# ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

## Φυσική ΙΙ

## Σημειώσεις – Μαγνητοστατική Ι

Κοφινάς Γιώργος

Τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών και Επικοινωνιακών Συστημάτων

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

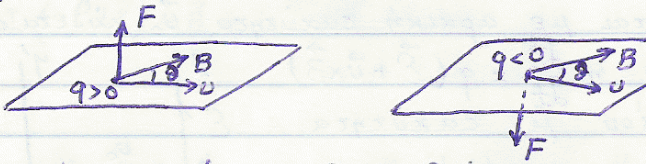
## Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

# Μαγνητική αλληλεπίδραση

Το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ (ένταση ή μαγνητική επαγωγή) ασκεί μαγνητική δύναμη πάνω σε κινούμενο φορτίο q (δύναμη Laplace) $\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B}$, άρα $F = qvB\sin\theta$




Η σχέση αυτή μπορεί να θεωρηθεί και ως ορισμός του B.

$[B] = T(esla) = \frac{N}{Cb\frac{m}{s}} = \frac{N}{Am} = \frac{kg}{Cb\,s}$ , $1T = 10^4\,G(auss)$

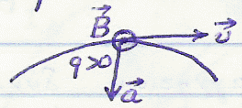
$B_{Γη} \sim 0.5G$ , $B(I=50A,\ r=5cm) \sim 2G$ , $B_{ηλεκτρομαγνήτη} \sim 1T$, $B_{ήλιου} \sim 100G$, $B_{γαλαξία} \sim 10^{-5}G$

Οι μαγνητικές δυνάμεις δεν παράγουν έργο, άρα υ=σταθ., διότι $W_{\vec{F}} = \int \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int \vec{F}\cdot\vec{v}\,dt = 0$ , αφού $\vec{F}\perp\vec{v}$, άρα $W_{\vec{F}} = T_B - T_A = 0 \Rightarrow T_B = T_A \Rightarrow v_B = v_A$

Δύναμη Lorentz : $\vec{F} = q(\vec{\mathcal{E}} + \vec{v}\times\vec{B})$ , ισχύει για κάθε υ

Το $\vec{\mathcal{E}}$ σχετίζεται με το κομμάτι της δύναμης που ασκείται σε ακίνητο q, ενώ το $\vec{B}$ σχετίζεται με το κομμάτι της $\vec{F}$ που ασκείται σε κινούμενο q.

Παράδειγμα Μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ το q εκτελεί κυκλική τροχιά αν $\vec{v}\perp\vec{B}$. Πράγματι, είναι



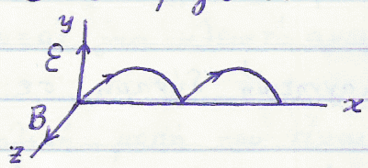

$$m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v}\times\vec{B} \Rightarrow m\frac{dv}{dt}\hat{\varepsilon} + m\frac{v^2}{\rho}\hat{n} = qvB\hat{n}$$

$\Rightarrow v = σταθ.$ , $\rho = \frac{mv}{qB} = σταθ. \equiv r \Rightarrow$ ομαλή κυκλική κίνηση $\left(\omega = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m}\right)$

Ακόμη $\vec{a} = \frac{q}{m}\vec{v}\times\vec{B} \Rightarrow \vec{\omega}\times\vec{v} + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} = \frac{q}{m}\vec{v}\times\vec{B} \Rightarrow -\vec{v}\times\vec{\omega} + 0 = \frac{q}{m}\vec{v}\times\vec{B} \Rightarrow \vec{\omega} = -\frac{q}{m}\vec{B}$

Παράδειγμα Φορτίο q αφήνεται ελεύθερο μέσα σε $\vec{\mathcal{E}}\perp\vec{B}$ ομογενή.

Έστω $\vec{\mathcal{E}} = \mathcal{E}(0,1,0)$, $\vec{B} = B(0,0,1)$ , $\vec{v} = (\dot{x}, \dot{y}, 0)$




$$\vec{v}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = (B\dot{y}, -B\dot{x}, 0)$$

$\vec{F} = q(\vec{\mathcal{E}} + \vec{v}\times\vec{B}) = q(B\dot{y}, \mathcal{E} - B\dot{x}, 0) = m\vec{a} = m(\ddot{x}, \ddot{y}, 0) \Rightarrow qB\dot{y} = m\ddot{x}, \ \mathcal{E} - B\dot{x} = \frac{m}{q}\ddot{y}$

$\Rightarrow \ddot{y} = \omega\left(\frac{\mathcal{E}}{B} - \dot{x}\right)$ , $\ddot{x} = \omega\dot{y}$ , $\omega = \frac{qB}{m}$ $\Rightarrow \dddot{x} = \omega\ddot{y} = \omega^2\left(\frac{\mathcal{E}}{B} - \dot{x}\right) \Rightarrow (\dot{x})'' + \omega^2\dot{x} = \omega^2\frac{\mathcal{E}}{B}$

$\Rightarrow \dot{x} = A\cos\omega t + B\sin\omega t + \frac{\mathcal{E}}{B} \Rightarrow x(t) = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t + \frac{\mathcal{E}}{B}t + C_3$ , $y(t) = C_2\cos\omega t - C_1\sin\omega t + C_4$

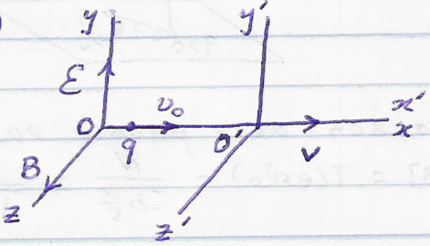
$\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0$, $x(0) = y(0) = 0 \Rightarrow C_1 = C_3 = 0$ , $C_4 = -C_2 = \frac{\mathcal{E}}{\omega B}$

$\Rightarrow x(t) = \frac{\mathcal{E}}{\omega B}(\omega t - \sin\omega t)$, $y(t) = \frac{\mathcal{E}}{\omega B}(1 - \cos\omega t)$

$\Rightarrow x - R\omega t = -R\sin\omega t\ ,\ y - R = -R\cos\omega t\ ,\quad R = \dfrac{\mathcal{E}}{\omega B} = \dfrac{m\mathcal{E}}{qB^2}$ (κυκλοειδής)

$\Rightarrow (x-R\omega t)^2 + (y-R)^2 = R^2$ κύκλος ακτίνας $R$ που το κέντρο του $(0, R\omega t, R)$ κινείται στην $x$-κατεύθυνση με ταχύτητα $v = R\omega = \dfrac{\mathcal{E}}{B}$

Παράδειγμα Φορτίο $q$ κινείται με αρχική ταχύτητα $\vec{v}_0$ κάθετα στα $\vec{\mathcal{E}} \perp \vec{B}$ ομογενή. Στο σύστημα $Oxyz$ είναι $m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{\mathcal{E}} + \vec{v}\times\vec{B})$



Θεωρούμε το μετ/μό Γαλιλαίου με ταχύτητα $\vec{v} = \dfrac{1}{B^2}\vec{\mathcal{E}}\times\vec{B} = \dfrac{\mathcal{E}}{B}\hat{i}$, οπότε ο μετ/μός ταχυτήτων είναι

$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v} \Rightarrow \quad \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d\vec{v}'}{dt}$

$\vec{v}\times\vec{B} = \vec{v}'\times\vec{B} + \vec{v}\times\vec{B} = \vec{v}'\times\vec{B} + \dfrac{\mathcal{E}}{B}\hat{i}\times\vec{B} = \vec{v}'\times\vec{B} - \mathcal{E}\hat{j} = \vec{v}'\times\vec{B} - \vec{\mathcal{E}}$

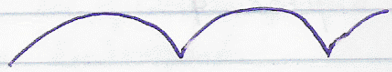
$\Rightarrow m\dfrac{d\vec{v}'}{dt} = q\vec{v}'\times\vec{B}$, άρα ως προς το $O'x'y'z'$ το $q$ εκτελεί κυκλική τροχιά.

Είναι $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v} \Rightarrow \vec{v}_0' = \vec{v}_0 - \vec{v} \Rightarrow v_0' = v_0 - v$ και επειδή το $v'$ μένει σταθερό, άρα $v' = v_0 - \dfrac{\mathcal{E}}{B}$, ενώ $r = \dfrac{mv'}{qB} = \dfrac{m}{qB}\left(v_0 - \dfrac{\mathcal{E}}{B}\right)$ και $\vec{\omega} = -\dfrac{q}{m}\vec{B} \perp xy$.

Ως προς το $Oxyz$ σε χρόνο μιας περιόδου ο κύκλος μετατοπίζεται στη διεύθυνση $x$ κατά $vP = v\dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi m\mathcal{E}}{qB^2}$

Αν $2\pi r > vP \Leftrightarrow v' > v \Leftrightarrow v_0 > 2v \Leftrightarrow v_0 > \dfrac{2\mathcal{E}}{B}$ τότε προκύπτει εξελιγμένη κυκλοειδής τροχιά

Αν $2\pi r = vP \Leftrightarrow v_0 = \dfrac{2\mathcal{E}}{B}$ τότε έχουμε συνήθη κυκλοειδή



Αν $2\pi r < vP \Leftrightarrow v_0 < \dfrac{2\mathcal{E}}{B}$ τότε ενελιγμένη κυκλοειδής

Η μαγνητική δύναμη που ασκείται σε αγωγό που έχει κάποια κατανομή ρεύματος εντός μαγνητικού πεδίου είναι $\underline{\vec{F} = \int_V \vec{j}\times\vec{B}\,dV}$,

διότι η δύναμη ανά μονάδα όγκου είναι $\vec{f} = nq\vec{v}\times\vec{B} = \vec{j}\times\vec{B}$ (το $\vec{v} = \vec{v}_d$), άρα η δύναμη στον στοιχειώδη όγκο $dV$ είναι $d\vec{F} = \vec{j}\times\vec{B}\,dV$ και η ολική $\vec{F} = \int \vec{j}\times\vec{B}\,dV$.

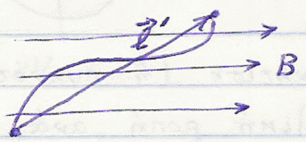
Η μαγνητική δύναμη σε επιφανειακό ρεύμα είναι $\underline{\vec{F} = \int_S \vec{K}\times\vec{B}\,da}$, διότι αν $n_{επ.}$ είναι η επιφανειακή συγκέντρωση φορτίου, τότε $\vec{f} = n_{επ.}q\vec{v}\times\vec{B} = \sigma\vec{v}\times\vec{B} = \vec{K}\times\vec{B}$

Για σύρμα σταθερής διατομής $\underline{\vec{F} = \int_C I\,d\vec{l}\times\vec{B}}$, όπου το $d\vec{l}$ έχει τη φορά του $I$,

διότι $\vec{F} = \int_V j\hat{\varepsilon}\times\vec{B}S\,dl = \int (jS)(dl\,\hat{\varepsilon})\times\vec{B} = \int I\,d\vec{l}\times\vec{B}$ ή $d\vec{F} = dq\,\vec{v}\times\vec{B} = dq\dfrac{d\vec{l}}{dt}\times\vec{B} = \dfrac{dq}{dt}d\vec{l}\times\vec{B} = I\,d\vec{l}\times\vec{B} \Rightarrow \vec{F} = \int d\vec{F} = \int I\,d\vec{l}\times\vec{B}$ ή $\vec{F} = \int \vec{v}\times\vec{B}\,dq = \int \vec{v}\times\vec{B}\,\lambda\,dl = \int I\,d\vec{l}\times\vec{B}$

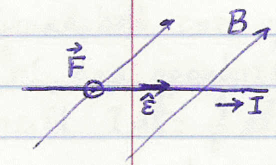
Συνήθως, $I =$ σταθερό στο σύρμα, άρα $\vec{F} = I\int d\vec{l}\times\vec{B}$
Η σχέση $d\vec{F} = I\,d\vec{l}\times\vec{B}$ είναι ισοδύναμος ορισμός του $\vec{B}$.

Για ομογενές πεδίο $\vec{B}$ η δύναμη σε ρευματοφόρο σύρμα είναι $\vec{F} = I\vec{l}'\times\vec{B}$
αφού $\vec{F} = I\left(\int d\vec{l}\right)\times\vec{B} = I\vec{l}'\times\vec{B}$



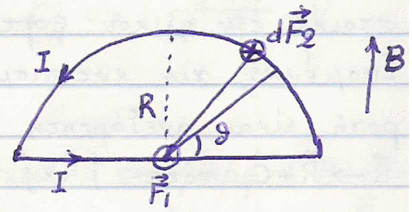

Για κλειστό αγωγό εντός ομογενούς μαγνητικού πεδίου $\vec{B}$ είναι $\vec{F}=0$, αφού
$\vec{l}' = \oint d\vec{l} = 0$

Για ευθύγραμμο αγωγό εντός ομογενούς μαγνητικού πεδίου $\vec{B}$ είναι $\vec{F} = IL\hat{\varepsilon}\times\vec{B}$,
$\hat{\varepsilon}$: εφαπτόμενο στο σύρμα κατά τη διεύθυνση του $I$ και $F = BIL\sin(\hat{\varepsilon},\vec{B})$




Η ροπή σε έναν αγωγό με κατανομή ρεύματος $\vec{j}$ εντός του μαγνητικού πεδίου $\vec{B}$ είναι $\vec{\tau} = \int_V \vec{R}\times(\vec{j}\times\vec{B})\,dV$

διότι $d\vec{\tau} = \vec{R}\times d\vec{F} = \vec{R}\times(\vec{j}\times\vec{B}) \Rightarrow \vec{\tau} = \int\vec{R}\times(\vec{j}\times\vec{B})\,dV$

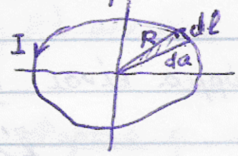


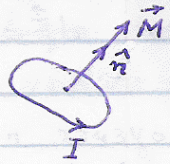

Παράδειγμα Για τον κλειστό αγωγό του σχήματος εντός του ομογενούς πεδίου $B$, η δύναμη στο ευθύγραμμο τμήμα είναι $F_1 = BI(2R) = 2BIR$, ενώ σε ένα απειροστό τμήμα του κυκλικού αγωγού είναι $d\vec{F}_2 = I\,d\vec{l}\times\vec{B}$, $dF_2 = I\,dl\cdot B\sin\vartheta = I(R\,d\vartheta)\cdot B\sin\vartheta$
$\Rightarrow F_2 = \int dF_2 = BIR\int_0^{\pi}\sin\vartheta\,d\vartheta = -BIR\cos\vartheta\Big|_0^{\pi} = 2BIR$
Τελικά $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$, που το ξέρουμε, αφού πρόκειται για κλειστό αγωγό

Για μια κατανομή ρεύματος η μαγνητική διπολική ροπή του είναι $\vec{M} = \frac{1}{2}\int_V \vec{R}\times\vec{j}(\vec{R})\,dV$ με διαστάσεις $[M] = Am^2$. Στη διακριτή περίπτωση $\vec{M} = \frac{1}{2}\sum_i q_i\vec{R}_i\times\vec{v}_i = \sum_i \frac{q_i}{2m_i}\vec{L}_i = \frac{q}{2m}\vec{L}$ (για $\frac{q_i}{m_i}$ σταθερό)
Μαγνητικό δίπολο είναι ένα κλειστό επίπεδο ρεύμα $I$ που περιβάλλει μια επίπεδη επιφάνεια $\vec{S} = S\hat{n}$ ($\hat{n}$: κάθετο στην επιφάνεια με κατεύθυνση δεξιόστροφα με το $I$). Η διπολική ροπή μαγνητικού διπόλου είναι $\vec{M} = I\vec{S} = IS\hat{n}$ (σε αναλογία με τη διπολική ροπή ηλεκτρικού διπόλου $\vec{p} = q\vec{a}$), διότι

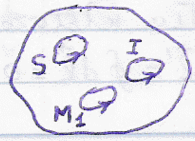
$\vec M = \frac{1}{2}\int \vec R\times(j\hat\varepsilon)A\,d\ell = \frac{1}{2}\int (jA)\vec R\times(\hat\varepsilon\,d\ell) = \frac{1}{2}\int I\,\vec R\times d\vec\ell = \frac{1}{2}I\int \vec R\times d\vec\ell$ και

$|\vec R\times d\vec\ell| = 2da$, άρα $|\vec M| = I\int da = IS$

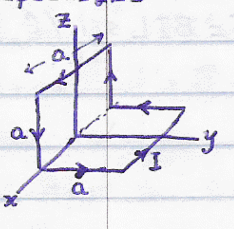



Μαγνήτιση (ή πυκνότητα μαγνητικής διπολικής ροπής) είναι η μαγνητική διπολική ροπή ανά μονάδα όγκου, δηλ. $\vec{\mathfrak{M}}(\vec R) = \frac{1}{2}\vec R\times\vec j(\vec R) = n\vec M_1$, όπου $\vec M_1$ η μαγνητική ροπή ενός διπόλου; είναι $\vec M = \int_V \vec{\mathfrak{M}}\,dV$, $[\mathfrak{M}] = \frac{A}{m}$.




Παράδειγμα Για το ρεύμα του σχήματος, η μαγνητική διπολική ροπή είναι $\vec M = Ia^2\hat y + Ia^2\hat z$, άρα $M = \sqrt{2}\,Ia^2$ και η κατεύθυνση του $\vec M$ είναι κατά μήκος της ευθείας $z=y$.

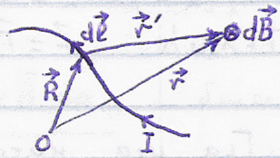



Αν $\vec j$ είναι μια εντοπισμένη, στάσιμη κατανομή ρευμάτων τότε $\int_V \vec j(\vec R)\,dV = 0$, διότι αν S είναι μια κλειστή επιφάνεια που περιβάλλει την κατανομή, τότε $\oint_S R_i\,\vec j\cdot d\vec a = 0 \Rightarrow \int_V \nabla_R\cdot(R_i\vec j)\,dV = 0 \Rightarrow \int_V \nabla_R R_i\cdot\vec j\,dV + \int_V R_i\,\nabla_R\cdot\vec j\,dV = 0 \Rightarrow \int_V \hat e_i\cdot\vec j\,dV + 0 = 0$ $\Rightarrow \int_V j_i\,dV = 0 \Rightarrow \int_V \vec j\,dV = 0$, δηλαδή η μαγνητική μονοπολική ροπή (το αντίστοιχο του ολικού φορτίου στην ηλεκτροστατική) είναι μηδέν.

Επομένως, για εντοπισμένη, στάσιμη κατανομή ρευμάτων η μαγνητική διπολική ροπή είναι ανεξάρτητη της αρχής των αξόνων διότι αν μετατοπίσουμε την αρχή $\vec R\to\vec R+\vec C$ τότε $\int\vec R\times\vec j\,dV \to \int\vec R\times\vec j\,dV + \vec C\times\int\vec j\,dV = \int\vec R\times\vec j\,dV + 0$

Το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί ρευματοφόρος αγωγός που διαρρέεται από στάσιμο ρεύμα είναι

$$\vec B = \frac{\mu_0}{4\pi}I\int\frac{d\vec\ell\times\hat r'}{r'^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}I\int\frac{d\vec\ell\times\vec r'}{r'^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}I\int\frac{d\vec\ell\times(\vec r-\vec R)}{|\vec r-\vec R|^3}$$




(νόμος Biot-Savart)

$K_m = \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}\frac{T}{mA} = 10^{-7}\frac{m\,kg}{Cb^2}$

$\mu_0$ = μαγνητική διαπερατότητα κενού $= 4\pi\times10^{-7}\frac{m\,kg}{Cb^2} = 1.3566\times10^{-6}\frac{m\,kg}{Cb^2}$

$\frac{K}{K_m} = \frac{1}{\epsilon_0\mu_0} = \frac{1}{8.854\times10^{-12}\times4\pi\times10^{-7}}\frac{m^2}{s^2} = 8.988\times10^{16}\frac{m^2}{s^2} = (2.99\times10^8\frac{m}{s})^2 = c^2$

Για ρευματοφόρο σύρμα δεν υπάρχει $\vec E$ γιατί τα θετικά ιόντα δημιουργούν αντίθετο ηλεκτρικό πεδίο από αυτό των ηλεκτρονίων.

Για μια κατανομή στάσιμων ρευμάτων ο νόμος Biot-Savart γράφεται

$$\vec B = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec j(\vec r')\times\frac{\vec r'}{r'^3}\,d^3r' = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec j(\vec R)\times\frac{\vec r-\vec R}{|\vec r-\vec R|^3}\,dV = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{qn\vec v\times\vec r'}{r'^3}\,d^3r'$$

(η οποία ισχύει για κάθε υ), διότι

$$d\vec B = K_m I\frac{\hat\varepsilon\times\vec r'}{r'^3}\,dl = K_m\frac{I}{S}\frac{\hat\varepsilon\times\vec r'}{r'^3}\,dV = K_m j\frac{\hat\varepsilon\times\vec r'}{r'^3}\,dV = K_m\frac{\vec J\times\vec r'}{r'^3}\,dV$$

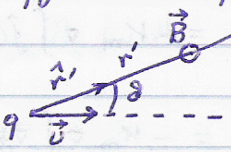
Για επιφανειακή κατανομή ρεύματος $\vec B=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\vec K(\vec r')\times\frac{\vec r'}{r'^3}\,da'$

Για ένα φορτίο q που κινείται με $v \ll c$ και μικρές επιταχύνσεις είναι

$$\vec B = \frac{\mu_0}{4\pi}q\frac{\vec v\times\vec r'}{r'^3} = \frac{1}{c^2}\vec v\times\vec E \quad (\vec B,\vec E \text{ χρονοεξαρτώμενα}), \quad B=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qv\sin\theta}{r'^2}$$

Τυπικά, από την προηγούμενη σχέση, αφού $n\,d^3r'$ είναι ο αριθμός φορτίων στον όγκο $d^3r'$, άρα προκύπτει το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί ένα φορτίο. Ή ακόμη επειδή $I\,d\vec l = \frac{q}{t}d\vec l = q\vec v$. Ωστόσο ένα σημειακό φορτίο δεν δημιουργεί στάσιμο ρεύμα και ο νόμος Biot-Savart δεν ισχύει κανονικά. Επίσης

$$\vec E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r'^3}\vec r', \text{ άρα } \vec B=\frac{1}{c^2}\vec v\times\vec E$$




Ισχύει $\nabla\cdot\vec B=0$ (σωληνοειδές πεδίο)

διότι
$$\vec B = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\vec j(\vec R)\times\frac{\vec r-\vec R}{|\vec r-\vec R|^3}\,dV = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int\vec j(\vec R)\times\nabla\frac{1}{|\vec r-\vec R|}\,dV = \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\times\int\frac{\vec j(\vec R)}{|\vec r-\vec R|}\,dV$$

$\Rightarrow \nabla\cdot\vec B=0$.

Η εξίσωση $\nabla\cdot\vec B=0$ δεν ισχύει μόνο για το μαγνητικό πεδίο της μορφής Biot-Savart ($1/r^2$) και κατά κάποιο τρόπο αντιστοιχεί στην εξίσωση $\nabla\times\vec E=0$ της ηλεκτροστατικής, η οποία επίσης δεν κάνει χρήση ειδικά του νόμου Coulomb ($1/r^2$).

μαγνητική ροή

$$\Phi_B = \oint_S \vec B\cdot d\vec a = 0 \quad \text{(νόμος Gauss για το μαγνητισμό)}$$

$$[\Phi_B] = W(eber) = Tm^2 = \frac{m^2\,kg}{s\cdot Cb}$$

δηλαδή η ροή του μαγνητικού πεδίου μέσα από κλειστή επιφάνεια είναι μηδέν, αφού $\oint_S\vec B\cdot d\vec a = \int_V\nabla\cdot\vec B\,dV=0$.

Η σχέση αυτή είναι συνέπεια του ότι οι δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου είναι κλειστές και άρα όσες εισέρχονται μέσα από την επιφάνεια τόσες και εξέρχονται. Δηλαδή είναι συνέπεια του ότι δεν υπάρχουν μαγνητικά μονόπολα (απομονωμένοι μαγνητικοί πόλοι) αφού αν

υπήρχαν θα αποτελούσαν τις πηγές των μαγνητικών γραμμών και η εισερχόμενη ροή δεν θα ήταν ίση με την εξερχόμενη και επίσης οι δυναμικές γραμμές δεν θα ήταν κλειστές αλλά θα κατέληγαν στα μονόπολα αυτά.
Επομένως, η εξίσωση $\nabla\cdot\vec{B}=0$ είναι πιο γενική στο ηλεκτρομαγνητισμό και ισχύει και για χρονοεξαρτώμενα μαγνητικά πεδία.

Για στάσιμα ρεύματα $\underline{\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}}$ (νόμος Ampère)

διότι $\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\times\int\frac{\vec{J}(\vec{R})}{|\vec{r}-\vec{R}|}dV \Rightarrow \nabla\times\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\times\nabla\times\int\frac{\vec{J}(\vec{R})}{|\vec{r}-\vec{R}|}dV$, όπου $\nabla\times(\nabla\times\vec{a})=\nabla(\nabla\cdot\vec{a})-\nabla^2\vec{a}$,
άρα

$$\nabla\times\vec{B}=K_m\nabla\int\nabla\cdot\frac{\vec{J}(\vec{R})}{|\vec{r}-\vec{R}|}dV-K_m\int\nabla^2\frac{\vec{J}(\vec{R})}{|\vec{r}-\vec{R}|}dV$$

$$=K_m\nabla\int\vec{J}(\vec{R})\cdot\nabla\frac{1}{|\vec{r}-\vec{R}|}dV-K_m\int\vec{J}(\vec{R})\,\nabla^2\frac{1}{|\vec{r}-\vec{R}|}dV$$

$$=-K_m\nabla\int\vec{J}(\vec{R})\cdot\nabla_R\frac{1}{|\vec{r}-\vec{R}|}dV-K_m\int\vec{J}(\vec{R})\,\nabla_R^2\frac{1}{|\vec{R}-\vec{r}|}dV$$

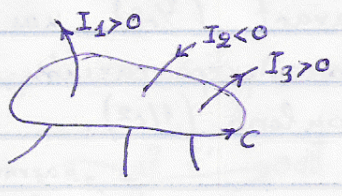
$$=-K_m\nabla\int\nabla_R\cdot\frac{\vec{J}(\vec{R})}{|\vec{r}-\vec{R}|}dV+K_m\nabla\int\frac{\nabla_R\cdot\vec{J}(\vec{R})}{|\vec{r}-\vec{R}|}dV+4\pi K_m\vec{J}(\vec{r})$$

διότι έχουμε δείξει ότι $\int dV\, f(\vec{R})\,\nabla_R^2\frac{1}{|\vec{R}-\vec{r}|}=-4\pi f(\vec{r})$, άρα

$$\nabla\times\vec{B}=-K_m\nabla\oint_{S_\infty}\frac{\vec{J}(\vec{R})}{|\vec{r}-\vec{R}|}\cdot d\vec{a}+0+\mu_0\vec{J}(\vec{r})=\mu_0\vec{J}$$

Για στάσιμα ρεύματα $\underline{V_B=\oint_C\vec{B}\cdot d\vec{\ell}=\mu_0 I=\mu_0\int_S\vec{J}\cdot d\vec{a}}$ (ολοκληρωτική μορφή ν. Ampère)

$V_B$: μαγνητεγερτική δύναμη




διότι $\oint_C\vec{B}\cdot d\vec{\ell}=\int_S(\nabla\times\vec{B})\cdot d\vec{a}=\mu_0\int_S\vec{J}\cdot d\vec{a}$

Στην απόδειξη του ν. Ampère γίνεται χρήση της ειδικής μορφής της εξίσωσης Biot-Savart, επομένως ο ν. Ampère είτε στη διαφορική είτε στην ολοκληρωτική μορφή ενσωματώνει την εξίσωση Biot-Savart και μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι το αντίστοιχο του ν. Gauss του ηλεκτρισμού.
Ο ν. Ampère λέει ότι τα ηλεκτρικά ρεύματα είναι οι πηγές του μαγνητικού πεδίου. Στο όριο που $C\to 0$ προκύπτει $\oint_S\vec{J}\cdot d\vec{a}=0$ που είναι πράγματι το γνωστό αποτέλεσμα της διατήρησης του φορτίου για στάσιμα ρεύματα.
Ή ακόμα $0=\nabla\cdot(\nabla\times\vec{B})=\mu_0\nabla\cdot\vec{J}=0$ για στάσιμα ρεύματα.

Η δύναμη που ασκείται σε μια πεπερασμένη κατανομή στάσιμων ρευμάτων εντός μαγνητικού πεδίου $\vec{B}(\vec{r})$ είναι $\vec{F} = \nabla(\vec{M}\cdot\vec{B})(0) + \dots$

(ισχύει και για χρονοεξαρτώμενο $\vec{B}$)

διότι $\vec{F} = \int_V \vec{j}\times\vec{B}\,dV$ και $B_i(\vec{R}) = B_i(0) + \vec{R}\cdot\nabla B_i(0) + \dots$, άρα

$$F_i = \int \sum_{j,k} \epsilon_{ijk}\, j_j B_k\, dV = \sum_{j,k}\epsilon_{ijk} B_k(0)\int j_j(\vec{R})\,dV + \sum_{j,k}\epsilon_{ijk}\int j_j(\vec{R})\,\vec{R}\cdot\nabla B_k(0)\,dV + \dots$$

Αλλά έχουμε δείξει ότι για εντοπισμένα στάσιμα ρεύματα $\int \vec{j}\,dV = 0$ και επίσης θα δείξουμε τώρα ότι $\vec{r}\cdot\int_V \vec{R}\, j_i(\vec{R})\,dV = -(\vec{r}\times\vec{M})_i$, αφού αν $S$ είναι μια κλειστή επιφάνεια που περιβάλλει την κατανομή τότε

$$\oint_S R_i R_j\, \vec{j}\cdot d\vec{a} = 0 \Rightarrow \int \nabla_R\cdot(R_i R_j \vec{j})\,dV = 0 \Rightarrow \int R_j\, \nabla_R R_i\cdot\vec{j}\,dV + \int R_i\, \nabla_R R_j\cdot\vec{j}\,dV +$$
$$+ \int R_i R_j\, \nabla_R\cdot\vec{j}\,dV = 0 \Rightarrow \int (R_j j_i + R_i j_j)\,dV = 0$$

$$\Rightarrow \vec{r}\cdot\int \vec{R}\, j_i\,dV = \sum_j r_j \int R_j j_i\,dV = \frac{1}{2}\sum_j r_j\int R_j j_i\,dV + \frac{1}{2}\sum_j r_j \int R_j j_i\,dV =$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_j r_j\int R_i j_j\,dV + \frac{1}{2}\sum_j r_j \int R_j j_i\,dV = -\frac{1}{2}\sum_j r_j\int (R_i j_j - R_j j_i)\,dV =$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{j,l,m} r_j \int(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) R_l j_m\,dV = -\frac{1}{2}\sum_{j,k,l,m} r_j\int \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} R_l j_m\,dV$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{j,k}\epsilon_{ijk} r_j \int \sum_{l,m}\epsilon_{klm} R_l j_m\,dV = -\frac{1}{2}\sum_{j,k}\epsilon_{ijk} r_j\int (\vec{R}\times\vec{j})_k\,dV$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\vec{r}\times\int(\vec{R}\times\vec{j})\,dV\right]_i = -(\vec{r}\times\vec{M})_i$$

Επομένως, $\int j_j(\vec{R})\,\vec{R}\cdot\nabla B_k(0)\,dV = \nabla B_k(0)\cdot\int \vec{R}\, j_j(\vec{R})\,dV = -(\nabla B_k(0)\times\vec{M})_j$
$= (\vec{M}\times\nabla B_k(0))_j = (\vec{M}\times\nabla)_j B_k(0)$

Τελικά, $F_i = \sum_{j,k}\epsilon_{ijk}(\vec{M}\times\nabla)_j B_k(0) \Rightarrow \vec{F} = (\vec{M}\times\nabla)\times\vec{B}(0) = \nabla(\vec{M}\cdot\vec{B}) - \vec{M}(\nabla\cdot\vec{B})\big|_0 + \dots$
$= \nabla(\vec{M}\cdot\vec{B})(0) - 0 + \dots$

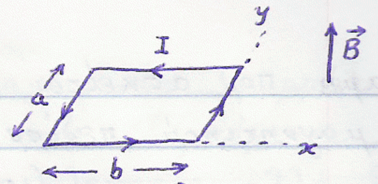
Περαιτέρω, αν $\nabla\times\vec{B} = 0$ (μακρυά από τις πηγές-ρεύματα του μαγνητικού πεδίου) τότε $\vec{F} = (\vec{M}\cdot\nabla)\vec{B}(0) + \dots$ ή $F_i = \vec{M}\cdot\nabla B_i(0) + \dots$ (σε αναλογία με το $F_i = \vec{p}\cdot\nabla E_i(0)$), διότι $\nabla(\vec{M}\cdot\vec{B}) = (\vec{M}\cdot\nabla)\vec{B} + (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{M} + \vec{M}\times(\nabla\times\vec{B}) + \vec{B}\times(\nabla\times\vec{M}) = (\vec{M}\cdot\nabla)\vec{B} + \vec{M}\times(\nabla\times\vec{B})$, αφού $\vec{M}$ = σταθ, άρα τελικά $\nabla(\vec{M}\cdot\vec{B}) = (\vec{M}\cdot\nabla)\vec{B}$

Σημείωση: $[(\vec{M}\times\nabla)\times\vec{B}]_i = \epsilon_{ijk}(\vec{M}\times\nabla)_j B_k = \epsilon_{ijk}\epsilon_{jlm} M_l \partial_m B_k = -\epsilon_{jik}\epsilon_{jlm} M_l\partial_m B_k =$
$= -(\delta_{il}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{kl}) M_l \partial_m B_k = M_k\partial_i B_k - M_i \partial_k B_k = \partial_i(M_k B_k) - M_i\partial_k B_k$
$\Rightarrow (\vec{M}\times\nabla)\times\vec{B} = \nabla(\vec{M}\cdot\vec{B}) - \vec{M}(\nabla\cdot\vec{B})$

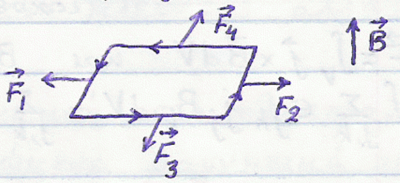
Για ένα μικρό ορθογώνιο μαγνητικό δίπολο $\vec{M} = IS\hat{z}$ εντός κάθετου μαγνητικού πεδίου

$\vec{B} = B(x,y)\hat{z}$ είναι $\vec{F} = \nabla(\vec{M}\cdot\vec{B}) = \nabla(M\hat{z}\cdot B\hat{z})$

$$= M\nabla B = M\left(\frac{\partial B}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial B}{\partial y}\hat{y}\right)$$

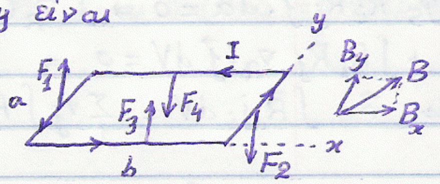



Το ίδιο προκύπτει και άμεσα αφού



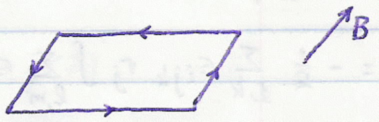

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4$$
$$= Ia(-\hat{y})\times\vec{B}_1 + Ia\hat{y}\times\vec{B}_2 + Ib\hat{x}\times\vec{B}_3 + Ib(-\hat{x})\times\vec{B}_4$$
$$= -IaB_1\hat{x} + IaB_2\hat{x} - IbB_3\hat{y} + IbB_4\hat{y}$$
$$= Ia(B_2 - B_1)\hat{x} + Ib(B_4 - B_3)\hat{y} = Iab\frac{B_2 - B_1}{b}\hat{x} + Iab\frac{B_4 - B_3}{a}\hat{y} =$$
$$= IS\frac{\partial B}{\partial x}\hat{x} + IS\frac{\partial B}{\partial y}\hat{y} = M\left(\frac{\partial B}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial B}{\partial y}\hat{y}\right)$$

Στην περίπτωση που το $\vec{B}$ βρίσκεται στο επίπεδο $xy$ είναι




$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4$$
$$= Ia(-\hat{y})\times\vec{B}_1 + Ia\hat{y}\times\vec{B}_2 + Ib\hat{x}\times\vec{B}_3 + Ia(-\hat{x})\times\vec{B}_4$$
$$= IaB_{1x}\hat{z} - IaB_{2x}\hat{z} + IbB_{3y}\hat{z} - IaB_{4y}\hat{z}$$
$$= -Ia(B_{2x} - B_{1x})\hat{z} - Ib(B_{4y} - B_{3y})\hat{z}$$
$$= -Iab\frac{B_{2x} - B_{1x}}{b}\hat{z} - Iab\frac{B_{4y} - B_{3y}}{a}\hat{z} = -IS\frac{\partial B_x}{\partial x}\hat{z} - IS\frac{\partial B_y}{\partial y}\hat{z} = -M\left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y}\right)\hat{z}.$$

Στη γενική περίπτωση που το $\vec{B}$ βρίσκεται στο χώρο τότε




$$\vec{F} = M\left(\frac{\partial B_z}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial B_z}{\partial y}\hat{y}\right) - M\left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y}\right)\hat{z}$$

$$= M\left(\frac{\partial B_z}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial B_z}{\partial y}\hat{y}\right) + M\frac{\partial B_z}{\partial z}\hat{z} \qquad [\text{διότι } \nabla\cdot\vec{B} = 0]$$

$$= M\left(\frac{\partial B_z}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial B_z}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}\hat{z}\right)$$

που συμφωνεί με την $\vec{F} = \nabla(\vec{M}\cdot\vec{B}) = \nabla(MB_z) = M\nabla B_z = M\left(\frac{\partial B_z}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial B_z}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}\hat{z}\right)$

Η ροπή που ασκείται σε μια πεπερασμένη κατανομή στάσιμων ρευμάτων εντός μαγνητικού πεδίου $\vec{B}(\vec{r})$ είναι $\vec{\tau} = \vec{M}\times\vec{B}(0) + \cdots$ (σε αναλογία με το $\vec{\tau} = \vec{p}\times\vec{E}(0)$), (ισχύει και για χρονοεξαρτώμενο $\vec{B}$)

διότι $\vec{\tau} = \int_V \vec{R}\times(\vec{j}\times\vec{B})\,dV = \int \vec{R}\times[\vec{j}\times\vec{B}(0)]\,dV + \cdots = \int\{[\vec{R}\cdot\vec{B}(0)]\vec{j} - (\vec{R}\cdot\vec{j})\vec{B}(0)\}\,dV =$

$$= \int \vec{j}\,[\vec{R}\cdot\vec{B}(0)]\,dV - \vec{B}(0)\int \vec{R}\cdot\vec{j}\,dV$$

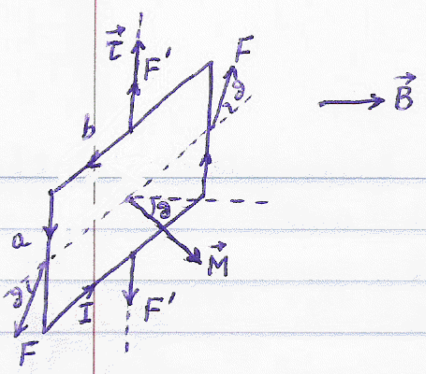
όπου έχουμε δείξει ότι $\int j_j\,[\vec{R}\cdot\vec{B}(0)]\,dV = \vec{B}(0)\cdot\int \vec{R}\,j_j(\vec{R})\,dV = -[\vec{B}(0)\times\vec{M}]_j$

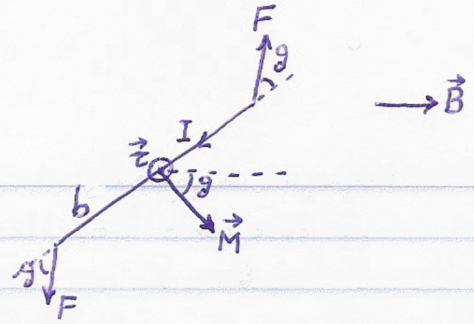
και αν $S$ είναι μια κλειστή επιφάνεια που περιβάλλει την κατανομή τότε

$$\oint_S R^2\vec{j}\cdot d\vec{a} = 0 \Rightarrow \int \nabla_R\cdot(R^2\vec{j})\,dV = 0 \Rightarrow \int 2R\,\nabla_R R\cdot\vec{j}\,dV + \int R^2\,\nabla_R\cdot\vec{j}\,dV = 0 \Rightarrow \int 2R\frac{\vec{R}}{R}\cdot\vec{j}\,dV + 0 = 0$$

$\Rightarrow \int \vec{R}\cdot\vec{j}\,dV = 0$, άρα $\tau_j = -[\vec{B}(0)\times\vec{M}]_j - 0 \Rightarrow \vec{\tau} = -\vec{B}(0)\times\vec{M} = \vec{M}\times\vec{B}(0)$

Στην περίπτωση του ορθογώνιου μαγνητικού διπόλου $\vec{M} = IS\hat{n}$ εντός ομογενούς




μαγνητικού πεδίου δημιουργείται ζεύγος δυνάμεων με $F=BIa$ , άρα η ροπή είναι $\tau = F(b\sin\theta) = BIab\sin\theta = BIS\sin\theta = MB\sin\theta \Rightarrow \vec{\tau} = \vec{M}\times\vec{B}$

Για ένα μαγνητικό δίπολο στο επίπεδο $xy$ εντός του μαγνητικού πεδίου $\vec{B} = \hat{y}B_y + \hat{z}B_z$ είναι $d\vec{F} = I\,d\vec{l}\times\vec{B} = I\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ dx & dy & 0 \\ 0 & B_y & B_z \end{vmatrix} = IB_z\,dy\,\hat{x} - IB_z\,dx\,\hat{y} + IB_y\,dx\,\hat{z}$

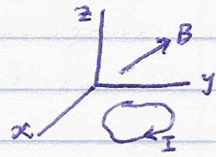
και $d\vec{\tau} = \vec{r}\times d\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ x & y & 0 \\ IB_z dy & -IB_z dx & IB_y dx \end{vmatrix} = IB_y\,y\,dx\,\hat{x} - IB_y\,x\,dx\,\hat{y} - I(B_z\,x\,dx + B_z\,y\,dy)\hat{z}$

$\Rightarrow \vec{\tau} = \int d\vec{\tau} = \hat{x}IB_y\oint y\,dx - \hat{y}IB_y\oint x\,dx - \hat{z}I\left(B_z\oint x\,dx + B_z\oint y\,dy\right)$

Αλλά $\oint x\,dx = \frac{1}{2}\oint d(x^2) = 0$ , $\oint y\,dy = 0$ , άρα $\vec{\tau} = \hat{x}IB_y\oint y\,dx$ .

Εξάλλου $\oint y\,dx = S$ , άρα $\vec{\tau} = \hat{x}IB_yS$ . Αν το ρεύμα ρέει δεξιόστροφα στον αγωγό τότε $\vec{M} = -IS\hat{z}$ , άρα $\vec{\tau} = MB_y\hat{x}$ , όπου $M = IS$.

Είναι $\vec{M}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 0 & -M \\ 0 & B_y & B_z \end{vmatrix} = MB_y\hat{x} \Rightarrow \vec{\tau} = \vec{M}\times\vec{B}$

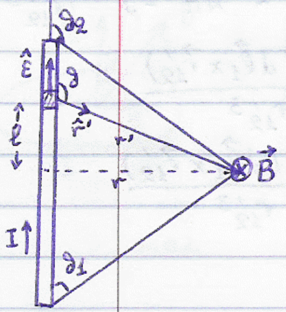



Η δυναμική ενέργεια ενός μαγνητικού διπόλου που διαρρέεται από στάσιμο ρεύμα εντός μαγνητικού πεδίου είναι $U = -\vec{M}\cdot\vec{B}(0)$ , αφού $\vec{F} = \nabla(\vec{M}\cdot\vec{B})(0) = -\nabla U$.

Η ενέργεια αλληλεπίδρασης δύο μαγνητικών διπόλων $\vec{M}_1, \vec{M}_2$ είναι

$$U_{\delta\iota\pi-\delta\iota\pi} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{3(\vec{M}_1\cdot\hat{e}_r)(\vec{M}_2\cdot\hat{e}_r) - \vec{M}_1\cdot\vec{M}_2}{r^3}$$

Παράδειγμα    Μαγνητικό πεδίο ευθύγραμμου αγωγού




Είναι $d\vec{l}\times\vec{r}' = dl\,\hat{e}\times\vec{r}' = dl\sin\vartheta\,\hat{e}_\vartheta$

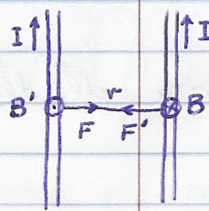
$l=-r\cot\vartheta$ , $r'=r\csc\vartheta$

$dl = r\csc^2\vartheta\, d\vartheta$

$$\vec B = \frac{\mu_0}{4\pi} I\int \frac{\sin\vartheta}{r'^2}\, dl\,\hat e_\vartheta = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}\frac{\sin\vartheta}{r^2\csc^2\vartheta}\, r\csc^2\vartheta\,d\vartheta\,\hat e_\vartheta$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi r}\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}\sin\vartheta\,d\vartheta\,\hat e_\vartheta = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}(\cos\vartheta_1-\cos\vartheta_2)\,\hat e_\vartheta$$

Για άπειρο σύρμα $\vartheta_1=0$, $\vartheta_2=\pi \Rightarrow \vec B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat e_\vartheta$ , οπότε πράγματι ικανοποιεί ο νόμος Ampère αφού $\oint_C \vec B\cdot d\vec l = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\oint_C \hat e_\vartheta\cdot r\,d\vartheta\,\hat e_\vartheta = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\oint d\vartheta = \frac{\mu_0 I}{2\pi}2\pi = \mu_0 I$.




Αν έχουμε δύο παράλληλα ρεύματα, η δύναμη που ασκεί ο αγωγός I στον I' είναι $\vec F' = I'\int d\vec l'\times\vec B$ , $\vec B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat e_\vartheta$

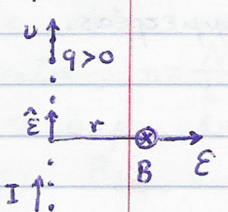
$$\Rightarrow \vec F' = \frac{\mu_0 I I'}{2\pi r}\int d\vec l'\times\hat e_\vartheta = \frac{\mu_0 I I'}{2\pi r}\int dl'(-\hat e_r) = -\frac{\mu_0 I I'}{2\pi r}L'\hat e_r$$

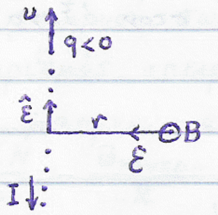
$$\Rightarrow \frac{\vec F'}{L'} = -\frac{\mu_0 I I'}{2\pi r}\hat e_r = -K_m\frac{2II'}{r}\hat e_r$$

Αν τα $I, I'$ είναι ομόρροπα η δύναμη είναι ελκτική ενώ για αντίρροπα απωστική.

Ampère = ένταση ρευμάτων σε απόσταση 1m που η μεταξύ τους δύναμη ανά μονάδα μήκους είναι $2\times10^{-7}N$, άρα $K_m = 10^{-7}\frac{T}{mA}$.

Παράδειγμα




Άπειρη ευθύγραμμη κατανομή φορτίων γραμμικής πυκνότητας λ που κινούνται με ταχύτητα υ. Το δημιουργούμενο ηλεκτρικό πεδίο της ευθύγραμμης κατανομής είναι $\vec{\mathcal E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\hat e_r$. Αφού το ισοδύναμο ρεύμα είναι $I=\lambda\upsilon$, άρα το μαγνητικό πεδίο είναι $\vec B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat e_\vartheta =$

$$= \frac{\mu_0\lambda\upsilon}{2\pi r}\hat e_\vartheta = \mu_0\epsilon_0\upsilon\,\hat e\times\vec{\mathcal E} = \frac{1}{c^2}\vec\upsilon\times\vec{\mathcal E}, \quad B = \frac{\upsilon}{c^2}\mathcal E \qquad \left(\hat e\times\vec{\mathcal E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\hat e_\vartheta\right)$$

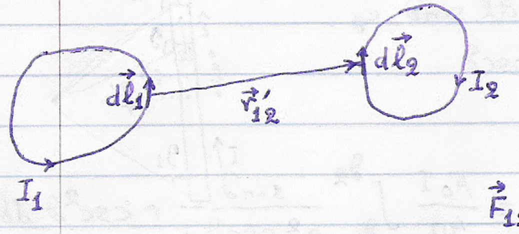
Αν έχουμε δύο ευθύγραμμες κινούμενες κατανομές φορτίων τότε η δύναμη μεταξύ τους είναι $dF' = dq'\upsilon B = dq'\upsilon\frac{\mu_0\lambda\upsilon}{2\pi r} \Rightarrow F' = \frac{\mu_0\lambda\upsilon\upsilon' q'}{2\pi r}$ , άρα η δύναμη ανά μονάδα μήκους $\frac{F'}{L'} = \frac{\mu_0\lambda\upsilon\upsilon'}{2\pi r}\frac{q'}{L'} = \frac{\mu_0\lambda\lambda'\upsilon\upsilon'}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I I'}{2\pi r}$

π.χ. αν $\lambda = 4\times10^4\,\frac{Cb}{m}$, $r=5cm$ τότε $\frac{F_{\eta\lambda}}{L} = 5\times10^{20}\,\frac{N}{m}$, ενώ αν $\upsilon=\upsilon_d = 2.5\times10^{-4}\,\frac{m}{s}$, τότε $I = \lambda\upsilon = 10A$ και

$$\frac{F_{\mu\alpha\gamma\nu}}{L} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi r} = \frac{\mu_0\lambda^2\upsilon^2}{2\pi r} = \frac{1.36\times10^{-6}\times10^2}{2\pi\times5\times10^{-2}}\,\frac{N}{m} = 4\times10^{-4}\,\frac{N}{m}$$

Είναι $\frac{F_{\mu\alpha\gamma\nu}/L}{F_{\eta\lambda}/L} = \frac{\mu_0\lambda\lambda'\upsilon\upsilon'}{2\pi r}\,\frac{2\pi\epsilon_0 r}{\lambda\lambda'} = \epsilon_0\mu_0\upsilon\upsilon' = \frac{\upsilon\upsilon'}{c^2} \simeq 10^{-24}$, δηλ. η μαγνητική δύναμη είναι πολύ ασθενέστερη από την ηλεκτρική.

Δύναμη μεταξύ βρόχων:




$$d\vec{F}_{12} = I_2\, d\vec{l}_2 \times \vec{B}_1 = I_2\, d\vec{l}_2 \times \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \int \frac{d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{12}'}{r_{12}'^{\,3}}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint \frac{d\vec{l}_2 \times (d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{12}')}{r_{12}'^{\,3}}$$

$$\vec{F}_{12} = \int d\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint\oint \frac{d\vec{l}_2 \times (d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{12}')}{r_{12}'^{\,3}}$$

Αλλά $d\vec{l}_2 \times (d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{12}') = (d\vec{l}_2 \cdot \vec{r}_{12}')\, d\vec{l}_1 - (d\vec{l}_2 \cdot d\vec{l}_1)\, \vec{r}_{12}'$

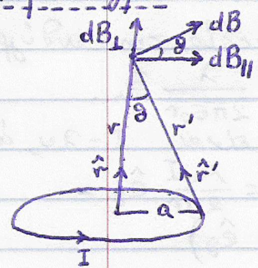
$$\Rightarrow \vec{F}_{12} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint\oint \frac{(d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2)\vec{r}_{12}'}{r_{12}'^{\,3}} + \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint d\vec{l}_1 \oint \frac{d\vec{l}_2 \cdot \vec{r}_{12}'}{r_{12}'^{\,3}}$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint\oint \frac{(d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2)\vec{r}_{12}'}{r_{12}'^{\,3}} - \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint d\vec{l}_1 \oint d\vec{l}_2 \cdot \nabla_2 \left(\frac{1}{r_{12}'}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{12} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint\oint \frac{(d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2)\vec{r}_{12}'}{r_{12}'^{\,3}}$$, που είναι συμμετρικό στα $d\vec{l}_1, d\vec{l}_2$

άρα $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$, δηλαδή ικανοποιείται ο τρίτος νόμος Newton.
Η παραπάνω εξίσωση ισχύει και για ρεύματα που εκτείνονται στο άπειρο, αφού και στην περίπτωση αυτή το δεύτερο ολοκλήρωμα που είναι τέλειο διαφορικό μηδενίζεται.

Παράδειγμα Μαγνητικό πεδίο κυκλικού αγωγού στον άξονα συμμετρίας.




$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{r'^2}$$

Είναι $\vec{B}_{\parallel} = 0$ λόγω συμμετρίας

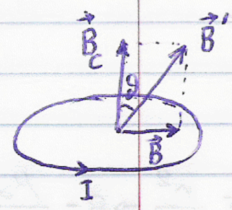
$$dB_\perp = dB \sin\vartheta = dB \frac{a}{r'} = dB \frac{a}{\sqrt{a^2 + r'^2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a\, dl}{(a^2+r^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow B_\perp = \oint dB_\perp = \frac{\mu_0 I a\, 2\pi a}{4\pi (a^2+r^2)^{3/2}} \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2+r^2)^{3/2}} \hat{r} = \frac{\mu_0 M}{2\pi (a^2+r^2)^{3/2}} \hat{r} \quad (M = I\pi a^2)$$

Για $a \ll r$ είναι $B = \frac{\mu_0 M}{2\pi r^3}$. Η έκφραση αυτή μοιάζει με το $\mathcal{E}$ ηλεκτρικού διπόλου πάνω στον άξονα του διπόλου $\left(\mathcal{E} = \frac{2p}{4\pi\epsilon_0 r^3}\right)$. Υπό την αντιστοιχία $\frac{p}{4\pi\epsilon_0} \rightarrow \frac{\mu_0 M}{4\pi}$, οι γενικές σχέσεις $\mathcal{E}_r = \frac{2p\cos\vartheta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$, $\mathcal{E}_\vartheta = \frac{p\sin\vartheta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$ αντιστοιχίζονται στις

$$B_r = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2M\cos\vartheta}{r^3}, \quad B_\vartheta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{M\sin\vartheta}{r^3}$$ οι οποίες αποδεικνύονται και κανονικά.

Παράδειγμα (γαλβανόμετρο της εφαπτομένης)



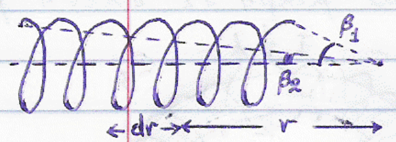
Έστω μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ παράλληλο προς ένα κυκλικό πηνίο με $N$ σπείρες. Τότε το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί το πηνίο στο κέντρο είναι

$$B_C = N\frac{\mu_0 I a^2}{2a^3} = N\frac{\mu_0 I}{2a}$$

και $$\tan\theta = \frac{B}{B_c} = \frac{2Ba}{\mu_0 I N}$$

Άρα, μετρώντας το $\theta$ με μια μαγνητική πυξίδα μπορούμε να βρούμε το $B$

Παράδειγμα Πηνίο με $N$ σπείρες, μήκος $L$ και ακτίνα $a$.



Αν για ένα σημείο πάνω στον άξονα οι γωνίες με τα δύο άκρα είναι $\beta_1, \beta_2$ θα βρούμε το $B$. Ένα κομμάτι του πηνίου μήκους $dr$ έχει $\frac{N}{L}dr$ σπείρες και δημιουργεί $dB = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2+r^2)^{3/2}}\frac{N}{L}dr$,

όπου $r = a\cot\beta$, $dr = -a\csc^2\beta\, d\beta$, $a^2+r^2 = a^2\csc^2\beta$

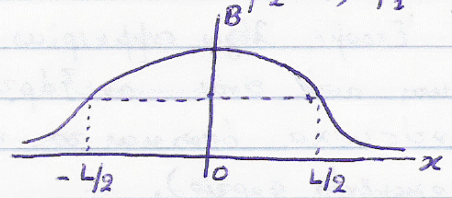
άρα $$dB = -\frac{\mu_0 I a^2}{2a^3\csc^3\beta}\frac{N}{L}a\csc^2\beta\, d\beta = -\frac{\mu_0 I N}{2L}\sin\beta\, d\beta$$

$$B = \int dB = -\frac{\mu_0 I N}{2L}\int_{\beta_1}^{\beta_2}\sin\beta\, d\beta = \frac{\mu_0 I N}{2L}(\cos\beta_2 - \cos\beta_1)$$

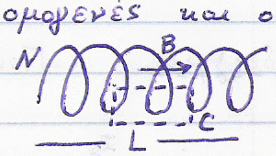
Στο κέντρο ενός μακρυού σωληνοειδούς είναι $\beta_2 \simeq 0$, $\beta_1 \simeq \pi$, άρα $B_{κέντρο} = \frac{\mu_0 I N}{L} = \mu_0 I n$, $n = \frac{N}{L}$ αριθμός σπειρών ανά μονάδα μήκους.

Στο άκρο ενός μακρυού σωληνοειδούς είναι $\beta_2 \simeq 0$, $\beta_1 \simeq \frac{\pi}{2}$ ή $\beta_2 \simeq \frac{\pi}{2}$, $\beta_1 \simeq \pi$,

άρα $$B_{άκρο} = \frac{\mu_0 I N}{2L} = \frac{B_{κέντρο}}{2}$$



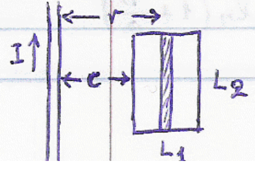

Το πεδίο κοντά στο κέντρο του σωληνοειδούς είναι ομογενές και ο νόμος του Ampère για την καμπύλη $C$ είναι




$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I\left(N\frac{\ell}{L}\right) \Rightarrow B\ell = \mu_0 I N\frac{\ell}{L} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 I N}{L} = \mu_0 I n$$

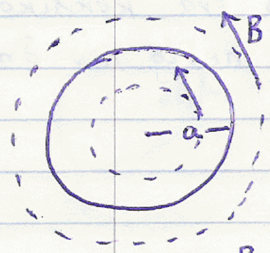
Παράδειγμα Μαγνητική ροή που διαπερνά το βρόχο.




$$\Phi_B = \int B\, da, \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \quad da = L_2\, dr$$

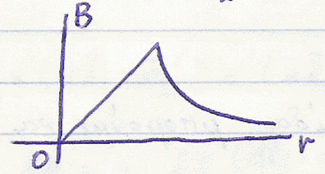
$$\Rightarrow \Phi_B = \frac{\mu_0 I L_2}{2\pi}\int_c^{c+L_1}\frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I L_2}{2\pi}\ln\frac{c+L_1}{c}$$

**Παράδειγμα** Σύρμα ακτίνας $a$ διαρρέεται από ρεύμα $I$ ομοιόμορφα κατανεμημένο στη διατομή του.

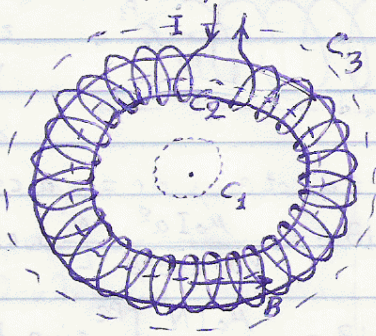



$$\oint_{C_1} \vec{B}\cdot d\vec{l} = B\,2\pi r = \mu_0 I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \quad r>a$$

$$\oint_{C_2} \vec{B}\cdot d\vec{l} = B\,2\pi r = \mu_0 I(r) = \mu_0 I \frac{\pi r^2}{\pi a^2} = \mu_0 I \frac{r^2}{a^2} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2}, \quad r<a$$




**Παράδειγμα** Δακτυλοειδές πηνίο $N$ σπειρών που διαρρέονται από ρεύμα $I$, όπου η εγκάρσια διατομή του δακτυλίου είναι μικρή σε σχέση με την ακτίνα του δακτυλίου

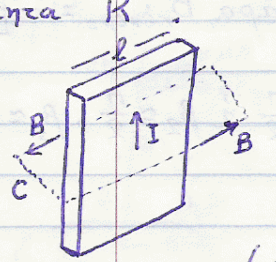



$\oint_{C_1} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \oint_{C_3} \vec{B}\cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow \vec{B}=0$ εκτός του δακτυλίου

$$\oint_{C_2} \vec{B}\cdot d\vec{l} = BL = \mu_0 N I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 N I}{L} = \mu_0 I n$$

$n = \frac{N}{L}$ αριθμός σπειρών ανά μονάδα μήκους

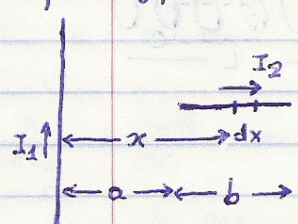
**Παράδειγμα** Άπειρο φύλλο διαρρέεται από ρεύμα με επιφανειακή πυκνότητα $K$




$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = B\,2l = \mu_0 K l \Rightarrow B = \frac{\mu_0 K}{2}$$

Έχουμε λόγω συμμετρίας το ίδιο πεδίο σε κάθετη πλευρά και αυτό είναι ανεξάρτητο της απόστασης από το φύλλο (αντίστοιχα όπως και το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται από φύλλο με ομογενές φορτίο).

**Παράδειγμα** Ποια η δύναμη στο κομμάτι σύρμα από τον άπειρο αγωγό?




Είναι $B_1(x) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}$ το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί το $I_1$ στη θέση $x$.

$dF = I_2 \left|d\vec{l} \times \vec{B}_1\right| = I_2\, dx\, B_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \frac{dx}{x}$ με κατεύθυνση προς τα πάνω

$$F = \int dF = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \int_a^{a+b} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln\left(1+\frac{b}{a}\right)$$