ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

Φυσική ΙΙ

Σημειώσεις – Maxwell II

Κοφινάς Γιώργος

Τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών και Επικοινωνιακών Συστημάτων

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

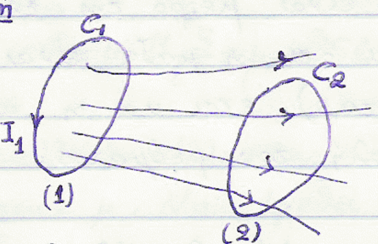
Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

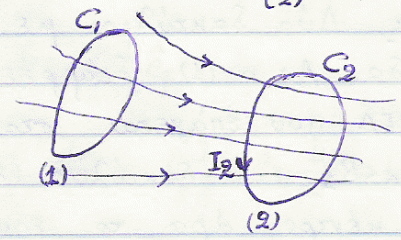
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Αμοιβαία επαγωγή - Αυτεπαγωγή



$\Phi_{12} = M_{12} I_1$

Αν στάσιμο ρεύμα I_1 ρέει στο βρόγχο (1) τότε ροή Φ_{12} περνάει μέσα από το βρόγχο (2), ενώ αν ρεύμα I_2 ρέει στο βρόγχο (2) τότε ροή Φ_{21} περνάει μέσα από το βρόγχο (1).



$\Phi_{21} = M_{21} I_2$

Ισχύει $\Phi_{12} = M_{12} I_1$, $\Phi_{21} = M_{21} I_2$,

$$M_{12} = M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{r_{12}} = M$$

διότι για στάσιμα ρεύματα

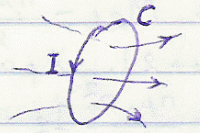
$$\Phi_{12} = \int_{S_2} \vec{B}_{12} \cdot d\vec{a}_2 = \oint_{C_2} \vec{A}_{12} \cdot d\vec{l}_2 ,$$

όπου $\vec{A}_{12} = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{d\vec{l}_1}{r'}$, άρα $\Phi_{12} = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{r_{12}}$ (Neumann formula)

$\Rightarrow \Phi_{12} = M_{12} I_1$, $M_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{r_{12}}$. Προφανώς $M_{12} = M_{21} = M$ (θεώρημα αντιστροφής).

Αν $I_1 = I_2 \Rightarrow \Phi_{12} = \Phi_{21}$

Ο συντελεστής M λέγεται συντελεστής αμοιβαίας επαγωγής και εξαρτάται από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά και τις σχετικές θέσεις των δύο βρόγχων.



Ειδικά αν στάσιμο ρεύμα I ρέει στο βρόγχο C τότε η ροή που περνάει μέσα του είναι $\Phi = LI$, $L = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \oint_C \frac{d\vec{l} \cdot d\vec{l}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$

(το L λέγεται συντελεστής αυτεπαγωγής και εξαρτάται από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του αγωγού)

Είναι $[M] = [L] = \frac{Wb}{A} = \frac{V \cdot s}{A} = H$

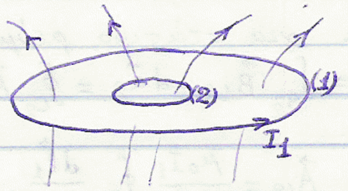
Αν το ρεύμα I_1 στο βρόγχο (1) μεταβάλλεται αργά (quasistatic), εμφανίζεται στο βρόγχο (2) ηλεκτρεγερτική δύναμη $V_{\mathcal{E}_{12}} = -M \frac{dI_1}{dt}$, ενώ το μεταβαλλόμενο ρεύμα I_2 στο βρόγχο (2) επάγει στο βρόγχο (1) ΗΕΔ $V_{\mathcal{E}_{21}} = -M \frac{dI_2}{dt}$.

Πράγματι $V_{\mathcal{E}_{12}} = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -\frac{d}{dt}(M I_1) = -M \frac{dI_1}{dt}$, η δε αργή μεταβολή των ρευμάτων προσεγγίζει τα στάσιμα ρεύματα.

Ειδικά αν ένα αργά μεταβαλλόμενο ρεύμα I ρέει στο βρόγχο C τότε επάγεται στο βρόγχο ΗΕΔ $V_{\mathcal{E}} = -L \frac{dI}{dt}$ αυτεπαγωγής.

Επειδή $L = -\frac{V_{\mathcal{E}}}{dI/dt}$, σε αναλογία προς την εξίσωση $R = \frac{\Phi}{I}$ που δείχνει ότι η αντίσταση είναι μέτρο της εναντίωσης προς το ρεύμα (ή την εξίσωση $m=\frac{F}{a}$ που δείχνει ότι η μάζα είναι μέτρο της εναντίωσης προς την αλλαγή της ταχύτητας); έτσι και η αυτεπαγωγή L είναι μέτρο της εναντίωσης προς τη μεταβολή του ρεύματος.

Παράδειγμα Δύο δακτύλιοι με ακτίνες $R_2 \ll R_1$ βρίσκονται ομόκεντροι στο ίδιο επίπεδο. Αν ο (1) διαρρέεται από μεταβαλλόμενο ρεύμα I_1, να βρεθεί η ΗΕΔ που επάγεται στον (2).



Επειδή $R_2 \ll R_1$, ο δακτύλιος (2) είναι σχεδόν σημείο στο κέντρο, άρα το επαγόμενο μαγνητικό πεδίο εκεί είναι $B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2R_1}$, άρα η ροή μέσα από τον (2) είναι

$$\Phi_{12} = B_1 A_2 = \frac{\mu_0 I_1}{2R_1}\pi R_2^2 = \frac{\pi\mu_0 R_2^2}{2R_1} I_1 = M_{12} I_1 \Rightarrow M_{12} = \frac{\pi\mu_0 R_2^2}{2R_1}.$$

$$\text{Άρα } V_{\mathcal{E}12} = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -M_{12}\frac{dI_1}{dt} = -\frac{\pi\mu_0 R_2^2}{2R_1}\frac{dI_1}{dt}.$$

Παρατηρούμε ότι τα δύο κυκλώματα δεν εμφανίζονται συμμετρικά στην έκφραση M_{12}. Ωστόσο, λόγω του θεωρήματος αντιστροφής είναι $M_{21} = M_{12}$ $\Rightarrow M_{21} = \frac{\pi\mu_0 R_2^2}{2R_1}$ (και όχι $M_{21} = \frac{\pi\mu_0 R_1^2}{2R_2}$ που θα προέκυπτε με εναλλαγή $1 \leftrightarrow 2$). Άρα αν ρεύμα I_2 διαρρέει το βρόγχο (2) τότε $\Phi_{21} = M_{21} I_2 = \frac{\pi\mu_0 R_2^2}{2R_1} I_2$ και $V_{\mathcal{E}21} = -\frac{\pi\mu_0 R_2^2}{2R_1}\frac{dI_2}{dt}$.

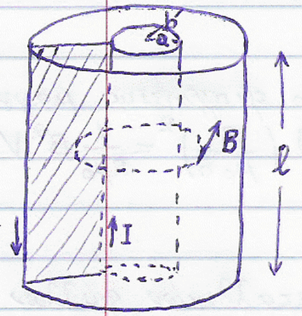
Παράδειγμα Ένα μικρό σωληνοειδές μήκους ℓ, ακτίνας a με n_1 σπείρες ανά μονάδα μήκους βρίσκεται πάνω στον άξονα ενός πολύ μακρυού σωληνοειδούς ακτίνας $b>a$ με n_2 σπείρες ανά μονάδα μήκους. Αν ρεύμα I ρέει στο μικρό σωληνοειδές, ποια η ροή που διέρχεται από το μακρύ σωληνοειδές;

Το να υπολογίσουμε το Φ_{12} μέσω του παραγόμενου μαγνητικού πεδίου B_{12} που παράγει το (1) είναι δύσκολο γιατί το πεδίο αυτό είναι περίπλοκο στα άκρα του μικρού σωληνοειδούς. Ωστόσο ξέρουμε ότι $\Phi_{12} = \Phi_{21} = N_1 B_{21}\pi a^2$, όπου $B_{21} = \mu_0 I n_2$, άρα
$\Phi_{12} = n_1 \ell \mu_0 I n_2 \pi a^2 = \mu_0 \pi a^2 n_1 n_2 \ell I = MI$, $M = \mu_0 \pi a^2 n_1 n_2 \ell$.

Παράδειγμα Σωληνοειδές έχει n σπείρες ανά μονάδα μήκους και όγκο V. Να βρεθεί η αυτεπαγωγή L.
Η ροή μέσα από το σωληνοειδές λόγω κάποιου ρεύματος I που το διαρρέει

είναι $\Phi = NBS$, όπου $B = \mu_0 n I = \mu_0 \frac{N}{\ell} I$, άρα
$\Phi = \mu_0 \frac{N^2 S}{\ell} I$ και επειδή $\Phi = LI$, άρα $L = \mu_0 \frac{N^2 S}{\ell} = \mu_0 n^2 S \ell = \mu_0 n^2 V$.

Παράδειγμα. Σύστημα δύο ομοαξονικών μεταλλικών φύλλων με αντίθετα ρεύματα και υλικό ανάμεσα τους διαπερατότητας μ. Να βρεθεί το L ανά μονάδα μήκους.



Για $a<r<b$ είναι $\vec{B} = \frac{\mu I}{2\pi r} \hat{e}_\varphi$, άρα

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{a} = \frac{\mu I \ell}{2\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu I \ell}{2\pi} \ln \frac{b}{a} = LI$$

$$\Rightarrow L = \frac{\mu \ell}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{L}{\ell} = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a}.$$

Κατά τη διάρκεια δημιουργίας ενός στάσιμου ρεύματος από το μηδέν, δημιουργείται χρονοεξαρτώμενο μαγνητικό πεδίο το οποίο επάγει ηλεκτρικό πεδίο εξ' αυτεπαγωγής με ΗΕΔ V_ε και το οποίο ηλεκτρικό πεδίο παράγει έργο που αποθηκεύεται ως ενέργεια του μαγνητικού πεδίου U_B. Η ισχύς που απαιτείται να δοθεί για να υπερνικήσει την V_ε είναι

$$\frac{dW}{dt} = \frac{dU_B}{dt} = -V_\varepsilon I = L I \frac{dI}{dt} = \frac{1}{2} L \frac{d(I^2)}{dt} \Rightarrow U_B = \frac{1}{2} L I^2$$

Η έκφραση αυτή είναι αντίστοιχη της ενέργειας του ηλεκτρικού πεδίου αγωγού ή πυκνωτή $U = \frac{1}{2C} Q^2$.

Στη γενική περίπτωση χωρικών, επιφανειακών ή γραμμικών ρευμάτων είναι

$$U_B = \frac{1}{2} \oint_C I \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \frac{1}{2} \int_S \vec{K} \cdot \vec{A}\, da = \frac{1}{2} \int_V \vec{j} \cdot \vec{A}\, dV$$

αφού για ένα ρεύμα στο βρόγχο C, $\Phi_B = LI$, όπου $\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{a} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{\ell}$,
άρα $LI = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{\ell} \Rightarrow \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} I \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{\ell} \Rightarrow U_B = \frac{1}{2} \oint_C I \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \frac{1}{2} \int_S \vec{K} \cdot \vec{A}\, da = \frac{1}{2} \int_V \vec{j} \cdot \vec{A}\, dV$

Υπό τη γραφή αυτή μπορεί να δοθεί η ερμηνεία ότι η μαγνητική ενέργεια αποθηκεύεται στην κατανομή ρεύματος. Οι εκφράσεις αυτές είναι ανάλογες προς την ενέργεια ηλεκτρικού πεδίου $U_E = \frac{1}{2} \int_V \rho \Phi\, dV$.

Ακόμα ισχύει $U_B = \frac{1}{2\mu_0} \int_{V_\infty} |\vec{B}|^2 dV = \int_{V_\infty} u_B\, dV$, $u_B = \frac{1}{2\mu_0} |\vec{B}|^2$ (πυκνότητα ενέργειας)

διότι αν η μετάβαση προς το στάσιμο ρεύμα είναι πολύ αργή τότε κάθε στιγμή έχουμε με καλή ακρίβεια $\nabla \cdot \vec{j} = 0$, άρα από το ν. Ampère $\vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B}$ και $U_B = \frac{1}{2\mu_0} \int_{V_\infty} \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B}) dV$

Αλλά $\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B}) = \vec{B}^2 - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B}) \Rightarrow \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B}) = \vec{B}^2 - \nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$, άρα

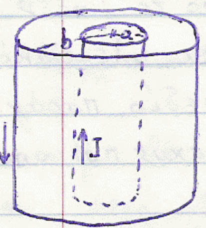
$$U_B = \frac{1}{2\mu_0} \int_{V_\infty} \vec{B}^2 dV - \frac{1}{2\mu_0} \oint_{S_\infty} (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot d\vec{a} = \frac{1}{2\mu_0} \int_{V_\infty} \vec{B}^2 dV - 0$$

Υπό τη γραφή αυτή μπορεί να δοθεί η ερμηνεία ότι η μαγνητική ενέργεια αποθηκεύεται σ' όλο το χώρο. Η έκφραση αυτή είναι ανάλογη της έκφρασης του ηλεκτρικού πεδίου $U_E = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{V_\infty} E^2 dV$.

Για γραμμικό μαγνητικό υλικό η μαγνητική ενέργεια είναι $U_B = \frac{1}{2}\int_{V_\infty} \vec{B}\cdot\vec{H}\,dV$ και η πυκνότητα ενέργειας $u_B = \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H} = \frac{1}{2\mu}B^2$

Παράδειγμα Για σωληνοειδές είναι $L = \mu_0 n^2 S \ell$ και το ομογενές μαγνητικό πεδίο είναι $B = \mu_0 n I$, άρα $U_B = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}(\mu_0 n^2 S \ell)\left(\frac{B}{\mu_0 n}\right)^2 = \frac{1}{2\mu_0}B^2 V$
$\Rightarrow u_B = \frac{U_B}{V} = \frac{1}{2\mu_0}B^2$.

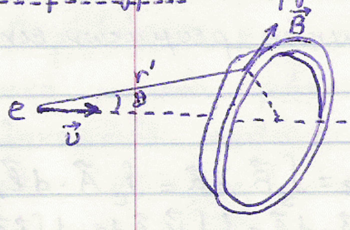
Παράδειγμα Για το σύστημα των δύο ομοαξονικών μεταλλικών φύλλων με αντίθετα ρεύματα το μαγνητικό πεδίο ανάμεσα στους κυλίνδρους είναι



$$\vec{B} = \frac{\mu I}{2\pi r}\hat{e}_\varphi, \quad \text{Άρα}$$
$$U_B = \frac{1}{2\mu}\int B^2 dV = \frac{1}{2\mu}\frac{\mu^2 I^2}{4\pi^2}\int_a^b \frac{1}{r^2}(2\pi r \ell dr) = \frac{\mu I^2 \ell}{4\pi}\int_a^b \frac{dr}{r} =$$
$$= \frac{\mu I^2 \ell}{4\pi}\ln\frac{b}{a}$$

Επίσης μπορεί να βρεθεί το L αφού $U_B = \frac{1}{2}LI^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow L = \frac{\mu \ell}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$

Παράδειγμα Ενέργεια μαγνητικού πεδίου κινούμενου ηλεκτρονίου με $\upsilon << c$.



Είναι $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}q\frac{\vec{\upsilon}\times\vec{r}'}{r'^3} \Rightarrow B = \frac{\mu_0}{4\pi}q\frac{\upsilon\sin\theta}{r'^2}$

Ο στοιχειώδης όγκος του σχήματος είναι
$dV = (2\pi r'\sin\theta)(r'd\theta)(dr') = 2\pi r'^2 \sin\theta\, dr' d\theta$, άρα

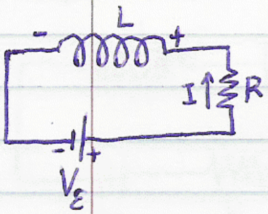
$$U_B = \frac{1}{2\mu_0}\int_{V_\infty} B^2 dV = \frac{1}{2\mu_0}\frac{\mu_0^2}{16\pi^2}q^2\upsilon^2 2\pi\int\frac{r'^2}{r'^4}\sin^3\theta\, dr' d\theta =$$
$$= \frac{\mu_0 e^2 \upsilon^2}{16\pi}\int_R^\infty \frac{dr'}{r'^2}\int_0^\pi \sin^3\theta\, d\theta$$
, όπου R η ακτίνα του ηλεκτρονίου

$$\Rightarrow U_B = \frac{\mu_0 e^2\upsilon^2}{16\pi}\frac{1}{R}\frac{4}{3} = \frac{\mu_0}{12\pi}\frac{e^2\upsilon^2}{R}$$

Αν $m_e = \frac{\mu_0}{6\pi}\frac{e^2}{R} = \frac{1}{6\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{Rc^2} \Leftrightarrow R = \frac{1}{6\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{m_e c^2} = \frac{2}{3}r_e$, $r_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{m_e c^2}$

(μέσω της θεώρησης του ηλεκτρικού πεδίου είχαμε για ακτίνα του ηλεκτρονίου βρει $a_e = \frac{3}{5} r_e$, δηλαδή παραπλήσια) τότε $U_B = \frac{1}{2} m_e v^2$. Δηλαδή υπάρχει σύνδεση της κινητικής ενέργειας με την ενέργεια του μαγνητικού πεδίου, ενώ η ενέργεια ηρεμίας σχετίζεται με την ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου ($U_E = m_e c^2$).

Κύκλωμα RL



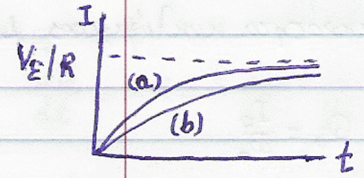
$$V_\varepsilon - V_L - IR = 0 \Leftrightarrow V_\varepsilon - L\frac{dI}{dt} - IR = 0 \Leftrightarrow L\frac{dI}{dt} = V_\varepsilon - IR$$

$$\Leftrightarrow \frac{dI}{V_\varepsilon - IR} = \frac{dt}{L} \Leftrightarrow \frac{dI}{I - \frac{V_\varepsilon}{R}} = -\frac{R}{L}dt \Leftrightarrow$$

$$\int_0^I \frac{dI}{I - \frac{V_\varepsilon}{R}} = -\frac{R}{L}\int_0^t dt \Leftrightarrow \ln\left|I - \frac{V_\varepsilon}{R}\right|\Big|_0^I = -\frac{R}{L}t \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{V_\varepsilon}{R} - I\right) - \ln\frac{V_\varepsilon}{R} = -\frac{R}{L}t \Leftrightarrow \ln\left(1 - \frac{RI}{V_\varepsilon}\right) = -\frac{R}{L}t \Leftrightarrow 1 - \frac{RI}{V_\varepsilon} = e^{-\frac{R}{L}t}$$

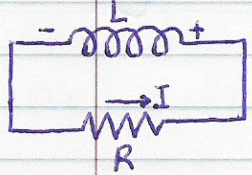
$$\Leftrightarrow I(t) = \frac{V_\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \Leftrightarrow I(t) = I_0\left(1 - e^{-t/\tau}\right), \quad \tau = \frac{L}{R}, \quad I_0 = \frac{V_\varepsilon}{R}$$



$$\left(\frac{R}{L}\right)_a > \left(\frac{R}{L}\right)_b, \quad \tau_a < \tau_b$$

Για $I \to 0$, $V_\varepsilon \to F$, $L \to m$, $R \to \lambda$ προκύπτει το μηχανικό ανάλογο της πτώσης σώματος σε ιξώδες ρευστό $m\frac{dv}{dt} = F - \lambda v$

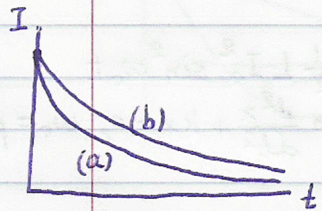
Είναι $V_\varepsilon I = RI^2 + LI\frac{dI}{dt}$, άρα η ενέργεια που παρέχει με ρυθμό $V_\varepsilon I$ [η] πηγή στο κύκλωμα ισούται με το άθροισμα της ενέργειας Joule που κ-
ταναλώνεται στην αντίσταση με ρυθμό RI^2 συν την ενέργεια που απο-
κεύεται στο πηνίο με ρυθμό $LI\frac{dI}{dt}$. Αν U_B είναι η ενέργεια πο-
είναι αποθηκευμένη κάποια στιγμή στο μαγνητικό πεδίο του πηνίου
τότε $\frac{dU_B}{dt} = LI\frac{dI}{dt} \Leftrightarrow U_B = \frac{1}{2}LI^2$.



$$V_L + IR = 0 \Leftrightarrow L\frac{dI}{dt} + IR = 0 \Leftrightarrow \frac{dI}{I} = -\frac{R}{L}dt \Leftrightarrow$$

$$\int_{V_\varepsilon/R}^{I} \frac{dI}{I} = -\frac{R}{L}\int_0^t dt \Leftrightarrow \ln\frac{RI}{V_\varepsilon} = -\frac{R}{L}t \Leftrightarrow$$

$$I = \frac{V_\varepsilon}{R}e^{-\frac{R}{L}t} = I_0 e^{-t/\tau}$$, τ: χρόνος χαλάρωσης

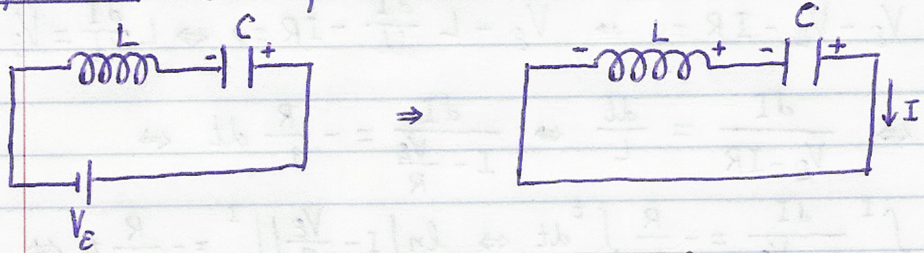


$$\left(\frac{R}{L}\right)_a > \left(\frac{R}{L}\right)_b, \quad \tau_a < \tau_b$$

$$\frac{dE_{\theta\varepsilon\rho\mu}}{dt} = RI^2 = RI_0^2 e^{-2\frac{R}{L}t} \Rightarrow E_{\theta\varepsilon\rho\mu} = \int_0^\infty \frac{dE_{\theta\varepsilon\rho\mu}}{dt}dt = RI_0^2\int_0^\infty e^{-2\frac{R}{L}t}dt =$$

$$= -RI_0^2\frac{L}{2R}e^{-2\frac{R}{L}t}\Big|_0^\infty = \frac{1}{2}LI_0^2 = U_{B,0} = E_{total}$$

Κύκλωμα LC (ηλεκτρικές ταλαντώσεις



$V_C + V_L = 0 \Leftrightarrow \frac{Q}{C} + L\frac{dI}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{1}{C}\frac{dQ}{dt} + L\frac{d^2I}{dt^2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{C}I + L\frac{d^2I}{dt^2} = 0 \Rightarrow$

$\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{1}{LC}I = 0$ απλή αρμονική ταλάντωση

$\Rightarrow I = I_0 \sin(\omega_0 t + \delta)$, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ χαρακτηριστική συχνότητα κυκλώματος LC

$I = \frac{dQ}{dt} \Leftrightarrow Q = \int I dt = -\frac{I_0}{\omega}\cos(\omega_0 t + \delta) = -Q_0\cos(\omega_0 t + \delta)$, $Q_0 = \frac{I_0}{\omega_0}$

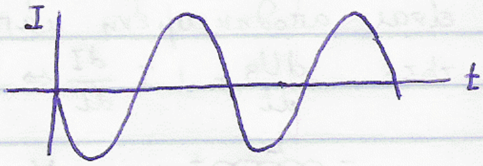
Τα ίδια παίρνουμε από $\frac{Q}{C} + L\frac{dI}{dt} = 0 \Leftrightarrow \frac{Q}{C} + L\frac{d^2Q}{dt^2} = 0$ και προχωράμε.

Αρχικές συνθήκες: $t=0$, $I=0$, $Q=Q_0$, άρα

$I = 0 = I_0 \sin\delta \Rightarrow \delta = 0$ ή $\delta = \pi$

$Q = Q_0 = -Q_0\cos\delta \Rightarrow \delta = \pi$

Τελικά $I(t) = -I_0 \sin\omega_0 t$, $Q(t) = Q_0\cos\omega_0 t$ (εναλλασόμενο ρεύμα)



Μπορούμε να σκεφθούμε και ενεργειακά: Αφού δεν υπάρχει αντίσταση, η ολική ηλεκτρική και μαγνητική ενέργεια διατηρείται

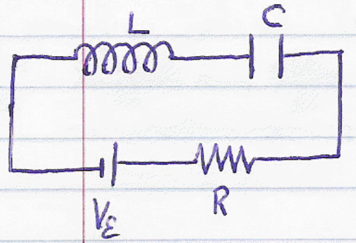
$U = U_E + U_B = \frac{Q^2}{2C} + \frac{1}{2}LI^2 = \sigma\tau\alpha\theta \Rightarrow$

$\frac{dU}{dt} = \frac{Q}{C}\frac{dQ}{dt} + LI\frac{dI}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{Q}{C} + L\frac{dI}{dt} = 0$ που συμπίπτει με την εξίσωση των τάσεων.

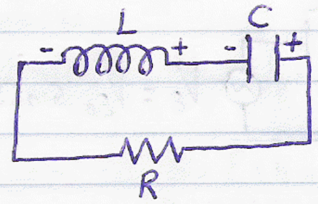
Από την τελική λύση παίρνουμε $U = \frac{Q_0^2}{2C}\cos^2\omega_0 t + \frac{1}{2}LI_0^2\sin^2\omega_0 t$

Υπό την αντιστοιχία $I \to x$, $L \to m$, $\frac{1}{C} \to k$ είναι $m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Κύκλωμα RLC (ηλεκτρικές ταλαντώσεις με απόσβεση)



$\Rightarrow$



$$V_C + V_L + IR = 0 \Leftrightarrow \frac{Q}{C} + L\frac{dI}{dt} + IR = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{C}\frac{dQ}{dt} + L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} = 0 \Leftrightarrow$$

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = 0 \quad \text{ή ακόμα} \quad \frac{Q}{C} + L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} = 0$$

Ενεργειακά, αν $U = U_\varepsilon + U_B = \frac{Q^2}{2C} + \frac{1}{2}LI^2$ τότε

$$\frac{dU}{dt} = -RI^2 \Leftrightarrow \frac{Q}{C}\frac{dQ}{dt} + LI\frac{dI}{dt} = -RI^2 \Leftrightarrow \frac{Q}{C} + L\frac{dI}{dt} = -RI$$ που συμπίπτει

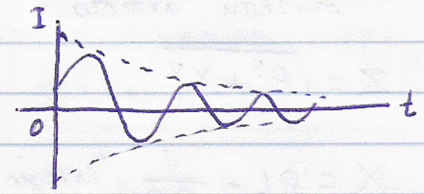
συμπίπτει με την εξίσωση των τάσεων.

Υπό την αντιστοιχία $I \to x$, $L \to m$, $\frac{1}{C} \to k$, $R \to \lambda$ προκύπτει

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda\frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad \text{(ταλάντωση με απόσβεση)}$$

- $R^2 < \frac{4L}{C} \Leftrightarrow \gamma^2 < \frac{1}{LC} \Leftrightarrow \lambda^2 < 4mk$, $\gamma = \frac{R}{2L} = \frac{\lambda}{2m}$

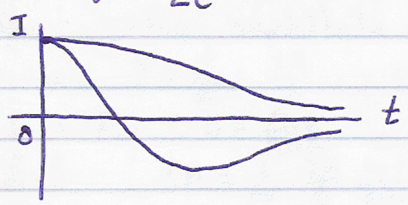
  τότε $I = I_0 e^{-\gamma t}\sin(\omega t + \delta)$, $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\lambda^2}{4m^2}}$



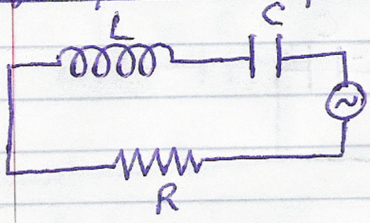
(εναλλασόμενο ρεύμα με απόσβεση)

Για $R \ll L \Leftrightarrow \gamma \ll 1 \Leftrightarrow \lambda \ll m$ τότε $I = I_0 \sin(\omega_0 t + \delta)$

- $R^2 > \frac{4L}{C} \Leftrightarrow \gamma^2 > \frac{1}{LC} \Leftrightarrow \lambda^2 > 4mk$ τότε ω φανταστικός $\Rightarrow$ όχι ταλάντωση



Εξαναγκασμένες ηλεκτρικές ταλαντώσεις



$V_\mathcal{E} = V_{\mathcal{E}0} \sin \Omega t$

$$V_L + V_C + IR = V_\mathcal{E} \rightarrow L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = \Omega V_{\mathcal{E}0} \cos\Omega t$$

Υπό την αντιστοιχία $I \to x$, $L \to m$, $\frac{1}{C} \to k$, $R \to \lambda$ είναι

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda\frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos\Omega t \quad , \quad F_0 = \Omega V_{\mathcal{E}0}$$

Είναι $x(t) = A\sin(\Omega t - \alpha)$, $A = \dfrac{F_0/m}{\sqrt{(\Omega^2-\omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}}$

$$\tan\alpha = \frac{\Omega^2 - \omega_0^2}{2\gamma\Omega}$$

Άρα $I = I_0 \sin(\Omega t - \alpha)$

$$I_0 = \frac{V_{\mathcal{E}0}}{\sqrt{R^2 + \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right)^2}} = \frac{V_{\mathcal{E}0}}{Z} \quad , \quad Z = \sqrt{R^2 + \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right)^2}$$

"σύνθετη αντίσταση"

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} \, ,$$

$$X = \Omega L - \frac{1}{\Omega C}$$ "ενεργός αντίσταση"

$$\tan\alpha = \frac{\Omega L - \frac{1}{\Omega C}}{R} = \frac{X}{R}$$

Διατήρηση ενέργειας συστήματος φορτίων - πεδίων

Για γραμμικά υλικά (ή το κενό) ισχύει

$$\frac{dW}{dt} = \frac{dE_{mech}}{dt} = -\frac{dU_{em}}{dt} - \oint_S \vec{S}\cdot d\vec{a} \quad (\text{θ. Poynting}) \qquad U_{em} = \int_V u_{em}\, dV, \quad u_{em} = u_E + u_B$$

$$\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H} = \frac{1}{\mu}\vec{E}\times\vec{B} \quad (\text{Poynting vector})$$

δηλαδή το έργο που παράγεται από τις ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις πάνω στα φορτία (αυξάνοντας τη μηχανική τους ενέργεια) ισούται με τη μείωση της ενέργειας του πεδίου μείον την ενέργεια που ρέει προς τα έξω μέσω της επιφάνειας.

Πράγματι, το έργο που παράγει το πεδίο σε μια κατανομή φορτίων και ρευμάτων είναι $\frac{dW}{dt} = \frac{dE_{mech}}{dt} = \int_V \vec{J}\cdot\vec{E}\, dV$.

Αλλά $\vec{J} = \nabla\times\vec{H} - \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$, άρα $\frac{dE_{mech}}{dt} = \int_V \left[\vec{E}\cdot(\nabla\times\vec{H}) - \vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right] dV$

Επειδή $\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{H}) = \vec{H}\cdot(\nabla\times\vec{E}) - \vec{E}\cdot(\nabla\times\vec{H}) = -\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} - \vec{E}\cdot(\nabla\times\vec{H})$, άρα

$\frac{dE_{mech}}{dt} = -\int_V \left(\nabla\cdot\vec{S} + \vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} + \vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right) dV$. Αλλά $u_{em} = u_E + u_B = \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D} + \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H} = \frac{\epsilon}{2}\vec{E}^2 + \frac{\vec{B}^2}{2\mu}$

$\Rightarrow \frac{\partial u_{em}}{\partial t} = \epsilon\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{\mu}\vec{B}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$, τελικά $\frac{dE_{mech}}{dt} = -\oint_S \vec{S}\cdot d\vec{a} - \int_V \frac{\partial u_{em}}{\partial t} dV \Rightarrow$

$\frac{dE_{mech}}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_V u_{em}\, dV - \oint_S \vec{S}\cdot d\vec{a}$

Είναι $[S] = \frac{J}{s\, m^2} = \frac{W}{m^2}$, άρα το $\vec{S}$ είναι η πυκνότητα ροής ενέργειας (ενέργεια ανά μονάδα χρόνου και επιφάνειας).

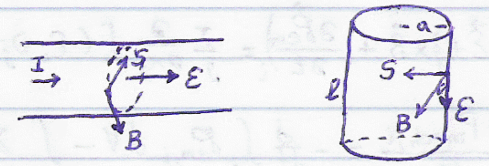
Ισοδύναμα, η διαφορική μορφή του θ. Poynting είναι

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_{mech} + u_{em}) = -\nabla\cdot\vec{S} \Leftrightarrow \frac{\partial u_{em}}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{S} = -\vec{J}\cdot\vec{E}$$

Η πρώτη από αυτές τις εξισώσεις είναι αντίστοιχη της εξίσωσης διατήρησης του φορτίου $\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\nabla\cdot\vec{J}$.

Παράδειγμα Ρευματοφόρος αγωγός ακτίνας a

Το ηλεκτρικό πεδίο παράλληλο προς το σύρμα είναι $E = \frac{\phi}{\ell} = \frac{IR}{\ell}$, ενώ το μαγνητικό πεδίο $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$, άρα



$|\vec{S}| = \frac{1}{\mu_0}|\vec{E}\times\vec{B}| = \frac{1}{\mu_0}EB = \frac{1}{\mu_0}\frac{IR}{\ell}\frac{\mu_0 I}{2\pi a} = \frac{I^2 R}{2\pi a\ell} = \frac{I^2 R}{A}$, όπου A είναι η παράπλευρη επιφάνεια του σύρματος.

Τελικά $\int_S \vec{S}\cdot d\vec{a} = SA = I^2 R$, άρα ο ρυθμός με τον οποίο η ηλεκτρομαγνητική ενέργεια ρέει προς το σύρμα είναι ίσος με το ρυθμό αποβολής της ωs θερμότητα.

Διατήρηση ορμής συστήματος φορτίων - πεδίων

Για γραμμικά υλικά (ή το κενό) ισχύει

$$\vec{F} = \frac{dP_{mech,i}}{dt} = -\frac{dP_{em,i}}{dt} - \oint_S \sum_{j=1}^{3} T_{ij} n_j da \quad , \quad \vec{P}_{em} = \int_V \vec{\mathcal{P}}_{em} dV$$ "ορμή ΗΜ πεδίου στον όγκο V"

$$\vec{\mathcal{P}}_{em} = \vec{D}\times\vec{B} = \epsilon\mu\vec{\mathcal{E}}\times\vec{H} = \epsilon\vec{\mathcal{E}}\times\vec{B} = \epsilon\mu\vec{S}$$ "πυκνότητα ορμής ΗΜ πεδίου"

$$\Leftrightarrow \frac{d\vec{P}_{mech}}{dt} = -\frac{d\vec{P}_{em}}{dt} - \oint_S \overleftrightarrow{T}\cdot\hat{n}\, da \quad , (\overleftrightarrow{T}\cdot\hat{n})_i = \sum_j T_{ij} n_j$$

$$T_{ij} = -(\mathcal{E}_i D_j + B_i H_j) + \frac{1}{2}(\vec{\mathcal{E}}\cdot\vec{D} + \vec{B}\cdot\vec{H})\delta_{ij} = -(\epsilon\mathcal{E}_i\mathcal{E}_j + \mu H_i H_j) + \frac{1}{2}(\epsilon\mathcal{E}^2 + \mu H^2)\delta_{ij}$$ "Maxwell stress tensor"

δηλαδή η συνολική ηλεκτρομαγνητική δύναμη πάνω στα φορτία (που αυξάνει τη μηχανική ορμή τους) ισούται με τη μείωση της ορμής του πεδίου μείον την ορμή που ρέει προς τα έξω μέσω της επιφάνειας.

Πράγματι, η συνολική ΗΜ δύναμη πάνω στα φορτία είναι

$\vec{F} = \frac{d\vec{P}_{mech}}{dt} = \int_V (\vec{\mathcal{E}} + \vec{v}\times\vec{B})\rho dV = \int_V (\rho\vec{\mathcal{E}} + \vec{j}\times\vec{B}) dV$, όπου $\vec{P}_{mech}$ το άθροισμα όλων των ορμών των σωματίων. Αλλά $\rho = \nabla\cdot\vec{D}$, $\vec{j} = \nabla\times\vec{H} - \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$, άρα

$$\rho\vec{\mathcal{E}} + \vec{j}\times\vec{B} = (\nabla\cdot\vec{D})\vec{\mathcal{E}} + (\nabla\times\vec{H})\times\vec{B} - \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\times\vec{B} = (\nabla\cdot\vec{D})\vec{\mathcal{E}} - \vec{B}\times(\nabla\times\vec{H}) - \left[\frac{\partial}{\partial t}(\vec{D}\times\vec{B}) - \vec{D}\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right]$$

$$\Rightarrow \rho\vec{\mathcal{E}} + \vec{j}\times\vec{B} + \frac{\partial}{\partial t}(\vec{D}\times\vec{B}) = (\nabla\cdot\vec{D})\vec{\mathcal{E}} - \vec{D}\times(\nabla\times\vec{\mathcal{E}}) + (\nabla\cdot\vec{B})\vec{H} - \vec{B}\times(\nabla\times\vec{H})$$

$$= \epsilon\left[(\nabla\cdot\vec{\mathcal{E}})\vec{\mathcal{E}} - \vec{\mathcal{E}}\times(\nabla\times\vec{\mathcal{E}})\right] + \mu\left[(\nabla\cdot\vec{H})\vec{H} - \vec{H}\times(\nabla\times\vec{H})\right]$$

Είναι $\left[(\nabla\cdot\vec{\mathcal{E}})\vec{\mathcal{E}} - \vec{\mathcal{E}}\times(\nabla\times\vec{\mathcal{E}})\right]_1 = \left(\frac{\partial\mathcal{E}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\mathcal{E}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial\mathcal{E}_3}{\partial x_3}\right)\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2\left(\frac{\partial\mathcal{E}_2}{\partial x_1} - \frac{\partial\mathcal{E}_1}{\partial x_2}\right) + \mathcal{E}_3\left(\frac{\partial\mathcal{E}_1}{\partial x_3} - \frac{\partial\mathcal{E}_3}{\partial x_1}\right)$

$$= \frac{\partial(\mathcal{E}_1^2)}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}(\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2) + \frac{\partial}{\partial x_3}(\mathcal{E}_1\mathcal{E}_3) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}(\mathcal{E}_1^2 + \mathcal{E}_2^2 + \mathcal{E}_3^2)$$

$$= \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}(\mathcal{E}_1\mathcal{E}_j) - \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}(\mathcal{E}^2)\delta_{1j} = \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mathcal{E}_1\mathcal{E}_j - \frac{1}{2}\mathcal{E}^2\delta_{1j}\right)$$

$$\Rightarrow \epsilon\left[(\nabla\cdot\vec{\mathcal{E}})\vec{\mathcal{E}} - \vec{\mathcal{E}}\times(\nabla\times\vec{\mathcal{E}})\right]_i = \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mathcal{E}_i D_j - \frac{1}{2}\vec{\mathcal{E}}\cdot\vec{D}\,\delta_{ij}\right)$$

Όμοια $\mu\left[(\nabla\cdot\vec{H})\vec{H} - \vec{H}\times(\nabla\times\vec{H})\right]_i = \mu\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(H_i H_j - \frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{H}\delta_{ij}\right) = \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(B_i H_j - \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}\delta_{ij}\right)$

Άρα $\left(\rho\vec{\mathcal{E}} + \vec{j}\times\vec{B} + \frac{\partial\vec{\mathcal{P}}_{em}}{\partial t}\right)_i = \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left[(\mathcal{E}_i D_j + B_i H_j) - \frac{1}{2}(\vec{\mathcal{E}}\cdot\vec{D} + \vec{B}\cdot\vec{H})\delta_{ij}\right] = -\sum_j \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}$

$$\Rightarrow \frac{dP_{mech,i}}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_V \mathcal{P}_{em,i}\, dV - \int_V \sum_j \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} dV = -\frac{dP_{em,i}}{dt} - \oint_S \sum_j T_{ij} n_j da$$

Η ποσότητα $-\sum_j T_{ij} n_j$ είναι η i συνιστώσα της ροής ορμής ανά μονάδα επιφάνειας που εξέρχεται του όγκου V μέσω του συνόρου S, δηλ. $-\sum_j T_{ij} n_j$ = ορμή ανά μονάδα χρόνου και επιφάνειας. Άρα το $-\sum_j T_{ij} n_j$ είναι η ηλεκτρομαγνητική δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας (πίεση) που ασκεί το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο σε υλικά σώματα.

Η ισοδύναμη διαφορική εξίσωση είναι

$$\frac{\partial}{\partial t}(p_{mech,i} + p_{em,i}) = -\sum_j \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\vec{p}_{mech} + \vec{p}_{em}) = -\nabla \cdot \overleftrightarrow{T}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial p_{em,i}}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = -(\rho \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})_i \Leftrightarrow \frac{\partial \vec{p}_{em}}{\partial t} + \nabla \cdot \overleftrightarrow{T} = -(\rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B})$$

όπου $\vec{P}_{mech} = \int_V \vec{p}_{mech}\, dV$, $(\nabla \cdot \overleftrightarrow{T})_i = \sum_j \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}$

($\overleftrightarrow{T}$ "πυκνότητα ροής ορμής") (T_{ij} είναι η i-ορμή που διαπερνά μία μοναδιαία επιφάνεια προσανατολισμένη στη j-κατεύθυνση στη μονάδα του χρόνου)

Οι εξισώσεις του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου για τα δυναμικά $\phi, \vec{A}$ είναι

$$\nabla^2\phi + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\vec{A}) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad , \quad \nabla^2\vec{A} - \epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \nabla\left(\nabla\cdot\vec{A}+\epsilon_0\mu_0\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) = -\mu_0\vec{J}$$

όπου $\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$, $B = \nabla\times\vec{A}$.

Πράγματι, $\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Leftrightarrow \nabla\cdot\left(-\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Leftrightarrow -\nabla^2\phi - \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\vec{A}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

και $\nabla\times\vec{B} - \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0\vec{J} \Leftrightarrow \nabla\times(\nabla\times\vec{A}) + \epsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\phi + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = \mu_0 \vec{J} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \nabla(\nabla\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A} + \epsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\phi) + \epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = \mu_0\vec{J} \Leftrightarrow \nabla^2\vec{A} - \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla\left(\nabla\cdot\vec{A} + \epsilon_0\mu_0\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) = -\mu_0\vec{J}$

Το παραπάνω σύστημα των $\phi, \vec{A}$ αποτελείται από 4 εξισώσεις αντί για τις 6 εξισώσεις για τα $\vec{E}, \vec{B}$.

Ο μετ/μός $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\psi(\vec{r}, t)$, $\phi' = \phi - \frac{\partial\psi}{\partial t}$ (μετ/μός βαθμίδας) δίνει $\vec{E}' = \vec{E}$, $\vec{B}' = \vec{B}$

και επιπλέον οι δύο παραπάνω εξισώσεις των $\vec{A}, \phi$ παραμένουν αναλλοίωτες.

Ενώ το $\nabla\times\vec{A}$ είναι δεδομένο ($\vec{B}$) , το $\nabla\cdot\vec{A}$ είναι ελεύθερο να γίνει ο,τιδήποτε.

• Βαθμίδα Coulomb: $\nabla\cdot\vec{A} = 0 \Rightarrow \nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$, $\nabla^2\vec{A} - \epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{J} + \epsilon_0\mu_0\nabla\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)$

Η λύση για το ϕ είναι $\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{R},t)}{|\vec{r} - \vec{R}|}dV$ η οποία είναι acausal, δηλαδή την ίδια χρονική στιγμή που γίνεται μια μεταβολή του ρ στο R, την ίδια στιγμή το ϕ στο $\vec{r}$ αλλάζει, κάτι το οποίο είναι σε ασυμφωνία με την ειδική σχετικότητα που απαιτεί πεπερασμένη ταχύτητα διάδοσης· ωστόσο, το ίδιο το ϕ δεν είναι μετρήσιμη (φυσική) ποσότητα.

• Βαθμίδα Lorentz: $\nabla\cdot\vec{A} + \epsilon_0\mu_0\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0 \Rightarrow \Box\phi = \nabla^2\phi - \epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$, $\Box\vec{A} = \nabla^2\vec{A} - \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{J}$

(ο τελεστής $\Box = \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ λέγεται D'Alembertian)

Η λύση των εξισώσεων αυτών είναι

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V\frac{\rho(\vec{R},t_r)}{|\vec{r}-\vec{R}|}dV \ , \quad \vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{\vec{J}(\vec{R},t_r)}{|\vec{r}-\vec{R}|}dV \ , \quad t_r = t - \frac{|\vec{r}-\vec{R}|}{c} = t - \frac{r'}{c}$$

(retarded potentials)

διότι $\nabla\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\left[\frac{\nabla\rho}{r'} + \rho\nabla\left(\frac{1}{r'}\right)\right]dV$, $\nabla\rho = \frac{\partial\rho}{\partial t_r}\nabla t_r = -\frac{\partial\rho}{\partial t}\frac{\nabla r'}{c} = -\frac{\dot\rho\hat{r}'}{c}$, $\nabla\frac{1}{r'} = -\frac{\nabla r'}{r'^2} = -\frac{\hat{r}'}{r'^2}$

$\Rightarrow \nabla\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V\left(-\frac{\dot\rho\hat{r}'}{cr'} - \rho\frac{\hat{r}'}{r'^2}\right)dV \Rightarrow \nabla^2\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V\left[-\frac{1}{c}\left(\frac{\hat{r}'}{r'}\cdot\nabla\dot\rho + \dot\rho\nabla\cdot\frac{\hat{r}'}{r'}\right) - \left(\frac{\hat{r}'}{r'^2}\cdot\nabla\rho + \rho\nabla\cdot\frac{\hat{r}'}{r'^2}\right)\right]dV$

$\nabla\dot\rho = \ddot\rho\nabla t_r = -\frac{\ddot\rho\hat{r}'}{c}$, $\nabla\cdot\frac{\hat{r}'}{r'} = \frac{1}{r'^2} \Rightarrow \nabla^2\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V\left(\frac{\ddot\rho}{c^2r'} - \frac{\dot\rho}{cr'^2} + \frac{\dot\rho}{cr'^2} + \rho\nabla\cdot\nabla\frac{1}{r'}\right)dV =$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \left(\frac{\ddot{\rho}}{c^2 r'} + \rho\nabla^2\frac{1}{|\vec{r}-\vec{R}|}\right)dV = \frac{\epsilon_0\mu_0}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\ddot{\rho}}{r'}\,dV - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}4\pi\rho(\vec{r}) = \epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Επίσης $\nabla\cdot\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \nabla\cdot\left(\frac{\vec{J}}{r'}\right)dV$, όπου $\vec{J} = \vec{J}(\vec{R}, t-\frac{r'}{c})$, άρα

$$\nabla\cdot\left(\frac{\vec{J}}{r'}\right) = \frac{\nabla\cdot\vec{J}}{r'} + \vec{J}\cdot\nabla\left(\frac{1}{r'}\right) = \frac{\nabla\cdot\vec{J}}{r'} - \vec{J}\cdot\nabla_R\left(\frac{1}{r'}\right) = \frac{\nabla\cdot\vec{J}}{r'} + \frac{\nabla_R\cdot\vec{J}}{r'} - \nabla_R\cdot\left(\frac{\vec{J}}{r'}\right)$$

$$\nabla\cdot\vec{J} = \frac{\partial\vec{J}}{\partial t_r}\cdot\nabla t_r = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{J}}{\partial t}\cdot\nabla r' = -\frac{1}{c}\dot{\vec{J}}\cdot\hat{r}'$$

$$\nabla_R\cdot\vec{J} = -\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\vec{J}}{\partial t_r}\cdot\nabla_R t_r = -\dot{\rho} - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{J}}{\partial t}\cdot\nabla_R r' = -\dot{\rho} + \frac{1}{c}\dot{\vec{J}}\cdot\hat{r}' \Rightarrow \nabla\cdot\vec{J} + \nabla_R\cdot\vec{J} = -\dot{\rho}$$

$$\nabla\cdot\vec{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{\dot{\rho}}{r'}dV - \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_S\frac{\vec{J}}{r'}\cdot d\vec{a} = -\epsilon_0\mu_0\frac{\partial\phi}{\partial t}+0 \Rightarrow \nabla\cdot\vec{A} + \epsilon_0\mu_0\frac{\partial\phi}{\partial t}=0$$

Επίσης λύσεις είναι και τα advanced potentials όπου το t_r αντικαθίσταται από το $t_a = t+\frac{r'}{c}$ που δεν έχουν συνήθως φυσική σημασία αφού παραβιάζουν την αιτιότητα.

Τα πεδία $\vec{E},\vec{B}$ είναι

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V\left\{\left[\frac{\rho(\vec{R},t_r)}{|\vec{r}-\vec{R}|^2} + \frac{\dot{\rho}(\vec{R},t_r)}{c|\vec{r}-\vec{R}|}\right]\frac{\vec{r}-\vec{R}}{|\vec{r}-\vec{R}|} - \frac{\dot{\vec{J}}(\vec{R},t_r)}{c^2|\vec{r}-\vec{R}|}\right\}dV$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\left[\frac{\vec{J}(\vec{R},t_r)}{|\vec{r}-\vec{R}|^2} + \frac{\dot{\vec{J}}(\vec{R},t_r)}{c|\vec{r}-\vec{R}|}\right]\times\frac{\vec{r}-\vec{R}}{|\vec{r}-\vec{R}|}\,dV$$

διότι $\nabla\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V\left(\frac{\dot{\rho}}{c}\frac{\hat{r}'}{r'} + \rho\frac{\hat{r}'}{r'^2}\right)dV$, $\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{\dot{\vec{J}}}{r'}dV$, άρα

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V\left(\rho\frac{\hat{r}'}{r'^2} + \frac{\dot{\rho}\,\hat{r}'}{cr'} - \frac{1}{c^2}\frac{\dot{\vec{J}}}{r'}\right)dV$$

Επίσης $\vec{B} = \nabla\times\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\nabla\times\left(\frac{\vec{J}}{r'}\right)dV = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\left(\frac{1}{r'}\nabla\times\vec{J} - \vec{J}\times\nabla\frac{1}{r'}\right)dV$

$(\nabla\times\vec{J})_x = \frac{\partial J_z}{\partial y} - \frac{\partial J_y}{\partial z}$, $\frac{\partial J_z}{\partial y} = \frac{\partial J_z}{\partial t_r}\frac{\partial t_r}{\partial y} = -\frac{1}{c}\frac{\partial J_z}{\partial t}\frac{\partial r'}{\partial y}$

$$(\nabla\times\vec{J})_x = -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial J_z}{\partial t}\frac{\partial r'}{\partial y} - \frac{\partial J_y}{\partial t}\frac{\partial r'}{\partial z}\right) = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial\vec{J}}{\partial t}\times\nabla r'\right)_x \Rightarrow \nabla\times\vec{J} = \frac{1}{c}\dot{\vec{J}}\times\nabla r' = \frac{1}{c}\dot{\vec{J}}\times\hat{r}'$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\left(\frac{\dot{\vec{J}}\times\hat{r}'}{cr'} + \vec{J}\times\frac{\hat{r}'}{r'^2}\right)dV = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\left(\frac{\vec{J}}{r'^2}+\frac{\dot{\vec{J}}}{cr'}\right)\times\hat{r}'\,dV$$