ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Σημειώσεις – Διαφορικές Εξισώσεις 2ης τάξης (1ο μέρος)

Κοφινάς Γιώργος

Τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών και Επικοινωνιακών Συστημάτων

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Γραμμικές Δ.Ε. 2ης τάξης

Από τις Δ.Ε. 2ης τάξης θα περιοριστούμε εδώ στις γραμμικές. Η μεθοδολογία επίλυσης τους είναι κάπως πιο δύσκολη από τη μεθοδολογία επίλυσης των Δ.Ε. 1ης τάξης.

Η Δ.Ε. n-οστής τάξης είναι $a_n(x)y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\dots+a_0(x)y=R(x)$ (1)

και η αντίστοιχη ομογενής Δ.Ε. είναι $a_n(x)y^{(n)}+\dots+a_0(x)y=0$ (*)

Η Δ.Ε. 2ης τάξης είναι $a(x)y''+b(x)y'+c(x)y=R(x)$ και για $a(x)\neq 0$

$y''+P(x)y'+Q(x)y=R(x)$

π.χ. $y''+y=\sin y$ όχι γραμμική, $y'''-xy^2=0$ όχι

Συμβολικά, αν $L=a_n(x)\dfrac{d^n}{dx^n}+\dots+a_0(x)$ τότε $Ly=R$ (1)

"γραμμικός τελεστής" $\qquad Ly=0$ (*)

Ο χώρος λύσεων της (*) είναι γραμμικός υπόχωρος, δηλ. αν $y_1,\dots,y_n$ λύσεις της (*) τότε $c_1y_1+\dots+c_ny_n$ λύση της (*), $\forall c_1,\dots,c_n$. Πράγματι,

$L(c_1y_1+\dots+c_ny_n)=c_1Ly_1+\dots+c_nLy_n=0+\dots+0=0$

π.χ. $y_1(x)=e^x$, $y_2(x)=e^{-x}$ λύσεις της $y''-y=0 \Rightarrow y(x)=2e^x-5e^{-x}$ λύση επίσης.

Γενικά, αν y_0 γενική λύση της (*) και y_p μερική λύση της (1), τότε y_0+y_p γενική λύση της (1). Είναι $Ly_0=0$, $Ly_p=R \Rightarrow L(y_0+y_p)=Ly_0+Ly_p=$ $=0+R=R$.

Αν $Ly_i=R_i$, τότε $L(\sum_i y_i)=\sum_i Ly_i=\sum_i R_i\equiv R$, δηλ. για γραμμικές Δ.Ε. ισχύει η έννοια της επαλληλίας, δηλ. στο άθροισμα των αιτίων αντιστοιχεί το άθροισμα των αποτελεσμάτων.

π.χ. για την $y''-2xy'+y=\left(\dfrac{d^2}{dx^2}-2x\dfrac{d}{dx}+1\right)y=Ly$, $L=\dfrac{d^2}{dx^2}-2x\dfrac{d}{dx}+1$

$=D^2-2xD+1 \quad \left(D\equiv\dfrac{d}{dx}\right)$.

Ορισμός (από Γραμμική Άλγεβρα): Οι συναρτήσεις $y_1(x),\dots,y_k(x)$ λέγονται Γραμμικώς Ανεξάρτητες αν $c_1y_1(x)+\dots+c_ky_k(x)=0 \Rightarrow c_1=\dots=c_k=0$. Λέγονται Γρ. Εξαρτημένες αν δεν είναι Γρ. Ανεξ., δηλ. αν υπάρχουν $c_1,\dots,c_k$ όχι όλα μηδέν με $c_1y_1(x)+\dots+c_ky_k(x)=0$.

Οι συναρτήσεις $y_1(x)$, $y_2(x)$ είναι Γρ. Εξ. $\Leftrightarrow \dfrac{y_1(x)}{y_2(x)}=$ σταθ.

π.χ. οι $\sin x$, $\cos x$ Γρ. Ανεξ., οι e^x, e^{-x} Γρ. Ανεξ.

οι x, x^2 Γρ. Ανεξ., οι x, $|x|$ Γρ. Ανεξ.

οι $\sin 2x$, $\sin x\cos x$ Γρ. Εξ., οι $\ln x^2$, $\ln x$ Γρ. Εξ.

οι $2x^2$, $x|x|$ Γρ. Εξ. στο $[0,\infty)$

οι $2x^2$, $x|x|$ Γρ. Ανεξ. στο $\mathbb{R}$ ή στο $(-1,1)$.

<u>Ορισμός</u> Ορίζουσα Wronski των συναρτήσεων $y_1(x), \dots, y_k(x)$ είναι η ορίζουσα $W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_k \\ y_1' & & y_k' \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(k-1)} & \cdots & y_k^{(k-1)} \end{vmatrix}$

Η Wronskian παρέχει ένα κριτήριο για τη Γρ. Εξ./Ανεξ. συναρτήσεων.

<u>Πρόταση</u> $y_1(x), \dots, y_k(x)$ Γρ. Ανεξ. $\Leftrightarrow W(x) \neq 0$, $\forall x$ ομαλό (δηλ. να μην υπάρχει απειρία στα $y, y', \dots, y^{(k-1)}$). Επίσης $y_1, \dots, y_k$ Γρ. Εξ $\Leftrightarrow W(x) = 0$, $\forall x$.

Πράγματι, $\forall x$ ομαλό αν $c_1 y_1(x) + \dots + c_k y_k(x) = 0 \Rightarrow c_1 y_1'(x) + \dots + c_k y_k'(x) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \dots \Rightarrow c_1 y_1^{(k-1)}(x) + \dots + c_k y_k^{(k-1)}(x) = 0 \Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} y_1(x) c_1 + \dots + y_k(x) c_k &= 0 \\ y_1'(x) c_1 + \dots + y_k'(x) c_k &= 0 \\ &\vdots \\ y_1^{(k-1)}(x) c_1 + \dots + y_k^{(k-1)}(x) c_k &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Άρα $y_1(x), \dots, y_k(x)$ Γρ. Ανεξ $\Leftrightarrow c_1 = \dots = c_k = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} y_1(x) & \cdots & y_k(x) \\ y_1'(x) & & y_k'(x) \\ y_1^{(k-1)}(x) & \cdots & y_k^{(k-1)}(x) \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow W(x) \neq 0$.

<u>π.χ.</u> Οι συναρτήσεις $1, \cos^2 x, \cos 2x$ έχουν

$$W(x) = \begin{vmatrix} 1 & \cos^2 x & \cos 2x \\ 0 & -\sin 2x & -2\sin 2x \\ 0 & -2\cos 2x & -4\cos 2x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\sin 2x & -2\sin 2x \\ -2\cos 2x & -4\cos 2x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{Γρ. Εξ. και πράγματι}$$

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

<u>π.χ.</u> Οι $1, x, x^2$ έχουν $W(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2x \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow$ Γρ. Ανεξ.

<u>π.χ.</u> Οι $e^{\alpha x}, e^{\beta x}$ έχουν $W(x) = \begin{vmatrix} e^{\alpha x} & e^{\beta x} \\ \alpha e^{\alpha x} & \beta e^{\beta x} \end{vmatrix} = (\beta - \alpha) e^{(\alpha+\beta)x}$. Άρα για $\alpha = \beta \Rightarrow$
$W(x) = 0 \Rightarrow$ Γρ. Εξ. ενώ για $\alpha \neq \beta \Rightarrow$ Γρ. Ανεξ.

<u>Ισχύει</u> $W(g y_1, g y_2) = g^2 W(y_1, y_2)$

<u>Πρόταση</u> (Abel) Αν y_1, y_2 λύσεις της $y'' + P(x) y' + Q(x) y(x) = 0$ (τυπική μορφή), τότε $W' + PW = 0$, $W(x) = W(x_0) \exp\left(-\int_{x_0}^{x} P(t) dt\right)$

Πράγματι, $W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1' \Rightarrow W'(x) = y_1' y_2' + y_1 y_2'' - y_2' y_1' - y_2 y_1'' = y_1 y_2'' - y_2 y_1''$
$= y_1(-P y_2' - Q y_2) - y_2(-P y_1' - Q y_1) = -P(y_1 y_2' - y_2 y_1') = -P W(x) \Rightarrow \dfrac{W'(x)}{W(x)} = -P(x) \Rightarrow$
$\ln|W(x)| = -\int_{x_0}^{x} P(t) dt + \kappa \Rightarrow W(x) = c \exp\left(-\int_{x_0}^{x} P(t) dt\right) \Rightarrow W(x_0) = c \Rightarrow$
$W(x) = W(x_0) \exp\left(-\int_{x_0}^{x} P(t) dt\right)$

<u>π.χ.</u> Αν y_1, y_2 λύσεις της $y'' + P y' + Q y = 0$ με $W(x) = e^x$, τότε $W' + PW = 0$
$\Rightarrow P = -\dfrac{W'}{W} \Rightarrow P = -1$.

<u>π.χ.</u> Αν y_1, y_2 Γρ. Ανεξ. λύσεις της $y'' + P y' + Q y = 0$ με $W(x) =$ σταθ., τότε $W'(x) = 0 \Rightarrow -P W(x) = 0 \Rightarrow P = 0$.

Θεώρημα Μοναδικότητας

Το πρόβλημα $\left.\begin{array}{l} y''+P(x)y'+Q(x)y=R(x) \\ y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_1 \end{array}\right\}$ όπου P, Q, R συνεχείς στο ανοικτό διάστημα I και $x_0 \in I$, έχει μοναδική λύση

Π.χ. το πρόβλημα $\left.\begin{array}{l} y''+P(x)y'+Q(x)y=0 \\ y(0)=y'(0)=0 \end{array}\right\}$ έχει ως λύση τη συνάρτηση $y(x)=0$, και άρα, λόγω του θ. μοναδικότητας, η μοναδική λύση είναι $y(x)=0$.

Π.χ. το πρόβλημα $\left.\begin{array}{l} y''+y=0 \\ y(0)=2,\ y'(0)=0 \end{array}\right\}$ έχει ως μοναδική λύση $y(x)=2\cos x$

Π.χ. το πρόβλημα $\left.\begin{array}{l} x^2y''+xy'-4y=0 \\ y(0)=y'(0)=0 \end{array}\right\}$ έχει ως λύση τη συνάρτηση $y(x)=cx^2, c\in\mathbb{R}$ που δεν είναι μοναδική λύση. Πράγματι, το θ. μοναδικότητας παραβιάζεται αφού η Δ.Ε. δεν είναι της μορφής $y''+Py'+Qy=0$.

Πρόταση Η Δ.Ε. $y''+Py'+Qy=0$ $(*)$ (P, Q συνεχείς) έχει 2 Γρ. Ανεξ. λύσεις.

Πράγματι, το πρόβλημα $\left.\begin{array}{l} y''+Py'+Qy=0 \\ y(x_0)=1,\ y'(x_0)=0 \end{array}\right\}$ έχει μοναδική λύση $y_1(x)$, δηλ.

$y_1''+Py_1'+Qy_1=0,\quad y_1(x_0)=1,\quad y_1'(x_0)=0.$

Το πρόβλημα $\left.\begin{array}{l} y''+Py'+Qy=0 \\ y(x_0)=0,\ y'(x_0)=1 \end{array}\right\}$ έχει μοναδική λύση $y_2(x)$, δηλ.

$y_2''+Py_2'+Qy_2=0,\quad y_2(x_0)=0,\quad y_2'(x_0)=1.$

Εξάλλου, $W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x)-y_1'(x)y_2(x) \Rightarrow$

$W(x_0)=y_1(x_0)y_2'(x_0)-y_1'(x_0)y_2(x_0) = 1.1-0.0=1\neq 0 \Rightarrow y_1(x), y_2(x)$ Γρ. Ανεξ. λύσεις της $(*)$

Πρόταση Αν y_1 λύση της $y''+Py'+Qy=0$, τότε $y_2=y_1\int \frac{W(x)}{y_1^2}dx$, $W(x)=e^{-\int P dx}$ άλλη Γρ. Ανεξ. λύση.

Πράγματι, $W=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2'-y_2y_1' = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' y_1^2 \Rightarrow \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{W}{y_1^2} \Rightarrow y_2=y_1\int\frac{W}{y_1^2}dx$

Ο πολ/κός παράγοντας στο W δεν παίζει ρόλο, αφού απλώς πολ/ζει την y_2.

Π.χ. $xy''-(x+2)y'+\left(1+\frac{2}{x}\right)y=0 \Leftrightarrow y''-\frac{x+2}{x}y'+\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)y=0$

$y_1=x$, $W=e^{-\int P dx}=e^{\int\frac{x+2}{x}dx}=e^{x+2\ln x}=x^2e^x$

$y_2=y_1\int\frac{W}{y_1^2}dx = x\int\frac{x^2e^x}{x^2}dx = x\int e^x dx = xe^x$

y_1, y_2 Γρ. Ανεξ.

Π.χ. Αν οι λύσεις y_1, y_2 της $y''+Py'+Qy=0$ ικανοποιούν τη σχέση $y_2=xy_1$, τότε $y_1''+Py_1'+Qy_1=0$,

$y_2''+Py_2'+Qy_2=0 \Leftrightarrow 2y_1'+xy_1''+P(y_1+xy_1')+Qxy_1=0 \Leftrightarrow$

$y_1''+\left(\frac{2}{x}+P\right)y_1'+\left(\frac{P}{x}+Q\right)y_1=0.$

Αφαιρώντας κατά μέλη, $\frac{2}{x}y_1'+\frac{P}{x}y_1=0 \Leftrightarrow 2y_1'+Py_1=0 \Rightarrow 2y_1''+P'y_1+Py_1'=0 \Rightarrow$

$2y_1''+P'y_1+P\left(-\frac{P}{2}y_1\right)=0 \Leftrightarrow y_1''=\left(\frac{P^2}{4}-\frac{P'}{2}\right)y_1.$

Από $y_1''+Py_1'+Qy_1=0 \Rightarrow \left(\frac{P^2}{4}-\frac{P'}{2}\right)y_1+P\left(-\frac{P}{2}y_1\right)+Qy_1=0 \Leftrightarrow Q=\frac{P'}{2}+\frac{P^2}{2}$

Πρόταση (ελάττωση τάξης ομογενούς Δ.Ε. $2^{ης}$ τάξης)

Αν y_1 λύση της $y''+Py'+Qy=0$ τότε $v'+\left(P+2\frac{y_1'}{y_1}\right)v=0$, όπου $y=y_1u$, $v=u'$

Πράγματι, $y_1''u+2y_1'u'+y_1u''+P(y_1'u+y_1u')+Qy_1u=0 \Leftrightarrow$

$(y_1''+Py_1'+Qy_1)u+y_1u''+(2y_1'+Py_1)u'=0 \Leftrightarrow 0\cdot u+u''+\left(P+2\frac{y_1'}{y_1}\right)u'=0 \Leftrightarrow v'+\left(P+2\frac{y_1'}{y_1}\right)v=0$

$\Leftrightarrow (\ln|v|)'=-P-2\frac{y_1'}{y_1} \Leftrightarrow \ln|v|=-\int P-2\int\frac{y_1'}{y_1}+\tilde{c}=-\int P-2\int(\ln|y_1|)'+\tilde{c}=$

$=-\int P-2\ln|y_1|+\tilde{c}=-\int P-\ln|y_1|^2+\tilde{c}=\ln y_1^{-2}-\int P+\tilde{c}$

$\Leftrightarrow |v|=e^{\tilde{c}}\frac{1}{y_1^2}e^{-\int P} \Leftrightarrow v=c\frac{1}{y_1^2}e^{-\int P} \Leftrightarrow u'=c\frac{1}{y_1^2}e^{-\int P} \Leftrightarrow u=c\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int P} \Leftrightarrow$

$y=cy_1\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int P}$, που είναι η ίδια $2^η$ λύση όπως προηγουμένως.

Η ελάττωση τάξης της Δ.Ε. είναι σε αναλογία με την ελάττωση τάξης μιας αλγεβρικής εξίσωσης όταν ξέρουμε μια ρίζα της.

Π.χ. $xy''-y'-(x-1)y=0$

Δοκιμάζουμε $y_1=e^{\beta x} \Rightarrow x\beta^2e^{\beta x}-\beta e^{\beta x}-(x-1)e^{\beta x}=0 \Leftrightarrow x(\beta^2-1)+1-\beta=0 \Leftrightarrow$

$\beta^2-1=0$, $1-\beta=0 \Leftrightarrow \beta=1$. Άρα $y_1=e^x$

Για $y=e^xu \Rightarrow x(e^xu+e^xu')'-(e^xu+e^xu')-(x-1)e^xu=0 \Leftrightarrow$

$x(e^xu+2e^xu'+e^xu'')-(e^xu+e^xu')-(x-1)e^xu=0 \Leftrightarrow$

$\cancel{xu}+2xu'+xu''-\cancel{u}-u'-\cancel{xu}+\cancel{u}=0 \Leftrightarrow xu''+(2x-1)u'=0 \Leftrightarrow u''+\left(2-\frac{1}{x}\right)u'=0 \overset{v=u'}{\Leftrightarrow}$

$v'+\left(2-\frac{1}{x}\right)v=0 \Leftrightarrow (\ln v)'=-2+\frac{1}{x} \Leftrightarrow \ln v=-2x+\tilde{c} \Leftrightarrow v=cxe^{-2x} \Leftrightarrow u=c\int xe^{-2x}dx$

$\Leftrightarrow u=\frac{c}{4}(2x+1)e^{-x} \Leftrightarrow y=-\frac{c}{4}(2x+1)e^{-2x}$, άρα $y_2=(2x+1)e^{-2x}$ η $2^η$ Γρ. Ανεξ. λύση.

Πρόταση: Αν y_1, y_2 Γρ. Ανεξ. λύσεις (θεμελιώδες σύνολο λύσεων της Δ.Ε.) της $y''+Py'+Qy=0$ (*) , τότε $\forall$ λύση $y(x)$, $\exists\ \bar{c}_1, \bar{c}_2 \in \mathbb{C}$: $y(x)=\bar{c}_1 y_1(x)+\bar{c}_2 y_2(x)$ δηλ. η γενική λύση της (*) είναι μια υπέρθεση των y_1, y_2.

Πράγματι, για το τυχόν x_0 θεωρούμε το σύστημα

$$\left.\begin{array}{l} c_1 y_1(x_0)+c_2 y_2(x_0)=y(x_0) \\ c_1 y_1'(x_0)+c_2 y_2'(x_0)=y'(x_0)\end{array}\right\}$$

Αφού y_1, y_2 Γρ. Ανεξ. $\Rightarrow W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x)\end{vmatrix} \neq 0, \forall x \Rightarrow W(x_0)=\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0)\end{vmatrix} \neq 0$

$\Rightarrow$ $\exists!$ λύση $c_1=\bar{c}_1$, $c_2=\bar{c}_2$.

Έστω $f(x) \equiv \bar{c}_1 y_1(x)+\bar{c}_2 y_2(x)$. Η $f(x)$ ικανοποιεί την (*) , δηλ. $f''+Pf'+Qf=0$ και είναι $f(x_0)=\bar{c}_1 y_1(x_0)+\bar{c}_2 y_2(x_0) \Rightarrow f(x_0)=y(x_0)$, $f'(x_0)=\bar{c}_1 y_1'(x_0)+\bar{c}_2 y_2'(x_0)$ $\Rightarrow f'(x_0)=y'(x_0)$.

Το πρόβλημα $\left.\begin{array}{l} u''+Pu'+Qu=0 \\ u(x_0)=y(x_0),\ u'(x_0)=y'(x_0)\end{array}\right\}$ έχει μοναδική λύση την $y(x)$, άρα

$f(x)=y(x) \Rightarrow y(x)=\bar{c}_1 y_1(x)+\bar{c}_2 y_2(x)$.

π.χ. $(\cos x)\, y''+(\sin x)\, y' + (\cos^3 x) y=0$, $\quad x\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Οι $y_1(x)=\cos(\sin x)$, $y_2(x)=\sin(\sin x)$ είναι λύσεις της Δ.Ε. Επίσης

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x)\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\sin x) & \sin(\sin x) \\ -\cos x\cdot\sin(\sin x) & \cos x\cdot\cos(\sin x)\end{vmatrix} = \cos x\cdot\cos^2(\sin x) +$$

$\cos x\cdot\sin^2(\sin x)=\cos x \neq 0 \Rightarrow y_1, y_2$ Γρ. Ανεξ. $\Rightarrow$ η γενική λύση της Δ.Ε. είναι

$y(x)=c_1\cos(\sin x)+c_2\sin(\sin x)$.

Αν $y(0)=1$, $y'(0)=2$ τότε $c_1\cdot 1+c_2\cdot 0=1$, $\ -c_1\cdot 1\cdot 0+c_2\cdot 1\cdot 1=2 \Rightarrow c_1=1$, $c_2=2$ $\Rightarrow y(x)=\cos(\sin x)+2\sin(\sin x)$ μοναδική λύση.

π.χ. Αν η $y''+Py'+Qy=0$ έχει 2 λύσεις y_1, y_2 με $y_1^2(x)+y_2^2(x)=1$, τότε $\exists\ f(x)$ με $y_1(x)=\cos f(x)$, $y_2(x)=\sin f(x)$. Είναι $y_1''+Py_1'+Qy_1=0 \Rightarrow$ $-f''\sin f-f'^2\cos f-Pf'\sin f+Q\cos f=0$ και $y_2''+Py_2'+Qy_2=0 \Rightarrow$ $f''\cos f-f'^2\sin f+Pf'\cos f+Q\sin f=0$.

Άρα $\left.\begin{array}{l} -f'\sin f\cdot P+\cos f\cdot Q=f''\sin f+f'^2\cos f \\ f'\cos f\cdot P+\sin f\cdot Q=-f''\cos f+f'^2\sin f\end{array}\right\} \Rightarrow P=\dfrac{\begin{vmatrix} f''\sin f+f'^2\cos f & \cos f \\ -f''\cos f+f'^2\sin f & \sin f\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -f'\sin f & \cos f \\ f'\cos f & \sin f\end{vmatrix}} = -\dfrac{f''}{f'}$

$Q=\dfrac{\begin{vmatrix} -f'\sin f & f''\sin f+f'^2\cos f \\ f'\cos f & -f''\cos f+f'^2\sin f\end{vmatrix}}{-f'} = f'^2 \Rightarrow f'=\pm\sqrt{Q} \Rightarrow f=\pm\int\sqrt{Q}\,dx$. Άρα $Q'=2f'f''=2f'(-Pf')$ $=-2Pf'^2 \Rightarrow P=-\dfrac{Q'}{2Q} \Rightarrow Q'+2PQ=0$. Η γενική λύση είναι

$$y(x)=c_1\cos\left(\int\sqrt{Q(x)}\,dx\right)+c_2\sin\left(\int\sqrt{Q(x)}\,dx\right)$$

π.χ. $xy'' + (1-2x)y' + (x-1)y = 0, \quad x>0$

Try $y_1 = e^{\alpha x} \Rightarrow x\alpha^2 e^{\alpha x} + (1-2x)\alpha e^{\alpha x} + (x-1)e^{\alpha x} = 0 \Leftrightarrow x(\alpha^2 - 2\alpha + 1) + \alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow$
$\alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0, \ \alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow (\alpha-1)^2 = 0, \ \alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = 1$

Άρα $y_1 = e^x$. Για $y = e^x u \Rightarrow x(e^x u + e^x u')' + (1-2x)(e^x u + e^x u') + (x-1)e^x u = 0$

$\Leftrightarrow x(e^x u + 2e^x u' + e^x u'') + (1-2x)(u+u')e^x + (x-1)e^x u = 0 \Leftrightarrow$

$xu + 2xu' + xu'' + u + u' - 2xu - 2xu' + xu - u = 0 \Leftrightarrow xu'' + u' = 0 \overset{v=u'}{\Leftrightarrow}$

$v' + \frac{1}{x}v = 0 \Leftrightarrow (\ln|v|)' = -\frac{1}{x} \Leftrightarrow \ln|v| = -\ln|x| + \tilde{c} \Leftrightarrow v = \frac{c}{x} \Leftrightarrow u' = \frac{c}{x} \Leftrightarrow u = c\ln x + \kappa$

$\Leftrightarrow y = ce^x \ln x + \kappa e^x$, άρα $y_2 = e^x \ln x$. Γενική λύση $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^x \ln x$.

π.χ. $4x^2 y'' - 8xy' + 9y = 0, \quad x>0$

Try $y_1 = x^\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{3}{2} \Rightarrow y_1 = x^{3/2}$

$y = x^{3/2}u \Rightarrow y' = \frac{3}{2}x^{1/2}u + x^{3/2}u', \quad y'' = \frac{3}{4}x^{-1/2}u + 3x^{1/2}u' + x^{3/2}u''$

$u'' + \frac{1}{x}u' = 0 \Rightarrow u = \ln x \Rightarrow y_2 = x^{3/2}\ln x$

$y(x) = x^{3/2}(c_1 + c_2 \ln x), \ x>0$ Γενική λύση

π.χ. $y'' + \cot x \cdot y' + 2y = 0, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Είναι $y_1 = \cos x$. Set $y = \cos x \cdot u \Rightarrow y' = u'\cos x - u\sin x$
$y'' = u''\cos x - 2u'\sin x - u\cos x$

Άρα $u''\cos x + (\cot x \cdot \cos x - 2\sin x)u' = 0 \Rightarrow u'' + (\cot x - 2\tan x)u' = 0 \Rightarrow$

$u' = e^{-\int \cot x\,dx} e^{2\int \tan x\,dx} = e^{-\ln \sin x} e^{-2\ln|\cos x|} = e^{-\ln(\sin x \cdot \cos^2 x)}$

$\Rightarrow u = \int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos^2 x} = \int \frac{1}{\sin x}(\tan x)'\,dx = \frac{\tan x}{\sin x} + \int \frac{dx}{\sin x} = \frac{1}{\cos x} + \ln\left|\tan \frac{x}{3}\right|$

$\Rightarrow y_2 = 1 + \cos x \cdot \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| \Rightarrow y(x) = c_1 \cos x + c_2\left(1 + \cos x \cdot \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|\right)$ γενική λύση.

Γενική λύση της μη-ομογενούς Δ.Ε. 2ης τάξης

Πρόταση Η γενική λύση της Δ.Ε. $y''+Py'+Qy=R$ (1) είναι $y=c_1y_1+c_2y_2+y_p$, όπου y_1, y_2 θεμελιώδες σύνολο λύσεων της $y''+Py'+Qy=0$ (*) και y_p μερική λύση της (1).

Πράγματι, η $y=c_1y_1+c_2y_2+y_p$ έχει $y''+Py'+Qy=c_1y_1''+c_2y_2''+y_p''+P(c_1y_1'+c_2y_2'+y_p')$
$+Q(c_1y_1+c_2y_2+y_p)=c_1(y_1''+Py_1'+Qy_1)+c_2(y_2''+Py_2'+Qy_2)+y_p''+Py_p'+Qy_p=$
$=c_1\cdot 0+c_2\cdot 0+R=R$.

Επίσης, αν Y είναι οποιαδήποτε λύση της (1), τότε η $Y-y_p$ είναι λύση της (*), αφού

$(Y-y_p)''+P(Y-y_p)'+Q(Y-y_p)=(Y''+PY'+QY)-(y_p''+Py_p'+Qy_p)=R-R=0$. Άρα

$\exists\, c_1, c_2:\quad Y-y_p=c_1y_1+c_2y_2 \Rightarrow Y=c_1y_1+c_2y_2+y_p$

Σχόλιο Η διαφορά 2 λύσεων της (1) είναι λύση της (*)

π.χ. $y''+y=x$

Η ομογενής $y''+y=0$ έχει λύσεις $y_1(x)=\cos x$, $y_2(x)=\sin x$. Μερική λύση της $y''+y=x$ είναι $y_p(x)=x$. Άρα γενική λύση $y(x)=c_1\cos x+c_2\sin x+x$

π.χ. $\left.\begin{array}{l} y''+9y=18x \quad (1) \\ y(0)=3,\ y'(0)=8 \end{array}\right\}$

Οι $y_1(x)=\cos 3x$, $y_2(x)=\sin 3x$ λύσεις της $y''+9y=0$ (θεμελιώδες σύνολο).
Μερική λύση της (1) $y_p(x)=2x$. Άρα γενική λύση της (1)

$y(x)=c_1\cos 3x+c_2\sin 3x+2x \Rightarrow y'(x)=-3c_1\sin 3x+3c_2\cos 3x+2$

$\left.\begin{array}{l} y(0)=c_1=3 \\ y'(0)=3c_2+2=8 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} c_1=3 \\ c_2=2 \end{array}$, άρα $y(x)=3\cos 3x+2\sin 3x+2x$

π.χ. $2xy''+(1-4x)y'+(2x-1)y=e^x$, $x>0$ δοθέντος ότι οι $Y_1=xe^x$, $Y_2=(1+x)e^x$ είναι λύσεις.

Η διαφορά $y_1=Y_2-Y_1=e^x$ είναι λύση της $2xy''+(1-4x)y'+(2x-1)y=0$.

Για $y=e^xu \Rightarrow y'=e^xu+e^xu'$, $y''=e^xu''+2e^xu'+e^xu$.

Άρα η 2η Γρ. Ανεξ. λύση είναι $y_2=y_1\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int P}=e^x\int e^{-2x}e^{-\int\frac{1-4x}{2x}}=$
$=e^x\int e^{-2x}e^{\int 2-\frac{1}{2x}}=e^x\int e^{-\frac{1}{2}\ln x}=e^x\int x^{-1/2}=2e^x\sqrt{x}$

Γενική λύση $y(x)=c_1e^x+c_2e^x\sqrt{x}+xe^x$.

Πρόταση Μία μερική λύση της $y''+Py'+Qy=R_1+R_2$ είναι η $y(x)=u(x)+v(x)$, όπου $u(x)$ μερική λύση της $y''+Py'+Qy=R_1$ και $v(x)$ μερική λύση της $y''+Py'+Qy=R_2$.

Είναι προφανές.

Πρόταση Αν y_1, y_2 Γρ. Ανεξ. λύσεις της $y''+Py'+Qy=0$ τότε
$y_p = y_2\int \frac{Ry_1}{W} - y_1\int\frac{Ry_2}{W}$ λύση της $y''+Py'+Qy=R$.
Επίσης, $y_p(x)=\int_{x_0}^{x} K(x,t)R(t)\,dt$, $K(x,t)=\frac{y_1(t)y_2(x)-y_2(t)y_1(x)}{W(t)}$ Green συνάρτηση (δεν εξαρτάται από το R)

Απόδειξη μέσω ελάττωσης της τάξης της μη-ομογενούς Δ.Ε. 2ης τάξης:
Πράγματι, για $y=y_1u \Rightarrow y'=y_1'u+y_1u'$, $y''=y_1''u+2y_1'u'+y_1u''$, άρα
$y_1''u+2y_1'u'+y_1u''+Py_1'u+Py_1u'+Qy_1u=R \Leftrightarrow$
$y_1u''+(2y_1'+Py_1)u'+(y_1''+Py_1'+Qy_1)u=R \Leftrightarrow y_1u''+(2y_1'+Py_1)u'=R \Leftrightarrow$
$u''+\left(P+2\frac{y_1'}{y_1}\right)u'=\frac{R}{y_1} \underset{v=u'}{\Leftrightarrow} v'+\left(P+2\frac{y_1'}{y_1}\right)v=\frac{R}{y_1}$ γραμμική. Μια λύση είναι
$v=e^{-\int P+2\frac{y_1'}{y_1}}\int\frac{R}{y_1}e^{\int P+2\frac{y_1'}{y_1}} \Leftrightarrow u'=\frac{W}{y_1^2}\int\frac{R}{y_1}\frac{1}{W}$, όπου $W=\begin{vmatrix} y_1 & y_2\\ y_1' & y_2'\end{vmatrix}=ce^{-\int P}$ η
Wronskian. Άρα $u=\int\frac{W}{y_1^2}\int\frac{Ry_1}{W} \Leftrightarrow y_2=y_1\int\frac{W}{y_1^2}\int\frac{Ry_1}{W}$.
Αλλά $W=y_1^2\left(\frac{y_2}{y_1}\right)'$, άρα $y_2=y_1\int\left(\frac{y_2}{y_1}\right)'\int\frac{Ry_1}{W}=y_1\frac{y_2}{y_1}\int\frac{Ry_1}{W}-y_1\int\frac{y_2}{y_1}\frac{Ry_1}{W}=$
$=y_2\int\frac{Ry_1}{W}-y_1\int\frac{Ry_2}{W}$.
Επίσης $y_p(x)=y_2(x)\int_{x_0}^{x}\frac{R(t)y_1(t)}{W(t)}dt-y_1(x)\int_{x_0}^{x}\frac{R(t)y_2(t)}{W(t)}dt$

$$=\int_{x_0}^{x}\frac{y_1(t)y_2(x)-y_2(t)y_1(x)}{W(t)}R(t)\,dt=\int_{x_0}^{x}K(x,t)R(t)\,dt$$

Απόδειξη μέσω της μεθόδου μεταβολής των συντελεστών - μέθοδος Lagrange:
Η γενική λύση της ομογενούς είναι $y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$. Αναζητούμε λύση της Δ.Ε. της μορφής $y_p(x)=c_1(x)y_1(x)+c_2(x)y_2(x) \Rightarrow$
$y_p'=c_1y_1'+c_2y_2'+c_1'y_1+c_2'y_2$. Αν $c_1'y_1+c_2'y_2=0$ τότε $y_p'=c_1y_1'+c_2y_2' \Rightarrow$
$y_p''=c_1y_1''+c_2y_2''+c_1'y_1'+c_2'y_2'$. Άρα η Δ.Ε. γίνεται
$c_1y_1''+c_2y_2''+c_1'y_1'+c_2'y_2'+P(c_1y_1'+c_2y_2')+Qc_1y_1+Qc_2y_2=R \Leftrightarrow$
$c_1(y_1''+Py_1'+Qy_1)+c_2(y_2''+Py_2'+Qy_2)+c_1'y_1'+c_2'y_2'=R \Leftrightarrow c_1'y_1'+c_2'y_2'=R$
Για τα c_1', c_2' έχουμε το σύστημα $\left.\begin{array}{l} y_1c_1'+y_2c_2'=0\\ y_1'c_1'+y_2'c_2'=R\end{array}\right\}\Leftrightarrow$

$$c_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ R & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = -\frac{Ry_2}{W} \Rightarrow c_1 = -\int \frac{Ry_2}{W}$$

$$c_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & R \end{vmatrix}}{W} = \frac{Ry_1}{W} \Rightarrow c_2 = \int \frac{Ry_1}{W}$$

Άρα $\quad y_p = y_2 \int \frac{Ry_1}{W} - y_1 \int \frac{Ry_2}{W}$.

π.χ. $\quad y'' + y = R(x)$

Μερικές λύσεις της $y''+y=0$ είναι $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$. Μερική λύση της $y''+y=R$ είναι $\quad y_p = \sin x \int \frac{R\cos x}{W} - \cos x \int \frac{R \sin x}{W}$, όπου

$W = y_1 y_2' - y_2 y_1' = \cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot \sin x = 1$, άρα

$y_p = \sin x \int R \cos x - \cos x \int R \sin x = \sin x \ \mathrm{Re} \int R e^{ix} dx - \cos x \ \mathrm{Im} \int R e^{ix} dx$

Για $\quad R(x) = e^x$, $\quad \int R e^{ix} dx = \int e^{(i+1)x} dx = \frac{1}{i+1} e^{(i+1)x} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} e^x e^{ix} =$

$= \frac{1-i}{2} e^x (\cos x + i \sin x) = \frac{e^x}{2} (\cos x + i\sin x - i\cos x + \sin x) =$

$= \frac{e^x}{2} (\cos x + \sin x) + i \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x)$

$\Rightarrow \ \mathrm{Re} \int R e^{ix} dx = \frac{e^x}{2} (\cos x + \sin x)$, $\qquad \mathrm{Im} \int R e^{ix} dx = \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x)$

$y_p = \sin x \cdot \frac{e^x}{2} (\cos x + \sin x) - \cos x \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x) = \frac{e^x}{2}$.

Για $\quad R(x) = \sin x$, $\quad y_p = \sin x \int \sin x \cos x \, dx - \cos x \int \sin^2 x \, dx$

$\qquad = \frac{1}{2} \sin x \int \sin 2x \, dx - \cos x \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx$

$= -\frac{1}{2} \sin x \cdot \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{2} \cos x \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x\right) = -\frac{1}{4} (\sin x \cdot \cos 2x - \cos x \cdot \sin 2x) - \frac{x}{2} \cos x$

$= -\frac{1}{4} \left[\sin x (2\cos^2 x - 1) - \cos x \cdot 2 \sin x \cos x \right] - \frac{x}{2} \cos x =$

$= -\frac{1}{4} (2 \sin x \cos^2 x - \sin x - 2 \sin x \cos^2 x) - \frac{x}{2} \cos x = \frac{1}{4} \sin x - \frac{x}{2} \cos x$.

π.χ. $\quad y'' + 4y = R(x) \quad (1)$

$y_1 = \cos 2x$, $y_2 = \sin 2x$ μερικές λύσεις της $y'' + 4y = 0$. Άρα $W = y_1 y_2' - y_2 y_1' = 2$,

Green function $\quad K(x,t) = \frac{y_1(t) y_2(x) - y_1(x) y_2(t)}{W(t)} = \frac{1}{2} (\cos 2t \cdot \sin 2x - \cos 2x \cdot \sin 2t) =$

$= \frac{1}{2} \sin(2x - 2t) = \frac{1}{2} \sin [2(x-t)]$

Άρα μερική λύση της (1) : $\quad y_p = \int_{x_0}^{x} K(x,t) R(t) dt = \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x} \sin[2(x-t)] R(t) dt$

Π.χ. $x^2(1-\ln x)y''+xy'-y=\dfrac{(1-\ln x)^2}{x}$, $x>e$

Γρ. Ανεξ. μερικές λύσεις της ομογενούς $x^2(1-\ln x)y''+xy'-y=0$ είναι οι $y_1=\ln x$, $y_2=x$.

$$W=y_1y_2'-y_2y_1'=\ln x-1\neq 0 \quad , \quad R=\frac{1-\ln x}{x^3}$$

$$y_p=y_2\int\frac{Ry_1}{W}-y_1\int\frac{Ry_2}{W}=x\int\frac{1-\ln x}{x^3}\,\frac{\ln x}{\ln x-1}-\ln x\int\frac{1-\ln x}{x^3}\,\frac{x}{\ln x-1}=$$

$$=-x\int\frac{\ln x}{x^3}+\ln x\int\frac{1}{x^2}$$

$$\int\frac{\ln x}{x^3}dx=-\frac{1}{2}\int(x^{-2})'\ln x\,dx=-\frac{1}{2}x^{-2}\ln x+\frac{1}{2}\int x^{-2}\frac{1}{x}dx=-\frac{\ln x}{2x^2}-\frac{1}{4x^2}$$

$$y_p=\frac{\ln x}{2x}+\frac{1}{4x}-\frac{\ln x}{x}=\frac{1}{4x}-\frac{\ln x}{2x}=\frac{1-2\ln x}{4x}$$

Γενική λύση $y(x)=c_1\ln x+c_2x+\dfrac{1-2\ln x}{4x}$

Π.χ. Για την $y''+Py'+Qy=0$ (*) μια λύση είναι $y_1(x)=x^2$ και η 2η $y_2(x)$ ικανοποιεί $W(x)=1$, $y_2(1)=-\frac{1}{3}$. Βρείτε τη γενική λύση της $y''+Py'+Qy=x$ (1).

Είναι $W=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x^2 & y_2(x) \\ 2x & y_2'(x) \end{vmatrix}=x^2y_2'-2xy_2=1 \Leftrightarrow y_2'-\frac{2}{x}y_2=\frac{1}{x^2}$ γραμμική

$\Leftrightarrow y_2(x)=-\dfrac{1}{3x}+cx^2$

$$y_2(1)=-\frac{1}{3}\Rightarrow c=0\Rightarrow y_2(x)=-\frac{1}{3x}$$

Γενική λύση (*) : $y(x)=c_1y_1+c_2y_2=c_1x^2+\dfrac{c_2}{x}$

$$y_p=y_2\int Ry_1-y_1\int Ry_2=-\frac{1}{3x}\int x^2\cdot x\,dx+\frac{1}{3}x^2\int\frac{1}{x}\cdot x\,dx=-\frac{1}{3x}\,\frac{x^4}{4}+\frac{1}{3}x^2\cdot x=$$

$$=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{12}\right)x^3=\frac{3}{12}x^3=\frac{1}{4}x^3$$

Άρα $y(x)=c_1x^2+\dfrac{c_2}{x}+\dfrac{x^3}{4}$ γενική λύση της (1).

Κανονική Μορφή

$y''+Py'+Qy=0 \Leftrightarrow u''+I(x)u=0$, $I=Q-\frac{1}{2}P'-\frac{1}{4}P^2$, $y=ue^{-\frac{1}{2}\int P}=u\sqrt{W}$

Πράγματι, αν $y=gu \Rightarrow y'=g'u+gu'$, $y''=g''u+2g'u'+gu''$

Άρα $g''u+2g'u'+gu''+P(g'u+gu')+Qgu=0$

$\Leftrightarrow (g''+Pg'+Qg)u+(Pg+2g')u'+gu''=0$

Αν $2g'+Pg=0 \Leftrightarrow \frac{g'}{g}=-\frac{P}{2} \Leftrightarrow (\ln g)'=-\frac{P}{2} \Leftrightarrow g=e^{-\int \frac{P}{2}dx}$ τότε

$gu''+(g''+Pg'+Qg)u=0 \Leftrightarrow u''+(Q+P\frac{g'}{g}+\frac{g''}{g})u=0.$

Είναι $2g'+Pg=0 \Rightarrow 2g''=-P'g-Pg'=-P'g+\frac{P^2}{2}g=(\frac{P^2}{2}-P')g$

Άρα $u''+(Q-\frac{P^2}{2}+\frac{P^2}{4}-\frac{P'}{2})u=0 \Leftrightarrow u''+(Q-\frac{P'}{2}-\frac{P^2}{4})u=0$

Η κανονική μορφή έχει $W(u_1,u_2)=$σταθ., π.χ. $=1 \Leftrightarrow W(\frac{1}{g}y_1, \frac{1}{g}y_2)=1 \Leftrightarrow$
$\frac{1}{g^2}W(y_1,y_2)=1 \Leftrightarrow g=\sqrt{W}$.

Σχόλιο Αν στη Δ.Ε. $y''+Py'+Qy=0$ εκτελέσω το μετ/μό $y=Gv$ τότε
$v''+(P+2\frac{G'}{G})v'+(Q+P\frac{G'}{G}+\frac{G''}{G})v=0$ η οποία ανάγεται σε κανονική μορφή με το μετμ $v=\tilde{g}\tilde{u}$

$\tilde{u}''+\tilde{I}\tilde{u}=0$, όπου $\tilde{I}=\tilde{Q}-\frac{\tilde{P}'}{2}-\frac{\tilde{P}^2}{4}$

$\tilde{Q}=Q+P\frac{G'}{G}+\frac{G''}{G}$, $\tilde{P}=P+2\frac{G'}{G}$, $\tilde{g}=e^{-\frac{1}{2}\int\tilde{P}}$

Ισχύει $\tilde{I}=I$ διότι $\tilde{I}=Q+P\frac{G'}{G}+\frac{G''}{G}-\frac{P'}{2}-\frac{G''}{G}+\frac{G'^2}{G^2}-\frac{P^2}{4}-\frac{G'^2}{G^2}-P\frac{G'}{G}$
$=Q-\frac{P'}{2}-\frac{P^2}{4}=I$

π.χ. $x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0$ (Bessel) $\Leftrightarrow y''+\frac{1}{x}y'+(1-\frac{\nu^2}{x^2})y=0$

$P=\frac{1}{x}$, $Q=1-\frac{\nu^2}{x^2}$, $I=Q-\frac{P'}{2}-\frac{P^2}{4}=1-\frac{\nu^2}{x^2}+\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{4x^2}=1-\frac{\nu^2-1/4}{x^2}$

Για $y=ue^{-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x}dx}=ue^{-\frac{1}{2}\ln x}=ue^{\ln x^{-1/2}}=ux^{-1/2}=\frac{u}{\sqrt{x}}$ είναι $u''+(1-\frac{\nu^2-1/4}{x^2})u=0.$

Για $x\to\infty$, $u''_\infty+u_\infty=0 \Leftrightarrow u_\infty=A\sin(x+\varphi) \Leftrightarrow y_\infty=\frac{A}{\sqrt{x}}\sin(x+\varphi)$, αποσβεννυμένη ταλάντωση.

π.χ. $y''+2x^3y'+(x^6+3x^2-1)y=0$

$P=2x^3$, $Q=x^6+3x^2-1$

$I=Q-\frac{P'}{2}-\frac{P^2}{4}=x^6+3x^2-1-3x^2-x^6=-1$

Για $y=ue^{-\frac{1}{2}\int P}=ue^{-\frac{1}{2}\int 2x^3dx}=ue^{-\frac{x^2}{4}}$ προκύπτει η κανονική μορφή
$u''-u=0 \Leftrightarrow u(x)=c_1e^x+c_2e^{-x} \Leftrightarrow y(x)=e^{-\frac{x^2}{4}}(c_1e^x+c_2e^{-x}).$