



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

Φυσική II

Σημειώσεις – Μαγνητοστατική II

Κοφινάς Γιώργος

Τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών και Επικοινωνιακών Συστημάτων



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

αφού $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ \vec{A} "διαυσματικό δυναμικό"
 αφού $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, άρα $\exists \vec{A} : \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ (τοπικά) (σε αναλογία με το $\nabla \times \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{E} = -\nabla \psi$)

$$\nabla^2 \vec{A} - \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) = -\mu_0 \vec{j}$$

αφού $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \Leftrightarrow \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{j} \Leftrightarrow \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{j}$

Ο μετασχηματισμός $\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \nabla \psi(\vec{r})$ δίνει το ίδιο \vec{B} , δηλαδή $\vec{B}' = \nabla \times \vec{A}' = \nabla \times \vec{A} + \nabla \times \nabla \psi = \nabla \times \vec{A} + 0 = \vec{B}$ και λέγεται μετασχηματισμός βαθμίδας (gauge transformation). Λόγω αυτού μπορούμε να επιλέξουμε το $\nabla \cdot \vec{A}$ να είναι οποιαδήποτε συνάρτηση θέλουμε, αφού αν έχουμε ένα αρχικό δυναμικό \vec{A}_0 αρκεί να λύσουμε την εξίσωση Poisson $\nabla^2 \psi = \nabla \cdot \vec{A} - \nabla \cdot \vec{A}_0$. Δηλαδή, ενώ η εξίσωση $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ καθορίζει το curl του \vec{A} , ωστόσο δεν λέει τίποτα για το div του \vec{A} . Επίσης η παραπάνω 2^η τάξης διαφορική εξίσωση για το \vec{A} παραμένει αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας αφού $\nabla^2 \vec{A}' - \nabla(\nabla \cdot \vec{A}') = \nabla^2 \vec{A} + \nabla^2(\nabla \psi) - \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla(\nabla^2 \psi) = \nabla^2 \vec{A} - \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) = -\mu_0 \vec{j}$, άρα πράγματι το $\nabla \cdot \vec{A}$ παραμένει ελεύθερο να γίνει οτιδήποτε.

Η επιλογή $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ λέγεται βαθμίδα Coulomb, οπότε τότε $\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$.

$$\text{Είναι } \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{R})}{|\vec{r} - \vec{R}|} dV + \nabla \psi(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{r'} d^3 r' + \nabla \psi(\vec{r})$$

$$\text{διότι δείξαμε ότι } \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \int \frac{\vec{j}(\vec{R})}{|\vec{r} - \vec{R}|} dV = \nabla \times \vec{A}$$

Για πεπερασμένη κατανομή ρεύματος στον άπειρο χώρο στη βαθμίδα Coulomb είναι $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{R})}{|\vec{r} - \vec{R}|} dV = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{r'} d^3 r'$ (τυπικά $\vec{A} \parallel \vec{j}$).

$$\begin{aligned} \text{Πράγματι, είναι } \nabla \cdot \vec{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla \cdot \frac{1}{|\vec{r} - \vec{R}|} \cdot \vec{j}(\vec{R}) dV = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla_R \frac{1}{|\vec{r} - \vec{R}|} \cdot \vec{j}(\vec{R}) dV = \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla_R \cdot \frac{\vec{j}(\vec{R})}{|\vec{r} - \vec{R}|} dV + \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\nabla_R \cdot \vec{j}(\vec{R})}{|\vec{r} - \vec{R}|} dV = -\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S_\infty} \frac{\vec{j}(\vec{R})}{|\vec{r} - \vec{R}|} \cdot d\vec{a} + 0 = 0, \text{ άρα} \\ \nabla^2 \psi = 0 &\Rightarrow \psi = \text{σταθ} \text{ (αν δεν υπάρχουν πηγές στο άπειρο)}. \text{ Το ίδιο προκύπτει και από} \\ \text{την } \nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j} &\text{ και επειδή } \nabla^2 f = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow f(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV \frac{\rho(\vec{R})}{|\vec{r} - \vec{R}|}, \text{ άρα } \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV \frac{\vec{j}(\vec{R})}{|\vec{r} - \vec{R}|}. \end{aligned}$$

Για επιφανειακά ή γραμμικά ρεύματα που είναι πεπερασμένα έχουμε

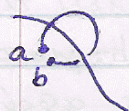
$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\vec{K}(\vec{R})}{|\vec{r} - \vec{R}|} da = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\vec{K}(\vec{r}')}{r'} da, \quad \vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{d\vec{l}}{|\vec{r} - \vec{R}|} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{d\vec{l}}{r'}$$

Σε σχέση με το \vec{A} , η ροή του \vec{B} γράφεται $\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{a} = \int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{a} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}$

Αν $\vec{j}=0$, δηλαδή στις περιοχές εκτός των ρευμάτων είναι $\vec{B} = -\nabla\phi_m$ (ϕ_m "μαγνητικό βαθμωτό δυναμικό"), αφού $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} = 0$.
Εξάλλου $\nabla^2 \phi_m = 0$, αφού $\nabla \cdot \vec{B} = -\nabla^2 \phi_m = 0$.

Σημειώνουμε ότι το αντιστοιχείο ηλεκτρικό δυναμικό ϕ υπάρχει και παρουσία πηγών. Επίσης το δυναμικό ϕ_m είναι μαθηματική ποσότητα και δεν σχετίζεται με δυναμική ενέργεια όπως στην περίπτωση του ϕ . Μια ενδιαφέρουσα παρατήρηση είναι ότι το ϕ_m δεν είναι εν γένει μονότιμη συνάρτηση, αφού

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I \Leftrightarrow - \oint_C \nabla \phi_m \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I \Leftrightarrow \oint_C d\phi_m = -\mu_0 I$$



$$\phi_m(a) \neq \phi_m(b)$$

(στη μία πλευρά του σύρματος ή στην άλλη - απλά συνεκτική περιοχή - μπορεί να χρησιμοποιηθεί το ϕ_m)

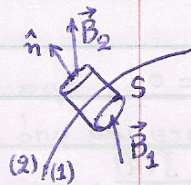
Αν μια επιφάνεια με κάθετο \hat{n} έχει επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος \vec{K} τότε για το μαγνητικό πεδίο \vec{B}_1, \vec{B}_2 εκατέρωθεν της επιφάνειας ισχύει

$$(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \hat{n} = B_{2\perp} - B_{1\perp} = 0 \quad \hat{n}: \text{από το (1) στο (2)}$$

$$(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \frac{\vec{K}}{K} = 0, \quad (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \frac{\vec{K} \times \hat{n}}{|\vec{K} \times \hat{n}|} = \mu_0 K,$$

δηλαδή η παράλληλη στο ρεύμα συνιστώσα του \vec{B} είναι συνεχής, ενώ η παράλληλη στην επιφάνεια και κάθετη στο ρεύμα είναι ασυνεχής.

Όλες οι συνθήκες μαζί γράφονται $\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 (\vec{K} \times \hat{n})$



Επίσης $\vec{A}_1 = \vec{A}_2$, $\frac{\partial \vec{A}_2}{\partial n} - \frac{\partial \vec{A}_1}{\partial n} = -\mu_0 \vec{K}$ στη βαθμίδα Coulomb

Θεωρούμε τον κύλινδρο και εφαρμόσουμε το ν. Gauss

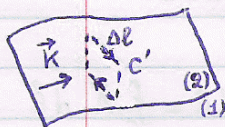
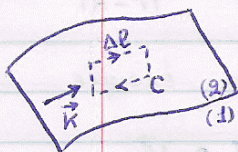
$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{B}_2 \cdot \hat{n} \Delta a + \vec{B}_1 \cdot (-\hat{n}) \Delta a = 0 \Leftrightarrow (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \hat{n} = 0$$

$$\int_V \nabla \cdot \vec{A} dV = 0 \Rightarrow \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{a} = 0 \Rightarrow \vec{A}_2 \cdot \hat{n} \Delta a + \vec{A}_1 \cdot (-\hat{n}) \Delta a = 0 \Rightarrow (\vec{A}_2 - \vec{A}_1) \cdot \hat{n} = A_{2\perp} - A_{1\perp} = 0$$

Θεωρούμε το βρόγχο C παράλληλα στο \vec{K} που τέμνει την επιφάνεια και εφαρμόσουμε το ν. Ampère

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 0 \Leftrightarrow B_{2\parallel} \Delta \ell + B_{1\parallel} (-\Delta \ell) = 0 \Leftrightarrow B_{2\parallel} = B_{1\parallel}$$

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{a} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = 0 \Rightarrow A_{2\parallel} \Delta \ell + A_{1\parallel} (-\Delta \ell) = 0 \Rightarrow A_{1\parallel} = A_{2\parallel}$$



Αν ο βρόγχος C' είναι κάθετος στο \vec{K} τότε

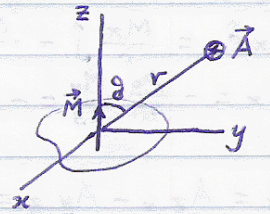
$$\oint_{C'} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 K \Delta \ell \Leftrightarrow B_{2\parallel} \Delta \ell + B_{1\parallel} (-\Delta \ell) = \mu_0 K \Delta \ell \Leftrightarrow B_{2\parallel} - B_{1\parallel} = \mu_0 K$$

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{a} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow A_{11} = A_{21}$$

Για ένα μαγνητικό δίπολο $\vec{M} = M\hat{z}$ ισχύει για αποστάσεις πολύ μεγαλύτερες από το μέγεθος του βρόχου (για στατικό ρεύμα):

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{M} \times \hat{e}_r}{r^2}, \quad A = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{M \sin\theta}{r^2}$$

$$B_r = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2M \cos\theta}{r^3}, \quad B_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{M \sin\theta}{r^3}, \quad B_\phi = 0 \Leftrightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{M} \cdot \hat{e}_r)\hat{e}_r - \vec{M}}{r^3}$$



Έστω ότι ο βρόχος του ρεύματος βρίσκεται στο επίπεδο xy και το θεωρούμενο σημείο P στο επίπεδο yz.

Είναι $\vec{A}(0, y, z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{l}}{r'}$. Είναι $dl_z = 0 \Rightarrow A_z = 0$.

Θεωρούμε τα $d\vec{l}, d\vec{l}'$ με $dly = -dly'$,

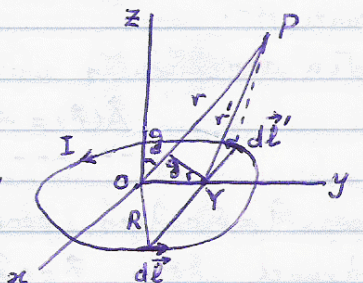
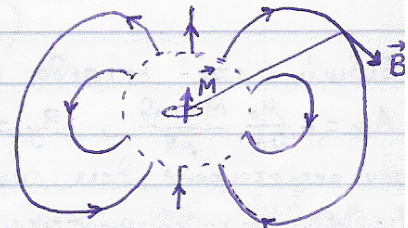
οπότε $A_y = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{dly}{r'} = 0$.

Απομένει το $A_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{dX}{r'}$

Είναι $r' \approx r - Y \sin\theta$ αφού τα \vec{r}, \vec{r}' σχεδόν παράλληλα,

άρα $r' \approx r(1 - \frac{Y}{r} \sin\theta) \Rightarrow \frac{1}{r'} \approx \frac{1}{r} (1 - \frac{Y}{r} \sin\theta)^{-1} \approx \frac{1}{r} (1 + \frac{Y}{r} \sin\theta)$

Άρα $A_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \left(\oint dX + \frac{\sin\theta}{r} \oint Y dX \right) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \left(0 + \frac{\sin\theta}{r} S \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{M \sin\theta}{r^2}$



Το μαγνητικό πεδίο υπολογίζεται από $\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \frac{\vec{M} \times \hat{e}_r}{r^2}$.

Είναι $\nabla \times \frac{\vec{M} \times \hat{e}_r}{r^2} = \nabla \left(\frac{1}{r^3} \right) \times (\vec{M} \times \vec{r}) + \frac{1}{r^3} \nabla \times (\vec{M} \times \vec{r}) = -\frac{3}{r^5} \vec{r} \times (\vec{M} \times \vec{r}) + \frac{1}{r^3} [\vec{M}(\nabla \cdot \vec{r}) - (\vec{M} \cdot \nabla)\vec{r}]$

διότι $\nabla \times (\psi \vec{a}) = \nabla \psi \times \vec{a} + \psi \nabla \times \vec{a}$, $\nabla \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a}(\nabla \cdot \vec{b}) - \vec{b}(\nabla \cdot \vec{a}) + (\vec{b} \cdot \nabla)\vec{a} - (\vec{a} \cdot \nabla)\vec{b}$,

άρα $\nabla \times \frac{\vec{M} \times \hat{e}_r}{r^2} = -\frac{3}{r^5} [(\vec{r} \cdot \vec{r})\vec{M} - (\vec{r} \cdot \vec{M})\vec{r}] + \frac{1}{r^3} (3\vec{M} - \vec{M}) = -\frac{3}{r^5} [r^2 \vec{M} - (\vec{r} \cdot \vec{M})\vec{r}] + \frac{2}{r^3} \vec{M} = \frac{3}{r^5} (\vec{r} \cdot \vec{M})\vec{r} - \frac{1}{r^3} \vec{M} = \frac{1}{r^3} [3(\vec{M} \cdot \hat{e}_r)\hat{e}_r - \vec{M}]$

Εξάλλου

$\vec{M} = a\hat{e}_r + b\hat{e}_\theta \Rightarrow a = \vec{M} \cdot \hat{e}_r = M \cos\theta, \quad b = \vec{M} \cdot \hat{e}_\theta = -M \sin\theta$,

άρα $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} (3M \cos\theta \hat{e}_r - M \cos\theta \hat{e}_r + M \sin\theta \hat{e}_\theta) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} (2M \cos\theta \hat{e}_r + M \sin\theta \hat{e}_\theta)$

Αν και η έκφραση \vec{B} έχει την ίδια μορφή με το ηλεκτρικό πεδίο του ηλεκτρικού διπόλου (για $\frac{\mu_0 \vec{M}}{4\pi} \leftrightarrow \frac{\vec{P}}{4\pi \epsilon_0}$), ωστόσο κοντά στο μαγνητικό δίπολο το πεδίο είναι πολύ διαφορετικό απ' ό,τι κοντά στο ηλεκτρικό δίπολο.

Στο εσωτερικό το \vec{B} κατευθύνεται προς τα πάνω λόγω των κλειστών γραμμών, ενώ το αντίστοιχο \vec{E} είναι προς τα κάτω.

Για μικρές αποστάσεις το πεδίο του μαγνητικού διπόλου δεν δίνεται από την παραπάνω διπολική έκφραση, αλλά περιέχει πολλές πολυπολικές ροπές.

Μπορούμε να βρούμε και τις καρτεσιανές συντεταγμένες των \vec{A}, \vec{B} .

Είναι $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $\sin\theta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{r}$, $\vec{M} = M\hat{k}$, $\hat{e}_r = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{x}{r}\hat{i} + \frac{y}{r}\hat{j} + \frac{z}{r}\hat{k}$

$$\vec{M} \times \hat{e}_r = \frac{Mx}{r}\hat{j} - \frac{My}{r}\hat{i}$$

$$A_x = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{My}{r^3} = -\frac{\mu_0 M}{4\pi} \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \quad A_y = \frac{\mu_0 Mx}{4\pi r^3} = \frac{\mu_0 M}{4\pi} \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \quad A_z = 0$$

$$B_x = A_{z,y} - A_{y,z} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3Mxz}{r^5}, \quad B_y = A_{x,z} - A_{z,x} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3Myz}{r^5}$$

$$B_z = A_{y,x} - A_{x,y} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{M(3z^2 - r^2)}{r^5}$$

Ειδικά στο επίπεδο yz είναι $x=0$, $y=r\sin\theta$, $z=r\cos\theta$, άρα

$$A_x = -\frac{\mu_0 M \sin\theta}{4\pi r^2}, \quad B_y = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3M \sin\theta \cos\theta}{r^3}, \quad B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{M(3\cos^2\theta - 1)}{r^3}$$

που αντιστοιχούν στις εκφράσεις E_y, E_z του ηλεκτρικού διπόλου.

Το βαθμωτό δυναμικό του μαγνητικού διπόλου είναι $\Phi_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{M \cos\theta}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{M} \cdot \hat{e}_r}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{M} \cdot \vec{r}}{r^3}$ αφού $\vec{B} = -\nabla\Phi_m$.

Για πεπερασμένη κατανομή στάσιμων ρευμάτων ισχύει

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{M} \times \vec{r}}{r^3} + \dots$$

όπου \vec{M} = διπολική ροπή.

Πράγματι, έστω $\vec{r} = r\hat{z}$. Είναι $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{R})}{|\vec{r} - \vec{R}|} dV$,

όπου

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{R}|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos\theta}} = \frac{1}{r} + \frac{R}{r^2} \cos\theta + \dots = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{R}}{r^3} + \dots, \quad \text{άρα}$$

$$A_i(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \int j_i(\vec{R}) dV + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \int j_i(\vec{R}) \vec{R} dV + \dots$$

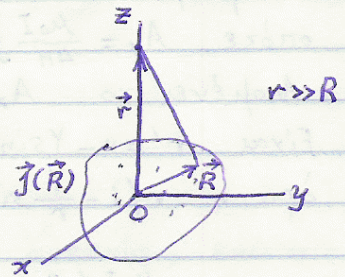
Αλλά για εντοπισμένα στάσιμα ρεύματα έχουμε δείξει ότι

$$\int \vec{J}(\vec{R}) dV = 0, \quad \vec{r} \cdot \int \vec{R} j_i dV = -(\vec{r} \times \vec{M})_i$$

Επομένως,

$$\vec{A}(\vec{r}) = 0 - \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{r} \times \vec{M}}{r^3} + \dots$$

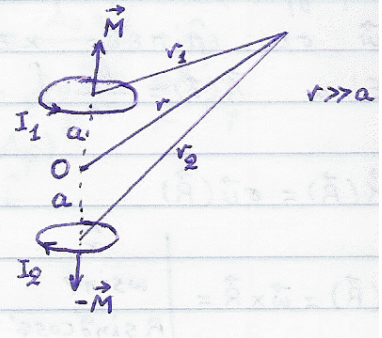
Δηλαδή ο πρώτος όρος είναι μηδενικός και αυτό οφείλεται στην μη-ύπαρξη μαγνητικών μονοπόλων, ενώ ο πρώτος μη-μηδενικός όρος αντιστοιχεί στη μαγνητική διπολική ροπή.



Παράδειγμα Μαγνητικό πεδίο μαγνητικού τετραπόλου.

Σύστημα δύο βρόχων που διαρρέονται από ίσα και αντίθετα ρεύματα, άρα $\vec{M}_1 = \vec{M}$, $\vec{M}_2 = -\vec{M}$, $\vec{M}_1 + \vec{M}_2 = 0$, δηλαδή δεν υπάρχει διπολική ροπή.

Το βαθμωτό δυναμικό ενός μαγνητικού διπόλου είναι $\phi_m^{(dip)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{M} \cdot \vec{r}}{r^3}$, άρα για το μαγνητικό τετράπολο είναι $\phi_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{\vec{M}_1 \cdot \vec{r}_1}{r_1^3} + \frac{\vec{M}_2 \cdot \vec{r}_2}{r_2^3} \right)$



$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{M} \cdot \left(\frac{\vec{r}_1}{r_1^3} - \frac{\vec{r}_2}{r_2^3} \right)$$

Είναι

$$\vec{r}_1 = \vec{r} - \vec{a}, \quad \vec{r}_2 = \vec{r} + \vec{a}, \quad \vec{a} = a \hat{k}$$

άρα $r_1^2 = r^2 + a^2 - 2ra \cos\theta$, $r_2^2 = r^2 + a^2 + 2ra \cos\theta$

$$\frac{1}{r_1^3} = \frac{1}{r^3} \left(1 - \frac{2a}{r} \cos\theta + \frac{a^2}{r^2} \right)^{-3/2} = \frac{1}{r^3} \left(1 + \frac{3a}{r} \cos\theta + \dots \right)$$

$$\frac{1}{r_2^3} = \frac{1}{r^3} \left(1 - \frac{3a}{r} \cos\theta + \dots \right)$$

$$\frac{\vec{r}_1}{r_1^3} - \frac{\vec{r}_2}{r_2^3} = \frac{\vec{r} - \vec{a}}{r^3} \left(1 + \frac{3a}{r} \cos\theta + \dots \right) - \frac{\vec{r} + \vec{a}}{r^3} \left(1 - \frac{3a}{r} \cos\theta + \dots \right) = -\frac{2\vec{a}}{r^3} + \frac{6a\vec{r}}{r^4} \cos\theta + \dots$$

$$\phi_m = \frac{2\mu_0}{4\pi r^3} \left(-\vec{M} \cdot \vec{a} + 3a \frac{\vec{M} \cdot \vec{r}}{r} \cos\theta \right) = \frac{2\mu_0}{4\pi r^3} \left(-Ma + 3a M \cos^2\theta \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2Ma}{r^3} (3\cos^2\theta - 1)$$

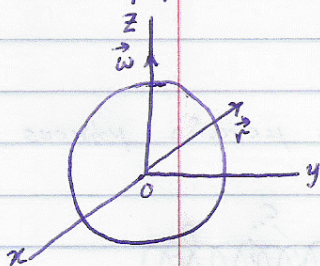
Η ποσότητα $M(2a)$ είναι η ροπή μαγνητικού τετραπόλου. Το παραπάνω δυναμικό του μαγνητικού τετραπόλου αντιστοιχεί στο δυναμικό ηλεκτρικού τετραπόλου $\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{2r^3} (3\cos^2\theta - 1)$.

Το μαγνητικό πεδίο του μαγνητικού τετραπόλου είναι

$$\vec{B} = -\nabla \phi_m \Rightarrow B_r = -\frac{\partial \phi_m}{\partial r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{6Ma}{r^4} (3\cos^2\theta - 1)$$

$$B_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi_m}{\partial \theta} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{12Ma}{r^4} \sin\theta \cos\theta$$

Παράδειγμα Σφαιρικές φλοίες ακτίνας R με ομοιόμορφη επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$.



Είναι

$$\vec{A}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\mu_0 R \sigma}{3} \vec{\omega} \times \vec{r}, & r \leq R \\ \frac{\mu_0 R^4 \sigma}{3r^3} \vec{\omega} \times \vec{r}, & r \geq R \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{A}(r, \theta, \varphi) = \begin{cases} \frac{\mu_0 R \omega \sigma}{3} r \sin\theta \hat{e}_\varphi, & r \leq R \\ \frac{\mu_0 R^4 \omega \sigma}{3} \frac{\sin\theta}{r^2} \hat{e}_\varphi, & r \geq R \end{cases}$$

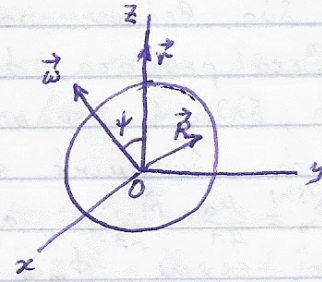
$$\vec{B}_{in} = \frac{2}{3} \mu_0 \sigma R \vec{\omega} \text{ (ομογενές)}, \quad \vec{B}_{out} = \frac{\mu_0 R^4 \omega \sigma}{3r^3} (2\cos\theta \hat{e}_r + \sin\theta \hat{e}_\theta)$$

Πράγματι, θεωρούμε τελείως γενικά το \vec{r} να είναι στον άξονα z και το $\vec{\omega}$ στο επίπεδο xz με $(\vec{\omega}, \hat{z}) = \psi$.

Είναι $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\vec{K}(\vec{R})}{|\vec{r} - \vec{R}|} da$, όπου

$$\vec{K}(\vec{R}) = \sigma \vec{v}(\vec{R})$$

$$\vec{v}(\vec{R}) = \vec{\omega} \times \vec{R} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \omega \sin \psi & 0 & \omega \cos \psi \\ R \sin \theta' \cos \phi' & R \sin \theta' \sin \phi' & R \cos \theta' \end{vmatrix}$$



$$= \omega R [-\sin \theta' \sin \phi' \cos \psi \hat{x} + (\sin \theta' \cos \phi' \cos \psi - \cos \theta' \sin \psi) \hat{y} + \sin \theta' \sin \phi' \sin \psi \hat{z}]$$

$$|\vec{r} - \vec{R}| = \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta'}, \quad da = R^2 \sin \theta' d\theta' d\phi'$$

Άρα

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sigma R^2 \int_0^\pi d\theta' \frac{\sin \theta'}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta'}} \int_0^{2\pi} d\phi' \vec{v}(\vec{R})$$

και επειδή $\int_0^{2\pi} \sin \phi' d\phi' = \int_0^{2\pi} \cos \phi' d\phi' = 0$, άρα

$$\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 \omega}{2} \sigma R^3 \sin \psi \int_0^\pi d\theta' \frac{\sin \theta' \cos \theta'}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta'}} \hat{y}$$

$$\text{Είναι } \int_0^\pi d\theta' \frac{\sin \theta' \cos \theta'}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta'}} \stackrel{u = \cos \theta'}{=} \int_{-1}^1 \frac{u du}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rRu}} = -\frac{r^2 + R^2 + rRu}{3r^2 R^2} \sqrt{r^2 + R^2 - 2rRu} \Big|_{-1}^1$$

$$= \frac{1}{3r^2 R^2} [(r^2 + R^2 - rR)(r+R) - (r^2 + R^2 + rR)|r-R|] = \begin{cases} \frac{2r}{3R^2}, & r \leq R \\ \frac{2R}{3r^2}, & r \geq R \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 \omega \sigma R^3 \sin \psi}{2} \hat{y} \begin{cases} \frac{2r}{3R^2}, & r \leq R \\ \frac{2R}{3r^2}, & r \geq R \end{cases} \quad \text{και επειδή } \vec{\omega} \times \vec{r} = -\omega r \sin \psi \hat{y}, \text{ άρα}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\mu_0 R \sigma}{3} \vec{\omega} \times \vec{r}, & r \leq R \\ \frac{\mu_0 R^4 \sigma}{3 r^3} \vec{\omega} \times \vec{r}, & r \geq R \end{cases}$$

$$\text{Είναι } \vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \hat{e}_r \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\phi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right] + \hat{e}_\theta \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \right] + \hat{e}_\phi \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right]$$

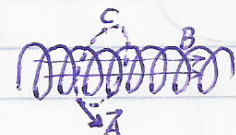
$$= \hat{e}_r \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\phi) - \hat{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi)$$

Για $r \leq R$, $\vec{B} = \frac{2}{3} \mu_0 R \omega \sigma (\cos \theta \hat{e}_r - \sin \theta \hat{e}_\theta) = \frac{2}{3} \mu_0 R \omega \sigma \hat{k} = \frac{2}{3} \mu_0 R \sigma \vec{\omega}$

Για $r \geq R$, $\vec{B} = \frac{\mu_0 R^4 \sigma \omega}{3 r^3} (2 \cos \theta \hat{e}_r + \sin \theta \hat{e}_\theta)$

Παράδειγμα Άπειρο σωληνοειδές αυτίνας R με n σπείρες ανά μονάδα μήκους διαρρέεται από ρεύμα I .

Είναι $\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{a}$. Αν C είναι ορόκεντρος κύκλος στο σωληνοειδές, το \vec{A} είναι εφαπτόμενο



στην καμπύλη C (δηλαδή παράλληλη στο ρεύμα).

$$\text{Για } r \leq R \text{ είναι } A \cdot 2\pi r = B \pi r^2 = \mu_0 I n \pi r^2 \Rightarrow \vec{A}_{in} = \frac{\mu_0 n I}{2} r \hat{e}_\varphi$$

$$\text{Για } r \geq R \text{ είναι } A \cdot 2\pi r = B \pi R^2 = \mu_0 I n \pi R^2 \Rightarrow \vec{A}_{out} = \frac{\mu_0 n I}{2} \frac{R^2}{r} \hat{e}_\varphi$$

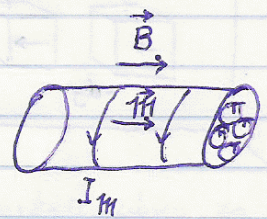
Σε κυλινδρικές συρροζαφένες είναι $\nabla \times \vec{A} = \hat{k} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi)$.

$$\text{Άρα πράγματι } \vec{B}_{in} = \nabla \times \vec{A}_{in} = \hat{k} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\mu_0 n I}{2} r^2 \right) = \mu_0 n I \hat{k}$$

$$\text{και } \vec{B}_{out} = \nabla \times \vec{A}_{out} = \hat{k} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\mu_0 n I}{2} R^2 \right) = 0.$$

Μαγνητικά πεδία στην ύλη

Η παρουσία εξωτερικού μαγνητικού πεδίου μαγνητίζει κάποια υλικά, δηλαδή τα άτομα ή τα μόρια του γίνονται μαγνητικά δίπολα, όπου η διπολική ροπή (όπως και η στροφορμή) εκτελεί μεζάπτωση γύρω από τη διεύθυνση του τοπικού \vec{B} και επομένως μπορούμε να λέμε ότι τα μαγνητικά δίπολα προσανατολίζονται παράλληλα (παραμαγνητισμός) ή αντιαπαράλληλα (διαμαγνητισμός) στο \vec{B} . Η μαγνήτιση προκαλεί την εμφάνιση καθαρού "παχυνμένου" ρεύματος στην επιφάνεια του υλικού με ένταση ρεύματος ανά μονάδα μήκους κάθετου στο ρεύμα I_M . Έτσι το κομμάτι της ύλης γίνεται ένα μεγάλο μαγνητικό δίπολο ή σωληνοειδές και τείνει να κινηθεί κατά τη φορά που αυξάνει το \vec{B} , $\vec{F} = \nabla(\vec{M} \cdot \vec{B})$



Το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί ένα μαγνητικά πολωμένο υλικό με μαγνήτιση \vec{M} ταυτίζεται με το πεδίο που δημιουργείται από μια "δέσμια" επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος $\vec{K}_M = \vec{M} \times \hat{n}$ (ρεύμα μαγνήτισης) στην επιφάνεια του υλικού συν μια "δέσμια" χωρική πυκνότητα ρεύματος $\vec{J}_M = \nabla \times \vec{M}$ στον όγκο του υλικού. Το \vec{J}_M είναι σταθερό αφού $\nabla \cdot \vec{J}_M = 0$.

Πράγματι, η μαγνητική διπολική ροπή σ' έναν όγκο dV του υλικού είναι $d\vec{M} = \vec{M} dV$, άρα το αντίστοιχο διανυσματικό δυναμικό $d\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\vec{M} \times (\vec{r} - \vec{R})}{|\vec{r} - \vec{R}|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{M} \times (\vec{r} - \vec{R})}{|\vec{r} - \vec{R}|^3} dV$

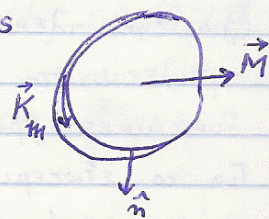
$$\Rightarrow \vec{A} = \int d\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{M} \times (\vec{r} - \vec{R})}{|\vec{r} - \vec{R}|^3} dV = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{M} \times \nabla_R \frac{1}{|\vec{r} - \vec{R}|} dV =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left(-\nabla_R \times \frac{\vec{M}}{|\vec{r} - \vec{R}|} + \frac{\nabla_R \times \vec{M}}{|\vec{r} - \vec{R}|} \right) dV = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{\vec{M} \times \hat{n}}{|\vec{r} - \vec{R}|} da + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\nabla_R \times \vec{M}}{|\vec{r} - \vec{R}|} dV$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{\vec{K}_M(\vec{R})}{|\vec{r} - \vec{R}|} da + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}_M(\vec{R})}{|\vec{r} - \vec{R}|} dV$$

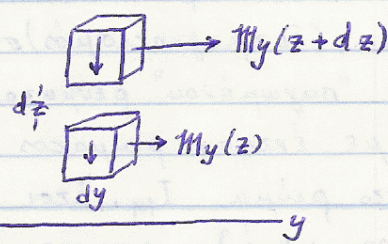
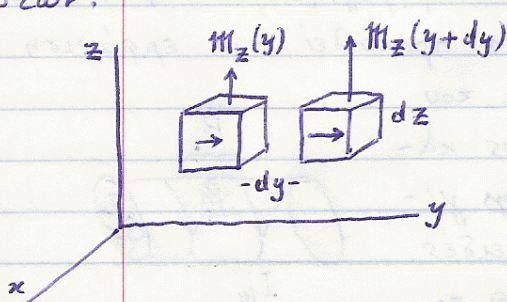
Το ίδιο αποτέλεσμα για την επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος \vec{K}_M μπορούμε να το πάρουμε αν θεωρήσουμε μια φέτα του υλικού πάχους l και διατομής S , οπότε

$$\begin{aligned} M(lS) &= \text{ολική μαγνητική διπολική ροπή} \\ &= I_M S = (K_M l) S \Rightarrow K_M = M \Rightarrow \vec{K}_M = \vec{M} \times \hat{n} \end{aligned}$$



Το "δέσμιο" ρεύμα I_M έχει το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό ότι δεν υπάρχει φορτίο που να διατρέχει ολόκληρη τη διαδρομή του ρεύματος.

Το αποτέλεσμα για το κυρτικό ρεύμα \vec{j}_m προκύπτει όταν η μαγνήτιση του υλικού είναι ανομοιογενής οπότε τα εσωτερικά ρεύματα δεν αλληλοεξουδετερώνονται. Θεωρούμε δύο πολύ γειτονικά τεμάχια του μαγνητικού υλικού και βρίσκουμε τα ρεύματα στην μεταξύ τους περιοχή. Το ρεύμα μπορεί να είναι συνδυασμός των δύο παραπάνω περιπτώσεων.



$$I_x = M_z(y+dy)dz - M_z(y)dz$$

$$= \frac{\partial M_z}{\partial y} dz dy$$

$$= (j_m)_x dz dy \Rightarrow (j_m)_x = \frac{\partial M_z}{\partial y}$$

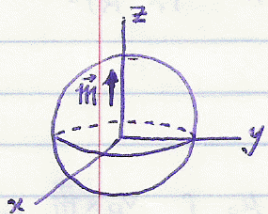
$$I_x = -M_y(z+dz)dy + M_y(z)dy$$

$$= -\frac{\partial M_y}{\partial z} dz dy$$

$$= (j_m)_x dz dy \Rightarrow (j_m)_x = -\frac{\partial M_y}{\partial z}$$

Τελικά $(j_m)_x = \frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z} \Rightarrow \vec{j}_m = \nabla \times \vec{M}$

Παράδειγμα Πεδίο ομοιόμορφα μαγνητισμένης σφαίρας ακτίνας R και μαγνήτισης $\vec{M} = M\hat{z}$.



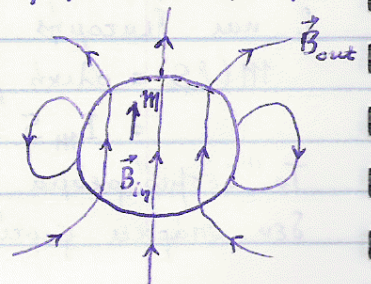
Η επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος είναι $\vec{K}_m = \vec{M} \times \hat{n} = M \sin\theta \hat{e}_\phi$ ενώ $\vec{j}_m = \nabla \times \vec{M} = 0$.

Αν θεωρήσουμε έναν περιστρεφόμενο σφαιρικό φλοιό με ομοιόμορφη επιφανειακή πυκνότητα φορτίου $\sigma = \frac{M}{\omega R}$ που περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega} = \omega\hat{z}$ τότε η

προκύπτουσα επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος είναι $\vec{K} = \sigma\vec{v} = \sigma\omega R \sin\theta \hat{e}_\phi = M \sin\theta \hat{e}_\phi$. Επομένως, το μαγνητικό πεδίο της μαγνητισμένης σφαίρας είναι το ίδιο με εκείνο της περιστρεφόμενης σφαίρας.

Είναι $\vec{B}_{in} = \frac{2}{3}\mu_0 R\sigma\vec{\omega} = \frac{2}{3}\mu_0 M\hat{z} \Rightarrow \vec{B}_{in} = \frac{2}{3}\mu_0 \vec{M}$, δηλαδή ομογενές πεδίο (για την ηλεκτρικά πολωμένη σφαίρα $\vec{E}_{in} = -\frac{1}{3\epsilon_0}\vec{P}$, η διαφορά στο πρόσημο οφείλεται στο ότι το μαγνητικό πεδίο έχει κλειστές δυναμικές γραμμές).

Για το εξωτερικό ($r \geq R$) το μαγνητικό πεδίο της μαγνητισμένης σφαίρας είναι ίδιο με το πεδίο ενός μαγνητικού διπόλου $\vec{M} = \vec{M}V = \frac{4}{3}\pi R^3 \vec{M}$, άρα



$\vec{B}_{out} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{M} \cdot \hat{e}_r)\hat{e}_r - \vec{M}}{r^3} \Rightarrow \vec{B}_{out} = \frac{\mu_0 R^3}{3} \frac{3(\vec{M} \cdot \hat{e}_r)\hat{e}_r - \vec{M}}{r^3}$, δηλαδή για την σφαιρόμορφη μαγνητισμένη σφαίρα δεν υπάρχουν ανώτερα πολύπολα.

Ορισμός $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}$ "μαγνητικό πεδίο", $[H] = \frac{A}{m}$
(όπου \vec{B} είναι το μαγνητικό πεδίο μέσα στο μαγνητισμένο υλικό, τόσο το εξωτερικό όσο και αυτό που παράγεται από τη μαγνήτιση)

Ο νόμος του Ampère για τα μαγνητισμένα υλικά διατυπώνεται συναρτήσει του \vec{H} και του ελεύθερου ρεύματος

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_f$$

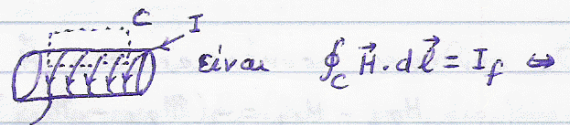
Διότι $\nabla \times \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} - \nabla \times \vec{M} = \vec{j} - \vec{j}_m = \vec{j}_f$.

Η παραπάνω διατύπωση είναι πολύ βολική διότι περιέχει μόνο το ελεύθερο ρεύμα το οποίο εν γένει έχουμε υπό έλεγχο, σε αντίθεση προς το δεσμικό ρεύμα που γεννιέται από τη μαγνήτιση και η οποία οφείλεται στο ελεύθερο ρεύμα.

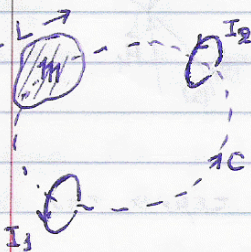
$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I_f \quad (\text{φορτίο που περνά μέσα από το βρόχο})$$

Διότι $\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_S (\nabla \times \vec{H}) \cdot d\vec{a} = \int_S \vec{j}_f \cdot d\vec{a} = I_f$

π.χ. για την καμπύλη C του σχήματος
 $HL = nLI = nLI \Rightarrow H = nI$

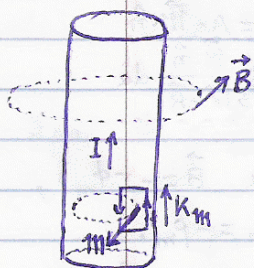


π.χ. $\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I_1 - I_2$



$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 (I_1 - I_2 + LK_m)$$

Παράδειγμα Μια διαμαγνητική ράβδος (π.χ. Cu) αυχίνας R διαρρέεται από (ελεύθερο) ρεύμα I.



Στα διαμαγνητικά υλικά τα μαγνητικά δίπολα προσανατολίζονται αντιπαράλληλα προς το μαγνητικό πεδίο, δηλ. $\vec{M} \parallel \vec{B}$.

Αν θεωρήσουμε έναν ομόκεντρο κύκλο C με αυχίνα $r \leq R$ είναι $\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I_f(r) \Leftrightarrow H 2\pi r = I \frac{r^2}{R^2} \Leftrightarrow H(r) = \frac{I r}{2\pi R^2} \Leftrightarrow$

$$\vec{H}_{in}(r) = \frac{I r}{2\pi R^2} \hat{e}_\phi$$

Αν $r \geq R$ τότε $\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_f \Leftrightarrow H 2\pi r = I \Leftrightarrow H(r) = \frac{I}{2\pi r} \Leftrightarrow \vec{H}_{out}(r) = \frac{I}{2\pi r} \hat{e}_\varphi$

Επιπλέον επειδή εκτός της ράβδου είναι $\vec{M} = 0$, άρα $\vec{B}_{out} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{e}_\varphi$ που είναι το ίδιο μαγνητικό πεδίο με εκείνο ενός ρεύματος που ρέει σε ένα μη-μαγνητισμένο σύρμα.

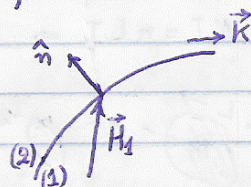
Παράδειγμα Έστω ένα μαγνητισμένο υλικό σε επαφή με ένα υλικό μέσα στο οποίο το μαγνητικό πεδίο είναι μηδέν. Η επιφανειακή πυκνότητα \vec{K}_f ελεύθερου ρεύματος στην επιφάνεια του μαγνητικού υλικού είναι $\vec{K}_f = \vec{H} \times \hat{n}$, όπου \hat{n} από το μαγνητικό υλικό προς το άλλο, διότι $\mu_0 \vec{K} \times \hat{n} = -\vec{B} \Rightarrow \mu_0 \vec{K}_f \times \hat{n} + \mu_0 \vec{K}_m \times \hat{n} = -\vec{B} \Rightarrow \mu_0 \vec{K}_f \times \hat{n} + \mu_0 (\vec{M} \times \hat{n}) \times \hat{n} = -\vec{B} \Rightarrow \mu_0 \vec{K}_f \times \hat{n} - \mu_0 \vec{M} + \mu_0 (\hat{n} \cdot \vec{M}) \hat{n} = -\vec{B} \Rightarrow \mu_0 \vec{K}_f \times \hat{n} + \mu_0 (\hat{n} \cdot \vec{M}) \hat{n} = -\mu_0 \vec{H} \Rightarrow \vec{K}_f \times \hat{n} + (\hat{n} \cdot \vec{M}) \hat{n} = -\vec{H} \Rightarrow \hat{n} \times (\vec{K}_f \times \hat{n}) = -\hat{n} \times \vec{H} \Rightarrow \vec{K}_f - (\hat{n} \cdot \vec{K}_f) \hat{n} = \vec{H} \times \hat{n}$ και προκύπτει η ζητούμενη αφού $\vec{K}_f \perp \hat{n}$

Παρά την ύπαρξη του παραπάνω νόμου Ampère για το \vec{H} , ωστόσο δεν υπάρχει νόμος Biot-Savart μεταξύ \vec{J}_f, \vec{H} , επίσης το \vec{H} έχει $\nabla \cdot \vec{H} = -\nabla \cdot \vec{M} \neq 0$ και άρα δεν υπάρχει διανυσματικό δυναμικό για το \vec{H} .

Οι συνθήκες ασυνέχειας του \vec{H} διαμέσου μιας επιφάνειας είναι

$$\underline{H_{2\perp} - H_{1\perp} = -(\vec{M}_{2\perp} - \vec{M}_{1\perp})}$$

$$\underline{\vec{H}_{2\parallel} - \vec{H}_{1\parallel} = \vec{K}_f \times \hat{n}} \quad \hat{n}: \text{ από το (1) στο (2)}$$



Η πρώτη προκύπτει από $B_{2\perp} = B_{1\perp}$.

Εξάλλου αν θεωρήσουμε βρόχο C παράλληλα στο \vec{K}_f που τέμνει την επιφάνεια

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0 \Leftrightarrow H_{2\parallel} \Delta l + H_{1\parallel} (-\Delta l) = 0 \Leftrightarrow H_{2\parallel} = H_{1\parallel}$$

Αν το C' είναι κάθετο στο \vec{K}_f ,

$$\oint_{C'} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \mu_0 K_f \Delta l \Leftrightarrow H_{2\parallel} \Delta l + H_{1\parallel} (-\Delta l) = \mu_0 K_f \Delta l \Leftrightarrow H_{2\parallel} - H_{1\parallel} = \mu_0 K_f.$$

$$\underline{\underline{\vec{J}_f = 0 \Rightarrow \mu_0 \vec{H} = -\nabla \phi_m, \quad \nabla^2 \phi_m = -\rho_m, \quad \rho_m = -\mu_0 \nabla \cdot \vec{M}, \quad \sigma_m = \mu_0 \vec{M} \cdot \hat{n}}}$$

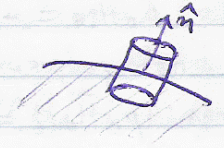
$$\underline{\underline{\phi_m(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\rho_m(\vec{R})}{|\vec{r} - \vec{R}|} dV + \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\sigma_m(\vec{R})}{|\vec{r} - \vec{R}|} da = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\nabla_R \cdot \vec{M}}{|\vec{r} - \vec{R}|} dV + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{\vec{M} \cdot \hat{n}}{|\vec{r} - \vec{R}|} da}}$$

Διότι $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_f = 0 \Rightarrow \mu_0 \vec{H} = -\nabla \phi_m$ (αφού για $\vec{M} = 0$ προκύπτει $\vec{B} = -\nabla \phi_m$), ενώ από $\nabla \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \mu_0 \nabla \cdot \vec{H} + \mu_0 \nabla \cdot \vec{M} = 0 \Rightarrow -\nabla^2 \phi_m - \rho_m = 0 \Rightarrow \nabla^2 \phi_m = -\rho_m$.

Η λύση ως προς ϕ_m σε αναλογία προς την εξίσωση Poisson στη ηλεκτροστα-

ζική είναι $\phi_m = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\rho_m(\vec{R})}{|\vec{r}-\vec{R}|} dV$. Όμως αν υπάρχουν συνοριακές επιφάνειες τότε ολοκληρώνουμε την ποσότητα ρ_m σε έναν κύλινδρο γύρω από τη συνοριακή επιφάνεια,

$$\int_V \rho_m dV = -\mu_0 \int_V \nabla \cdot \vec{M} dV \Leftrightarrow \sigma_m \Delta a = -\mu_0 \oint_S \vec{M} \cdot \hat{n} da$$



$$\Leftrightarrow \sigma_m \Delta a = \mu_0 \vec{M} \cdot \hat{n} \Delta a + 0 \Leftrightarrow \sigma_m = \mu_0 \vec{M} \cdot \hat{n}$$

άρα

$$\phi_m = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\rho_m(\vec{R})}{|\vec{r}-\vec{R}|} dV + \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\sigma_m(\vec{R})}{|\vec{r}-\vec{R}|} da$$

Η κατάσταση $\vec{j}_f = 0$, \vec{M} = δεδομένο αναφέρεται στα φερρομαγνητικά υλικά. Απουσία συνοριακών επιφανειών είναι

$$\begin{aligned} \phi_m(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi} \int_V dV \frac{\rho_m(\vec{R})}{|\vec{r}-\vec{R}|} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV \frac{\nabla_R \cdot \vec{M}(\vec{R})}{|\vec{r}-\vec{R}|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{M}(\vec{R}) \cdot \nabla_R \frac{1}{|\vec{r}-\vec{R}|} dV = \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{M}(\vec{R}) \cdot \nabla \frac{1}{|\vec{r}-\vec{R}|} dV = -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \cdot \int_V \frac{\vec{M}(\vec{R})}{|\vec{r}-\vec{R}|} dV \end{aligned}$$

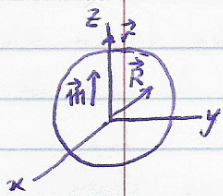
(η τελευταία αυτή σχέση ισχύει και παρουσία ασυνεχειών του \vec{M})

και για εντοπισμένο σώμα είναι

$$\phi_m(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \cdot \int_V \vec{M}(\vec{R}) dV + \dots = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{M} \cdot \vec{r}}{r^3} + \dots$$

δηλαδή ξεκινά από το βαθμωτό δυναμικό μαγνητικού διπόλου συν διορθώσεις. Η αναλογία προς το ηλεκτρικό δυναμικό $\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$ είναι υπό την αντιστοιχία $\frac{p}{4\pi\epsilon_0} \leftrightarrow \frac{\mu_0 M}{4\pi}$.

Παράδειγμα Θα μελετήσουμε το πεδίο της ομοιόμορφα μαγνητισμένης σφαιρας ακτίνας R και μαγνήτισης $\vec{M} = M \hat{z}$ μέσω του βαθμωτού δυναμικού ϕ_m .



Θα περιοριστούμε για απλότητα στην εύρεση του πεδίου στον άξονα z .

$$\text{Είναι } \phi_m(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\sigma_m(\vec{R})}{|\vec{r}-\vec{R}|} da, \text{ όπου}$$

$$\sigma_m = \mu_0 \vec{M} \cdot \hat{n} = \mu_0 M \cos\theta$$

$$da = 2\pi (R \sin\theta) (R d\theta) = 2\pi R^2 \sin\theta d\theta$$

$$|\vec{r}-\vec{R}| = \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos\theta}$$

$$\text{Άρα } \phi_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^\pi \frac{M \cos\theta}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos\theta}} 2\pi R^2 \sin\theta d\theta \stackrel{u = \cos\theta}{=} \mu_0 \frac{MR^2}{2} \int_{-1}^1 \frac{u du}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rRu}}$$

$$= \mu_0 \frac{MR^2}{2} \begin{cases} \frac{2r}{3R^2}, & r \leq R \\ \frac{2R}{3r^2}, & r \geq R \end{cases} = \begin{cases} \frac{\mu_0}{3} M r, & r \leq R \\ \frac{\mu_0}{3} \frac{MR^3}{r^2}, & r \geq R \end{cases}$$

Λόγω συμμετρίας, το μαγνητικό πεδίο στον άξονα \hat{z} είναι παράλληλο του \hat{z} , άρα $\mu_0 \vec{H} = -\nabla \phi_m = -\frac{\partial \phi_m}{\partial r} \hat{z}$

Άρα $\mu_0 \vec{H}_{in} = -\frac{\mu_0}{3} M \hat{z} \Rightarrow \vec{H}_{in} = -\frac{1}{3} \vec{M}$, $\vec{B}_{in} = \frac{2}{3} \mu_0 \vec{M}$ σε συμφωνία με την προηγούμενη μέθοδο.

Επίσης $\mu_0 \vec{H}_{out} = \frac{2\mu_0}{3} \frac{MR^3}{r^3} \hat{z} \Rightarrow \vec{H}_{out} = \frac{2R^3}{3r^3} \vec{M} = \frac{\vec{M}}{2\pi r^3}$, $\vec{B}_{out} = \frac{2\mu_0}{3} \frac{R^3}{r^3} \vec{M} = \frac{\mu_0}{2\pi r^3} \vec{M}$ πάλι σε συμφωνία με προηγούμενως.

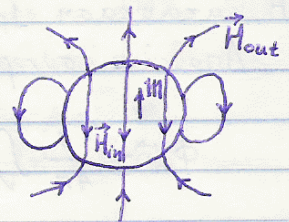
Για την γενική θέση \vec{r} μπορεί να δείξει ότι $\phi_m(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\mu_0}{3} M r \cos\theta, & r \leq R \\ \frac{\mu_0}{3} MR^3 \frac{\cos\theta}{r^2}, & r \geq R \end{cases}$

$$\text{άρα } \vec{H}_{in} = -\frac{1}{3} \vec{M}, \vec{B}_{in} = \frac{2\mu_0}{3} \vec{M}, \vec{H}_{out} = \frac{R^3}{3} \frac{3(\vec{M} \cdot \hat{e}_r) \hat{e}_r - \vec{M}}{r^3}, \vec{B}_{out} = \frac{\mu_0 R^3}{3} \frac{3(\vec{M} \cdot \hat{e}_r) \hat{e}_r - \vec{M}}{r^3}$$

Οι γραμμές του \vec{H} εκκινούν και τερματίζουν στην επιφάνεια που υπάρχει το σ_m .

Τα ίδια προκύπτουν και χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$\phi_m = -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \cdot \int_V \frac{\vec{M}(\vec{R})}{|\vec{r}-\vec{R}|} dV \text{ για το } \phi_m.$$



$$\vec{j}_f = 0 \Rightarrow \nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}_m \text{ στη βαθμίδα Coulomb}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}_m(\vec{R})}{|\vec{r}-\vec{R}|} dV + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{\vec{K}_m(\vec{R})}{|\vec{r}-\vec{R}|} da$$

Τις σχέσεις αυτές τις έχουμε ήδη παράξει. Όμως μπορούμε και ως εξής:

$$\text{Είναι } \nabla \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{j}_m + \vec{j}_f) = \mu_0 \vec{j}_m \Rightarrow \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{j}_m \Rightarrow \nabla^2 \vec{A} - \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) = -\mu_0 \vec{j}_m$$

και στη βαθμίδα Coulomb $\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}_m$ με λύση $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}_m(\vec{R})}{|\vec{r}-\vec{R}|} dV$.

Όμως αν υπάρχουν συνοριακές επιφάνειες τότε ολοκληρώνουμε την ποσότητα \vec{j}_m σε έναν κύλινδρο γύρω από τη συνοριακή επιφάνεια,

$$\int_V \vec{j}_m dV = \int_V \nabla \times \vec{M} dV = \oint_S \hat{n} \times \vec{M} da \Leftrightarrow \vec{K} \Delta a = (-\hat{n}) \times \vec{M} \Delta a$$

$$\Leftrightarrow \vec{K} = \vec{M} \times \hat{n} \Leftrightarrow \vec{K} = \vec{K}_m$$



$$\text{άρα } \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}_m}{|\vec{r}-\vec{R}|} dV + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{\vec{K}_m}{|\vec{r}-\vec{R}|} da.$$

Για τα λεγόμενα γραμμικά ^{μαγνητικά} υλικά ισχύει $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$ (δοθέντος ότι το \vec{H} δεν είναι πολύ ισχυρό), όπου \vec{H} είναι το ολικό πεδίο λόγω των ελεύθερων ρευμάτων και της μαγνήτισης και χ_m "μαγνητική επιδεκτικότητα" (αδιάστατος αριθμός, $|\chi_m| \sim 10^{-5}$). Η παραπάνω σχέση ισχύει για υλικά παραμαγνητικά (π.χ. Al, Ca, Mg, Cr, Li, O, ... με $\chi_m > 0$, $\vec{M} \uparrow \uparrow \vec{H}$) ή διαμαγνητικά (π.χ. Cu, Au, Pb, Hg, N, ... με $\chi_m < 0$, $\vec{M} \uparrow \downarrow \vec{H}$) στα οποία η μαγνήτιση στηρίζεται στην ύπαρξη του πεδίου, όταν το μαγνητικό πεδίο απομακρυνθεί, η μαγνήτιση εξαφανίζεται. Για τα σιδηρομαγνητικά ^(φερομαγνητικά) υλικά (π.χ. Fe, Ni, Co, ...) δεν ισχύει η παραπάνω σχέση.

$$\vec{B} = \mu \vec{H}, \quad \vec{M} = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1\right) \vec{H} = \frac{\chi_m}{\mu} \vec{B}, \quad \mu = \mu_0 (1 + \chi_m) \quad \text{"μαγνητική διαπερατότητα μέσου"}$$

$$\text{αφού } \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 (\vec{H} + \chi_m \vec{H}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} = \mu \vec{H}$$

Εν γένει είναι $\chi_m(\vec{r})$, $\mu(\vec{r})$, π.χ. με επαφή δύο ομογενών μαγνητικών υλικών. Για τα παραμαγνητικά υλικά ($\mu > \mu_0$) το μαγνητικό πεδίο B είναι μεγαλύτερο απ' ό,τι αν δεν υπήρχε το υλικό, ενώ για τα διαμαγνητικά μικρότερο. Για τα σιδηρομαγνητικά ($\mu \gg \mu_0$, $\frac{\mu}{\mu_0} \sim 10^3$) η σχέση $\vec{B} = \mu \vec{H}$ εξακολουθεί να ισχύει και ουσιαστικά ορίζει το μ .

$$\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H}, \quad \vec{M} = (\mu_r - 1) \vec{H}, \quad \mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} = 1 + \chi_m \quad \text{"σχετική μαγνητική διαπερατότητα"}$$

Επομένως, για γραμμικά μαγνητικά υλικά οι διάφορες εξισώσεις γράφονται συναρτήσει των μ, \vec{B}

$$\vec{K}_m = \left(\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu}\right) \vec{B} \times \hat{n}, \quad \vec{J}_m = \nabla \times \left[\left(\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu}\right) \vec{B}\right]$$

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \vec{B}\right) = \vec{J}_f, \quad \oint_C \frac{1}{\mu} \vec{B} \cdot d\vec{l} = I_f$$

$$B_{2\perp} = B_{1\perp}, \quad \frac{1}{\mu_2} B_{2\parallel} - \frac{1}{\mu_1} B_{1\parallel} = K_f \times \hat{n}$$

Συνεχίζει να είναι $\nabla \cdot \vec{H} = -\nabla \cdot \vec{M} \neq 0$ στα γραμμικά μαγνητικά υλικά, π.χ. για τον μικρό κύλινδρο S γύρω από τη συνοριακή επιφάνεια ενός μαγνητικού υλικού σε επαφή με το κενό είναι $\oint_S \vec{H} \cdot d\vec{a} = -\oint_S \vec{M} \cdot d\vec{a} \neq 0$.

Ομογενές ονομάζεται ένα μαγνητικό υλικό όταν τα χ_m, μ είναι σταθερά ανεξάρτητα της θέσης. Για τα ομογενή μαγνητικά υλικά είναι

$$\vec{K}_m = \left(\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu}\right) \vec{B} \times \hat{n}, \quad \vec{J}_m = \left(\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu}\right) \nabla \times \vec{B} = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1\right) \vec{J}_f = \chi_m \vec{J}_f$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu \vec{J}_f, \quad \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu I_f$$

$$B_{2\perp} = B_{1\perp}, \quad B_{2\parallel} - B_{1\parallel} = \mu K_f \times \hat{n}$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0, \quad \oint_S \vec{H} \cdot d\vec{a} = 0, \quad \vec{B} = \mu_r \vec{B}_{vac}$$

$$\text{διότι } \nabla \times \vec{B}_{\text{vac}} = \mu_0 \vec{j}_f \Rightarrow \nabla \times \vec{B}_{\text{vac}} = \frac{\mu_0}{\mu} \nabla \times \vec{B} \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu}{\mu_0} \vec{B}_{\text{vac}} \Rightarrow \vec{B} = \mu_r \vec{B}_{\text{vac}}$$

Δηλαδή σε ομογενές μαγνητικό υλικό το μαγνητικό πεδίο αυξάνεται (παραμαγνητικό) ή ελατώνεται (διααγωγικό) κατά μ_r ως προς το πεδίο αγνούτητας το υλικό, π.χ. για ρεύμα εντός σύρματος, το μαγνητικό πεδίο εντός του σύρματος είναι $\vec{B} = \frac{\mu I}{2\pi r} \hat{e}_\theta$ ή το μαγνητικό πεδίο στο κέντρο σωληνοειδούς με πυρήνα είναι $B = \mu I n$.

Άσκηση Πηνίο με $n = 300 \frac{\text{σπείρες}}{\text{m}}$, $I = 5\text{A}$ περιέχει πυρήνα Fe με $\mu = 5000\mu_0$.

$$\text{Είναι } H = nI = 300 \frac{1}{\text{m}} \times 5\text{A} = 1500 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

$$B = \mu H = 5000\mu_0 H = 5000 \left(4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{Wb}}{\text{Am}} \right) \left(1500 \frac{\text{A}}{\text{m}} \right) = 9.43\text{T}$$

Αν δεν υπήρχε ο Fe και ήταν κενό, το B θα ήταν 5000 φορές μικρότερο από τα 9.43 T

Η μαγνήτιση είναι $M = \frac{B}{\mu_0} - H = 5000H - H = 4999H = 7.5 \times 10^6 \frac{\text{A}}{\text{m}}$ που είναι τεράστια μαγνήτιση. Δηλαδή βάζουμε ένα σχεδόν μικρό ρεύμα στο Fe και παίρνουμε τεράστια μαγνήτιση και τεράστιο μαγνητικό πεδίο.