ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

Φυσική ΙΙ

Σημειώσεις – Maxwell I

Κοφινάς Γιώργος

Τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών και Επικοινωνιακών Συστημάτων

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Εξίσωση Ampère-Maxwell

Η μεταβαλλόμενη ηλεκτρική ροή μέσα από μία επιφάνεια δημιουργεί πρόσθετη μαγνητεγερτική δύναμη στο σύνορο της επιφάνειας πέραν εκείνης που δημιουργείται λόγω των διαρρεόντων ρευμάτων

$$V_B = \oint_C \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0\int_S \vec{j}\cdot d\vec{a} + \epsilon_0\mu_0 \frac{d}{dt}\int_S \vec{E}\cdot d\vec{a} = \mu_0(I+I_d)$$ ν. Ampère-Maxwell

$$I_d = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = \epsilon_0\frac{d}{dt}\int_S \vec{E}\cdot d\vec{a}$$ "ρεύμα μετατόπισης"

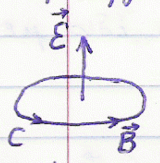
διότι για $C\to 0$ πράγματι προκύπτει η γνωστή σωστή εξίσωση διατήρησης του φορτίου $\oint_S \vec{j}\cdot d\vec{a} + \epsilon_0 \frac{d}{dt}\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{a} = 0$. Δηλαδή ο ν. Ampère-Maxwell αποτελε τη συμβατότητα του ν. Ampère με τη διατήρηση του φορτίου.
Η πειραματική επαλήθευση γίνεται από την ύπαρξη των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων.

Η διαφορική μορφή του ν. Ampère-Maxwell είναι

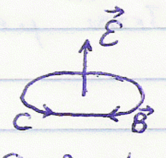
$$\nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \epsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \mu_0(\vec{j}+\vec{j}_d), \quad \vec{j}_d = \epsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

διότι $\int_S(\nabla\times\vec{B})\cdot d\vec{a} = \mu_0\int_S\vec{j}\cdot d\vec{a} + \epsilon_0\mu_0\int_S\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\cdot d\vec{a}$.
Άρα το χρονοεξαρτώμενο ηλεκτρικό πεδίο δημιουργεί μαγνητικό πεδίο.
Μπορεί η διατήρηση του φορτίου να εφαρμοστεί και σε επίπεδο διαφορικών εξισώσεων για να δειχθεί η διαφορική μορφή του ν. Ampère-Maxwell αφού $0 = \nabla\cdot(\nabla\times\vec{B}) = \mu_0\nabla\cdot\vec{j} + \epsilon_0\mu_0\nabla\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \mu_0\nabla\cdot\vec{j} + \epsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\vec{E} = \mu_0\nabla\cdot\vec{j} + \epsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho}{\epsilon_0}\right) = \mu_0\left(\nabla\cdot\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t}\right) = 0$. Επομένως, υπάρχει συμβατότητα των εξισώσεων Gauss και Ampère-Maxwell.
Στην περίπτωση της μαγνητοστατικής, τα ρεύματα είναι στάσιμα $\nabla\cdot\vec{j} = 0$ κα ο ν. Ampère είναι σωστός αφού $0=\nabla\cdot(\nabla\times\vec{B}) = \mu_0\nabla\cdot\vec{j} = 0$.

Το δημιουργούμενο μαγνητικό πεδίο από μεταβαλλόμενο $\vec{E}$ φαίνεται ως εξής:



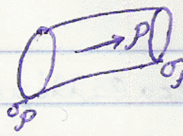
$\mathcal{E}$ αυξάνει $\Rightarrow \frac{d\Phi_E}{dt} > 0$
$\Rightarrow I_d > 0 \Rightarrow V_B > 0 \Rightarrow \vec{B}\cdot d\vec{\ell} > 0$



$\mathcal{E}$ ελαττώνεται $\Rightarrow \frac{d\Phi_E}{dt} < 0$
$\Rightarrow I_d < 0 \Rightarrow V_B < 0 \Rightarrow \vec{B}\cdot d\vec{\ell} < 0$

Μέσα στην ύλη ισχύει $\nabla\times\vec{H} = \vec{j}_f + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$, $j_d = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ "ρεύμα μετατόπισης"

Πράγματι, η μεταβαλλόμενη πόλωση δημιουργεί επιπλέον ρεύμα $\vec{j}_p = \frac{\partial\vec{P}}{\partial t}$ "ρεύμα πόλωσης" που οφείλεται στην κίνηση φορτίων και δεν έχει καμία σχέση με το ρεύμα μαγνήτισης, διότι



$$dI_p = \frac{\partial \sigma_p}{\partial t}\, da_\perp = \frac{\partial P}{\partial t}\, da_\perp \Rightarrow J_p = \frac{dI_p}{da_\perp} = \frac{\partial P}{\partial t}.$$

Το ρεύμα $\vec{J}_p$ ικανοποιεί την εξίσωση συνέχειας των δέσμιων φορτίων, δηλ. $\nabla\cdot\vec{J}_p + \frac{\partial \rho_p}{\partial t} = 0$, αφού $\nabla\cdot\vec{J}_p = \nabla\cdot\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\vec{P} = -\frac{\partial \rho_p}{\partial t}$.

Τελικά, $\nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \epsilon_0\mu_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0(\vec{J}_f + \vec{J}_m + \vec{J}_p) + \epsilon_0\mu_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} =$

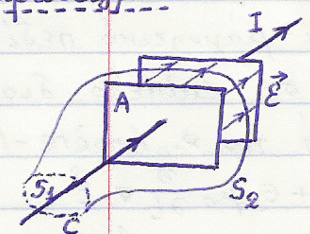
$$= \mu_0\left(\vec{J}_f + \nabla\times\vec{M} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}\right) + \epsilon_0\mu_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0(\vec{J}_f + \nabla\times\vec{M}) + \mu_0\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$\Rightarrow \nabla\times\vec{H} = \vec{J}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$.

Η αντίστοιχη ολοκληρωτική εξίσωση του ν. Ampère-Maxwell μέσα στην ύλη είναι

$$\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J}_f\cdot d\vec{a} + \frac{d}{dt}\int_S \vec{D}\cdot d\vec{a} = I_f + \frac{d}{dt}\int_S \vec{D}\cdot d\vec{a}$$

Παράδειγμα



Για πυκνωτή που φορτίζεται με ρεύμα μεταβαλλόμενο ως προς το χρόνο (π.χ. κατά τη διάρκεια φόρτισης σε συνεχή τάση ή σε κύκλωμα εναλλασσόμενου ρεύματος) αν εφαρμόσουμε το ν. Ampère για την επιφάνεια S_2 έχουμε $\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0\int_{S_2}\vec{J}\cdot d\vec{a} = 0$. Αυτό είναι λάθος, αφού εφαρμόζοντας τον ν. Ampère για την επιφάνεια S_1 είναι $\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0\int_{S_1}\vec{J}\cdot d\vec{a} = \mu_0 I$, δηλαδή πράγματι υπάρχει μαγνητικό πεδίο στην περιοχή της καμπύλης C και η κυκλοφορία του δεν είναι μηδέν. Η σωστή εξίσωση είναι η Ampère-Maxwell αφού

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_d = \epsilon_0\mu_0\frac{d}{dt}\int_{S_2}\vec{E}\cdot d\vec{a} = \epsilon_0\mu_0\frac{d}{dt}(EA) = \epsilon_0\mu_0\frac{d}{dt}\left(\frac{\sigma}{\epsilon_0}A\right) = \mu_0\frac{dQ}{dt} = \mu_0 I,$$

άρα $I_d = I$ και το $\vec{B}$ που υπολογίζεται μέσω της S_2 είναι το ίδιο με αυτό που υπολογίζεται μέσω της S_1.

Και για τα χρονοεξαρτώμενα πεδία η συνοριακή συνθήκη για το $\vec{H}_\parallel$ συμπίπτει με αυτή που προκύπτει από το ν. Ampère, δηλαδή

$$\vec{H}_{2\parallel} - \vec{H}_{1\parallel} = \vec{K}_f \times \hat{n}$$

διότι στον ν. Ampère-Maxwell η ηλεκτρική ροή $\int_S \vec{E}\cdot d\vec{a}$ στο όριο που ο βρόγχος C τριγύρω από την επιφάνεια συρρικνώνει το πλάτος του, είναι μηδέν.

Για γραμμικά διηλεκτρικά $\frac{1}{\mu_2}\vec{B}_{2\parallel} - \frac{1}{\mu_1}\vec{B}_{1\parallel} = \vec{K}_f \times \hat{n}$

Εξίσωση Faraday

Η μεταβαλλόμενη μαγνητική ροή μέσα από μια επιφάνεια δημιουργεί ηλεκτρεγερτική δύναμη στο σύνορο της επιφάνειας

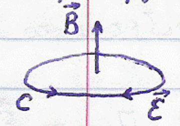
$$V_E = \oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{a} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \qquad \text{(ν. Faraday)}$$

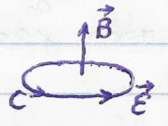
όπου το $\vec{E}$ μετριέται ως προς σύστημα ακίνητο ως προς το $d\vec{l}$.
Το − αποτελεί το ν. Lenz που εκφράζει τη διατήρηση της ενέργειας. Ο νόμος ισχύει είτε η καμπύλη C συμπίπτει με αγωγό είτε δεν υπάρχει αγωγός, δηλαδή το ηλεκτρικό πεδίο δημιουργείται και στο κενό όπου δεν υπάρχουν φορτία και το οποίο πεδίο βέβαια έχει διαφορετικές ιδιότητες (μη-συντηρητικό) από αυτές του ηλεκτροστατικού πεδίου. Αυτό το $\vec{E}$ βρίσκεται λύνοντας διαφορικές εξισώσεις ή σε περιπτώσεις υψηλής συμμετρίας χρησιμοποιώντας την παραπάνω ολοκληρωτική έκφραση. Ωστόσο και χωρίς να υπολογιστεί το $\vec{E}$, το V_E έχει από μόνο του φυσική αξία γιατί είναι ηλεκτρική τάση. Αντίθετα το V_B δεν έχει πρακτική αξία γιατί δεν υπάρχουν μαγνητικά μονόπολα για να τα κινήσει, οπότε εκεί χρειάζεται να βρει κανείς το ίδιο το $\vec{B}$.
Η διαφορική εξίσωση του ν. Faraday είναι

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

διότι $\int_S(\nabla\times\vec{E})\cdot d\vec{a} = -\int_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{a}$.
Η ίδια εξίσωση ισχύει και παρουσία ύλης αφού δεν περιέχει $\rho, \vec{J}$.
Επομένως, το χρονοεξαρτώμενο μαγνητικό πεδίο δημιουργεί ηλεκτρικό πεδίο.
Είναι πράγματι $\frac{Wb}{s} = \frac{m^2\,kg}{s^2\,Cb} = V$.

Το δημιουργούμενο ηλεκτρικό πεδίο από μεταβαλλόμενο $\vec{B}$ φαίνεται ως εξής:





B αυξάνει $\Rightarrow \frac{d\Phi_B}{dt} > 0$
$\Rightarrow V_E < 0 \Rightarrow \vec{E}\cdot d\vec{l} < 0$

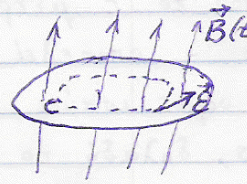
B ελαττώνεται $\Rightarrow \frac{d\Phi_B}{dt} < 0$
$\Rightarrow V_E > 0 \Rightarrow \vec{E}\cdot d\vec{l} > 0$

Οι εξισώσεις $\nabla\cdot\vec{B} = 0$ και Faraday είναι συμβατές διότι η εξίσωση $\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{a}$ για $C\to 0$ δίνει $\int_S \vec{B}\cdot d\vec{a} = \text{σταθ.}$, που είναι η εξίσωση Gauss για το μαγνητικό πεδίο για σταθ $= 0$. Ή ακόμα $0 = \nabla\cdot(\nabla\times\vec{E}) = -\nabla\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\vec{B}) = 0$

Παράδειγμα Δια μέσω ενός πηνίου εμβαδού A, N σπειρών το μαγνητικό πεδίο είναι $B = B_0 \sin\omega t$. Άρα $\Phi_B = NBA = NB_0A\sin\omega t$,

$$V_\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -NB_0A\omega\cos\omega t$$

Παράδειγμα Ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο $\vec{B}(t)$ διέρχεται κάθετα μέσα σε μια κυκλική περιοχή.

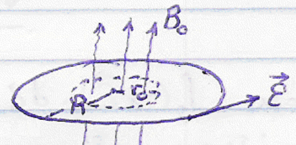


Σε αναλογία με το $\vec{B}$ που δημιουργείται από την εξίσωση Ampère $\nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{J}$ με $\vec{J}$ ομογενές ευθύγραμμο ρεύμα και είναι $\vec{B}\parallel\hat{e}_\varphi$, έτσι και το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται από την εξίσωση Faraday $\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ είναι $\vec{E}\parallel\hat{e}_\varphi$. Θεωρώντας ένα βρόγχο C ομόκεντρο κύκλο έχουμε

$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{a} \Leftrightarrow E\,2\pi r = -\frac{d}{dt}(\pi r^2 B) \Leftrightarrow E = -\frac{r}{2}\frac{dB}{dt} \Leftrightarrow \vec{E}(r) = -\frac{r}{2}\frac{dB}{dt}\hat{e}_\varphi$$

Όταν το $B(t)$ ελαττώνεται, το $\vec{E}$ έχει τη φορά του σχήματος.

Παράδειγμα Μια ομοιόμορφη γραμμική πυκνότητα φορτίου λ βρίσκεται πάνω σε ένα μονωτικό δακτύλιο ακτίνας R που αιωρείται από σταθερό σημείο. Ομογενές μαγνητικό πεδίο B_0 διέρχεται κάθεται μέσα σε μια ομόκεντρη κυκλική περιοχή με ακτίνα $r_0<R$. Βρείτε την ολική ροπή και τη στροφορμή του δακτυλίου όταν το μαγνητικό πεδίο μηδενιστεί.



Είναι $\vec{E}\parallel\hat{e}_\varphi$, άρα αν C είναι ο δακτύλιος έχουμε

$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{a} \Leftrightarrow \oint_C E\,dl = -\frac{d}{dt}(\pi r_0^2 B) = -\pi r_0^2\frac{dB}{dt}.$$

Η ολική ροπή στο δακτύλιο είναι κάθε χρονική στιγμή

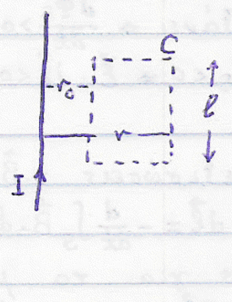
$$\vec{\tau} = \oint_C \vec{r}\times d\vec{F} = \oint_C \vec{r}\times\vec{E}\,\lambda\,dl = \hat{z}\oint_C R\,E\,\lambda\,dl = \hat{z}R\lambda\oint_C E\,dl = -\hat{z}R\lambda\pi r_0^2\frac{dB}{dt}$$

Η ολική στροφορμή που αποκτά ο δακτύλιος καθ' όλη τη διάρκεια του φαινομένου είναι

$$\vec{L} = \int\vec{\tau}\,dt = -\hat{z}R\lambda\pi r_0^2\int\frac{dB}{dt}dt = -\hat{z}R\lambda\pi r_0^2\int_{B_0}^{0}dB = \hat{z}R\lambda\pi r_0^2 B_0.$$

Η στροφορμή είναι ανεξάρτητη του πόσο γρήγορα ή αργά μηδενίζεται το B.

Παράδειγμα Άπειρο ευθύγραμμο σύρμα διαρρέεται από ρεύμα $I(t)$. Ποιο το $\vec{E}(r)$?



Το $\vec{E}$ είναι παράλληλο στο σύρμα. Για τον βρόγχο C έχουμε

$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{a} \Leftrightarrow E(r_0)\,l - E(r)\,l = -\frac{d}{dt}\int_{r_0}^{r}\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,l\,dr$$

$$\Leftrightarrow E(r) - E(r_0) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{dI}{dt}\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{r} \Leftrightarrow E(r) - E(r_0) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{dI}{dt}(\ln r - \ln r_0)$$

$$\Leftrightarrow \vec{E}(r) = \left[\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{dI}{dt}\ln r + c(t)\right]\hat{z}$$

Η συνοριακή συνθήκη για το $\vec{\mathcal{E}}_{\parallel}$ που προκύπτει από την εξίσωση Faraday είναι η ίδια όπως και στην ηλεκτροστατική, δηλ.

$$\hat{n}\times(\vec{\mathcal{E}}_2-\vec{\mathcal{E}}_1)=0 \Leftrightarrow \vec{\mathcal{E}}_{1\parallel}=\vec{\mathcal{E}}_{2\parallel}$$

διότι στον ν. Faraday η μαγνητική ροή $\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{a}$ στο όριο που ο βρόγχος C τριγύρω από την επιφάνεια συρρικνώνει το πλάτος του, είναι μηδέν.

Το ότι η μεταβολή της μαγνητικής ροής είναι ανάλογη προς την $V_{\mathcal{E}}$ σημαίνει ότι $\oint_C \vec{\mathcal{E}}\cdot d\vec{l} = -k\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{a}$. Το $k=1$ δεν προσδιορίζεται μόνο πειραματικά, αλλά και θεωρητικά από την Galilean invariance. Πράγματι, αν το κύκλωμα κινείται με ταχύτητα $\vec{v}$ ως προς το lab τότε ισχύει $\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\vec{v}\cdot\nabla \Rightarrow$

$$\frac{d\vec{B}}{dt}=\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{B} = \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}+\nabla\times(\vec{B}\times\vec{v})+(\nabla\cdot\vec{B})\vec{v}$$, άρα

$$\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{a} = \int_S \frac{d\vec{B}}{dt}\cdot d\vec{a} = \int_S\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{a} + \int_S \nabla\times(\vec{B}\times\vec{v})\cdot d\vec{a} = \int_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{a}+\oint_C(\vec{B}\times\vec{v})\cdot d\vec{l},$$

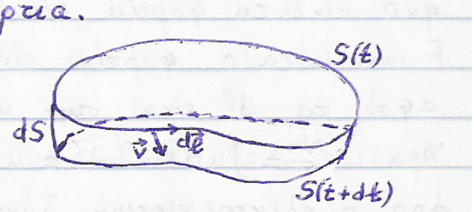
δηλαδή η μεταβολή της ροής οφείλεται είτε λόγω του ότι μεταβάλλεται το $\vec{B}$ είτε διότι κινείται το κύκλωμα. Άρα

$$\oint_C\vec{\mathcal{E}}\cdot d\vec{l} = -k\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{a} - k\oint_C(\vec{B}\times\vec{v})\cdot d\vec{l} \Leftrightarrow \oint_C[\vec{\mathcal{E}}-k(\vec{v}\times\vec{B})]\cdot d\vec{l} = -k\int_S\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{a}$$

$$\Leftrightarrow \oint_C \vec{\mathcal{E}}_{lab}\cdot d\vec{l} = -k\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{a}$$, όπου $\vec{\mathcal{E}}_{lab}=\vec{\mathcal{E}}-k(\vec{v}\times\vec{B})\Leftrightarrow \vec{\mathcal{E}}=\vec{\mathcal{E}}_{lab}+k(\vec{v}\times\vec{B})$

Το $\vec{\mathcal{E}}_{lab}$ είναι το ηλεκτρικό πεδίο που μετράει το lab σύστημα που βλέπει το κύκλωμα να κινείται, επομένως το lab θα γράφει για τη δύναμη σε κάποιο φορτίο q ότι $\vec{F} = q(\vec{\mathcal{E}}_{lab}+\vec{v}\times\vec{b})$. Το σύστημα που βλέπει το $d\vec{l}$ ακίνητο (επίσης αδρανειακό) θα γράφει για το ίδιο φορτίο $\vec{F}=q\vec{\mathcal{E}}$. Άρα $\vec{\mathcal{E}}=\vec{\mathcal{E}}_{lab}+\vec{v}\times\vec{B} \Leftrightarrow \vec{\mathcal{E}}_{lab}+k(\vec{v}\times\vec{B})=\vec{\mathcal{E}}_{lab}+\vec{v}\times\vec{B}\Leftrightarrow k=1$.

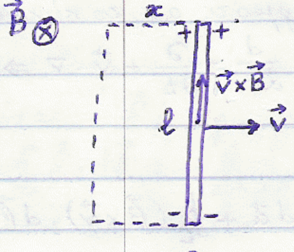
Για ένα βρόγχο που κινείται μέσα σε μαγνητικό πεδίο (και ενδεχομένως σύγχρονως παραμορφώνεται) η σχέση $V_{\mathcal{E}}=-\frac{d\Phi_B}{dt}$ αποδεικνύεται μέσω της δύναμης Laplace που ασκείται στα κινούμενα φορτία.



Πράγματι, αν $\vec{v}$ είναι η ταχύτητα του βρόγχου σε κάποιο σημείο του, δύναμη Laplace ασκείται στα φορτία του και στο σημείο αυτό το φορτίο κινείται στο σύρμα με παράλληλη ταχύτητα έστω $\vec{u}$. Άρα η ολική ταχύτητα του φορτίου είναι $\vec{w}=\vec{v}+\vec{u}$ και η δύναμη Laplace πάνω του ανά μονάδα φορτίου είναι $\frac{\vec{F}_L}{q}=\vec{w}\times\vec{B}$. Η ηλεκτρεγερτική δύναμη που αναπτύσσεται στο βρόγχο λόγω αυτής της κίνησης των φορτίων εντός του βρόγχου είναι $V_{\mathcal{E}}=\oint_C\frac{\vec{F}_L}{q}\cdot d\vec{l}=\oint_C(\vec{w}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}=\oint_C(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}=$

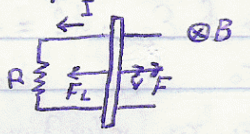
$= -\oint_C \vec{B}\cdot(\vec{v}\times d\vec{l})$. Αν $\Phi_B(t)$ είναι η ροή που διέρχεται από την επιφάνεια τη χρονική στιγμή t, $\Phi_B(t+dt)$ η ροή τη χρονική στιγμή $t+dt$ και $\Phi_B(dS)$ η ροή που διέρχεται μέσα από την παράπλευρη επιφάνεια, τότε $\Phi_B(t+dt) = \Phi_B(t) + \Phi_B(dS) \Rightarrow d\Phi_B = \Phi_B(dS) = \int_{dS} \vec{B}\cdot d\vec{a} = \int_{dS} \vec{B}\cdot(\vec{v}\times d\vec{l})dt$
$\Rightarrow \frac{d\Phi}{dt} = \oint_C \vec{B}\cdot(\vec{v}\times d\vec{l})$. Τελικά $V_\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$.

<u>Παράδειγμα</u> Έστω ράβδος κινούμενη κάθετα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο B με ταχύτητα $\vec{v}$.

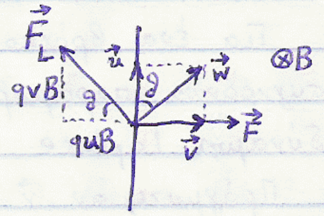


Μπορούμε να θεωρήσουμε τη ροή $\Phi_B = Blx$, άρα
$V_\mathcal{E} = \frac{d\Phi_B}{dt} = Bl\frac{dx}{dt} = Blv$

Αλλιώς, λόγω της κίνησης ασκείται στα φορτία δύναμη Laplace $\vec{F}_L = q\vec{v}\times\vec{B}$, $F_L = qvB$ που συσσωρεύονται στα άκρα της ράβδου, επομένως δημιουργείται ηλεκτρικό πεδίο $\vec{\mathcal{E}}$ το οποίο με τη σειρά του ασκεί ηλεκτρική δύναμη στα φορτία $\vec{F}_\mathcal{E} = q\vec{\mathcal{E}}$. Η κίνηση σταματάει και έχουμε πλέον το μέγιστο $\mathcal{E}$ (και μέγιστη διαφορά δυναμικού) όταν $\vec{F}_L + \vec{F}_\mathcal{E} = 0 \Leftrightarrow F_L = F_\mathcal{E} \Leftrightarrow qvB = q\mathcal{E} \Leftrightarrow \mathcal{E} = Bv$, άρα $V_\mathcal{E} = \mathcal{E}l = Bvl$.
Αν υπάρχει κλειστό κύκλωμα τότε το ρεύμα $I = \frac{V_\mathcal{E}}{R} = \frac{Bvl}{R}$, άρα $F_L = BIl = \frac{B^2vl^2}{R}$, άρα πρέπει να εξασκείται αντίθετη προς την F_L δύναμη $F = \frac{B^2vl^2}{R}$ και η μηχανική ισχύς που μετατρέπεται σε ηλεκτρική και τελικά θερμική ενέργεια είναι
$P = Fv = \frac{B^2v^2l^2}{R}$.

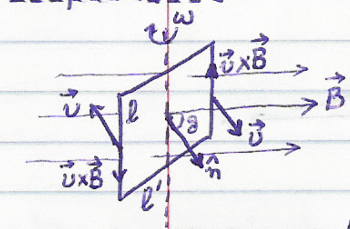


Αν θέλουμε να είμαστε πιο ακριβείς, τα φορτία κινούνται παράλληλα στη ράβδο έστω με ταχύτητα $\vec{u}$, άρα η ολική τους ταχύτητα είναι $\vec{w} = \vec{v} + \vec{u}$ και $V_\mathcal{E} = \int \frac{\vec{F}_L}{q}\cdot d\vec{l} = \int(\vec{w}\times\vec{B})\cdot d\vec{l} = \int(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l} = (\vec{v}\times\vec{B})\cdot\int d\vec{l} = vBl$.
Η κινητήρια δύναμη $F = quB$ ενώ η κάθετη συνιστώσα qvB κινεί τα φορτία πάνω στη ράβδο. Άρα το έργο της F ανά μονάδα φορτίου είναι $\frac{W_F}{q} = \int \frac{\vec{F}}{q}\cdot d\vec{l} = \int \frac{F}{q}\, dl \sin\theta$, αφού το dl είναι στην κατεύθυνση της ολικής μετατόπισης, δηλαδή του $\vec{w}$.



Άρα $\frac{W_F}{q} = \int uB\sin\theta\, dl = uB\sin\theta\int dl = uB\sin\theta\,\frac{l}{\cos\theta} = (u\tan\theta)Bl = vBl = V_\mathcal{E} \Rightarrow V_\mathcal{E} = \frac{W_F}{q}$, άρα η ηλεκτρεγερτική δύναμη ισούται με το έργο ανά μονάδα φορτίου της κινητήριας δύναμης. Σημειώνουμε ότι στη $V_\mathcal{E}$ η ολοκλήρωση γίνεται πάνω στη ράβδο κάποια χρονική στιγμή, ενώ στο W_F η ολοκλήρωση γίνεται πάνω στην πραγματική τροχιά του φορτίου. Η $\vec{F}$ δεν συνεισφέρει στο $V_\mathcal{E}$ γιατί είναι κάθετη στη ράβδο, ενώ η $\vec{F}_L$ δεν συνεισφέρει στο έργο ως κάθετη στην κίνηση του φορτίου.

<u>Παράδειγμα</u> Περιστρεφόμενο πλαίσιο εντός ομογενούς μαγνητικού πεδίου.



Η γωνία $\vartheta = \omega t$, η ροή $\Phi_B = \vec{B}\cdot\hat{n}A = BA\cos\omega t$

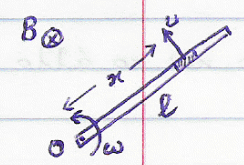
Άρα $V_\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = BA\omega\sin\omega t = V_{\mathcal{E}_0}\sin\omega t$, $V_{\mathcal{E}_0} = BA\omega$

$I = \frac{V_\mathcal{E}}{R} = I_0\sin\omega t$, $I_0 = \frac{V_{\mathcal{E}0}}{R} = \frac{BA\omega}{R}$.

Αλλιώς, $\vec{F}_L = q\vec{\upsilon}\times\vec{B}$, $V_\mathcal{E} = \oint\frac{\vec{F}_L}{q}\cdot d\vec{\ell} = \oint(\vec{\upsilon}\times\vec{B})\cdot d\vec{\ell} = \oint B\upsilon\sin\vartheta\, d\ell =$
$= 2B\upsilon\sin\vartheta\,\ell = 2B(\omega\frac{\ell'}{2})\sin\vartheta\,\ell = B\omega A\sin\omega t$.

Αν υποθέσουμε ότι η κίνηση των φορτίων οφείλεται σε ισοδύναμη ηλεκτρική δύναμη $\vec{F}_\mathcal{E} = q\vec{\mathcal{E}} = \vec{F}_L$ τότε μπορούμε να γράψουμε και $V_\mathcal{E} = \oint\vec{\mathcal{E}}\cdot d\vec{\ell}$.

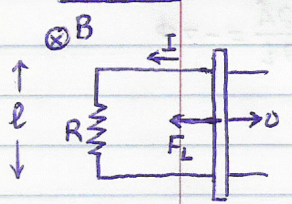
<u>Άσκηση</u> Περιστρεφόμενη ράβδος γύρω από το άκρο της κάθετα στο B.



Στα άκρα του τμήματος dx εμφανίζεται ηλεκτρεγερτική δύναμη $dV_\mathcal{E} = B\upsilon\, dx = B\omega x\, dx$

$\Rightarrow V_\mathcal{E} = \int dV_\mathcal{E} = B\omega\int_0^\ell x\,dx = \frac{B\omega}{2}\ell^2$

<u>Άσκηση</u> Αρχική ταχύτητα υ_0, $\upsilon(t) = ?$, $V_\mathcal{E}(t) = ?$, $I(t) = ?$



Κάθε χρονική στιγμή που η ταχύτητα της ράβδου είναι $\upsilon = \upsilon(t)$ είναι

$V_\mathcal{E} = B\upsilon\ell \Rightarrow I = \frac{V_\mathcal{E}}{R} = \frac{B\upsilon\ell}{R}$

Αλλά $F_L = BI\ell = B\frac{B\upsilon\ell}{R}\ell = \frac{B^2\ell^2}{R}\upsilon$

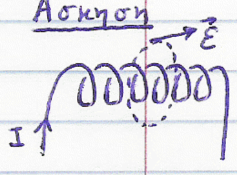
και

$$F_L = -m\frac{d\upsilon}{dt} \Leftrightarrow m\frac{d\upsilon}{dt} = -\frac{B^2\ell^2}{R}\upsilon \Leftrightarrow \frac{d\upsilon}{\upsilon} = -\frac{B^2\ell^2}{mR}dt \Leftrightarrow \int_{\upsilon_0}^{\upsilon}\frac{d\upsilon}{\upsilon} = -\frac{B^2\ell^2}{mR}\int_0^t dt$$

$$\Leftrightarrow \ln\frac{\upsilon}{\upsilon_0} = -\frac{B^2\ell^2}{mR}t \Leftrightarrow \upsilon(t) = \upsilon_0 e^{-\frac{B^2\ell^2}{mR}t} = \upsilon_0 e^{-t/\tau}, \quad \tau = \frac{mR}{B^2\ell^2}$$

$$V_\mathcal{E}(t) = B\upsilon_0\ell e^{-t/\tau}, \quad I(t) = \frac{B\upsilon_0\ell}{R}e^{-t/\tau}$$

<u>Άσκηση</u> Σωληνοειδές N σπειρών, μήκους L, ακτίνας R, $I = I_0\cos\omega t$.



Ποιο το $\mathcal{E}(r,t) = ?$

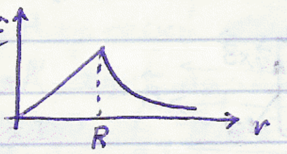
Το $\vec{\mathcal{E}} \parallel \hat{e}_\varphi$, άρα $V_\mathcal{E} = \oint\vec{\mathcal{E}}\cdot d\vec{\ell} = \mathcal{E}\,2\pi r$

Αλλά για έξω: $V_\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}(B\pi R^2) = -\pi R^2\frac{dB}{dt} =$

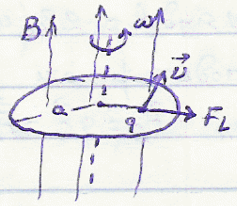
$$= -\pi R^2\frac{d}{dt}(\mu_0 n I) = -\pi R^2\mu_0 n\frac{dI}{dt} = \pi R^2\mu_0 n I_0\omega\sin\omega t \Rightarrow \mathcal{E}(r,t) = \frac{\mu_0 n I_0\omega R^2}{2r}\sin\omega t, \ r>R$$

Για μέσα: $V_{\mathcal{E}} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}(B\pi r^2) = -\pi r^2 \frac{dB}{dt} = \pi r^2 \mu_0 n I_0 \sin\omega t$

$\Rightarrow \mathcal{E}(r,t) = \frac{\mu_0 n I_0 \omega r}{2} \sin\omega t, \; r<R$



<u>Άσκηση</u> Μεταλλικός δίσκος περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω κάθετα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο B.



Σε κάποιο φορτίο q σε απόσταση r η δύναμη Laplace είναι $\vec{F}_L = q\vec{v}\times\vec{B} = quB\hat{e}_r = q\omega rB\hat{e}_r$.

Η ηλεκτρεγερτική δύναμη μεταξύ του κέντρου και ενός σημείου στην περιφέρεια είναι

$V_{\mathcal{E}} = \int \frac{\vec{F}_L}{q}\cdot d\vec{r} = \omega B \int_0^a r\,dr = \frac{\omega B a^2}{2}$.

Αν συνδέσουμε μια αντίσταση R με το ένα άκρο στο κέντρο και το άλλο στην περιφέρεια, το ρεύμα θα είναι $I = \frac{V_{\mathcal{E}}}{R} = \frac{\omega B a^2}{2R}$.

Υπάρχει βαθμωτό δυναμικό φ ώστε $\underline{\vec{\mathcal{E}} = -\nabla\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}}$

αφού $\nabla\times\vec{\mathcal{E}} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow \nabla\times\vec{\mathcal{E}} + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\vec{A}) = 0 \Leftrightarrow \nabla\times\left(\vec{\mathcal{E}} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = 0 \Leftrightarrow \vec{\mathcal{E}} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\nabla\phi$

Εξισώσεις Maxwell

- Gauss $\nabla\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\epsilon_0}$, $\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{a}=\frac{q}{\epsilon_0}$

- Ampère-Maxwell $\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}+\epsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$, $\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0 I+\epsilon_0\mu_0\frac{d}{dt}\int_S\vec{E}\cdot d\vec{a}$

- Faraday $\nabla\times\vec{E}+\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=0$, $\oint_C\vec{E}\cdot d\vec{l}=-\frac{d}{dt}\int_S\vec{B}\cdot d\vec{a}$

- No magnetic monopoles $\nabla\cdot\vec{B}=0$, $\oint_S\vec{B}\cdot d\vec{a}=0$

Παρουσία ύλης οι παραπάνω εξισώσεις ισοδύναμα γράφονται με διαχωρισμένα το ελεύθερο φορτίο και ρεύμα:

- $\nabla\cdot\vec{D}=\rho_f$, $\oint_S\vec{D}\cdot d\vec{a}=q_f$

- $\nabla\times\vec{H}=\vec{J}_f+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$, $\oint\vec{H}\cdot d\vec{l}=I_f+\frac{d}{dt}\int_S\vec{D}\cdot d\vec{a}$

- $\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$, $\oint_C\vec{E}\cdot d\vec{l}=-\frac{d}{dt}\int_S\vec{B}\cdot d\vec{a}$

- $\nabla\cdot\vec{B}=0$, $\oint_S\vec{B}\cdot d\vec{a}=0$

όπου $\vec{D}=\epsilon_0\vec{E}+\vec{P}$, $\vec{H}=\frac{1}{\mu_0}\vec{B}-\vec{M}$

Η εξίσωση της συνέχειας προκύπτει συνδυάζοντας την εξίσωση Ampère-Maxwell με το ν. Gauss.

Μαζί με τη δύναμη Lorentz $\vec{F}=q(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})$, συνιστούν τις εξισώσεις του ηλεκτρομαγνητισμού.

Στο κενό οι εξισώσεις Maxwell είναι πιο συμμετρικές:

$$\nabla\cdot\vec{E}=0 \qquad \nabla\cdot\vec{B}=0$$
$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \nabla\times\vec{B}=\epsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

και η συμμετρία $\vec{E}\to\vec{B}$, $\vec{B}\to-\epsilon_0\mu_0\vec{E}$ αφήνει τις εξισώσεις αυτές αναλλοίωτες

Αν υπήρχε μαγνητικό "φορτίο" (μαγνητικό μονόπολο) οι εξισώσεις Maxwell θα ήταν

$$\nabla\cdot\vec{E}=\frac{1}{\epsilon_0}\rho_e$$
$$\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}_e+\epsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$
$$\nabla\times\vec{E}=-\mu_0\vec{J}_m-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$
$$\nabla\cdot\vec{B}=\mu_0\rho_m$$

Οι συνοριακές συνθήκες παρουσία ύλης είναι

$$(\vec{D}_2 - \vec{D}_1)\cdot\hat{n} = D_{2\perp} - D_{1\perp} = \sigma_f \qquad (\hat{n}: 1\to 2)$$
$$(\vec{B}_2 - \vec{B}_1)\cdot\hat{n} = B_{2\perp} - B_{1\perp} = 0$$
$$\hat{n}\times(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \Leftrightarrow \vec{E}_{2\parallel} = \vec{E}_{1\parallel}$$
$$\vec{H}_{2\parallel} - \vec{H}_{1\parallel} = \vec{K}_f \times \hat{n}$$

Για γραμμικά υλικά $(\vec{D} = \epsilon\vec{E}\,,\ \vec{H} = \frac{1}{\mu}\vec{B})$ οι Σ.Σ. είναι

$$\epsilon_2 E_{2\perp} - \epsilon_1 E_{1\perp} = \sigma_f$$
$$B_{1\perp} = B_{2\perp}$$
$$\vec{E}_{1\parallel} = \vec{E}_{2\parallel}$$
$$\frac{1}{\mu_2}\vec{B}_{2\parallel} - \frac{1}{\mu_1}\vec{B}_{1\parallel} = \vec{K}_f \times \hat{n}$$

Σε σχέση με τα $\vec{E}, \vec{B}$ οι γενικές Σ.Σ. του ηλεκτρομαγνητισμού είναι

$$\left.\begin{aligned} E_{2\perp} - E_{1\perp} &= \frac{\sigma}{\epsilon_0} \\ \vec{E}_{1\parallel} &= \vec{E}_{2\parallel} \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{n}$$

$$\left.\begin{aligned} B_{1\perp} &= B_{2\perp} \\ \vec{B}_{2\parallel} - \vec{B}_{1\parallel} &= \mu_0 \vec{K}\times\hat{n} \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0(\vec{K}\times\hat{n})$$

Από τις εξισώσεις Maxwell προκύπτουν οι εξής εξισώσεις για τα $\vec{E}, \vec{B}$:

$$\underline{\nabla^2\vec{E} - \epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0}\nabla\rho + \mu_0\frac{\partial\vec{J}}{\partial t}}\ ,\quad \underline{\nabla^2\vec{B} - \epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = -\mu_0\nabla\times\vec{J}}$$

διότι $\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \nabla\times(\nabla\times\vec{E}) = -\nabla\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \nabla(\nabla\cdot\vec{E}) - \nabla^2\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\vec{B}) \Rightarrow$

$$\nabla\left(\frac{\rho}{\epsilon_0}\right) - \nabla^2\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0\vec{J} + \epsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) \Rightarrow \nabla^2\vec{E} - \epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0}\nabla\rho + \mu_0\frac{\partial\vec{J}}{\partial t}$$

και

$$\nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \epsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \nabla\times(\nabla\times\vec{B}) = \mu_0\nabla\times\vec{J} + \epsilon_0\mu_0\nabla\times\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \nabla(\nabla\cdot\vec{B}) - \nabla^2\vec{B} = \mu_0\nabla\times\vec{J} + \epsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\vec{E}$$

$$\Rightarrow \nabla^2\vec{B} - \epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = -\mu_0\nabla\times\vec{J}$$