ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

Φυσική ΙΙ

Σημειώσεις – Ηλεκτροστατική ΙΙ

Κοφινάς Γιώργος

Τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών και Επικοινωνιακών Συστημάτων

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

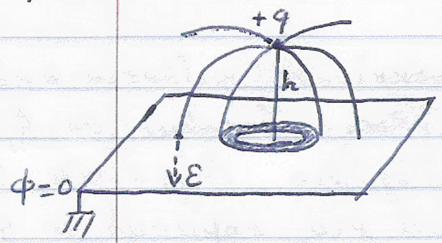
Χρηματοδότηση

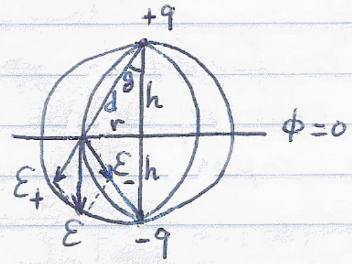
- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Μέθοδος εικόνων

Παράδειγμα 1 Φορτίο q σε απόσταση h από γειωμένη μεταλλική επιφάνεια. Ποιο το $\vec{\mathcal{E}}$ στην επιφάνεια, η κατανομή φορτίου σ στην επιφάνεια και το ολικό επαγώμενο φορτίο στην επιφάνεια?





Λόγω της γείωσης εμφανίζεται στο επίπεδο αρνητικό φορτίο, του οποίου όμως δεν ξέρουμε την κατανομή ώστε να υπολογίσουμε το $\vec{\mathcal{E}}$. Θεωρούμε το φορτίο $-q$ (φορτίο εικόνα) αντιδιαμετρικά ως προς το επίπεδο και αγνοούμε την πραγματική επιφάνεια. Τότε λόγω συμμετρίας στην υποθετική επιφάνεια είναι $\phi=0$, άρα ικανοποιείται η συνοριακή εξίσωση της εξίσωσης Poisson $\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$. Πρόκειται λοιπόν περί ενός ισοδύναμου προβλήματος και αρκεί να βρούμε το πεδίο που παράγουν τα δύο φορτία.

Είναι $\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}_+ + \vec{\mathcal{E}}_- \Rightarrow \mathcal{E}^2 = \mathcal{E}_+^2 + \mathcal{E}_-^2 + 2\,\mathcal{E}_+\mathcal{E}_-\cos 2\vartheta$

Αλλά $\mathcal{E}_+ = \mathcal{E}_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{d^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2+h^2}$

Άρα $\mathcal{E}^2 = 2\,\mathcal{E}_+^2(1+\cos 2\vartheta) = 4\,\mathcal{E}_+^2\cos^2\vartheta \Rightarrow \mathcal{E} = 2\,\mathcal{E}_+\cos\vartheta = 2\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2+h^2}\frac{h}{\sqrt{r^2+h^2}}$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{E}(r) = \frac{2qh}{4\pi\epsilon_0(r^2+h^2)^{3/2}}$$

Το πραγματικό πεδίο στην περιοχή πίσω από την επιφάνεια είναι μηδέν. Άρα αν $\sigma(r)$ είναι η επαγώμενη επιφανειακή πυκνότητα φορτίου τότε

$$\mathcal{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \Rightarrow \sigma(r) = \epsilon_0\mathcal{E}(r) = \frac{qh}{2\pi(r^2+h^2)^{3/2}}$$

Το ολικό φορτίο που επάγεται στην επιφάνεια είναι

$$Q = \int\sigma\,da = \int\sigma(r)\,2\pi r\,dr = qh\int_0^\infty \frac{r}{(r^2+h^2)^{3/2}}dr = -qh\left.\frac{1}{\sqrt{r^2+h^2}}\right|_0^\infty = \frac{qh}{h} = q,$$

δηλαδή το ολικό φορτίο στην επιφάνεια είναι αντίθετο του q, δηλ. $-q$.

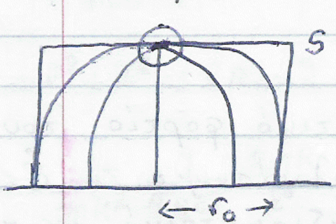
Ποιο έργο χρειάζεται για να μεταφερθεί το q στο άπειρο?

Η δύναμη που δέχεται το q σε κάθε απόσταση h είναι (λόγω της θεώρησης των εικόνων) $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{(2h)^2}$, άρα

$$W=\int F\,dh=\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0}\int_h^{\infty}\frac{dh}{h^2}=\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 h}.$$

Αν πραγματικά υπήρχαν τα $q, -q$ τότε η δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι $U=\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(2h)}$, άρα $U=2W$.

Αν θεωρήσουμε τις δυναμικές γραμμές που εκκινούν οριζόντια από το q, τότε αυτές τέμνουν κάπου την επιφάνεια και ζητούμε να βρούμε αυτό το σημείο τομής. Θεωρούμε την ορθογώνια επιφάνεια S.



Αν θεωρήσουμε αντί για σημειακό το q ότι είναι κάποια πιο εκτεταμένη σφαίρα, τότε το φορτίο που περικλείεται στην S είναι $q/2$. Άρα

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{a}=\frac{q}{2\epsilon_0}\Leftrightarrow \int_0^{r_0}E(r)\,2\pi r\,dr=\frac{q}{2\epsilon_0}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2qh}{4\pi\epsilon_0}2\pi\int_0^{r_0}\frac{r\,dr}{(r^2+h^2)^{3/2}}=\frac{q}{2\epsilon_0}\Leftrightarrow -h\left.\frac{1}{\sqrt{r^2+h^2}}\right|_0^{r_0}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

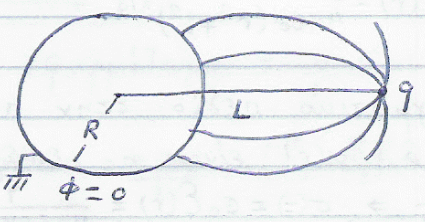
$$h\left(\frac{1}{h}-\frac{1}{\sqrt{r_0^2+h^2}}\right)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \frac{h}{\sqrt{r_0^2+h^2}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow r_0=\sqrt{3}\,h$$

Επειδή $\int_0^{r_0}E(r)\,2\pi r\,dr=\int_0^{r_0}\frac{\sigma(r)}{\epsilon_0}2\pi r\,dr=\frac{1}{\epsilon_0}\int_0^{r_0}\sigma(r)\,2\pi r\,dr=\frac{q}{2\epsilon_0}\Rightarrow$

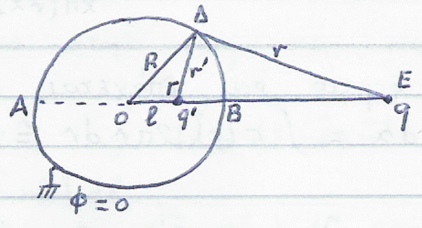
$\Rightarrow \int_0^{r_0}\sigma(r)\,2\pi r\,dr=\frac{q}{2}$, δηλαδή μέσα στην ακτίνα r_0 βρίσκεται το μισό φορτίο της πλάκας.

Παράδειγμα 2

Φορτίο q σε απόσταση $L>R$ από το κέντρο γειωμένης σφαίρας ακτίνας R.



Ψάχνουμε μήπως ένα κατάλληλο φορτίο q' στην κατάλληλη θέση l μαζί με το q δημιουργούν δυναμικό $\phi=0$ στη σφαίρα.



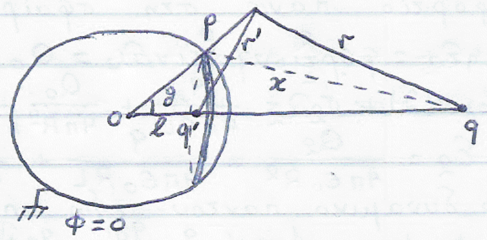
Οφείλε $\phi=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{r}+\frac{q'}{r'}\right)=0\Rightarrow \frac{q'}{r'}=-\frac{q}{r}$

Για το σημείο A: $\frac{q'}{R+l}=-\frac{q}{L+R}$

ενώ για το B: $\frac{q'}{R-l}=-\frac{q}{L-R}$, άρα $\frac{R-l}{R+l}=\frac{L-R}{L+R}\Leftrightarrow l=\frac{R^2}{L}$, επομένως $q'=-q\frac{R}{L}$ (επειδή $R<L\Rightarrow |q'|<|q|$). Τα τρίγωνα ΟΓΔ, ΟΔΕ έχουν κοινή γωνία Ο και $\frac{l}{R}=\frac{R}{L}$, άρα είναι όμοια και επομένως $\frac{r'}{r}=\frac{l}{R}=\frac{R}{L}$.

Τελικά στην επιφάνεια της σφαίρας είναι $\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{r} - q\frac{R}{L}\frac{L}{rR}\right) = 0$

Για το τυχόν σημείο εκτός της σφαίρας
$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{r}+\frac{q'}{r'}\right)$, όπου $r = (\rho^2+L^2-2\rho L\cos\theta)^{1/2}$
$r' = (\rho^2+\ell^2-2\rho\ell\cos\theta)^{1/2}$



Το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E} = -\nabla\phi$ σε πολικές συντεταγμένες με αρχή O είναι

$$E_\rho = -\frac{\partial\phi}{\partial\rho}, \quad E_\theta = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}, \quad \text{άρα}$$

$$E_\rho = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(-\frac{q}{r^2}\frac{\partial r}{\partial\rho} - \frac{q'}{r'^2}\frac{\partial r'}{\partial\rho}\right) \Rightarrow E_\rho(\rho,\theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{\rho - L\cos\theta}{(\rho^2+L^2-2\rho L\cos\theta)^{3/2}} - \frac{RL(\rho L - R^2\cos\theta)}{(\rho^2L^2+R^4-2\rho R^2L\cos\theta)^{3/2}}\right]$$

$$\Rightarrow E_\rho(R,\theta) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}\frac{L^2-R^2}{(R^2+L^2-2RL\cos\theta)^{3/2}} < 0$$

Η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου είναι $\sigma(\theta) = \epsilon_0 E_\rho(R,\theta) = -\frac{q}{4\pi R}\frac{L^2-R^2}{(R^2+L^2-2RL\cos\theta)^{3/2}}<0$ ενώ το ολικό φορτίο της σφαίρας

$Q = \int\sigma(\theta)\,da$, όπου $da = 2\pi(R\sin\theta)(R\,d\theta) = 2\pi R^2\sin\theta\,d\theta$

$x^2 = R^2+L^2-2RL\cos\theta \Rightarrow 2x\,dx = 2RL\sin\theta\,d\theta$

$$Q = \frac{q}{4\pi R}(R^2-L^2)2\pi R^2\int_{L-R}^{L+R}\frac{x\,dx}{RLx^3} = \frac{q(L^2-R^2)}{2L}\left.\frac{1}{x}\right|_{L-R}^{L+R} = -q\frac{R}{L} = q'$$

Η δύναμη πάνω στο φορτίο q είναι $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qq'}{(L-\ell)^2} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R^2}\left(\frac{R}{L}\right)^3\left(1-\frac{R^2}{L^2}\right)^{-2}$.
Το ίδιο προκύπτει και με ολοκλήρωση πάνω στο φορτίο της σφαίρας.

(*) Έστω ότι έχουμε μονωμένη (όχι γειωμένη) μεταλλική σφαίρα με μηδενικό ολικό φορτίο και ένα φορτίο q σε απόσταση L. Θέλουμε να βρούμε την κατανομή φορτίου πάνω στη σφαίρα. Θεωρούμε την προηγούμενη περίπτωση της γειωμένης σφαίρας και επιπλέον βάζουμε στη σφαίρα ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο $Q_1 = -Q = -q' = q\frac{R}{L}$, δηλαδή μια επιπρόσθετη κατανομή φορτίου $\sigma_1 = \frac{Q_1}{4\pi R^2} = \frac{q}{4\pi RL}$. Το συνολικό φορτίο στη σφαίρα είναι $Q+Q_1=0$ ενώ λόγω γραμμικότητας το επιπρόσθετο ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί το Q_1 στη σφαίρα είναι $E_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 RL} = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0}$. Η συνολική κατανομή φορτίου είναι
$\sigma_1+\sigma(\theta) = \frac{q}{4\pi RL} - \frac{q}{4\pi R}\frac{L^2-R^2}{(R^2+L^2-2RL\cos\theta)^{3/2}}$. Το συνολικό δυναμικό παντού έξω από τη σφαίρα είναι $\phi+\phi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{r}+\frac{q'}{r'}+\frac{q_1}{\rho}\right)$, άρα πάνω στη σφαίρα $0+\phi_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 L}$

(*) Αν έχουμε μια σφαίρα με φορτίο Q_0 και ένα φορτίο q σε απόσταση L, τότε βάζουμε στη γειωμένη σφαίρα ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο $Q_2 = Q_1+Q_0 = q\frac{R}{L}+Q_0$, δηλαδή μια επιπρόσθετη κατανομή φορτίου

$\sigma_2 = \dfrac{Q_2}{4\pi R^2} = \dfrac{q}{4\pi RL} + \dfrac{Q_0}{4\pi R^2}$. Το συνολικό φορτίο στη σφαίρα είναι

$Q + Q_2 = -q\dfrac{R}{L} + q\dfrac{R}{L} + Q_0 = Q_0$, ενώ το επιπρόσθετο ηλεκτρικό πεδίο λόγω του Q_2 στη σφαίρα είναι

$E_2 = \dfrac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 RL} + \dfrac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \dfrac{\sigma_2}{\epsilon_0}$. Η συνολική κατανομή φορτίου

είναι $\sigma_2 + \sigma(\theta) = \dfrac{q}{4\pi RL} + \dfrac{Q_0}{4\pi R^2} - \dfrac{q}{4\pi R}\dfrac{L^2 - R^2}{(R^2 + L^2 - 2RL\cos\theta)^{3/2}}$.

Το δυναμικό παντού έξω από τη σφαίρα είναι

$$\phi + \phi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{r} + \frac{q'}{r'} + \frac{q_2}{\rho}\right)$$, άρα στη σφαίρα

$$0 + \phi_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 L} + \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 R}$$

<u>Άσκηση</u> Για αγωγούς με δυναμικά ϕ_i, το δυναμικό στην εξωτερική τους περιοχή V έχει τη δυναμική ενέργεια $U = \frac{\epsilon_0}{2}\int_V |\nabla\phi|^2 dV =$ ελάχιστη (σε σχέση με όλες τις άλλες συναρτήσεις ϕ που ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες).

Πράγματι, η μεταβολή του U κατά τη μεταβολή από μια τυχούσα τέτοια συνάρτηση ϕ σε μία άλλη $\phi + \delta\phi$ είναι

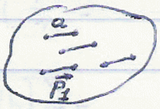
$$\delta U = \frac{\epsilon_0}{2}\int_V \delta(\nabla\phi\cdot\nabla\phi)\,dV = \epsilon_0\int_V \delta\nabla\phi\cdot\nabla\phi\,dV = \epsilon_0\int_V \nabla(\delta\phi)\cdot\nabla\phi\,dV =$$
$$= \epsilon_0\int_V [\nabla\cdot(\delta\phi\,\nabla\phi) - \delta\phi\,\nabla\cdot\nabla\phi]\,dV = \epsilon_0\oint_{S=\cup S_i}\delta\phi\,\nabla\phi\cdot d\vec{a} - \epsilon_0\int_V \delta\phi\,\nabla^2\phi\,dV$$
$$= -\epsilon_0\int_V \delta\phi\,\nabla^2\phi\,dV, \quad \text{αφού } \delta\phi|_{S_i} = 0.$$

Άρα για τη λύση του δυναμικού $\nabla^2\phi = 0$ θα είναι $\delta U = 0 \Rightarrow$ U ακρότατο (ελάχιστο)

Για ένα σύστημα φορτίων ή μια κατανομή η ηλεκτρική διπολική ροπή του είναι $\vec{p} = \sum_i q_i \vec{R}_i = \int_V \vec{R}\,\rho(\vec{R})\,dV$ με διαστάσεις $[p] = Cb \cdot m$

Για ένα ηλεκτρικό δίπολο (δύο ίσα και αντίθετα φορτία σε κάποια απόσταση) $\vec{p} = q\vec{R}_+ - q\vec{R}_- = q(\vec{R}_+ - \vec{R}_-) = q\vec{R}_{-+} = q\vec{a}$

Πόλωση $\vec{P}$ υλικού είναι η ηλεκτρική διπολική ροπή ανά μονάδα όγκου (πυκνότητα διπολικής ροπής), δηλ. $\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dV} = \frac{\sum_i q_i \vec{a}}{dV} = \frac{dq\,\vec{a}}{dV} = \rho\vec{a} = nq\vec{a}$ $= n\vec{p}_1$, όπου $\vec{p}_1$ η διπολική ροπή ενός διπόλου, άρα η συνολική διπολική ροπή σε κάποια περιοχή είναι

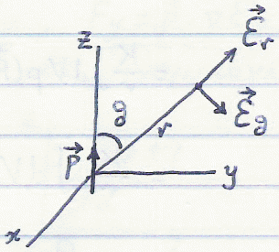


$\vec{p} = \int \vec{P}\,dV$ και $[P] = \frac{Cb}{m^2}$.

Για ένα δίπολο $\vec{p} = p\hat{z}$ ισχύει για $r \gg a$:

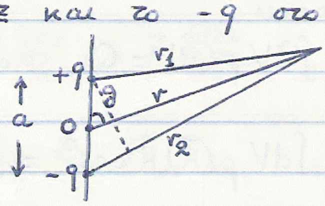
$$\phi = \frac{p\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p}\cdot\hat{e}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$\mathcal{E}_r = \frac{2p\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \quad \mathcal{E}_\theta = \frac{p\sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \leftrightarrow \vec{\mathcal{E}} = \frac{3(\vec{p}\cdot\hat{e}_r)\hat{e}_r - \vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$



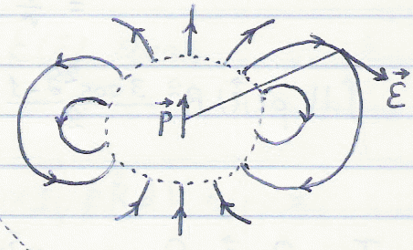
Πράγματι, το $+q$ βρίσκεται στο $+\frac{a}{2}$ πάνω στον άξονα z και το $-q$ στο $-\frac{a}{2}$, οπότε $\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2}\right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$

όπου $r_2 - r_1 \simeq a\cos\theta$, $r_1 r_2 \simeq r^2$



Άρα $\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{a\cos\theta}{r^2} = \frac{p\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ και

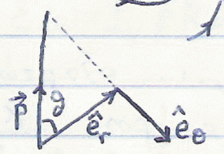
$$\mathcal{E}_r = -\frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{2p\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \quad \mathcal{E}_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = \frac{p\sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$



Επειδή το ολικό φορτίο του διπόλου είναι μηδέν

Είναι $\vec{p} = a\hat{e}_r + b\hat{e}_\theta \Rightarrow a = \vec{p}\cdot\hat{e}_r = p\cos\theta$

$b = \vec{p}\cdot\hat{e}_\theta = -p\sin\theta$



$$\Rightarrow \vec{p} = p\cos\theta\,\hat{e}_r - p\sin\theta\,\hat{e}_\theta \Rightarrow p\sin\theta\,\hat{e}_\theta = p\cos\theta\,\hat{e}_r - \vec{p}$$

$$\vec{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_r\hat{e}_r + \mathcal{E}_\theta\hat{e}_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3}(2p\cos\theta\,\hat{e}_r + p\sin\theta\,\hat{e}_\theta)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3}(3p\cos\theta\,\hat{e}_r - \vec{p}) = \frac{3(\vec{p}\cdot\hat{e}_r)\hat{e}_r - \vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

Στο (y, z) επίπεδο είναι $y = r\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, άρα

$$\phi = \frac{pz}{4\pi\epsilon_0(y^2+z^2)^{3/2}}, \quad \mathcal{E}_x = 0, \quad \mathcal{E}_y = -\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{3pyz}{4\pi\epsilon_0(y^2+z^2)^{5/2}} = \frac{3p\sin\theta\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

$$\mathcal{E}_z = -\frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{3z^2}{(y^2+z^2)^{5/2}} - \frac{1}{(y^2+z^2)^{3/2}}\right] = \frac{p}{4\pi\epsilon_0}\frac{3\cos^2\theta - 1}{r^3}$$

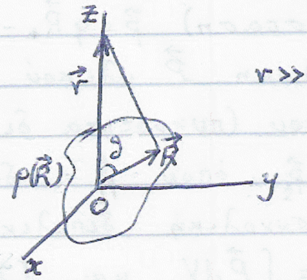
Για μικρές αποστάσεις $r \lesssim a$ το πεδίο του διπόλου δεν δίνεται από την παραπάνω διπολική έκφραση, αλλά περιέχει πολλές πολυπολικές ροπές.

Για πεπερασμένη κατανομή φορτίου ισχύει

$$\phi(\vec r) = K\frac{Q}{r} + K\frac{\vec p\cdot\hat e_r}{r^2} + K\frac{\mathcal{Q}}{r^3} + \dots$$

όπου Q = φορτίο, $\vec p$ = διπολική ροπή, $\mathcal{Q}$ = τετραπολική ροπή, ...

Πράγματι, έστω $\vec r = r\hat z$. Είναι



$r \gg R$

$$\phi(\vec r) = K\int dV\,\frac{\rho(\vec R)}{|\vec r-\vec R|} = K\int dV\,\frac{\rho(\vec R)}{\sqrt{r^2+R^2-2rR\cos\vartheta}}$$

$$= \frac{K}{r}\int dV\,\rho(\vec R)\left(1-2\frac{R}{r}\cos\vartheta+\frac{R^2}{r^2}\right)^{-1/2}$$

$$= \frac{K}{r}\int dV\rho(\vec R)\left[1-\frac{1}{2}\left(-2\frac{R}{r}\cos\vartheta+\frac{R^2}{r^2}\right)+\frac{3}{8}\left(-2\frac{R}{r}\cos\vartheta+\frac{R^2}{r^2}\right)^2+\dots\right]dV$$

$$= \frac{K}{r}\int dV\rho(\vec R)\Big[1+\underbrace{\frac{R}{r}\cos\vartheta}_{\frac{\vec r\cdot\vec R}{r^2}}+\frac{R^2}{2r^2}(3\cos^2\vartheta-1)+\dots\Big]dV$$

$$= \frac{K}{r}\int dV\rho(\vec R) + \frac{K}{r^2}\int dV\rho(\vec R)R\cos\vartheta + \frac{K}{r^3}\int dV\rho(\vec R)R^2\,\frac{3\cos^2\vartheta-1}{2}+\dots$$

$$= K\frac{Q}{r} + K\frac{\vec p\cdot\hat e_r}{r^2} + K\frac{\mathcal{Q}}{r^3}+\dots$$

όπου

$\int dV\rho(\vec R) = Q$ μονοπολική ροπή, ένταση μονοπόλου, ολικό φορτίο

$$\int dV\rho(\vec R)R\cos\vartheta = \int dV\rho(\vec R)R_z = p_z = \vec p\cdot\hat z = \vec p\cdot\hat e_r$$
$$= \frac{\vec r}{r}\cdot\int dV\rho(\vec R)\vec R = \frac{\vec r\cdot\vec p}{r}$$

$\hat e_r$-συνιστώσα διπολικής ροπής

$$\int dV\rho(\vec R)R^2\frac{3\cos^2\vartheta-1}{2} = \frac{1}{2}\int dV\rho(\vec R)\left[3(R\cos\vartheta)^2-R^2\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\int dV\rho(\vec R)(3R_z^2-R^2) = \mathcal{Q}\quad \text{(quadrupole)}$$

ροπή ηλεκτρικού τετραπόλου

Τα $Q, \vec p, \mathcal{Q}, \dots$ εξαρτώνται μόνο από τη δομή της κατανομής φορτίου. Αν $Q\neq 0$ ο όρος $\frac{KQ}{r}$ υπερισχύει. Αν $Q=0$ τότε ο όρος $K\frac{\vec p\cdot\hat e_r}{r^2}$ υπερισχύει και αν μετατοπίσουμε την αρχή των αξόνων $\vec R\to\vec R+\vec C$ τότε $\int dV\rho R_z \to \int dV\rho R_z + C_z\int dV\rho = \int dV\rho R_z + 0$, δηλαδή για ουδέτερη κατανομή η συνιστώσα της διπολικής ροπής δεν εξαρτάται από την αρχή των αξόνων.

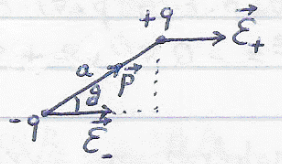
Η δύναμη που ασκείται σε μια πεπερασμένη κατανομή φορτίου εντός ηλεκτρικού πεδίου $\vec{\mathcal{E}}(\vec r)$ είναι $F_i = Q\,\mathcal{E}_i(0) + \vec p\cdot\nabla\mathcal{E}_i(0)+\dots$

διότι $\vec F = \int_V \vec{\mathcal{E}}\rho\, dV$ και $\mathcal{E}_i(\vec R) = \mathcal{E}_i(0) + \vec R\cdot\nabla\mathcal{E}_i(0)+\dots$, άρα

$$F_i = \int_V \mathcal{E}_i\rho\, dV = \int_V \mathcal{E}_i(0)\rho(\vec R)\,dV + \int_V \rho(\vec R)\,\vec R\cdot\nabla\mathcal{E}_i(0)\,dV = \mathcal{E}_i(0)\int_V\rho(\vec R)dV + \nabla\mathcal{E}_i(0)\cdot\int_V\rho(\vec R)\vec R\,dV$$
$$= Q\,\mathcal{E}_i(0) + \nabla\mathcal{E}_i(0)\cdot\vec p + \dots$$

Για ένα δίπολο εντός του ηλεκτρικού πεδίου $\vec{\mathcal{E}}=\mathcal{E}(x)\,\hat{i}$ είναι $Q=0$ και αν $\vartheta=(\widehat{\vec{\mathcal{E}},\vec{p}})$ έχουμε $\vec{F}=F\hat{i}$, όπου

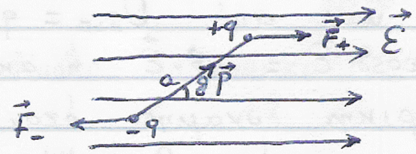
$$F=\nabla\mathcal{E}\cdot\vec{p}=\frac{\mathcal{E}_+-\mathcal{E}_-}{a\cos\vartheta}\,\hat{i}\cdot\vec{p}=\frac{\mathcal{E}_+-\mathcal{E}_-}{a\cos\vartheta}\,p\cos\vartheta=\frac{\mathcal{E}_+-\mathcal{E}_-}{a}\,qa$$
$$=q(\mathcal{E}_+-\mathcal{E}_-)$$



$$\Rightarrow\ \vec{F}=q(\vec{\mathcal{E}}_+-\vec{\mathcal{E}}_-)$$

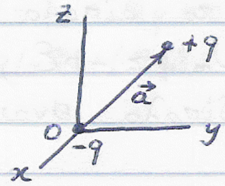
Το ίδιο προκύπτει και άμεσα αφού

$$\vec{F}=\vec{F}_++\vec{F}_-=q\vec{\mathcal{E}}_+-q\vec{\mathcal{E}}_-=q(\vec{\mathcal{E}}_+-\vec{\mathcal{E}}_-)$$



Μπορούμε να παράξουμε τη γενική δύναμη $F_x=\vec{p}\cdot\nabla\mathcal{E}_x$, $F_y=\vec{p}\cdot\nabla\mathcal{E}_y$, $F_z=\vec{p}\cdot\nabla\mathcal{E}_z$ που ασκείται σ' ένα δίπολο ευρισκόμενο σε ανομοιογενές ηλεκτρικό πεδίο και ως εξής:

$$F_x=-q\,\mathcal{E}_x(0,0,0)+q\,\mathcal{E}_x(a_x,a_y,a_z)$$
$$\mathcal{E}_x(a_x,a_y,a_z)\simeq\mathcal{E}_x(0,0,0)+a_x\frac{\partial\mathcal{E}_x}{\partial x}+a_y\frac{\partial\mathcal{E}_x}{\partial y}+a_z\frac{\partial\mathcal{E}_x}{\partial z}$$



$$\Rightarrow F_x=qa_x\frac{\partial\mathcal{E}_x}{\partial x}+qa_y\frac{\partial\mathcal{E}_x}{\partial y}+qa_z\frac{\partial\mathcal{E}_x}{\partial z}$$
$$=\hat{i}\cdot q\vec{a}\,\frac{\partial\mathcal{E}_x}{\partial x}+\hat{j}\cdot q\vec{a}\,\frac{\partial\mathcal{E}_x}{\partial y}+\hat{k}\cdot q\vec{a}\,\frac{\partial\mathcal{E}_x}{\partial z}=\hat{i}\cdot\vec{p}\,\frac{\partial\mathcal{E}_x}{\partial x}+\hat{j}\cdot\vec{p}\,\frac{\partial\mathcal{E}_x}{\partial y}+\hat{k}\cdot\vec{p}\,\frac{\partial\mathcal{E}_x}{\partial z}$$
$$=\vec{p}\cdot\left(\hat{i}\,\frac{\partial\mathcal{E}_x}{\partial x}+\hat{j}\,\frac{\partial\mathcal{E}_x}{\partial y}+\hat{k}\,\frac{\partial\mathcal{E}_x}{\partial z}\right)=\vec{p}\cdot\nabla\mathcal{E}_x$$

και όμοια για τα F_y, F_z

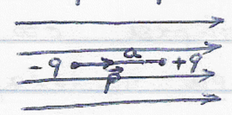
Η ροπή που ασκείται σε μια κατανομή εντός του $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})$ είναι

$$\vec{\tau}=\vec{p}\times\vec{\mathcal{E}}(0)+\cdots$$

αφού

$$\vec{\tau}=\int_V\vec{R}\times\rho\vec{\mathcal{E}}\,dV=\int_V\rho\vec{R}\times\vec{\mathcal{E}}(0)\,dV+\cdots=-\vec{\mathcal{E}}(0)\times\int_V\rho\vec{R}\,dV+\cdots=$$
$$=-\vec{\mathcal{E}}(0)\times\vec{p}+\cdots=\vec{p}\times\vec{\mathcal{E}}(0)+\cdots$$

Για ένα δίπολο με $\vec{\mathcal{E}}_+\simeq\vec{\mathcal{E}}_-$ η ροπή ζεύγους είναι $\vec{\tau}=\vec{a}\times\vec{F}_+=\vec{a}\times q\vec{\mathcal{E}}=q\vec{a}\times\vec{\mathcal{E}}\Rightarrow$ $\vec{\tau}=\vec{p}\times\vec{\mathcal{E}}\Rightarrow\tau=p\mathcal{E}\sin\vartheta$, άρα το δίπολο προσανατολίζεται ομόρροπα στο $\vec{\mathcal{E}}$. Σε συμφωνία με τα παραπάνω, σε ένα προσανατολισμένο δίπολο η δύναμη εντός ανομοιογενούς πεδίου είναι



$$F=q(\mathcal{E}_+-\mathcal{E}_-)=q\frac{d\mathcal{E}}{dx}a=p\frac{d\mathcal{E}}{dx}$$

, άρα αν $\vec{p}\uparrow\uparrow\vec{\mathcal{E}}$ το δίπολο κινείται προς την κατεύθυνση αύξησης του $\mathcal{E}$, ενώ αν $\vec{p}\uparrow\downarrow\vec{\mathcal{E}}$ το δίπολο κινείται προς την κατεύθυνση μείωσης του $\mathcal{E}$.

Η δυναμική ενέργεια μιας κατανομής φορτίου εντός ηλεκτρικού πεδίου είναι

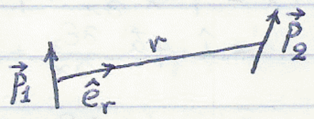
$$U=Q\,\Phi(0)-\vec{p}\cdot\vec{\mathcal{E}}(0)+\cdots$$

διότι $F_i = Q\,\mathcal{E}_i(0) + \vec{p}\cdot\nabla\mathcal{E}_i(0) + \cdots \Rightarrow \vec{F} = Q\vec{\mathcal{E}}(0) + (\vec{p}\cdot\nabla)\vec{\mathcal{E}}(0) + \cdots$; αλλά
$\nabla(\vec{p}\cdot\vec{\mathcal{E}}) = (\vec{p}\cdot\nabla)\vec{\mathcal{E}} + (\vec{\mathcal{E}}\cdot\nabla)\vec{p} + \vec{p}\times(\nabla\times\vec{\mathcal{E}}) + \vec{\mathcal{E}}\times(\nabla\times\vec{p}) = (\vec{p}\cdot\nabla)\vec{\mathcal{E}} + 0 + 0 + 0$, άρα
$\vec{F} = -Q\nabla\phi(0) + \nabla(\vec{p}\cdot\vec{\mathcal{E}})(0) + \cdots$ και $\vec{F} = -\nabla U$, άρα $U = Q\phi(0) - \vec{p}\cdot\vec{\mathcal{E}}(0) + \cdots$

Επομένως, η δυναμική ενέργεια διπόλου είναι $U_{διπ} = -\vec{p}\cdot\vec{\mathcal{E}}$ που προκύπτει και από $U_{διπ} = q\phi_+ - q\phi_- = q(\phi_+ - \phi_-) = -qa\cos\theta\left(-\frac{\phi_+ - \phi_-}{a\cos\theta}\right) = -p\cos\theta\,\mathcal{E} = -\vec{p}\cdot\vec{\mathcal{E}}$ ή ακόμα μπορούμε να θεωρήσουμε το έργο της ηλεκτρικής δύναμης όταν το δίπολο στρίβει από την αρχική γωνία θ_0 στη γωνία θ, $W = -\int_{\theta_0}^{\theta}\tau\,d\theta = -\int_{\theta_0}^{\theta} p\mathcal{E}\sin\theta\,d\theta = p\mathcal{E}\cos\theta\Big|_{\theta_0}^{\theta} = p\mathcal{E}(\cos\theta - \cos\theta)$ και πράγματι π.χ. για $\theta = 0$, $W = p\mathcal{E}(1-\cos\theta_0) > 0$, άρα $W = U_0 - U$, $U = -p\mathcal{E}\cos\theta = -\vec{p}\cdot\vec{\mathcal{E}}$. Ελάχιστη δυναμική ενέργεια έχει το δίπολο όταν είναι προσανατολισμένο στην κατεύθυνση του $\vec{\mathcal{E}}$, $U_{min} = -p\mathcal{E}$, ενώ η μέγιστη δυναμική ενέργεια είναι όταν το δίπολο είναι αντιπαράλληλο στο $\vec{\mathcal{E}}$, $U_{max} = p\mathcal{E}$.

Η ενέργεια αλληλεπίδρασης δύο διπόλων $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ είναι

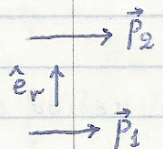
$$U_{διπ-διπ} = -\frac{3(\vec{p}_1\cdot\hat{e}_r)(\vec{p}_2\cdot\hat{e}_r) - \vec{p}_1\cdot\vec{p}_2}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

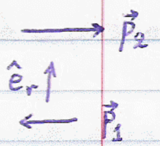


διότι $U_{διπ-διπ} = -\vec{p}_2\cdot\vec{\mathcal{E}}_1 = -\vec{p}_2\cdot\frac{3(\vec{p}_1\cdot\hat{e}_r)\hat{e}_r - \vec{p}_1}{4\pi\epsilon_0 r^3}$

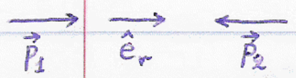
Άρα η ενέργεια αλληλεπίδρασης είναι συμμετρική στην εναλλαγή των $\vec{p}_1, \vec{p}_2$. Επίσης η αλληλεπίδραση των διπόλων δεν είναι κεντρική, δηλαδή δεν εξαρτάται μόνο από την απόσταση τους r, αλλά και από τον προσανατολισμό των $\vec{p}_1, \vec{p}_2$, δηλ. από τα $\vec{p}_1\cdot\hat{e}_r$, $\vec{p}_2\cdot\hat{e}_r$, επομένως η στροφορμή των διπόλων δεν διατηρείται. Επίσης η δύναμη μεταξύ των δύο διπόλων δεν βρίσκεται πάνω στο φορέα που ενώνει τα δύο δίπολα, αφού π.χ. $\vec{\mathcal{E}}_1 \nparallel \vec{r}$ ή ακόμα $\vec{F} = -\nabla_{\vec{r}} U_{διπ-διπ}$ και το $\vec{r}$ υπάρχει στο $\hat{e}_r = \vec{r}/r$ και στο r^3. Τέλος $U_{διπ-διπ} \sim \frac{1}{r^3} \Rightarrow F \sim \frac{1}{r^4}$, άρα η δύναμη των διπόλων ελαττώνεται πολύ γρήγορα με την απόσταση.

a) $\underset{\vec{p}_1}{\longrightarrow}$ $\underset{\hat{e}_r}{\longrightarrow}$ $\underset{\vec{p}_2}{\longrightarrow}$ $\vec{p}_1\cdot\vec{p}_2 = p_1 p_2$, $U_{διπ-διπ} = -\frac{3p_1p_2 - p_1p_2}{4\pi\epsilon_0 r^3} = -\frac{2p_1p_2}{4\pi\epsilon_0 r^3}$, άρα τα δίπολα έλκονται.

β) 

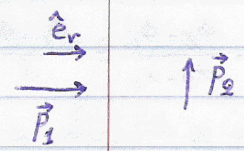
$\vec{p}_1\cdot\vec{p}_2 = p_1 p_2$, $U_{διπ-διπ} = \frac{p_1p_2}{4\pi\epsilon_0 r^3}$, τα δίπολα απωθούνται γ) 

$\vec{P}_1 \cdot \vec{P}_2 = -P_1 P_2$, $U_{διπ-διπ} = -\dfrac{P_1 P_2}{4\pi\epsilon_0 r^3}$, τα δίπολα έλκονται

δ) 

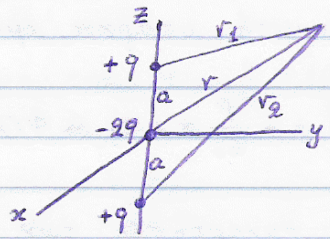
$\vec{P}_1 \cdot \vec{P}_2 = -P_1 P_2$, $U_{διπ-διπ} = -\dfrac{-3P_1P_2 + P_1P_2}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \dfrac{2P_1P_2}{4\pi\epsilon_0 r^3}$,

τα δίπολα απωθούνται

ε) 

$U_{διπ-διπ} = 0$

Άσκηση



$r \gg a$

Ηλεκτρικό τετράπολο

$Q = q + q - 2q = 0$

$\vec{p} = q\vec{a} + q(-\vec{a}) + (-2q)\cdot 0 = 0$

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{r_1} - \frac{2q}{r} + \frac{q}{r_2}\right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{2}{r} + \frac{1}{r_2}\right)$$

$$r_1 = \sqrt{r^2 - 2ar\cos\theta + a^2} = r\sqrt{1 - 2\frac{a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{r^2}}$$

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r}\left(1 - 2\frac{a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{r^2}\right)^{-1/2}$$

$$= \frac{1}{r}\left[1 - \frac{1}{2}\left(-\frac{2a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{r^2}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{2a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{r^2}\right)^2 + \dots\right]$$

$$= \frac{1}{r}\left(1 + \frac{a}{r}\cos\theta - \frac{a^2}{2r^2} + \frac{3}{8}\frac{4a^2}{r^2}\cos^2\theta + \dots\right) = \frac{1}{r} + \frac{a}{r^2}\cos\theta + \frac{a^2}{2r^3}(3\cos^2\theta - 1) + \dots$$

$$r_2 = \sqrt{r^2 + 2ar\cos\theta + a^2} = r\sqrt{1 + 2\frac{a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{r^2}}$$

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{r}\left(1 + 2\frac{a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{r^2}\right)^{-1/2} = \frac{1}{r} - \frac{a}{r^2}\cos\theta + \frac{a^2}{2r^3}(3\cos^2\theta - 1) + \dots$$

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{a^2}{r^3}(3\cos^2\theta - 1) + \dots$$

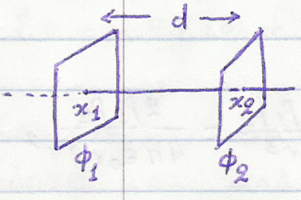
Αλλά $\mathcal{Q} = \frac{1}{2}\sum_i q_i R_i^2 (3\cos^2\theta_i - 1) = \frac{1}{2}\sum_i q_i (3R_{zi}^2 - R_i^2) =$

$= \frac{1}{2}q(3a^2 - a^2) + \frac{1}{2}q[3(-a)^2 - a^2] + \frac{1}{2}(-2q)(3\cdot 0^2 - 0^2) =$

$= qa^2 + qa^2 + 0 = 2qa^2$

Άρα $\phi = \dfrac{\mathcal{Q}(3\cos^2\theta - 1)}{2(4\pi\epsilon_0) r^3}$, άρα $E \sim \dfrac{1}{r^4}$.

Άσκηση Μέσω της εξίσωσης Laplace $\nabla^2\phi = 0$ βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό πυκνωτή



Λόγω συμμετρίας είναι $\phi = \phi(x)$.

Άρα $\nabla^2\phi = 0 \Leftrightarrow \dfrac{d^2\phi}{dx^2} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{d\phi}{dx} = c_1 \Leftrightarrow \phi(x) = c_1 x + c_2$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dx} = -c_1 \,, \text{ άρα } \phi(x) = -\mathcal{E}x + c_2$$

$$\left.\begin{array}{l}\phi(x_1) = \phi_1 = -\mathcal{E}x_1 + c_2 \\ \phi(x_2) = \phi_2 = -\mathcal{E}x_2 + c_2\end{array}\right\} \Rightarrow \phi_2 - \phi_1 = -\mathcal{E}(x_2 - x_1) \Rightarrow \mathcal{E} = -\frac{\phi_2 - \phi_1}{x_2 - x_1} = \frac{\phi_1 - \phi_2}{d}$$

Άσκηση Μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή υπάρχει ομοιόμορφη κατανομή φορτίου πυκνότητας $\rho = \sigma\tau\alpha\theta.$

Είναι $\nabla^2\phi = -\dfrac{\rho}{\epsilon_0} \Leftrightarrow \dfrac{d^2\phi}{dx^2} = -\dfrac{\rho}{\epsilon_0} \Leftrightarrow \dfrac{d\phi}{dx} = -\dfrac{\rho}{\epsilon_0}x + c_1 \Leftrightarrow \phi(x) = -\dfrac{\rho}{2\epsilon_0}x^2 + c_1 x + c_2$

Θα μπορούσαμε να βρούμε τα c_1, c_2 συναρτήσει των ϕ_1, ϕ_2, αλλά μπορούμε να προχωρήσουμε και αλλιώς.

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dx} = \frac{\rho}{\epsilon_0}x - c_1 \Rightarrow \mathcal{E}_1 = \frac{\rho}{\epsilon_0}x_1 - c_1 \Rightarrow c_1 = \frac{\rho}{\epsilon_0}x_1 - \mathcal{E}_1$$

$$\Rightarrow \mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \frac{\rho}{\epsilon_0}(x - x_1)$$

$$-\frac{d\phi}{dx} = \mathcal{E}_1 + \frac{\rho}{\epsilon_0}(x - x_1) \Rightarrow \int_{\phi_1}^{\phi} d\phi = -\mathcal{E}_1\int_{x_1}^{x} dx - \frac{\rho}{\epsilon_0}\int_{x_1}^{x}(x - x_1)\,dx$$

$$\Rightarrow \phi - \phi_1 = -\mathcal{E}_1(x - x_1) - \frac{\rho}{\epsilon_0}\left(\frac{x^2}{2} - x_1 x\right)\Big|_{x_1}^{x} \Rightarrow \phi(x) = \phi_1 - \mathcal{E}_1(x - x_1) - \frac{\rho}{2\epsilon_0}(x - x_1)^2$$

$$\phi_2 = \phi_1 - \mathcal{E}_1(x_2 - x_1) - \frac{\rho}{2\epsilon_0}(x_2 - x_1)^2 \Rightarrow \mathcal{E}_1 = -\frac{\phi_2 - \phi_1}{d} - \frac{\rho d}{2\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \phi(x) = \phi_1 + \left(\frac{\phi_2 - \phi_1}{d} + \frac{\rho d}{2\epsilon_0}\right)(x - x_1) - \frac{\rho}{2\epsilon_0}(x - x_1)^2$$

Εξάλλου, αν οι δύο πλάκες φέρουν φορτίο $+q, -q$ τότε

$\mathcal{E} = 2\dfrac{\sigma}{2\epsilon_0} = \dfrac{\sigma}{\epsilon_0}$, $\sigma = \dfrac{q}{A}$ ή απευθείας από το ν. Gauss (αφού έξω $\mathcal{E} = 0$)

$$\oint \vec{\mathcal{E}}\cdot d\vec{a} = \mathcal{E}A = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \Rightarrow \mathcal{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \text{ Άρα } \phi_1 - \phi_2 = \mathcal{E}d = \frac{\sigma d}{\epsilon_0}$$

Παράδειγμα e σε άτομο

κλασσικά: $E_c = \dfrac{1}{2}m_e v^2 - \dfrac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} = \dfrac{p^2}{2m_e} - \dfrac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$

$$\frac{m_e v^2}{r} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \Rightarrow \frac{p^2}{m_e} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Άρα $\quad E_c = -\dfrac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 r} = -\dfrac{p^2}{2m_e}$

Σχετικιστικά για $p \ll m_e c$: $E_r = T - eV = c\sqrt{p^2 + m_e^2 c^2} - m_e c^2 - \dfrac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$

$$\simeq \frac{p^2}{2m_e} - \frac{p^4}{8m_e^3c^2} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$\simeq E_c - \frac{p^4}{8m_e^3c^2}$$

$$\Rightarrow E_r - E_c \simeq -\frac{p^4}{8m_e^3c^2} = \frac{1}{2m_e c^2}\frac{p^2}{2m_e}E_c = \frac{1}{2m_e c^2}\frac{m_e v^2}{2}E_c = \frac{1}{4}\frac{v^2}{c^2}E_c$$

$$\Rightarrow \frac{E_r - E_c}{E_c} \simeq \frac{v^2}{4c^2}$$

π.χ. για το άτομο του H, $\frac{v}{c} \simeq 10^{-2} \Rightarrow \dfrac{E_r - E_c}{E_c} \simeq \frac{1}{4}\times 10^{-4}$

Τα υλικά διακρίνονται ως προς την ηλεκτρική τους αγωγιμότητα εν γένει σε αγωγούς και μονωτές, όμως αυτή η διάκριση μπορεί να εξαρτάται από διάφορους παράγοντες, π.χ. τη θερμοκρασία.
Λόγω της ευσταθούς στατικής ισορροπίας όπου βρίσκονται τα φορτία στην επιφάνεια ενός αγωγού (υπό την επίδραση βέβαια των λοιπών "μηχανικών" δυνάμεων από το υλικό, αφού δεν υπάρχει ευσταθής ισορροπία μόνο με ηλεκτροστατικές δυνάμεις) η επιφάνεια έχει σταθερό δυναμικό και το ηλεκτρικό πεδίο είναι κάθετο στην επιφάνεια. Το ίδιο δυναμικό επικρατεί και στο εσωτερικό αυτής της επιφάνειας (είτε είναι κενός χώρος είτε συμπαγές μέταλλο αφού $\nabla^2\phi = 0$ και $\phi|_S = \phi_0$. Πράγματι, η συνάρτηση $\phi = \phi_0$ ικανοποιεί την εξίσωση Laplace και τη συνοριακή συνθήκη και αφού η λύση είναι μοναδική, άρα $\phi = \phi_0$ είναι η λύση στο εσωτερικό (ισοδυναμικός χώρος), άρα $\mathcal{E}_< = 0 \Rightarrow \rho_< = 0$.
[Αν η λύση ενός τέτοιου συνοριακού προβλήματος δεν ήταν μοναδική, αλλά επίσης $\nabla^2\psi = 0$, $\psi|_S = \phi_0$, τότε $\nabla^2(\phi-\psi) = \nabla^2\phi - \nabla^2\psi = 0$ και $(\phi-\psi)|_S = \phi|_S - \psi|_S = \phi_0 - \phi_0 = 0$. Αφού παντού στο σύνορο $\phi - \psi = 0$, άρα πρέπει σε κάποιο εσωτερικό σημείο της περιοχής να υπάρχει μέγιστη ή ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $\phi-\psi$. Αν θεωρήσουμε μια σφαίρα με κέντρο το σημείο αυτό, η μέση τιμή της $\phi-\psi$ πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας πρέπει να ισούται με την τιμή της $\phi-\psi$ στο κέντρο, πράγμα άτοπο. Άρα δεν υπάρχει ακρότατο της $\phi-\psi$, δηλαδή $\phi - \psi = 0 \Rightarrow \phi = \psi$].
Γενικεύοντας, αν έχουμε ένα σύστημα αγωγών με δεδομένα δυναμικά ϕ_i, το δυναμικό ϕ στη εξωτερική περιοχή καθορίζεται από την $\nabla^2\phi = 0$ υπό τις συνοριακές συνθήκες ϕ_i και προκύπτει μοναδική λύση για τον ίδιο λόγο όπως και παραπάνω με τον ένα αγωγό. Ακόμη και αν υπάρχει φορτίο στην εξωτερική περιοχή, δηλαδή $\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ υπό τις συνοριακές συνθήκες ϕ_i, τότε πάλι προκύπτει μοναδική λύση. Πράγματι, αν επίσης $\nabla^2\psi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$, $\psi|_{S_i} = \phi_i$ τότε $\nabla^2(\phi-\psi) = 0$, $(\phi-\psi)|_{S_i} = 0$, άρα $\phi - \psi = 0 \Rightarrow \psi = \phi$.
Στην περίπτωση που οι αγωγοί αντί να έχουν δεδομένα δυναμικά, έχουν δεδομένα φορτία Q_i η κατάσταση είναι δυσκολότερη γιατί αφενός μεν δεν γνωρίζουμε ποια είναι η κατανομή των φορτίων αυτών πάνω στους αγωγούς αφού οι αγωγοί τα κατανέμουν όπως θέλουν και αφετέρου τα δυναμικά των αγωγών είναι σταθερά αλλά άγνωστα. Πάλι η λύση για το δυναμικό ϕ είναι μοναδική. Θα το δείξουμε στη γενική περίπτωση όπου υπάρχει φο-

ρτίο πυκνότητας ρ στην εξωτερική περιοχή. Πράγματι πέραν των επιφανειών S_i των αγωγών θεωρούμε και μια επιφάνεια S_{out} που περιβάλλει όλους τους αγωγούς (μπορεί να είναι και στο άπειρο), οπότε
$\nabla\cdot\vec{\mathcal{E}} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$, $\oint_{S_i}\vec{\mathcal{E}}\cdot d\vec{a} = \frac{Q_i}{\epsilon_0}$, $\oint_{S_{out}}\vec{\mathcal{E}}\cdot d\vec{a} = \frac{Q_{tot}}{\epsilon_0}$, $Q_{tot} = \sum_i Q_i$ και
$\vec{\mathcal{E}} = -\nabla\phi$, όπου $\phi|_{S_i} = \phi_i = $ contant.
Υποθέτουμε ότι και το πεδίο $\vec{\mathcal{E}}'$ ικανοποιεί τις συνθήκες του προβλήματος, οπότε
$\nabla\cdot\vec{\mathcal{E}}' = \frac{\rho}{\epsilon_0}$, $\oint_{S_i}\vec{\mathcal{E}}'\cdot d\vec{a} = \frac{Q_i}{\epsilon_0}$, $\oint_{S_{out}}\vec{\mathcal{E}}'\cdot d\vec{a} = \frac{Q_{tot}}{\epsilon_0}$, $\vec{\mathcal{E}}' = -\nabla\phi'$, $\phi'|_{S_i} = \phi_i' = $ constant
Αν $\vec{E} = \vec{\mathcal{E}} - \vec{\mathcal{E}}'$ τότε
$\nabla\cdot\vec{E} = 0$, $\oint_{S_i}\vec{E}\cdot d\vec{a} = 0$, $\oint_{S_{out}}\vec{E}\cdot d\vec{a} = 0$, $\vec{E} = -\nabla\Phi$, $\Phi = \phi - \phi'$, $\Phi|_{S_i} = \phi_i - \phi_i' = $ constant
Είναι
$$\int_V \nabla\cdot(\Phi\vec{E})\,dV = \int_{\cup_i S_i \cup S_{out}} \Phi\vec{E}\cdot d\vec{a} = \Phi\int_{\cup_i S_i \cup S_{out}} \vec{E}\cdot d\vec{a} = 0$$
και $\nabla\cdot(\Phi\vec{E}) = \nabla\Phi\cdot\vec{E} + \Phi\nabla\cdot\vec{E} = -\vec{E}^2 + 0 = -\vec{E}^2$, άρα $-\int_V \vec{E}^2 dV = 0 \Rightarrow \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{\mathcal{E}}' = \vec{\mathcal{E}}$.
Στην περίπτωση λοιπόν όπου οι αγωγοί έχουν δεδομένα φορτία Q_i, λόγω της γραμμικότητας του δυναμικού από το φορτίο θα είναι
$$\phi_i = \sum_{j=1}^{n} P_{ij} Q_j \Leftrightarrow Q_i = \sum_{j=1}^{n} C_{ij}\phi_j, \text{ όπου } (C) = (P^{-1})$$

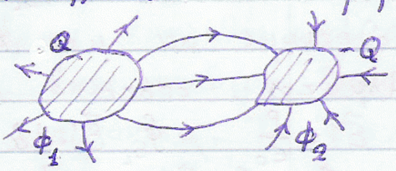
Τα C_{ij} λέγονται συντελεστές χωρητικότητας και τα P_{ij} συντελεστές δυναμικού. Οι σχέσεις αυτές προκύπτουν και αν κάποιος φανταστεί την κατάσταση 1 όπου όλοι οι αγωγοί $2, 3, \ldots, n$ γειώνονται, ενώ ο 1 έχει δυναμικό ϕ_1, οπότε $Q_1 = C_{11}\phi_1$, $Q_2 = C_{21}\phi_1$, ..., $Q_n = C_{n1}\phi_1$. Στην κατάσταση 2 όπου όλοι οι αγωγοί $1, 3, \ldots, n$ γειώνονται και ο 2 έχει δυναμικό ϕ_2, τότε $Q_1 = C_{12}\phi_2$, $Q_2 = C_{22}\phi_2$, ..., $Q_n = C_{n2}\phi_2$. Η επαλληλία όλων αυτών των καταστάσεων $1, 2, \ldots, n$ έχει δυναμικά $\phi_1, \ldots, \phi_n$ στους αγωγούς και φορτία $Q_1 = C_{11}\phi_1 + C_{12}\phi_2 + \cdots + C_{1n}\phi_n$, ..., $Q_n = C_{n1}\phi_1 + C_{n2}\phi_2 + \cdots + C_{nn}\phi_n$.
Η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια ενός συστήματος αγωγών είναι
$$U = \frac{1}{2}\int dV\rho\phi = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\int dV_i\rho_i\phi_i = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\phi_i\int dV_i\rho_i = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\phi_i Q_i = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} C_{ij}\phi_i\phi_j = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} P_{ij}Q_iQ_j$$

Αποδεικνύεται ότι $C_{ij} = C_{ji}$.

Για έναν μόνο απομονωμένο αγωγό είναι $Q = \oint_S \sigma\, da = \epsilon_0\oint_S |\vec{E}|da = -\epsilon_0\oint_S|\nabla\phi|da$, άρα αν $Q \to \lambda Q \Rightarrow \phi \to \lambda\phi$, επομένως $\frac{Q}{\phi} = $ σταθερό $= C$ "χωρητικότητα" αγωγού, $[C] = F = \frac{Cb}{V}$. Π.χ. για σφαίρα $\phi = \frac{KQ}{R} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \Rightarrow C = 4\pi\epsilon_0 R$. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι στο άπειρο υπάρχει ένας ακόμα αγωγός με δυναμικό μηδέν, οπότε ϕ είναι η διαφορά δυναμικού του συστήματος των δύο αγωγών. Η ηλεκτροστατική

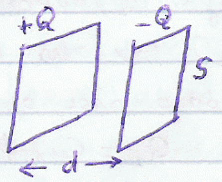
ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στο ηλεκτρικό πεδίο του αγωγού είναι
$U = \frac{1}{2}\int dV \rho \phi = \frac{1}{2}\phi \int dV \rho = \frac{1}{2} Q \phi = \frac{1}{2} C \phi^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$ ή ακόμα $U = \int dU =$
$= \int \phi(q) dq = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{Q^2}{2C}$.

Ένα σύστημα δύο αγωγών (που χωρίζονται με μονωτή) και έχουν φορτία $Q_1 = Q > 0, Q_2 = -Q$ λέγεται πυκνωτής. Αν ϕ_1, ϕ_2 είναι τα δυναμικά των αγωγών, η χωρητικότητα του πυκνωτή ορίζεται ως $C = \frac{Q}{\phi}$, $\phi = \phi_1 - \phi_2$.



Η σχέση αυτή ισχύει μέχρι μια μέγιστη τάση ϕ_{max} μετά την οποία γίνεται ηλεκτρική εκκένωση. Η ενέργεια του πυκνωτή είναι $U = \frac{1}{2}\int dV \rho \phi = \frac{1}{2}\phi_1 \int dV_1 \rho_1 + \frac{1}{2}\phi_2 \int dV_2 \rho_2 =$
$= \frac{1}{2}\phi_1 Q_1 + \frac{1}{2}\phi_2 Q_2 = \frac{1}{2} Q(\phi_1 - \phi_2) = \frac{1}{2} Q\phi = \frac{1}{2} C\phi^2 = \frac{Q^2}{2C}$ ή ακόμα αν $\phi(q)$ η διαφορά δυναμικού μεταξύ των αγωγών όταν τα φορτία τους είναι $q, -q$, τότε $U = \int dU = \int \phi(q) dq = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{Q^2}{2C}$.
Η χωρητικότητα C μπορεί να εκφραστεί σε σχέση με τους 3 συντελεστές χωρητικότητας $C_{11}, C_{22}, C_{12} = C_{21}$ σύμφωνα με τη σχέση $C = \frac{C_{11}C_{22} - C_{12}^2}{C_{11} + C_{22} + 2C_{12}}$.
Πράγματι, $Q = Q_1 = C_{11}\phi_1 + C_{12}\phi_2$, $-Q = Q_2 = C_{21}\phi_1 + C_{22}\phi_2$, άρα
$\phi_1 = -\frac{C_{12} + C_{22}}{C_{11} + C_{12}}\phi_2$, $\phi_1 - \phi_2 = -\frac{C_{11} + C_{22} + 2C_{12}}{C_{11} + C_{12}}\phi_2$, $Q = \frac{C_{12}^2 - C_{11}C_{22}}{C_{11} + C_{12}}\phi_2$
Επίσης $U = \frac{1}{2}C_{11}\phi_1^2 + \frac{1}{2}C_{22}\phi_2^2 + C_{12}\phi_1\phi_2 = \cdots = \frac{1}{2}C(\phi_1 - \phi_2)^2$

Παράδειγμα Επίπεδος πυκνωτής

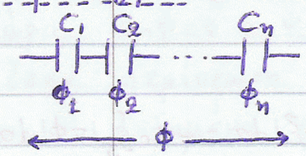


$\mathcal{E} = \frac{\phi}{d} \Rightarrow \phi = \mathcal{E} d \Rightarrow \phi = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d$

$C = \frac{Q}{\phi} = \frac{\sigma S}{\phi} = \epsilon_0 \frac{S}{d}$, π.χ. $C = 1F$, $d = 1mm \Rightarrow S = \frac{1F \times 10^{-3}}{10^{-11}} m^2 = 10^8 m^2 = 100 km^2$

Από $U = \frac{\epsilon_0}{2}\int_{V_\infty} \mathcal{E}^2 dV = \frac{\epsilon_0}{2}\int_{V_c} \frac{\sigma^2}{\epsilon_0^2} dV = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} S d = \frac{1}{2\epsilon_0}\left(\frac{Q}{S}\right)^2 S d = \frac{1}{2\epsilon_0}\frac{Q^2 d}{S} = \frac{Q^2}{2C}$ σε συμφωνία με τη γενική έκφραση για πυκνωτή.

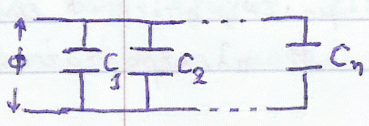
Παράδειγμα Συνδεσμολογία πυκνωτών σε σειρά. Όλοι οι πυκνωτές έχουν το ίδιο φορτίο Q και είναι



$\phi_1 = \frac{Q}{C_1}, \ldots, \phi_n = \frac{Q}{C_n}$

$\phi = \phi_1 + \cdots + \phi_n = Q\left(\frac{1}{C_1} + \cdots + \frac{1}{C_n}\right) = \frac{Q}{C} \Rightarrow \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \cdots + \frac{1}{C_n}$ $(\Rightarrow C < C_i)$

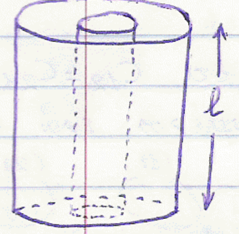
Συνδεσμολογία πυκνωτών παράλληλα

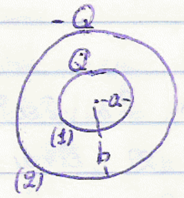


Όλοι οι πυκνωτές έχουν κοινή τάση και είναι $Q_1 = C_1\phi, \ldots, Q_n = C_n\phi$

$$Q = Q_1 + \cdots + Q_n = (C_1 + \cdots + C_n)\phi = C\phi \Rightarrow C = C_1 + \cdots + C_n \quad (\Rightarrow C > C_i)$$

<u>Παράδειγμα</u> Κυλινδρικός πυκνωτής με ακτίνες $a<b$





Είναι $\mathcal{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{2K\lambda}{r}$, $a<r<b$

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial\phi}{\partial r} \Rightarrow \phi = \phi_1 - \phi_2 = \int_a^b \mathcal{E}\,dr = 2K\lambda\ln\frac{b}{a}$$

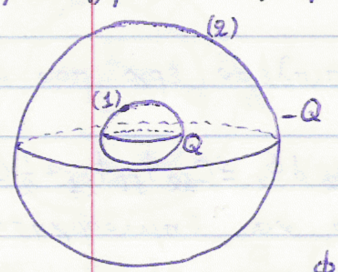
$$C = \frac{Q}{\phi} = \frac{\lambda\ell}{2K\lambda\ln\frac{b}{a}} = \frac{\ell}{2K\ln\frac{b}{a}} \Rightarrow \frac{C}{\ell} = \frac{1}{2K\ln\frac{b}{a}}$$

χωρητικότητα ανά μονάδα μήκους

Η ενέργεια του πυκνωτή είναι

$$U = \frac{\epsilon_0}{2}\int_{V_\infty}\mathcal{E}^2 dV = \frac{\epsilon_0}{2}\frac{\lambda^2}{4\pi^2\epsilon_0^2}\int_a^b\frac{2\pi r\ell\,dr}{r^2} = \frac{\lambda^2\ell}{4\pi\epsilon_0}\ln\frac{b}{a} = \frac{KQ^2}{\ell}\ln\frac{b}{a} = \frac{Q^2}{2C}$$

<u>Παράδειγμα</u> Σφαιρικός πυκνωτής με ακτίνες $a<b$



$\mathcal{E} = \frac{KQ}{r^2}$, $a<r<b$

$\phi = \frac{KQ}{r}$

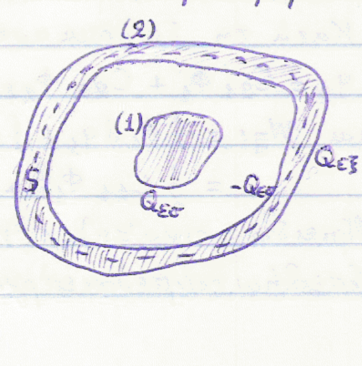
$$\phi = \phi_1 - \phi_2 = \frac{KQ}{a} - \frac{KQ}{b} = KQ\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = KQ\frac{b-a}{ab}$$

$C = \frac{Q}{\phi} = \frac{ab}{K(b-a)}$. Για $b\to\infty \Rightarrow C \to \frac{a}{K} = 4\pi\epsilon_0 a$ (σε συμφωνία με τη χωρητικότητα σφαιρικού αγωγού)

$$U = \frac{\epsilon_0}{2}\int_{V_\infty}\mathcal{E}^2 dV = \frac{\epsilon_0}{2}K^2Q^2\int_a^b\frac{1}{r^4}4\pi r^2 dr = \frac{4\pi\epsilon_0 K^2Q^2}{2}\int_a^b\frac{dr}{r^2} = \frac{KQ^2}{2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) =$$

$$= \frac{KQ^2}{2}\frac{b-a}{ab} = \frac{Q^2}{2C}.$$

Για ένα σύστημα δύο αγωγών που ο ένας βρίσκεται μέσα στον άλλο με φορτία $Q_1 = Q_{εσ}$, Q_2, το φορτίο στην εσωτερική επιφάνεια του εξωτερικού αγωγού πρέπει να είναι $Q_2^{(i)} = -Q_{εσ}$.

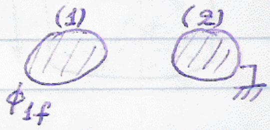


Πράγματι, αν θεωρήσουμε την επιφάνεια S εντός του εξωτερικού αγωγού τότε αφού $\vec{\mathcal{E}} = 0$ εντός του αγωγού (2), άρα $\oint_S \vec{\mathcal{E}}\cdot d\vec{a} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\epsilon_0}(Q_{εσ} + Q_2^{(i)}) = 0 \Rightarrow Q_2^{(i)} = -Q_{εσ}$.
Επομένως, $Q_2 = Q_{εξ} - Q_{εσ}$, αλλά το $Q_{εξ}$ δεν μας

ενδιαφέρει όσον αφορά το ηλεκτρικό πεδίο στο χώρο μεταξύ των αγωγών, το οποίο καθορίζεται μόνο από το $Q_{εσ}$, όπως επίσης και η διαφορά δυναμικού $\phi_1 - \phi_2$. Άρα η χωρητικότητα του συστήματος είναι

$$C = \frac{Q_{εσ}}{\phi}, \quad \phi = \phi_1 - \phi_2 .$$

<u>Άσκηση</u> Για ένα σύστημα δύο αγωγών θα δείξουμε ότι $C_{12} = C_{21}$.
Έστω η κατάσταση I όπου ο αγωγός (2) είναι γειωμένος ενώ ο (1) είναι σε δυναμικό ϕ_{1f}. Για να έρθει ο (1) σε δυναμικό ϕ_{1f} προσθέτουμε σταδιακά φορτίο dq_1 και κάθε στιγμή είναι $q_1 = C_{11}\phi_1 + C_{12}\phi_2 = C_{11}\phi_1$,

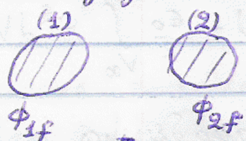


I

άρα το απαιτούμενο έργο είναι

$$W_I = \int \phi_1 dq_1 + \int \phi_2 dq_2 = \int_0^{\phi_{1f}} \phi_1 C_{11} \phi_1 + 0 = \frac{1}{2} C_{11} \phi_{1f}^2$$

Έστω τώρα η κατάσταση II όπου κόβουμε τη γείωση, ο αγωγός (1) διατηρείται σε δυναμικό ϕ_{1f}, ενώ ο (2) τίθεται σε δυναμικό ϕ_{2f}. Κάθε στιγμή καθώς αυξάνει το δυναμικό του (2) από 0 σε ϕ_{2f} ισχύουν



II

$$q_1 = C_{11}\phi_{1f} + C_{12}\phi_2, \quad q_2 = C_{21}\phi_{1f} + C_{22}\phi_2,$$

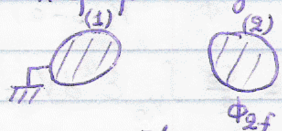
άρα $dq_1 = C_{12} d\phi_2$, $dq_2 = C_{22} d\phi_2$ και το επιπλέον έργο που απαιτείται είναι

$$W_{II} = \int \phi_{1f} dq_1 + \int \phi_2 dq_2 = \int_0^{\phi_{2f}} \phi_{1f} C_{12} d\phi_2 + \int_0^{\phi_{2f}} \phi_2 C_{22} d\phi_2 = C_{12}\phi_{1f}\phi_{2f} + \frac{1}{2} C_{22}\phi_{2f}^2$$

Τελικά το συνολικό έργο που απαιτείται για να δημιουργήσουμε την κατάσταση II είναι

$$W = W_I + W_{II} = \frac{1}{2} C_{11}\phi_{1f}^2 + C_{12}\phi_{1f}\phi_{2f} + \frac{1}{2} C_{22}\phi_{2f}^2 .$$

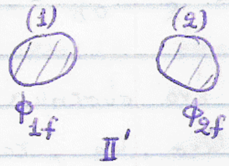
Θεωρούμε τώρα την αντίστροφη πορεία, όπου ο (1) παραμένει γειωμένος και ο (2) τίθεται σε δυναμικό ϕ_{2f}, όπου τώρα σ' αυτή τη φάση $q_2 = C_{21}\phi_1 + C_{22}\phi_2 = C_{22}\phi_2$,



I'

άρα $W_{I'} = \int \phi_1 dq_1 + \int \phi_2 dq_2 = 0 + \int_0^{\phi_{2f}} \phi_2 C_{22} d\phi_2$
$= \frac{1}{2} C_{22}\phi_{2f}^2$

Ακολουθεί η διακοπή της γείωσης, η φύλαξη του (2) σε δυναμικό ϕ_{2f} και η εξέλιξη του (1) σε δυναμικό ϕ_{1f}.



II'

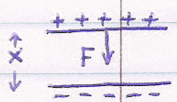
Κατά τη διάρκεια αυτή είναι $q_1 = C_{11}\phi_1 + C_{12}\phi_{2f}$,
$q_2 = C_{21}\phi_1 + C_{22}\phi_{2f}$, άρα $dq_1 = C_{11} d\phi_1$, $dq_2 = C_{21} d\phi_1$

και $W_{II'} = \int \phi_1 dq_1 + \int \phi_{2f} dq_2 = \int_0^{\phi_{1f}} \phi_1 C_{11} d\phi_1 + \int_0^{\phi_{1f}} \phi_{2f} C_{21} d\phi_1 =$
$= \frac{1}{2} C_{11}\phi_{1f}^2 + C_{21}\phi_{1f}\phi_{2f}$.

Άρα το συνολικό έργο $W' = W_{I'} + W_{II'} = \frac{1}{2} C_{11}\phi_{1f}^2 + C_{21}\phi_{1f}\phi_{2f} + \frac{1}{2} C_{22}\phi_{2f}^2$

Επειδή οι τελικές καταστάσεις και με τους δύο δρόμους συμπίπτουν, άρα τα απαιτούμενα έργα $W = W' \Rightarrow C_{12} = C_{21}$.

<u>Άσκηση</u> Σ' έναν πυκνωτή με δεδομένη επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ να βρεθεί η δύναμη μεταξύ των οπλισμών του

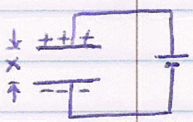


Αν αυξηθεί κατά dx η μεταξύ των οπλισμών απόσταση τότε

$$W_F = F dx = -dU \Rightarrow F = -\frac{dU}{dx}$$

Αλλά $U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{x}{\epsilon_0 S} = \frac{\sigma^2 S}{2\epsilon_0} x \Rightarrow F = -\frac{\sigma^2 S}{2\epsilon_0}$

Σ' έναν πυκνωτή σε σταθερή διαφορά δυναμικού ϕ ποια η δύναμη?



Εδώ είναι $W_F = F dx = -dU + \phi\, dq$

Αλλά $U = \frac{1}{2} q \phi \Rightarrow dU = \frac{1}{2}\phi\, dq \Rightarrow \phi\, dq = 2dU$, άρα

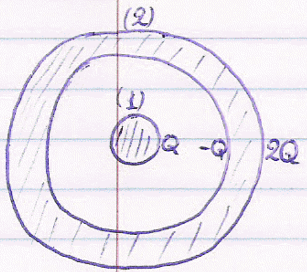
$F dx = dU \Rightarrow F = \frac{dU}{dx}$

Είναι $U = \frac{1}{2} C \phi^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0 \frac{S}{x}\phi^2$, άρα $F = -\frac{\epsilon_0 S \phi^2}{2x^2}$.

<u>Άσκηση</u>

Αγωγός (1), ακτίνας R, φορτίου Q

Αγωγός (2), ακτίνων $R_1 < R_2$, φορτίου Q



(1) $0 \leq r < R$, $\vec{E} = 0$, $\phi(r) = \phi(R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_1} + \frac{2}{R_2}\right)$

(2) $R \leq r \leq R_1$, $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{e}_r$, $d\phi = -E dr \Rightarrow \int_{R_1}^{r} d\phi = -\int_{R_1}^{r} E dr$

$\Rightarrow \phi(r) - \phi(R_1) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\int_{R_1}^{r}\frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left.\frac{1}{r}\right|_{R_1}^{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1}\right)$, όπου

$\phi(R_1) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_1} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 R_2} = \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 R_2} \Rightarrow \phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{2}{R_2} - \frac{1}{R_1} + \frac{1}{r}\right)$

(3) $R_1 < r < R_2$, $\vec{E} = 0$, $\phi(r) = \phi(R_2) = \phi(R_1) = \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 R_2}$

(4) $R_2 \leq r < \infty$, $\vec{E} = \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{e}_r$, $\int_{\infty}^{r} d\phi = -\int_{\infty}^{r} E dr \Rightarrow \phi(r) - \phi(\infty) = -\frac{2Q}{4\pi\epsilon_0}\int_{\infty}^{r}\frac{dr}{r^2} \Rightarrow \phi(r) = \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 r}$