ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Σημειώσεις – Διαφορικές Εξισώσεις 1ης τάξης

Κοφινάς Γιώργος

Τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών και Επικοινωνιακών Συστημάτων

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Δ.Ε. 1ης τάξης χωριζόμενων μεταβλητών (ή διαχωρίσιμες)

$$y' = f(x)\,g(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = f(x)\,g(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx \Leftrightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx + c$$

$$\Leftrightarrow G(y) = F(x) + c \quad \text{Γενική λύση}$$

Αλλιώς, $y'(x) = f(x)\,g(y) \Leftrightarrow \dfrac{y'(x)}{g(y)} = f(x) \Leftrightarrow \displaystyle\int \frac{y'(x)}{g(y(x))}\,dx = \int f(x)\,dx + c$

$$\Leftrightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx + c$$

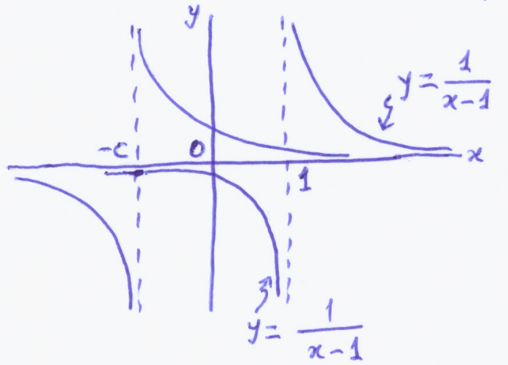
Θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας λύσης. Το πρόβλημα $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$ με f συνεχή και $\frac{\partial f}{\partial y}$ φραγμένη στη γειτονιά του (x_0, y_0) έχει μία και μοναδική λύση στη γειτονιά του (x_0, y_0). Η ύπαρξη λύσης στο (x_0, y_0) εξασφαλίζεται από τη συνέχεια της f.

Παράδειγμα

(1) $y' = -y^2 \Leftrightarrow \dfrac{dy}{dx} = -y^2 \Leftrightarrow \dfrac{dy}{y^2} = -dx \Leftrightarrow \displaystyle\int \frac{dy}{y^2} = -\int dx + \tilde{c} \Leftrightarrow -\frac{1}{y} = -x + \tilde{c} \Leftrightarrow$

$\dfrac{1}{y} = x + c \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{x+c}$ (γενική λύση)

Προκύπτει μια μονοπαραμετρική οικογένεια λύσεων με παράμετρο c διότι η δ.ε. είναι 1ης τάξης, άρα προκύπτει μια σταθερά ολοκλήρωσης c.



Για $x \to \pm\infty \Rightarrow y \to 0$

Για $x \to -c^+ \Rightarrow y \to +\infty$

$x \to -c^- \Rightarrow y \to -\infty$

Σαρώνεται όλο το επίπεδο από μη-τεμνόμενες λύσεις (αν δύο λύσεις $y_1 = \dfrac{1}{x+c_1}$, $y_2 = \dfrac{1}{x+c_2}$ τέμνονταν στο x_0, τότε $y_1(x_0) = y_2(x_0) \Rightarrow c_1 = c_2$ άτοπο).

Η λύση π.χ. $y = \dfrac{1}{x-1}$ λέγεται μερική λύση της δ.ε. (γιατί $c = -1$) (ή ειδική)

Υπάρχει μία ακόμα λύση της δ.ε., η $y_0 = 0$, που δεν περιλαμβάνεται στην οικογένεια $y = \dfrac{1}{x+c}$ και λέγεται ιδιάζουσα λύση.

Η συνάρτηση $f(x,y) = -y^2$ είναι συνεχής και $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -2y$ φραγμένη για κάθε y (και για $y = 0$), άρα υπάρχει μοναδική λύση. Το σημείο $x = -c$ είναι σημείο ανωμαλίας της λύσης και όχι της δ.ε.

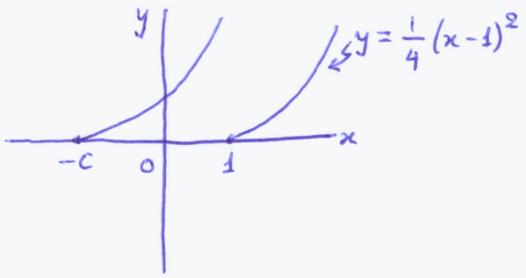
(2) $y' = \dfrac{4y}{x} \Leftrightarrow \dfrac{dy}{y} = 4\dfrac{dx}{x} \Leftrightarrow \displaystyle\int \frac{dy}{y} = 4\int \frac{dx}{x} + \tilde{c} \Leftrightarrow \ln|y| = 4\ln|x| + \tilde{c} \Leftrightarrow |y| = e^{\tilde{c}}|x|^4$

$\Leftrightarrow y = \pm e^{\tilde{c}} x^4 \Leftrightarrow y = c x^4$, $c \neq 0$. Αλλά η $y = 0$ είναι ιδιάζουσα λύση,

άρα $y = c x^4$, $c \in \mathbb{R}$.

(3) $y'=\sqrt{y} \Leftrightarrow \frac{dy}{\sqrt{y}} = dx \Leftrightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int dx + c \Leftrightarrow 2\sqrt{y} = x+c \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}(x+c)^2$

Είναι $y>0$, αφού υπάρχει ρίζα στη δ.ε., που φαίνεται και από τη λύση.



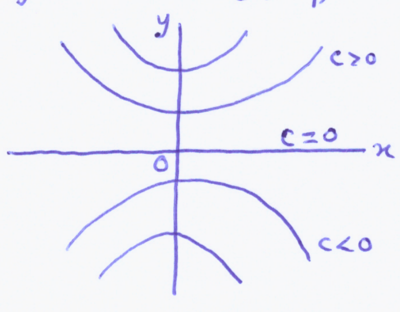
Είναι $y'=\frac{1}{2}(x+c)\geq 0 \Leftrightarrow x \geq -c$, άρα η λύση περιέχει μόνο το δεξιό κλάδο.
Σαρώνεται όλο το θετικό y-ημιεπίπεδο από τη μονοπαραμετρική οικογένεια των μη-τεμνόμενων καμπύλων $y=\frac{1}{4}(x+c)^2$.

Η $y_0=0$ είναι ιδιάζουσα λύση της δ.ε., αφού δεν προκύπτει από την $y=\frac{1}{4}(x+c)^2$.
Η $f(x,y)=\sqrt{y}$ είναι συνεχής, αλλά η $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ δεν είναι φραγμένη στο $y=0$, άρα αναμένουμε να υπάρχει λύση παντού, όμως αυτή δεν θα είναι μοναδική για $y=0$ (πράγματι, σε κάθε σημείο $(x_0,0)$ υπάρχουν δύο λύσεις).
Δηλ. για αρχική συνθήκη $y(x_0)=0$ υπάρχουν δύο λύσεις $y=0$, $y=\frac{1}{4}(x-x_0)^2$, ενώ για Α.Σ. $y(x_0)=y_0>0$ υπάρχει μία λύση $y=\frac{1}{4}(x-x_0)^2$.
Ο αριστερός κλάδος των παραβολών είναι λύση της δ.ε. $y'=-\sqrt{y}$, ενώ όλη η παραβολή λύνει τη δ.ε. $y'^2=y$. Στην περίπτωση αυτή οι παραβολές τέμνονται, και πράγματι δεν υπάρχει θεώρημα μοναδικότητας αφού η παράγωγος είναι στο τετράγωνο.

(4) $y'=xy \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = x\,dx \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int x\,dx + \tilde{c} \Leftrightarrow \ln|y| = \frac{x^2}{2}+\tilde{c} \Leftrightarrow |y| = e^{\tilde{c}} e^{x^2/2}$

$\Leftrightarrow y = \pm e^{\tilde{c}} e^{x^2/2} \Leftrightarrow y = c\,e^{x^2/2}, \ c\neq 0.$

Η $y=0$ είναι επίσης λύση, άρα $y=c\,e^{x^2/2}$, $c\in\mathbb{R}$



Παντού υπάρχει μοναδική λύση.

(5) $y'=2xy^2$, $y(0)=1$

$y'=2xy^2 \Leftrightarrow \frac{dy}{y^2} = 2x\,dx \Leftrightarrow -\frac{1}{y} = x^2+c \Leftrightarrow y = -\frac{1}{x^2+c}$ γενική λύση.

$y(0)=1 \Leftrightarrow -\frac{1}{0^2+c} = 1 \Leftrightarrow c=-1$, άρα $y(x)=\frac{1}{1-x^2}$, $x\in(-1,1)$, αφού το 0 περιλαμβάνεται στο πεδίο ορισμού της λύσης.

Αν $y(0)=-1$, τότε $c=1$, άρα $y(x) = -\frac{1}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$

(6) $y' = (y-1)(y-2), \quad y(0)=0$

$$y' = (y-1)(y-2) \Leftrightarrow \frac{dy}{(y-1)(y-2)} = dx \Leftrightarrow \int \frac{dy}{(y-1)(y-2)} = \int dx + \tilde{c} \Leftrightarrow$$

$$\int \left(\frac{1}{y-2} - \frac{1}{y-1}\right) dy = x + \tilde{c} \Leftrightarrow \ln|y-2| - \ln|y-1| = x + \tilde{c} \Leftrightarrow \ln\left|\frac{y-2}{y-1}\right| = x + \tilde{c}$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{y-2}{y-1}\right| = e^{\tilde{c}} e^{x} \Leftrightarrow \frac{y-2}{y-1} = \pm e^{\tilde{c}} e^{x} \Leftrightarrow \frac{y-2}{y-1} = c e^{x}, \quad c \neq 0$$

Αλλά η $y=2$ είναι λύση τη δ.ε., άρα $\frac{y-2}{y-1} = c e^{x}, \ c \in \mathbb{R}$

$$y(0)=0 \Leftrightarrow 2 = c e^{0} \Leftrightarrow c=2, \text{ άρα } \frac{y-2}{y-1} = 2e^{x} \Leftrightarrow y-2 = 2e^{x} y - 2e^{x} \Leftrightarrow$$

$$y(1-2e^{x}) = 2-2e^{x} \Leftrightarrow y(x) = \frac{2(1-e^{x})}{1-2e^{x}}$$

Ο παρανομαστής μηδενίζεται για $e^{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\ln 2$. Άρα υπάρχουν δύο κλάδοι για $x < -\ln 2$ και για $x > -\ln 2$. Επειδή το $0 > -\ln 2$, άρα η λύση του προβλήματος Αρχικών τιμών έχει $x \in (-\ln 2, +\infty)$.

Ομογενής Δ.Ε. 1ης τάξης

Η συνάρτηση $f(x,y)$ λέγεται ομογενής βαθμού d αν $f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^d f(x,y)$,

π.χ. $f(x,y)=x^4-3x^2y^2+y^4$ ομογενής βαθμού 4

$f(x,y)=\sin\left(\frac{x+2y}{2x-3y}\right)=\sin\left(\frac{\frac{x}{y}+2}{2\frac{x}{y}-3}\right)$ ομογενής βαθμού 0

$f(x,y)=\frac{x^2+5xy}{2x-y}$ ομογενής βαθμού 1

Για τη Δ.Ε. $y'=f\left(\frac{y}{x}\right) \overset{u=\frac{y}{x}}{\Leftrightarrow} xu'+u=f(u) \Leftrightarrow x\frac{du}{dx}=f(u)-u \Leftrightarrow \frac{du}{f(u)-u}=\frac{dx}{x}$ (διαχωρίσιμη)

$\Leftrightarrow \int\frac{du}{f(u)-u}=\int\frac{dx}{x}+c \Leftrightarrow \int\frac{du}{f(u)-u}=\ln|x|+c$

Μπορεί κάλλιστα να βολεύει περισσότερο η αντικατάσταση $v=\frac{x}{y}$.

Παράδειγμα

(1) $xy'=y(\ln y-\ln x+1) \Leftrightarrow y'=\frac{y}{x}\left(\ln\frac{y}{x}+1\right) \overset{u=\frac{y}{x}}{\Leftrightarrow} xu'+u=u(\ln u+1) \Leftrightarrow$

$x\frac{du}{dx}=u\ln u \Leftrightarrow \frac{du}{u\ln u}=\frac{dx}{x} \Leftrightarrow \int\frac{du}{u\ln u}=\int\frac{dx}{x}+\tilde{c}$

Αλλά $\frac{d}{du}\ln|\ln u| \overset{w=\ln u}{=\!=} \frac{d}{dw}\ln|w|\cdot\frac{dw}{du}=\frac{1}{w}\frac{1}{u}=\frac{1}{u\ln u}$

Άρα $\ln|\ln u|=\ln|x|+\tilde{c} \Leftrightarrow |\ln u|=e^{\tilde{c}}|x| \Leftrightarrow \ln u=\pm e^{\tilde{c}}x \Leftrightarrow \ln u=cx,\ c\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow u=e^{cx} \Leftrightarrow y(x)=xe^{cx}$

(2) $y'=\frac{y}{x+y\sin^2\left(\frac{x}{y}\right)} \overset{u=\frac{y}{x}}{\Leftrightarrow} xu'+u=\frac{u}{1+u\sin^2\frac{1}{u}} \Leftrightarrow x\frac{du}{dx}=-\frac{u^2\sin^2\frac{1}{u}}{1+u\sin^2\frac{1}{u}}$

$\Leftrightarrow -\frac{1+u\sin^2\frac{1}{u}}{u^2\sin^2\frac{1}{u}}=\frac{dx}{x}$, που είναι δύσκολη

$y'=\frac{y}{x+y\sin^2\left(\frac{x}{y}\right)} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{x}{y}+\sin^2\left(\frac{x}{y}\right)} \Leftrightarrow \frac{dx}{dy}=\frac{x}{y}+\sin^2\left(\frac{x}{y}\right) \overset{v=\frac{x}{y}}{\Leftrightarrow} v+y\frac{dv}{dy}=v+\sin^2 v$

$\Leftrightarrow \frac{dv}{\sin^2 v}=\frac{dy}{y} \Leftrightarrow \int\frac{dv}{\sin^2 v}=\int\frac{dy}{y}+\tilde{c} \Leftrightarrow -\cot v=\ln|y|+\tilde{c} \Leftrightarrow \ln|y|=-\cot v-\tilde{c}$

$\Leftrightarrow |y|=e^{-\tilde{c}}e^{-\cot v} \Leftrightarrow y=\pm e^{-\tilde{c}}e^{-\cot v} \Leftrightarrow y=c\,e^{-\cot\frac{x}{y}},\ c\in\mathbb{R}$

(3) $xy'=\sqrt{x^2-y^2}+y \Leftrightarrow y'=\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}+\frac{y}{x} \overset{u=\frac{y}{x}}{\Leftrightarrow} xu'+u=u+\sqrt{1-u^2} \Leftrightarrow x\frac{du}{dx}=\sqrt{1-u^2} \Leftrightarrow$

$\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{dx}{x} \Leftrightarrow \int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\int\frac{dx}{x}+c \Leftrightarrow \arcsin u=\ln|x|+c$

Αν $y(1)=0$, θεωρούμε τον κλάδο με $x>0$, άρα $\arcsin\frac{y}{x}=\ln x+c$ με

$\arcsin 0=\ln 1+c \Rightarrow c=0 \Rightarrow \arcsin\frac{y}{x}=\ln x \Rightarrow \frac{y}{x}=\sin(\ln x) \Rightarrow y(x)=x\sin(\ln x)$.

(4) $y' = \dfrac{3y^2+2xy}{2xy+x^2} \Leftrightarrow y' = \dfrac{3\left(\frac{y}{x}\right)^2+2\frac{y}{x}}{2\frac{y}{x}+1} \overset{u=\frac{y}{x}}{\Leftrightarrow} xu'+u = \dfrac{3u^2+2u}{2u+1} \Leftrightarrow x\dfrac{du}{dx} = \dfrac{u(u+1)}{2u+1}$

$\Leftrightarrow \dfrac{2u+1}{u(u+1)}\,du = \dfrac{dx}{x} \Leftrightarrow \displaystyle\int \dfrac{2u+1}{u(u+1)}\,du = \int \dfrac{dx}{x} + \tilde{c} \Leftrightarrow \int \left(\dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{u+1}\right)du = \ln|x| + \tilde{c} \Leftrightarrow$

$\ln|u| + \ln|u+1| = \ln|x| + \tilde{c} \Leftrightarrow \ln|u\cdot(u+1)| = \ln|x| + \tilde{c} \Leftrightarrow |u\cdot(u+1)| = e^{\tilde{c}}|x| \Leftrightarrow$

$u(u+1) = \pm e^{\tilde{c}}x \Leftrightarrow u(u+1) = cx, \quad c\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \dfrac{y}{x}\left(\dfrac{y}{x}+1\right) = cx \Leftrightarrow y(y+x) = cx^3$

$\Leftrightarrow y^2+xy = cx^3$

Γραμμική Δ.Ε. 1ης τάξης

- $y' + P(x)y = Q(x)$ (1)

$$\Leftrightarrow e^{\int P} y' + P e^{\int P} y = Q e^{\int P} \Leftrightarrow \left(e^{\int P} y\right)' = Q e^{\int P} \Leftrightarrow e^{\int P} y = \int Q e^{\int P} + c$$

$$\Leftrightarrow \underline{y(x) = e^{-\int P}\left(c + \int Q e^{\int P}\right)}$$

= γενική λύση ομογενούς $y' + Py = 0$ + μερική λύση της (1)

Το ίδιο είναι να ονομάσουμε το $\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$ ολοκληρωτικό παράγοντα, οπότε

$$y' + Py = Q \Leftrightarrow \mu y' + \mu P y = \mu Q \Leftrightarrow (\mu y)' = \mu Q \quad \text{διότι } \mu' = P\mu$$

$$\Leftrightarrow \mu y = \int Q\mu + c$$

Αλλιώς, έστω $\underline{y = gu}$, όπου u είναι η συνάρτηση που θα αντικαταστήσει την y (δηλ. θα φτιαχτεί Δ.Ε. ως προς u) και g κατάλληλα επιλεγμένη συνάρτηση που θα απλοποιήσει τη Δ.Ε. ως προς u. Τότε

$y' + Py = Q \Leftrightarrow gu' + g'u + Pgu = Q \Leftrightarrow gu' + (g' + Pg)u = Q$. Διαλέγουμε

$g' + Pg = 0 \Leftrightarrow \dfrac{dg}{g} + Pdx = 0 \Leftrightarrow \int \dfrac{dg}{g} = -\int P dx + \tilde{c} \Leftrightarrow \ln|g| = -\int P dx + \tilde{c} \Leftrightarrow$

$|g| = e^{\tilde{c}} e^{-\int P} \Leftrightarrow g = c_1 e^{-\int P}$, $c_1 \in \mathbb{R}$. Άρα, $gu' = Q \Leftrightarrow du = \dfrac{Q}{g} dx \Leftrightarrow$

$\int du = \int \dfrac{Q}{g} dx + c_2 \Leftrightarrow u = \int \dfrac{Q}{g} dx + c \Leftrightarrow y = g \int \dfrac{Q}{g} dx + c_2 g$

$\Leftrightarrow y = e^{-\int P} \int Q e^{\int P} + c_2 c_1 e^{-\int P} \Leftrightarrow y = e^{-\int P}\left(c + \int Q e^{\int P}\right)$, όπως προηγουμένως.

Παράδειγμα

(1) $xy' + 2y = \sin x \Leftrightarrow y' + \dfrac{2}{x} y = \dfrac{\sin x}{x}$. Πολ/ζουμε με τον ολοκληρωτικό παράγοντα

$\mu(x) = e^{\int \frac{2}{x} dx} = e^{2\ln x} = x^2$, οπότε $x^2 y' + 2xy = x \sin x \Leftrightarrow (x^2 y)' = x \sin x$

$\Leftrightarrow x^2 y = \int x \sin x + c \Leftrightarrow x^2 y = \sin x - x\cos x + c \Leftrightarrow y = \dfrac{\sin x}{x^2} - \dfrac{\cos x}{x} + \dfrac{c}{x^2}$.

(2) $\sin x \cdot y' + 2\cos x \cdot y - 1 = 0 \Leftrightarrow y' + 2\cot x \cdot y = \dfrac{1}{\sin x}$, $\mu(x) = e^{2\int \cot x dx} =$

$= e^{2\int \frac{\cos x}{\sin x} dx} = e^{2\int \frac{d\sin x}{\sin x}} = e^{2\ln \sin x} = \sin^2 x$, άρα

$\sin^2 x \cdot y' + 2\sin x \cos x \cdot y = \sin x \Leftrightarrow (\sin^2 x \cdot y)' = \sin x \Leftrightarrow \sin^2 x \cdot y = \int \sin x dx + c =$

$= -\cos x + c \Leftrightarrow y = \dfrac{c - \cos x}{\sin^2 x}$

(3) $(1+x^2)y' + 2xy = 1 \Leftrightarrow y' + \dfrac{2x}{1+x^2} y = \dfrac{1}{1+x^2}$, $\mu(x) = e^{\int \frac{2x}{1+x^2} dx} = e^{\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2}} =$

$= e^{\ln(1+x^2)} = 1 + x^2$, άρα $(x^2+1)y' + 2xy = 1 \Leftrightarrow \left[(x^2+1)y\right]' = 1 \Leftrightarrow (x^2+1)y = \int dx + c$

$= x + c \Leftrightarrow y = \dfrac{x+c}{x^2+1}$.

4) $y'+2xy=2x$, $y(0)=2$, $\mu(x)=e^{\int 2x dx}=e^{x^2}$

$y'+2xy=2x \Leftrightarrow e^{x^2}y'+2xe^{x^2}y=2xe^{x^2} \Leftrightarrow (e^{x^2}y)'=2xe^{x^2} \Leftrightarrow e^{x^2}y=\int 2xe^{x^2}dx+c$
$=e^{x^2}+c \Leftrightarrow y=1+ce^{-x^2}$

$y(0)=2 \Leftrightarrow 1+c=2 \Leftrightarrow c=1$, άρα $y=1+e^{-x^2}$.

5) $(y^2-x)y'=1$ όχι γραμμική ως προς $y(x)$. Αλλά

$\frac{dx}{dy}+x=y^2$ γραμμική ως προς $x(y)$.

$\mu(y)=e^{\int dy}=e^y$, άρα $\frac{dx}{dy}+x=y^2 \Leftrightarrow e^y\frac{dx}{dy}+e^y x=y^2e^y \Leftrightarrow \frac{d}{dy}(e^y x)=y^2e^y$

$\Leftrightarrow e^y x=\int y^2e^y dy+c=y^2e^y-2ye^y+2e^y+c \Leftrightarrow x=y^2-2y+2+ce^{-y}$

6) $y'+\frac{2}{x^2-1}y=3$, $y\left(\frac{1}{2}\right)=1$

Η μοναδικότητα της λύσης εξασφαλίζεται στα διαστήματα $(-\infty,-1),(-1,1)$, $(1,+\infty)$. Αλλά $x_0=\frac{1}{2}$, άρα επιλέγουμε το $(-1,1)$, δηλ. $-1<x<1$.

$\mu(x)=e^{\int\frac{2}{x^2-1}dx}=e^{\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx}=e^{\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|}=\left|\frac{x-1}{x+1}\right|=\frac{1-x}{1+x}$

$y'+\frac{2}{x^2-1}y=3 \Leftrightarrow \frac{1-x}{1+x}y'+\frac{1-x}{1+x}\frac{2}{(x-1)(x+1)}y=3\frac{1-x}{1+x} \Leftrightarrow \left(\frac{1-x}{1+x}y\right)'=3\frac{1-x}{1+x} \Leftrightarrow$

$\frac{1-x}{1+x}y=3\int\frac{1-x}{1+x}dx+c \Leftrightarrow \frac{1-x}{1+x}y=6\ln(1+x)-3x+c \Leftrightarrow y(x)=\frac{1-x}{1+x}\left[6\ln(1+x)-3x+c\right]$

$y\left(\frac{1}{2}\right)=1 \Leftrightarrow c=\frac{11}{6}-6\ln\frac{3}{2} \Rightarrow y(x)=\frac{1+x}{1-x}\left[6\ln(1+x)-3x+\frac{11}{6}-6\ln\frac{3}{2}\right]$, $-1<x<1$

7) $y'+y=f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1\\ 0, & x>1\end{cases}$, $y(0)=3$

Αναζητώ συνεχή λύση $y(x)$, παρότι $f(x)$ ασυνεχής.

Στο διάστημα $[0,1]$ είναι $y'+y=1 \Leftrightarrow y(x)=1+ce^{-x}$. Αλλά $y(0)=3 \Leftrightarrow$ $c=2$, άρα $y(x)=1+2e^{-x}$. Είναι $\lim_{x\to1^-}y(x)=1+\frac{2}{e}$, άρα λύνω για $x>1$ το πρόβλημα $y'+y=0$, $y(1)=1+\frac{2}{e}$. Η λύση του είναι $y(x)=(e+2)e^{-x}$. Τελικά

$$y(x)=\begin{cases}1+2e^{-x}, & 0\le x\le 1\\ (e+2)e^{-x}, & x\geq 1\end{cases}$$

Δ.Ε. $1^{ης}$ τάξης Bernoulli

$$y'+p(x)y=q(x)y^{\nu} \Leftrightarrow y^{-\nu}y'+py^{1-\nu}=q \Leftrightarrow \frac{1}{1-\nu}(y^{1-\nu})'+py^{1-\nu}=q \overset{u=y^{1-\nu}}{\Longleftrightarrow}$$

$u'+(1-\nu)pu=(1-\nu)q$ Γραμμική

Αλλιώς, $y=u^{\alpha} \rightsquigarrow y'=\alpha u^{\alpha-1}u'$, άρα

$$y'+py=qy^{\nu} \Leftrightarrow \alpha u^{\alpha-1}u'+pu^{\alpha}=qu^{\alpha\nu} \Leftrightarrow u'+\frac{p}{\alpha}u=\frac{q}{\alpha}u^{\alpha\nu-\alpha+1}$$

Για $\alpha\nu-\alpha+1=0 \Leftrightarrow \alpha=\frac{1}{1-\nu}$, δηλαδή $y=u^{\frac{1}{1-\nu}} \Leftrightarrow u=y^{1-\nu}$ είναι

$u'+(1-\nu)pu=(1-\nu)q$ Γραμμική

Αλλιώς, αν $y=gu$ τότε $y'+py=qy^{\nu} \Leftrightarrow gu'+g'u+pgu=qg^{\nu}u^{\nu}$.

Διαλέγοντας $g'+pg=0 \Leftrightarrow (\ln|g|)'=-p \Leftrightarrow \ln|g|=-\int pdx+\tilde{c} \Leftrightarrow |g|=e^{\tilde{c}}e^{-\int pdx}$

$\Leftrightarrow g=ce^{-\int pdx}$, τότε προκύπτει

$gu'=qg^{\nu}u^{\nu} \Leftrightarrow u'=qg^{\nu-1}u^{\nu}$ διαχωρίσιμη

Αλλιώς, ολοκληρωτικός παράγοντας $\mu(x)=e^{\int pdx}$, οπότε $y'+py=qy^{\nu} \Leftrightarrow$

$$\mu y'+p\mu y=q\mu y^{\nu} \Leftrightarrow \mu y'+\mu' y=q\mu y^{\nu} \Leftrightarrow (\mu y)'=q\mu y^{\nu} \overset{v=\mu y}{\Longleftrightarrow} v'=q\mu^{1-\nu}v^{\nu}$$

Παράδειγμα

(1) $y'=y+e^{x}\sqrt{y} \Leftrightarrow y'-y=e^{x}y^{1/2}$ Bernoulli

$u=y^{1-\frac{1}{2}}=\sqrt{y} \rightsquigarrow u'=\frac{1}{2\sqrt{y}}y'=\frac{1}{2u}y' \rightsquigarrow y'=2uu'$

$$2uu'-u^2=e^{x}u \Leftrightarrow 2u'-u=e^{x} \Leftrightarrow u'-\frac{1}{2}u=\frac{1}{2}e^{x} \Leftrightarrow u=e^{\frac{1}{2}x}\left(c+\int\frac{1}{2}e^{x}e^{-\frac{1}{2}x}dx\right)$$

$$\Leftrightarrow u=e^{\frac{x}{2}}(c+e^{\frac{x}{2}})=ce^{\frac{x}{2}}+e^{x} \Leftrightarrow \sqrt{y}=e^{x}+ce^{\frac{x}{2}} \Leftrightarrow y(x)=(e^{x}+ce^{\frac{x}{2}})^2$$

Η $f(x,y)=y+e^{x}\sqrt{y}$ είναι συνεχής και $\frac{\partial f}{\partial y}=1+\frac{e^{x}}{2\sqrt{y}}$ φραγμένη εκτός από το $y=0$. Άρα, εκτός της λύσης $y=0$, περνούν και άλλες λύσεις από τον άξονα x.

(2) $xy'=y+xy^2 \Leftrightarrow y'-\frac{1}{x}y=y^2$, $\mu(x)=e^{-\int\frac{dx}{x}}=e^{-\ln x}=\frac{1}{x}$, άρα

$$\frac{1}{x}y'-\frac{1}{x^2}y=\frac{1}{x}y^2 \Leftrightarrow \left(\frac{y}{x}\right)'=\frac{1}{x}y^2 \overset{v=y/x}{\Longleftrightarrow} v'=xv^2 \Leftrightarrow \frac{v'}{v^2}=x \Leftrightarrow -\frac{1}{v}=\frac{x^2}{2}+\tilde{c}$$

$$\Leftrightarrow v=-\frac{2}{x^2+2\tilde{c}} \Leftrightarrow y=-\frac{2x}{x^2+2\tilde{c}} \Leftrightarrow y(x)=-\frac{2x}{x^2+c}$$

3) $y'=\frac{4x^3y}{x^4+4y^2} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{x^4+4y^2}{4x^3y} \Leftrightarrow \frac{dx}{dy}-\frac{1}{4y}x=yx^{-3}$ Bernoulli

$$\overset{u=x^4}{\Longleftrightarrow} \frac{1}{4}u^{-3/4}\frac{du}{dy}-\frac{1}{4y}u^{1/4}=yx^{-3/4} \Leftrightarrow \frac{du}{dy}-\frac{1}{y}u=4y$$

$$\Leftrightarrow u=e^{\int\frac{dy}{y}}\left(c+\int 4y\,e^{-\int\frac{dy}{y}dy}dy\right)=y\left(c+4\int y\frac{1}{y}dy\right)=y(c+4y)$$

$$\Leftrightarrow x^4=y(c+4y) \Leftrightarrow \ldots y \cdots =$$

4) $y' + 2xy = 2x^3y^3 \overset{u=y^{-2}}{\Leftrightarrow} -\frac{1}{2}u^{-3/2}u' + 2x u^{-1/2} = 2x^3 u^{-3/2} \Leftrightarrow u' - 4xu = -4x^3$

$$\Leftrightarrow u = e^{4\int x dx}\left(c + \int -4x^3 e^{-2x^2}dx\right) = e^{2x^2}\left(c - 4\int x^3 e^{-2x^2}dx\right) =$$

$$= e^{2x^2}\left(c + \int x^2 (e^{-2x^2})' dx\right) = e^{2x^2}\left(c + x^2 e^{-2x^2} - 2\int x e^{-2x^2}dx\right)$$

$$= e^{2x^2}\left(c + x^2 e^{-2x^2} + \frac{1}{2}e^{-2x^2}\right) = x^2 + \frac{1}{2} + c e^{2x^2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{y^2} = x^2 + \frac{1}{2} + c e^{2x^2} \Leftrightarrow y(x) = \pm \frac{1}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{2} + c e^{2x^2}}}$$

(5) $y' = y - \frac{1}{4}y^{3/2}$

$y = gu$

$gu' + g'u = gu - \frac{1}{4}g^{3/2}u^{3/2}$

Για $g' = g \Leftrightarrow (\ln|g|)' = 1 \Leftrightarrow \ln|g| = x + \tilde{c} \Leftrightarrow g = ce^x$, π.χ. $g = e^x$ τότε

$$u' = -\frac{1}{4}g^{1/2}u^{3/2} \Leftrightarrow u^{-3/2}u' = -\frac{1}{4}e^{x/2} \Leftrightarrow -2(u^{-1/2})' = -\frac{1}{4}e^{x/2} \Leftrightarrow$$

$$u^{-1/2} = \frac{1}{8}\int e^{\frac{x}{2}}dx + c \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{u}} = \frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}} + c \Leftrightarrow u = \frac{1}{\left(\frac{1}{4}e^{x/2} + c\right)^2} \Leftrightarrow$$

$$e^{-x}y = \frac{1}{\left(\frac{1}{4}e^{x/2} + c\right)^2} \Leftrightarrow y = \frac{1}{\left(\frac{1}{4} + ce^{-x/2}\right)^2}$$

Αν είχαμε πάρει $g = ce^x$, πάλι θα προέκυπτε το ίδιο y (με άλλο c).

Δ.Ε. 1ης τάξης Ricatti

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$$

Αν $y_1(x)$ μερική λύση της Ricatti, τότε για $y = y_1 + \frac{1}{u}$ προκύπτει

$$y_1' - \frac{u'}{u^2} = Py_1^2 + P\frac{1}{u^2} + P\frac{2y_1}{u} + Qy_1 + Q\frac{1}{u} + R \Leftrightarrow -\frac{u'}{u} = \frac{P}{u} + 2y_1P + Q \Leftrightarrow$$

$u' + (2y_1P + Q)u = -P$ γραμμική

Αλλιώς, αν $y = u + h(x)$, τότε $y' = Py^2 + Qy + R \Leftrightarrow u' + h' = P(u+h)^2 + Q(u+h) + R$

$\Leftrightarrow u' + h' = Pu^2 + Ph^2 + 2Puh + Qu + Qh + R$

Επιλέγουμε $h' = Ph^2 + Qh + R$, δηλαδή η h είναι μια ειδική λύση y_1 της Ricatti. Τότε $u' = Pu^2 + (2Py_1 + Q)u$ που είναι Bernoulli.

Αν $v = u^{1-2} = \frac{1}{u}$ προκύπτει γραμμική. Άρα συνολικά $y = y_1 + \frac{1}{v}$

Αλλιώς, αν $y = gu + h$, τότε $y' = Py^2 + Qy + R \Leftrightarrow$

$gu' + g'u + h' = P(gu+h)^2 + Q(gu+h) + R \Leftrightarrow$

$u' = Pgu^2 + (2Ph + Q - \frac{g'}{g})u + \frac{1}{g}(Ph^2 + Qh + R - h')$

Επιλέγουμε $h' = Ph^2 + Qh + R$, δηλαδή η h είναι μια ειδική λύση της Ricatti.

Επίσης αν $\frac{g'}{g} = 2Py_1 + Q \Leftrightarrow g = \kappa e^{\int(2Py_1+Q)dx}$, τότε

$u' = Pgu^2 \Leftrightarrow u = -\frac{1}{\int Pg\,dx + c}$, άρα $y = y_1 - \frac{g}{\int Pg\,dx + c}$. Προφανώς, η επιλογή του κ δεν επηρεάζει τη γενική λύση y.

<u>Παράδειγμα</u>

(1) $y' = \frac{y^2}{x^3} - \frac{y}{x} + 2x$

Δοκιμάζουμε ειδική λύση $y = \alpha x^\beta \Rightarrow \alpha\beta x^{\beta-1} = \alpha^2 x^{2\beta-3} - \alpha x^{\beta-1} + 2x$.

Αν $\beta = 2$ τότε $2\alpha x = \alpha^2 x - \alpha x + 2x \Leftrightarrow \alpha = 2, 1$, άρα $y_1 = 2x^2$, x^2 ειδ. λύσεις.

Αν $y = x^2 + \frac{1}{u}$ τότε $2x - \frac{u'}{u^2} = \frac{1}{x^3}\left(x^4 + \frac{1}{u^2} + \frac{2x^2}{u}\right) - \frac{1}{x}\left(x^2 + \frac{1}{u}\right) + 2x \Leftrightarrow$

$-\frac{u'}{u^2} = \frac{1}{x^3u^2} + \frac{1}{xu} \Leftrightarrow u' + \frac{1}{x}u = -\frac{1}{x^3}$ γραμμική $\Leftrightarrow$

$$u = e^{-\int\frac{dx}{x}}\left(c + \int\frac{-1}{x^3}e^{\int\frac{dx}{x}}dx\right) = \frac{1}{x}\left(c - \int\frac{1}{x^2}dx\right) = \frac{1}{x}\left(c + \frac{1}{x}\right) = \frac{1+cx}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow y = x^2 + \frac{x^2}{1+cx} = x^2\frac{2+cx}{1+cx}$$

(2) $y' = y^2 - (2x+1)y + (x^2+x+1)$

Βρίσκουμε την ειδική λύση $y_1 = x$

$y = y_1 + u = x + u$

$u'+1 = x^2+u^2+2xu - (2x+1)(x+u) + x^2+x+1 \Leftrightarrow u' = u^2 - u \Leftrightarrow$

$u = \dfrac{e^{-x}}{e^{-x}+c} = \dfrac{1}{1+ce^{x}} \Leftrightarrow y = x + \dfrac{1}{1+ce^{x}}$

Αλλιώς, από τον τύπο $g = e^{\int (2Py_1+Q)dx} = e^{\int (2\cdot 1\cdot x - 2x - 1)dx} = e^{-x}$

είναι $y = y_1 - \dfrac{g}{\int Pg\,dx + \tilde{c}} = x - \dfrac{e^{-x}}{\int e^{-x}dx + \tilde{c}} = x - \dfrac{e^{-x}}{-e^{-x}+\tilde{c}} = x + \dfrac{e^{-x}}{e^{-x}+c} = x + \dfrac{1}{1+ce^{x}}$

(3) $y' = y^2 + \dfrac{1}{x}y - \dfrac{3}{x^2}$

Βρίσκουμε τις ειδικές λύσεις $y_1 = \dfrac{1}{x}, -\dfrac{3}{x}$

$y = \dfrac{1}{x} + u$

$u' - \dfrac{1}{x^2} = \left(u^2 + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2}{x}u\right) + \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x}+u\right) - \dfrac{3}{x^2} \Leftrightarrow u' = u^2 + \dfrac{3}{x}u$ Bernoulli

$v = u^{1-2} = \dfrac{1}{u}$, $-\dfrac{v'}{v^2} = \dfrac{1}{v^2} + \dfrac{3}{x}\dfrac{1}{v} \Leftrightarrow v' + \dfrac{3}{x}v = -1 \Leftrightarrow v = -\dfrac{x^4+c}{4x^3} \Leftrightarrow$

$u = -\dfrac{4x^3}{x^4+c} \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{x} - \dfrac{4x^3}{x^4+c}$

Μετ/μός Ricatti σε 2ης τάξης Γραμμική ομογενή Δ.Ε

Για $y = \dfrac{1}{P}u$, $y' = Py^2 + Qy + R \Leftrightarrow u' = u^2 + pu + q$, $p = \dfrac{P'}{P} + Q$, $q = PR$

Με $u = -\dfrac{v'}{v}$, $u' = -\dfrac{v''}{v} + \dfrac{v'^2}{v^2}$ είναι

$v'' - pv' + qv = 0 \Leftrightarrow v'' - \left(\dfrac{P'}{P} + Q\right)v' + PRv = 0$

$\left(y = -\dfrac{1}{P}\dfrac{v'}{v} = -\dfrac{1}{P}\dfrac{c_1v_1' + c_2v_2'}{c_1v_1 + c_2v_2} \right)$

Παράδειγμα

$y' = xy^2 - \dfrac{1}{x}y + \dfrac{1}{x}$

Για $y = -\dfrac{1}{x}\dfrac{v'}{v}$ είναι $v'' - \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x}\right)v' + x\cdot\dfrac{1}{x}v = 0 \Leftrightarrow v'' + v = 0 \Leftrightarrow$

$v = c_1\sin x + c_2\cos x \Leftrightarrow y = -\dfrac{1}{x}\dfrac{c_1\cos x - c_2\sin x}{c_1\sin x + c_2\cos x} = \dfrac{1}{x}\dfrac{\tan x - c}{1 + c\tan x}$

Δ.Ε. 1ης τάξης ολικού διαφορικού ή ακριβής Δ.Ε.

Η δ.ε. $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0 \Leftrightarrow P + Q\dfrac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow P\dfrac{dx}{dy} + Q = 0$ λέγεται ακριβής όταν $\exists\ F(x,y)$ με $dF = Pdx + Qdy$.

Αν η δ.ε. $Pdx + Qdy = 0$ είναι ακριβής, τότε $F(x,y) = c$ είναι η λύση της.
Πράγματι, αφού η $Pdx + Qdy = 0$ ακριβής, άρα $\exists F : dF = Pdx + Qdy$.
Η $F = c$ έχει $dF = 0$, άρα ικανοποιεί τη δ.ε. $Pdx + Qdy = 0$, άρα είναι λύση της.

Πρόταση Η $Pdx + Qdy = 0$ (P, Q συνεχείς με συνεχείς μερικές παραγώγους) είναι ακριβής ανν $P_y = Q_x$.
Πράγματι, έστω $Pdx + Qdy = 0$ ακριβής $\Rightarrow \exists\ F : dF = \dfrac{\partial F}{\partial x}dx + \dfrac{\partial F}{\partial y}dy = Pdx + Qdy$
$\Rightarrow P = \dfrac{\partial F}{\partial x},\ Q = \dfrac{\partial F}{\partial y} \Rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial x},\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}$. Αλλά
$\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial x}$, άρα $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow P_y = Q_x$.
Αντίστροφα, αν $\varphi(x,y) = \int P(x,y)\,dx \Rightarrow \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = P \Rightarrow \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y\,\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y} \Rightarrow$
$\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = \int \dfrac{\partial Q}{\partial x}dx + h(y) \Rightarrow \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = Q(x,y) + h(y)$.
Η $F(x,y) = \varphi(x,y) - \int h(y)\,dy \Rightarrow dF = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}dy - h(y)\,dy = Pdx + Qdy$
$\Rightarrow Pdx + Qdy = 0$ ακριβής δ.ε.

Πρακτικά, αν για τη δ.ε. $Pdx + Qdy = 0$ ισχύει $P_y = Q_x$ τότε
$dF = Pdx + Qdy \Rightarrow P = \dfrac{\partial F}{\partial x},\ Q = \dfrac{\partial F}{\partial y} \Rightarrow F(x,y) = \int P(x,y)\,dx + h(y) \Rightarrow$
$Q(x,y) = \int \dfrac{\partial P}{\partial y}dx + \dfrac{dh(y)}{dy} \Rightarrow h(y) \Rightarrow F(x,y) \Rightarrow F(x,y) = c$ λύση

Παράδειγμα

(1) $(\cos x + \ln y)\,dx + \left(\dfrac{x}{y} + e^y\right)dy = 0$
$P = \cos x + \ln y,\ Q = \dfrac{x}{y} + e^y,\ P_y = \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{1}{y},\ Q_x = \dfrac{1}{y}$, άρα $P_y = Q_x$.
Άρα $\exists\ F(x,y) : dF = Pdx + Qdy \Rightarrow P = \dfrac{\partial F}{\partial x},\ Q = \dfrac{\partial F}{\partial y} \Rightarrow F(x,y) = \int Pdx + h(y)$
$\Rightarrow F = \int(\cos x + \ln y)\,dx + h(y) = \sin x + x\ln y + h(y)$
$\Rightarrow Q = \dfrac{x}{y} + e^y = \dfrac{x}{y} + \dfrac{dh}{dy} \Rightarrow \dfrac{dh}{dy} = e^y \Rightarrow h(y) = e^y \Rightarrow F = \sin x + x\ln y + e^y \Rightarrow$
$\sin x + x\ln y + e^y = c$ η λύση της δ.ε.

(2) $(3x^2+2y^2)\,dx + (4xy+6y^2)\,dy = 0$

$P = 3x^2+2y^2, \quad Q = 4xy+6y^2$

$P_y = \dfrac{\partial P}{\partial y} = 4y, \quad Q_x = \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 4y \Rightarrow P_y = Q_x$

$\exists\, F: \; dF = P\,dx + Q\,dy \Rightarrow P = \dfrac{\partial F}{\partial x}, \; Q = \dfrac{\partial F}{\partial y} \Rightarrow$

$F = \int P\,dx + h(y) \Rightarrow F = \int (3x^2+2y^2)\,dx + h(y) \Rightarrow$

$F = x^3+2xy^2+h(y) \Rightarrow Q = 4xy + \dfrac{dh}{dy} = 4xy+6y^2 \Rightarrow h(y) = 2y^3$

$\Rightarrow F = x^3+2xy^2+2y^3 \Rightarrow x^3+2xy^2+2y^3 = c$ η λύση της δ.ε.

Δ.Ε. $1^{ης}$ τάξης που ανάγονται σε ακριβείς μέσω ολοκληρωτικού παράγοντα (παράγοντα Euler)

Λέμε ότι η δ.ε. $Pdx+Qdy=0$ επιδέχεται ολοκληρωτικό παράγοντα $\mu(x,y)$ όταν η δ.ε. $\mu P dx+\mu Q dy=0$ είναι ακριβής.

Ο ολοκληρωτικός παράγοντας μ ικανοποιεί τη δ.ε. μερικών παραγώγων (pde) $\mu(P_y-Q_x)=Q\mu_x-P\mu_y$.

Πράγματι, αφού $\mu P dx+\mu Q dy=0$, $\exists\, F:\ dF=\mu P dx+\mu Q dy \Rightarrow$

$\frac{\partial F}{\partial x}=\mu P$, $\frac{\partial F}{\partial y}=\mu Q \Rightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}(\mu P)$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}=\frac{\partial}{\partial x}(\mu Q) \Rightarrow$

$\frac{\partial}{\partial y}(\mu P)=\frac{\partial}{\partial x}(\mu Q) \Rightarrow \mu_y P+\mu P_y=\mu_x Q+\mu Q_x$.

__Πρόταση__ Η $Pdx+Qdy=0$ επιδέχεται ολοκληρωτικό παράγοντα $\mu(x)$ ανν $\frac{1}{Q}(P_y-Q_x)=f(x)$, οπότε $\mu(x)=e^{\int f(x)dx}$.

Πράγματι, αν $\mu(x)$ ολοκληρωτικός παράγοντας, τότε $Q\frac{d\mu}{dx}=\mu(P_y-Q_x)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dx}=\frac{1}{Q}(P_y-Q_x)$, άρα $\frac{1}{Q}(P_y-Q_x)=f(x)$.

Αντίστροφα, αν $\frac{1}{Q}(P_y-Q_x)=f(x) \Rightarrow P_y-Q_x=Qf$. Αν $\exists$ ολοκλ. παράγ. μ, θα ικανοποιεί $\mu Q f=Q\mu_x-P\mu_y \Rightarrow \mu_x-\frac{P}{Q}\mu_y=\mu f$ και πράγματι υπάρχει λύση $\mu(x)=e^{\int f(x)dx}$

__Πρόταση__ Η $Pdx+Qdy=0$ επιδέχεται ολοκληρωτικό παράγονται $\mu(y)$ ανν $\frac{1}{P}(P_y-Q_x)=g(y)$, οπότε $\mu(y)=e^{-\int g(y)dy}$

Πράγματι, αν $\mu(y)$ ολοκληρωτικός παράγοντας, τότε $-P\frac{d\mu}{dy}=\mu(P_y-Q_x)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dy}=-\frac{1}{P}(P_y-Q_x) \Rightarrow \frac{1}{P}(P_y-Q_x)=g(y)$.

Αντίστροφα, αν $\frac{1}{P}(P_y-Q_x)=g(y) \Rightarrow P_y-Q_x=Pg$. Αν υπάρχει ολοκλ. παράγοντας μ, θα ικανοποιεί $\mu P g=Q\mu_x-P\mu_y \Rightarrow \mu_y-\frac{Q}{P}\mu_x=-\mu g$ και πράγματι υπάρχει λύση $\mu(y)=e^{-\int g(y)dy}$.

__Παράδειγμα__

(1) $(x+\sin x+\sin y)dx+\cos y\, dy=0$

$P=x+\sin x+\sin y$, $Q=\cos y$

$P_y=\cos y$, $Q_x=0$, $\frac{1}{Q}(P_y-Q_x)=1$, $\frac{1}{P}(P_y-Q_x)=\frac{\cos y}{x+\sin x+\sin y}$

Άρα $\exists$ ολοκλ. παράγοντας $\mu(x)=e^{\int dx}=e^x$.

Η δ.ε. $e^x(x+\sin x+\sin y)dx+e^x\cos y\, dy=0$ είναι ακριβής, και πράγματι

$\frac{\partial}{\partial y}[e^x(x+\sin x+\sin y)]=e^x\cos y$, $\frac{\partial}{\partial x}(e^x\cos y)=e^x\cos y$

Άρα $\exists\ F(x,y)$ με $dF = e^x(x+\sin x+\sin y)\,dx + e^x\cos y\,dy \Rightarrow$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = e^x(x+\sin x+\sin y), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = e^x\cos y \Rightarrow$$

$$F = \int e^x\cos y\,dy + h(x) = e^x\sin y + h(x) \Rightarrow$$

$$e^x(x+\sin x+\sin y) = e^x\sin y + \frac{dh(x)}{dx} \Rightarrow \frac{dh(x)}{dx} = e^x(x+\sin x) \Rightarrow$$

$$h(x) = xe^x - e^x + \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x)$$

$$\Rightarrow F = e^x\sin y + xe^x - e^x + \frac{e^x}{2}(\sin x-\cos x)$$

$$\Rightarrow e^x\sin y + xe^x - e^x + \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) = c$$ λύση της δ.ε.

(2) $y(4x+y)\,dx - 2(x^2-y)\,dy = 0$

$P = y(4x+y)$, $Q = -2(x^2-y)$

$P_y = 4x+2y$, $Q_x = -4x$, $P_y \neq Q_x \Rightarrow$ όχι ακριβής

$$\frac{1}{P}(P_y - Q_x) = \frac{8x+2y}{y(4x+y)} = \frac{2}{y} = g(y) \Rightarrow \exists \text{ ολοκλ. παραγ. } \mu(y) = e^{-\int g(y)dy} =$$

$$= e^{-\int \frac{2}{y}dy} = e^{-2\ln|y|} = \frac{1}{y^2}.$$

Η δ.ε. $\frac{1}{y}(4x+y)\,dx - \frac{2}{y^2}(x^2-y)\,dy = 0$ είναι ακριβής, αφού

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{y}(4x+y)\right] = -\frac{4x}{y^2}, \quad \frac{\partial}{\partial x}\left[-\frac{2}{y^2}(x^2-y)\right] = -\frac{4x}{y^2}.$$

Άρα $\exists\ F$ με $dF = \frac{1}{y}(4x+y)\,dx - \frac{2}{y^2}(x^2-y)\,dy \Rightarrow$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{y}(4x+y), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{2}{y^2}(x^2-y) \Rightarrow$$

$$F = \int \frac{1}{y}(4x+y)\,dx + h(y) = \frac{2x^2}{y} + x + h(y) \Rightarrow$$

$$-\frac{2}{y^2}(x^2-y) = -\frac{2x^2}{y^2} + \frac{dh(y)}{dy} \Rightarrow \frac{dh(y)}{dy} = \frac{2}{y} \Rightarrow h(y) = 2\int\frac{dy}{y} = 2\ln|y| = \ln y^2$$

$$\Rightarrow F = \frac{2x^2}{y} + x + \ln y^2 \Rightarrow \frac{2x^2}{y} + x + \ln y^2 = c$$

$$\Rightarrow 2x^2 + xy + y\ln y^2 = cy$$ λύση της δ.ε.

Δ.Ε. 1ης τάξης ειδικής μορφής

$$y' = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right) \quad , \; c_1 \acute{\eta} \; c_2 \neq 0$$

Αν $c_1 = c_2 = 0$ τότε η δ.ε. $y' = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y}{a_2 x + b_2 y}\right)$ είναι ομογενής βαθμού 0.

1η περίπτωση Το σύστημα $\left.\begin{matrix} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \end{matrix}\right\}$ έχει λύση $(x,y) = (\xi, \eta)$ (τεμνόμενες ευθείες)

Ορίζουμε $u = x - \xi$, $v = y - \eta$, οπότε

$$\frac{dv}{du} = \frac{dy}{dx} = y' = f\left(\frac{a_1 u + a_1 \xi + b_1 v + b_1 \eta + c_1}{a_2 u + a_2 \xi + b_2 v + b_2 \eta + c_2}\right) . \text{ Αλλά}$$

$\left.\begin{matrix} a_1 \xi + b_1 \eta + c_1 = 0 \\ a_2 \xi + b_2 \eta + c_2 = 0 \end{matrix}\right\}$, άρα $\frac{dv}{du} = f\left(\frac{a_1 u + b_1 v}{a_2 u + b_2 v}\right)$ που είναι ομογενής.

2η περίπτωση Το σύστημα $\left.\begin{matrix} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \end{matrix}\right\}$ δεν έχει λύση (παράλληλες ευθείες),

άρα $a_2 x + b_2 y = \lambda(a_1 x + b_1 y)$, άρα

$y' = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{\lambda(a_1 x + b_1 y) + c_2}\right)$. Ορίζουμε $u = a_1 x + b_1 y$, οπότε

$u' = \frac{du}{dx} = a_1 + b_1 y' = a_1 + b_1 f\left(\frac{u + c_1}{\lambda u + c_2}\right)$ που είναι διαχωρίσιμη.

Παράδειγμα

(1) $(3x - 3y - 2)\,dx - (x - y + 1)\,dy = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3x - 3y - 2}{x - y + 1}$

Το σύστημα $\left.\begin{matrix} 3x - 3y - 2 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{matrix}\right\}$ δεν έχει λύση.

Αν $u = x - y$ τότε $u' = 1 - y' = 1 - \frac{3u - 2}{u + 1} = \frac{-2u + 3}{u + 1} \Leftrightarrow \frac{u + 1}{-2u + 3}\,du = dx \Leftrightarrow$

$\left(-\frac{1}{2} + \frac{5}{2}\,\frac{1}{-2u + 3}\right) du = dx \Leftrightarrow -\frac{1}{2}u - \frac{5}{4}\ln|-2u + 3| = x + c \Leftrightarrow$

$-\frac{1}{2}(x - y) - \frac{5}{4}\ln|-2(x - y) + 3| = x + c \Leftrightarrow 2(y - 3x + c) = 5\ln|2x - 2y - 3|$

(2) $(x - 3y + 3)\,dx + (3x + y + 9)\,dy = 0 \Leftrightarrow y' = -\frac{x - 3y + 3}{3x + y + 9}$

Το σύστημα $\left.\begin{matrix} x - 3y + 3 = 0 \\ 3x + y + 9 = 0 \end{matrix}\right\}$ έχει λύση $(x,y) = (-3, 0)$.

Αν $u = x + 3$, $v = y$ τότε

$\frac{dv}{du} = \frac{dy}{dx} = -\frac{u - 3 - 3v + 3}{3(u - 3) + v + 9} = -\frac{u - 3v}{3u + v}$ που είναι ομογενής βαθμού 0. $\overset{z = \frac{v}{u}}{\Longleftrightarrow}$

$$u\frac{dz}{du}+z=-\frac{1-3z}{3+z} \Leftrightarrow u\frac{dz}{du}=-z-\frac{1-3z}{3+z}=-\frac{z^2+1}{z+3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z+3}{z^2+1}dz=-\frac{du}{u} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln(z^2+1)+3\arctan z=\ln\frac{\tilde{c}}{|u|} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}\ln\frac{v^2+u^2}{u^2}+3\arctan\frac{v}{u}=\ln\tilde{c}-\ln|u| \Leftrightarrow$$

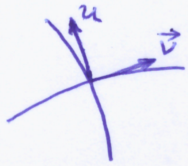
$$\frac{1}{2}\ln(v^2+u^2)-\cancel{\ln|u|}+3\arctan\frac{v}{u}=\ln\tilde{c}-\cancel{\ln|u|} \Leftrightarrow$$

$$\ln\left((x+3)^2+y^2\right)+6\arctan\frac{y}{x+3}=c$$

Ορθογώνιες τροχιές

Λέμε ότι η οικογένεια των καμπυλών $G(x,y,\kappa)=0$ είναι κάθετη στη δοσμένη οικογένεια των καμπυλών $F(x,y,c)=0$ (ορθογώνιες τροχιές), όταν οι εφαπτόμενες των δύο τροχιών σε κάθε σημείο είναι κάθετες.

Αν $y'=f(x,y)$ είναι η δ.ε. σε καρτεσιανές συντεταγμένες μιας οικογένειας καμπυλών, τότε η δ.ε. της οικογένειας των ορθογώνιων τροχιών είναι $y' = -\dfrac{1}{f(x,y)}$



Πράγματι, αν $\vec v=(dx,dy)$ είναι το εφαπτόμενο στην οικογένεια $F(x,y,c)$ με $y'=f(x,y)$, τότε το εφαπτόμενο $\vec u=(\widetilde{dx},\widetilde{dy})$ της ορθογώνιας οικογένειας θα έχει

$$\vec v\cdot\vec u=0 \Leftrightarrow dx\,\widetilde{dx}+dy\,\widetilde{dy}=0 \Leftrightarrow \frac{\widetilde{dy}}{\widetilde{dx}} = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}} = -\frac{1}{f(x,y)}.$$

Παράδειγμα

(1) $y=cx^2$ οικογένεια καμπυλών (παραβολών)

Η δ.ε. είναι $y'=2cx = 2\dfrac{y}{x^2}x = 2\dfrac{y}{x}$

Η ορθογώνια οικογένεια έχει δ.ε. $y' = -\dfrac{1}{\frac{2y}{x}} = -\dfrac{x}{2y} \Leftrightarrow 2y\,dy=-x\,dx$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2}{2}+y^2=\kappa,\ \kappa>0$, που είναι ελλείψεις.

(2) $x^2+(y-c)^2=c^2$, οικογένεια καμπυλών (κύκλων με κέντρα στον άξονα y).

Η δ.ε. είναι $2x+2(y-c)y'=0 \Leftrightarrow x+yy'=cy' \Leftrightarrow c=\dfrac{x}{y'}+y$.

Άρα $x^2+(y-c)^2=c^2 \Leftrightarrow x^2+y^2-2cy=0 \Leftrightarrow x^2+y^2-2y\left(\dfrac{x}{y'}+y\right)=0 \Leftrightarrow$

$x^2-y^2=2\dfrac{xy}{y'} \Leftrightarrow y'=\dfrac{2xy}{x^2-y^2}$.

Η ορθογώνια οικογένεια έχει δ.ε. $y'=-\dfrac{1}{\frac{2xy}{x^2-y^2}} = -\dfrac{x^2-y^2}{2xy}$ που είναι ομογενής δ.ε. βαθμού 1. Άρα για $u=\dfrac{y}{x}$, είναι

$xu'+u = -\dfrac{1-u^2}{2u} \Leftrightarrow xu' = -\dfrac{u^2+1}{2u} \Leftrightarrow \dfrac{2u\,du}{u^2+1} = -\dfrac{dx}{x} \Leftrightarrow$

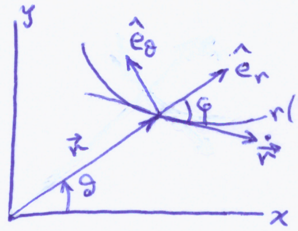
$\ln(u^2+1) = -\ln|x| + \ln\tilde c = \ln\dfrac{\tilde c}{|x|} \Leftrightarrow u^2+1=\dfrac{\bar c}{x} \Leftrightarrow x^2+y^2=\bar c x = 2\kappa x \Leftrightarrow$

$(x-\kappa)^2+y^2=\kappa^2$, που είναι εξίσωση κύκλων με κέντρα στον άξονα x.

Αν $\frac{d\vartheta}{dr} = f(r,\vartheta)$ είναι η δ.ε. σε πολικές συντεταγμένες μιας οικογένειας καμπυλών, τότε η δ.ε. της οικογένειας των ορθογώνιων τροχιών είναι $\frac{d\vartheta}{dr} = -\frac{1}{r^2 f(r,\vartheta)}$.

Πράγματι, η γωνία φ που σχηματίζει η επιβατική ακτίνα με την εφαπτόμενη δίνεται από τη σχέση $\tan\varphi = r\frac{d\vartheta}{dr}$, διότι αν $\vec{r} = \vec{r}(t)$ η παραμετρική εξίσωση της καμπύλης είναι $\vec{r} = r\hat{e}_r$ και

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\hat{e}}_r = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\vartheta}\frac{d\hat{e}_r}{d\vartheta} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\vartheta}\hat{e}_\vartheta ,$$



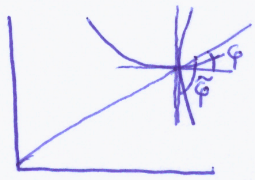
άρα $\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}} = r|\dot{\vec{r}}|\cos\varphi = r\dot{r} \Leftrightarrow$

$$r\sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2}\cos\varphi = r\dot{r} \Leftrightarrow$$

$$r\dot{r}\sqrt{1+r^2\left(\frac{d\vartheta}{dr}\right)^2}\cos\varphi = r\dot{r} \Leftrightarrow 1+r^2\left(\frac{d\vartheta}{dr}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2\varphi} = 1+\tan^2\varphi \Leftrightarrow$$

$$\tan\varphi = r\frac{d\vartheta}{dr}$$

Η ορθογώνια οικογένεια θα έχει $\tilde{\varphi} - \varphi = \frac{\pi}{2}$



$$\Rightarrow \tilde{\varphi} = \varphi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan\tilde{\varphi} = \tan\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = -\cot\varphi =$$

$$= -\frac{1}{\tan\varphi} = -\frac{1}{r\frac{d\vartheta}{dr}}$$

Άρα η δ.ε. των ορθογώνιων τροχιών $\tilde{\vartheta}(r)$ είναι $r\frac{d\tilde{\vartheta}}{dr} = \tan\tilde{\varphi} = -\frac{1}{r\frac{d\vartheta}{dr}} \Rightarrow$

$$\frac{d\tilde{\vartheta}}{dr} = -\frac{1}{r^2\frac{d\vartheta}{dr}}.$$

Παράδειγμα

(1) $r = \alpha(1+\cos\vartheta)$ οικογένεια καμπυλών (καρδιοειδείς)

Η δ.ε. είναι $1 = \alpha(-\sin\vartheta)\frac{d\vartheta}{dr} \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{\sin\vartheta\cdot\vartheta'(r)}$

$$\Rightarrow r = -\frac{1+\cos\vartheta}{\sin\vartheta\cdot\vartheta'(r)} \Rightarrow \vartheta'(r) = -\frac{1+\cos\vartheta}{r\sin\vartheta}$$

Η ορθογώνια οικογένεια έχει δ.ε. $\vartheta'(r) = -\frac{1}{r^2\left(-\frac{1+\cos\vartheta}{r\sin\vartheta}\right)} = \frac{\sin\vartheta}{r(1+\cos\vartheta)}$

$$\Leftrightarrow \frac{dr}{r} = \frac{(1+\cos\vartheta)d\vartheta}{\sin\vartheta} = \frac{d\vartheta}{\sin\vartheta} + \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}d\vartheta \Leftrightarrow$$

$$\ln\frac{r}{c} = \ln\left|\tan\frac{\vartheta}{2}\right| + \ln|\sin\vartheta| = \ln\left|\tan\frac{\vartheta}{2}\cdot\sin\vartheta\right| = \ln\left|\tan\frac{\vartheta}{2}\cdot 2\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\right| =$$

$$= \ln\left|2\sin^2\frac{\vartheta}{2}\right| = \ln\left(2\sin^2\frac{\vartheta}{2}\right) = \ln(1-\cos\vartheta)$$

$\Leftrightarrow \frac{r}{c} = 1-\cos\vartheta \Leftrightarrow r = c(1-\cos\vartheta)$ πάλι καρδιοειδείς

(2) $r = \alpha \sin\vartheta$ οικογένεια καμπυλών

Η δ.ε. είναι $1 = \alpha \cos\vartheta \dfrac{d\vartheta}{dr} \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{1}{\cos\vartheta \cdot \vartheta'(r)}$, άρα

$$r = \frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta \cdot \vartheta'(r)} = \frac{\tan\vartheta}{\vartheta'(r)} \Leftrightarrow \vartheta'(r) = \frac{\tan\vartheta}{r}$$

Η ορθογώνια οικογένεια έχει δ.ε. $\vartheta'(r) = -\dfrac{1}{r^2 \frac{\tan\vartheta}{r}} = -\dfrac{1}{r\tan\vartheta}$

$$\Leftrightarrow -\tan\vartheta \, d\vartheta = \frac{dr}{r} \Leftrightarrow \int \frac{d\cos\vartheta}{\cos\vartheta} = \ln(\tilde{c}r) \Leftrightarrow \ln|\cos\vartheta| = \ln(\tilde{c}r)$$

$$\Leftrightarrow \cos\vartheta = \pm\tilde{c}r \Leftrightarrow r = c\cos\vartheta.$$