ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Σημειώσεις – Γραμμικές Απεικονίσεις

Κοφινάς Γιώργος

Τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών και Επικοινωνιακών Συστημάτων

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Ορισμός

Μια απεικόνιση $f: V_F \to W_F$ λέγεται γραμμική (ή F-γραμμική) αν (6)

$$f(v_1+v_2) = f(v_1)+f(v_2) \quad , \forall v_1, v_2 \in V$$
$$f(\lambda v) = \lambda f(v) \quad , \forall \lambda \in F, \forall v \in V$$

(Το πεδίο ορισμού V της f, μερικές φορές συμβολίζεται και dom$f$ από τη λέξη domain)

Ισοδύναμα μία γραμμική απεικόνιση μπορεί να οριστεί από τη σχέση
$$f(\lambda v_1+\mu v_2) = \lambda f(v_1)+\mu f(v_2), \quad \forall \lambda, \mu \in F, \ \forall v_1, v_2 \in V.$$

$f(0)=0$, $f(-v)=-f(v)$

Πράγματι, από την $f(\lambda v)=\lambda f(v)$ για $\lambda=0 \to f(0v)=0f(v) \to f(0)=0$.

Για $\lambda=-1 \to f(-v)=-f(v)$, $\forall v \in V$

Ορισμός

$f: V\to W$ γραμμική , f 1-1 "f μονομορφισμός" ή ενδομορφισμός

$f: V\to W$ γραμμική , f επί "f επιμορφισμός"

$f: V\to W$ γραμμική , f 1-1, f επί "f ισομορφισμός" (V, W "ισόμορφοι" $V \cong W$)

Παραδείγματα

(1) $f: V \to W : v \to f(v)=0$ "μηδενική" απεικόνιση

Είναι γραμμική, αφού $f(\lambda v_1+\mu v_2) = 0 = \lambda\cdot 0+\mu\cdot 0 = \lambda f(v_1)+\mu f(v_2)$.

(2) Έστω $\lambda \in F$ δεδομένο.

Η $f_\lambda : V \to V : v \to f_\lambda(v)=\lambda v$ είναι γραμμική, αφού $f_\lambda(\mu_1 v_1+\mu_2 v_2) =$

$= \lambda(\mu_1 v_1+\mu_2 v_2) = \mu_1(\lambda v_1)+\mu_2(\lambda v_2) = \mu_1 f_\lambda(v_1)+\mu_2 f_\lambda(v_2)$.

Μάλιστα, για $\lambda=0$, η f_0 είναι η μηδενική απεικόνιση, $f_0(v)=0$.

Για $\lambda=1$, η f_1 με $f_1(v)=v$ είναι η "ταυτοτική" απεικόνιση που συμβολίζεται και id ή I, δηλ. $id(v)=v$ ή $I(v)=v$.

(3) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (x_1,x_2,x_3) \to f(x_1,x_2,x_3) = (x_1+x_2, x_3)$ είναι $\mathbb{R}$-γραμμική. ή (x_1,x_2) επίσης γραμμική "προβολή"

(4) $f: \mathbb{C} \to \mathbb{R} : x+iy \to f(x+iy)=x$ είναι $\mathbb{R}$-γραμμική.

(5) $f: \mathbb{C}\to\mathbb{C} : x+iy \to f(x+iy)=y+ix$ είναι $\mathbb{R}$-γραμμική, όχι όμως $\mathbb{C}$-γραμμική

(6) Έστω $\{v_1,\dots,v_N\}$ δεδομένη βάση του V (πεπερ. παραγ.).

Τότε, ως γνωστόν, $\forall v\in V$, $\exists!\, (x_1,\dots,x_N)\in F^N : v = x_1v_1+\dots+x_Nv_N$.

Η $f: V\to F^N : v \to f(v)=(x_1,\dots,x_N)$ είναι γραμμική, αφού

$\lambda v+\mu v' = \lambda(x_1v_1+\dots+x_Nv_N)+\mu(x_1'v_1+\dots+x_N'v_N) = (\lambda x_1+\mu x_1')v_1+\dots+(\lambda x_N+\mu x_N')v_N$

άρα $f(\lambda v+\mu v') = (\lambda x_1+\mu x_1', \dots, \lambda x_N+\mu x_N') = \lambda(x_1,\dots,x_N)+\mu(x_1',\dots,x_N') =$

$= \lambda f(v)+\mu f(v')$.

(7) Έστω $A = (a_1, \dots, a_N) \in F^N$ δεδομένο.

Η $f_A : F^N \to F \ : \ X \equiv (x_1, \dots, x_N) \to f_A(X) = \underset{\text{εσωτερικό γινόμενο}}{A \cdot X} \equiv a_1 x_1 + \dots + a_N x_N$ γραμμική,

αφού $f_A(\lambda X + \mu Y) = A \cdot (\lambda X + \mu Y) = \dots = \lambda (A \cdot X) + \mu (A \cdot Y) = \lambda f_A(X) + \mu f_A(Y)$

Πιο γενικά, έστω $A \in \mathcal{M}_{M \times N}(F)$ δεδομένος.

Η $f_A : \underset{\text{columns}}{F^N} \to F^M : X \to f_A(X) = AX$ γραμμική, αφού

$f_A(\lambda X + \mu Y) = A(\lambda X + \mu Y) = \lambda AX + \mu AY = \lambda f_A(X) + \mu f_A(Y)$

(8) $\mathcal{L}(V, W) \equiv \{ f : V \to W \ \text{γραμμική} \}$

$(\mathcal{L}(V,W), +, \cdot)$ δ.χ. με πράξεις $(f+g)(v) = f(v) + g(v)$

$(\lambda f)(v) = \lambda f(v)$

Πράγματι, $\mathcal{L}(V,W)$ κλειστό ως προς $+, \cdot$ διότι αν $f, g \in \mathcal{L}(V,W)$

$(f+g)(\lambda v_1 + \mu v_2) = f(\lambda v_1 + \mu v_2) + g(\lambda v_1 + \mu v_2) = \lambda f(v_1) + \mu f(v_2) + \lambda g(v_1) + \mu g(v_2) =$

$= \lambda [f(v_1) + g(v_1)] + \mu [f(v_2) + g(v_2)] = \lambda (f+g)(v_1) + \mu (f+g)(v_2) \Rightarrow f + g \in \mathcal{L}(V,W)$

και

$(\lambda f)(\mu v_1 + \nu v_2) = \lambda f(\mu v_1 + \nu v_2) = \lambda [\mu f(v_1) + \nu f(v_2)] = \mu \lambda f(v_1) + \nu \lambda f(v_2)$

$= \mu (\lambda f)(v_1) + \nu (\lambda f)(v_2) \Rightarrow \lambda f \in \mathcal{L}(V,W)$.

Η μηδενική απεικόνιση $f_0(v) = 0, \ \forall v \in V$ είναι το μηδενικό στοιχείο του $\mathcal{L}(V,W)$, αφού $\forall f \in \mathcal{L}(V,W)$ είναι $(f + f_0)(v) = f(v) + f_0(v) = f(v) + 0 = f(v) \Rightarrow f + f_0 = f$.

Το $(-1)f \in \mathcal{L}(V,W)$ αποτελεί το αντίθετο του $f \in \mathcal{L}(V,W)$, δηλ. $-f = (-1)f$, διότι

$[f + (-1)f](v) = f(v) + ((-1)f)(v) = f(v) + \underset{\text{διότι } (-\lambda)u = -\lambda u}{(-1) f(v)} = f(v) - f(v) = 0 \Rightarrow f + (-1)f = 0 \Rightarrow -f = (-1)f$

Εύκολα μπορεί να δείξει κανείς και τις υπόλοιπες ιδιότητες του δ.χ. για το $\mathcal{L}(V,W)$.

- Όταν $V = W$, τότε συμβολίζουμε $\mathcal{L}(V,W) = \mathcal{L}(V,V) \equiv \mathcal{L}(V)$

Ενδιαφέρον παράδειγμα είναι όταν $V = W = C_\infty(\mathbb{R})$ είναι ο χώρος των ομαλών συναρτήσεων, οπότε $\mathcal{L}(V) = \mathcal{L}(C_\infty(\mathbb{R}))$ είναι το σύνολο των γραμμικών τελεστών, π.χ. $\frac{d}{dx} \in \mathcal{L}(C_\infty(\mathbb{R}))$ καθώς $\frac{d}{dx}(g_1(x) + g_2(x)) = \frac{d}{dx} g_1(x) + \frac{d}{dx} g_2(x)$ ή ακόμα $\frac{d}{dx} + 7 \in \mathcal{L}(C_\infty(\mathbb{R}))$ καθώς $(\frac{d}{dx} + 7)(g_1(x) + g_2(x)) = (\frac{d}{dx} + 7) g_1(x) + (\frac{d}{dx} + 7) g_2(x)$.

Το $\mathcal{L}(C_\infty(\mathbb{R}))$ με την πρόσθεση γραμμικών τελεστών και τον αριθμητικό πολλ/σμό γίνεται δ.χ. όπως παραπάνω.

- Όταν $W = F$, τότε συμβολίζουμε $\mathcal{L}(V,W) = \mathcal{L}(V,F) \equiv V^*$ "δυϊκός" του V

$V^* \ni f$ "συναρτησιακό"

(π.χ. αν $V = C_\infty(\mathbb{R})$, το f με $f(g) = g(0)$, $\forall g(x) \in C_\infty(\mathbb{R})$ είναι γραμμικό, αφού $f(\lambda g + \mu g') = (\lambda g + \mu g')(0) = \lambda g(0) + \mu g'(0) = \lambda f(g) + \mu f(g')$, άρα $f \in C_\infty^*$ και αυτό το f λέγεται Dirac δέλτα συνάρτηση).

$f : V \to W$ γραμμική , $\tilde{V} \leq V \Rightarrow f(\tilde{V}) \leq W$

Έχουμε $0 \in \tilde{V} \Rightarrow f(0) \in f(\tilde{V}) \Rightarrow 0 \in f(\tilde{V}) \Rightarrow f(\tilde{V}) \neq \emptyset$. Αρκεί να δείξουμε ότι το $f(\tilde{V})$ είναι κλειστό ως προς τις πράξεις $+, \cdot$

Αν $u_1, u_2 \in f(\tilde{V}) \Rightarrow \exists\, v_1, v_2 \in \tilde{V} : u_1 = f(v_1),\ u_2 = f(v_2)$

$\Rightarrow u_1 + u_2 = f(v_1) + f(v_2) = f(v_1 + v_2)$ με $v_1 + v_2 \in \tilde{V} \Rightarrow u_1 + u_2 \in f(\tilde{V})$.

Αν $u \in f(\tilde{V}) \Rightarrow \exists\, v \in \tilde{V} : u = f(v) \Rightarrow \lambda u = \lambda f(v) = f(\lambda v)$ με $\lambda v \in \tilde{V}$

$\Rightarrow \lambda u \in f(\tilde{V})$.

Τελικά $f(\tilde{V}) \leq W$.

$f : V \to W$ γραμμική, $\tilde{W} \leq W \Rightarrow f^{-1}(\tilde{W}) \leq V$

Έχουμε $f(0) = 0 \in \tilde{W} \Rightarrow 0 \in f^{-1}(\tilde{W}) \Rightarrow f^{-1}(\tilde{W}) \neq \emptyset$. Αρκεί να δείξουμε ότι το $f^{-1}(\tilde{W})$ είναι κλειστό ως προς τις πράξεις $+, \cdot$

Αν $v_1, v_2 \in f^{-1}(\tilde{W}) \Rightarrow \exists\, u_1, u_2 \in \tilde{W} : u_1 = f(v_1),\ u_2 = f(v_2)$

$\Rightarrow u_1 + u_2 = f(v_1) + f(v_2) = f(v_1 + v_2)$ με $u_1 + u_2 \in \tilde{W} \Rightarrow v_1 + v_2 \in f^{-1}(\tilde{W})$.

Αν $v \in f^{-1}(\tilde{W}) \Rightarrow \exists\, u \in \tilde{W} : u = f(v) \Rightarrow \lambda u = \lambda f(v) = f(\lambda v)$ με $\lambda u \in \tilde{W}$

$\Rightarrow \lambda v \in f^{-1}(\tilde{W})$.

Τελικά $f^{-1}(\tilde{W}) \leq V$.

Ορισμός $f: V \to W$ γραμμική

$\mathrm{Ker}f \equiv \{ v \in V \ : f(v) = 0 \} = f^{-1}(0)$ "πυρήνας" της f (Kernel)

$\mathrm{Im}f \equiv \{ u \in W : \exists v \in V, \ f(v) = u \} = f(V)$ "εικόνα" της f (Image)

$r(f) \equiv \dim \mathrm{Im}f$ "τάξη" ή βαθμός της f (rank)

$\mathrm{Ker}f \le V$, $\mathrm{Im}f \le W$

Πράγματι, επειδή $\tilde{W} \equiv \{0\} \le W$, άρα το $f^{-1}(\tilde{W}) = f^{-1}(0) = \mathrm{Ker}f \le V$

Εξάλλου, επειδή $\tilde{V} \equiv V \le V$, άρα το $f(\tilde{V}) = f(V) = \mathrm{Im}f \le W$

$r(f) \le \dim V, \dim W$

Πράγματι, $\mathrm{Im}f \le W \Rightarrow \dim \mathrm{Im}f \le \dim W \Rightarrow r(f) \le \dim W$. Εξάλλου, αν $\{v_1, \dots, v_N\}$ βάση V, τότε $\mathrm{Im}f = f(V) = f(\langle v_1, \dots, v_N \rangle) = \langle f(v_1), \dots, f(v_N) \rangle$, άρα $r(f) = \dim \mathrm{Im}f = \dim \langle f(v_1), \dots, f(v_N) \rangle \le N = \dim V \Rightarrow r(f) \le \dim V$.

$f(v) = u \Rightarrow f^{-1}(u) = v + \mathrm{Ker}f$

Πράγματι, αν $x \in f^{-1}(u) \Rightarrow f(x) = u \Rightarrow f(x) = f(v) \Rightarrow f(x-v) = 0 \Rightarrow x - v \in \mathrm{Ker}f \Rightarrow x \in v + \mathrm{Ker}f \Rightarrow f^{-1}(u) \subseteq v + \mathrm{Ker}f$

Αν $x \in v + \mathrm{Ker}f \Rightarrow x = v + n$, $n \in \mathrm{Ker}f \Rightarrow f(x) = f(v+n) = f(v) + f(n) = u + 0 = u \Rightarrow x \in f^{-1}(u) \Rightarrow v + \mathrm{Ker}f \subseteq f^{-1}(u)$

Τελικά $f^{-1}(u) = v + \mathrm{Ker}f$.

(Παρατηρούμε ότι επειδή $f(0) = 0 \Rightarrow f^{-1}(0) = 0 + \mathrm{Ker}f \Rightarrow f^{-1}(0) = \mathrm{Ker}f$, σε συμφωνία με αυτό που ξέρουμε.

Εξάλλου, αν $f(v) = 0 \Rightarrow f^{-1}(0) = v + \mathrm{Ker}f$. Αλλά $v \in \mathrm{Ker}f \Rightarrow v + \mathrm{Ker}f = \mathrm{Ker}f \Rightarrow f^{-1}(0) = \mathrm{Ker}f$ o.k.

$f: V \to W$. f 1-1 $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}f = 0$

Έστω f 1-1. Αν $v \in \mathrm{Ker}f \Rightarrow f(v) = 0 \Rightarrow f(v) = f(0) \Rightarrow v = 0 \Rightarrow \mathrm{Ker}f = 0$.

Αντίστροφα, έστω $\mathrm{Ker}f = 0$. Αν $f(v_1) = f(v_2)$, $v_1, v_2 \in V \Rightarrow f(v_1) - f(v_2) = 0 \Rightarrow f(v_1 - v_2) = 0 \Rightarrow v_1 - v_2 \in \mathrm{Ker}f \Rightarrow v_1 - v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = v_2 \Rightarrow f$ 1-1.

$\mathrm{Ker}f = 0$, $v_1, \dots, v_n \in V$ Γρ. Ανεξ. $\Rightarrow f(v_1), \dots, f(v_n)$ Γρ. Ανεξ.

Πράγματι, αν $\lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_n f(v_n) = 0 \Rightarrow f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = 0 \Rightarrow \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \in \mathrm{Ker}f \Rightarrow \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0 \Rightarrow f(v_1), \dots, f(v_n)$ Γρ. Ανεξ.

$f: V \to V \Rightarrow f(\mathrm{Ker}f) \le \mathrm{Ker}f$, $f(\mathrm{Im}f) \le \mathrm{Im}f$ (δηλαδή οι υπόχωροι $\mathrm{Ker}f$, $\mathrm{Im}f$ είναι "αναλλοίωτοι"

Είναι $f(\mathrm{Ker}f) = 0 \le \mathrm{Ker}f$, $\mathrm{Im}f \le V \Rightarrow f(\mathrm{Im}f) \le \mathrm{Im}f$

Μία γραμμική απεικόνιση είναι γνωστή αν καθοριστούν οι εικόνες των διανυσμάτων μιας βάσης.

Έστω $f: V \to W$ γραμμική, $\{v_1, \dots, v_N\}$ βάση V και $f(v_1), \dots, f(v_N) \in W$ δεδομένα. Θα δείξουμε ότι $\forall v \in V$, το $f(v) \in W$ είναι επίσης δεδομένο.

Πράγματι, $\exists\ \lambda_1, \dots, \lambda_N \in F : v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_N v_N$. Άρα
$f(v) = f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_N v_N) = \lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_N f(v_N)$, όπου όλα τα $\lambda_i, f(v_i)$ είναι δεδομένα (μοναδικά). Άρα $f(v)$ δεδομένο (μοναδικό).

$\{v_1, \dots, v_N\}$ βάση V, $u_1, \dots, u_N \in W \Rightarrow \exists\ f: V \to W$ γραμμική, $f(v_i) = u_i$

Αν $v \in V$ τότε $\exists\ \lambda_1, \dots, \lambda_N \in F : v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_N v_N$.

Ορίζουμε μία $f: V \to W : v \to f(v) = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_N u_N$.

Η f είναι καλά ορισμένη, αφού τα λ_i είναι μοναδικά για το v.

Επίσης επειδή $v_i = 1 v_i$, άρα $f(v_i) = 1 u_i = u_i$.

Απομένει να δείξωμε ότι η f είναι γραμμική και μοναδική.

Πράγματι, αν $v, v' \in V$ τότε $\exists\ \lambda_1, \dots, \lambda_N$ και $\lambda_1', \dots, \lambda_N'$ με

$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_N v_N$, $v' = \lambda_1' v_1 + \dots + \lambda_N' v_N$, ενώ

$v + v' = (\lambda_1 + \lambda_1') v_1 + \dots + (\lambda_N + \lambda_N') v_N$.

Άρα
$$\begin{aligned} f(v+v') &= (\lambda_1 + \lambda_1') u_1 + \dots + (\lambda_N + \lambda_N') u_N \\ &= (\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_N u_N) + (\lambda_1' u_1 + \dots + \lambda_N' u_N) = f(v) + f(v'), \end{aligned}$$

δηλαδή f γραμμική.

Τελικά, αφού f γραμμική και $f(v_i)$ δεδομένα $(= u_i)$, άρα η f μοναδική (από το προηγούμενο).

(Σημειώνουμε στην πρόταση αυτή ότι προφανώς τα u_i δεν είναι κατ' ανάγκη διαφορετικά όλα μεταξύ τους)

$V \cong W \Leftrightarrow \dim V = \dim W$

Έστω $V \cong W$. Τότε $\exists\ f: V \to W$ ισομορφισμός. Αν $\{v_1, \dots, v_N\}$ είναι βάση του V, θα δείξουμε ότι το $\{f(v_1), \dots, f(v_N)\}$ είναι βάση του W, οπότε προφανώς θα είναι $\dim W = N = \dim V$. Αφού f ισομορφισμός άρα $\operatorname{Ker} f = 0$, επομένως $f(v_1), \dots, f(v_N)$ Γρ. Ανεξ. Αρκεί να δείξουμε ότι $W = \langle f(v_1), \dots, f(v_N) \rangle$. Πράγματι, αν $u \in W$, τότε αφού f επί, θα υπάρχει $v \in V : u = f(v)$. Περαιτέρω, $\exists\ \lambda_1, \dots, \lambda_N \in F : v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_N v_N$. Τελικά $u = f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_N v_N) = \lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_N f(v_N) \Rightarrow W = \langle f(v_1), \dots, f(v_N) \rangle$.
Αντίστροφα, έστω $\dim V = \dim W = N$. Αν $\{v_1, \dots, v_N\}$ βάση V και $\{u_1, \dots, u_N\}$ βάση W, η απεικόνιση $f: V \to W$ με $f(v) = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_N u_N$ όπου $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_N v_N$ είναι καλά ορισμένη και γραμμική. Θα δείξουμε ότι f 1-1 και επί, δηλ. ισομορφισμός. Πράγματι, αν $v \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow f(v) = 0 \Rightarrow \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_N u_N = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_N = 0 \Rightarrow v = 0 \Rightarrow \operatorname{Ker} f = 0 \Rightarrow f$ 1-1. Εξάλλου, είναι $u_i = f(v_i) \in \operatorname{Im} f$, $i = 1, \dots, N$, άρα $\dim \operatorname{Im} f = N \Rightarrow \operatorname{Im} f = W \Rightarrow f$ επί.

Παράδειγμα

$$\mathbb{R}^4 \cong M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \cong \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$$
$$\mathcal{P}_3(\mathbb{R}) = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3,\quad a_i, x \in \mathbb{R}\}$$

Πράγματι, η $f_1 : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4 : f_1\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ είναι ισομορφισμός και πράγματι, $\dim M_{2\times 2}(\mathbb{R}) = 4$, $\dim \mathbb{R}^4 = 4$.
Εξάλλου, η $f_2 : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4 : f_2(\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3) = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ είναι επίσης ισομορφισμός και πράγματι, $\dim \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) = 4$, $\dim \mathbb{R}^4 = 4$.

Να δείξετε ότι ο χώρος των πραγματικών πολυωνύμων βαθμού μικρότερου ή ίσου του 3 είναι ισόμορφος προς τον χώρο των πραγματικών 2x2 πινάκων.

$f: V \to W$ γραμμική, $\tilde{V} \leq V$, $V = \tilde{V} \oplus \mathrm{Ker} f \Rightarrow f|_{\tilde{V}} : \tilde{V} \to \mathrm{Im} f$ ισομορφισμός

Συμβολίζουμε $\tilde{f} \equiv f|_{\tilde{V}}$. Η $\tilde{f}: \tilde{V} \to \mathrm{Im} \tilde{f}$ προφανώς είναι γραμμική.
Θα δείξουμε ότι $\tilde{f}$ 1-1 και $\tilde{f}$ επί.
Αν $\tilde{f}(v_1) = \tilde{f}(v_2)$, $v_1, v_2 \in \tilde{V} \Rightarrow f(v_1) = f(v_2) \Rightarrow f(v_1 - v_2) = 0 \Rightarrow$
$v_1 - v_2 \in \mathrm{Ker} f$. Αλλά $v_1 - v_2 \in \tilde{V}$, άρα $v_1 - v_2 \in \tilde{V} \cap \mathrm{Ker} f = 0 \Rightarrow$
$v_1 = v_2 \Rightarrow \tilde{f}$ 1-1.
Αν $v \in V \Rightarrow \exists\ \tilde{v} \in \tilde{V}$, $n \in \mathrm{Ker} f$: $v = \tilde{v} + n \Rightarrow f(v) = f(\tilde{v} + n) =$
$= f(\tilde{v}) + f(n) = f(\tilde{v}) + 0 = f(\tilde{v}) \in \mathrm{Im} f \Rightarrow \mathrm{Im} f \subseteq \mathrm{Im} \tilde{f}$. Επίσης
προφανώς $\mathrm{Im} \tilde{f} \subseteq \mathrm{Im} f$, άρα $\mathrm{Im} \tilde{f} = \mathrm{Im} f$, άρα $\tilde{f}$ επί.

$f: V \to W$ γραμμική $\Rightarrow \dim V = \dim \mathrm{Ker} f + \dim \mathrm{Im} f$

Πράγματι, αφού $\mathrm{Ker} f \leq V$, ως γνωστόν υπάρχει $\tilde{V} \leq V$ ώστε
$V = \tilde{V} \oplus \mathrm{Ker} f$. Η $f|_{\tilde{V}} : \tilde{V} \to \mathrm{Im} f$ είναι ισομορφισμός, δηλαδή $\tilde{V} \cong \mathrm{Im} f \Rightarrow$
$\dim \tilde{V} = \dim \mathrm{Im} f$. Είναι $\dim V = \dim(\tilde{V} \oplus \mathrm{Ker} f) = \dim \tilde{V} + \dim \mathrm{Ker} f =$
$= \dim \mathrm{Im} f + \dim \mathrm{Ker} f$.

$f: V \to W$ γραμμική.
f 1-1 $\Leftrightarrow \mathrm{Ker} f = 0 \Leftrightarrow r(f) = \dim V$
f επί $\Leftrightarrow \mathrm{Im} f = W \Leftrightarrow r(f) = \dim W$
f 1-1 & επί $\Leftrightarrow r(f) = \dim V = \dim W$

Προκύπτουν απλά.

Παρατήρηση (1) $f: V \to W$ γραμμική. Δύο από τις παρακάτω τρεις συνθήκες συνεπάγεται την τρίτη (i) f 1-1 (ii) f επί (iii) $\dim V = \dim W$
Πράγματι, έστω (i), (ii). Τότε $f: V \to W$ ισομορφισμός $\Rightarrow V \cong W \Rightarrow \dim V = \dim W \Rightarrow$ (iii)
Έστω (i), (iii). Τότε αφού f 1-1 $\Rightarrow \dim \mathrm{Ker} f = 0 \Rightarrow \dim V = \dim \mathrm{Im} f \Rightarrow \dim W = \dim \mathrm{Im} f$,
και αφού $\mathrm{Im} f \leq W$, άρα $\mathrm{Im} f = W \Rightarrow f$ επί $\Rightarrow$ (ii)
Έστω (ii), (iii). Τότε αφού f επί $\Rightarrow \mathrm{Im} f = W \Rightarrow \dim \mathrm{Im} f = \dim W \Rightarrow \dim \mathrm{Im} f = \dim V \Rightarrow$
$\dim \mathrm{Im} f = \dim \mathrm{Ker} f + \dim \mathrm{Im} f \Rightarrow \dim \mathrm{Ker} f = 0 \Rightarrow \mathrm{Ker} f = 0 \Rightarrow f$ 1-1 $\Rightarrow$ (i)

(2) $f: V \to V$ γραμμική. f 1-1 $\Leftrightarrow f$ επί
Πράγματι, είναι προφανές από την προηγούμενη παρατήρηση, αφού εδώ η συνθήκη (iii) ικανοποιείται πάντα.

(3) Η $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ είναι προφανές ότι δεν μπορεί να είναι 1-1 (αφού ο πρώτος χώρος είναι μεγαλύτερος του δεύτερου) και πράγματι, από $r(f) \leq 2, 3 \Rightarrow r(f) \leq 2 \Rightarrow r(f) \neq 3 \Rightarrow r(f) \neq \dim V \Rightarrow f$ όχι 1-1.
Επίσης, η $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ είναι προφανές ότι δεν μπορεί να είναι επί (αφού ο πρώτος χώρος είναι μικρότερος από το δεύτερο) και πράγματι, από $r(f) \leq 2, 3 \Rightarrow r(f) \leq 2 \Rightarrow r(f) \neq 3 \Rightarrow r(f) \neq \dim W \Rightarrow f$ όχι επί

Άσκηση

$f: V \to V$, $f^2 \equiv f \circ f = f$ $\Rightarrow$ $V = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f$

"προβολή"

Λύση

Έστω $v \in V$, τότε $f(v) \in \mathrm{Im} f$. Είναι

$f(v - f(v)) = f(v) - f^2(v) = f(v) - f(v) = 0 \Rightarrow v - f(v) \in \mathrm{Ker} f \Rightarrow$

$\Rightarrow v - f(v) = u$, $u \in \mathrm{Ker} f \Rightarrow v = u + f(v) \Rightarrow V = \mathrm{Ker} f + \mathrm{Im} f$

Αν $w \in \mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f \Rightarrow w \in \mathrm{Ker} f$, $w \in \mathrm{Im} f \Rightarrow f(w) = 0$, $w = f(v)$, $v \in V$

$\Rightarrow f^2(v) = 0 \Rightarrow f(v) = 0 \Rightarrow v \in \mathrm{Ker} f \Rightarrow f(v) = 0 \Rightarrow w = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f = 0 \Rightarrow V = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f$.

Άσκηση

1) Η $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x^2, y^2)$ δεν είναι γραμμική, διότι

$f(-1, 0) = (1, 0) \neq -(1, 0) = -f(1, 0)$

2) Η $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = (1, -1)$ δεν είναι γραμμική, διότι

$f(0) = (1, -1) \neq (0, 0)$

3) Η $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = (xy, y, x)$ δεν είναι γραμμική, διότι

$f(-(1,1)) = f(-1, -1) = (1, -1, -1) \neq (-1, -1, -1) = -(1, 1, 1) = -f(1,1)$

Άσκηση. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x,y) \to (2x+3y,\ x+y)$

$\operatorname{Ker} f = ?$, $\operatorname{Im} f = ?$, f 1-1 ? , f επί ?

- Αν $(x,y) \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow f(x,y) = 0 \Rightarrow (2x+3y,\ x+y) = (0,0) \Rightarrow \begin{cases} 2x+3y=0 \\ x+y=0 \end{cases}$.

Το σύστημα είναι ομογενές με $D = -1 \neq 0$, άρα έχει μοναδική λύση
$x = y = 0 \Rightarrow \operatorname{Ker} f = 0 \Rightarrow f$ 1-1

- Αν $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ τυχόν στοιχείο του 2ου χώρου, θα βρούμε αν υπάρχει $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ [στοιχείο του 1ου χώρου] ώστε $f(x,y) = (\alpha,\beta) \Leftrightarrow$

$(2x+3y,\ x+y) = (\alpha,\beta) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3y = \alpha \\ x+y = \beta \end{cases}$

Αν $(\alpha,\beta) \neq 0$, επειδή $D = -1 \neq 0$, το σύστημα έχει μοναδική λύση ως προς (x,y).

Αν $(\alpha,\beta) = 0$, επειδή $D = -1 \neq 0$ το σύστημα έχει μοναδική λύση $(x,y) = (0,0)$.

Άρα πάντα υπάρχει λύση $(x,y) \Rightarrow f$ επί.

Αλλιώς. Είναι $f(1,0) = (2\cdot 1 + 3\cdot 0,\ 1+0) = (2,1)$

$f(0,1) = (2\cdot 0 + 3 \cdot 1,\ 0+1) = (3,1)$

Τα $(2,1), (3,1)$ είναι Γρ. Ανεξ. στοιχεία του $\operatorname{Im} f \Rightarrow \dim \operatorname{Im} f \geq 2$. Αλλά $\operatorname{Im} f \leq \mathbb{R}^2 \Rightarrow \dim \operatorname{Im} f \leq 2$. Τελικά $\dim \operatorname{Im} f = 2 \Rightarrow \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2 \Rightarrow f$ επί.

$\dim \mathcal{L}(V,W) = (\dim V)(\dim W)$

Έστω $\{v_i\} = \{v_1, \dots, v_N\}$ βάση V και $\{u_\alpha\} = \{u_1, \dots, u_M\}$ βάση W.

Ορίζουμε τις $N \times M$ γραμμικές απεικονίσεις $f_{i\alpha} : V \to W$ με $f_{i\alpha}(v_j) = \delta_{ij} u_\alpha$

$f_{i\alpha} : V \to W$ με $f_{i\alpha}(v_j) = \delta_{ij} u_\alpha$; $i = 1, \dots, N$, $\alpha = 1, \dots, M$

(π.χ. $f_{11}(v_1) = u_1$, $f_{11}(v_2) = 0$, ..., $f_{1M}(v_N) = 0$
$f_{12}(v_1) = u_2$, $f_{12}(v_2) = 0$, ..., $f_{1M}(v_N) = 0$)

Θα δείξουμε ότι το $\{f_{i\alpha}, i = 1, \dots N, \alpha = 1, \dots, M\}$ είναι βάση του $\mathcal{L}(V,W)$.

Αν $f \in \mathcal{L}(V,W)$ τότε $\exists\, \lambda_{i\alpha}$ ώστε $f(v_i) = \lambda_{i1} u_1 + \dots + \lambda_{iM} u_M = \sum_{\alpha=1}^{M} \lambda_{i\alpha} u_\alpha$.

Θα δείξουμε ότι $f = \sum_{i=1}^{N} \sum_{\alpha=1}^{M} \lambda_{i\alpha} f_{i\alpha}$, δηλ. τα $\{f_{i\alpha}\}$ παράγουν το $\mathcal{L}(V,W)$.

Πράγματι, είναι

$$\left(\sum_{i=1}^{N} \sum_{\alpha=1}^{M} \lambda_{i\alpha} f_{i\alpha}\right)(v_j) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{\alpha=1}^{M} \lambda_{i\alpha} f_{i\alpha}(v_j) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{\alpha=1}^{M} \lambda_{i\alpha} \delta_{ij} u_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{M} \lambda_{j\alpha} u_\alpha = f(v_j),$$

$\forall\, v_j$ της βάσης $\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} \sum_{\alpha=1}^{M} \lambda_{i\alpha} f_{i\alpha} = f$.

Απομένει να δείξουμε ότι τα $\{f_{i\alpha}\}$ είναι Γρ. Ανεξ.

Αν $\sum_{i=1}^{N} \sum_{\alpha=1}^{M} \mu_{i\alpha} f_{i\alpha} = 0 \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{N} \sum_{\alpha=1}^{M} \mu_{i\alpha} f_{i\alpha}\right)(v_j) = 0$, $\forall\, v_j$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} \mu_{i\alpha} f_{i\alpha}(v_j) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{N} \sum_{\alpha=1}^{M} \mu_{i\alpha} \delta_{ij} u_\alpha = 0 \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{M} \mu_{j\alpha} u_\alpha = 0$,

και αφού $\{u_\alpha\}$ βάση άρα $\mu_{j1} = \dots = \mu_{jM} = 0$, $\forall\, j = 1, \dots N$.

Τελικά $\mu_{i\alpha} = 0 \Rightarrow \{f_{i\alpha}\}$ Γρ. Ανεξ.

<u>Άσκηση</u> Έστω $f: S_1 \to S_2$, $g: S_2 \to S_3$

$g \circ f$ 1-1 $\Rightarrow$ f 1-1

$g \circ f$ επί $\Rightarrow$ g επί

Πράγματι, έστω $g \circ f$ 1-1. Αν $f(a_1) = f(b_1)$, $a_1, b_1 \in S_1$ $\Rightarrow$ $g(f(a_1)) = g(f(b_1))$ $\Rightarrow$ $(g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(b_1)$. Αλλά $g \circ f$ είναι 1-1, άρα $a_1 = b_1 \Rightarrow f$ 1-1.

Έστω $g \circ f$ επί. Αν $a_3 \in S_3$, αφού $g \circ f$ επί, θα υπάρχει $a_1 \in S_1$ με $(g \circ f)(a_1) = a_3 \Rightarrow g(f(a_1)) = a_3 \Rightarrow g(a_2) = a_3$, $a_2 \equiv f(a_1) \in S_2$ $\Rightarrow$ g επί

<u>Άσκηση</u> $f, g \in \mathcal{L}(V)$, $g \circ f = 1$ $\Rightarrow$ f, g ισομορφισμοί

$f = g^{-1}$, $g = f^{-1}$

Πράγματι, αφού $g \circ f = 1 = I$ και η γρ. απεικόνιση 1 (δηλαδή η ταυτοτική γραμμική απεικόνιση) είναι 1-1 και επί, άρα f 1-1 και g επί $\Rightarrow$ f επί και g 1-1 $\Rightarrow$ f, g ισομορφισμοί $\Rightarrow$ $\exists\, f^{-1}, g^{-1}$ και προφανώς $f = g^{-1}$, $g = f^{-1}$.

<u>Άσκηση</u> $f \in \mathcal{L}(V)$, $f^n \equiv f \circ f \circ \cdots \circ f = 0$ $(n \in \mathbb{N})$ "μηδενοδύναμη"

$\Rightarrow$ $1 + f$ ισομορφισμός

Πράγματι, $(1+f) \circ \left(1 - f + f^2 - + \cdots + (-1)^{n-1} f^{n-1}\right) =$

$$= 1 \cancel{- f} \cancel{+ f^2} - \cdots \cancel{+ (-1)^{n-1} f^{n-1}} \cancel{+ f} \cancel{- f^2} + f^3 - \cdots \cancel{+ (-1)^{n-2} f^{n-1}} + (-1)^{n-1} \underset{0}{\underset{\shortparallel}{f^n}}$$

$$= 1$$

$\Rightarrow$ $1 + f$ ισομορφισμός και μάλιστα $(1+f)^{-1} = 1 - f + f^2 - \cdots + (-1)^{n-1} f^{n-1}$.

$f: V \to W$ γραμμική, $g: W \to L$ γραμμική $\Rightarrow$ $g \circ f: V \to L$ γραμμική

Περαιτέρω, αν f, g 1-1 $\Rightarrow$ $g \circ f$ 1-1

αν f, g επί $\Rightarrow$ $g \circ f$ επί

Απόδειξη

Αν $v_1, v_2 \in V$ είναι $(g \circ f)(\lambda v_1 + \mu v_2) = g(f(\lambda v_1 + \mu v_2)) = g(\lambda f(v_1) + \mu f(v_2)) =$
$= g(\lambda f(v_1)) + g(\mu f(v_2)) = \lambda g(f(v_1)) + \mu g(f(v_2)) =$
$= \lambda (g \circ f)(v_1) + \mu (g \circ f)(v_2) \Rightarrow$ $g \circ f$ γραμμική

Έστω f, g 1-1. Αν $(g \circ f)(v_1) = (g \circ f)(v_2)$, $v_1, v_2 \in V$ $\Rightarrow$
$g(f(v_1)) = g(f(v_2))$ με $f(v_1), f(v_2) \in W$. Αλλά g 1-1 $\Rightarrow$
$f(v_1) = f(v_2)$. Εξάλλου f 1-1 $\Rightarrow$ $v_1 = v_2$ $\Rightarrow$ $g \circ f$ 1-1.

Έστω f, g επί. Αν $u \in L$, αφού g επί, θα υπάρχει $w \in W$ με $u = g(w)$.
Εξάλλου, αφού f επί, θα υπάρχει $v \in V$ με $w = f(v)$. Επομένως,
$u = g(f(v)) = (g \circ f)(v)$ $\Rightarrow$ $g \circ f$ επί.

<u>Ορισμός</u>

Ένα σύνολο A λέγεται άλγεβρα όταν είναι γραμμικός χώρος και επιπλέον έχει μία δεύτερη εσωτερική πράξη

$$\cdot \; : A \times A \to A \; : \; (a,b) \to a \cdot b$$

με τις ιδιότητες

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \; (b+c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$$

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

(↑ δακτύλιος)

$$\lambda (a \cdot b) = (\lambda a) \cdot b = a \cdot (\lambda b)$$

π.χ. ο δ.χ. $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ είναι άλγεβρα με δεύτερη εσωτερική πράξη το σύνηθες γινόμενο μιγαδικών).

<u>$(\mathcal{L}(V), +, \cdot, \circ)$ άλγεβρα</u>

Πράγματι, $(\mathcal{L}(V), +, \cdot)$ γραμμικός χώρος

Επίσης, αν $f, g \in \mathcal{L}(V)$ τότε $f \circ g \in \mathcal{L}(V)$.

Είναι $[f \circ (g+h)](v) = f((g+h)(v)) = f(g(v)+h(v)) = f(g(v)) + f(h(v)) =$

$$= (f \circ g)(v) + (f \circ h)(v) = (f \circ g + f \circ h)(v)$$

$$\Rightarrow \quad f \circ (g+h) = (f \circ g) + (f \circ h)$$

όμοια $(f+g) \circ h = (f \circ h) + (g \circ h)$.

Η προσεταιριστική ιδιότητα $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ είναι εύκολο να δειχθεί ότι ισχύει γενικά ως προς τη σύνθεση απεικονίσεων (όχι μόνο γραμμικών).

Είναι $[\lambda (f \circ g)](v) = \lambda (f \circ g)(v) = \lambda f(g(v)) = f(\lambda g(v)) =$

$$= f((\lambda g)(v)) = (f \circ (\lambda g))(v) \quad \Rightarrow \quad \lambda (f \circ g) = f \circ (\lambda g)$$

$f: V_N \to W_M$ γραμμική, $\{e_i\} = \{e_1, \ldots, e_N\}$ διατ. βάση V, $\{\bar{e}_j\} = \{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_M\}$ διατ. βάση W

$$f(e_i) = \sum_{j=1}^{M} a_{ji} \bar{e}_j \quad \Leftrightarrow \quad (f(e_1) \ldots f(e_N)) = (\bar{e}_1 \cdots \bar{e}_M) A \quad , \quad A = (a_{ji})_{M\times N} \equiv (f : e_i, \bar{e}_j)$$
$$i = 1, \ldots, N$$

$$\text{Αν} \quad \bar{e}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in F^M \Rightarrow f(e_i) = A^i \quad , \quad A = (f(e_1) \ldots f(e_N))$$

Ο πίνακας A λέγεται πίνακας της γραμμικής απεικόνισης f στις βάσεις $\{e_i\}$, $\{\bar{e}_j\}$. Προφανώς, για δεδομένες βάσεις $\{e_i\}$, $\{\bar{e}_j\}$, η f ορίζει έναν πίνακα A και αντιστρόφως, ο A ορίζει μία f, δηλαδή υπάρχει μία 1-1 και επί αντιστοιχία μεταξύ των χώρων $\mathcal{L}(V_N, W_M)$ και $\mathcal{M}_{M\times N}(F)$. Οι διαστάσεις των δύο αυτών χώρων συμπίπτουν $(= M.N)$, άρα οι χώροι αυτοί είναι ισόμορφοι, $\mathcal{L}(V_N, W_M) \cong \mathcal{M}_{M\times N}(F)$ και ο ισομορφισμός αυτός εκφράζεται ως εξής:

$$f, g : V_N \to W_M \text{ γραμμικές}, \ (f : e_i, \bar{e}_j) = A_{M\times N}, \ (g : e_i, \bar{e}_j) = B_{M\times N} \Rightarrow (\lambda f + g : e_i, \bar{e}_j) = \lambda A + B$$

[Έχουμε ήδη δει ότι $\lambda f + g$ γραμμική, αφού $\mathcal{L}(V, W)$ γραμμικός χώρος, δηλαδή

$$(\lambda f + g)(\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2) = \lambda f(\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2) + g(\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2) =$$
$$= \lambda [\mu_1 f(v_1) + \mu_2 f(v_2)] + \mu_1 g(v_1) + \mu_2 g(v_2) =$$
$$= \mu_1 [\lambda f(v_1) + g(v_1)] + \mu_2 [\lambda f(v_2) + g(v_2)] = \mu_1 (\lambda f + g)(v_1) + \mu_2 (\lambda f + g)(v_2)]$$

Πράγματι λοιπόν, $f(e_i) = \sum_{j=1}^{M} a_{ji} \bar{e}_j$, $g(e_i) = \sum_{j=1}^{M} b_{ji} \bar{e}_j$, άρα

$$(\lambda f + g)(e_i) = \lambda f(e_i) + g(e_i) = \lambda \sum_{j=1}^{M} a_{ji} \bar{e}_j + \sum_{j=1}^{M} b_{ji} \bar{e}_j = \sum_{j=1}^{M} (\lambda a_{ji} + b_{ji}) \bar{e}_j \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\lambda f + g : e_i, \bar{e}_j) = \lambda A + B$$

Εξάλλου, όπως θα δούμε τώρα, στη σύνθεση δύο γραμμικών απεικονίσεων αντιστοιχεί το γινόμενο των πινάκων, και μάλιστα αυτός είναι ο επιθυμητός λόγος που το γινόμενο πινάκων ορίστηκε με τον κάπως περίεργο τρόπο που ορίστηκε.

$$f: V_N \to W_M \quad , \quad (f: e_i, \bar{e}_j) = A_{M\times N}$$
$$g: W_M \to U_L \quad , \quad (g: \bar{e}_j, \bar{\bar{e}}_k) = B_{L\times M}$$
$$g\circ f: V_N \to U_L \quad , \quad \underline{(g\circ f: e_i, \bar{\bar{e}}_k) = C_{L\times N} = BA}$$

[Έχουμε ήδη δει ότι $g\circ f$ γραμμική, αφού $(g\circ f)(\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2) = g(f(\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2)) =$
$= g(\mu_1 f(v_1) + \mu_2 f(v_2)) = g(\mu_1 f(v_1)) + g(\mu_2 f(v_2)) = \mu_1 g(f(v_1)) + \mu_2 g(f(v_2)) =$
$= \mu_1 (g\circ f)(v_1) + \mu_2 (g\circ f)(v_2)$]

Πράγματι, $f(e_i) = \sum_{j=1}^{M} a_{ji}\, \bar{e}_j$, $g(\bar{e}_j) = \sum_{k=1}^{L} b_{kj}\, \bar{\bar{e}}_k$, άρα

$$(g\circ f)(e_i) = g(f(e_i)) = g\left(\sum_{j=1}^{M} a_{ji}\, \bar{e}_j\right) = \sum_{j=1}^{M} a_{ji}\, g(\bar{e}_j) = \sum_{j=1}^{M} a_{ji} \sum_{k=1}^{L} b_{kj}\, \bar{\bar{e}}_k =$$
$$= \sum_{k=1}^{L}\left(\sum_{j=1}^{M} b_{kj}\, a_{ji}\right)\bar{\bar{e}}_k = \sum_{k=1}^{L} c_{ki}\, \bar{\bar{e}}_k \Rightarrow c_{ki} = \sum_{j=1}^{M} b_{kj}\, a_{ji} \Rightarrow C = BA .$$

<u>Παρατήρηση</u> (1) Λόγω της παραπάνω αντιστοιχίας, υπάρχει ισομορφισμός μεταξύ των αλγεβρών $\mathcal{L}(V_N)$ (με δεύτερη εσωτερική πράξη τη σύνθεση γραμ. απεικονίσεων) και $M_{N\times N}(F)$ (με δεύτερη εσωτερική πράξη το γινόμενο πινάκων).

(2) Στον $\mathcal{L}(V_N)$ όταν $\{\bar{e}_j\} \equiv \{e_i\}$, τότε συμβολίζουμε $(f: e_i, e_i) \equiv (f: e_i)$.

3) Η ταυτοτική απεικόνιση $\mathbb{1}: V_N \to V_N : v \to v$ αντιστοιχεί για $\{\bar{e}_j\} \equiv \{e_i\}$ στον μοναδιαίο πίνακα I_N, δηλαδή $(\mathbb{1}: e_i) = I_N$, αφού $\mathbb{1} e_i = e_i = \sum_{j=1}^{N} \delta_{ji}\, e_j$.

4) Η μηδενική γραμμική απεικόνιση $\mathbb{O}: V_N \to W_M : v \to 0$ αντιστοιχεί στο μηδενικό πίνακα, δηλαδή $(\mathbb{O}: e_i, \bar{e}_j) = \mathbb{O}_{M\times N}$.

$f: V_N \to W_M$ γραμμική , $\underline{V \ni v = \sum_{i=1}^{N} x^i e_i}$, $\underline{W \ni f(v) = \sum_{j=1}^{M} y^j \bar{e}_j}$

$$\underline{y^j = \sum_{i=1}^{N} a_{ji} x^i , \ j = 1, \dots, M \quad \Leftrightarrow \quad Y = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^M \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^N \end{pmatrix} = AX}$$

Πράγματι,

$$f(v) = f\left(\sum_{i=1}^{N} x^i e_i\right) = \sum_{i=1}^{N} x^i f(e_i) = \sum_{i=1}^{N} x^i \sum_{j=1}^{M} a_{ji} \bar{e}_j = \sum_{j=1}^{M} \left(\sum_{i=1}^{N} a_{ji} x^i\right) \bar{e}_j = \sum_{j=1}^{M} y^j \bar{e}_j$$

$$\Rightarrow \quad y^j = \sum_{i=1}^{N} a_{ji} x^i \quad \Rightarrow \quad Y = AX.$$

<u>Παρατήρηση</u> Με βάση το πώς ενεργεί η γραμμική απεικόνιση f στις συνιστώσες ενός διανύσματος , δηλαδή $X \xrightarrow{f} Y = AX$ μπορούμε να δείξουμε ότι ο πίνακας της $\lambda f + g$ είναι ο $\lambda A + B$ διαφορετικά από προηγουμένως:

$X \xrightarrow{f} AX$, $X \xrightarrow{g} BX$, άρα $X \xrightarrow{\lambda f + g} (\lambda A) X + BX = (\lambda A + B) X$

Ομοίως, μπορούμε να δείξαμε ότι η σύνθεση $g \circ f$ αντιστοιχεί στο BA: είναι $X \xrightarrow{f} Y = AX$, $Y \xrightarrow{g} Z = BY = B(AX) = (BA)X$, ενώ αν $X \xrightarrow{g \circ f} CA$ τότε $C = BA$.

Παράδειγμα

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (\alpha, \beta, \gamma) \to (\alpha+\beta-\gamma, \ 2\alpha+\gamma)$

Η f εύκολα φαίνεται ότι είναι γραμμική απεικόνιση.

α) Να βρεθεί ο πίνακας A της γραμμικής απεικόνισης στις (κανονικές) βάσεις $\{e_1, e_2, e_3\}$, $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$, $e_3=(0,0,1)$ τού $\mathbb{R}^3$ και $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$, $\bar{e}_1=(1,0)$, $\bar{e}_2=(0,1)$ τού $\mathbb{R}^2$

β) Ακόμα, για το διάνυσμα $v=(5,7,9)\in\mathbb{R}^3$ να βρεθούν οι συντεταγμένες (y^1, y^2) τού $f(v)$.

Λύση

α) Είναι $f(e_1) = f(1,0,0) = (1,2) = 1\cdot(1,0) + 2\cdot(0,1) = 1\cdot\bar{e}_1 + 2\cdot\bar{e}_2$

$f(e_2) = f(0,1,0) = (1,0) = 1\cdot(1,0) + 0\cdot(0,1) = 1\cdot\bar{e}_1 + 0\,\bar{e}_2$

$f(e_3) = f(0,0,1) = (-1,1) = (-1)(1,0) + 1\cdot(0,1) = (-1)\bar{e}_1 + 1\cdot\bar{e}_2$

Από την έκφραση $f(e_i) = \sum_{j=1}^{2} a_{ji}\,\bar{e}_j$, $i=1,2,3$ που ορίζει τον πίνακα της γραμμικής απεικόνισης στις βάσεις $\{e_i\}$, $\{\bar{e}_j\}$ παίρνουμε

$a_{11}=1$, $a_{21}=2$

$a_{12}=1$, $a_{22}=0$

$a_{13}=-1$, $a_{23}=1$

Άρα $A = (a_{ji})_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (f: e_i, \bar{e}_j)$

Εναλλακτικά, από την πινακωτή έκφραση $(f(e_1)\ f(e_2)\ f(e_3)) = (\bar{e}_1\ \bar{e}_2)A$ μπορούμε να βρούμε το A. Δηλαδή

$$(f(e_1)\ f(e_2)\ f(e_3)) = (\bar{e}_1+2\bar{e}_2 \quad \bar{e}_1 \quad -\bar{e}_1+\bar{e}_2) = (\bar{e}_1\ \bar{e}_2)\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ή ακόμα, ειδικά εδώ που έχουμε χώρους F^N (που είναι το 99,9..% των περιπτώσεων), πάλι από την πινακωτή έκφραση $(f(e_1)\ f(e_2)\ f(e_3)) = (\bar{e}_1\ \bar{e}_2)A$, θέτοντας $f(e_1)=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $f(e_2)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $f(e_3)=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, $\bar{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\bar{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ είναι

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(β) Μπορούμε να βρούμε τα (y^1, y^2) με 4 τρόπους

- $f(v) = f(5,7,9) = (5+7-9,\ 2\cdot 5+9) = (3, 19) = 3\cdot(1,0) + 19\cdot(0,1) = 3\,\bar{e}_1 + 19\,\bar{e}_2$

  Άρα, από την έκφραση $f(v) = \sum_{j=1}^{2} y^j\,\bar{e}_j$ είναι $y^1=3$, $y^2=19 \Rightarrow \begin{pmatrix}y^1\\y^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\19\end{pmatrix}$

15

- Είναι $v=(5,7,9) = 5(1,0,0)+7(0,1,0)+9(0,0,1) = 5e_1+7e_2+9e_3$

Άρα $f(v) = 5f(e_1)+7f(e_2)+9f(e_3) = 5(\bar{e}_1+2\bar{e}_2)+7\bar{e}_1+9(-\bar{e}_1+\bar{e}_2) =$

$= 3\bar{e}_1+19\bar{e}_2$

Άρα από $f(v) = \sum_{j=1}^{2} y^j \bar{e}_j$ είναι $y^1=3,\ y^2=19 \Rightarrow \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 19 \end{pmatrix}$.

- Είναι $v=(5,7,9) = 5(1,0,0)+7(0,1,0)+9(0,0,1) = 5e_1+7e_2+9e_3$

Άρα από $v=\sum_{i=1}^{3} x^i e_i$ είναι $x^1=5,\ x^2=7,\ x^3=9$ οι συντεταγμένες του v στη βάση $\{e_1,e_2,e_3\}$.

Από την έκφραση $y^j = \sum_{i=1}^{3} a_{ji} x^i$, $j=1,2$ παίρνουμε

$y^1 = \sum_{i=1}^{3} a_{1i} x^i = a_{11}x^1 + a_{12}x^2 + a_{13}x^3 = 1\cdot 5 + 1\cdot 7 + (-1)9 = 3$

$y^2 = \sum_{i=1}^{3} a_{2i} x^i = a_{21}x^1 + a_{22}x^2 + a_{23}x^3 = 2\cdot 5 + 0\cdot 7 + 1\cdot 9 = 19$

Άρα $\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 19 \end{pmatrix}$

- Είναι $v=(5,7,9) = 5(1,0,0)+7(0,1,0)+9(0,0,1) = 5e_1+7e_2+9e_3$

Από $v=\sum_{i=1}^{3} x^i e_i$ είναι $x^1=5,\ x^2=7,\ x^3=9$

Από $Y=AX$ είναι $\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 19 \end{pmatrix}$

Παράδειγμα

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (\alpha, \beta, \gamma) \to (\alpha+\beta-\gamma,\ 2\alpha+\gamma)$ (ίδιο με προηγουμένως)

α) Να βρεθεί ο πίνακας A' της f στις βάσεις

$\{e_1', e_2', e_3'\}$, $e_1' = (1,0,-1)$, $e_2' = (1,1,1)$, $e_3' = (1,0,0)$ του $\mathbb{R}^3$

και $\{\bar{e}_1', \bar{e}_2'\}$, $\bar{e}_1' = (0,1)$, $\bar{e}_2' = (1,0)$ του $\mathbb{R}^2$

β) Για το διάνυσμα $v = (5,7,9) \in \mathbb{R}^3$ να βρεθούν οι συντεταγμένες $\binom{y'^1}{y'^2}$ τού $f(v)$

Λύση

α) Είναι $f(e_1') = f(1,0,-1) = (2,1) = 1\cdot(0,1) + 2\cdot(1,0) = 1\cdot\bar{e}_1' + 2\cdot\bar{e}_2'$

$f(e_2') = f(1,1,1) = (1,3) = 3\cdot(0,1) + 1\cdot(1,0) = 3\bar{e}_1' + 1\cdot\bar{e}_2'$

$f(e_3') = f(1,0,0) = (1,2) = 2\cdot(0,1) + 1\cdot(1,0) = 2\cdot\bar{e}_1' + 1\cdot\bar{e}_2'$

Από $f(e_i) = \sum_{j=1}^{2} a_{ji}\bar{e}_j$, $i=1,2$ είναι

$a_{11}' = 1$, $a_{21}' = 2$

$a_{12}' = 3$, $a_{22}' = 1$

$a_{13}' = 2$, $a_{23}' = 1$

Άρα $A' = (a_{ji}')_{2\times3} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (f : e_i', \bar{e}_j')$

Εναλλακτικά, από $(f(e_1')\ f(e_2')\ f(e_3')) = (\bar{e}_1'\ \bar{e}_2')A'$ είναι

$(f(e_1')\ f(e_2')\ f(e_3')) = (\bar{e}_1' + 2\bar{e}_2' \quad 3\bar{e}_1' + \bar{e}_2' \quad 2\bar{e}_1' + \bar{e}_2') = (\bar{e}_1'\ \bar{e}_2')\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Ή ακόμα, επειδή τα $\bar{e}_j', f(e_i') \in \mathbb{R}^2$, από $(f(e_1')\ f(e_2')\ f(e_3')) = (\bar{e}_1'\ \bar{e}_2')A'$,

θέτοντας $f(e_1') = \binom{2}{1}$, $f(e_2') = \binom{1}{3}$, $f(e_3') = \binom{1}{2}$, $\bar{e}_1' = \binom{0}{1}$, $\bar{e}_2' = \binom{1}{0}$,

είναι $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A' \Leftrightarrow A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

β) Χρειάζεται προσοχή στο ότι το $v = (5,7,9)$ είναι το γεωμετρικό διάνυσμα (που τυχαίνει εδώ να δημιουργεί πιθανή σύγχυση επειδή είναι και τριάδα αριθμών), και δεν έχει καμία σχέση με την τριάδα των συντεταγμένων (x'^1, x'^2, x'^3) τού v στη βάση $\{e_1', e_2', e_3'\}$. Ή για να το πούμε αλλιώς, η τριάδα $(5,7,9)$ είναι οι συντεταγμένες τού v στην κανονική βάση.

- $f(v) = (5,7,9) = (5+7-9,\ 2\cdot 5+9) = (3,19) = 19(0,1) + 3(1,0) = 19\bar{e}_1' + 3\bar{e}_2'$.

Από $f(v) = \sum_{j=1}^{2} y'^j \bar{e}_j'$ είναι $y'^1 = 19$, $y'^2 = 3 \Rightarrow \begin{pmatrix} y'^1 \\ y'^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 3 \end{pmatrix}$

$v = (5,7,9) = -2(1,0,-1) + 7(1,1,1) + 0(1,0,0) = -2e_1' + 7e_2' + 0e_3'$

(τους παραπάνω συντελεστές $-2, 7, 0$ τους βρίσκουμε όπως θέλουμε, π.χ.

$e_1' = e_1 - e_3$, $e_2' = e_1 + e_2 + e_3$, $e_3' = e_1$, άρα

$e_1 = e_3'$, $e_2 = e_1' + e_2' - 2e_3'$, $e_3 = -e_1' + e_3'$, άρα

$v = (5,7,9) = 5e_1 + 7e_2 + 9e_3 = -2e_1' + 7e_2' + 0e_3'$)

Άρα $f(v) = -2f(e_1') + 7f(e_2') + 0f(e_3') = -2(\bar{e}_1' + 2\bar{e}_2') + 7(3\bar{e}_1' + \bar{e}_2') =$

$= 19\bar{e}_1' + 3\bar{e}_2' \Rightarrow y'^1 = 19$, $y'^2 = 3$

$v = (5,7,9) = -2e_1' + 7e_2' + 0e_3'$

Από $v = \sum_{i=1}^{3} x'^i e_i'$ είναι $x'^1 = -2$, $x'^2 = 7$, $x'^3 = 0$ (είναι οι συντεταγμένες του v στη βάση $\{e_1', e_2', e_3'\}$)

Από $y'^j = \sum_{i=1}^{3} a_{ji}' x'^i$, $j = 1, 2$ είναι

$y'^1 = \sum_{i=1}^{3} a_{1i}' x'^i = a_{11}' x'^1 + a_{12}' x'^2 + a_{13}' x'^3 = 1\cdot(-2) + 3\cdot 7 + 2\cdot 0 = 19$

$y'^2 = \sum_{i=1}^{3} a_{2i}' x'^i = a_{21}' x'^1 + a_{22}' x'^2 + a_{23}' x'^3 = 2\cdot(-2) + 1\cdot 7 + 1\cdot 0 = 3$

Άρα $(y'^1, y'^2) = (19, 3)$

- $v = (5,7,9) = -2e_1' + 7e_2' + 0e_3'$

$v = \sum_{i=1}^{3} x'^i e_i' \Rightarrow x'^1 = -2$, $x'^2 = 7$, $x'^3 = 0$

Από $Y' = A'X' \Rightarrow \begin{pmatrix} y'^1 \\ y'^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 3 \end{pmatrix}$

Παράδειγμα (Στροφή)

Στον $\mathbb{R}^N$ με το standard εσωτερικό γινόμενο, ονομάζεται "στροφή" κάθε γραμμική απεικόνιση $f: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ με $\|f(v)\| = \|v\|$, $v = (x_1, \dots, x_N)$, δηλαδή που διατηρεί το μέτρο (νόρμα) των διανυσμάτων.
(Υπενθυμίζουμε $\|v\| = \sqrt{v.v} = \sqrt{(x_1,\dots,x_N).(x_1,\dots,x_N)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}$)

Η διατήρηση της νόρμας για γραμμική απεικόνιση είναι ισοδύναμη με τη διατήρηση του εσωτερικού γινομένου: $f(v).f(u) = v.u$, $\forall\, v,u \in \mathbb{R}^N$
Πράγματι, $\|v+u\|^2 = (v+u).(v+u) = v.v + u.u + 2v.u = \|v\|^2 + \|u\|^2 + 2v.u \Rightarrow$ $2v.u = \|v+u\|^2 - \|v\|^2 - \|u\|^2$. Άρα $2f(v).f(u) = \|f(v)+f(u)\|^2 - \|f(v)\|^2 - \|f(u)\|^2 =$ $= \|f(v+u)\|^2 - \|f(v)\|^2 - \|f(u)\|^2$. Άρα, αν $\|f(v)\| = \|v\|, \forall v$ τότε $2f(v).f(u) = \|v+u\|^2 - \|v\|^2 - \|u\|^2$ $= 2v.u$, άρα $f(v).f(u) = v.u$. Αντίστροφα, αν $f(v).f(u) = v.u$, $\forall v,u$, τότε για $v=u$ είναι $f(v).f(v) = v.v \Rightarrow \|f(v)\|^2 = \|v\|^2 \Rightarrow \|f(v)\| = \|v\|$.

Παρατηρήσεις (1) Η παραπάνω έννοια της στροφής μπορεί να γενικευθεί στον $\mathbb{R}^N$ και για όχι standard εσωτερικά γινόμενα (δηλ. όχι θετικά ορισμένα), π.χ. στην ειδική σχετικότητα αντί των κοινών στροφών έχουμε τους Lorentz μετ/μούς.
(2) Η παραπάνω έννοια της στροφής μπορεί να γενικευθεί στον $\mathbb{C}^N$ για το δικό του standard εσωτερικό γινόμενο και να έχουμε αντί για τις κοινές στροφές τους unitary μετ/μούς.
(3) Μπορεί να δειχθεί ότι αν μία απεικόνιση $f: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ διατηρεί το μέτρο των διανυσμάτων (ως προς κάποιο εσωτερικό γινόμενο) και είναι συνεχής, τότε είναι γραμμική, δηλ. είναι στροφή. Αυτό από γεωμετρική άποψη είναι ευλογοφανές (όμως επειδή χρειάζεται την έννοια της συνέχειας ξεφεύγει από το μάθημα της γραμμικής άλγεβρας).

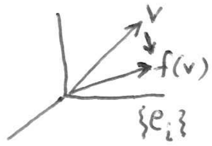
$$f \text{ στροφή} \Leftrightarrow A = (f : \overset{\text{κανονική}}{e_i}) \text{ ορθογώνιος}$$

Πράγματι, f στροφή $\Leftrightarrow f(v).f(v) = \underset{(\forall v)}{v.v} \Leftrightarrow \Big(\sum_{i=1}^{N} y^i e_i \cdot \sum_{j=1}^{N} y^j e_j = \sum_{i=1}^{N} x^i e_i \cdot \sum_{j=1}^{N} x^j e_j \Leftrightarrow$ $\sum_{i,j=1}^{N} y^i y^j e_i \cdot e_j = \sum_{i,j=1}^{N} x^i x^j e_i \cdot e_j \Leftrightarrow \sum_{i,j=1}^{N} y^i y^j \delta_{ij} = \sum_{i,j=1}^{N} x^i x^j \delta_{ij} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{N} (y^i)^2 = \sum_{i=1}^{N} (x^i)^2 \Leftrightarrow \Big) Y^T Y = X^T X \Leftrightarrow$
$(AX)^T (AX) = X^T X \Leftrightarrow X^T A^T A X = X^T X \Leftrightarrow \underset{(\forall X)}{X^T (A^T A - I) X = 0} \Leftrightarrow A^T A - I = 0 \Leftrightarrow A^T A = I \Leftrightarrow$
A ορθογώνιος.

(Τρομερό) Παράδειγμα (Σχέση "active" και "passive")

Πότε το active viewpoint ισοδυναμεί με το passive viewpoint?

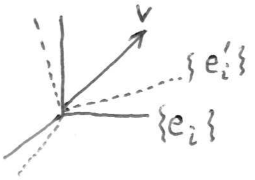
Active



Αν $f: V_N \to V_N$ (και $\{\bar{e}_j\}=\{e_i\}$ που είναι το πιο φυσιολογικό και σύνηθες για μετασχηματισμούς εντός ενός χώρου V_N), τότε $f(e_i)=\sum_{j=1}^{N} a_{ji}\, e_j$, και το τυχόν $v=\sum_{i=1}^{N} x^i e_i$ έχει

$$f(v)=\sum_{j=1}^{N} y^j e_j \quad , \quad y^j=\sum_{i=1}^{N} a_{ji}\, x^i \Leftrightarrow Y=\begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^N \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^N \end{pmatrix} = AX$$

Passive



Αν $\{e_i\}$, $\{e_j'\}$ δύο βάσεις τού V_N με $e_j'=\sum_{i=1}^{N} P_{ij}\, e_i$, τότε το τυχόν $v=\sum_{i=1}^{N} x^i e_i = \sum_{j=1}^{N} x'^j e_j'$ έχουμε δει στις αλλαγές βάσης ότι έχει

$$x'^j=\sum_{i=1}^{N} (P^{-1})_{ji}\, x^i \Leftrightarrow X'=\begin{pmatrix} x'^1 \\ \vdots \\ x'^N \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^N \end{pmatrix} = P^{-1}X$$

Επομένως, αν θέλω $Y=X'$ (δηλαδή "active" ισοδύναμο με "passive"), τότε πρέπει $P^{-1}=A$ και άρα $e_i'=\sum_{j=1}^{N}(A^{-1})_{ji}\, e_j$, $X'=AX=Y$.
(ήδη, σαν παρατήρηση, προκύπτει ότι ο A οφείλει να είναι αντιστρέψιμος για να υπάρχει η ισοδυναμία του με passive, δηλαδή η f ισομορφισμός).
Δηλαδή από τη σύγκριση των σχέσεων $f(e_i)=\sum_{j=1}^{N} a_{ji}\, e_j$ (active) και $e_i'=\sum_{j=1}^{N}(A^{-1})_{ji}\, e_j$ (passive), που ισχύουν για να έχουμε ισοδυναμία active-passive, προκύπτει ότι όχι μόνον $e_i' \neq f(e_i)$, αλλά μάλιστα τα e_i' πρέπει να στρίβουν ανάποδα από τα $f(e_i)$ [λόγω τού πίνακα A^{-1} αντί τού A] (θα δούμε συγκεκριμένο παράδειγμα στροφή σε δύο διαστάσεις πώς το active και τα $\{e_i'\}$ στρίβουν ανάποδα).

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ Η active και passive περιγραφή ενός διανύσματος είναι ισοδύναμες όταν η αλλαγή βάσης (passive) γίνεται αρκούντως ανάποδα από ότι η active δράση.

$f : V_N \to W_M$ γραμμική

"null" (=ιδιοτιμής μηδέν) ιδιοάνυσμα

$$\mathrm{Ker} f = \{ \sum_{i=1}^{N} x^i e_i \in V \ : \ AX = 0 \}$$

(δηλαδή ο Kerf συνίσταται από το 0 και τα null ιδιοανύσματα τού A - αν υπάρχουν)

Πράγματι, $v \in \mathrm{Ker} f \Leftrightarrow f(v) = 0 \Leftrightarrow f(\sum_{i=1}^{N} x^i e_i) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{N} x^i f(e_i) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{N} x^i \sum_{j=1}^{M} a_{ji} \bar{e}_j = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{M} \left(\sum_{i=1}^{N} a_{ji} x^i \right) \bar{e}_j = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{N} a_{ji} x^i = 0 \Leftrightarrow AX = 0.$$

$$\dim \mathrm{Ker} f = N - r(A)$$

Πράγματι, $\dim \mathrm{Ker} f = \dim \{ X \in F^N : AX = 0 \} = N - r(A)$

Παρατήρηση (1) Για $f : V_N \to V_N$ γραμμική είναι $\mathrm{Ker} f = 0 \Leftrightarrow |A| \neq 0$ και $\mathrm{Ker} f \neq 0 \Leftrightarrow |A| = 0$.

Πράγματι, $\mathrm{Ker} f = 0 \Leftrightarrow \dim \mathrm{Ker} f = 0 \Leftrightarrow r(A) = N \Leftrightarrow A$ αντιστρέψιμος $\Leftrightarrow |A| \neq 0$.

2) $f : V_N \to V_N$ ισομορφισμός $\Leftrightarrow |A| \neq 0$

Πράγματι, $f : V_N \to V_N$ ισομορφισμός $\Leftrightarrow f$ 1-1 $\Leftrightarrow \mathrm{Ker} f = 0 \Leftrightarrow |A| \neq 0$

$$\mathrm{Im} f = \{ \sum_{j=1}^{M} y^j \bar{e}_j \in W \ : \ Y \in \langle A^1, \dots, A^N \rangle \}$$

(δηλαδή το Imf συνίσταται από το στηλοχώρο τού A)

Πράγματι, αν $v = \sum_{i=1}^{N} x^i e_i$, τότε $f(v) = \sum_{j=1}^{M} y^j \bar{e}_j$, όπου $Y = AX =$

$$= (A^1 \dots A^N) \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^N \end{pmatrix} = x^1 A^1 + \dots + x^N A^N, \text{ άρα } Y \in \langle A^1, \dots, A^N \rangle.$$

$$r(f) = \dim \mathrm{Im} f = r(A)$$

Πράγματι, $\dim \mathrm{Im} f = \dim \{ Y \in F^M : Y \in \langle A^1, \dots, A^N \rangle \} = \dim \langle A^1, \dots, A^N \rangle = r(A)$

Παράδειγμα

Δίνουμε ένα παράδειγμα όπου $\mathrm{Im}f < \mathrm{Ker}f$.

Έστω η $f: V_3 \to W_3$ με πίνακα σε κάποιες βάσεις

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ο $\mathrm{Ker}f$ βρίσκεται από τη λύση της εξίσωσης $AX = 0$. Είναι $|A| = 0$, άρα $\mathrm{Ker}f \neq 0$. Μάλιστα, $r(A) = 1$, άρα αναμένουμε $\dim \mathrm{Ker}f = N - r(A) = 3 - 1 = 2$. Πράγματι,

$$AX = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x^3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x^3 = 0$$

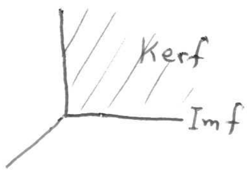
$$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ 0 \end{pmatrix} = x^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Άρα $\mathrm{Ker}f = \langle (1,0,0), (0,0,1) \rangle$

Το $\mathrm{Im}f$ συμπίπτει με το στηλόχωρο τού A και αναμένεται $\dim \mathrm{Im}f = r(A) = 1$. Πράγματι,

$$\mathrm{Im}f = \langle A^1, A^2, A^3 \rangle = \langle (0,0,0), (1,0,0) \rangle = \langle (1,0,0) \rangle$$

Τελικά $\mathrm{Im}f < \mathrm{Ker}f$



<u>Παράδειγμα</u>

Η $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ στις κανονικές βάσεις δίνεται από τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$ Να βρεθεί το $\ker f$ και $\operatorname{Im} f$. Το $v = (1,2,3,-1) \in \operatorname{Im} f$;

Ποιο το $f^{-1}(1,2,3,-1)$;

<u>Λύση.</u>

Ο πυρήνας είναι $\ker f = \{X \in \mathbb{R}^3 : AX = 0\}$

Θα λύσουμε το σύστημα $AX = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} x^1 + 2x^2 \quad &= 0 \\ -x^1 + x^2 + x^3 &= 0 \\ 3x^2 + x^3 &= 0 \\ 2x^1 + x^2 - x^3 &= 0 \end{aligned}\right\}$

Είναι $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\gamma}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} \underset{\gamma}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\gamma}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\gamma}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Είναι $r(A) = 2$, άρα $\dim \operatorname{Im} f = 2$, $\dim \ker f = N - r(A) = 3 - 2 = 1$

Επομένως, $AX = 0 \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} x^1 - \tfrac{2}{3}x^3 &= 0 \\ x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 &= 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} x^1 &= \tfrac{2}{3}x^3 \\ x^2 &= -\tfrac{1}{3}x^3 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}x^3 \\ -\frac{1}{3}x^3 \\ x^3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}x^3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Άρα $\underline{\ker f = \langle (2,-1,3) \rangle}$

Η εικόνα $\operatorname{Im} f = \langle A^1, A^2, A^3 \rangle =$ στηλόχωρος A.

$A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\gamma}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\gamma}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\gamma}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\gamma}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \quad A \underset{\sigma}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Άρα $\underline{\operatorname{Im} f = \langle (1,0,1,1), (0,1,1,-1) \rangle}$

Προφανώς, $v = (1,2,3,-1) = (1,0,1,1) + 2(0,1,1,-1) \Rightarrow v \in \operatorname{Im} f$.

Αν θέλω να το κάνω με χρήση πινάκων τότε έχω

$v \in \operatorname{Im} f \Leftrightarrow \langle A^1, A^2, A^3, v \rangle = \langle A^1, A^2, A^3 \rangle \Leftrightarrow B \equiv (A^1\ A^2\ A^3\ v^T) \underset{\sigma}{\sim} A$

Είναι $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$B^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \underset{\gamma}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 3 & -3 \end{pmatrix} \underset{\gamma}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 3 & -3 \end{pmatrix} \underset{\gamma}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\gamma}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \quad B \underset{\sigma}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\sigma}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\sigma}{\sim} A$

Άρα πράγματι $B \underset{\sigma}{\sim} A \Rightarrow \underline{v \in \operatorname{Im} f}$

Για να βρούμε το $f^{-1}(v)$ πρέπει να λύσουμε την εξίσωση $Y=AX$ ως προς X, όπου $Y=v^T=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\-1\end{pmatrix}$

Είναι $Y=AX \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1\\2\\3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&0\\-1&1&1\\0&3&1\\2&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^1\\x^2\\x^3\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{rl} x^1+2x^2 &=1\\ -x^1+x^2+x^3&=2\\ 3x^2+x^3&=3\\ 2x^1+x^2-x^3&=-1\end{array}\right\}$

Είναι $r(A)=2$, άρα μόνο δύο εκ των x^1, x^2, x^3 μπορούν να επιλυθούν.

Είναι $\begin{vmatrix}1&2\\-1&1\end{vmatrix}=1+2=3\neq 0$, άρα επιλύω τα x^1, x^2 ως προς x^3.

$$\left.\begin{array}{rl} x^1+2x^2&=1\\ -x^1+x^2&=2-x^3\end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x^1=\frac{1}{3}\begin{vmatrix}1&2\\2-x^3&1\end{vmatrix}=\frac{1}{3}(2x^3-3)\\ x^2=\frac{1}{3}\begin{vmatrix}1&1\\-1&2-x^3\end{vmatrix}=\frac{1}{3}(3-x^3)\end{array}$$

Άρα $(x^1, x^2, x^3)=\left(\frac{2}{3}x^3-1,\ 1-\frac{1}{3}x^3,\ x^3\right)=\left(\frac{2}{3}x^3,\ -\frac{1}{3}x^3,\ x^3\right)+(-1,1,0)=$

$$=(-1,1,0)+\frac{1}{3}x^3(2,-1,3)$$

$$\Rightarrow \underline{f^{-1}(1,2,3,-1)=(-1,1,0)+\langle(2,-1,3)\rangle}$$

σε συμφωνία με τη θεωρία $f^{-1}(u)=v+\mathrm{Ker}f$, αφού $f\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&0\\-1&1&1\\0&3&1\\2&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\-1\end{pmatrix}$

<u>Άλλος τρόπος λύσης του προβλήματος.</u>

Λύνουμε το σύστημα $AX=Y \Leftrightarrow \left.\begin{array}{rl} x^1+2x^2&=y^1\\ -x^1+x^2+x^3&=y^2\\ 3x^2+x^3&=y^3\\ 2x^1+x^2-x^3&=y^4\end{array}\right\}$

Είναι $(A|Y)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&y^1\\-1&1&1&y^2\\0&3&1&y^3\\2&1&-1&y^4\end{array}\right)\underset{\gamma}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&y^1\\0&3&1&y^1+y^2\\0&3&1&y^3\\0&-3&-1&y^4-2y^1\end{array}\right)\underset{\gamma}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&y^1\\0&3&1&y^1+y^2\\0&0&0&y^3-y^1-y^2\\0&0&0&y^4-y^1+y^2\end{array}\right)\underset{\gamma}{\sim}$

$\left(\begin{array}{l}\text{αν}\\ y^3-y^1-y^2=0\\ y^4-y^1+y^2=0\end{array}\right)\underset{\gamma}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&y^1\\0&1&1/3&\frac{1}{3}(y^1+y^2)\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\underset{\gamma}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-2/3&\frac{1}{3}(y^1-2y^2)\\0&1&1/3&\frac{1}{3}(y^1+y^2)\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$

Οι απαλείψεις είναι $\left.\begin{array}{l} y^1+y^2=y^3\\ y^1-y^2=y^4\end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} y^1=\frac{1}{2}(y^3+y^4)\\ y^2=\frac{1}{2}(y^3-y^4)\end{array}$

Το $\mathrm{Im}f=\{Y=AX\}$, άρα $Y=\begin{pmatrix}y^1\\y^2\\y^3\\y^4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}(y^3+y^4)\\\frac{1}{2}(y^3-y^4)\\y^3\\y^4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}y^3\\\frac{1}{2}y^3\\y^3\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{2}y^4\\-\frac{1}{2}y^4\\0\\y^4\end{pmatrix}=\frac{1}{2}y^3\begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{2}y^4\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\2\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \mathrm{Im}f=\langle(1,1,2,0),(1,-1,0,2)\rangle$

Προσθαφαιρώντας αυτά τα δύο διανύσματα παίρνουμε δύο νέα, δηλ.

$\underline{\mathrm{Im}f=\langle(1,0,1,1),(0,1,1,-1)\rangle}$ που συμπίπτει με προηγουμένως.

Το $\operatorname{Ker} f = \{ X \in \mathbb{R}^3 : AX = 0 \}$.

Είναι $AX = 0 \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x^1 - \frac{2}{3}x^3 = 0 \\ x^2 + \frac{1}{3}x^3 = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x^1 = \frac{2}{3}x^3 \\ x^2 = -\frac{1}{3}x^3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}x^3 \\ -\frac{1}{3}x^3 \\ x^3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}x^3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$,

άρα $\operatorname{Ker} f = \langle (2,-1,3) \rangle$

Για $y^1 = 1$, $y^2 = 2$, $y^3 = 3$, $y^4 = -1$ οι απαλοίφουσες ικανοποιούνται αφού $3-1-2=0$, $-1-1+2=0$, άρα πράγματι το $(1,2,3,-1) \in \operatorname{Im} f$.

Είναι $\left.\begin{array}{l} x^1 - \frac{2}{3}x^3 = \frac{1}{3}(y^1 - 2y^2) \\ x^2 + \frac{1}{3}x^3 = \frac{1}{3}(y^1 + y^2) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x^1 = \frac{1}{3}(y^1 - 2y^2) + \frac{2}{3}x^3 \\ x^2 = \frac{1}{3}(y^1 + y^2) - \frac{1}{3}x^3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x^1 = -1 + \frac{2}{3}x^3 \\ x^2 = 1 - \frac{1}{3}x^3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + \frac{2}{3}x^3 \\ 1 - \frac{1}{3}x^3 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}x^3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Άρα $f^{-1}(1,2,3,-1) = (-1,1,0) + \langle (2,-1,3) \rangle$

$\{e_i\}, \{e_i'\}$ βάσεις V_N , $\underline{e_i' = \sum_{k=1}^{N} P_{ki} e_k \Leftrightarrow (e_1' \dots e_N') = (e_1 \dots e_N) P}$ $\quad (\underline{X = P X'})$

$\{\bar{e}_j\}, \{\bar{e}_j'\}$ βάσεις W_M , $\underline{\bar{e}_j' = \sum_{\ell=1}^{M} Q_{\ell j} \bar{e}_\ell \Leftrightarrow (\bar{e}_1' \dots \bar{e}_M') = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_M) Q}$ $\quad (\underline{Y = Q Y'})$

$f: V_N \to W_M$ γραμμική, $A = (f: e_i, \bar{e}_j)$, $A' = (f: e_i', \bar{e}_j') \Rightarrow \boxed{A' = Q^{-1} A P}$

Πράγματι, $f(e_i') = f\left(\sum_{k=1}^{N} P_{ki} e_k\right) = \sum_{k=1}^{N} P_{ki} f(e_k) = \sum_{k=1}^{N} P_{ki} \sum_{j=1}^{M} a_{jk} \bar{e}_j =$

$$= \sum_{k=1}^{N} P_{ki} \sum_{j=1}^{M} a_{jk} \sum_{\ell=1}^{M} (Q^{-1})_{\ell j} \bar{e}_\ell' = \sum_{\ell=1}^{M} \left(\sum_{j=1}^{M} \sum_{k=1}^{N} (Q^{-1})_{\ell j} a_{jk} P_{ki} \right) \bar{e}_\ell' = \sum_{\ell=1}^{M} a_{\ell i}' \bar{e}_\ell'$$

$$\Rightarrow \quad a_{\ell i}' = \sum_{j=1}^{M} \sum_{k=1}^{N} (Q^{-1})_{\ell j} a_{jk} P_{ki} \quad \Rightarrow \quad A' = Q^{-1} A P$$

Εναλλακτικά, πιο εύκολα : $Y' = Q^{-1} Y = Q^{-1} A X = Q^{-1} A P X' = A' X' \Rightarrow A' = Q^{-1} A P$

<u>Παρατήρηση</u> Από το παραπάνω αποτέλεσμα $A' = Q^{-1} A P$, προκύπτει ότι οι πίνακες μιας γραμμικής απεικόνισης $f: V \to W$ ως προς διαφορετικά σύνολα βάσεων είναι ισοδύναμοι.

Παράδειγμα

Δίνεται η γραμμική απεικόνιση $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (\alpha, \beta, \gamma) \to f(\alpha,\beta,\gamma) = (\alpha+\beta-\gamma, 2\alpha+\gamma)$

- Στις βάσεις $\{e_1, e_2, e_3\}$, $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$

  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$, $\bar{e}_1 = (1,0)$, $\bar{e}_2 = (0,1)$

  έχει βρεθεί $A = (f: e_i, \bar{e}_j) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- Στις βάσεις $\{e_1', e_2', e_3'\}$, $e_1' = (1,0,-1)$, $e_2' = (1,1,1)$, $e_3' = (1,0,0)$

  $\{\bar{e}_1', \bar{e}_2'\}$, $\bar{e}_1' = (0,1)$, $\bar{e}_2' = (1,0)$

  έχει βρεθεί $A' = (f: e_i', \bar{e}_j') = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Θα βρούμε τους πίνακες αλλαγής βάσης από $\{e_i\} \to \{e_i'\}$, $\{\bar{e}_j\} \to \{\bar{e}_j'\}$ και θα δείξουμε ότι πράγματι $A' = Q^{-1}AP$

Είναι $e_1' = e_1 - e_3$, $e_2' = e_1 + e_2 + e_3$, $e_3' = e_1$

$$\Rightarrow (e_1' \; e_2' \; e_3') = (e_1 \; e_2 \; e_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Επίσης, $\bar{e}_1' = \bar{e}_2$, $\bar{e}_2' = \bar{e}_1$

$$\Rightarrow (\bar{e}_1' \; \bar{e}_2') = (\bar{e}_1 \; \bar{e}_2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Επομένως, πράγματι $Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A'.$$

$f : V_N \to V_N$ γραμμική "τελεστής"

$$f(e_i) = \sum_{j=1}^{N} a_{ji}\, e_j \iff (f(e_1) \dots f(e_N)) = (e_1 \dots e_N)\, A \quad , \quad A = (a_{ji})_{N\times N} = (f : e_i)$$

$$\text{Αν} \quad e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in F^N \Rightarrow f(e_i) = A^i, \quad A = (f(e_1) \dots f(e_N))$$

$$v = \sum_{i=1}^{N} x^i e_i, \quad f(v) = \sum_{j=1}^{N} y^j e_j \quad , \quad y^j = \sum_{i=1}^{N} a_{ji}\, x^i \iff Y = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^N \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^N \end{pmatrix} = AX$$

$$e_i' = \sum_{k=1}^{N} P_{ki}\, e_k \iff (e_1' \dots e_N') = (e_1 \dots e_N)\, P \qquad \begin{pmatrix} X = PX' \\ Y = PY' \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad A' = P^{-1} A P$$

<u>Παρατήρηση</u> Από το παραπάνω αποτέλεσμα $A' = P^{-1}AP$, προκύπτει ότι οι πίνακες μίας γραμμικής απεικόνισης $f : V \to V$ ως προς δύο διαφορετικές βάσεις είναι όμοιοι.

Άσκηση

Δίνονται τα διανύσματα $v_1=(1,1)$, $v_2=(1,0)$, $u_1=(-1,0)$, $u_2=(-1,2)$ του $\mathbb{R}^2$.
Να βρεθεί στην κανονική βάση ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης
$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ με $f(v_1)=u_1$, $f(v_2)=u_2$.

Λύση

Τα v_1, v_2 είναι Γρ. Ανεξ. αφού $|v_1\ v_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1\neq 0$, άρα δοθέντων των $f(v_1)=u_1$, $f(v_2)=u_2$ ορίζεται μονοσήμαντα μια γραμμική απεικόνιση f.

Είναι $v_1=(1,1)=(1,0)+(0,1)=e_1+e_2$, όπου $e_1=(1,0)$, $e_2=(0,1)$ η κανονική βάση

$v_2=(1,0)=e_1$

Άρα $\left.\begin{aligned} e_1 &= v_2 \\ e_2 &= v_1-v_2 \end{aligned}\right\}$

Είναι $f(e_1)=f(v_2)=u_2=(-1,2)=(-1)(1,0)+2\cdot(0,1)=-e_1+2e_2$

$f(e_2)=f(v_1-v_2)=f(v_1)-f(v_2)=u_1-u_2=(-1,0)-(-1,2)=(0,-2)=$

$=(-2)\cdot(0,1)=-2e_2$

Άρα, για τον $A=(f:e_i)$ είναι

$(f(e_1)\ f(e_2))=(e_1\ e_2)A \Leftrightarrow A=(f(e_1)\ f(e_2)) \Leftrightarrow A=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

Άλλος τρόπος λύσης

- Αν συμβολίσω $e_1'=v_1$, $e_2'=v_2$, $\bar{e}_1'=u_1$, $\bar{e}_2'=u_2$ τότε
$f(e_1')=\bar{e}_1'=1\cdot\bar{e}_1'+0\cdot\bar{e}_2'$, $f(e_2')=\bar{e}_2'=0\,\bar{e}_1'+1\,\bar{e}_2'$
Στη βάση $\{e_i'\}$, $\{\bar{e}_j'\}$ ο πίνακας $A'=(f:e_i',\bar{e}_j')$ της f είναι
$(f(e_1')\ f(e_2'))=(\bar{e}_1'\ \bar{e}_2')A' \Leftrightarrow (\bar{e}_1'\ \bar{e}_2')=(\bar{e}_1'\ \bar{e}_2')A' \Leftrightarrow A'=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Το ίδιο όπως έχουμε ξανακάνει προκύπτει και από την έκφραση
$f(e_i')=\sum_{j=1}^{2} a_{ji}'\bar{e}_j'$ όπου $a_{11}'=1$, $a_{21}'=0$, $a_{12}'=0$, $a_{22}'=1$, άρα
$A'=(f:e_i',\bar{e}_j')=(a_{ji}')_{2\times 2}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Το ίδιο από το ότι $f(e_i')$, $\bar{e}_j'\in\mathbb{R}^2$ με $f(e_1')=\bar{e}_1'=u_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f(e_2')=\bar{e}_2'=u_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, άρα
$(f(e_1')\ f(e_2'))=(\bar{e}_1'\ \bar{e}_2')A' \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}A' \Leftrightarrow A'=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Προχωράμε να βράμε τον πίνακα P αλλαγή βάσης από $\{e_1,e_2\}\to\{e_1',e_2'\}$ και Q από $\{\bar{e}_1,\bar{e}_2\}\to\{\bar{e}_1',\bar{e}_2'\}$ και μετά θα εφαρμόσουμε τη σχέση $A'=Q^{-1}AP$ και θα βράμε το A.

Είναι $(e_1' \ e_2') = (e_1 \ e_2) P$

με $e_1' = v_1 = (1,1) = e_1 + e_2$

$e_2' = v_2 = (1,0) = e_1$

Άρα $(e_1' \ e_2') = (e_1 + e_2 \ \ e_1) = (e_1 \ e_2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Άρα $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

[Ή ακόμη αφού $e_i', e_i \in \mathbb{R}^2$, άρα από

$(e_1' \ e_2') = (e_1 \ e_2) P \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P \Leftrightarrow P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$]

Επίσης $(\bar{e}_1' \ \bar{e}_2') = (\bar{e}_1 \ \bar{e}_2) Q$

με $\bar{e}_1' = u_1 = (-1, 0) = -e_1$

$\bar{e}_2' = u_2 = (-1, 2) = -e_1 + 2e_2$

Άρα $(\bar{e}_1' \ \bar{e}_2') = (-e_1 \ \ -e_1 + 2e_2) = (e_1 \ e_2) \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Άρα $Q = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

[Ή ακόμα αφού $\bar{e}_j, \bar{e}_j' \in \mathbb{R}^2$, άρα από

$(\bar{e}_1' \ \bar{e}_2') = (\bar{e}_1 \ \bar{e}_2) Q \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Q \Leftrightarrow Q = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Τελικά από $A' = Q^{-1} A P \Leftrightarrow A = Q A' P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} =$

$= - \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ σε συμφωνία με προηγουμένως