ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

Φυσική ΙΙ

Σημειώσεις – Ηλεκτροστατική

Κοφινάς Γιώργος

Τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών και Επικοινωνιακών Συστημάτων

Χρηματοδότηση

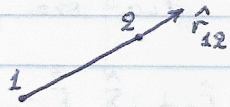
- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Ηλεκτρική αλληλεπίδραση

Υπάρχουν θετικά και αρνητικά φορτία που δημιουργούν την ηλεκτρική αλληλεπίδραση, η οποία είναι ελκτική ή απωστική. Ηλεκτροστατική είναι η μελέτη των χρονικώς ανεξάρτητων κατανομών φορτίων και πεδίων.
Αρχή διατήρησης του ηλεκτρικού φορτίου: το ολικό φορτίο δεν αλλάζει για μια διαδικασία που συμβαίνει σε ένα απομονωμένο σύστημα.

Νόμος Coulomb: Αν δύο φορτία είναι ακίνητα ως προς το σύστημα αναφοράς του παρατηρητή, τότε η ηλεκτροστατική αλληλεπίδραση μεταξύ τους είναι ανάλογη των φορτίων και αντιστρόφως ανάλογη της απόστασης τους, η δε διεύθυνση της βρίσκεται πάνω στο φορέα των δύο φορτίων



$$\vec{F}_{12} = \frac{K q_1 q_2}{r^2}\hat{r}_{12} = \frac{K q_1 q_2}{r^3}\vec{r}_{12}, \quad \vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \quad r = |\vec{r}_{12}|$$

(δύναμη από το q_1 στο q_2)

Τόσο η σταθερά K όσο και οι μονάδες των φορτίων q_1, q_2 δεν έχουν οριστεί, επομένως είτε ορίζουμε τη μονάδα του φορτίου και προσδιορίζουμε πειραματικά το K, είτε ορίζουμε το K και προσδιορίζουμε το φορτίο. Ορίζουμε την αριθμητική τιμή του K να είναι $10^{-7}c^2 \simeq 9\times10^9$, οπότε $F = 9\times10^9 \frac{q_1 q_2}{r^2}$. 1 Cb είναι το φορτίο που όταν απέχει απόσταση 1 m από ένα ίσο φορτίο στο κενό ασκείται μεταξύ τους δύναμη 9×10^9 N.

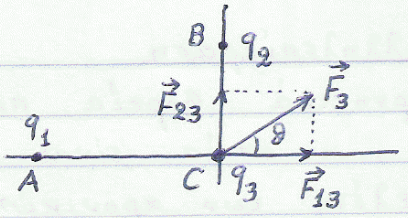
Άρα $\quad K = 9\times10^9 \frac{Nm^2}{Cb^2} = 9\times10^9 \frac{m^3\,kg}{s^2\,Cb^2} = 10^{-7}\left[c\left(\frac{m}{s}\right)\right]^2 \frac{Nm^2}{Cb^2}$

Ορίζεται η διηλεκτρική σταθερά του κενού ϵ_0 από τη σχέση

$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \Leftrightarrow \epsilon_0 = \frac{1}{4\pi K} = 8.854\times10^{-12}\frac{Cb^2}{Nm^2} = 8.854\times10^{-12}\frac{Cb^2\,s^2}{m^3\,kg}, \text{ άρα } F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Στο σύστημα CGS που δεν χρησιμοποιούμε εδώ, 1 stat-Coulomb είναι το φορτίο που όταν βρίσκεται σε απόσταση 1 cm από άλλο ένα ίσο τέτοιο φορτίο εξασκείται μεταξύ τους δύναμη 1 dyn. Άρα στο CGS είναι $K=1$.
Ο νόμος του Coulomb ισχύει για φορτία στο κενό ή σε μέσα με αμελητέα ηλεκτρική επιδεκτικότητα (μέταλλα), για διηλεκτρικά χρειάζεται τροποποίηση.

Παράδειγμα



$q_1 = 1.5 \times 10^{-3}\,Cb$
$q_2 = -0.5 \times 10^{-3}\,Cb$
$q_3 = 0.2 \times 10^{-3}\,Cb$
$AC = 1.2\,m, \quad BC = 0.5\,m$
$\vec{F}_3 = ?$

$$\vec{F}_3 = \vec{F}_{23} + \vec{F}_{13}$$

$$F_{13} = K\frac{q_1 q_3}{(AC)^2} = 9\times 10^9 \,\frac{1.5\times 10^{-3} \times 0.2 \times 10^{-3}}{1.2^2}\,N = 1.875 \times 10^3\,N$$

$$F_{23} = K\frac{q_2 q_3}{(BC)^2} = 9\times 10^9 \,\frac{0.5\times 10^{-3} \times 0.2 \times 10^{-3}}{0.5^2}\,N = 3.6 \times 10^3\,N$$

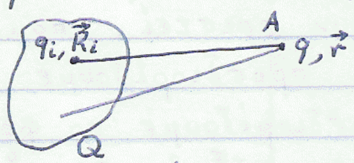
$$F_3 = \sqrt{F_{13}^2 + F_{23}^2} = 4.06\times 10^3\,N, \quad \tan\vartheta = \frac{F_{23}}{F_{13}} = 1.92 \Rightarrow \vartheta = 62.5^\circ$$

Για ένα σύστημα διακριτών φορτίων q_i είναι

$$\vec{F}_i = \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{ji} = \sum_{j=1}^{N} \frac{K q_i q_j}{r_{ij}^2}\,\hat{r}_{ji} = \sum_{j=1}^{N}\frac{K q_i q_j}{r_{ij}^3}\,\vec{r}_{ji}, \quad \vec{r}_{ji} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$$

Για εκτεταμένες (συνεχείς) κατανομές φορτίου πυκνότητας φορτίου ρ,

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \frac{K q_i q}{|\vec{r} - \vec{R}_i|^3}(\vec{r} - \vec{R}_i) = \int_V dV \,\frac{K q\,\rho(\vec{R})}{|\vec{r}-\vec{R}|^3}(\vec{r} - \vec{R})$$



Σε αναλογία προς την βαρυτική αλληλεπίδραση του νόμου της παγκόσμιας έλξης, η ηλεκτρική δύναμη Coulomb (όπως και κάθε κεντρική δύναμη) είναι συντηρητική, δηλ. έχει δυναμικό / δυναμική ενέργεια.
Η δυναμική ενέργεια ενός φορτίου q στη θέση $\vec{r}$ είναι

$$U(\vec{r}) = \sum_i \frac{K q_i q}{|\vec{r} - \vec{R}_i|} = \int_V dV\,\frac{K q\,\rho(\vec{R})}{|\vec{r} - \vec{R}|}, \quad \vec{F}(\vec{r}) = -\nabla U(\vec{r})$$

αφού $\nabla \dfrac{1}{|\vec{r}-\vec{R}|} = -\dfrac{\vec{r}-\vec{R}}{|\vec{r}-\vec{R}|^3}$

Ένταση ηλεκτρικού πεδίου στη θέση $\vec{r}$ (q μικρό - δοκιμαστικό, για να μην διαταράξει την πιθανή ισορροπία των υπολοίπων):

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}}{q} = \sum_{i=1}^{N}\frac{K q_i}{|\vec{r} - \vec{R}_i|^3}(\vec{r} - \vec{R}_i) = \int_V dV\,\frac{K\rho(\vec{R})}{|\vec{r}-\vec{R}|^3}(\vec{r} - \vec{R})$$

Η σχέση $\vec{F} = q\vec{\mathcal{E}}$ ισχύει ανεξαρτήτως της ταχύτητας του q, δηλαδή και

κινούμενο να είναι το q, στη θέση $\vec{r}$ δέχεται ηλεκτρική δύναμη $q\vec{E}(\vec{r})$.
Η δύναμη που δέχεται μία συνεχής κατανομή φορτίου πυκνότητας ρ ευρισκόμενη εντός ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}$ είναι $\vec{F} = \int dV \rho \vec{E}$.

Ισχύει $\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\phi(\vec{r})$, $\phi(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{K q_i}{|\vec{r}-\vec{R}_i|} = \int_V dV \frac{K\rho(\vec{R})}{|\vec{r}-\vec{R}|} = \frac{U(\vec{r})}{q}$, ϕ "βαθμωτό δυναμικό"

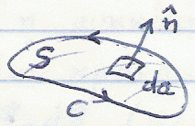
Συνέπεια του γεγονότος ότι υπάρχει δυναμικό είναι οι παρακάτω σχέσεις (διαφορική και ολοκληρωτική) οι οποίες όμως δεν περιέχουν την πληροφορία του ειδικού $1/r^2$ νόμου.

$\underline{\nabla\times\vec{E} = 0}$, αφού $\nabla\times\vec{E} = -\nabla\times\nabla\phi = 0$

$\underline{\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} = \phi_A - \phi_B}$, αφού $W_{AB} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_A^B q\vec{E}\cdot d\vec{l} = -q\int_A^B \nabla\phi\cdot d\vec{l} = -q\int_A^B d\phi$
$= -q\,\phi\big|_A^B = q(\phi_A - \phi_B)$

$\underline{\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0}$
η οποία προκύπτει από την προηγούμενη για $A=B$ ή από το θ. Stokes

$$\underbrace{\oint_C \vec{A}\cdot d\vec{l}}_{\text{"κυκλοφορία" του } \vec{A}} = \underbrace{\iint_S (\nabla\times\vec{A})\cdot\hat{n}\,da}_{\text{"ροή" του } \nabla\times\vec{A}}$$



αφού $\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = \iint_S (\nabla\times\vec{E})\cdot\hat{n}\,da = 0$. Ένα θετικό φορτίο κινείται από περιοχή μεγαλύτερου προς περιοχή μικρότερου δυναμικού, αφού $\vec{E}\cdot d\vec{l} > 0 \Rightarrow \phi_A > \phi_B$.

Παρατήρηση (1) Ηλεκτρικό πεδίο δεν φτιάχνεται μόνο από ακίνητα ηλεκτρικά φορτία (συντηρητικό πεδίο Coulomb), αλλά προκύπτει και από κινούμενα ηλεκτρικά φορτία, όπως επίσης και από χρονομεταβαλλόμενα μαγνητικά πεδία (στις οποίες περιπτώσεις το $\vec{E}$ είναι συνήθως μη-συντηρητικό). Πάντως εν γένει η συντηρητικότητα του $\vec{E}$ και η χρονοεξάρτηση του $\vec{E}$ είναι ανεξάρτητα πράγματα. Έτσι, μπορεί να είναι το $\vec{E}$ συντηρητικό-χρονοανεξάρτητο ή συντηρητικό-χρονοεξαρτώμενο (π.χ. για ακίνητο φορτίο $q=q(t)$ είναι $\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{Kq(t)\vec{r}}{r^3}$) και μπορεί να είναι μη-συντηρητικό-χρονοανεξάρτητο (π.χ. για μαγνητικό πεδίο $\vec{B}(\vec{r},t) = t\,\vec{b}(\vec{r}) \Rightarrow \nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\vec{b}(\vec{r}) \Rightarrow \vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$) ή μη-συντηρητικό-χρονοεξαρτώμενο (π.χ. $\vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{\partial\vec{B}(\vec{r},t)}{\partial t}$).
(2) Για ένα τυχόν ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ ορίζεται για μια κλειστή διαδρομή C η "ηλεκτρεγερτική δύναμη" του $\vec{E}$ κατά μήκος της C ως $V_E = \oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l}$ που είναι το έργο του ηλεκτρικού πεδίου (απαιτούμενη ενέργεια) για την κίνηση μοναδιαίου φορτίου κατά μήκος της C.

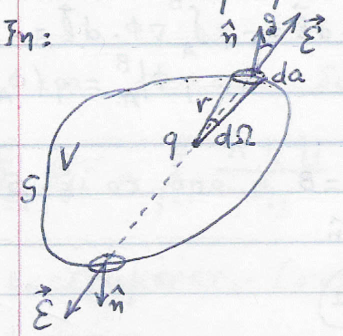
Για πεδίο Coulomb είναι $\nabla_\mathcal{E} = 0$, όμως γενικά $\nabla_\mathcal{E} \neq 0$.

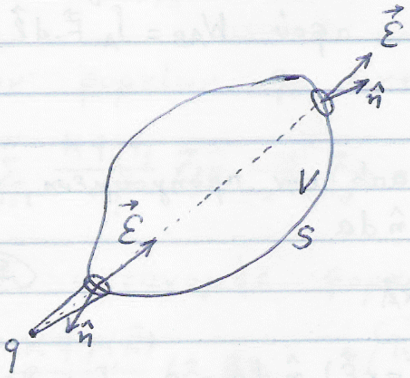
<u>Νόμος Gauss</u> $\quad \Phi_\mathcal{E} = \oint_S \vec{\mathcal{E}}\cdot\hat{n}\, da = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_i$, q_i εντός της S

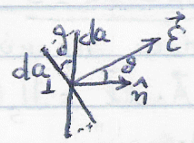
$$= \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho(\vec{R})dV \quad \text{(ολοκληρωτική μορφή)}$$

Στο νόμο του Gauss υπεισέρχονται μόνο τα φορτία εντός της S αφού για φορτίο εκτός της S κάθε δυναμική γραμμή που εισέρχεται μέσα από την S εξέρχεται, άρα δεν συνεισφέρει στη ροή.
Ο νόμος του Gauss αποδεικνύεται για την ηλεκτροστατική, ωστόσο ισχύει γενικά για οποιοδήποτε ηλεκτρικό πεδίο καθώς τούτο επαληθεύεται πειραματικά.

Απόδειξη:







Είναι $\vec{\mathcal{E}}\cdot\hat{n}\, da = \vec{\mathcal{E}}\cdot d\vec{a} = \mathcal{E}(da\cos\theta) = \mathcal{E}\, da_\perp = \frac{Kq}{r^2}da_\perp$, όπου $da_\perp$ κάθετο στο $\vec{r}$ (ή στο $\vec{\mathcal{E}}$). Ακόμα $\vec{\mathcal{E}}\cdot d\vec{a} = (\mathcal{E}\cos\theta)\, da = \mathcal{E}_\perp da$, όπου $\mathcal{E}_\perp$ κάθετο στο $d\vec{a}$.
Αλλά $\quad d\Omega = \frac{da_\perp}{r^2}$, άρα $\quad \vec{\mathcal{E}}\cdot\hat{n}\,da = Kq\, d\Omega$

$$\Rightarrow \oint_S \vec{\mathcal{E}}\cdot\hat{n}\,da = Kq\oint_S d\Omega = Kq\begin{cases} 4\pi, & q \text{ εντός της } S \\ 0, & q \text{ εκτός της } S\end{cases}$$

$$\Rightarrow \oint_S \vec{\mathcal{E}}\cdot\hat{n}\,da = 4\pi K q \quad , \quad q \text{ εντός της } S.$$

Θα μπορούσαμε για την απόδειξη να χρησιμοποιήσουμε σφαιρική επιφάνεια ακτίνας r με κέντρο το q, οπότε

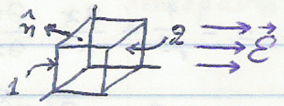
$\oint_S \vec{\mathcal{E}}\cdot\hat{n}\,da = \oint_S \mathcal{E}_\perp da = \frac{Kq}{r^2}\oint_S da = \frac{Kq}{r^2}4\pi r^2 = 4\pi K q = \frac{q}{\varepsilon_0}$, άρα και για την τυχούσα επιφάνεια που περικλείει το q η ροή είναι η ίδια.
Για διάφορα φορτία q_i είναι

$$\oint_S \vec{\mathcal{E}}\cdot d\vec{a} = \oint_S \sum_i \vec{\mathcal{E}}_i\cdot d\vec{a} = \sum_i \oint_S \vec{\mathcal{E}}_i\cdot d\vec{a} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_i$$

Για μια τυχούσα επιφάνεια S (όχι κατ' ανάγκη κλειστή), η ηλεκτρική ροή (ροή του $\vec{\mathcal{E}}$) ορίζεται ως

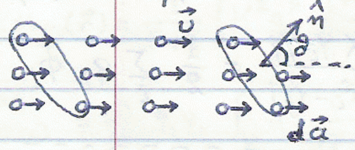
$$\Phi_{\mathcal{E}} = \int_S \vec{\mathcal{E}}\cdot d\vec{a} = \int_S \vec{\mathcal{E}}\cdot\hat{n}\,da = \int_S \mathcal{E}_\perp\, da$$

π.χ. για έναν κύβο ακμής ℓ εντός πεδίου $\vec{\mathcal{E}}$=σταθ. είναι



$$\Phi_{\mathcal{E}} = \int_1 \vec{\mathcal{E}}\cdot d\vec{a} + \int_2 \vec{\mathcal{E}}\cdot d\vec{a} = -\int_1 \mathcal{E}\,da + \int_2 \mathcal{E}\,da$$
$$= -\mathcal{E}\ell^2 + \mathcal{E}\ell^2 = 0$$

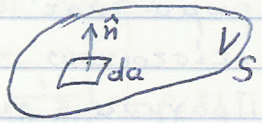
Η έννοια της ροής μπορεί να επεκταθεί και σε άλλα διανυσματικά πεδία πέραν του $\vec{\mathcal{E}}$. Για σωματίδια με ταχύτητα $\vec{v}$, η ροή των



σωματιδίων μέσα από την $d\vec{a}$ είναι ο αριθμός σωματιδίων που περνούν από την $d\vec{a}$ στη μονάδα του χρόνου, δηλαδή $\dfrac{n(v\,dt)(da\cos\theta)}{dt} =$
$= nv\,da\cos\theta = n\vec{v}\cdot d\vec{a}$, άρα η ολική ροή των σωματιδίων από την επιφάνεια S είναι $\int_S n\vec{v}\cdot d\vec{a}$.

Για φορτισμένα σωματίδια, η ροή της πυκνότητας ρεύματος είναι το φορτίο που περνάει από την $d\vec{a}$ ανά μονάδα χρόνου, δηλ. $qn\vec{v}\cdot d\vec{a} = \vec{j}\cdot d\vec{a}$, όπου $\vec{j} = qn\vec{v} = \rho\vec{v}$ η πυκνότητα ρεύματος (φορτίο ανά μονάδα επιφάνειας ανά μονάδα χρόνου). Το ηλεκτρικό ρεύμα από την επιφάνεια S είναι $I = \int_S \vec{j}\cdot d\vec{a}$ (φορτίο ανά μονάδα χρόνου)

Θεώρημα απόκλισης Gauss : $\oint_S \vec{A}\cdot\hat{n}\,da = \int_V \nabla\cdot\vec{A}\,dV$



$$\underline{\nabla\cdot\vec{\mathcal{E}} = \frac{\rho}{\epsilon_0}}$$ (διαφορική μορφή νόμου Gauss)
(τοπική σχέση μεταξύ ρ και $\vec{\mathcal{E}}$)

αφού $\oint_S \vec{\mathcal{E}}\cdot\hat{n}\,da = \int_V \nabla\cdot\vec{\mathcal{E}}\,dV = 4\pi K\int\rho(\vec{R})\,dV \Rightarrow \int_V(\nabla\cdot\vec{\mathcal{E}} - 4\pi K\rho)\,dV = 0$

Ο νόμος Gauss τόσο στη διαφορική όσο και στην ολοκληρωτική του μορφή κάνουν χρήση της ειδικής μορφής της δύναμης Coulomb.

$$\underline{\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}}$$ (εξίσωση Poisson)

όπου $\nabla^2\phi = \nabla\cdot\nabla\phi = \left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\frac{\partial\phi}{\partial x},\frac{\partial\phi}{\partial y},\frac{\partial\phi}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$

διότι $\nabla\cdot\vec{\mathcal{E}} = 4\pi K\rho \Rightarrow \nabla\cdot(-\nabla\phi) = 4\pi K\rho \Rightarrow \nabla^2\phi = -4\pi K\rho$

Για $\rho = 0 \Rightarrow \underline{\nabla^2\phi = 0}$ (εξίσωση Laplace)

Αφού στον κενό χώρο το δυναμικό Coulomb είναι $\phi \propto \frac{1}{r}$, οφείλει $\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)=0$. Πράγματι, $r^2=x^2+y^2+z^2 \Rightarrow 2r\frac{\partial r}{\partial x}=2x \Rightarrow$ $\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{r}{x}$, άρα $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{x}{r^3}$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{r^3}\right)=$

$$=-\frac{1}{r^3}+\frac{3x}{r^4}\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3x^2}{r^5}, \quad \nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right)=$$

$$=-\frac{3}{r^3}+\frac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5}=-\frac{3}{r^3}+\frac{3}{r^3}=0$$

Η εσωτερική δυναμική ενέργεια ενός συστήματος διακριτών φορτίων είναι

$$U^{(int)}=\sum_{\substack{i,j\\i<j}}U_{ij}=\frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j\\i\neq j}}U_{ij}=\sum_{\substack{i,j\\i<j}}\frac{Kq_iq_j}{|\vec{r}_i-\vec{r}_j|}=\frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j\\i\neq j}}\frac{Kq_iq_j}{|\vec{r}_i-\vec{r}_j|}=\frac{1}{2}\sum_i q_i\phi_i$$

ενώ για συνεχή κατανομή

$$U_{tot}^{(int)}=\frac{1}{2}\iint\frac{K\rho(\vec{R})\rho(\vec{R}')}{|\vec{R}-\vec{R}'|}dV\,dV'=\frac{1}{2}\int dV\,\rho(\vec{R})\phi(\vec{R})=\frac{\epsilon_0}{2}\int_{V_\infty}dV\,|\vec{E}|^2=\int_{V_\infty}dV\,u_E>0$$

$u_E=\frac{\epsilon_0}{2}|\vec{E}|^2$ πυκνότητα ενέργειας (ενέργεια ανά μονάδα όγκου)

Γράφουμε $U_{tot}^{(int)}$ στη συνεχή περίπτωση αντί για $U^{(int)}$ διότι το ολοκλήρωμα κατ' ανάγκη περιλαμβάνει και συνεισφορά από τους αντίστοιχους των όρων $i=j$ της διακριτής περίπτωσης (self energy). Πράγματι, για την δεύτερη ισότητα έχουμε

$$U_{tot}^{(int)}=\frac{1}{2}\int dV\,\rho(\vec{R})\int dV'\frac{K\rho(\vec{R}')}{|\vec{R}-\vec{R}'|}=\frac{1}{2}\int dV\,\rho(\vec{R})\phi(\vec{R})$$

Εξάλλου $\nabla^2\phi=-\frac{\rho}{\epsilon_0}\Rightarrow\rho=-\epsilon_0\nabla^2\phi$, άρα

$$U_{tot}^{(int)}=-\frac{\epsilon_0}{2}\int_{V_\infty}dV\,\phi\,\nabla^2\phi=-\frac{\epsilon_0}{2}\int_{V_\infty}dV\,\phi\,\nabla\cdot\nabla\phi=-\frac{\epsilon_0}{2}\int_{V_\infty}dV\left[\nabla\cdot(\phi\nabla\phi)-\nabla\phi\cdot\nabla\phi\right]$$

$$=-\frac{\epsilon_0}{2}\int_{V_\infty}dV\,\nabla\cdot(\phi\nabla\phi)+\frac{\epsilon_0}{2}\int_{V_\infty}dV\,|\nabla\phi|^2=-\frac{\epsilon_0}{2}\oint_{S_\infty}\phi\nabla\phi\cdot\hat{n}\,da+\frac{\epsilon_0}{2}\int_{V_\infty}dV\,|\vec{E}|^2$$

$$=0+\frac{\epsilon_0}{2}\int_{V_\infty}dV\,|\vec{E}|^2>0$$

Τα u_E, $U_{tot}^{(int)}$ είναι θετικά, ενώ το $U^{(int)}$ μπορεί να είναι και αρνητικό.

Για ένα σύστημα δύο φορτίων q_1, q_2 στις θέσεις $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ είναι

$u_\mathcal{E} = u_{self} + u_{αλληλ.}$, $u_{self} = \frac{K}{8\pi}\left[\frac{q_1^2}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^4} + \frac{q_2^2}{|\vec{r}-\vec{r}_2|^4}\right]$ συνεισφορά της "self-energy"

$u_{αλληλ} = \frac{Kq_1q_2}{4\pi}\frac{(\vec{r}-\vec{r}_1)\cdot(\vec{r}-\vec{r}_2)}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3|\vec{r}-\vec{r}_2|^3}$ συνεισφορά της "αλληλεπίδρασης"

και $U^{(int)}_{αλληλ.} = \int_{V_\infty} dV\, u_{αλληλ} = \frac{Kq_1q_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}$

Πράγματι, $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = Kq_1\frac{\vec{r}-\vec{r}_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3} + Kq_2\frac{\vec{r}-\vec{r}_2}{|\vec{r}-\vec{r}_2|^3}$

$$\Rightarrow u_\mathcal{E}(\vec{r}) = \frac{1}{8\pi K}\left[K^2q_1^2\frac{(\vec{r}-\vec{r}_1)^2}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^6} + K^2q_2^2\frac{(\vec{r}-\vec{r}_2)^2}{|\vec{r}-\vec{r}_2|^6} + 2K^2q_1q_2\frac{(\vec{r}-\vec{r}_1)\cdot(\vec{r}-\vec{r}_2)}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3|\vec{r}-\vec{r}_2|^3}\right] = u_{self} + u_{αλληλ.}$$

$U^{(int)}_{αλληλ.} = \frac{K}{4\pi}q_1q_2\int_{V_\infty} dV\frac{(\vec{r}-\vec{r}_1)\cdot(\vec{r}-\vec{r}_2)}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3|\vec{r}-\vec{r}_2|^3}$, θέτουμε $\hat{n} = \hat{r}_{21} = \frac{\vec{r}_1-\vec{r}_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}$, $\vec{r}\,' = \frac{\vec{r}-\vec{r}_1}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}$, οπότε

$dV = d^3r = |\vec{r}_1-\vec{r}_2|^3 d^3r'$, $\vec{r} = \vec{r}_1 + |\vec{r}_1-\vec{r}_2|\vec{r}\,'$, $\vec{r}-\vec{r}_2 = \vec{r}_1-\vec{r}_2+|\vec{r}_1-\vec{r}_2|\vec{r}\,' = |\vec{r}_1-\vec{r}_2|(\hat{n}+\vec{r}\,')$

$$U^{(int)}_{αλληλ} = \frac{K}{4\pi}q_1q_2\int_{V_\infty} d^3r'\,|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^3\frac{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^2\,\vec{r}\,'\cdot(\vec{r}\,'+\hat{n})}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^6\,r'^3\,|\vec{r}\,'+\hat{n}|^3} = \frac{K}{4\pi}\frac{q_1q_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}\int_{V_\infty} d^3r'\frac{\vec{r}\,'\cdot(\vec{r}\,'+\hat{n})}{r'^3|\vec{r}\,'+\hat{n}|^3}$$

$$= \frac{K}{4\pi}q_1q_2\int_{V_\infty} d^3r'\,\nabla_{r'}\left(\frac{1}{r'}\right)\cdot\nabla_{r'}\left(\frac{1}{|\vec{r}\,'+\hat{n}|}\right)$$

$$= \frac{K}{4\pi}\frac{q_1q_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}\int_{V_\infty} d^3r'\,\nabla_{r'}\cdot\left[\frac{1}{|\vec{r}\,'+\hat{n}|}\nabla_{r'}\left(\frac{1}{r'}\right)\right] - \frac{K}{4\pi}\frac{q_1q_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}\int_{V_\infty} d^3r'\frac{1}{|\vec{r}\,'+\hat{n}|}\nabla^2_{r'}\left(\frac{1}{r'}\right)$$

Αλλά $\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\nabla^2\int dV\frac{\rho(\vec{R})}{|\vec{r}-\vec{R}|} = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \Rightarrow \frac{1}{4\pi}\int dV\,\rho(\vec{R})\,\nabla^2_r\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{R}|}\right) = -\rho(\vec{r})$

$\Rightarrow \int dV\,\rho(\vec{R})\,\nabla^2_R\left(\frac{1}{|\vec{R}-\vec{r}|}\right) = -4\pi\rho(\vec{r})$, $\forall\rho$. Άρα $\int_{V_\infty} d^3r'\frac{1}{|\vec{r}\,'+\hat{n}|}\nabla^2_{r'}\left(\frac{1}{|\vec{r}\,'-\vec{r}|}\right) = -4\pi\frac{1}{|\vec{r}+\hat{n}|}$

$$U^{(int)}_{αλληλ.} = \frac{K}{4\pi}\frac{q_1q_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}\oint_{S_\infty}\frac{1}{|\vec{r}\,'+\hat{n}|}\nabla_{r'}\left(\frac{1}{r'}\right)\cdot d\vec{a} - \frac{K}{4\pi}\frac{q_1q_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}(-4\pi)$$

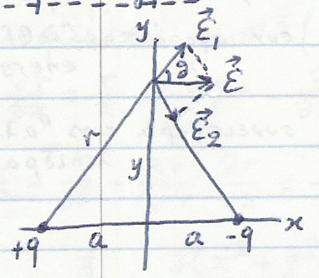
$$= \frac{K}{4\pi}\frac{q_1q_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}\oint_{S_\infty}\frac{1}{|\vec{r}+\hat{n}|}\nabla_r\left(\frac{1}{r}\right)\cdot d\vec{a} + \frac{Kq_1q_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}$$

όπου $\oint_{S(r)}\frac{1}{|\vec{r}+\hat{n}|}\nabla_r\left(\frac{1}{r}\right)\cdot d\vec{a} = -\int\frac{1}{|\vec{r}+\hat{n}|}\frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\frac{\vec{r}}{r}r^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi = -2\pi\int_0^\pi\frac{\sin\theta\,d\theta}{\sqrt{r^2+2r\cos\theta+1}} = \pi\frac{\sqrt{r^2+1}}{r}\int\frac{dz}{\sqrt{z}}$

$\left(z = \frac{2r}{r^2+1}\cos\theta+1\right)$ $\quad = 2\pi\frac{\sqrt{r^2+1}}{r}\sqrt{z} = \frac{2\pi}{r}\sqrt{r^2+2r\cos\theta+1}\Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi} = -\frac{4\pi}{r}$

$$\Rightarrow \oint_{S_\infty}\frac{1}{|\vec{r}+\hat{n}|}\nabla_r\left(\frac{1}{r}\right)\cdot d\vec{a} = \lim_{r\to\infty}\oint_{S(r)}\frac{1}{|\vec{r}+\hat{n}|}\nabla_r\left(\frac{1}{r}\right)\cdot d\vec{a} = \lim_{r\to\infty}\left(-\frac{4\pi}{r}\right) = 0$$

Παράδειγμα



Ποιο το $\vec{\mathcal{E}}$ στον άξονα y για $y \gg a$?

$$\mathcal{E}_1 = \frac{Kq}{r^2} = \frac{Kq}{y^2+a^2} = \mathcal{E}_2$$

$$\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}_1 + \vec{\mathcal{E}}_2 = \mathcal{E}\,\hat{\imath}$$

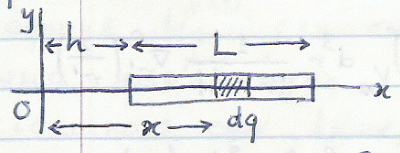
$$\mathcal{E} = 2\,\mathcal{E}_1 \cos\vartheta = 2\,\frac{Kq}{y^2+a^2}\,\frac{a}{\sqrt{y^2+a^2}} = \frac{2Kqa}{(y^2+a^2)^{3/2}}$$

Για $y \gg a \Rightarrow \mathcal{E} \simeq \frac{2Kqa}{y^3}$, πιο αργά απ' ό,τι το $\frac{1}{r^2}$. Θα βρούμε αργότερα για το ηλεκτρικό δίπολο το πεδίο παντού στο χώρο και πάλι θα υπάρχει μια εξάρτηση $\frac{1}{r^3}$. Τα ουδέτερα άτομα και μόρια μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο γίνονται δίπολα, ενώ υπάρχουν και μόρια όπως το HCl που είναι μόνιμα δίπολα.

Για ένα σημείο στον άξονα x με $x \gg a$ είναι

$$\phi = \frac{Kq}{x+a} - \frac{Kq}{x-a} = \frac{2Kqa}{x^2-a^2} \simeq \frac{2Kqa}{x^2}, \quad \mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dx} \simeq \frac{4Kqa}{x^3}$$

Παράδειγμα



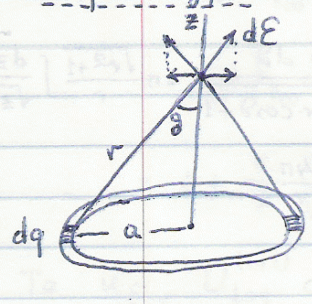
Ομοιόμορφα φορτισμένη ράβδος
Ποιο το $\vec{\mathcal{E}}$ στο O ?

$$\mathcal{E} = \int d\mathcal{E} = \int \frac{K\,dq}{x^2}, \quad dq = \rho\,dV = \rho A\,dx = \lambda\,dx$$

$$\mathcal{E} = K\lambda \int_h^{h+L} \frac{dx}{x^2} = -K\lambda\,\frac{1}{x}\Big|_h^{h+L} = -K\lambda\left(\frac{1}{h+L} - \frac{1}{h}\right) = K\lambda\left(\frac{1}{h} - \frac{1}{h+L}\right) = \frac{K\lambda L}{h(h+L)}$$

$$Q = \rho V = \lambda L \Rightarrow \mathcal{E} = \frac{KQ}{h(h+L)} \text{ και για } h \gg L \to \mathcal{E} \simeq \frac{KQ}{h^2}$$

Παράδειγμα Ομοιόμορφα φορτισμένος δακτύλιος. Ποιο το $\vec{\mathcal{E}}$ στον άξονα z?



$$d\mathcal{E} = \frac{K\,dq}{r^2}, \quad d\mathcal{E}_z = d\mathcal{E}\cos\vartheta = \frac{K\,dq}{r^2}\,\frac{z}{r} = \frac{Kz\,dq}{r^3}$$

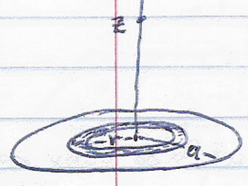
$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_z = \int d\mathcal{E}_z = \frac{Kz}{r^3}\int dq = \frac{KQz}{(z^2+a^2)^{3/2}}$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dz} \Rightarrow \phi = -\int \mathcal{E}_z\,dz = -KQ\int \frac{z\,dz}{(z^2+a^2)^{3/2}} = -\frac{KQ}{2}\int \frac{dz^2}{(z^2+a^2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{KQ}{\sqrt{z^2+a^2}} \text{ ή } d\phi = \frac{K\,dq}{r} \Rightarrow \phi = \int d\phi = \frac{K}{r}\int dq = \frac{KQ}{r} = \frac{KQ}{\sqrt{z^2+a^2}}$$

Παράδειγμα   Ομοιόμορφα φορτισμένος δίσκος

Ποιο το $\vec{\mathcal{E}}$ στον άξονα z ?



Ένας στοιχειώδης δακτύλιος ακτίνας r και πάχους dr δημιουργεί στον άξονα z πεδίο

$$d\mathcal{E}_z = \frac{K\,dq\,z}{(z^2+r^2)^{3/2}} \quad , \quad dq = \sigma\, 2\pi r\, dr$$

$$\Rightarrow \quad d\mathcal{E}_z = \frac{2\pi K\sigma z r}{(z^2+r^2)^{3/2}}\, dr$$

$$\Rightarrow \mathcal{E} = \mathcal{E}_z = \int d\mathcal{E}_z = 2\pi K\sigma z \int_0^a \frac{r\,dr}{(r^2+z^2)^{3/2}} = \pi K\sigma z \int_0 \frac{dr^2}{(r^2+z^2)^{3/2}} =$$

$$= -2\pi K\sigma z \left.\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}\right|_{r=0}^{r=a} = 2\pi K z\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}}\right) = 2\pi K\sigma\left(1 - \frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}\right)$$

$$Q = \sigma\pi a^2 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}(z) = \frac{2KQ}{a^2}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}\right), \ \mathcal{E}(0) = \frac{2KQ}{a^2}, \ \mathcal{E}(0^+) - \mathcal{E}(0^-) = \frac{4KQ}{a^2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

π.χ. $\mathcal{E}(z \ll a) \simeq \frac{2KQ}{a^2}\left(1 - \frac{z}{a}\right) \simeq \frac{2KQ}{a^2} = 2\pi K\sigma = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ δηλαδή το πεδίο έξω από μια άπειρη επίπεδη φορτισμένη πλάκα

π.χ. $\mathcal{E}(z \gg a) = \frac{2KQ}{a^2}\left[1 - \left(1 + \frac{a^2}{z^2}\right)^{-1/2}\right] \simeq \frac{2KQ}{a^2}\left[1 - \left(1 - \frac{a^2}{2z^2}\right)\right] \simeq \frac{KQ}{z^2}$ σαν σημείο

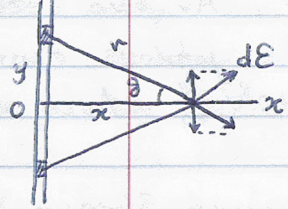
$$\mathcal{E}_z = -\frac{\partial\phi}{\partial z} \Rightarrow \phi = -\int \mathcal{E}_z\, dz = \frac{2KQ}{a^2}\int\left(\frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}} - 1\right)dz = \frac{2KQ}{a^2}\left(\int \frac{dz^2}{2\sqrt{a^2+z^2}} - z\right)$$

$$= \frac{2KQ}{a^2}\left(\sqrt{a^2+z^2} - z\right) = 2\pi K\sigma\left(\sqrt{a^2+z^2} - z\right)$$

ή $$d\phi = \frac{K\,dq}{\sqrt{z^2+r^2}} = \frac{2\pi K\sigma r}{\sqrt{z^2+r^2}}\,dr \Rightarrow \phi = \int d\phi = 2\pi K\sigma\int_0^a \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2+z^2}} = \pi K\sigma \int_0^a \frac{dr^2}{\sqrt{r^2+z^2}} =$$

$$= 2\pi K\sigma \left.\sqrt{z^2+r^2}\right|_{r=0}^{r=a} = 2\pi K\sigma\left(\sqrt{a^2+z^2} - z\right)$$

Παράδειγμα   Άπειρη ευθύγραμμη ομοιόμορφα φορτισμένη κατανομή φορτίου



γραμμική κατανομή φορτίου

$$d\mathcal{E} = \frac{K\,dq}{r^2} \quad , \quad dq = \lambda\, dy$$

$$d\mathcal{E}_x = d\mathcal{E}\cos\theta = \frac{K\lambda\, dy}{r^2}\cos\theta$$

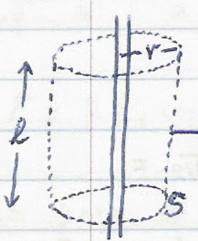
$$y = x\tan\theta \Rightarrow dy = x\sec^2\theta\, d\theta \quad , \quad r = x\sec\theta$$

$$d\mathcal{E}_x = K\lambda x \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{x^2\sec^2\theta}\cos\theta = \frac{K\lambda}{x}\cos\theta\, d\theta \Rightarrow \mathcal{E} = \mathcal{E}_x = \int d\mathcal{E}_x = \frac{K\lambda}{x}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta\, d\theta =$$

$$= \frac{K\lambda}{x}\sin\theta\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{2K\lambda}{x} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x}$$

$$\mathcal{E}_x = -\frac{\partial\phi}{\partial x} \Rightarrow \phi = -\int \mathcal{E}_x\, dx = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\int\frac{dx}{x} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln x + c$$

Αλλιώς (μέσω νόμου Gauss): λόγω συμμετρίας το $\vec{\mathcal{E}}$ κάθετο στην κατανομή



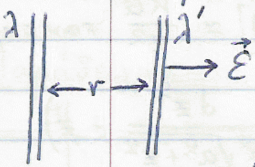
$$\Phi_{\mathcal{E}} = \oint_S \vec{\mathcal{E}}\cdot d\vec{a} = \oint_S \mathcal{E}\, da = \mathcal{E}\oint_S da = \mathcal{E}\, 2\pi r l \Rightarrow$$

$$\frac{q}{\epsilon_0} = 2\pi r l \mathcal{E} \Rightarrow \frac{\lambda l}{\epsilon_0} = 2\pi r l \mathcal{E} \Rightarrow \mathcal{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \Rightarrow \vec{\mathcal{E}} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\hat{e}_r$$

Στο εσωτερικό μιας ομοιόμορφα φορτισμένης κατανομής ακτίνας a

$$\oint_S \vec{\mathcal{E}}\cdot d\vec{a} = \mathcal{E}\, 2\pi r l = \frac{1}{\epsilon_0}\lambda l \frac{r^2}{a^2} \Rightarrow \mathcal{E} = \frac{\lambda r}{2\pi\epsilon_0 a^2}$$

Αν έχουμε δύο γραμμικές κατανομές λ, λ', η δύναμη που ασκείται στη δεύτερη σε μήκος L' είναι $(\lambda' L')\mathcal{E}$. Άρα η δύναμη



που ασκείται ανά μονάδα μήκους είναι

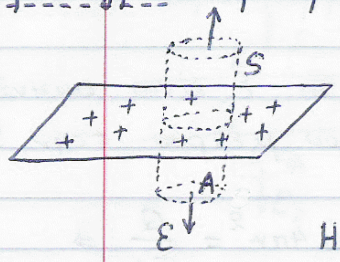
$\lambda'\mathcal{E} = \frac{\lambda\lambda'}{2\pi\epsilon_0 r}$ (η ίδια και για τις δύο κατανομές).

Αν θεωρήσουμε ως λ εκείνο που προκύπτει αν πάρουμε τα ελεύθερα ηλεκτρόνια σύρματος Cu. Ο Cu δίνει ένα ελεύθερο ηλεκτρόνιο ανά άτομο και η αριθμητική πυκνότητα των ηλεκτρονίων είναι

$$n = \frac{N_A}{V_{grat}} = \frac{N_A \rho}{m_{grat}} = \frac{6.023\times10^{23}\times 8.95\ g/cm^3}{63.5g} = 8.5\times10^{28}\ \frac{\text{ηλεκτρ.}}{m^3}$$

Αν η ακτίνα της κατανομής είναι 1mm, δηλαδή η διατομή $S = 3\times10^{-6}\,m^2$, τότε η γραμμική αριθμητική πυκνότητα φορτίου είναι $nS = 8.5\times10^{28}\ \frac{\text{ηλεκτρ.}}{m^3}\times(3\times10^{-6}m^2) = 2.5\times10^{23}\ \frac{\text{ηλεκτρ}}{m}$ και η γραμμική πυκνότητα φορτίου είναι $\lambda = (nS)e = 2.5\times10^{23}\ \frac{\text{ηλεκτρ}}{m}\times(1.6\times10^{-19}\,Cb) = 4\times10^{4}\ \frac{Cb}{m}$. Αν δύο τέτοιες κατανομές απέχουν 5cm τότε η δύναμη ανά μονάδα μήκους στην κάθεμια κατανομή είναι $\frac{(4\times10^4)^2}{2\pi(8.8\times10^{-12})\times0.05}\ \frac{N}{m} = 5.8\times10^{20}\ \frac{N}{m}$. Αυτή η δύναμη είναι τεράστια σε σχέση με την αντίστοιχη μαγνητική δύναμη μεταξύ ρευματοφόρων αγωγών (η μαγνητική δύναμη είναι μικρότερη κατά τον παράγοντα $\frac{v^2}{c^2}$). Πράγματι, στον μικρόκοσμο τα μαγνητικά φαινόμενα είναι δευτερεύουσας σημασίας σε σχέση με τα ηλεκτρικά. Στον μακρόκοσμο λόγω της ηλεκτρικής ουδετερότητας της ύλης εμφανίζονται τα μαγνητικά φαινόμενα σημαντικά.

Παράδειγμα Ομοιόμορφα φορτισμένο επίπεδο

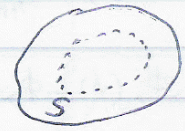


Νόμος Gauss: $\oint_S \vec{\mathcal{E}}\cdot d\vec{a} = 2\mathcal{E}A = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \Rightarrow \mathcal{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$

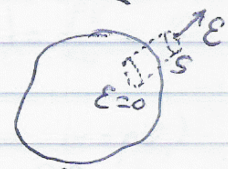
$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dx} \Rightarrow \phi = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}x$$

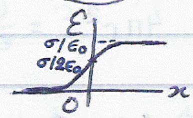
Η ασυνέχει του $\mathcal{E}$ διασχίζοντας το επίπεδο είναι $\mathcal{E}_+ - \mathcal{E}_- = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} - \left(-\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\right) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$

Παράδειγμα Ηλεκτρικό πεδίο φορτισμένου αγωγού



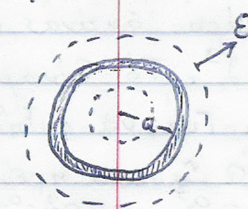
Θεωρώντας οποιαδήποτε κλειστή επιφάνεια στο εσωτερικό του αγωγού αφού δεν υπάρχει φορτίο εντός της, άρα $\oint_S \vec{\mathcal{E}}\cdot d\vec{a} = 0$. Αυτό ισχύει για την τυχούσα S, άρα στο εσωτερικό $\vec{\mathcal{E}}_< = 0$. Για το εξωτερικό θεωρούμε έναν μικρό κύλινδρο γύρω από την επιφάνεια του αγωγού. Το εξωτερικό $\vec{\mathcal{E}}$ είναι κάθετο στην επιφάνεια διότι αυτή είναι ισοδυναμική. Άρα $\oint_S \vec{\mathcal{E}}\cdot d\vec{a} = \mathcal{E}A = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \Rightarrow \mathcal{E}_> = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$.





Η τιμή αυτή είναι η τιμή του πεδίου μόλις έξω από τον αγωγό, όπου η διεύθυνση του πεδίου είναι κάθετη στην επιφάνεια. Μακρυά από την επιφάνεια οι δύο βάσεις του γενικευμένου "κυλίνδρου" με γεννέτηρες παράλληλες στις δυναμικές γραμμές είναι διαφορετικές.

Παράδειγμα Λεπτό σφαιρικό κέλυφος φορτίου Q, ακτίνας a



Μέσα: $\oint_S \vec{\mathcal{E}}\cdot d\vec{a} = \oint_S \mathcal{E}\,da = \mathcal{E}\oint_S da = \mathcal{E}\,4\pi r^2 = 0 \Rightarrow \mathcal{E}_< = 0$

Έξω: $\oint_S \vec{\mathcal{E}}\cdot d\vec{a} = \oint_S \mathcal{E}\,da = \mathcal{E}\,4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow \mathcal{E}_> = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{KQ}{r^2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\left(\frac{a}{r}\right)^2$

$$\mathcal{E}_> = -\frac{d\phi_>}{dr} \Rightarrow \phi_>(r) - \phi_>(\infty) = \int_r^\infty \mathcal{E}_>(r)dr = KQ\int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = -\frac{KQ}{r}\Big|_r^\infty \Rightarrow \phi_>(r) = \frac{KQ}{r}$$

Θα βρούμε την ενέργεια που απαιτείται για να δημιουργηθεί το σφαιρικό κέλυφος. Αν το κέλυφος έχει φορτίο q τότε το δυναμικό στην επιφάνεια είναι $\phi(a) = \frac{Kq}{a}$. Για να αυξηθεί το φορτίο κατά dq χρειάζεται να δοθεί ενέργεια $dU = \phi(a)\,dq = \frac{Kq}{a}dq \Rightarrow U = \int dU = \frac{K}{a}\int q\,dq = \frac{KQ^2}{2a}$

Το ίδιο προκύπτει και από τον τύπο

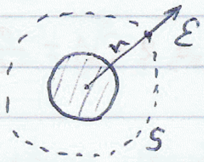
$$U = \frac{1}{8\pi K}\int_{V_\infty} |\vec{\mathcal{E}}|^2 dV = \frac{1}{8\pi K}K^2Q^2\int_a^\infty \frac{1}{r^4}4\pi r^2 dr = \frac{KQ^2}{2}\int_a^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{KQ^2}{2a}$$

Παρατηρούμε ότι η τιμή $\mathcal{E}_>(a) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2} = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{Q}{4\pi a^2} = \frac{1}{\epsilon_0}\sigma = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ σε συμφωνία με την γενική έκφραση για το ηλεκτρικό πεδίο αγωγού μόλις έξω από την επιφάνεια του. Η ενέργεια προκύπτει και από τον τύπο

$$U = \frac{1}{2}\int dV\rho\phi = \frac{1}{2}\int da\,\sigma\phi = \frac{1}{2}\phi(a)Q = \frac{KQ^2}{2a}$$

Παράδειγμα Σφαιρικά συμμετρική κατανομή φορτίου Q, ακτίνας a

Για $r>a$



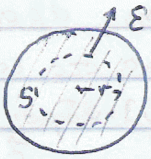
Λόγω συμμετρίας το $\vec{\mathcal{E}}$ είναι ακτινικό και παντού του ίδιου μέτρου στην S

$$\Phi_{\mathcal{E}} = \oint_S \vec{\mathcal{E}}\cdot d\vec{a} = \oint_S \mathcal{E}\,\hat{e}_r\cdot\hat{e}_r\, da = \oint_S \mathcal{E}\, da = \mathcal{E}\oint_S da = \mathcal{E}\,4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{E}_> = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{KQ}{r^2} = \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 r^2},$$ δηλαδή ως αν το φορτίο Q να ήταν όλο στο κέντρο.

$$\phi_>(r) - \phi_>(\infty) = \int_r^\infty \mathcal{E}_>(r)\,dr = \frac{KQ}{r} \Rightarrow \phi_>(r) = \frac{KQ}{r}$$

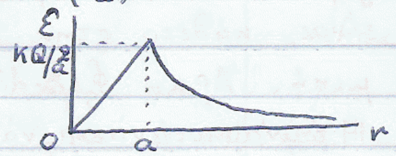
Για $r<a$



$$\Phi_{\mathcal{E}} = \oint_S \vec{\mathcal{E}}\cdot d\vec{a} = 4\pi r^2\mathcal{E} = \frac{q(r)}{\epsilon_0}$$, όπου

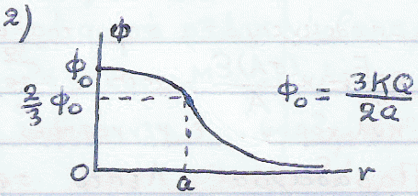
$$q(r) = \rho\,\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^3}\,\frac{4}{3}\pi r^3 = Q\left(\frac{r}{a}\right)^3$$

$$4\pi r^2\mathcal{E} = \frac{Q}{\epsilon_0}\left(\frac{r}{a}\right)^3 \Rightarrow \mathcal{E}_< = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{r}{a^3} = \frac{KQr}{a^3} = \frac{\rho}{3\epsilon_0}r$$



$$\phi_<(r) - \phi_<(a) = \int_r^a \mathcal{E}_<(r)\,dr = \frac{KQ}{a^3}\int_r^a r\,dr = \frac{KQ}{2a^3}(a^2-r^2)$$

$$\Rightarrow \phi_<(r) = \frac{KQ}{a} + \frac{KQ}{2a^3}(a^2-r^2) = \frac{KQ}{2a}\left(3-\frac{r^2}{a^2}\right)$$



$\phi_0 = \dfrac{3KQ}{2a}$

Θα βρούμε την ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στο πεδίο της σφαιρικής κατανομής. Θεωρούμε μια συμπαγή σφαίρα ακτίνας r η οποία έχει ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο $q(r) = Q\left(\frac{r}{a}\right)^3$. Το δυναμικό στην επιφάνεια της σφαίρας είναι $\phi(r) = \frac{Kq(r)}{r} = \frac{KQ}{a^3}r^2$. Για να αυξηθεί η ακτίνα κατά dr χρειάζεται προσθήκη φορτίου $dq = 3Q\frac{r^2}{a^3}$ και η ενέργεια που απαιτείται είναι $dU = \phi(r)\,dq = \frac{3KQ^2}{a^6}r^4dr \Rightarrow U = \int dU = \frac{3KQ^2}{a^6}\int_0^a r^4dr$ $= \frac{3KQ^2}{5a}$. Το ίδιο βρίσκουμε εφαρμόζοντας τον τύπο $U = \frac{1}{8\pi K}\int_{V_\infty}|\vec{\mathcal{E}}|^2dV$

Είναι

$$\int_{V_\infty}|\vec{\mathcal{E}}|^2dV = \int_{V_<}\mathcal{E}_<^2dV + \int_{V_>}\mathcal{E}_>^2dV = \frac{K^2Q^2}{a^6}\int_0^a r^2\,4\pi r^2dr + K^2Q^2\int_a^\infty\frac{1}{r^4}\,4\pi r^2dr =$$

$$= \frac{4\pi K^2Q^2}{5a} + \frac{4\pi K^2Q^2}{a} = \frac{24\pi K^2Q^2}{5a} \Rightarrow U = \frac{3KQ^2}{5a} = \frac{3}{5}\,\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a}$$

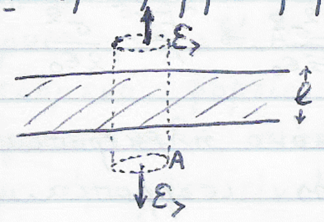
Ακόμα $U = \frac{1}{2}\int dV\rho\phi = \frac{1}{2}\int 4\pi r^2dr\left(Q/\tfrac{4}{3}\pi a^3\right)\frac{KQ}{2a}\left(3-\frac{r^2}{a^2}\right) = \frac{3KQ^2}{5a}$

Για το e, αν θέσουμε την ενέργεια αυτή $\frac{3}{5}\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_e} = m_ec^2 \Rightarrow a_e = \frac{3}{5}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{m_ec^2}$ $= \frac{3}{5}r_e$, $r_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{m_ec^2} = 2.8\times10^{-15}\,m$,

δηλαδή αν συσχετίσουμε την ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου με την ενέργεια ηρεμίας βρίσκουμε μια τυπική ακτίνα του e.

Παράδειγμα Ομοιόμορφα φορτισμένη πλάκα πυκνότητας φορτίου ρ, πάχους ℓ.

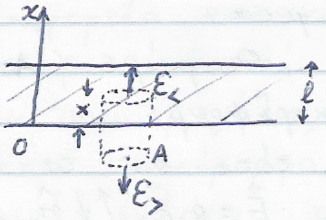
Έξω:



$$\oint_S \vec{\mathcal{E}}\cdot d\vec{a} = \mathcal{E}_> A + (-\mathcal{E}_>)(-A) = 2\mathcal{E}_> A = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{\rho(A\ell)}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \mathcal{E}_> = \frac{\rho\ell}{2\epsilon_0}$$

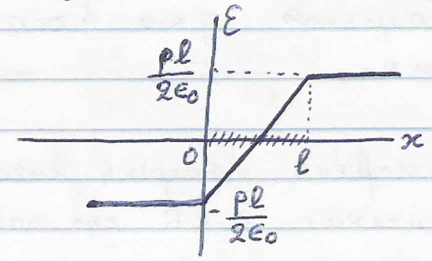
Μέσα:



$$\oint_S \vec{\mathcal{E}}\cdot d\vec{a} = \mathcal{E}_< A + (-\mathcal{E}_>)(-A) = \mathcal{E}_< A + \mathcal{E}_> A = $$
$$= \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{\rho(Ax)}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \mathcal{E}_< = \frac{\rho x}{\epsilon_0} - \mathcal{E}_> = \frac{\rho x}{\epsilon_0} - \frac{\rho\ell}{2\epsilon_0} = \frac{\rho}{\epsilon_0}\left(x - \frac{\ell}{2}\right), \; x<\ell$$

$$\mathcal{E}_<(\ell) = \frac{\rho\ell}{2\epsilon_0} = \mathcal{E}_>, \quad \mathcal{E}_<(0) = -\frac{\rho\ell}{2\epsilon_0}$$

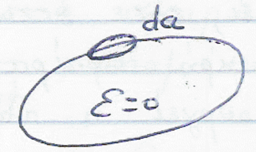


$$\mathcal{E}(\ell) - \mathcal{E}(0) = \frac{\rho\ell}{2\epsilon_0} - \left(-\frac{\rho\ell}{2\epsilon_0}\right) = \frac{\rho\ell}{\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$(q = \rho V = \rho A\ell, \; q = \sigma A \Rightarrow \sigma = \rho\ell)$$

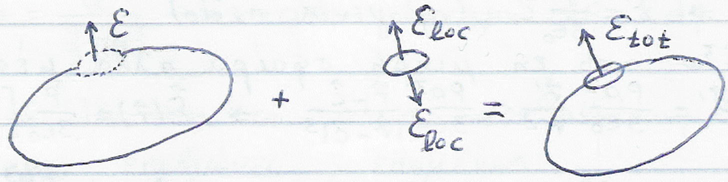
Παράδειγμα Να βρεθεί η δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας με την οποία απωθούνται τα φορτία της επιφάνειας ενός αγωγού (electric stress).

Θεωρούμε μια μικρή επιφάνεια $A = da$ της επιφάνειας του αγωγού η οποία περιέχει φορτίο $dq = \sigma da$. Επειδή το ηλεκτρικό πεδίο μόλις έξω από τον αγωγό είναι κάθετο στην επιφάνεια με μέτρο $\mathcal{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$, θα έλεγε κανείς ότι η δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας είναι $\frac{F}{A} = \frac{\mathcal{E}dq}{A} = \frac{\mathcal{E}(\sigma A)}{A} = \sigma\mathcal{E} = \frac{\sigma^2}{\epsilon_0}$. Αυτό είναι λάθος διότι στο $\mathcal{E}$ αυτό



έχει ληφθεί υπόψη και η συνεισφορά του ίδιου του dq, δηλαδή η συνεισφορά από τη δύναμη που ασκεί το φορτίο στον εαυτό του.

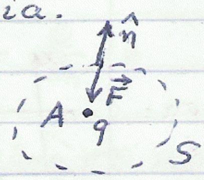
Επομένως, αν $\mathcal{E}_{loc} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ είναι το πεδίο που δημιουργεί μόνο του το dq και $\mathcal{E}$ το πεδίο που δημιουργεί ο υπόλοιπος αγωγός χωρίς το dq, τότε η επαλληλία των δύο είναι το ολικό πεδίο $\vec{\mathcal{E}}_{tot} = \vec{\mathcal{E}} + \vec{\mathcal{E}}_{loc}$ με $\mathcal{E}_{tot} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$. Επειδή τα $\vec{\mathcal{E}}_{loc}$, $\vec{\mathcal{E}}_{tot}$ είναι κάθετα στην επιφάνεια, άρα το ίδιο ισχύει και για το $\vec{\mathcal{E}}$. Είναι



$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{tot} - \mathcal{E}_{loc} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$. Αυτό το $\mathcal{E}$ ασκεί στο dq δύναμη $F = \mathcal{E}dq = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}(\sigma A) = \frac{\sigma^2 A}{2\epsilon_0}$

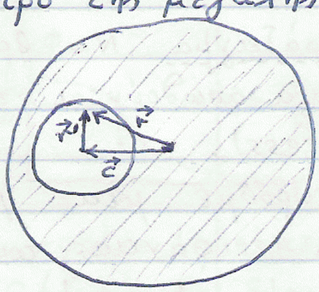
$\Rightarrow \frac{F}{A} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$. Αλλιώς, ενεργειακά, αν φανταστούμε μια μικρή μετατόπιση προς τα έξω της επιφάνειας του αγωγού κατά Δx, τότε η δυναμική ενέργεια μειώνεται, $\Delta U = -u_E \Delta V = -\frac{\epsilon_0}{2}\mathcal{E}^2 \Delta a \Delta x = -\frac{\epsilon_0}{2}\frac{\sigma^2}{\epsilon_0^2}\Delta a \Delta x = -\frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}\Delta a \Delta x$.
Αλλά $\Delta U = -\Delta W = -F\Delta x \Rightarrow F = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}\Delta a \Rightarrow \frac{F}{\Delta a} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$.

Παράδειγμα Δείξτε ότι όταν υπάρχουν μόνο ηλεκτροστατικές δυνάμεις δεν είναι δυνατή η ευσταθής ισορροπία.

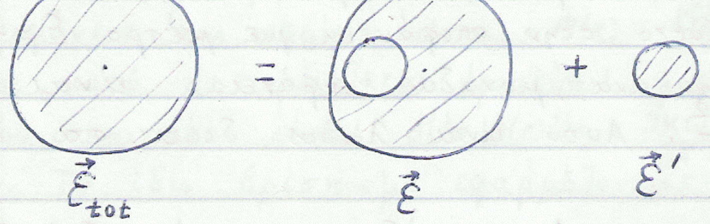


Πράγματι, έστω το σημείο A και μια μικρή επιφάνεια S που το περιβάλλει. Θεωρούμε ένα μικρό φορτίο $q>0$ στο A. Αν εκτρέψουμε το q ελαφρά προς την διεύθυνση $\hat{n}$, τότε αν το A είναι θέση ευσταθούς ισορροπίας οφείλει $\vec{F} = q\vec{\mathcal{E}} \uparrow\downarrow \hat{n} \Rightarrow$ $\vec{\mathcal{E}} \uparrow\downarrow \hat{n}$. Από το νόμο Gauss έχουμε $\oint_S \vec{\mathcal{E}}\cdot d\vec{a} = \frac{q}{\epsilon_0}$, όπου $\oint_S \vec{\mathcal{E}}\cdot d\vec{a} < 0$, αφού $\vec{\mathcal{E}} \uparrow\downarrow \hat{n}$, $\forall \hat{n}$. Επομένως $q<0$ άτοπο. Άρα A όχι θέση ευσταθούς ισορροπίας.

Παράδειγμα Από μία ομοιόμορφα φορτισμένη σφαιρική κατανομή ακτίνας R αφαιρούμε μία σφαίρα ακτίνας $a<R$ της οποίας το κέντρο βρίσκεται στη θέση $\vec{c}$ ως προς το κέντρο της μεγάλης σφαίρας. Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο παντού.



Αν γεμίσουμε την τρύπα με το φορτίο που λείπει, τότε έστω $\vec{\mathcal{E}}'$ το πεδίο που δημιουργεί η μικρή σφαίρα και $\vec{\mathcal{E}}_{tot}$ το πεδίο που δημιουργεί η πλήρης μεγάλη σφαίρα. Τότε



λόγω της επαλληλίας έχουμε $\vec{\mathcal{E}}_{tot} = \vec{\mathcal{E}} + \vec{\mathcal{E}}'$
$\Rightarrow \vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}_{tot} - \vec{\mathcal{E}}'$

Μέσα στη μικρή σφαίρα: Είναι $\vec{\mathcal{E}}_{tot} = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\vec{r}$, $\vec{\mathcal{E}}' = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\vec{r}' \Rightarrow \vec{\mathcal{E}} = \frac{\rho}{3\epsilon_0}(\vec{r} - \vec{r}')$
$\Rightarrow \vec{\mathcal{E}} = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\vec{c}$ (ομογενές πεδίο)

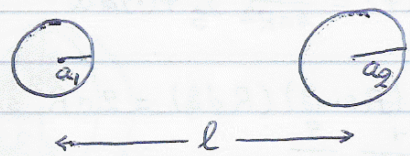
Έξω από τη μικρή σφαίρα αλλά μέσα στη μεγάλη: $\vec{\mathcal{E}}_{tot} = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\vec{r}$,
$\vec{\mathcal{E}}' = \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0}\frac{\vec{r}'}{r'^3} = \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0}\frac{\vec{r} - \vec{c}}{|\vec{r} - \vec{c}|^3} \Rightarrow \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\left[\vec{r} - \frac{a^3}{|\vec{r} - \vec{c}|^3}(\vec{r} - \vec{c})\right]$

Έξω από τη μεγάλη σφαίρα: $\vec{\mathcal{E}}_{tot} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}$, $\vec{\mathcal{E}}' = \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0}\frac{\vec{r}'}{r'^3} = \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0}\frac{\vec{r} - \vec{c}}{|\vec{r} - \vec{c}|^3} \Rightarrow$

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\left[\frac{R^3}{r^3}\vec{r} - \frac{a^3}{|\vec{r} - \vec{c}|^3}(\vec{r} - \vec{c})\right]$$

Παράδειγμα Δύο μεταλλικές σφαίρες ακτίνων a_1, a_2 βρίσκονται πολύ μακριά μεταξύ τους ($\ell >> a_1+a_2$). Πώς πρέπει να κατανεμηθεί δεδομένο φορτίο Q στις δύο σφαίρες ώστε η δυναμική ενέργεια του συστήματος να είναι ελάχιστη?

Επειδή οι σφαίρες είναι μεταλλικές άρα τα φορτία κατανέμονται στην επιφάνεια τους. Επειδή η απόστασή τους είναι πολύ μεγάλη, άρα τα φορτία είναι ομοιόμορφα σφαιρικά κατανεμημένα σε κάθε σφαίρα.



Η δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι $U=U_1+U_2=\frac{Kq^2}{2a_1}+\frac{K(Q-q)^2}{2a_2}$

όπου $q_1=q$ το φορτίο της σφαίρας 1 και $q_2=Q-q$ της 2.

Θέλουμε ελάχιστη δυναμική ενέργεια, δηλαδή

$$\frac{dU}{dq}=0 \Leftrightarrow \frac{Kq}{a_1}-\frac{K(Q-q)}{a_2}=0 \Leftrightarrow q_1=q=Q\frac{a_1}{a_1+a_2},\ q_2=Q\frac{a_2}{a_1+a_2}.$$

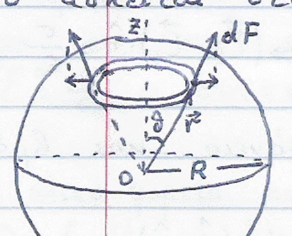
Είναι $\Phi_1=\frac{Kq_1}{a_1}=\frac{KQ}{a_1+a_2}$, $\Phi_2=\frac{Kq_2}{a_2}=\frac{KQ}{a_1+a_2}$, άρα $\Phi_1=\Phi_2$, δηλαδή

αν έχουμε μια τυχαία κατανομή φορτίου πάνω στις δύο σφαίρες, τότε τα φορτία κινούνται (δοθέντος ότι υπάρχει αγωγός μεταξύ τους) από τη μια στην άλλη ώστε να ελαχιστοποιηθεί η δυναμική ενέργεια του συστήματος, δηλαδή να εξισωθούν τα δυναμικά των σφαιρών.

Επίσης $\mathcal{E}_1=\frac{Kq_1}{a_1^2}=\frac{KQ}{a_1(a_1+a_2)}$, $\mathcal{E}_2=\frac{Kq_2}{a_2^2}=\frac{KQ}{a_2(a_1+a_2)}$, επομένως

$\frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_2}=\frac{a_2}{a_1}$, δηλαδή εκεί που η καμπυλότητα είναι μεγάλη το $\mathcal{E}$ είναι μεγάλο

Παράδειγμα Σε ομοιόμορφα φορτισμένη σφαίρα ποια είναι η δύναμη που ασκείται στο ένα ημισφαίριο?



Το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό της σφαίρας είναι $\vec{\mathcal{E}}=\frac{\rho}{3\epsilon_0}\vec{r}$. Σε ένα στοιχειώδη όγκο $du=dr\,(r\,d\vartheta)\,(r\sin\vartheta\, d\varphi)=r^2dr\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$ με φορτίο $dq=\rho\, du$, $\rho=\frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ ασκείται δύναμη $d\vec{F}=\vec{\mathcal{E}}dq$

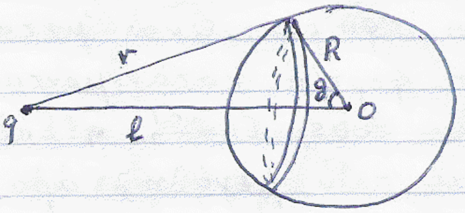
Θεωρώντας τον δακτύλιο όπως στο σχήμα καταλαβαίνουμε ότι μόνο η z-συνιστώσα της δύναμης επιβιώνει, επομένως

$$F=F_z=\int dF_z=\int dF\cos\vartheta=\int \mathcal{E}\rho\, du\cos\vartheta=\frac{\rho^2}{3\epsilon_0}\int_0^R r^3dr\int_0^{\pi/2}\sin\vartheta\cos\vartheta\, d\vartheta\int_0^{2\pi}d\varphi$$

$$=\frac{\rho^2}{3\epsilon_0}\frac{R^4}{4}\frac{1}{2}2\pi=\frac{3}{16}\frac{KQ^2}{R^2}$$

Παράδειγμα Έστω το πεδίο που παράγει το φορτίο q. Να δειχθεί ότι η μέση τιμή του δυναμικού στην επιφάνεια μιας σφαίρας που δεν περικλείει το q ισούται με την τιμή του δυναμικού στο κέντρο της σφαίρας, δηλ. $\langle \phi \rangle = \phi(0)$

Είναι $\langle \phi \rangle = \frac{1}{4\pi R^2} \int_S \phi(r) da$

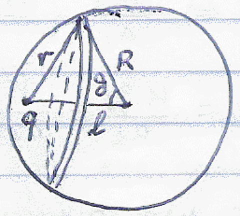


$$da = 2\pi (R\sin\theta)(R\, d\theta) = 2\pi R^2 \sin\theta\, d\theta$$
$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

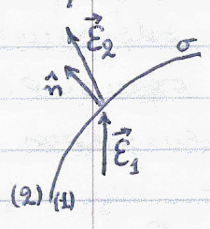
$$r^2 = l^2 + R^2 - 2lR\cos\theta \Rightarrow 2r\,dr = 2lR\sin\theta\, d\theta \Rightarrow da = 2\pi R^2 \frac{r\,dr}{lR} = \frac{2\pi R}{l} r\, dr$$

$$\langle \phi \rangle = \frac{1}{4\pi R^2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi R}{l} \int_{l-R}^{l+R} \frac{1}{r} r\, dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 l} = \phi(0)$$

Αλλιώς, αν φορτίο q' κατανεμηθεί ομοιόμορφα στη σφαίρα, τότε
$q'\langle \phi \rangle = q \cdot \phi' = q \cdot \phi'(q'|_0) = q' \cdot \phi(0) \Rightarrow \langle \phi \rangle = \phi(0)$.
Αν η σφαίρα περικλείει το q, $\langle \phi \rangle = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2lR} \int_{R-l}^{R+l} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$.



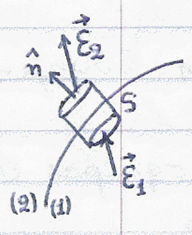
Αν μια επιφάνεια με κάθετο $\hat{n}$ έχει επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ τότε για το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$ εκατέρωθεν της επιφάνειας ισχύει (μπορεί να υπάρχουν και άλλα φορτία στο σύστημα εκτός του σ)



$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \hat{n} = E_{2\perp} - E_{1\perp} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$ $\hat{n}$: από το (1) στο (2)

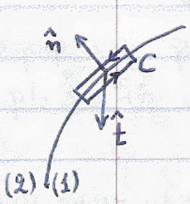
$$\hat{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \Leftrightarrow E_{1\parallel} = E_{2\parallel}$$ (άρα $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \hat{n}$ συνεπίπεδα)

Μαζί οι δύο αυτές συνθήκες γράφονται $\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}$



Θεωρούμε τον κύλινδρο και εφαρμόζουμε το ν. Gauss

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{q}{\epsilon_0} \Leftrightarrow \vec{E}_2 \cdot \hat{n}\, \Delta a + \vec{E}_1 \cdot (-\hat{n})\, \Delta a = \frac{\sigma \Delta a}{\epsilon_0} \Leftrightarrow (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \hat{n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$



Θεωρούμε τυχόν $\hat{t}$ εφαπτόμενο στην επιφάνεια και βρόχο κάθετο στο $\hat{t}$.

Είναι $\vec{E} = \alpha \hat{t} + \beta (\hat{t} \times \hat{n}) + \gamma \hat{n}$, $d\vec{l} = dl\, (\hat{t} \times \hat{n})$

$$\vec{E} \cdot d\vec{l} = \beta\, dl = \vec{E} \cdot (\hat{t} \times \hat{n})\, dl$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \vec{E}_2 \cdot (\hat{t} \times \hat{n}) \Delta l - \vec{E}_1 \cdot (\hat{t} \times \hat{n}) \Delta l = (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot (\hat{t} \times \hat{n}) \Delta l$$
$$= \hat{t} \cdot [\hat{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1)] \Delta l$$

Αλλά $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow \hat{t} \cdot [\hat{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1)] = 0, \forall \hat{t} \Rightarrow \hat{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$

Στην επιφάνεια αγωγού ισχύει $\sigma = \epsilon_0 \vec{E} \cdot \hat{n} = -\epsilon_0 \hat{n} \cdot \nabla \phi$ (αφού $\vec{E}_< = 0$).

Το δυναμικό είναι συνεχής συνάρτηση, $\phi_1 = \phi_2$ αφού $\phi_1 - \phi_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} \xrightarrow[1 \to 2]{} 0$

Ισχύει $\left.\frac{\partial \phi}{\partial n}\right|_2 - \left.\frac{\partial \phi}{\partial n}\right|_1 = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ αφού $\frac{\partial \phi}{\partial n} = \nabla \phi \cdot \hat{n} = -\vec{E} \cdot \hat{n}$