\quad Ly(x) = F(D)y(x) = R(x) \quad (1)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = 0 \quad (*)$

Ισχύει $\quad F(D)e^{\lambda x} = F(\lambda)e^{\lambda x}$

διότι $F(D)e^{\lambda x} = \left(a\frac{d^2}{dx^2} + b\frac{d}{dx} + c\right)e^{\lambda x} = (a\lambda^2 + b\lambda + c)e^{\lambda x} = F(\lambda)e^{\lambda x}$

$$F(D)(e^{\lambda x}f) = e^{\lambda x}F(D+\lambda)f$$

Είναι $D^n(e^{\lambda x}f) = (e^{\lambda x}f)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(e^{\lambda x})^{(n-k)}f^{(k)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\lambda^{n-k}e^{\lambda x}f^{(k)} =$

$$= e^{\lambda x}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\lambda^{n-k}f^{(k)} = e^{\lambda x}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\lambda^{n-k}D^k\right]f = e^{\lambda x}(\lambda+D)^n f =$$

$$= e^{\lambda x}(D+\lambda)^n f$$

Άρα $F(D)(e^{\lambda x}f) = aD^2(e^{\lambda x}f) + bD(e^{\lambda x}f) + ce^{\lambda x}f =$

$$= ae^{\lambda x}(D+\lambda)^2 f + be^{\lambda x}(D+\lambda)f + ce^{\lambda x}f = e^{\lambda x}[a(D+\lambda)^2 + b(D+\lambda) + c]f = e^{\lambda x}F(D+\lambda)f$$

Το $y = e^{\rho x}$ είναι λύση της $F(D)y = 0$ ανν $F(\rho) = 0$, όπως ξέρουμε.

Πράγματι, $Ly = 0 \Leftrightarrow Le^{\rho x} = 0 \Leftrightarrow F(D)e^{\rho x} = 0 \Leftrightarrow F(\rho)e^{\rho x} = 0 \Leftrightarrow F(\rho) = 0 \Leftrightarrow a\rho^2 + b\rho + c =$

Αν $\rho$ διπλή ρίζα του $F(\lambda)$ τότε $y = xe^{\rho x}$ λύση της $F(D)y = 0$, όπως ξέρουμε.

Πράγματι, $F(\lambda) = c(\lambda-\rho)^2$, $c \neq 0$, άρα $F(\rho) = 0$, $F'(\lambda) = 2c(\lambda-\rho)$, $F'(\rho) = 0$ και

$$F(D)(xe^{\lambda x}) = F(D)\frac{\partial}{\partial\lambda}e^{\lambda x} = \frac{\partial}{\partial\lambda}F(D)e^{\lambda x} = \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(F(\lambda)e^{\lambda x}\right) = F'(\lambda)e^{\lambda x} + F(\lambda)xe^{\lambda x} \Rightarrow$$

$$F(D)y = F(D)(xe^{\rho x}) = F(D)(xe^{\lambda x})\big|_{\lambda=\rho} = F'(\rho)e^{\rho x} + F(\rho)xe^{\rho x} = 0$$

Συμβολική μέθοδος επίλυσης

$$F(D)y = R \Rightarrow y_p = \frac{1}{F(D)} R$$

$$\frac{1}{D} = \int \quad , \quad \frac{1}{D} R = \int R$$

$$\frac{1}{F(D)} = \frac{1}{aD^2+bD+c} = \frac{1}{c} \frac{1}{1+\frac{bD+aD^2}{c}} = \frac{1}{c}\left[1 - \frac{bD+aD^2}{c} + \frac{(bD+aD^2)^2}{c^2} + \dots\right]$$

$$\frac{1}{F(D)} e^{\lambda x} = \frac{1}{F(\lambda)} e^{\lambda x}$$

διότι αν $G(D) = \frac{1}{F(D)}$, δηλ. $F(D)G(D) = G(D)F(D) = I$ τότε

$$\frac{1}{F(D)} e^{\lambda x} = G(D)e^{\lambda x} = G(\lambda) e^{\lambda x} = \frac{1}{F(\lambda)} e^{\lambda x}.$$

$$\frac{1}{D-\lambda} f(x) = e^{\lambda x} \int e^{-\lambda x} f(x)\, dx$$

διότι $\frac{1}{D-\lambda} f = \frac{1}{D-\lambda}(e^{\lambda x}\tilde{f})$, $\tilde{f} = e^{-\lambda x} f$

και $F(D)(e^{\lambda x}\tilde{f}) = e^{\lambda x} F(D+\lambda)\tilde{f}$, άρα για $F(D) = \frac{1}{D-\lambda}$ είναι

$$\frac{1}{D-\lambda}(e^{\lambda x}\tilde{f}) = e^{\lambda x}\frac{1}{D}\tilde{f} = e^{\lambda x}\int \tilde{f} \Rightarrow \frac{1}{D-\lambda} f = e^{\lambda x}\int e^{-\lambda x} f$$

Μέθοδος εύρεσης λύσης μέσω παραγώγισης ως προς παράμετρο

Αν $F(D)\,Y(x,\lambda) = \mathcal{R}(x,\lambda)$ και $R(x) = \left.\dfrac{\partial \mathcal{R}(x,\lambda)}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=\lambda_0}$, τότε η $y(x) = \left.\dfrac{\partial Y(x,\lambda)}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_0}$ είναι λύση της $F(D)y(x) = R(x)$.

Πράγματι, είναι $F(D)\,Y(x,\lambda) = \mathcal{R}(x,\lambda) \Rightarrow \dfrac{\partial}{\partial\lambda} F(D)\,Y(x,\lambda) = \dfrac{\partial}{\partial\lambda}\mathcal{R}(x,\lambda) \Rightarrow$
$F(D)\dfrac{\partial}{\partial\lambda}Y(x,\lambda) = \dfrac{\partial\mathcal{R}(x,\lambda)}{\partial\lambda} \Rightarrow F(D)\left.\dfrac{\partial Y(x,\lambda)}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_0} = \left.\dfrac{\partial \mathcal{R}(x,\lambda)}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_0} \Rightarrow$
$F(D)y(x) = R(x)$

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο αυτή μπορούμε πάλι να αποδείξουμε ότι αν $p$ διπλή ρίζα του $F(\lambda)$ τότε $xe^{px}$ λύση της $F(D)y=0$.

Πράγματι, είναι $F(\lambda) = c(\lambda-p)^2 \Rightarrow F(p)=0,\ F'(p)=0$. Επειδή $F(D)e^{\lambda x} = F(\lambda)e^{\lambda x}$, αν $Y(x,\lambda) = e^{\lambda x}$, $\mathcal{R}(x,\lambda) = F(\lambda)e^{\lambda x}$ τότε $F(D)Y(x,\lambda) = \mathcal{R}(x,\lambda)$.

Αλλά $\left.\dfrac{\partial\mathcal{R}(x,\lambda)}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=p} = F'(p)e^{px} + F(p)xe^{px} = 0 = R(x)$,

$\left.\dfrac{\partial Y(x,\lambda)}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=p} = xe^{px} = y(x)$

Άρα η $y = xe^{px}$ ικανοποιεί την $F(D)y=0$.

Παράδειγμα $y''-4y = e^x$ (1)
$\qquad\qquad = 0$ (*)

Η λύση της ομογενούς είναι (αφού $p^2-4=0 \Leftrightarrow p=\pm 2$) $y_0(x) = c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}$.
Αναζητούμε ειδική λύση της (1) τη μορφής $y_p(x) = Ae^x \Rightarrow y_p' = Ae^x \Rightarrow y_p'' = Ae^x$.
Άρα $A = -\frac{1}{3} \Rightarrow y_p(x) = -\frac{1}{3}e^x$ και η γενική λύση της (1) είναι
$y(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} - \frac{1}{3}e^x$.
Επίσης από τον τύπο $y_p = y_2\int\frac{Ry_1}{W} - y_1\int\frac{Ry_2}{W}$, $W = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{-2x} \\ 2e^{2x} & -2e^{-2x}\end{vmatrix} = -4$, $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^{-2x}$, $R = e^x$ είναι $y_p = e^{-2x}\int\frac{e^xe^{2x}}{-4} - e^{2x}\int\frac{e^xe^{-2x}}{-4} = -\frac{1}{3}e^x$.

Παράδειγμα $y''+y = \cos 3x$ (1)
$\qquad\qquad = 0$ (*)

Αφού $p^2+1=0 \Leftrightarrow p=\pm i$, άρα $y_0(x) = c_1\cos x + c_2\sin x$ η γενική λύση της (*).
Δοκιμάζουμε $y_p(x) = A\cos 3x \Rightarrow y_p' = -3A\sin 3x \Rightarrow y_p'' = -9A\cos 3A$. Άρα $A = -\frac{1}{8}$
$\Rightarrow y_p = -\frac{1}{8}\cos 3x \Rightarrow y(x) = c_1\cos x + c_2\sin x - \frac{1}{8}\cos 3x$.
Αλλιώς, $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$, $W=1$, $R = \cos 3x \Rightarrow$
$y_p = \sin x\int\cos 3x\cdot\cos x - \cos x\int\cos 3x\cdot\sin x = \frac{\sin x}{2}\int(\cos 4x+\cos 2x) - \frac{\cos x}{2}\int(\sin 4x - \sin 2x)$
$= \frac{1}{8}\cos(4x-x) - \frac{1}{4}\cos(2x+x) = -\frac{1}{8}\cos 3x$

<u>Παράδειγμα</u> $y'' - 3y' + 2y = 2x^2 - 3$ (1)

$= 0$ (*)

Είναι $\rho^2 - 3\rho + 2 = 0 \Leftrightarrow \rho_1 = 1,\ \rho_2 = 2 \Rightarrow y_0(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$. Δοκιμάζουμε

$y_p(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \Rightarrow y_p' = 2\alpha x + \beta \Rightarrow y_p'' = 2\alpha \Rightarrow$

$2\alpha - 3(2\alpha x + \beta) + 2(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) = 2x^2 - 3 \Rightarrow 2\alpha = 2,\ 2\beta - 6\alpha = 0,\ 2\gamma - 3\beta + 2\alpha = -3$

$\Rightarrow \alpha = 1,\ \beta = 3,\ \gamma = 2 \Rightarrow y_p(x) = x^2 + 3x + 2 \Rightarrow y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + x^2 + 3x + 2$

<u>Παράδειγμα</u> $y'' - 3y' + 2y = \cos(e^{-x})$ (1)

$= 0$ (*)

$y_1(x) = e^x,\ y_2(x) = e^{2x},\ y_0(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x},\ W = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{vmatrix} = e^{3x},\ R = \cos(e^{-x})$

$$y_p = e^{2x}\int \frac{\cos(e^{-x}) \cdot e^x}{e^{3x}} - e^x \int \frac{\cos(e^{-x}) \cdot e^{2x}}{e^{3x}} = e^{2x}\int e^{-2x}\cos(e^{-x}) - e^x \int e^{-x}\cos(e^{-x})$$

$$= -e^{2x}\left[e^{-x}\sin(e^{-x}) + \cos(e^{-x})\right] + e^x \sin(e^{-x}) = -e^{2x}\cos(e^{-x})$$

$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - e^{2x}\cos(e^{-x})$

<u>Παράδειγμα</u> $y'' - \alpha y' + \beta = R(x),\ \alpha^2 - 4\beta > 0$

$\rho^2 - \alpha\rho + \beta = 0 \Rightarrow \exists \rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R}$ διακριτές $\Rightarrow y_1(x) = e^{\rho_1 x},\ y_2(x) = e^{\rho_2 x}$

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\rho_1 x} & e^{\rho_2 x} \\ \rho_1 e^{\rho_1 x} & \rho_2 e^{\rho_2 x} \end{vmatrix} = (\rho_2 - \rho_1)\, e^{(\rho_1 + \rho_2)x}$$

$$K(x,t) = \frac{y_1(t) y_2(x) - y_1(x) y_2(t)}{W(t)} = \frac{e^{\rho_1 t} e^{\rho_2 x} - e^{\rho_1 x} e^{\rho_2 t}}{(\rho_2 - \rho_1)\, e^{(\rho_1 + \rho_2)t}} = \frac{e^{\rho_2(x-t)} - e^{\rho_1(x-t)}}{\rho_2 - \rho_1}$$

$$y_p(x) = \int_{x_0}^{x} K(x,t) R(t)\,dt \Rightarrow y(x) = c_1 e^{\rho_1 x} + c_2 e^{\rho_2 x} + \int_{x_0}^{x} K(x,t) R(t)\,dt$$

<u>Αναγωγή Γραμμικής Δ.Ε. 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές σε Γραμμική Δ.Ε. 1ης τάξης</u>

Η Δ.Ε. $ay'' + by' + cy = R$, για $y = e^{\rho x} u$, $F(\rho) = 0$ ανάγεται στην

$a v' + (2a\rho + b) v = e^{-\rho x} R$, $v = u'$

Πράγματι, $y' = e^{\rho x}(u' + \rho u),\ y'' = e^{\rho x}(u'' + 2\rho u' + \rho^2 u)$, άρα

$a e^{\rho x}(u'' + 2\rho u' + \rho^2 u) + b e^{\rho x}(u' + \rho u) + c e^{\rho x} u = R \Leftrightarrow$

$a u'' + (2a\rho + b) u' + (a\rho^2 + b\rho + c) u = e^{-\rho x} R$, όπου $F(\rho) = a\rho^2 + b\rho + c = 0$

<u>π.χ.</u> $y'' - 4y = e^x$ (1) . Είναι $\rho^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \rho = \pm 2$. Για $y = e^{2x} u$ προκύπτει

$= 0$ (*)

$v' + 4v = e^{-x},\ v = u' \Leftrightarrow v = e^{-\int 4}\left(c + \int e^{-x} e^{\int 4}\right) = e^{-4x}\left(c + \int e^{-x} e^{4x}\right) = e^{-4x}\left(c + \int e^{3x}\right)$

$= e^{-4x}\left(c + \frac{1}{3}e^{3x}\right) = c e^{-4x} + \frac{1}{3} e^{-x} \Leftrightarrow u = -\frac{c}{4} e^{-4x} - \frac{1}{3} e^{-x} + \tilde{c}$

$\Leftrightarrow y = -\frac{c}{4} e^{-2x} - \frac{1}{3} e^x + \tilde{c} e^{2x} = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} - \frac{1}{3} e^x$ που έχει βρεθεί

# <u>Δ.Ε. Eüler</u>

$$ax^2y''+bxy'+cy=0$$

Η εξίσωση έχει συμμετρία κλίμακας ως προς $x$, $x\to\lambda x$. Άρα θέτω $x=e^t$ για $x>0$ $(x=-e^t,\ x<0)$, $y'=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$, $y''=\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)$, άρα $ax^2\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)+bx\cdot\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}+cy=0 \Leftrightarrow a\frac{d^2y}{dt^2}+(b-a)\frac{dy}{dt}+cy=0$, που είναι Δ.Ε. με σταθερούς συντελεστές.

Αλλιώς, δοκιμάζουμε $y=x^r$, $x>0$ $(y=(-x)^r,\ x<0)$. Είναι
$ax^2r(r-1)x^{r-2}+bxrx^{r-1}+cx^r=0 \Leftrightarrow ar(r-1)+br+c=0 \Leftrightarrow ar^2+(b-a)r+c=0$

Αν $\Delta=(b-a)^2-4ac>0 \Rightarrow \exists\, r_1,r_2\in\mathbb{R}$ διακριτές $\Rightarrow y_1(x)=x^{r_1},\ y_2(x)=x^{r_2} \Rightarrow$
$y(x)=c_1|x|^{r_1}+c_2|x|^{r_2}$

Αν $\Delta<0 \Rightarrow \exists\, r_1=\lambda+i\mu,\ r_2=\lambda-i\mu \Rightarrow y_1(x)=x^{r_1}=x^{\lambda+i\mu}=x^\lambda x^{i\mu}=x^\lambda e^{i\mu\ln x}=$
$=x^\lambda[\cos(\mu\ln x)+i\sin(\mu\ln x)]$, $y_2(x)=x^{r_2}=x^{\lambda-i\mu}=x^\lambda x^{-i\mu}=x^\lambda e^{-i\mu\ln x}=$
$=x^\lambda[\cos(\mu\ln x)-i\sin(\mu\ln x)]$. Άρα οι δύο Γρ. Ανεξ. λύσεις είναι $x^\lambda\cos(\mu\ln x)$, $x^\lambda\sin(\mu\ln x)$ και η γενική λύση $y(x)=x^\lambda[c_1\cos(\mu\ln|x|)+c_2\sin(\mu\ln|x|)]$

Αν $\Delta=0 \Rightarrow \exists\, r=-\frac{b-a}{2a} \Rightarrow y_1=x^r$. Η 2η λύση βρίσκεται μέσω της αντικατάστασης $y=y_1u$, οπότε $v'+\left(\frac{b}{ax}+\frac{2rx^{r-1}}{x^r}\right)v=0$, $v=u'$, άρα
$v'+\left(\frac{b}{ax}+\frac{2r}{x}\right)v=0 \Leftrightarrow v'+\left(\frac{b}{a}-\frac{b-a}{a}\right)\frac{1}{x}v=0 \Leftrightarrow v'+\frac{v}{x}=0 \Leftrightarrow v=\frac{\kappa}{x} \Leftrightarrow u=\kappa\ln x+\tilde{\kappa}$
$\Leftrightarrow y=x^r(\kappa\ln x+\tilde{\kappa})$, άρα $y_2(x)=x^r\ln x$. Η γενική λύση είναι $y(x)=x^r(c+\tilde{c}\ln|x|)$

<u>Σχόλιο</u> Η Δ.Ε. $(\lambda x+\mu)^2y''+\alpha(\lambda x+\mu)y'+\beta y=0$, για $t=\lambda x+\mu$ μετατρέπεται σε Eüler

<u>Παράδειγμα</u> $x^2y''-xy'-3y=0$.
Για $x=e^t \Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}-3y=0 \Rightarrow \rho^2-2\rho-3=0 \Rightarrow \rho_1=-1,\ \rho_2=3 \Rightarrow y_1=e^{-t},\ y_2=e^{3t} \Rightarrow$
$y_1=x^{-1},\ y_2=x^3 \Rightarrow y(x)=\frac{c_1}{x}+c_2x^3$
Αλλιώς,
Για $y=x^r \Rightarrow x^2r(r-1)x^{r-2}-xrx^{r-1}-3x^r=0 \Rightarrow r^2-2r-3=0 \Rightarrow r_1=-1,\ r_2=3 \Rightarrow$
$y_1=x^{-1},\ y_2=x^3$.

<u>Παράδειγμα</u> $x^2y''-xy'+y=0$.
Για $x=e^t \Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}+y=0 \Rightarrow \rho^2-2\rho+1=0 \Rightarrow \rho=1$ διπλή $\Rightarrow y(t)=(c_1+c_2t)e^t \Rightarrow$
$y(x)=(c_1+c_2\ln|x|)x$

Αλλιώς, για $y=x^r \Rightarrow r(r-1)-r+1=0 \Rightarrow (r-1)^2=0 \Rightarrow r=1$ διπλή $\Rightarrow y_1=x$. Για
$y=xu \Rightarrow x^3u''+x^2u'=0 \overset{v=u'}{\Longrightarrow} xv'+v=0 \Rightarrow v=\frac{\kappa}{x} \Rightarrow u=\kappa\ln x+\tilde{\kappa} \Rightarrow y(x)=x(\kappa\ln x+\tilde{\kappa})$
$\Rightarrow y_2(x)=x\ln x \Rightarrow y(x)=x(c+\tilde{c}\ln|x|)$.

Παράδειγμα $x^2y''+3xy'+17y=0$

Για $x=e^t$, $\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}+17y=0 \Rightarrow \rho^2+2\rho+17=0 \Rightarrow \rho_1=-1+4i,\ \rho_2=-1-4i \Rightarrow$

$y(t)=\frac{1}{x}(c_1\cos 4t+c_2\sin 4t) \Rightarrow y(x)=\frac{1}{x}\left[c_1\cos(4\ln|x|)+c_2\sin(4\ln|x|)\right]$

Αλλιώς,

Για $y=x^r \Rightarrow r(r-1)+3r+17=0 \Rightarrow r^2+2r+17=0 \Rightarrow r_1=-1+4i,\ r_2=-1-4i \Rightarrow$

$y_1=x^{r_1}=x^{-1+4i}=\frac{1}{x}e^{4i\ln x}=\frac{1}{x}\left[\cos(4\ln x)+i\sin(4\ln x)\right]$

$y_2=x^{r_2}=x^{-1-4i}=\frac{1}{x}e^{-4i\ln x}=\frac{1}{x}\left[\cos(4\ln x)-i\sin(4\ln x)\right]$

Άρα $y(x)=\frac{1}{x}\left[c_1\cos(4\ln|x|)+c_2\sin(4\ln|x|)\right]$

Παράδειγμα $\underbrace{x^2y''-2xy'+2y}_{=0}=x^3\cos x.$ (1) (*) (Μη-ομογενής Euler)

Για την (*) θέτουμε $y=x^r \Rightarrow r(r-1)-2r+2=0 \Rightarrow r^2-3r+2=0 \Rightarrow r_1=1,\ r_2=2$

$\Rightarrow y_1(x)=x,\quad y_2(x)=x^2 \Rightarrow y_0(x)=c_1x+c_2x^2$

Είναι $y''-\frac{2}{x}y'+\frac{2}{x^2}y=x\cos x$, $W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x\end{vmatrix}=x^2$, $R=x\cos x$

$y_p=x^2\int\frac{x\cos x\cdot x}{x^2}-x\int\frac{x\cos x\cdot x^2}{x^2}=x^2\int\cos x-x\int x\cos x=x^2\sin x-x(x\sin x+\cos x)$

$=-x\cos x$. Άρα η γενική λύση $y(x)=c_1x+c_2x^2-x\cos x.$

Παράδειγμα $x^2y''-2xy'+2y=x^2+\frac{1}{x}$, $x>0$

Για $x=e^t \Rightarrow x^2\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)-2x\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}+2y=e^{2t}+e^{-t} \Leftrightarrow$

$\underbrace{\frac{d^2y}{dt^2}-3\frac{dy}{dt}+2y}_{=0}=e^{2t}+e^{-t}$ (1) (*)

Η χαρακτηριστική της (*) είναι $\rho^2-3\rho+2=0 \Rightarrow \rho_1=1,\ \rho_2=2 \Rightarrow y_1(t)=e^t, y_2(t)=e^{2t}$

$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} e^t & e^{2t} \\ e^t & 2e^{2t}\end{vmatrix}=e^{3t}$, $R=e^{2t}+e^{-t}$

$y_p(t)=e^{2t}\int\frac{(e^{2t}+e^{-t})e^t}{e^{3t}}-e^t\int\frac{(e^{2t}+e^{-t})e^{2t}}{e^{3t}}dt=e^{2t}\int(1+e^{-3t})-e^t\int(e^t+e^{-2t})=$

$=e^{2t}\left(t-\frac{1}{3}e^{-3t}\right)-e^t\left(e^t-\frac{1}{2}e^{-2t}\right)=te^{2t}-\frac{1}{3}e^{-t}-e^{2t}+\frac{1}{2}e^{-t}=$

$=(t-1)e^{2t}+\frac{1}{6}e^{-t}$

$\Rightarrow y_p(t)=c_1e^t+c_2e^{2t}+(t-1)e^{2t}+\frac{1}{6}e^{-t}=c_1e^t+c_2e^{2t}+te^{2t}+\frac{1}{6}e^{-t}$

$\Rightarrow y_p(x)=c_1x+c_2x^2+\ln x\cdot x^2+\frac{1}{6x}$

## Εύρεση μερικής λύσης Γραμμικής Δ.Ε. 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές για ειδικά R.

### R = εκθετικά

(1) Η Δ.Ε. $F(D)y=\sum_n a_n e^{\sigma_n x}$, $F(\sigma_n)\neq 0$ έχει $y_p=\sum_n a_n \dfrac{e^{\sigma_n x}}{F(\sigma_n)}$

Πράγματι, $F(D)y_p = F(D)\sum_n a_n \dfrac{e^{\sigma_n x}}{F(\sigma_n)} = \sum_n \dfrac{a_n}{F(\sigma_n)} F(D)e^{\sigma_n x} = \sum_n \dfrac{a_n}{F(\sigma_n)} F(\sigma_n) e^{\sigma_n x} =$

$= \sum_n a_n e^{\sigma_n x}$

π.χ. $y''+y'-2y = 5e^{x/2}$ (1)

$= 0$ (*)

$\rho^2+\rho-2=0 \Leftrightarrow \rho_1=1,\ \rho_2=-2 \Rightarrow y_1=e^x,\ y_2=e^{-2x}$. Το $\frac{1}{2}$ δεν συμπίπτει με τα $\rho_{1,2}$ άρα αναζητούμε $y_p=Ae^{x/2} \Rightarrow A\frac{1}{2}e^{x/2}+A\frac{1}{2}e^{x/2}-2Ae^{x/2}=5e^{x/2} \Rightarrow$

$-\frac{5}{4}A=5 \Rightarrow A=-4 \Rightarrow y_p=-4e^{x/2} \Rightarrow y(x)=c_1e^x+c_2e^{-2x}-4e^{x/2}$

Αλλιώς, αν $F(D)=D^2+D-2I$, $F(D)y=5e^{x/2} \Rightarrow y_p=\dfrac{5e^{x/2}}{F(1/2)}=\dfrac{5}{-5/4}e^{x/2}=-4e^{x/2}$.

π.χ. $y''+y'-2y=-4\sin 3x = -\frac{2}{i}\left(e^{3ix}-e^{-3ix}\right) = 2i\left(e^{3ix}-e^{-3ix}\right)$

$\rho^2+\rho-2=0 \Leftrightarrow \rho_1=1,\ \rho_2=-2 \Rightarrow y_1=e^x,\ y_2=e^{-2x}$. Αναζητώ $y_p=\alpha e^{3ix}+\beta e^{-3ix} \Rightarrow$

$y_p'=3i\alpha e^{3ix}-3i\beta e^{-3ix}$, $y_p''=-9\alpha e^{3ix}-9\beta e^{-3ix}$, άρα

$-9\alpha e^{3ix}-9\beta e^{-3ix}+3i\alpha e^{3ix}-3i\beta e^{-3ix}-2\alpha e^{3ix}-2\beta e^{-3ix}=2ie^{3ix}-2ie^{-3ix} \Rightarrow$

$\alpha=\dfrac{2}{3+11i}=\dfrac{3-11i}{65}$, $\beta=-\dfrac{2}{3-11i}=-\dfrac{3+11i}{65} \Rightarrow y_p=\dfrac{6}{65}\cos 3x+\dfrac{22}{65}\sin 3x$

π.χ. $y''+y=\cos^2 x$ (1)

$=0$ (*)

$\rho^2+1=0 \Leftrightarrow \rho_1=i,\ \rho_2=-i \Rightarrow y_1=e^{ix},\ y_2=e^{-ix}$

$\cos x=\frac{1}{2}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right) \Rightarrow \cos^2 x=\frac{1}{4}\left(e^{2ix}+e^{-2ix}+2\right)=\frac{1}{4}\left(e^{2ix}+e^{-2ix}+2e^{0\cdot x}\right)$, άρα

η πηγή $R=\cos^2 x$ είναι άθροισμα εκθετικών που δεν συμπίπτουν με τις εκθετικές λύσεις της (*). Αναζητούμε $y_p=Ae^{2ix}+Be^{-2ix}+Ce^{0\cdot x} \Rightarrow$

$y_p'=2iAe^{2ix}-2iBe^{-2ix} \Rightarrow y_p''=-4Ae^{2ix}-4Be^{-2ix}$

Άρα $-4Ae^{2ix}-4Be^{-2ix}+Ae^{2ix}+Be^{-2ix}+C=\frac{1}{4}e^{2ix}+\frac{1}{4}e^{-2ix}+\frac{1}{2} \Rightarrow$

$-4A+A=\frac{1}{4}$, $-4B+B=\frac{1}{4}$, $C=\frac{1}{4} \Rightarrow A=-\frac{1}{12},\ B=-\frac{1}{12},\ C=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow y_p=-\frac{1}{12}e^{2ix}-\frac{1}{12}e^{-2ix}+\frac{1}{2}=-\frac{1}{6}\cos 2x+\frac{1}{2}$

$\Rightarrow y(x)=c_1\cos x+c_2\sin x-\frac{1}{6}\cos 2x+\frac{1}{2}$

(2) Η Δ.Ε. $F(D)y = e^{\sigma x}$, $F(\lambda) = (\lambda-\sigma) f(\lambda)$, $f(\sigma) \neq 0$ έχει $y_p = \dfrac{x e^{\sigma x}}{F'(\sigma)}$

Πράγματι, $F(D)(x e^{\lambda x}) = F(D) \dfrac{\partial}{\partial \lambda} e^{\lambda x} = \dfrac{\partial}{\partial \lambda} F(D) e^{\lambda x} = \dfrac{\partial}{\partial \lambda} \left( F(\lambda) e^{\lambda x} \right) =$

$= F'(\lambda) e^{\lambda x} + F(\lambda) x e^{\lambda x} \Rightarrow F(D) y_p = \dfrac{1}{F'(\sigma)} F(D)(x e^{\sigma x}) = \dfrac{1}{F'(\sigma)} F(D)(x e^{\lambda x})\Big|_{\lambda=\sigma}$

$= \dfrac{1}{F'(\sigma)} \left[ F'(\sigma) e^{\sigma x} + F(\sigma) x e^{\sigma x} \right]$. Αλλά $F'(\lambda) = f(\lambda) + (\lambda-\sigma) f'(\lambda)$, άρα

$F(\sigma) = 0$, $F'(\sigma) = f(\sigma) \neq 0$. Άρα $F(D) y_p = e^{\sigma x}$.

Π.χ. $y'' + y' - 2y = 3e^x$ (1)

$= 0$ (*)

$\rho^2 + \rho - 2 = 0 \Leftrightarrow \rho_1 = 1$, $\rho_2 = -2 \Rightarrow y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-2x}$. Η πηγή $R = e^x$ συμπίπτει με μια λύση της (*), άρα αναζητούμε $y_p = A x e^x \Rightarrow y_p' = Ae^x + Axe^x = Ae^x(x+1)$

$\Rightarrow y_p'' = A e^x (x+1) + A e^x = A e^x (x+2)$. Άρα

$A e^x (x+2) + A e^x (x+1) - 2 A x e^x = 3 e^x \Leftrightarrow 3A = 3 \Leftrightarrow A = 1 \Rightarrow y_p = x e^x \Rightarrow$

$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + x e^x$

Αλλιώς, $F(D) = D^2 + D - 2I$, $F(D) = 3e^x \Rightarrow y_p = 3 \dfrac{x e^x}{F'(1)} = 3 \dfrac{x e^x}{3} = x e^x$

(3) Η Δ.Ε. $F(D) y = e^{\sigma x}$, $F(\lambda) = c(\lambda-\sigma)^2$ έχει $y_p = \dfrac{x^2 e^{\sigma x}}{F''(\sigma)}$

Πράγματι, $F(D)(x^2 e^{\lambda x}) = F(D) \dfrac{\partial^2}{\partial \lambda^2} e^{\lambda x} = \dfrac{\partial^2}{\partial \lambda^2} F(D) e^{\lambda x} = \dfrac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \left( F(\lambda) e^{\lambda x} \right) =$

$= \dfrac{\partial}{\partial \lambda} \left[ F'(\lambda) e^{\lambda x} + F(\lambda) x e^{\lambda x} \right] = F''(\lambda) e^{\lambda x} + 2F'(\lambda) x e^{\lambda x} + F(\lambda) x^2 e^{\lambda x} \Rightarrow$

$F(D) y_p = \dfrac{1}{F''(\sigma)} F(D)(x^2 e^{\sigma x}) = \dfrac{1}{F''(\sigma)} F(D)(x^2 e^{\lambda x})\Big|_{\lambda=\sigma} =$

$= \dfrac{1}{F''(\sigma)} \left[ F''(\sigma) e^{\sigma x} + 2F'(\sigma) x e^{\sigma x} + F(\sigma) x^2 e^{\sigma x} \right]$

Αλλά $F'(\lambda) = 2c(\lambda-\sigma)$, $F''(\lambda) = 2c$, άρα $F(\sigma) = 0$, $F'(\sigma) = 0$, $F''(\sigma) = 2c$, άρα

$F(D) y_p = e^{\sigma x}$

Π.χ. $y'' - 2y' + y = 3e^x$ (1)

$= 0$ (*)

$\rho^2 - 2\rho + 1 = 0 \Leftrightarrow \rho = 1$ διπλή ρίζα $\Rightarrow y_1 = e^x$, $y_2 = x e^x$. Η πηγή $R = e^x$ συμπίπτει με τη λύση της (*), άρα αναζητούμε $y_p = A x^2 \Rightarrow y_p' = 2Axe^x + Ax^2 e^x = Ae^x(x^2 + 2x)$

$\Rightarrow y_p'' = Ae^x(x^2 + 2x) + Ae^x(2x+2) = Ae^x(x^2 + 4x + 2)$. Άρα

$Ae^x(x^2 + 4x + 2) - 2Ae^x(x^2 + 2x) + Ax^2 e^x = 3e^x \Leftrightarrow 2A = 3 \Leftrightarrow A = \frac{3}{2} \Rightarrow y_p = \frac{3}{2} x^2 e^x \Rightarrow$

$y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + \frac{3}{2} x^2 e^x$

Αλλιώς, $F(D) = D^2 - 2D + 1$, $F(D)y = 3e^x \Rightarrow y_p = 3 \dfrac{x^2 e^x}{F''(1)} = \frac{3}{2} x^2 e^x$

$\underline{R = \text{πολυώνυμο} = P(x)}$

Η Δ.Ε. $\underline{F(D)y = P_n}$ έχει $y_p = \tilde{P}_n$ (για $F(0) \neq 0$)

Πράγματι, αν $F(D) = P_n$ όπου $P_n$ πολυώνυμο βαθμού $n$, τότε

$$y_p = \frac{1}{F(D)} P_n = (b_0 + b_1 D + b_2 D^2 + \dots) P_n = (b_0 + \dots + b_n D^n) P_n = \tilde{P}_n$$

π.χ. $y'' + y = x^3$ (1)
$\quad\quad = 0$ (*)

$\rho^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \rho_1 = i,\ \rho_2 = -i \Rightarrow y_1 = \cos x,\ y_2 = \sin x$. Αναζητούμε $y_p = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta \Rightarrow$
$y_p' = 3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma \Rightarrow y_p'' = 6\alpha x + 2\beta$, άρα $6\alpha x + 2\beta + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = x^3 \Leftrightarrow$
$\alpha x^3 + \beta x^2 + (6\alpha + \gamma)x + 2\beta + \delta = x^3 \Leftrightarrow \alpha = 1,\ \beta = 0,\ \gamma = -6,\ \delta = 0 \Rightarrow y_p = x^3 - 6x \Rightarrow$
$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x^3 - 6x$

Αλλιώς, $F(D)y = x^3$, $F(D) = D^2 + 1 \Rightarrow y_p = \frac{1}{F(D)} x^3$

$$\frac{1}{F(D)} = \frac{1}{D^2+1} = (1+D^2)^{-1} = 1 - D^2 + D^4 - + \dots \Rightarrow y_p = (1 - D^2 + D^4 - + \dots)x^3 = x^3 - (3x^2)' = x^3 - 6x$$

π.χ. $y'' - 2y' + y = x^2$ (1)
$\quad\quad = 0$ (*)

$\rho^2 - 2\rho + 1 = 0 \Leftrightarrow \rho = 1$ διπλή $\Rightarrow y_1 = e^x,\ y_2 = xe^x$. Αναζητούμε $y_p = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \Rightarrow$
$y_p' = 2\alpha x + \beta \Rightarrow y_p'' = 2\alpha$, άρα $2\alpha - 2(2\alpha x + \beta) + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = x^2 \Rightarrow$
$\alpha x^2 + (\beta - 4\alpha)x + 2\alpha - 2\beta + \gamma = x^2 \Rightarrow \alpha = 1,\ \beta = 4,\ \gamma = 6 \Rightarrow y_p = x^2 + 4x + 6 \Rightarrow$
$y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + x^2 + 4x + 6$

Αλλιώς, $F(D)y = x^2$, $F(D) = D^2 - 2D + I \Rightarrow y_p = \frac{1}{F(D)} x^2$

$$\frac{1}{F(D)} = \frac{1}{1 - 2D + D^2} = (1 - 2D + D^2)^{-1} = 1 + 2D - D^2 + (-2D + D^2)^2 + \dots = 1 + 2D - D^2 + 4D^2 + \dots =$$

$$= 1 + 2D + 3D^2 + \dots \Rightarrow y_p = (1 + 2D + 3D^2 + \dots)x^2 = x^2 + 2(2x) + 3\cdot(2) = x^2 + 4x + 6$$

π.χ. $y'' - y' + y = x^2$ (1)
$\quad\quad = 0$ (*)

$\rho^2 - \rho + 1 = 0 \Leftrightarrow \rho_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},\ \rho_2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow y_1 = e^{x/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right),\ y_2 = e^{\frac{x}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$

$$W = \frac{\sqrt{3}}{2}e^x,\quad y_p = e^{x/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\int \frac{x^2 e^{x/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}e^x} - e^{x/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\int \frac{x^2 e^{x/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}e^x},$$

όπου τα ολοκληρώματα είναι δύσκολα.
Οι άλλες 2 μέθοδοι δίνουν άμεσα $y_p = x^2 + 2x$.

$$R(x) = e^{\sigma x} P(x)$$

Η Δ.Ε. $F(D)y = e^{\sigma x} P$, $F(\sigma) \neq 0$ έχει $y_p = P\left(\frac{\partial}{\partial \lambda}\right) \frac{e^{\lambda x}}{F(\lambda)}\Big|_{\lambda=\sigma}$

Πράγματι, $F(D) P\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right) \frac{e^{\lambda x}}{F(\lambda)} = P\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right) F(D) \frac{e^{\lambda x}}{F(\lambda)} = P\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right) \frac{F(\lambda) e^{\lambda x}}{F(\lambda)} = P\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right) e^{\lambda x} =$
$= P(x) e^{\lambda x} \Rightarrow F(D) y_p = F(D) P\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right) \frac{e^{\lambda x}}{F(\lambda)}\Big|_{\lambda=\sigma} = P(x) e^{\sigma x}$

Η Δ.Ε. $F(D)y = e^{\sigma x} P_n$ έχει $y_p = e^{\sigma x} \frac{1}{F(D+\sigma)} P_n = e^{\sigma x} \tilde{P}_n$

Πράγματι, $y_p = \frac{1}{F(D)} (e^{\sigma x} P_n) = G(D) (e^{\sigma x} P_n) = e^{\sigma x} G(D+\sigma) P_n =$
$= e^{\sigma x} \frac{1}{F(D+\sigma)} P_n = e^{\sigma x} \tilde{P}_n$

Π.χ. $y'' + y = e^x x^2$ (1)
$= 0$ (κ)

$\rho^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \rho_1 = i,\ \rho_2 = -i \Rightarrow y_1 = \cos x,\ y_2 = \sin x$. Αναζητούμε $y_p = e^x(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) \Rightarrow$
$y_p' = e^x[\alpha x^2 + (2\alpha+\beta)x + \beta + \gamma]$, $y_p'' = e^x[\alpha x^2 + (4\alpha+\beta)x + 2\alpha + 2\beta + \gamma]$
Άρα $\alpha x^2 + (4\alpha+\beta)x + 2\alpha + 2\beta + \gamma + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = x^2 \Leftrightarrow 2\alpha x^2 + (4\alpha + 2\beta)x + 2\alpha + 2\beta + 2\gamma = x^2$
$\Leftrightarrow 2\alpha = 1,\ 4\alpha + 2\beta = 0,\ 2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2},\ \beta = -1,\ \gamma = \frac{1}{2} \Rightarrow$
$y_p = e^x\left(\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} e^x (x-1)^2 \Rightarrow y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{1}{2} e^x (x-1)^2$

Αλλιώς, $F(D) = D^2 + 1$, $F(D)y = x^2 e^x$.
Αν $F(D) Y(x,\lambda) = e^{\lambda x} \Rightarrow Y_p = \frac{1}{F(D)} e^{\lambda x} = \frac{e^{\lambda x}}{F(\lambda)} = \frac{e^{\lambda x}}{\lambda^2 + 1}$
$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} F(D) Y = \frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} e^{\lambda x} \Rightarrow F(D) \frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} Y = x^2 e^{\lambda x} \Rightarrow F(D) \frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\left(\frac{e^{\lambda x}}{\lambda^2+1}\right) = x^2 e^{\lambda x} \Rightarrow$

$$y_p = \frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\left(\frac{e^{\lambda x}}{\lambda^2+1}\right)\Big|_{\lambda=1} = \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{x e^{\lambda x}}{\lambda^2+1} - \frac{2\lambda e^{\lambda x}}{(\lambda^2+1)^2}\right)\Big|_{\lambda=1} =$$
$$= \frac{x^2 e^{\lambda x}}{\lambda^2+1} - \frac{x e^{\lambda x} 2\lambda}{(\lambda^2+1)^2} - \frac{2 e^{\lambda x}}{(\lambda^2+1)^2} - \frac{2\lambda x e^{\lambda x}}{(\lambda^2+1)^2} + 2 \frac{2\lambda e^{\lambda x}}{(\lambda^2+1)^3} 2\lambda \Big|_{\lambda=1}$$
$$= \frac{1}{2} x^2 e^x - \frac{1}{2} x e^x - \frac{1}{2} e^x - \frac{1}{2} x e^x + e^x = \frac{1}{2} x^2 e^x - x e^x + \frac{1}{2} e^x = \frac{e^x}{2}(x-1)^2$$

Αλλιώς, $y_p = \frac{1}{F(D)}(x^2 e^x) = e^x \frac{1}{F(D+1)} x^2 = e^x \frac{1}{(D+1)^2 + 1} x^2$.

$$\frac{1}{(D+1)^2+1} = \frac{1}{D^2 + 2D + 2} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \frac{2D + D^2}{2}} = \frac{1}{2}\left(1 + D + \frac{D^2}{2}\right)^{-1} = \frac{1}{2}\left[1 - \left(D + \frac{D^2}{2}\right) + \left(D + \frac{D^2}{2}\right)^2 - + \cdots\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left(1 - D - \frac{D^2}{2} + D^2 + \cdots\right) = \frac{1}{2}\left(1 - D + \frac{D^2}{2} + \cdots\right) \Rightarrow y_p = e^x \frac{1}{2}\left(1 - D + \frac{D^2}{2}\right) x^2 =$$
$$= \frac{1}{2} e^x (x^2 - 2x + 1) = \frac{1}{2} e^x (x-1)^2$$