ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Σημειώσεις – Διαγωνοποίηση

Κοφινάς Γιώργος

Τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών και Επικοινωνιακών Συστημάτων

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

(+)

Επεκτείνουμε και για γραμμικές απεικονίσεις $f: V_N \to V$ τις έννοιες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, των ιδιοτιμών και ιδιοσυναρτήσεων.

<u>Ορισμός</u> Χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\varphi_f(x)$ της γραμμικής απεικόνισης $f: V \to V$ λέγεται το πολυώνυμο $\varphi_A(x)$, όπου $A = (f : e_i)$ είναι ο πίνακας της f σε οποιαδήποτε βάση $\{e_i\}$. Οι ιδιοτιμές του $A = (f: e_i)$ λέγονται και ιδιοτιμές της f.
(ο ορισμός είναι καλός διότι όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο, δηλαδή $\varphi_A(x) = \varphi_{P^{-1}AP}(x)$, και τις ίδιες ιδιοτιμές)

<u>Ορισμός</u> Το $v \in V$ λέγεται ιδιοάνυσμα της γραμμικής απεικόνισης $f: V \to V$ αν $\exists \lambda \in F \ : \ f(v) = \lambda v$.
Ιδιόχωρος V_λ της ιδιοτιμής λ της f λέγεται ο υπόχωρος $V_\lambda = \{v \in V : f(v) = \lambda v\} \leq V$
(Είναι προφανώς $V_\lambda = \operatorname{Ker}(f - \lambda 1\!\!1_V)$).

$$f(v) = \lambda v \ \underset{A = (f:e_i)}{\overset{v = \sum_{i=1}^{N} x^i e_i}{\Longleftrightarrow}} \ AX = \lambda X$$

Πράγματι, είναι $f(v) = \sum_{j=1}^{N} y^j e_j$, όπου $y^j = \sum_{i=1}^{N} a_{ji} x^i$. Άρα

$$f(v) = \lambda v \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{N} y^j e_j = \lambda \sum_{j=1}^{N} x^j e_j \Leftrightarrow y^j = \lambda x^j \ , \ j = 1, \dots, N \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{N} a_{ji} x^i = \lambda \sum_{i=1}^{N} \delta_{ji} x^i \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{N} (a_{ji} - \lambda \delta_{ji}) x^i = 0 \Leftrightarrow (A - \lambda I) X = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow AX = \lambda X$$

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow A' \overbrace{(P^{-1}X)}^{X'} = \lambda (P^{-1} X)$$

Πράγματι, $AX = \lambda X \Leftrightarrow AP(P^{-1}X) = \lambda X \Leftrightarrow (P^{-1}AP)(P^{-1}X) = \lambda (P^{-1}X) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow A'(P^{-1}X) = \lambda(P^{-1}X)$

Αλλιώς, αν στη βάση $\{e_i'\}$ είναι $v = \sum_{i=1}^{N} x'^i e_i'$ τότε $f(v) = \lambda v \Leftrightarrow$
$A'X' = \lambda X' \Leftrightarrow A'(P^{-1}X) = \lambda (P^{-1}X)$

Δηλαδή τα ιδιοανύσματα $v = \sum_{i=1}^{N} x^i e_i = x'^i e_i'$, όπως όλα τα διανύσματα, στη μία βάση $\{e_i\}$ εκφράζονται με τις συνιστώσες $X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^N \end{pmatrix}$, στην δε άλλη βάση $\{e_i'\}$ εκφράζονται με τις συνιστώσες $X' = \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^N \end{pmatrix}$.

$\underline{1 \leq m \leq \rho}$

Πράγματι, έστω $f: V \to V$ γραμμική και $A = (f : e_i)$ στη βάση $\{e_i\}$. Έστω V_λ ο ιδιόχωρος της f ιδιοτιμής λ και $v_1, \ldots, v_m \in V_\lambda$ $(m = \dim V_\lambda)$ Γρ. Ανεξ, δηλ. $f(v_\alpha) = \lambda v_\alpha$, $\alpha = 1, \ldots, m$. Συμπληρώνουμε τα διανύσματα $v_1, \ldots, v_m$ με τα $u_{m+1}, \ldots, u_N$ ώστε το $\{e_i'\} = \{v_1, \ldots, v_m, u_{m+1}, \ldots, u_N\}$ να γίνει νέα βάση του V.

Επειδή $f(v_\alpha) = \lambda v_\alpha = \sum_{\beta=1}^{m} \lambda \delta_{\beta\alpha} v_\beta \Rightarrow a_{\beta\alpha} = \lambda \delta_{\beta\alpha}$, άρα ο πίνακας

$$A' = (f : e_i') = \begin{pmatrix} \lambda I_m & \widetilde{A}_{m \times (N-m)} \\ \mathbb{O}_{(N-m) \times m} & \bar{A}_{(N-m)\times(N-m)} \end{pmatrix}$$

[Το ίδιο προκύπτει και από

$$(f(v_1) \ldots f(v_m)\ f(u_{m+1}) \ldots f(u_N)) = (\lambda v_1 \ldots \lambda v_m\ f(u_{m+1}) \ldots f(u_N)) =$$

$$= (v_1 \ldots v_m\ u_{m+1} \ldots u_N) \begin{pmatrix} \lambda I_m & \widetilde{A} \\ \mathbb{O} & \bar{A} \end{pmatrix} \quad]$$

Είναι $\varphi_f(x) = \varphi_A(x) = \varphi_{A'}(x) \Rightarrow (-1)^N (x-\lambda)^\rho f(x) = |A' - x I_N|$, όπου $f(\lambda) \neq 0$

$$\Rightarrow (-1)^N (x-\lambda)^\rho f(x) = \begin{vmatrix} (\lambda - x) I_m & \widetilde{A} \\ \mathbb{O} & \bar{A} - x I_{N-m} \end{vmatrix} = |(\lambda - x) I_m| \cdot |\bar{A} - x I_{N-m}| = (\lambda - x)^m |\bar{A} - x I_{N-m}|$$

$$\Rightarrow (-1)^N (x-\lambda)^\rho f(x) = (-1)^m (x-\lambda)^m |\bar{A} - x I_{N-m}|.$$

Επειδή $f(\lambda) \neq 0$, ενώ μέσα στο πολυώνυμο $|\bar{A} - x I_{N-m}|$ μπορεί να υπάρχουν παράγοντες $x - \lambda$, άρα τελικά $m \leq \rho$.

Επειδή μια γραμμική απεικόνιση $f: V \to V$ συνήθως μελετάται μέσω του πίνακα της $A = (f : e_i)$ σε κάποια βάση $\{e_i\}$, είναι σημαντικό να ξέρουμε αν υπάρχει βάση $\{e_i'\}$ ώστε σ' αυτή ο πίνακας $A' = (f : e_i')$ να λαμβάνει την απλούστερη δυνατή μορφή, που προφανώς είναι η διαγώνια.

Ορισμός Η γραμμική απεικόνιση $f: V \to V$ λέμε ότι διαγωνοποιείται (ή ότι ο πίνακας $A = (f : e_i)$ σε κάποια βάση $\{e_i\}$ διαγωνοποιείται) αν υπάρχει βάση $\{e_i'\}$ τού V ώστε ο πίνακας $A' = (f : e_i')$ να είναι διαγώνιος.

A διαγωνοποιείται $\Leftrightarrow$ $\exists$ P αντιστρέψιμος : $P^{-1}AP =$ διαγώνιος

(αυτό θα μπορούσε να εκληφθεί και ως ορισμός διαγωνοποίησης τού A, δηλαδή ο A διαγωνοποιείται ανν είναι όμοιος προς διαγώνιο πίνακα).

Πράγματι, αν $\{e_i\}$ βάση τού V, ο πίνακας A μπορεί να θεωρηθεί ως ο πίνακας κάποιας γραμμικής απεικόνισης $f: V \to V$, δηλαδή $A = (f : e_i)$. Άρα

A διαγωνοποιείται $\Leftrightarrow$ $\exists$ βάση $\{e_i'\}$: $A' = (f : e_i') =$ διαγώνιος

$\Leftrightarrow$ $P^{-1}AP =$ διαγώνιος, όπου $(e_1' \ldots e_N') = (e_1 \ldots e_N)P$

$\Leftrightarrow$ $\exists$ P αντιστρέψιμος : $P^{-1}AP =$ διαγώνιος.

Παράδειγμα (ad hoc)

Ο πίνακας $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ διαγωνοποιείται διότι για $P=\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$ είναι

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(i, -i)$$

Ωστόσο, το παράδειγμα αυτό είναι ad-hoc διότι δεν συνοδεύεται από κάποια μέθοδο για το πότε και πώς ένας πίνακας διαγωνοποιείται. Σ' αυτό απαντά το επόμενο βασικό θεώρημα διαγωνοποίησης.

Θεώρημα διαγωνοποίησης (ένας πίνακας διαγωνοποιείται ...

$\exists\ P=(X_1 \cdots X_N)$ αντιστρ. $: P^{-1}AP = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_N) \iff \exists\ X_i$ βάση, $i=1,\ldots,N\ :\ AX_i = \lambda_i X_i$

($\lambda_1, \ldots, \lambda_N$: όχι κατ' ανάγκη διακριτές) (λ_i: όχι κατ' ανάγκη διακριτές)

Απόδειξη

$\Rightarrow$) Έστω ότι $\exists\ P$ αντιστρέψ. με $P^{-1}AP = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_N) \equiv \Lambda$

$$\Rightarrow AP = P\Lambda \Rightarrow (AP)^i = (P\Lambda)^i \Rightarrow AP^i = P\Lambda^i$$

$$\Rightarrow AP^i = (P^1 \ldots P^i \ldots P^N)\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow AP^i = \lambda_i P^i$$

$\Rightarrow P^i$ ιδιοάνυσμα τού A ιδιοτιμής λ_i

$\Rightarrow P^1, \ldots, P^N$ ιδιοανύσματα τού A (ιδιοτιμών $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ όχι κατ' ανάγκη διακριτών)

[Το ίδιο λίγο διαφορετικά μπορώ να το κάνω γράφοντας

$$AP = P\Lambda \Rightarrow A(P^1 \ldots P^N) = (P^1 \ldots P^N)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_N \end{pmatrix} \Rightarrow (AP^1 \ldots AP^N) = (\lambda_1 P^1 \ldots \lambda_N P^N)$$

$$\Rightarrow AP^i = \lambda_i P^i \ ]$$

$\Leftarrow$) Έστω ότι $\exists$ βάση $X_1, \ldots, X_N$ ιδιοανυσμάτων τού A, δηλ. $AX_i = \lambda_i X_i$ (όπου τα λ_i δεν είναι κατ' ανάγκη διακριτά)

$$\Rightarrow AX_i = (X_1 \ldots X_i \ldots X_N)\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow AX_i = P\Lambda^i,\ P \equiv (X_1 \cdots X_N),\ \Lambda \equiv \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$$

$$\Rightarrow (AP)^i = (P\Lambda)^i \Rightarrow AP = P\Lambda$$

Αλλά $X_1, \ldots, X_N$ Γρ. Ανεξ. $\Rightarrow P$ αντιστρέψιμος, άρα $P^{-1}AP = \Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$

$\Rightarrow A$ διαγωνοποιήσιμος

[Ή λίγο διαφορετικά, είναι

$$P^{-1}AP = P^{-1}A(X_1 \cdots X_N) = P^{-1}(AX_1 \cdots AX_N) = P^{-1}(\lambda_1 X_1 \ldots \lambda_N X_N) =$$

$$= P^{-1}(X_1 \cdots X_N)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_N \end{pmatrix} = P^{-1}P\Lambda = \Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_N) \ ]$$

Εναλλακτικά, μπορούμε να σκεφθούμε τη διαγωνοποίηση ενός πίνακα A μέσω της διαγωνοποίησης της αντίστοιχης f και τότε το θεώρημα διαγωνοποίησης γίνεται γεωμετρικά και διαισθητικά πιο προφανές

A διαγωνοποιήσιμος $\Leftrightarrow$ f διαγωνοποιήσιμη $\Leftrightarrow$ $\exists$ βάση ιδιοανυσμ. της f $\Leftrightarrow$ $\exists$ βάση ιδιοαν. τού A

Πράγματι, προφανώς A διαγωνοποιήσιμος $\Leftrightarrow$ f διαγωνοποιήσιμη (εξ ορισμού).

Αλλά f διαγωνοποιήσιμη $\Leftrightarrow$ $\exists$ βάση $\{e_i'\}$: $(f : e_i') =$ διαγώνιος $\equiv (\lambda_1, .., \lambda_N)$

$\Leftrightarrow$ $\exists$ βάση $\{e_i'\}$: $(f(e_1') \cdots f(e_N')) = (e_1' \cdots e_N') \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_N \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow$ $\exists$ βάση $\{e_i'\}$: $f(e_i') = \lambda_i e_i'$, $i = 1, .., N$

$\Leftrightarrow$ $\exists$ βάση ιδιοανυσμάτων της f

Προφανώς ύπαρξη βάσης ιδιοανυσμάτων της f $\Leftrightarrow$ ύπαρξη βάσης ιδιοανυσμάτων τού A.

Παρατηρήσεις.

1) Ο πίνακας P διαγωνοποίησης δεν είναι μοναδικός.

Αυτό φαίνεται από τη σχέση $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$, όπου πάντα υπάρχει $P' \neq P$ με $P'^{-1}AP' = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$. Πράγματι, η εξίσωση $AR = RA$ έχει πάντα λύση $R \neq I$, π.χ. $R = rI$, αλλά μπορεί να έχει και περισσότερες non-trivial. Αν $P' \equiv R^{-1}P$, τότε $P'^{-1}AP' = (R^{-1}P)^{-1}A(R^{-1}P) = P^{-1}RAR^{-1}P = P^{-1}ARR^{-1}P = P^{-1}AP =$
$= \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$.

Το ίδιο φαίνεται και με βάση το θεώρημα σκεπτόμενοι τα ιδιοανύσματα της f. Αν οι ιδιόχωροι είναι όλοι μονοδιάστατοι (N διακριτές ιδιοτιμές), που αντιστοιχεί στην προηγούμενη προσέγγιση σε $R = rI$, με $f(v_i) = \lambda_i v_i$, $i = 1, \dots, N$, και κάνουμε rescale των v_i παίρνοντας τα v_i', τότε προφανώς τα v_i' είναι ιδιοανύσματα των λ_i, δηλ. $f(v_i') = \lambda_i v_i'$. Τα v_i ορίζουν έναν πίνακα διαγωνοποίησης P, ενώ τα v_i' έναν πίνακα P'. Αν οι ιδιόχωροι είναι higher-dimensional, τότε πάλι θεωρώ μέσα στον ιδιόχωρο $V_{\lambda_i} = \langle v_{i,\alpha}, \alpha = 1, \dots, m \rangle$ τα $v_{i,\alpha}' = \sum_{\beta=1}^{m} \mu_{\alpha\beta} v_{i,\beta}$ Γρ. Ανεξ. και είναι βέβαια $V_{\lambda_i} = \langle v_{i,\alpha}', \alpha = 1, \dots, m \rangle$. Άρα, ενώ όλη η βάση $\{v_{i,\alpha}, i = 1, \dots, \nu, \alpha = 1, \dots, m\}$ ορίζει τον P, όλη η νέα βάση $\{v_{i,\alpha}', i = 1, \dots, \nu, \alpha = 1, \dots, m\}$ θα ορίζει έναν άλλο πίνακα P' που επίσης θα κάνει τη διαγωνοποίηση.

(2) Στην ειδικότερη περίπτωση διαγωνοποίησης (π.χ. συμμετρικού πίνακα) μέσω μετ/μού ορθογώνιας ομοιότητας, πάλι εν γένει υπάρχουν πολλοί πίνακες διαγωνοποίησης P. Πιο συγκεκριμένα, αν υπάρχει ιδιόχωρος με $m > 1$, τότε μέσα σ' αυτόν μπορεί κανείς να επιλέξει άπειρες ορθοκανονικές βάσεις που πράγματι οδηγούν σε άπειρους ορθογώνιους πίνακες διαγωνοποίησης P. Ειδικά αν όλες οι N ιδιοτιμές είναι διακριτές, τότε όλοι οι ιδιόχωροι είναι μονοδιάστατοι και δεν υπάρχει freedom (το πολύ επί 2 το ανακλώμενο), άρα ο πίνακας P είναι (πρακτικά) μοναδικός.

(3) Υπάρχει ένα κριτήριο διαγωνοποίησης πίνακα που αναφέρεται στο ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα (διαγωνοποίηση ανν το ελάχιστο πολυώνυμο αναλύεται σε απλούς γραμμικούς διακριτούς factors). Αν το κριτήριο ικανοποιηθεί, τότε προχωράμε στη διαγωνοποίηση μέσω εύρεσης βάσης ιδιοανυσμάτων. Δεν θ' αναφερθούμε σ' αυτό.

(4) Ουσιαστικά, το θεώρημα διαγωνοποίησης που έχουμε αποδείξει εκφράζεται με γεωμετρικούς όρους ως εξής

$f: V \to V$ διαγωνοποιήσιμη $\Leftrightarrow V = V_1 \oplus \dots \oplus V_\nu$ (όπου $\lambda_1, \dots, \lambda_\nu$ διακριτές) ή ακόμη

A διαγωνοποιήσιμος $\Leftrightarrow$ $m_1 + \cdots + m_\nu = N$ (όπου $\lambda_1, \ldots, \lambda_\nu$ διακριτές)

αφού η ύπαρξη βάσης $\{ X_{i,\alpha},\ i = 1, \ldots, \nu,\ \alpha = 1, \ldots, m_i \}$ ιδιοανυσμάτων $A X_{i,\alpha} = \lambda_i X_{i,\alpha}$ ισοδυναμεί με διαγωνοποίηση του A.

$$A \text{ διαγωνοποιήσιμος } \underset{i=1,\dots,\nu}{\overset{\lambda_i \text{ διακριτές}}{\Longleftrightarrow}} \quad \rho_1 + \dots + \rho_\nu = N, \; m_i = \rho_i$$

Πράγματι, έστω A διαγωνοποιήσιμος. Αν υποθέσουμε ότι $\rho_1 + \dots + \rho_\nu < N$, τότε $m_1 + \dots + m_\nu \leq \rho_1 + \dots + \rho_\nu < N \Rightarrow m_1 + \dots + m_\nu < N$ άτοπο, αφού $m_1 + \dots + m_\nu = N$.
Άρα $\rho_1 + \dots + \rho_\nu = N$. Επειδή $m_1 + \dots + m_\nu = \rho_1 + \dots + \rho_\nu$ με $m_i \leq \rho_i$, άρα $m_i = \rho_i$.
Αντίστροφα, αν $\rho_1 + \dots + \rho_\nu = N$, $m_i = \rho_i$, τότε $m_1 + \dots + m_\nu = \rho_1 + \dots + \rho_\nu = N \Rightarrow$ $m_1 + \dots + m_\nu = N \Rightarrow A$ διαγωνοποιήσιμος.
(Προφανώς, για $F = \mathbb{C}$: A διαγωνοποιήσιμος $\Leftrightarrow m_i = \rho_i$, $i = 1, \dots, \nu$, αφού $\rho_1 + \dots + \rho_\nu = N$ ισχύει πάντα)

A έχει N διακριτές ιδιοτιμές $\Rightarrow A$ διαγωνοποιήσιμος

Πράγματι, αν ο A έχει N διακριτές ιδιοτιμές $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ τότε υπάρχουν τα ιδιοανύσματα $X_1, \dots, X_N$ των ιδιοτιμών αυτών. Ως γνωστόν, τα $X_1, \dots, X_N$ είναι Γρ. Ανεξ., άρα αποτελούν βάση ιδιοανυσμάτων τού A, άρα ο A διαγωνοποιείται. (Ή ακόμα με βάση το προηγούμενο, αφού $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ διακριτές, άρα $\rho_1 = \dots = \rho_N = 1$. Είναι $m_i \leq \rho_i \Rightarrow m_i = 1$. Τελικά $\rho_1 + \dots + \rho_N = N$, $m_i = \rho_i$, άρα A διαγωνοποιήσιμος).

$$A \text{ διαγωνοποιήσιμος} \Rightarrow \varphi_A(x) = (-1)^N \underbrace{(x-\lambda_1)^{\rho_1} \dots (x-\lambda_\nu)^{\rho_\nu}}_{\text{διακριτές}}, \; \rho_1 + \dots + \rho_\nu = N$$

$$= (-1)^N \underbrace{(x-\lambda_1) \dots (x-\lambda_N)}_{\text{όχι διακριτές}}$$

Πράγματι, έστω $\lambda_1, \dots, \lambda_\nu$ οι διακριτές ιδιοτιμές τού A, με αλγεβρικές πολλαπλότητες $\rho_1 + \dots + \rho_\nu = N$. Τότε το $\varphi_A(x)$ περιέχει factors $(x-\lambda_1)^{\rho_1}, \dots, (x-\lambda_\nu)^{\rho_\nu}$. Αν υποθέσω ότι $\varphi_A(x) = (-1)^N (x-\lambda_1)^{\rho_1} \dots (x-\lambda_\nu)^{\rho_\nu} f(x)$, όπου $f(x)$ ένα non-trivial πολυώνυμο, τότε αυτό είναι άτοπο λόγω διαφοράς βαθμού στα δύο μέλη. Άρα $\varphi_A(x) = (-1)^N (x-\lambda_1)^{\rho_1} \dots (x-\lambda_\nu)^{\rho_\nu}$.

Παρατήρηση. Είναι φανερό ότι το αντίστροφο της παραπάνω πρότασης δεν ισχύει, δηλαδή μπορεί το $\varphi_A(x)$ να αναλύεται πλήρως σε γινόμενο πρωτοβαθμίων παραγόντων, δηλ. $\varphi_A(x) = (-1)^N (x-\lambda_1)^{\rho_1} \dots (x-\lambda_\nu)^{\rho_\nu}$, $\rho_1 + \dots + \rho_\nu = N$ (όπως συμβαίνει πάντα για $F = \mathbb{C}$), ωστόσο ο A να μην διαγωνοποιείται (γιατί απλά οι γεωμετρικές πολλαπλότητες δεν είναι αρκετές).
π.χ. ο $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\alpha \neq 0$ έχει $\varphi_A(x) = (x-1)^2$, με $\lambda = 1$ ($\rho = 2$), ωστόσο $V_1 = \langle (1,0) \rangle$ $m = 1$, άρα ο A δεν διαγωνοποιείται.

Παράδειγμα.

Ο πίνακας $A=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$, $\beta \neq 0$ δεν είναι διαγωνοποιήσιμος

[π.χ. οι $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ δεν είναι διαγωνοποιήσιμοι].

Πράγματι, αφού ο A είναι τριγωνικός, άρα οι ιδιοτιμές του είναι τα διαγώνια στοιχεία του, δηλαδή υπάρχει μία διπλή ιδιοτιμή $\lambda=\alpha$ $(\rho=2)$.

Είναι $AX=\lambda X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} \alpha x_1+\beta x_2 = \alpha x_1 \\ \alpha x_2 = \alpha x_2 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \beta x_2 = 0$

$\Leftrightarrow x_2 = 0 \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Άρα $V = \langle (1,0) \rangle$ $(m=1)$

Επομένως, αφού υπάρχει ένα μόνο ιδιοάνυσμα, ο A δεν διαγωνοποιείται.

Είναι φανερό ότι αν ήταν $\beta=0$, τότε οι πίνακες $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ διαγωνοποιούνται, αφού είναι ήδη διαγώνιοι. Στην περίπτωση αυτή το σύστημα $AX=\lambda X \Leftrightarrow \beta x_2 = 0 \Leftrightarrow 0=0$, άρα $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, άρα $V=\langle (1,0), (0,1) \rangle$, δηλ. εδώ υπάρχουν πράγματι δύο ιδιοανύσματα για να κάνουν τη διαγωνοποίηση. Προφανώς, ο πίνακας P της διαγωνοποίησης, που είναι ο πίνακας αλλαγής βάσης από την κανονική βάση στη βάση των ιδιοανυσμάτων, είναι ο πίνακας με στήλες τα ιδιοανύσματα, δηλαδή $P=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$, άρα

$P^{-1}AP = I_2^{-1} A I_2 = A$.

Παράδειγμα

Ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ είναι διαγωνοποιήσιμος ή όχι?

Βρίσκουμε τις ιδιοτιμές.

$$\varphi_A(x) = |A - xI| = \begin{vmatrix} 1-x & 2 \\ 3 & 2-x \end{vmatrix} = (1-x)(2-x) - 6 = x^2 - 3x - 4$$

Άρα $\varphi_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 4$ (απλή), $\lambda_2 = -1$ (απλή).

Αφού υπάρχουν 2 διακριτές ιδιοτιμές, άρα ο A διαγωνοποιείται.

Οι ιδιοτιμές μπορούν να βρεθούν και ως εξής:

$\lambda_1 \lambda_2 = |A| = -4$, $\lambda_1 + \lambda_2 = tr(A) = 3 \Rightarrow \lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -1$.

Είναι $AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 = \lambda x_1 \\ 3x_1 + 2x_2 = \lambda x_2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} (1-\lambda)x_1 + 2x_2 = 0 \\ 3x_1 + (2-\lambda)x_2 = 0 \end{array}\right\}$$

- Για $\lambda_1 = 4$, είναι $\left.\begin{array}{l} -3x_1 + 2x_2 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x_2 = \frac{3}{2}x_1 \Leftrightarrow X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \frac{3}{2}x_1 \end{pmatrix}$

  $= \frac{1}{2}x\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, άρα $V_1 = \langle (2,3) \rangle$

- Για $\lambda_2 = -1$, είναι $\left.\begin{array}{l} 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x_2 = -x_1 \Leftrightarrow X_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

  άρα $V_2 = \langle (1,-1) \rangle$.

Ο πίνακας διαγωνοποίησης, δηλαδή ο πίνακας αλλαγής βάσης από την κανονική στη βάση των ιδιοανυσμάτων, είναι ο

$$P = (X_1 \ X_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

και οφείλει να διαγωνοποιεί τον A, δηλαδή οφείλει

$$P^{-1}AP = diag(\lambda_1, \lambda_2) \Leftrightarrow P^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}P = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Πράγματι (χωρίς να χρειάζεται να το κάνουμε αυτό, μόνο για δική μας επαλήθευση), είναι

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-5}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 12 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα.

Ο πίνακας $A=\begin{pmatrix}2&1\\-1&0\end{pmatrix}$ διαγωνοποιείται ή όχι?

Είναι $\varphi_A(x)=|A-xI|=\begin{vmatrix}2-x&1\\-1&-x\end{vmatrix}=-x(2-x)+1=x^2-2x+1=$

$=(x-1)^2$

Άρα $\varphi_A(\lambda)=0 \Leftrightarrow \lambda=1$ (διπλή $p=2$)

$$AX=\lambda X \Leftrightarrow \begin{pmatrix}2&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix}2x_1+x_2=x_1\\-x_1=x_2\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow x_2=-x_1 \Leftrightarrow$$

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\-x_1\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

Άρα $V=\langle(1,-1)\rangle$, άρα υπάρχει ένα μόνο ιδιοάνυσμα και ο A δεν διαγωνοποιείται.

Παράδειγμα.

Ο πίνακας $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ διαγωνοποιείται ή όχι ?

Είναι $|A-\lambda I|=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}3-\lambda & 2\\ -1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow (3-\lambda)(1-\lambda)+2=0 \Leftrightarrow \lambda^2-4\lambda+5=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda=\frac{4\pm\sqrt{16-20}}{2}=\frac{4\pm 2i}{2}=2\pm i$, άρα $\lambda_1=2+i$ (απλή), $\lambda_2=2-i$ (απλή)

Αφού υπάρχουν 2 ιδιοτιμές διαφορετικές, ο A διαγωνοποιείται.

Είναι $AX=\lambda X \Leftrightarrow \begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}3x_1+2x_2=\lambda x_1\\ -x_1+x_2=\lambda x_2\end{array}\right\} \Leftrightarrow$

$$\left.\begin{array}{l}(3-\lambda)x_1+2x_2=0\\ -x_1+(1-\lambda)x_2=0\end{array}\right\}$$

- Για $\lambda_1=2+i$ είναι $\left.\begin{array}{l}(1-i)x_1+2x_2=0\\ -x_1-(1+i)x_2=0\end{array}\right\} \Leftrightarrow x_1=-(1+i)x_2 \Leftrightarrow$

$$X_1=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-(1+i)x_2\\ x_2\end{pmatrix}=-x_2\begin{pmatrix}1+i\\ -1\end{pmatrix}$$

Άρα $V_1=\langle X_1\rangle=\langle(1+i,-1)\rangle$

[Σημείωση: Επειδή $-(1-i)\begin{pmatrix}1+i\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\ 1-i\end{pmatrix}$, άρα επίσης $V_1=\langle(-2,1-i)\rangle$]

- Για $\lambda_2=2-i$ είναι $\left.\begin{array}{l}(1+i)x_1+2x_2=0\\ -x_1-(1-i)x_2=0\end{array}\right\} \Leftrightarrow x_1=-(1-i)x_2 \Leftrightarrow$

$$X_2=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-(1-i)x_2\\ x_2\end{pmatrix}=-x_2\begin{pmatrix}1-i\\ -1\end{pmatrix}$$

Άρα $V_2=\langle X_2\rangle=\langle(1-i,-1)\rangle$

[Σημείωση: Επειδή $-(1+i)\begin{pmatrix}1-i\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\ 1+i\end{pmatrix}$, άρα επίσης $V_2=\langle(-2,1+i)\rangle$]

Ο πίνακας διαγωνοποίησης P είναι ο πίνακας αλλαγής βάσης από την κανονική στη βάση $\{X_1,X_2\}$ των ιδιοανυσμάτων, δηλαδή

$$P=(X_1\ X_2)=\begin{pmatrix}1+i & 1-i\\ -1 & -1\end{pmatrix}$$

και ισχύει

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2+i & 0\\ 0 & 2-i\end{pmatrix}.$$

Πράγματι,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{-2i} \begin{pmatrix} -1 & -(1-i) \\ 1 & 1+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+3i & 1-3i \\ -2-i & -2+i \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{-2i} \begin{pmatrix} 2-4i & 0 \\ 0 & -2-4i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+i & 0 \\ 0 & 2-i \end{pmatrix}$$

[Σημείωση: Είναι φανερό ότι αν είχαμε πάρει ως ιδιοανύσματα τα $\tilde{X}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1-i \end{pmatrix}$, $\tilde{X}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1+i \end{pmatrix}$, τότε ο πίνακας διαγωνοποίησης

$$\tilde{P} = (\tilde{X}_1 \ \tilde{X}_2) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1-i & 1+i \end{pmatrix}$$

$$= [-(1-i)] \begin{pmatrix} 1+i & -2 \\ -1 & 1+i \end{pmatrix}$$

$$= [-(1-i)]\,[-(1+i)] \begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= [-(1-i)]\,[-(1+i)]\, P \quad , \text{ άρα}$$

$$\tilde{P}^{-1} A \tilde{P} = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2+i & 0 \\ 0 & 2-i \end{pmatrix} \quad]$$

Παράδειγμα

Ο $A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$ διαγωνοποιείται ή όχι ?

Είναι $|A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \alpha-\lambda & -\beta \\ \beta & \alpha-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\alpha-\lambda)^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha - \lambda = \pm i\beta$

$\Leftrightarrow \lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, άρα διαγωνοποιείται

(π.χ. οι $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ διαγωνοποιούνται)

Είναι $AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} \alpha x_1 - \beta x_2 = \lambda x_1 \\ \beta x_1 + \alpha x_2 = \lambda x_2 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$

$$\left.\begin{matrix} (\alpha-\lambda)x_1 - \beta x_2 = 0 \\ \beta x_1 + (\alpha-\lambda)x_2 = 0 \end{matrix}\right\}$$

- Για $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\left.\begin{matrix} -i\beta x_1 - \beta x_2 = 0 \\ \beta x_1 - i\beta x_2 = 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow x_1 = i x_2 \Leftrightarrow X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} =$

$= x_2 \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$, άρα $V_1 = \langle X_1 \rangle = \langle (i, 1) \rangle$

- Για $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, $\left.\begin{matrix} i\beta x_1 - \beta x_2 = 0 \\ \beta x_1 + i\beta x_2 = 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow x_1 = -i x_2 \Leftrightarrow X_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} =$

$= x_2 \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$, άρα $V_2 = \langle X_2 \rangle = \langle (-i, 1) \rangle$.

Ο πίνακας διαγωνοποίησης $P = (X_1 \ X_2) = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ και είναι

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha+i\beta & 0 \\ 0 & \alpha-i\beta \end{pmatrix}.$$

Πράγματι $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -1 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\beta+i\alpha & -\beta-i\alpha \\ \alpha+i\beta & \alpha-i\beta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha+i\beta & 0 \\ 0 & \alpha-i\beta \end{pmatrix}$$

Παρατήρηση Ο πίνακας στροφής $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ εμπίπτει σ' αυτό το παράδειγμα. Άρα, οι ιδιοτιμές του πίνακα στροφής είναι $\lambda = \cos\theta \pm i\sin\theta = e^{\pm i\theta}$ (και έχουν πράγματι μέτρο 1 αφού ο πίνακας στροφής είναι ορθογώνιος πίνακας)

Παράδειγμα

Ο $A=\begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{pmatrix}$ διαγωνοποιείται ή όχι?. (ερμιτιανό)

Είναι $|A-\lambda I|=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1+i \\ 1-i & 1-\lambda \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda-3)=0 \Leftrightarrow \lambda_1=0,\ \lambda_2=3$ ΝΑΙ ΔΙΑΓΩΝ.

$AX=\lambda X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} 2x_1+(1+i)x_2 &= \lambda x_1 \\ (1-i)x_1+x_2 &= \lambda x_2 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$

$\left.\begin{aligned} (2-\lambda)x_1+(1+i)x_2 &= 0 \\ (1-i)x_1+(1-\lambda)x_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$

. Για $\lambda_1=0$, $\left.\begin{aligned} 2x_1+(1+i)x_2 &= 0 \\ (1-i)x_1+x_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow x_2=-(1-i)x_1 \Rightarrow X_1=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} x_1 \\ -(1-i)x_1 \end{pmatrix}=-x_1\begin{pmatrix} -1 \\ 1-i \end{pmatrix}$

Άρα $V_1=\langle X_1\rangle=\langle(-1,\ 1-i)\rangle$

. Για $\lambda_2=3$, $\left.\begin{aligned} -x_1+(1+i)x_2 &= 0 \\ (1-i)x_1-2x_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow x_1=(1+i)x_2 \Leftrightarrow X_2=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} (1+i)x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}=x_2\begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix}$

Άρα $V_2=\langle X_2\rangle=\langle(1+i,\ 1)\rangle$

Άρα $P=(X_1\ X_2)=\begin{pmatrix} -1 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{pmatrix}$ με $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Πράγματι, $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} -1 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{pmatrix}$

$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3(1+i) \\ 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$

Παράδειγμα

Ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ διαγωνοποιείται ή όχι ? (Είναι συμμετρικός)

Είναι $\varphi_A(x) = |A - xI| = \begin{vmatrix} 3-x & 2 & 4 \\ 2 & -x & 2 \\ 4 & 2 & 3-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-x & 2 & 4 \\ 2 & -x & 2 \\ 0 & 2(x+1) & -(x+1) \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} 3-x & 10 & 4 \\ 2 & 4-x & 2 \\ 0 & 0 & -(x+1) \end{vmatrix} = -(x+1) \begin{vmatrix} 3-x & 10 \\ 2 & 4-x \end{vmatrix} = -(x+1)(x^2 - 7x - 8) =$

$= -(x+1)^2 (x-8)$

Άρα $\varphi_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = -1$ (διπλή $\rho_1 = 2$), $\lambda_2 = 8$ (απλή $\rho_2 = 1$)

$AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = \lambda x_1 \\ 2x_1 + 2x_3 = \lambda x_2 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = \lambda x_3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} (3-\lambda)x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 - \lambda x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + (3-\lambda)x_3 = 0 \end{array}\right\}$

Για $\lambda_1 = -1$ είναι $\left.\begin{array}{l} 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_2 = -2x_1 - 2x_3 \Leftrightarrow X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -2x_1 - 2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{X_{1,1}} + x_3 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{X_{1,2}}$

Άρα $V_1 = \langle X_{1,1}, X_{1,2} \rangle = \langle (1,-2,0), (0,-2,1) \rangle$ $(m_1 = 2)$

- Για $\lambda_2 = 8$ είναι $\left.\begin{array}{l} -5x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 - 8x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} -5x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \end{array}\right\}$

Είναι $\begin{vmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 1 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 18 & -9 \end{vmatrix} = 9 \begin{vmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 9 \begin{vmatrix} 0 & -18 & 9 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} =$

$= 9 \cdot 9 \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 9 \cdot 9 \cdot (-1) \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$

και $\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 18 \neq 0$.

Άρα το ομογενές σύστημα έχει τάξη 2 και ισοδυναμεί με το

$\left.\begin{array}{l} -5x_1 + 2x_2 = -4x_3 \\ x_1 - 4x_2 = -x_3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{18} \begin{vmatrix} -4x_3 & 2 \\ -x_3 & -4 \end{vmatrix} = x_3 \\ x_2 = \frac{1}{18} \begin{vmatrix} -5 & -4x_3 \\ 1 & -x_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} x_3 \end{array} \Leftrightarrow X_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ \frac{1}{2} x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} =$

$$= \frac{1}{2}x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \text{ άρα } \quad V_2 = \langle X_2 \rangle = \langle (2,1,2) \rangle \qquad (m_2 = 1)$$

Επομένως, αφού υπάρχει βάση $\{X_{1,1}, X_{1,2}, X_2\}$ από ιδιοανύσματα, άρα ο A διαγωνοποιείται. Μάλιστα, ο πίνακας P της διαγωνοποίησης είναι ο πίνακας αλλαγής βάσης από την κανονική στη βάση των ιδιοανυσμάτων, δηλαδή

$$P = (X_{1,1} \;\; X_{1,2} \;\; X_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Οφείλει $\quad P^{-1}AP = diag(-1, -1, 8)$.

Πράγματι, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$

$$= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -4 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 16 \\ 2 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα

Ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$ διαγωνοποιείται ή όχι ?

Είναι $\varphi_A(x) = |A - xI| = \begin{vmatrix} 1-x & -3 & 3 \\ 3 & -5-x & 3 \\ 6 & -6 & 4-x \end{vmatrix} = -x^3 + 12x + 16 =$

$$= -(x-4)(x+2)^2$$

Άρα $\varphi_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 4$ (απλή $\rho_1 = 1$) , $\lambda_2 = -2$ (διπλή $\rho_2 = 2$)

Είναι $AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x_1 - 3x_2 + 3x_3 = \lambda x_1 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = \lambda x_2 \\ 6x_1 - 6x_2 + 4x_3 = \lambda x_3 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{matrix} (1-\lambda)x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - (5+\lambda)x_2 + 3x_3 = 0 \\ 6x_1 - 6x_2 + (4-\lambda)x_3 = 0 \end{matrix}\right\}$$

- Για $\lambda_1 = 4$ είναι $\left.\begin{matrix} -3x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - 9x_2 + 3x_3 = 0 \\ 6x_1 - 6x_2 \quad\quad = 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x_3 = x_1 + x_2 \\ x_2 = x_1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x_3 = 2x_1 \\ x_2 = x_1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ 2x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ άρα } V_1 = \langle X_1 \rangle = \langle (1,1,2) \rangle \quad (m_1 = 1)$$

- Για $\lambda_2 = -2$ είναι $\left.\begin{matrix} 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ 6x_1 - 6x_2 + 6x_3 = 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow x_1 - x_2 + x_3 = 0 \Leftrightarrow x_3 = x_2 - x_1 \Leftrightarrow$

$$X_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 - x_1 \end{pmatrix} = x_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{X_{2,1}} + x_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{X_{2,2}}, \text{ άρα}$$

$$V_2 = \langle X_{2,1}, X_{2,2} \rangle = \langle (1,0,-1), (0,1,1) \rangle . \quad (m_2 = 2)$$

Επειδή υπάρχει βάση ιδιοανυσμάτων $\{X_1, X_{2,1}, X_{2,2}\}$, ο A διαγωνοποιείται. Ο πίνακας P της διαγωνοποίησης είναι ο πίνακας αλλαγής βάσης από την κανονική βάση στη βάση των ιδιοανυσμάτων, δηλαδή $P = (X_1, X_{2,1}, X_{2,2}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ και ισχύει

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Πράγματι,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \\ 8 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα.

Ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ διαγωνοποιείται ή όχι ?

Είναι $|A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow (1-\lambda)\left[-(1-\lambda^2)+2\right] = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(\lambda^2+1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda_1 = 1$ (απλή) , $\lambda_2 = i$ (απλή), $\lambda_3 = -i$ (απλή)

Αφού υπάρχουν 3 ιδιοτιμές, ο A διαγωνοποιείται

Είναι $AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} -x_1 - 2x_2 = \lambda x_1 \\ x_1 + x_2 = \lambda x_2 \\ -x_1 + x_3 = \lambda x_3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} -(1+\lambda)x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_1 + (1-\lambda)x_2 = 0 \\ -x_1 + (1-\lambda)x_3 = 0 \end{array}\right\}$

- Για $\lambda_1 = 1$, είναι $\left.\begin{array}{l} -2x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \\ -x_1 = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x_1 = x_2 = 0 \Leftrightarrow X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} =$

$= x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, άρα $V_1 = \langle X_1 \rangle = \langle (0,0,1) \rangle$ $(m_1 = 1)$

- Για $\lambda_2 = i$, είναι $\left.\begin{array}{l} -(1+i)x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_1 + (1-i)x_2 = 0 \\ -x_1 + (1-i)x_3 = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x_2 = -x_3 \\ x_1 = (1-i)x_3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$

$X_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-i)x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1-i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, άρα $V_2 = \langle (1-i, -1, 1) \rangle$ $(m_2 = 1)$

- Για $\lambda_3 = -i$, είναι $\left.\begin{array}{l} -(1-i)x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_1 + (1+i)x_2 = 0 \\ -x_1 + (1+i)x_3 = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x_2 = -x_3 \\ x_1 = (1+i)x_3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$

$X_3 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+i)x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1+i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, άρα $V_3 = \langle (1+i, -1, 1) \rangle$ $(m_3 = 1)$

Ο πίνακας διαγωνοποίησης είναι

$P = (X_1 \ X_2 \ X_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1-i & 1+i \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ και ισχύει

$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$.

Πράγματι,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1-i & 1+i \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1-i & 1+i \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ i/2 & (i-1)/2 & 0 \\ -i/2 & -(i+1)/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1+i & 1-i \\ 0 & -i & i \\ 1 & i & -i \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

A διαγωνοποιήσιμος $\Rightarrow$ $A^{\kappa} = P \Lambda^{\kappa} P^{-1} = P \overbrace{(\lambda_i^{\kappa})}^{\to diag(\lambda_1, \dots, \lambda_N)} P^{-1}$, $\kappa \in \mathbb{Q}^*$, $A_{N\times N}$

$$\overbrace{f(A)}^{\to \text{αναλυτική}} = P f(\Lambda) P^{-1} = P\,(f(\lambda_i))\,P^{-1}$$

($|\lambda_i| < R$ = ακτίνα σύγκλισης δυναμοσειράς f)

Πράγματι, A διαγωνοποιήσιμος $\Rightarrow$ $\exists\, P$ αντιστρέψιμος: $P^{-1}AP = \Lambda = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$

$\Rightarrow A = P\Lambda P^{-1}$

Άρα, για $\kappa = n \in \mathbb{N}^*$, $A^{\kappa} = A^n = (P\Lambda P^{-1})^n = (P\Lambda P^{-1}) \dots (P\Lambda P^{-1}) =$

$$= P\Lambda \dots \Lambda P^{-1} = P\Lambda^n P^{-1} = P(\lambda_i^n)P^{-1}$$

Για $\kappa = -n$, $n \in \mathbb{N}^*$, $A^{\kappa} = A^{-n} = (A^{-1})^n = \left[(P\Lambda P^{-1})^{-1}\right]^n = (P\Lambda^{-1}P^{-1})^n$

$$= P(\Lambda^{-1})^n P^{-1} = P(\lambda_i^{-1})^n P^{-1} = P(\lambda_i^{-n})P^{-1}$$

$$= P(\lambda_i^{\kappa})P^{-1}$$

Για $\kappa = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, έστω ο πίνακας $L \equiv diag(\ell_1, \dots, \ell_N)$, $\ell_i \equiv \lambda_i^{\frac{1}{n}}$, $i = 1, \dots, N$.

Είναι $L^n = diag(\ell_1^n, \dots, \ell_N^n) = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = \Lambda \Rightarrow L = \Lambda^{\frac{1}{n}} = diag(\lambda_1^{1/n}, \dots, \lambda_N^{1/n})$.

Αν $B \equiv PLP^{-1} \Rightarrow B^n = (PLP^{-1})^n = PL^nP^{-1} = P\Lambda P^{-1} = A \Rightarrow B = A^{1/n} \Rightarrow$

$\Rightarrow A^{1/n} = P\Lambda^{1/n}P^{-1} = P(\lambda_i^{1/n})P^{-1} \Rightarrow A^{\kappa} = P\Lambda^{\kappa}P^{-1} = P(\lambda_i^{\kappa})P^{-1}$

Τέλος αν $\kappa \in \mathbb{Q}^*$, τότε $\kappa = \frac{m}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $m \in \mathbb{Z}^*$, άρα

$$A^{\kappa} = A^{\frac{m}{n}} = (A^{\frac{1}{n}})^m = (P\Lambda^{\frac{1}{n}}P^{-1})^m = P(\Lambda^{\frac{1}{n}})^m P^{-1} = P(\lambda_i^{1/n})^m P^{-1} =$$

$$= P(\lambda_i^{\frac{m}{n}})P^{-1} = P(\lambda_i^{\kappa})P^{-1} = P\Lambda^{\kappa}P^{-1}$$

Αν τώρα $f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n A^n$ είναι μια αναλυτική συνάρτηση, τότε

$$f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (P\Lambda P^{-1})^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P\Lambda^n P^{-1} = P\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n \Lambda^n\right)P^{-1}$$

$$= P\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n (\lambda_i^n)\right]P^{-1} = P\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda_i^n\right)P^{-1} = P(f(\lambda_i))P^{-1} = Pf(\Lambda)P^{-1}$$

Παράδειγμα

Αν $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ να βρεθούν οι δυνάμεις A^{κ}, $\kappa \in Q^{*}$, π.χ. A^{13}, A^{-1}, A^{-3}, $A^{1/2}$ και το $f(A)$, π.χ. το e^{A}

Έχουμε βρεί ότι οι ιδιοτιμές τού A είναι $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -1$, με αντίστοιχα ιδιοανύσματα $(2,3)$, $(1,-1)$. Άρα ο A διαγωνοποιείται με πίνακα διαγωνοποίησης $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, δηλαδή

$$P^{-1}AP = \Lambda = \mathrm{diag}(4,-1) \Rightarrow A = P\Lambda P^{-1}.$$

Άρα $$A^{\kappa} = P\Lambda^{\kappa}P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4^{\kappa} & 0 \\ 0 & (-1)^{\kappa} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4^{\kappa} & 0 \\ 0 & (-1)^{\kappa} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4^{\kappa} & 4^{\kappa} \\ 3(-1)^{\kappa} & -2(-1)^{\kappa} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}[2^{2\kappa+1}+3(-1)^{\kappa}] & \frac{2}{5}[2^{2\kappa}-(-1)^{\kappa}] \\ \frac{3}{5}[2^{2\kappa}-(-1)^{\kappa}] & \frac{2}{5}[3\cdot 2^{2\kappa-1}+(-1)^{\kappa}] \end{pmatrix}$$

π.χ. για $\kappa = 13$, $A^{13} = \begin{pmatrix} \frac{2^{27}-3}{5} & \frac{2(2^{26}+1)}{5} \\ \frac{3(2^{26}+1)}{5} & \frac{2(3\cdot 2^{25}-1)}{5} \end{pmatrix}$ που πράγματι μπορεί να ελεγχεί και ανεξάρτητα με τη mathematica.

π.χ. για $\kappa = -1$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 3/4 & -1/4 \end{pmatrix}$, οπότε η μέθοδος αυτή υπολογίζει ως ειδική περίπτωση και τον αντίστροφο πίνακα. Πράγματι είναι

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 3/4 & -1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

π.χ. για $\kappa = -3$, $A^{-3} = \begin{pmatrix} -19/32 & 13/32 \\ 39/64 & -25/64 \end{pmatrix}$ πού πράγματι ελέγχεται ότι ισούται με $(A^{-1})^3 = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 3/4 & -1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 3/4 & -1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 3/4 & -1/4 \end{pmatrix}$

π.χ. για $\kappa = \frac{1}{2}$, προκύπτουν δύο τετραγωνικές ρίζες τού A, αφού το $(-1)^{1/2}$ μπορώ να το διαλέξω i ή $-i$, οι εξής

$$A^{1/2} = \begin{pmatrix} \frac{4+3i}{5} & \frac{2(2-i)}{5} \\ \frac{3(2-i)}{5} & \frac{2(3+i)}{5} \end{pmatrix} \quad \text{ή} \quad A^{1/2} = \begin{pmatrix} \frac{4-3i}{5} & \frac{2(2+i)}{5} \\ \frac{3(2+i)}{5} & \frac{2(3-i)}{5} \end{pmatrix}.$$

Πράγματι επαληθεύω ότι $(A^{\frac{1}{2}})^2 = \dots = A$.

Επίσης, $f(A) = P\,f(\Lambda)\,P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(4) & 0 \\ 0 & f(-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}^{-1} =$

$$= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(4) & 0 \\ 0 & f(-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(4) & f(4) \\ 3f(-1) & -2f(-1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2f(4)+3f(-1)}{5} & \frac{2f(4)-2f(-1)}{5} \\ \frac{3f(4)-3f(-1)}{5} & \frac{3f(4)+2f(-1)}{5} \end{pmatrix}$$

π.χ. για $f(A) = e^A$ είναι $e^A = \begin{pmatrix} \frac{2e^4+3e^{-1}}{5} & \frac{2e^4-2e^{-1}}{5} \\ \frac{3e^4-3e^{-1}}{5} & \frac{3e^4+2e^{-1}}{5} \end{pmatrix}$

Παρατήρηση Είναι φανερό ότι η μέθοδος αυτή εύρεσης τού $f(A)$ μέσω διαγωνοποίησης είναι γενικότερη της αντίστοιχης μέσω Cayley-Hamilton, διότι εκεί έπρεπε να υπάρχουν N διακριτές ιδιοτιμές, ενώ εδώ αρκεί ο A να διαγωνοποιείται (π.χ. μπορεί να υπάρχουν λιγότερες από N διακριτές ιδιοτιμές). Περαιτέρω, η παρούσα μέθοδος είναι και υπολογιστικά ευκολότερη.

Παράδειγμα

Αν $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, να βρεθεί το A^κ, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^\kappa$, $e^{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}$

Έχουμε δει ότι ο A έχει ιδιοτιμές $\lambda_1 = e^{i\theta}$, $\lambda_2 = e^{-i\theta}$ με αντίστοιχα ιδιοανύσματα $(i, 1)$, $(-i, 1)$. Άρα ο A διαγωνοποιείται με $P = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, δηλαδή $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \Rightarrow A = P\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}P^{-1}$, όπως μπορεί να επαληθευτεί και άμεσα.

Είναι $f(A) = P\begin{pmatrix} f(\lambda_1) & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) \end{pmatrix}P^{-1} = \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f(\lambda_1) & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -1 & i \end{pmatrix} =$

$$= \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f(\lambda_1) & if(\lambda_1) \\ -f(\lambda_2) & if(\lambda_2) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{f(\lambda_1)+f(\lambda_2)}{2} & \frac{f(\lambda_2)-f(\lambda_1)}{2i} \\ \frac{f(\lambda_1)-f(\lambda_2)}{2i} & \frac{f(\lambda_1)+f(\lambda_2)}{2} \end{pmatrix}$$

π.χ. για $f(A) = A^\kappa$, $\kappa \in \mathbb{Z}^*$, είναι

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^\kappa = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1^\kappa + \lambda_2^\kappa}{2} & \frac{\lambda_2^\kappa - \lambda_1^\kappa}{2i} \\ \frac{\lambda_1^\kappa - \lambda_2^\kappa}{2i} & \frac{\lambda_1^\kappa + \lambda_2^\kappa}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e^{i\kappa\theta}+e^{-i\kappa\theta}}{2} & \frac{e^{-i\kappa\theta}-e^{i\kappa\theta}}{2i} \\ \frac{e^{i\kappa\theta}-e^{-i\kappa\theta}}{2i} & \frac{e^{i\kappa\theta}+e^{-i\kappa\theta}}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\kappa\theta) & -\sin(\kappa\theta) \\ \sin(\kappa\theta) & \cos(\kappa\theta) \end{pmatrix}$$

Περαιτέρω, π.χ. για $\theta = -\frac{\pi}{2}$ είναι

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^\kappa = \begin{pmatrix} \cos\frac{\kappa\pi}{2} & \sin\frac{\kappa\pi}{2} \\ -\sin\frac{\kappa\pi}{2} & \cos\frac{\kappa\pi}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{cases} \kappa = 2m, & \begin{pmatrix} \cos m\pi & \sin m\pi \\ -\sin m\pi & \cos m\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^m & 0 \\ 0 & (-1)^m \end{pmatrix} \\ \kappa = 2m+1, & \begin{pmatrix} \cos(m\pi+\frac{\pi}{2}) & \sin(m\pi+\frac{\pi}{2}) \\ -\sin(m\pi+\frac{\pi}{2}) & \cos(m\pi+\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin m\pi & \cos m\pi \\ -\cos m\pi & -\sin m\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^m \\ -(-1)^m & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Δηλαδή, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{2m} = \begin{pmatrix} (-1)^m & 0 \\ 0 & (-1)^m \end{pmatrix}$, $m \in \mathbb{Z}^*$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{2m+1} = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^m \\ -(-1)^m & 0 \end{pmatrix}$, $m \in \mathbb{Z}^*$ [το οποίο βρίσκεται και από το προηγούμενο αφού $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{2m+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{2m} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^m & 0 \\ 0 & (-1)^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^{m} \\ -(-1)^m & 0 \end{pmatrix}$]

π.χ. για $\vartheta = -\frac{\pi}{2}$ είναι $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ και θα βρούμε το $f(A) = e^A$.

Είναι $\lambda_1 = e^{i\vartheta} = e^{-i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2} = -i$

$\lambda_2 = e^{-i\vartheta} = e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$

$f(\lambda_1) = e^{\lambda_1} = e^{-i} = e^{i(-1)} = \cos(-1) + i\sin(-1) = \cos 1 - i\sin 1$

$f(\lambda_2) = e^{\lambda_2} = e^{i} = \cos 1 + i\sin 1$

$f(\lambda_1) + f(\lambda_2) = 2\cos 1$

$f(\lambda_2) - f(\lambda_1) = 2i\sin 1$

Άρα $e^A = e^{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \frac{2\cos 1}{2} & \frac{2i\sin 1}{2i} \\ -\frac{2i\sin 1}{2i} & \frac{2\cos 1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 1 & \sin 1 \\ -\sin 1 & \cos 1 \end{pmatrix}$,

σε συμφωνία με το αποτέλεσμα που είχαμε πάρει μέσω C-H.

Θεώρημα διαγωνοποίησης ερμιτιανού (άρα και πραγματικού συμμετρικού) πίνακα
"κάθε ερμιτιανός πίνακας διαγωνοποιείται και μάλιστα με unitary πίνακα (άρα και κάθε πραγματικός συμμετρικός διαγωνοποιείται και μάλιστα με ορθογώνιο πίνακα)"

$$A^+ = A \quad \Rightarrow \quad U^+AU = U^{-1}AU = \mathrm{diag}(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{όχι κατ'ανάγκη} \\ \text{διακριτές}}}{\lambda_1, \ldots, \lambda_N}) \;,\; U \equiv (X_1 \cdots X_N) \;,\; \underset{i=1,\ldots,N}{AX_i = \lambda_i X_i} \;,\; X_i^+ X_j = \delta_{ij}$$

Πράγματι, έστω $A^+ = A$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ κάποια ιδιοτιμή τού A (αλγεβρικής πολλαπλότητας p και γεωμετρικής m) με αντίστοιχα ιδιοανύσματα X_α, $\alpha = 1, \ldots, m$ ($AX_\alpha = \lambda X_\alpha$). Ενώ ξέρουμε ότι εν γένει ισχύει $m \le p$, θα δείξουμε ότι για τον ερμιτιανό A είναι $m = p$.

Μπορούμε να επιλέξουμε μέσα στον ιδιόχωρο V_λ τα ιδιοανύσματα $X_1, \ldots, X_m$ ορθοκανονικά, δηλαδή $X_\alpha^+ X_\beta = \delta_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = 1, \ldots, m$. Επιπλέον μπορούμε να συμπληρώσουμε τα $X_1, \ldots, X_m$ σε βάση $\{X_1, \ldots, X_m, Y_{m+1}, \ldots, Y_N\}$ τού $\mathbb{C}^N$ έτσι ώστε τα $Y_{m+1}, \ldots, Y_N$ να είναι ορθοκανονικά, δηλ. $Y_I^+ Y_J = \delta_{IJ}$, $I, J = m+1, \ldots, N$, και επιπλέον κάθετα στα X_α, δηλαδή $Y_I^+ X_\alpha = 0$ (Gramm-Schmidt ως προς το standard εσωτερικό γινόμενο τού $\mathbb{C}^N$).

Έστω $(U_1)_{N\times m} \equiv (X_1 \ldots X_m)$, $(U_2)_{N\times(N-m)} \equiv (Y_{m+1} \cdots Y_N)$

$U_{N\times N} \equiv (U_1 \;\; U_2) = (X_1 \ldots X_m \; Y_{m+1} \ldots Y_N)$ unitary ($U^+U = I$) αφού $\{X_\alpha, Y_I\}$ ορθοκανονικά.
Άρα, από την τυχούσα αρχική βάση, π.χ. $\{e_i\}$, όπου έχουμε τον πίνακα A, πηγαίνουμε στη βάση $\{X_\alpha, Y_I\}$ και ο πίνακας γίνεται A' με

$$A' = U^{-1}AU = U^+AU = (U_1 \; U_2)^+ A (U_1 \; U_2) = \begin{pmatrix} U_1^+ \\ U_2^+ \end{pmatrix} (AU_1 \;\; AU_2) = \begin{pmatrix} U_1^+AU_1 & U_1^+AU_2 \\ U_2^+AU_1 & U_2^+AU_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} U_1^+AU_1 & (U_2^+AU_1)^+ \\ U_2^+AU_1 & U_2^+AU_2 \end{pmatrix} \leftarrow A^+ = A$$

$$U_2^+AU_1 = \begin{pmatrix} Y_{m+1}^+ \\ \vdots \\ Y_N^+ \end{pmatrix} A (X_1 \cdots X_m) = \begin{pmatrix} Y_{m+1}^+ \\ \vdots \\ Y_N^+ \end{pmatrix} (AX_1 \cdots AX_m) = \begin{pmatrix} Y_{m+1}^+AX_1 & \cdots & Y_{m+1}^+AX_m \\ \vdots & & \vdots \\ Y_N^+AX_1 & \cdots & Y_N^+AX_m \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda^{N-m} \begin{pmatrix} Y_{m+1}^+X_1 & \cdots & Y_{m+1}^+X_m \\ \vdots & & \vdots \\ Y_N^+X_1 & \cdots & Y_N^+X_m \end{pmatrix} = \mathbb{O}$$

$$U_1^+AU_1 = \begin{pmatrix} X_1^+ \\ \vdots \\ X_m^+ \end{pmatrix} A (X_1 \cdots X_m) = \begin{pmatrix} X_1^+ \\ \vdots \\ X_m^+ \end{pmatrix} (AX_1 \cdots AX_m) = \begin{pmatrix} X_1^+AX_1 & \cdots & X_1^+AX_m \\ \vdots & & \vdots \\ X_m^+AX_1 & \cdots & X_m^+AX_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I_m$$

Άρα $$A' = \begin{pmatrix} \lambda I_m & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & U_2^+AU_2 \end{pmatrix} \overset{A^+ = A}{=} \begin{pmatrix} \lambda I_m & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & W \end{pmatrix} , \quad W \equiv U_2^+AU_2$$

Είναι βέβαια $\varphi_A(x) = \varphi_{A'}(x)$, όπου $\varphi_A(x) = (-1)^N (x-\lambda)^p f(x)$, $f(\lambda) \ne 0$ και

$$\varphi_{A'}(x) = \begin{vmatrix} (\lambda - x)I_m & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & W - xI_{N-m} \end{vmatrix} = |(\lambda - x)I_m| \cdot |W - xI_{N-m}| = (-1)^m (x-\lambda)^m \varphi_W(x)$$, άρα

$(-1)^N (x-\lambda)^p f(x) = (-1)^m (x-\lambda)^m \varphi_W(x)$.

Αν υποθέσουμε ότι $m < p$, τότε το πολυώνυμο $\varphi_W(x)$ περιέχει τον παράγοντα $x - \lambda$, άρα το λ είναι ιδιοτιμή τού W και επομένως υπάρχει $Z' \in \mathbb{C}^{N-m}$ με $WZ' = \lambda Z'$.
Το $X' \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ Z' \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^N$ καθώς είναι εκφρασμένο στη βάση $\{X_\alpha, Y_I\}$ είναι φανερά στον

υπόχωρο των Y_I. Επιπλέον $A'X' = \begin{pmatrix} \lambda I_m & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \breve{0} \\ Z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \breve{0} \\ WZ' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \breve{0} \\ \lambda Z' \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \breve{0} \\ Z' \end{pmatrix} = \lambda X'$, άρα το X' είναι γεωμετρικά στον υπόχωρο V_λ των X_α (αφού όλα τα ιδιοανύσματα τού A ιδιοτιμής λ συνιστούν τον V_λ). Τελικά $X'=0$, άτοπο.

(Ή ακόμα $A'X' = \lambda X' \Rightarrow U^{-1}AUX' = \lambda X' \Rightarrow A(UX') = \lambda(UX') \Rightarrow UX' \in \langle X_\alpha \rangle \Rightarrow$
$\Rightarrow UX' = 0 \Rightarrow X'=0$). Τελικά $m=\rho$.

Αφού $A^+=A$, ξέρουμε ότι υπάρχουν N (πραγματικές) ιδιοτιμές, όχι κατ' ανάγκη διακριτές, ή ισοδύναμα υπάρχουν οι διακριτές ιδιοτιμές $\lambda_1, \dots, \lambda_\nu$ με $\rho_1 + \dots + \rho_\nu = N$. Αφού για την καθεμία είναι $m_i = \rho_i$, $i=1, \dots, \nu$, άρα τελικά ο A διαγωνοποιείται.

Αφού ως γνωστόν για ερμιτιανό πίνακα οι ιδιόχωροι διαφορετικών ιδιοτιμών είναι κάθετοι μεταξύ τους (ως προς το standard εσωτερικό γινόμενο τού $\mathbb{C}^N$), μπορεί η βάση των ιδιοανυσμάτων να επιλεγεί ορθοκανονική, δηλαδή να έχει $X_i^+ X_j = \delta_{ij}$, $i,j = 1, \dots, N$ (εδώ η αρίθμηση γίνεται χωρίς τη διάκριση των διακριτών ιδιοτιμών).

Επομένως, ο πίνακας P της διαγωνοποίησης, ως πίνακας αλλαγής βάσης από την κανονική βάση τού $\mathbb{C}^N$ στην ορθοκανονική βάση των ιδιοανυσμάτων θα είναι unitary.

Άρα, μαθηματικώς το συμπέρασμα είναι ότι

$$P^{-1}AP = P^+AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N), \quad \text{όπου } P \equiv (X_1 \dots X_N),\ AX_i = \lambda_i X_i,\ X_i^+ X_j = \delta_{ij}$$

(το P το συμβολίζουμε U).

Σχόλιο Οι πίνακες A και U^+AU με U unitary λέγονται ορθογωνίως όμοιοι, άρα κάθε ερμιτιανός πίνακας είναι ορθογωνίως όμοιος προς διαγώνιο πίνακα. Αυτό είναι κάτι πιο ειδικό από το να πούμε ότι κάθε ερμιτιανός πίνακας είναι όμοιος προς διαγώνιο πίνακα, που επίσης ισχύει.

Παράδειγμα

Ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -2 \\ -1 & 7 & 2 \\ -2 & 2 & 10 \end{pmatrix}$ είναι συμμετρικός, άρα διαγωνοποιείται και θα τον διαγωνοποιήσουμε μέσω ορθογώνιου πίνακα.

Είναι $\varphi_A(x) = |A - xI| = \begin{vmatrix} 7-x & -1 & -2 \\ -1 & 7-x & 2 \\ -2 & 2 & 10-x \end{vmatrix} = -(x-12)(x-6)^2$.

Άρα $\lambda_1 = 12$ (απλή $\rho_1 = 1$), $\lambda_2 = 6$ (διπλή $\rho_2 = 2$)

Για $\lambda_1 = 12$ βρίσκω το ιδιοάνυσμα $X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Για $\lambda_2 = 6$ βρίσκω τα ιδιοανύσματα $X_{2,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Είναι $X_1 \cdot X_{2,1} = 0$, $X_1 \cdot X_{2,2} = 0$, όπως αναμένεται. Ωστόσο $X_{2,1} \cdot X_{2,2} = 2 \neq 0$, δηλαδή μέσα στον ιδιόχωρο της ιδιοτιμής $\lambda_2 = 6$ πρέπει να επιλέξω δύο ορθοκανονικά διανύσματα. Παίρνω το $X_{2,1}$ ως έχει, και επιλέγω το

$$X'_{2,2} \equiv X_{2,2} - \frac{X_{2,1} \cdot X_{2,2}}{\|X_{2,1}\|^2} X_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{2}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ οπότε } X'_{2,2} \cdot X_{2,1} = 0.$$

$X_{2,2} = \lambda X_{2,1} + n \Rightarrow X_{2,2} \cdot X_{2,1} = \lambda X_{2,1} \cdot X_{2,1} \Rightarrow \lambda = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow n = X_{2,2} - X_{2,1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \equiv X'_{2,2}$

Επομένως, η κανονικοποιημένη βάση ιδιοανυσμάτων που επιλέγω είναι

$$\hat{X}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \hat{X}_{2,1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{X}_{2,2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ο ορθογώνιος πίνακας

$$U = (\hat{X}_1 \ \hat{X}_{2,1} \ \hat{X}_{2,2}) = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{6} & 0 & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 2 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

διαγωνοποιεί τον A, δηλαδή $U^T A U = diag(12, 6, 6)$.

Πράγματι, $U^T A U = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & -1 & -2 \\ -1 & 7 & 2 \\ -2 & 2 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 2 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.