ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

Φυσική ΙΙ

Σημειώσεις – Ηλεκτρικό Ρεύμα

Κοφινάς Γιώργος

Τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών και Επικοινωνιακών Συστημάτων

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

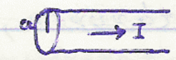
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

<u>Ηλεκτρικό ρεύμα</u>

Ένταση ηλεκτρικού ρεύματος ή ρεύμα $I=\frac{dQ}{dt}=\frac{q\,dN}{dt}$ και η φορά του συμπίπτει με εκείνη της κίνησης των θετικών φορτίων, $[I]=A=\frac{Cb}{s}$.
Αν λ είναι μια γραμμική πυκνότητα φορτίων που έχουν ταχύτητα υ, τότε το ρεύμα είναι $I=\lambda\upsilon$, αφού $I=\frac{dQ}{dx}\frac{dx}{dt}=\lambda\upsilon$.
Ανεξάρτητα από τη φύση της διαδικασίας αγωγιμότητας, η ισχύς που χρειάζεται να δοθεί για να διατηρηθεί ένα ρεύμα I ανάμεσα σε διαφορά δυναμικού ϕ είναι $P=\phi I$, αφού $P=\frac{W}{t}=\frac{N(q\phi)}{t}=\frac{Q\phi}{t}=I\phi$, άρα $Watt=A\cdot V$
Πυκνότητα ρεύματος $\vec{j}=qn\vec{\upsilon}=\rho\vec{\upsilon}$ (φορτίο ανά μονάδα χρόνου και επιφάνειας, δηλαδή ρεύμα ανά μονάδα επιφάνειας), $[j]=\frac{A}{m^2}$ και $I=\int_S\vec{j}\cdot d\vec{a}$ $=\int_S j\,da_\perp$ (φορτίο ανά μονάδα χρόνου) και $\vec{j}=\frac{dI}{da_\perp}\hat{n}$.
Όμοια, για ρεύμα που ρέει σε μια επιφάνεια, η επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος $\vec{K}=\sigma\vec{\upsilon}=\frac{dI}{dl_\perp}\hat{n}$ (ρεύμα ανά μονάδα μήκους κάθετου στο ρεύμα), $[K]=\frac{A}{m}$ και $I=\int_C K\,dl_\perp$.

Επειδή είναι $dq=\lambda\,dl=\sigma\,da=\rho\,dV \Rightarrow \sum_i\cdots q_i\vec{\upsilon}_i=\int_C\cdots I\,d\vec{l}=\int_S\cdots\vec{K}\,da=\int_V\cdots\vec{j}\,dV$

<u>Παράδειγμα</u> Σε σύρμα η πυκνότητα ρεύματος είναι ανάλογη της απόστασης από το κέντρο, $j=cr$, άρα το ρεύμα είναι



$$I=\int_S j\,da_\perp=\int_0^a cr\cdot 2\pi r\,dr=2\pi c\int_0^a r^2\,dr=\frac{2}{3}\pi c a^3$$

Ισχύει $\underline{\nabla\cdot\vec{j}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0}$ "εξίσωση συνέχειας" (τοπική διατήρηση φορτίου)

διότι αν S είναι μια κλειστή επιφάνεια που περιβάλλει τον όγκο V, τότε ο ρυθμός που το φορτίο διέρχεται από τον όγκο V προς τα έξω μέσω της S είναι $I=\frac{dq}{dt}=\oint_S\vec{j}\cdot d\vec{a}=\int_V\nabla\cdot\vec{j}\,dV$. Αλλά αυτό το ίδιο φορτίο που εξέρχεται ελαττώνει την πυκνότητα φορτίου εντός του όγκου V, άρα $\frac{d}{dt}\int_V\rho\,dV=-\frac{dq}{dt}\Leftrightarrow\int_V\frac{\partial\rho}{\partial t}dV=-\int_V\nabla\cdot\vec{j}\,dV\Leftrightarrow\int_V\left(\nabla\cdot\vec{j}+\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)=0$, άρα $\nabla\cdot\vec{j}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$
<u>Στάσιμο</u> λέγεται ένα ρεύμα που είναι χρονοανεξάρτητο, άρα δεν υπάρχουν περιοχές όπου συσσωρεύεται με το χρόνο επιπλέον φορτίο, δηλαδή $\frac{\partial\rho}{\partial t}=0\Rightarrow\underline{\nabla\cdot\vec{j}=0}$ και είναι αντικείμενο της μαγνητοστατικής. Αφού $\int_V\frac{\partial\rho}{\partial t}dV$ $=-\oint_S\vec{j}\cdot d\vec{a}$, άρα η ολοκληρωτική εξίσωση που ορίζει τα στάσιμα ρεύματα είναι $\oint_S\vec{j}\cdot d\vec{a}=0$

Κάνοντας χρήση της εξίσωσης διατήρησης του φορτίου και του νόμου του Gauss παίρνουμε

$$\oint_S \vec{J}\cdot d\vec{a} + \frac{d}{dt}\int_V \rho\, dV = 0 \Rightarrow \underline{\oint_S \vec{J}\cdot d\vec{a} + \varepsilon_0 \frac{d}{dt}\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{a} = 0}$$

Αυτή η εξίσωση θα χρησιμοποιηθεί αργότερα για την παραγωγή της εξίσωσης Ampère-Maxwell.
Εξάλλου για στατικό $\vec{E}$ προκύπτει στάσιμο ρεύμα, $\oint_S \vec{J}\cdot d\vec{a} = 0$.

Για τα περισσότερα υλικά (ή για πλάσμα) η δύναμη $\vec{f}$ ανά μονάδα φορτίου (χημική, βαρυτική, ηλεκτρομαγνητική κ.λπ.) που τα κινεί και δημιουργεί το ρεύμα είναι ανάλογη της πυκνότητας ρεύματος, δηλ. $\underline{\vec{J} = \tilde{\sigma}\vec{f}}$, $\tilde{\sigma}$ ηλεκτρική αγωγιμότητα υλικού ($\tilde{\rho} = \frac{1}{\tilde{\sigma}}$ ειδική αντίσταση)

Αν η κίνηση των φορτίων γίνεται λόγω ηλεκτρικού πεδίου, τότε $\vec{f} = \vec{E}$ και $\underline{\vec{J} = \tilde{\sigma}\vec{E}}$ (νόμος Ohm)

με $\vec{J} = qn\vec{v}_d$, $\underline{\vec{v}_d = -\frac{\tilde{\sigma}}{en}\vec{E}}$ (ταχύτητα διολίσθησης) αφού $\vec{J} = qn\vec{v}_d = -en\vec{v}_d = \tilde{\sigma}\vec{E}$.

Αν και υπάρχει σταθερή δύναμη, ωστόσο δεν αποκτούν τα φορτία σταθερή επιτάχυνση, αλλά σταθερή ταχύτητα και ο λόγος είναι η αντίσταση που προβάλλεται κατά την κίνηση των φορτίων, π.χ. από τα ιόντα του κρυσταλλικού πλέγματος. Η σταθερή ταχύτητα $\vec{v}_d$ που αποκτούν τα ηλεκτρόνια αγωγιμότητας ενός μετάλλου μοιάζει προς την σταθερή οριακή ταχύτητα ενός σώματος που πέφτει μέσα σε ιξώδες ρευστό. Η ταχύτητα $\vec{v}_d$ δεν είναι η ταχύτητα $\vec{v} = \frac{qt}{m}\vec{E}$ ενός φορτίου εντός σταθερού $\vec{E}$.
Στην περίπτωση της ηλεκτροστατικής στο εσωτερικό ενός αγωγού είναι $\vec{J} = 0 \Rightarrow \vec{E} = 0$ (ως γνωστόν). Για τέλειο αγωγό ($\tilde{\sigma} = \infty$) είναι $\vec{E} = \frac{1}{\tilde{\sigma}}\vec{J} = 0$, δηλαδή υπάρχει ρεύμα χωρίς να απαιτείται ηλεκτρικό πεδίο (αντίστοιχο της αδράνειας της μηχανικής), για παράδειγμα τα συνδέοντα σύρματα στα ηλεκτρικά κυκλώματα θεωρείται ότι έχουν μηδενική (ειδική) αντίσταση, είναι ισοδυναμικές περιοχές και $\vec{E} = 0$.
Στο εσωτερικό ενός αγωγού που διαρρέεται από στάσιμο ρεύμα και είναι ομογενούς αγωγιμότητας, τότε $\rho = 0$ (δηλαδή οποιοδήποτε επιπλέον φορτίο τυχόν φέρει ο αγωγός, αυτό βρίσκεται στην επιφάνεια) και $\nabla^2\phi = 0$,

αφού $\frac{\rho}{\varepsilon_0} = \nabla \cdot \vec{E} = \nabla \cdot \left(\frac{1}{\sigma}\vec{j}\right) = \frac{1}{\sigma}\nabla \cdot \vec{j} = 0$

Το έργο που παράγει το ηλεκτρικό πεδίο κατά την κίνηση των φορτίων είναι $\underline{\frac{dW}{dt} = \int_V \vec{j}\cdot\vec{E}\,dV = \int_V \sigma\, E^2\,dV}$

και η ισχύς αυτή εκφράζει τη μετατροπή της ηλεκτρικής ενέργειας σε μηχανική ενέργεια των φορτίων (κινητική, δυναμική,...) (ή θερμότητα μετέπειτα) $\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}\int_V u_{mech}\,dV = \frac{d}{dt}E_{mech}$

Πράγματι, για ένα φορτίο που κινείται με ταχύτητα $\vec{u}$ το έργο της ηλεκτρικής δύναμης είναι $\frac{dW}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{u} = q\vec{E}\cdot\vec{u}$, άρα για έναν όγκο dV φορτίου με πυκνότητα ρεύματος $\vec{j} = qn\vec{u}$ είναι $\frac{dW}{dt} = [(n\,dV)q]\,\vec{E}\cdot\vec{u} = \vec{j}\cdot\vec{E}\,dV$ και τελικά $\frac{dW}{dt} = \int_V \vec{j}\cdot\vec{E}\,dV$

Στην πιο γενική περίπτωση (π.χ. πλάσμα) που υπάρχει και μαγνητικό πεδίο, θα συμβάλει και αυτό στην κίνηση των φορτίων μέσω της δύναμης $\vec{f} = \vec{E} + \vec{u}\times\vec{B}$, άρα $\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{u}\times\vec{B})$. Επειδή συνήθως η ταχύτητα u των φορτίων στους αγωγούς (ουσιαστικά το u_d) είναι μικρή, ο όρος $\vec{u}\times\vec{B}$ είναι αγνοήσιμος σε σχέση με το $\vec{E}$. Η παραπάνω σχέση για το $\frac{dW}{dt} = \int_V \vec{j}\cdot\vec{E}\,dV = \int_V \sigma[E^2 + \vec{u}\cdot(\vec{B}\times\vec{E})]\,dV$, αφού $\vec{u}\cdot(\vec{u}\times\vec{B}) = 0$ και $\vec{E}\cdot(\vec{u}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot(\vec{E}\times\vec{u}) = \vec{u}\cdot(\vec{B}\times\vec{E})$

<u>Παράδειγμα</u> Για σύρμα Cu που δίνει 1 ηλεκτρόνιο αγωγιμότητας ανά άτομο, ακτίνας 1mm, διατομής $S = 3\times10^{-6}\,m^2$ $\left(\rho_{Cu} = 8.95\,\frac{g}{cm^3}\right)$ που διαρρέεται από ρεύμα $I = 10A$, $u_d = ;$

Είναι $n = \frac{N_A}{V_{grat}} = \frac{N_A\,\rho}{m_{grat}} = \frac{6.023\times10^{23}\times 8.95\,g/cm^3}{63.5\,g} = 8.5\times10^{28}\,\frac{\text{ηλεκτρόνια}}{cm^3}$, που

είναι μια τυπική συγκέντρωση ηλεκτρονίων στα μέταλλα.

Είναι $I = jS = qnu_dS \Rightarrow u_d = \frac{I}{enS} = \frac{10\,A}{(1.6\times10^{-19}Cb)(8.5\times10^{28}m^{-3})(3\times10^{-6}m^2)} = 2.5\times10^{-4}\,\frac{m}{s}$

$= 1\,\frac{m}{min}$. Η ταχύτητα u_d είναι πολύ μικρότερη από τη μέση ταχύτητα (θερμική) των e μεταξύ των κρούσεων, που σε θερμοκρασία δωματίου είναι $\langle u\rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m_e}} \sim 10^5\,m/s$. Ωστόσο μια λάμπα ανάβει σχεδόν ακαριαία διότι το $\vec{E}$ διαδίδεται μέσα στο σύρμα με $u \simeq c$, δηλαδή μοιάζει με ένα λάστιχο γεμάτο νερό που αμέσως μόλις ανοίξουμε τη βρύση τρέχει το νερό. Αν $\ell = 5\times10^{-9}\,m$ είναι μια τυπική απόσταση των ιόντων στο κρυσταλλικό πλέγμα, τότε ο χρόνος τ μεταξύ δύο διαδοχικών κρούσεων του e με τα ιόντα του πλέγματος είναι $\tau = \frac{\ell}{\langle u\rangle} = 5\times10^{-14}\,s$.

Ο νόμος του Ohm μπορεί να αποδειχθεί μέσω του κλασσικού μοντέλου αγωγιμότητας όπου τα e συγκρούονται με τα ιόντα του κρυσταλλικού πλέγματος και προκύπτει

$$\vec{v}_d = -\frac{e\tau}{m_e}\vec{\mathcal{E}}\ , \quad \vec{j} = \frac{ne^2\tau}{m_e}\vec{\mathcal{E}}\ , \quad \tilde{\sigma} = \frac{ne^2\tau}{m_e}\ ,$$

όπου τ ο μέσος χρόνος ανάμεσα σε δύο διαδοχικές κρούσεις.

Πράγματι, μεταξύ των κρούσεων ισχύει $\vec{v} = \vec{v}_0 - \frac{e\vec{\mathcal{E}}}{m_e}t$. Αλλά $\langle \vec{v}_0 \rangle = 0$ αφού οι αρχικές ταχύτητες είναι τυχαία κατανεμημένες, άρα $\vec{v}_d = \langle \vec{v} \rangle = -\frac{e\vec{\mathcal{E}}}{m_e}\tau \Rightarrow \vec{j} = -en\vec{v}_d = \frac{ne^2\tau}{m_e}\vec{\mathcal{E}} = \tilde{\sigma}\vec{\mathcal{E}}$.

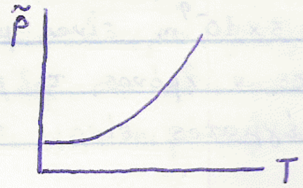
Οι ίδιες σχέσεις αποδεικνύονται και αλλιώς θεωρώντας μια φαινομενολογική δύναμη αντίδρασης $-b\vec{v}$, οπότε $m_e\frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{\mathcal{E}} - b\vec{v}$. Για $\frac{d\vec{v}}{dt} = 0$ προκύπτει η οριακή ταχύτητα $\vec{v}_L = -\frac{e}{b}\vec{\mathcal{E}}$. Ένας τυπικός χρόνος του συστήματος (χρόνος χαλάρωσης) θα εμφανίζεται στη συμπεριφορά της ταχύτητας των e αφού σβήσει το $\vec{\mathcal{E}}$ ενώ είναι $\vec{v} = \vec{v}_L$. Για $\vec{\mathcal{E}} = 0$ προκύπτει $m_e\frac{dv}{dt} = -bv \Leftrightarrow \int_{v_L}^{v}\frac{dv}{v} = -b\int_0^t dt \Leftrightarrow v = v_L e^{-\frac{b}{m_e}t} = v_L e^{-\frac{t}{\tau}}$, $\tau = \frac{m_e}{b}$ $\Rightarrow b = \frac{m_e}{\tau}$. Άρα $\vec{v}_L = -\frac{e\tau}{m_e}\vec{\mathcal{E}} = \vec{v}_d$.

Για $n \sim 10^{29}\ m^{-3}$, $\tau \sim 10^{-14}\ s$ προκύπτει $\tilde{\sigma} \sim 10^{8}\ \frac{s\,Cb^2}{m^3\,kg}$, που είναι πράγματι η τυπική τιμή της ηλεκτρικής αγωγιμότητας των μετάλλων σε θερμοκρασία δωματίου.

Περαιτέρω, στο κλασσικό αυτό μοντέλο κίνησης των e στο πλέγμα, το έργο ανά μονάδα χρόνου που παράγεται από την κίνηση ενός e είναι $\vec{F}\cdot\vec{v}_d = -e\vec{\mathcal{E}}\cdot\left(-\frac{\tilde{\sigma}}{ne}\vec{\mathcal{E}}\right) = \frac{\tilde{\sigma}}{n}\vec{\mathcal{E}}^2 = \frac{1}{n}\vec{j}\cdot\vec{\mathcal{E}}$, επομένως η ισχύς ανά μονάδα όγκου είναι $\frac{N\vec{F}\cdot\vec{v}_d}{V} = n\vec{F}\cdot\vec{v}_d = \vec{j}\cdot\vec{\mathcal{E}}$, άρα η ισχύς στον όγκο V είναι $\int_V \vec{j}\cdot\vec{\mathcal{E}}\,dV$ σε συμφωνία με προηγουμένως. Αν ο αγωγός έχει σταθερή διατομή S τότε η ισχύς που πρέπει να προσφερθεί για τη διατήρηση του ρεύματος στον αγωγό είναι $P = j\mathcal{E}V = j\mathcal{E}Sl = (jS)(\mathcal{E}l) = I\phi$ που την ξέρουμε από πριν πιο γενικά.

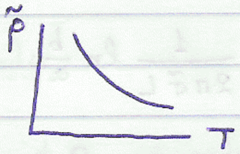
Ενώ το κλασσικό μοντέλο εξηγεί το ν. Ohm, ωστόσο δεν εξηγεί άλλα φαινόμενα, π.χ. $\tilde{\sigma} = \frac{ne^2}{m_e}\tau = \frac{ne^2}{m_e}\frac{l}{\langle v \rangle} = ne^2 l\sqrt{\frac{m_e}{3kT}} \Rightarrow \tilde{\rho} = \frac{1}{\tilde{\sigma}} = \frac{1}{ne^2 l}\sqrt{\frac{3kT}{m_e}}$, που δεν είναι σωστός διότι $\tilde{\rho} \propto T$ για την ερμηνεία της οποίας χρειάζεται η κβαντομηχανική. Συγκεκριμένα, για αγωγό σε όχι πολύ χαμηλές θερμοκρασίες είναι $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_0[1 + \alpha(T - T_0)]$, α: θερμικός συντελεστής αντίστασης.

Σε χαμηλές θερμοκρασίες, όπου τα ιόντα είναι σχεδόν ακίνητα, η ειδική αντίσταση του αγωγού οφείλεται στις ατέλειες του μετάλλου και τις ξένες



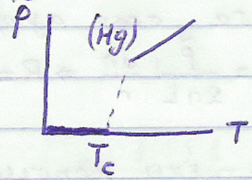
προσμίξεις. Σε υψηλές θερμοκρασίες, λόγω της θερμικής ταλάντωσης των ιόντων παραμορφώνεται η περιοδικότητα της δομής του μετάλλου και η ειδική αντίσταση, αφού οφείλεται στις κρούσεις των e με τα άτομα του αγωγού (μικρή μέση απόσταση ανάμεσα σε διαδοχικές κρούσεις), είναι μεγάλη.

Για ημιαγωγό $\alpha < 0$



και για υψηλότερη T το $\tilde{\rho}$ είναι μικρότερο διότι αυξάνουν οι φορείς (προσμίξεις)

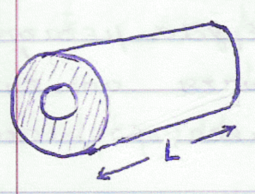
Για υπεραγωγούς

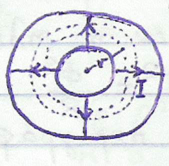


Παράδειγμα Σ' έναν ευθύγραμμο αγωγό αγωγιμότητας $\tilde{\sigma}$, διατομής S και μήκους ℓ, που στα άκρα του εφαρμόζεται διαφορά δυναμικού Φ_0, το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό του είναι ομογενές. Πράγματι, αφού η τάση Φ_0 είναι δεδομένη (χρονοανεξάρτητη), το ρεύμα θα είναι στάσιμο και θα ισχύει $\nabla^2\Phi = 0$. Στη κυλινδρική επιφάνεια είναι $\vec{j}\cdot\hat{n} = 0$, αλλιώς θα έρρεε ρεύμα έξω από τον αγωγό, άρα $\vec{\mathcal{E}}\cdot\hat{n} = \mathcal{E}_\perp = 0 \Rightarrow \left.\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right|_S = 0$.
Η λύση του δυναμικού που ικανοποιεί την εξίσωση Laplace και τις Σ.Σ. είναι $\Phi(x) = \frac{\Phi_0}{\ell}x$, όπου x είναι κατά μήκος του άξονα του αγωγού. Το ηλεκτρικό πεδίο είναι $\vec{\mathcal{E}} = -\nabla\Phi = -\frac{\Phi_0}{\ell}\hat{\imath}$ και είναι ομογενές. (Στην περίπτωση που υπάρχει τάση Φ_0 μεταξύ των δύο μεταλλικών πλακών στα άκρα, χωρίς να υπάρχει το αγώγιμο υλικό ανάμεσα, τότε η Σ.Σ. είναι διαφορετική και το πεδίο δεν είναι πλέον ομογενές). Περαιτέρω, το ρεύμα είναι $I = jS = \tilde{\sigma}\mathcal{E}S = \tilde{\sigma}\frac{\Phi_0}{\ell}S = \frac{\tilde{\sigma}S}{\ell}\Phi_0 = \frac{\Phi_0}{R}$, $R = \frac{\ell}{\tilde{\sigma}S} = \tilde{\rho}\frac{\ell}{S}$ "αντίσταση",

$[R] = \Omega = \frac{V}{A} = \frac{m^2\,kg}{s\,Cb^2}$, $[\tilde{\sigma}] = \frac{1}{\Omega\, m} = \frac{s\,Cb^2}{m^3\,kg}$

Παράδειγμα Δύο ομόκεντροι κύλινδροι $a<b$ περιβάλλουν υλικό ειδικής αγωγιμότητας $\tilde{\sigma}$ και διατηρούνται σε διαφορά δυναμικού Φ.





Αν λ είναι η γραμμική πυκνότητα φορτίων του εσωτερικού αγωγού τότε το ηλεκτρικό πεδίο (ακτινικό) σε απόσταση r $(a<r<b)$ είναι $\mathcal{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$.

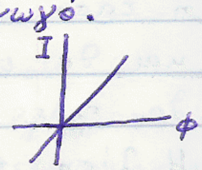
Είναι $I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{a} = \tilde{\sigma} \int_S \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{a}$, όπου $S = S(r)$ ομόκεντρη κυλινδρική επιφάνεια , άρα $I = \tilde{\sigma}\, \mathcal{E}\, 2\pi r L = \tilde{\sigma} \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 r} 2\pi r L = \frac{\tilde{\sigma}}{\varepsilon_0} \lambda L$.
Η διαφορά δυναμικού ϕ είναι
$$\phi = \int_a^b \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{\ell} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\frac{b}{a}$$

Άρα $I = \frac{2\pi\tilde{\sigma}L}{\ln\frac{b}{a}}\phi = \frac{\phi}{R}$, $R = \frac{1}{2\pi\tilde{\sigma}L}\ln\frac{b}{a}$

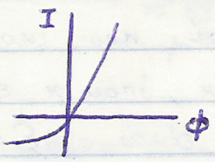
Μπορούμε να υπολογίσουμε την αντίσταση R και ως εξής: θεωρώντας έναν στοιχειώδη κύλινδρο $r, r+dr$ μέσα στον αγωγό , η στοιχειώδης αντίσταση είναι $dR = \tilde{\rho} \frac{dr}{L\int r\,d\varphi} = \tilde{\rho} \frac{dr}{L \cdot r \cdot 2\pi} = \frac{\tilde{\rho}}{2\pi L}\frac{dr}{r} \Rightarrow R = \int dR = \frac{\tilde{\rho}}{2\pi L}\int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{1}{2\pi L\tilde{\sigma}} \ln\frac{b}{a}$.

Σημειώστε ότι και στα δύο παραδείγματα έχει χρησιμοποιηθεί ο ν. Ohm $\vec{j} = \tilde{\sigma}\vec{\mathcal{E}}$.

Με βάση τα παραπάνω καταλήγουμε ότι μια ισοδύναμη διατύπωση του νόμου του Ohm είναι η $I = \frac{\phi}{R}$ που συνδέει την εφαρμοζόμενη διαφορά δυναμικού με το ρεύμα που διαρρέει τον αγωγό.
Ενώ στους αγωγούς έχουμε τη γραμμική ωμική συμπεριφορά $\frac{I}{\phi} = \frac{1}{R}$,



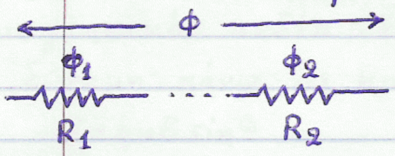
στις διόδους των ημιαγωγών είναι



δηλαδή εφαρμόζοντας τάση θετική (ορισμένης πολικότητας) η αντίσταση (αντίστροφο της κλίσης) είναι μικρή και συμπεριφέρεται ως αγωγός , όταν όμως εφαρμοστεί αρνητική τάση (αντίστροφη πολικότητα) η αντίσταση είναι μεγάλη.

Αν σ' έναν αγωγό που έχει αντίσταση R υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο $\vec{\mathcal{E}}$ στο εσωτερικό του , τότε η διαφορά δυναμικού στα άκρα του αγωγού είναι $\int_L \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{\ell} = RI$. Σε κλειστό αγωγό η διατήρηση της ενέργειας είναι $V_{\mathcal{E}} = \oint_C \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{\ell} = RI$.
Σε ωμικά υλικά η ισχύς που η ηλεκτρική ενέργεια μετατρέπεται σε θερμότητα Joule είναι $P = RI^2 = \frac{\phi^2}{R}$ που προκύπτει από την πιο γενική σχέση $P = I\phi$ που περιγράφει τη μεταφορά ισχύος με διαφορά δυναμικού ϕ και ρεύμα I.

Αντιστάσεις σε σειρά

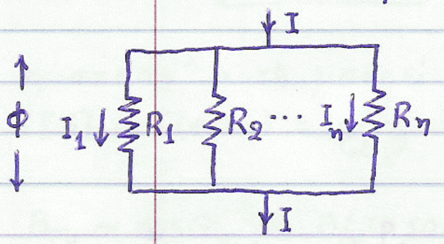


I κοινό, $\phi_1 = IR_1, \dots, \phi_n = IR_n$

$\phi = \phi_1 + \dots + \phi_n = (R_1 + \dots + R_n)I = RI$

$\Rightarrow R = R_1 + \dots + R_n > R_i$

Αντιστάσεις εν παραλλήλω

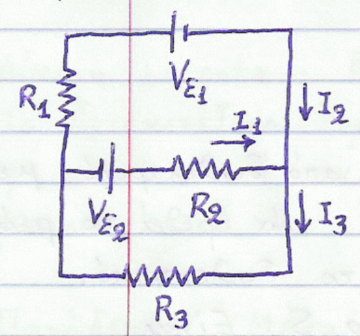


ϕ κοινό, $I_1 = \frac{\phi}{R_1}, \dots, I_n = \frac{\phi}{R_n}$

$I = I_1 + \dots + I_n = \left(\frac{1}{R_1} + \dots + \frac{1}{R_n}\right)\phi = \frac{\phi}{R}$

$\Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \dots + \frac{1}{R_n} \Rightarrow R < R_i$

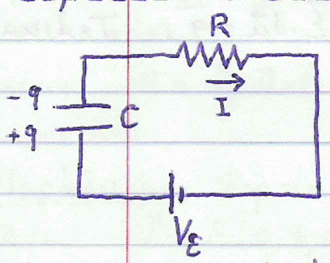
Παράδειγμα $V_{\mathcal{E}_1} = 14V$, $V_{\mathcal{E}_2} = 10V$, $R_1 = 4\Omega$, $R_2 = 6\Omega$, $R_3 = 2\Omega$



$$\left.\begin{aligned} &I_1 + I_2 = I_3 \\ &V_{\mathcal{E}_1} - I_1 R_2 + V_{\mathcal{E}_2} + I_2 R_1 = 0 \\ &-V_{\mathcal{E}_2} + I_1 R_2 + I_3 R_3 = 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} &I_1 + I_2 = I_3 \\ &14 - 6I_1 + 10 + 4I_2 = 0 \\ &-10 + 6I_1 + 2I_3 = 0 \end{aligned}\right\}$$

$\Leftrightarrow I_1 = 2A, \quad I_2 = -3A, \quad I_3 = -1A$

Φόρτιση πυκνωτή



$V_\mathcal{E} - IR - \frac{q}{C} = 0$

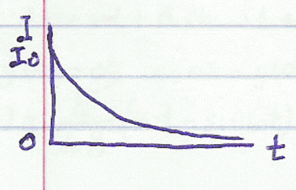
$t = 0 \Rightarrow q = 0 \Rightarrow I_0 = \frac{V_\mathcal{E}}{R}$

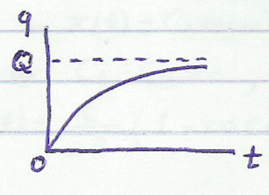
$t = \infty \Rightarrow I = 0 \Rightarrow Q = CV_\mathcal{E}$ μέγιστο φορτίο

$$\frac{dV_\mathcal{E}}{dt} - \frac{dI}{dt}R - \frac{1}{C}\frac{dq}{dt} = 0 \Rightarrow 0 - R\frac{dI}{dt} - \frac{I}{C} = 0 \Rightarrow \int_{I_0}^{I} \frac{dI}{I} = -\frac{1}{RC}\int_0^t dt \Rightarrow$$

$$\ln\frac{I}{I_0} = -\frac{t}{RC} \Rightarrow I(t) = I_0 e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{V_\mathcal{E}}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$I = \frac{dq}{dt} \Rightarrow dq = I\,dt \Rightarrow \int_0^q dq = \frac{V_\mathcal{E}}{R}\int_0^t e^{-\frac{t}{RC}}\,dt \Rightarrow q = V_\mathcal{E} C\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) = Q\left(1 - e^{-t/RC}\right)$$





$\tau = RC$ σταθερά χρόνου του κυκλώματος

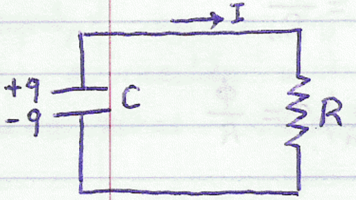
Θερμότητα Joule $= \int \Phi I \, dt = \int_0^\infty R I^2 dt = I_0^2 R \int_0^\infty e^{-\frac{2t}{RC}} dt = I_0^2 R \frac{RC}{2} =$

$= \frac{V_\mathcal{E}^2}{R^2} \frac{R^2 C}{2} = \frac{1}{2} C V_\mathcal{E}^2$

Ενέργεια πυκνωτή $= \frac{1}{2} C V_\mathcal{E}^2$

Ενέργεια μπαταρίας $= Q V_\mathcal{E} = C V_\mathcal{E}^2$

Εκφόρτιση πυκνωτή



$$\frac{q}{C} - IR = 0$$

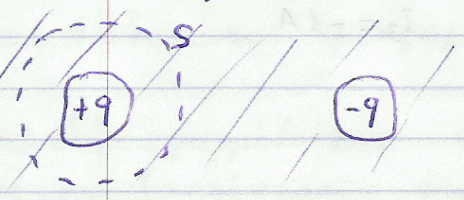
Για $t=0 \Rightarrow I_0 = \frac{Q}{RC}$

$$I = -\frac{dq}{dt} \Rightarrow \frac{q}{C} + R\frac{dq}{dt} = 0 \Rightarrow \int_Q^q \frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC}\int_0^t dt \Rightarrow$$

$$\ln\frac{q}{Q} = -\frac{t}{RC} \Rightarrow q(t) = Q\, e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$I(t) = -\frac{dq(t)}{dt} = \frac{Q}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} = I_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

Άσκηση Οι αγωγοί με φορτία $+q, -q$ περιβάλλονται από διηλεκτρικό με σχετική διαπερατότητα ϵ_r και ηλεκτρική αγωγιμότητα $\tilde{\sigma}$. Να βρεθεί το ρεύμα που διαρρέει το διηλεκτρικό.



Θεωρούμε την επιφάνεια S. Είναι

$$I = \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{a} = \tilde{\sigma} \oint_S \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{a}$$

Αλλά $\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{a} = q_f = q$ με $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{\mathcal{E}}$, άρα $\epsilon_0 \epsilon_r \oint_S \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{a} = q$. Τελικά

$$I = \frac{\tilde{\sigma} q}{\epsilon_0 \epsilon_r}.$$