ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Σημειώσεις – Ιδιοτιμές

Κοφινάς Γιώργος

Τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών και Επικοινωνιακών Συστημάτων

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\varphi_A(x)$, $x \in F$ τού πίνακα $A \in M_{N\times N}(F)$ (5)

λέγεται το πολυώνυμο $\varphi_A(x) \equiv |A - xI|$ (και είναι προφανώς βαθμού N και μάλιστα με συντελεστή μεγιστοβαθμίου όρου $(-1)^N$, δηλ. $\varphi_A(x) = (-1)^N x^N + \alpha_{N-1}x^{N-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$)

π.χ. $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

$$\varphi_A(x) = |A - xI| = \begin{vmatrix} 2-x & 5 \\ 1 & -3-x \end{vmatrix} = (2-x)(-3-x) - 5 = x^2 + x - 11$$

π.χ. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

$$\varphi_A(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 4 & -3 \\ 0 & 3-x & 1 \\ 0 & 2 & -1-x \end{vmatrix} = (1-x)\begin{vmatrix} 3-x & 1 \\ 2 & -1-x \end{vmatrix} = (1-x)\left[(3-x)(-1-x) - 2\right] = -x^3 + 3x^2 + 3x - 5$$

Θεώρημα Cayley-Hamilton $\varphi_A(A) = 0$.

Κάθε τετραγωνικός πίνακας μηδενίζει το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο (ικανοποιεί τη χαρακτηριστική του εξίσωση).

Απόδειξη

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\varphi_A(x)$ είναι βαθμού N, άρα έχει τη μορφή $\varphi_A(x) = |A - xI_N| = \alpha_N x^N + \alpha_{N-1}x^{N-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$, $\alpha_i \in F$.

Για κάθε πίνακα $\mathcal{A}_{N\times N}$ ξέρουμε ότι ισχύει $\mathcal{A} \cdot \operatorname{adj}\mathcal{A} = |\mathcal{A}|\, I_N$. Ειδικά, για $\mathcal{A} = A - xI_N$ θα ισχύει $(A - xI_N)\cdot \operatorname{adj}(A - xI_N) = |A - xI_N|\, I_N$.

Κάθε στοιχείο τού πίνακα $\operatorname{adj}(A - xI_N)$ είναι, εκ τού ορισμού τού adj, ένα πολυώνυμο βαθμού $N-1$, άρα

$$\left[\operatorname{adj}(A - xI_N)\right]_{ij} = \left(x^{N-1}\beta_{ij}^{(N-1)} + x^{N-2}\beta_{ij}^{(N-2)} + \dots + x\beta_{ij}^{(1)} + \beta_{ij}^{(0)}\right)$$

$$= x^{N-1}\left(\beta_{ij}^{(N-1)}\right) + x^{N-2}\left(\beta_{ij}^{(N-2)}\right) + \dots + x\left(\beta_{ij}^{(1)}\right) + \left(\beta_{ij}^{(0)}\right)$$

$$\Rightarrow \operatorname{adj}(A - xI_N) = x^{N-1}B_{N-1} + x^{N-2}B_{N-2} + \dots + xB_1 + B_0, \quad B_i \in M_{N\times N}(F)$$

Άρα $(A - xI_N)\cdot\operatorname{adj}(A - xI_N) = (A - xI_N)\cdot(x^{N-1}B_{N-1} + x^{N-2}B_{N-2} + \dots + xB_1 + B_0) =$

$$= x^{N-1}AB_{N-1} + x^{N-2}AB_{N-2} + \dots + xAB_1 + AB_0 - x^N B_{N-1} - x^{N-1}B_{N-2} - \dots - x^2 B_1 - xB_0 =$$

$$= -x^N B_{N-1} + x^{N-1}(AB_{N-1} - B_{N-2}) + \dots + x(AB_1 - B_0) + AB_0$$

Επομένως, η σχέση $(A - xI_N)\cdot\operatorname{adj}(A - xI_N) = |A - xI_N|\, I_N \Rightarrow$

$$\Rightarrow -x^N B_{N-1} + x^{N-1}(AB_{N-1} - B_{N-2}) + \dots + x(AB_1 - B_0) + AB_0 = \alpha_N x^N I_N + \alpha_{N-1}x^{N-1}I_N + \dots + \alpha_1 x I_N + \alpha_0 I_N$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} -B_{N-1} & = & \alpha_N I_N \\ AB_{N-1} - B_{N-2} & = & \alpha_{N-1} I_N \\ \vdots & & \\ AB_1 - B_0 & = & \alpha_1 I_N \\ AB_0 & = & \alpha_0 I_N \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} -A^N B_{N-1} & = & \alpha_N A^N \\ A^N B_{N-1} - A^{N-1} B_{N-2} & = & \alpha_{N-1} A^{N-1} \\ \vdots & & \\ A^2 B_1 - AB_0 & = & \alpha_1 A \\ AB_0 & = & \alpha_0 I_N \end{array}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow 0 = \alpha_N A^N + \alpha_{N-1} A^{N-1} + \dots + \alpha_1 A + \alpha_0 I_N \Rightarrow 0 = \varphi_A(A).$$

π.χ. Ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ έχει

$$A^2 + A - 11I = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} - 11\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -1 & 14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9 & +5 \\ 1 & -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{O}$$

και $\varphi_A(x) = x^2 + x - 11$, άρα $\varphi_A(A) = 0$, δηλαδή πράγματι ο A ικανοποιεί τη χαρακτηριστική του εξίσωση

π.χ. Ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ έχει $\varphi_A(x) = -x^3 + 3x^2 + 3x - 5$ και είναι

$$\varphi_A(A) = -A^3 + 3A^2 + 3A - 5I = -\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}^3 + 3\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}^2 + 3\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= -\begin{pmatrix} 1 & 42 & 3 \\ 0 & 37 & 9 \\ 0 & 18 & 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 10 & 4 \\ 0 & 11 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 12 & -9 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 6 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{O},$$

άρα, πράγματι ο A ικανοποιεί τη χαρακτηριστική του εξίσωση.

<u>π.χ.</u> $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = ?$

Είναι $\varphi_A(x) = x^2 + x - 11$, άρα από το θεώρημα Cayley-Hamilton είναι

$\varphi_A(A) = 0 \Leftrightarrow A^2 + A - 11I = 0 \Leftrightarrow A^{-1}(A^2 + A - 11I) = 0 \Leftrightarrow A + I - 11A^{-1} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 11A^{-1} = A + I = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/11 & 5/11 \\ 1/11 & -2/11 \end{pmatrix}$.

Πράγματι, $A^{-1}A = \begin{pmatrix} 3/11 & 5/11 \\ 1/11 & -2/11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$.

<u>π.χ.</u> $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = ?$

Είναι $\varphi_A(x) = -x^3 + 3x^2 + 3x - 5$, άρα από θ. C-H είναι

$\varphi_A(A) = 0 \Leftrightarrow -A^3 + 3A^2 + 3A - 5I = 0 \Leftrightarrow A^{-1}(-A^3 + 3A^2 + 3A - 5I) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -A^2 + 3A + 3I - 5A^{-1} = 0 \Leftrightarrow 5A^{-1} = -A^2 + 3A + 3I \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5A^{-1} = -\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}^2 + 3\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -13 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2/5 & -13/5 \\ 0 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 2/5 & -3/5 \end{pmatrix}$

Πράγματι, $A^{-1}A = \dots = I$.

<u>Σχόλιο</u>

Είναι φανερό ότι το A^{-1} μπορεί να βρεθεί μέσω του θ. C-H αν στο $\varphi_A(x)$ ο σταθερός όρος $\alpha_0 \neq 0$, αφού τότε με πολ/σμό με A^{-1} εμφανίζεται ο όρος $\alpha_0 A^{-1}$. Αντίστροφα, αν ο σταθερός όρος $\alpha_0 = 0$ τότε $\nexists\, A^{-1}$.

Δηλαδή, <u>A αντιστρέψιμος $\Leftrightarrow \alpha_0 \neq 0$</u>

Πράγματι, $\varphi_A(x) = |A - xI| = \alpha_N x^N + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$

$\Rightarrow \varphi_A(x=0) = |A| = \alpha_0$

Άρα, $\alpha_0 \neq 0 \Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow A$ αντιστρέψιμος.

Πόρισμα

Κάθε (αναλυτική) συνάρτηση του $A \in M_{N\times N}(F)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $N-1$ ως προς A, δηλαδή $f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n A^n = c_{N-1}A^{N-1} + \dots + c_1 A + c_0 I$

Απόδειξη

Είναι $f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n A^n = \sigma_0 I + \sigma_1 A + \sigma_2 A^2 + \dots =$

$$= \sigma_0 I + \sigma_1 A + \dots + \sigma_{N-1} A^{N-1} + \sigma_N A^N + \sigma_{N+1} A^{N+1} + \dots$$

Αλλά, από το θ. C-H είναι $\varphi_A(A) = \alpha_N A^N + \alpha_{N-1} A^{N-1} + \dots + \alpha_1 A + \alpha_0 I = 0$ με $\alpha_N \neq 0$ (στην πραγματικότητα $\alpha_N = \pm 1$), άρα $A^N = \beta_{N-1} A^{N-1} + \dots + \beta_1 A + \beta_0 I$.

Άρα $A^{N+1} = \beta_{N-1} A^N + \beta_{N-2} A^{N-1} + \dots + \beta_1 A^2 + \beta_0 A$

$$= \beta_{N-1}(\beta_{N-1} A^{N-1} + \dots + \beta_1 A + \beta_0 I) + \beta_{N-2} A^{N-1} + \dots + \beta_1 A^2 + \beta_0 A$$

$$= \gamma_{N-1} A^{N-1} + \dots + \gamma_1 A + \gamma_0 I$$

Με τον ίδιο τρόπο προκύπτει ότι $A^p = \delta_{N-1} A^{N-1} + \dots + \delta_1 A + \delta_0 I, \quad \forall p \geq N \ (p \in \mathbb{N})$.

Άρα $f(A) = c_0 I + c_1 A + \dots + c_{N-1} A^{N-1}$

π.χ. Αν A είναι πίνακας 2×2, τότε $f(A) = c_0 I_2 + c_1 A$, και άρα για να υπολογισεί ο $f(A)$ (π.χ. $f(A) = e^A$) αρκεί να προσδιοριστούν τα c_0, c_1. Αυτό θα μπορέσουμε να το κάνουμε αργότερα όταν θα δούμε τις ιδιοτιμές του A και ότι αυτές μηδενίζουν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$\underline{\varphi_{B^{-1}AB}(x) = \varphi_A(x)}, \quad \underline{\varphi_{A^T}(x) = \varphi_A(x)}$$

Πράγματι,

$$\varphi_{B^{-1}AB}(x) = |B^{-1}AB - xI_N| = |B^{-1}(A - xI_N)B| = |B^{-1}|\,|A - xI_N|\,|B| =$$

$$= |B|^{-1}\,|B|\,\varphi_A(x) = \varphi_A(x)$$

Δηλαδή, όμοιοι πίνακες $(A, B^{-1}AB)$ έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο.

Επίσης, $\varphi_{A^T}(x) = |A^T - xI_N| = |(A - xI_N)^T| = |A - xI_N| = \varphi_A(x)$, δηλαδή οι ανάστροφοι πίνακες έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο.

Άσκηση Να δείξετε ότι οι πίνακες AB, BA έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο, δηλαδή $\varphi_{AB}(x) = \varphi_{BA}(x)$.

Λύση

$$\varphi_{AB}(x) = |AB - xI| = |A|^{-1}\,|AB - xI|\,|A| = |A^{-1}|\,|AB - xI|\,|A| =$$

$$= |A^{-1}(AB - xI)A| = |BA - xI| = \varphi_{BA}(x)$$

Άσκηση $\quad \varphi_{A^{-1}}(x) = \dfrac{(-x)^N}{|A|}\,\varphi_A\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Πράγματι, $\varphi_{A^{-1}}(x) = |A^{-1} - xI| = \dfrac{1}{|A|}\,|A|\,|A^{-1} - xI| = \dfrac{1}{|A|}\,|A(A^{-1} - xI)| =$

$$= \frac{1}{|A|}\,|I - xA| = \frac{(-1)^N}{|A|}\,|xA - I| = \frac{(-1)^N}{|A|}\,\left|x\left(A - \frac{1}{x}I\right)\right| = \frac{(-1)^N x^N}{|A|}\,\left|A - \frac{1}{x}I\right| = \frac{(-x)^N}{|A|}\,\varphi_A\left(\frac{1}{x}\right)$$

<u>Ορισμός</u> Ένα στοιχείο $\lambda \in F$ για το οποίο υπάρχει $X \in F^N$, $X \neq 0$ ώστε $AX = \lambda X \Leftrightarrow (A - \lambda I)X = 0$, $A \in M_{N \times N}(F)$, λέγεται ιδιοτιμή τού A. Το X λέγεται ιδιοάνυσμα τού A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ.

<u>λ ιδιοτιμή τού $A \Leftrightarrow \varphi_A(\lambda) = 0$</u>

(δηλαδή οι ιδιοτιμές τού A είναι οι ρίζες τού χαρακτηριστικού πολυωνύμου τού A)

Πράγματι λ ιδιοτιμή τού $A \Leftrightarrow \exists X \neq 0$, $(A - \lambda I)X = 0 \Leftrightarrow |A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \varphi_A(\lambda) = 0$

<u>Αλγεβρική πολλαπλότητα</u> της ιδιοτιμής λ λέγεται ο φυσικός αριθμός ρ $(1 \leq \rho \leq N)$ ώστε $\varphi_A(x) = (x - \lambda)^\rho f(x)$, $f(\lambda) \neq 0$

<u>Παρατήρηση</u>: Για $F = \mathbb{C}$ (το ίδιο ισχύει και σε κάθε άλλο αλγεβρικά κλειστό σώμα) υπάρχουν N ιδιοτιμές (κάποιες μπορεί να είναι διπλές, τριπλές, κλπ), άρα

$$\varphi_A(x) = (-1)^N (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_N) = (-1)^N (x - \lambda_1)^{\rho_1} \cdots (x - \lambda_\nu)^{\rho_\nu}, \quad 1 \leq \nu \leq N, \quad \rho_1 + \cdots + \rho_\nu = N$$

<u>π.χ.</u> $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Ποιες οι ιδιοτιμές τού A στο $F = \mathbb{R}$? και ποιες στο $F = \mathbb{C}$?

Είναι $\varphi_A(x) = |A - xI| = \begin{vmatrix} -x & 1 \\ -1 & -x \end{vmatrix} = x^2 + 1$

Επειδή η εξίσωση $\varphi_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 1 = 0$ δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$, άρα δεν υπάρχουν ιδιοτιμές στο $\mathbb{R}$.

Αντιθέτως, η εξίσωση $\varphi_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$ έχει ρίζες στο $\mathbb{C}$. Μάλιστα $\varphi_A(x) = (x - i)(x + i) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)$, άρα οι ιδιοτιμές λ_1, λ_2 είναι απλές $(\rho_1 = 1, \ \rho_2 = 1)$

<u>π.χ.</u> $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Ποιες οι ιδιοτιμές τού A στο $\mathbb{R}$ και ποιες στο $\mathbb{C}$?

Είναι $\varphi_A(x) = |A - xI| = \begin{vmatrix} 2-x & 1 \\ -1 & -x \end{vmatrix} = -x(2-x) + 1 = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$

Άρα ο A έχει μία ιδιοτιμή (είτε στο $\mathbb{R}$ είτε στο $\mathbb{C}$) την $\lambda = 1$ και αυτή είναι διπλή $(\rho = 2)$

<u>π.χ.</u> $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Ποιες οι ιδιοτιμές τού A στο $\mathbb{Q}$, στο $\mathbb{R}$, στο $\mathbb{C}$?

Είναι $\varphi_A(x) = |A - xI| = \begin{vmatrix} 1-x & 0 & 2 \\ 0 & -2-x & -1 \\ 2 & -1 & -x \end{vmatrix} = -x^3 - x^2 + 7x + 7 = -x^2(x+1) + 7(x+1) =$

$= -(x+1)(x^2 - 7)$

$= -(x+1)(x - \sqrt{7})(x + \sqrt{7})$

Η εξίσωση $\varphi_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 1)(\lambda - \sqrt{7})(\lambda + \sqrt{7}) = 0$ έχει στο $\mathbb{Q}$ τη λύση $\lambda = -1$, άρα μόνο μία ιδιοτιμή απλή $(\rho = 1)$ στο $\mathbb{R}$ και στο $\mathbb{C}$ τις λύσεις $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \sqrt{7}$, $\lambda_3 = -\sqrt{7}$, άρα τρείς ιδιοτιμές απλές $(\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 1)$

A αντιστρέψιμος $\Leftrightarrow$ $\nexists$ μηδενική ιδιοτιμή

Πράγματι, $\varphi_A(x) = |A - x I| = (-1)^N x^N + \alpha_{N-1} x^{N-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$

$$\Rightarrow \varphi_A(x=0) = |A| = \alpha_0$$

$$\Rightarrow \varphi_A(x) = (-1)^N x^N + \alpha_{N-1} x^{N-1} + \dots + \alpha_1 x + |A|$$

Είναι $\varphi_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (-1)^N \lambda^N + \alpha_{N-1} \lambda^{N-1} + \dots + \alpha_1 \lambda + |A| = 0$

Άρα

A όχι αντισρ. $\Leftrightarrow |A| = 0 \Leftrightarrow (-1)^N \lambda^N + \alpha_{N-1} \lambda^{N-1} + \dots + \alpha_1 \lambda = 0 \Leftrightarrow \exists$ ιδιοτιμή $\lambda = 0$.

Το αντιθετοαντίστροφο του παραπάνω αποτελέσματος δίνει A αντισρ. $\Leftrightarrow \nexists$ μηδενική ιδιοτιμή

(Η μία κατεύθυνση της παραπάνω ισοδυναμίας που λέει $\lambda = 0 \Rightarrow |A - 0I| = 0 \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow$ A όχι αντισρ. είναι προφανής. Η αντίθετη κατεύθυνση $|A| = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ δεν είναι προφανής και έτσι έγινε η παραπάνω απόδειξη).

$F = \mathbb{C} \Rightarrow \lambda_1 \cdots \lambda_N = |A| \quad , \quad \lambda_1 + \cdots + \lambda_N = tr(A) \equiv a_{11} + \cdots + a_{NN}$

Πράγματι, αφού $F = \mathbb{C}$, άρα $\exists$ ιδιοτιμές $\lambda_1, \ldots, \lambda_N \in \mathbb{C}$, άρα
$\varphi_A(x) = (-1)^N (x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_N) \Rightarrow \varphi_A(0) = (-1)^N (-\lambda_1) \cdots (-\lambda_N) \Rightarrow$
$|A - 0 \cdot I| = (-1)^N (-1)^N \lambda_1 \cdots \lambda_N \Rightarrow |A| = \lambda_1 \cdots \lambda_N$

Εξάλλου, $\varphi_A(x) = (-1)^N (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_N)$

$$= (-1)^N [x^N + x^{N-1}(-\lambda_1) + \cdots + x^{N-1}(-\lambda_N) + \text{όροι } x^{N-2} + \cdots]$$

$$= (-1)^N x^N + (-1)^{N+1} (\lambda_1 + \cdots + \lambda_N) x^{N-1} + \text{όροι } x^{N-2} + \cdots$$

Αλλά, αν $B \equiv A - xI = \begin{pmatrix} a_{11} - x & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} - x & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} - x \end{pmatrix}$, τότε

$$\varphi_A(x) = |A - xI| = |B| = \sum_{(i_1, \ldots, i_N)} sgn(i_1, \ldots, i_N)\, b_{i_1 1} \cdots b_{i_N N} =$$

$$= sgn(1, 2, \ldots, N)\, b_{11} \cdots b_{NN} + \text{όροι } x^{N-2} + \cdots$$

$$= (a_{11} - x)(a_{22} - x) \cdots (a_{NN} - x) + \text{όροι } x^{N-2} + \cdots$$

$$= (-x)^N + (-x)^{N-1} a_{11} + \cdots + (-x)^{N-1} a_{NN} + \text{όροι } x^{N-2} + \cdots$$

$$= (-1)^N x^N + (-1)^{N-1} (a_{11} + \cdots + a_{NN}) x^{N-1} + \text{όροι } x^{N-2} + \cdots$$

$$= (-1)^N x^N + (-1)^{N-1} tr(A)\, x^{N-1} + \text{όροι } x^{N-2} + \cdots$$

Τελικά $\lambda_1 + \cdots + \lambda_N = tr(A)$

Οι ιδιοτιμές τριγωνικού άνω (κάτω) πίνακα δίνονται από τα διαγώνια στοιχεία του

Πράγματι, αν $A=(a_{ij})$ τριγωνικός άνω (κάτω), τότε ο πίνακας $A-\lambda I=(a_{ij}-\lambda\delta_{ij})$ είναι επίσης τριγωνικός άνω (κάτω). Επομένως $|A-\lambda I|=(a_{11}-\lambda)\cdots(a_{NN}-\lambda)$. Άρα $|A-\lambda I|=0 \Leftrightarrow (a_{11}-\lambda)\cdots(a_{NN}-\lambda)=0$ $\Leftrightarrow \lambda=a_{11}$ ή … ή $\lambda=a_{NN}$.

Το αποτέλεσμα αυτό είναι σε συμφωνία με το ότι $\lambda_1\cdots\lambda_N=|A|$, $\lambda_1+\cdots+\lambda_N=tr(A)$ που ισχύουν για $F=\mathbb{C}$.

Ένας ερμιτιανός πίνακας $A_{N\times N}$ (άρα και πραγματικός συμμετρικός) έχει N πραγματικές ιδιοτιμές (όχι κατ' ανάγκη διακριτές)

Πράγματι, αν $A^+=A$ τότε $AX=\lambda X \Rightarrow (AX)^+=(\lambda X)^+ \Rightarrow X^+A^+=\lambda^* X^+ \Rightarrow$ $X^+A=\lambda^*X^+ \Rightarrow X^+AX=\lambda^*X^+X \Rightarrow \lambda X^+X=\lambda^*X^+X \Rightarrow (\lambda-\lambda^*)X^+X=0$.

Αλλά, αν $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_N\end{pmatrix}$ τότε $X^+X=(x_1^*,\dots,x_N^*)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_N\end{pmatrix}=x_1^*x_1+\cdots+x_N^*x_N=$ $=|x_1|^2+\cdots+|x_N|^2=\sum_{i=1}^N|x_i|^2$. Είναι $\sum_{i=1}^N|x_i|^2>0$ διότι αν $\sum_{i=1}^N|x_i|^2=0$ τότε $x_1=\cdots=x_N=0 \Rightarrow X=0$ άτοπο αφού το ιδιοάνυσμα $X\neq 0$. Άρα $X^+X>0$.

Τελικά $\lambda-\lambda^*=0 \Rightarrow \lambda=\lambda^* \Rightarrow \lambda\in\mathbb{R}$.

Εξάλλου, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\varphi_A(x)$ του A είναι N βαθμού, άρα η χαρακτηριστική εξίσωση $\varphi_A(\lambda)=0$ έχει N ρίζες στο $\mathbb{C}$ (όχι κατ' ανάγκη διακριτές). Άρα, αφού κάθεμία τέτοια ιδιοτιμή είναι πραγματική, ο A έχει N πραγματικές ιδιοτιμές (όχι κατ' ανάγκη διακριτές)//.

Το αποτέλεσμα αυτό είναι σε συμφωνία με τη σχέση $\lambda_1+\cdots+\lambda_N=tr(A)=a_{11}+\cdots+a_{NN}$, καθώς τα διαγώνια στοιχεία ερμιτιανού πίνακα είναι πραγματικά, άρα και $tr(A)\in\mathbb{R}$.

Απ' την άλλη, η σχέση $\lambda_1\cdots\lambda_N=|A|$ μας οδηγεί στο νέο συμπέρασμα ότι η ορίζουσα ερμιτιανού πίνακα είναι πραγματική.

Οι ιδιοτιμές unitary πίνακα (άρα και πραγματικού ορθογωνίου) έχουν μέτρο 1

Πράγματι, αν $A^+A=I$ τότε $AX=\lambda X \Rightarrow (AX)^+=(\lambda X)^+ \Rightarrow X^+A^+=\lambda^*X^+ \Rightarrow$ $(X^+A^+)(AX)=(\lambda^*X^+)(\lambda X) \Rightarrow X^+(A^+A)X=(\lambda^*\lambda)X^+X \Rightarrow X^+X=|\lambda|^2X^+X \Rightarrow$ $(|\lambda|^2-1)X^+X=0 \Rightarrow (|\lambda|^2-1)\sum_{i=1}^N|x_i|^2=0 \Rightarrow |\lambda|^2-1=0 \Rightarrow |\lambda|=1$.

Από τη σχέση $\lambda_1\cdots\lambda_N=\det A \Rightarrow |\lambda_1|\cdots|\lambda_N|=|\det A| \Rightarrow 1\cdots 1=|\det A| \Rightarrow |\det A|=1$ που ξέρουμε ότι ισχύει σε unitary πίνακες.

Ένας αντιερμιτιανός πίνακας $A_{N\times N}$ (άρα και πραγματικός αντισυμμετρικός) έχει N φανταστικές ιδιοτιμές (όχι κατ' ανάγκη διακριτές).

Πράγματι, αν $A^+ = -A$ τότε $AX = \lambda X \Rightarrow (AX)^+ = (\lambda X)^+ \Rightarrow X^+A^+ = \lambda^* X^+ \Rightarrow$
$-X^+A = \lambda^* X^+ \Rightarrow -X^+AX = \lambda^* X^+X \Rightarrow -X^+\lambda X = \lambda^* X^+X \Rightarrow (\lambda+\lambda^*)X^+X = 0$
$\Rightarrow (\lambda+\lambda^*)\sum_{i=1}^{N}|x_i|^2 = 0 \Rightarrow \lambda+\lambda^* = 0 \Rightarrow \mathrm{Re}\lambda = 0 \Rightarrow \lambda \in I$.

Εξάλλου, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\varphi_A(x)$ του A είναι N βαθμού, άρα η χαρακτηριστική εξίσωση $\varphi_A(\lambda)=0$ έχει N ρίζες στο $\mathbb{C}$ (όχι κατ' ανάγκη διακριτές). Άρα, αφού κάθεμια τέτοια ιδιοτιμή είναι φανταστική, ο A έχει N φανταστικές ιδιοτιμές (όχι κατ' ανάγκη διακριτές)

Το αποτέλεσμα αυτό είναι σε συμφωνία με τη σχέση $\lambda_1+\cdots+\lambda_N = tr(A)$, καθώς τα διαγώνια στοιχεία αντιερμιτιανού πίνακα είναι φανταστικοί αριθμοί, άρα και $tr(A)\in I$.
Για πραγματικό αντισυμμετρικό πίνακα είναι $\lambda_1+\cdots+\lambda_N = 0$, $\lambda_i \in I$, αφού τα διαγώνια στοιχεία $a_{ii}=0 \Rightarrow tr(A)=0$.

Οι πινακες $A, B^{-1}AB$ έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές (δηλαδή όμοιοι πίνακες "
έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές)

Πράγματι, $\varphi_{B^{-1}AB}(x) = \varphi_A(x) \Rightarrow |B^{-1}AB - xI| = |A - xI|$. Άρα

$|A-\lambda I| = 0 \Leftrightarrow |B^{-1}AB - \lambda I| = 0$

Οι πινακες A, A^T έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές (δηλαδή ανάστροφοι πίνακες
έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές)

Πράγματι, $\varphi_{A^T}(x) = \varphi_A(x) \Rightarrow |A^T - xI| = |A - xI|$. Άρα

$|A-\lambda I| = 0 \Leftrightarrow |A^T - \lambda I| = 0$

Οι πινακες A, A^{-1} έχουν αντίστροφες ιδιοτιμές (δηλαδή αντίστροφοι πίνακες
έχουν αντίστροφες ιδιοτιμές)

Πράγματι, είναι $AX = \lambda X \Rightarrow A^{-1}AX = \lambda A^{-1}X \Rightarrow A^{-1}X = \frac{1}{\lambda}X$.

<u>Ορισμός</u> Ιδιόχωρος V_λ της ιδιοτιμής λ τού πίνακα $A_{N\times N}$ λέγεται ο υπόχωρος $V_\lambda = \{X \in F^N : AX = \lambda X\} \leq F^N$.

(Κάθε τέτοιο $X \in V_\lambda$, $X \neq 0$ είναι ιδιοάνυσμα της ιδιοτιμής λ.)

Είναι πράγματι, $V_\lambda \leq F^N$, διότι αν $X_1, X_2 \in V_\lambda$ τότε $AX_1 = \lambda X_1$, $AX_2 = \lambda X_2$, άρα $A(\mu X_1 + X_2) = \mu AX_1 + AX_2 = \mu\lambda X_1 + \lambda X_2 = \lambda(\mu X_1 + X_2) \Rightarrow \mu X_1 + X_2 \in V_\lambda$.

<u>Γεωμετρική πολλαπλότητα</u> της ιδιοτιμής λ λέγεται ο φυσικός αριθμός $m \equiv \dim V_\lambda$.

Επειδή $\varphi_A(\lambda) = |A - \lambda I| = 0 \Rightarrow r(A-\lambda I) < N \Rightarrow m = N - r(A-\lambda I) > 0 \Rightarrow m \geq 1$.

Αργότερα θα δείξουμε ότι $1 \leq m \leq \rho$, δηλαδή ότι η γεωμετρική πολλαπλότητα μιας ιδιοτιμής είναι το πολύ ίση με την αριθμητική της πολλαπλότητα.

<u>$\lambda_1, \dots, \lambda_\nu$ διακριτές $\Rightarrow m_1 + \dots + m_\nu \leq N$</u>, αφού πάντα $\rho_1 + \dots + \rho_\nu \leq N$ και $m_1 + \dots + m_\nu \leq \rho_1 + \dots + \rho_\nu \leq N$

<u>$AX_i = \underbrace{\lambda_i}_{\text{διακριτές}} X_i$, $i = 1, \dots, \nu \Rightarrow \{X_1, \dots, X_\nu\}$ Γρ. Ανεξ., $V_{\lambda_1} + \dots + V_{\lambda_\nu}$ ευθύ</u>

(δηλαδή τα ιδιοανύσματα διαφορετικών ιδιοτιμών είναι Γρ. Ανεξ.)

Πράγματι, αν $\mu_1 X_1 + \dots + \mu_\nu X_\nu = 0$ θα δείξουμε ότι $\mu_1 = \dots = \mu_\nu = 0$.

Υποθέτουμε ότι υπάρχει κάποιο από τα μ_i που δεν είναι μηδέν, π.χ. $\mu_1 \neq 0$, και θα καταλήξουμε σε άτοπο.

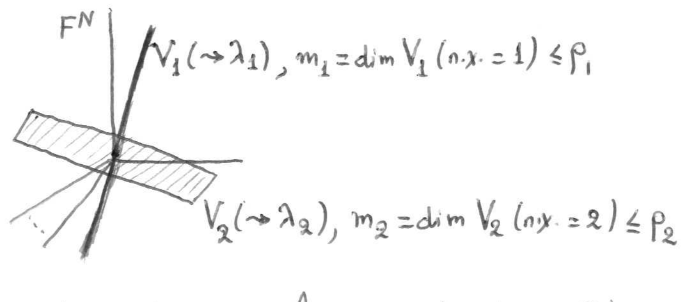
Είναι
$$\begin{aligned}(A-\lambda_\nu I)(\mu_1 X_1 + \dots + \mu_\nu X_\nu) &= \mu_1(A-\lambda_\nu I)X_1 + \dots + \mu_{\nu-1}(A-\lambda_\nu I)X_{\nu-1} + \mu_\nu(A-\lambda_\nu I)X_\nu \\ &= \mu_1(\lambda_1-\lambda_\nu)X_1 + \dots + \mu_{\nu-1}(\lambda_{\nu-1}-\lambda_\nu)X_{\nu-1} + \mu_\nu(\lambda_\nu-\lambda_\nu)X_\nu \\ &= \mu_1(\lambda_1-\lambda_\nu)X_1 + \dots + \mu_{\nu-1}(\lambda_{\nu-1}-\lambda_\nu)X_{\nu-1}\end{aligned}$$

Όμοια $(A-\lambda_{\nu-1}I)(A-\lambda_\nu I)(\mu_1 X_1 + \dots + \mu_\nu X_\nu) = \mu_1(\lambda_1-\lambda_\nu)(\lambda_1-\lambda_{\nu-1})X_1 + \dots + \mu_{\nu-2}(\lambda_{\nu-2}-\lambda_\nu)(\lambda_{\nu-2}-\lambda_{\nu-1})X_{\nu-2}$

$\vdots$

$(A-\lambda_2 I)\cdots(A-\lambda_\nu I)(\mu_1 X_1 + \dots + \mu_\nu X_\nu) = \mu_1(\lambda_1-\lambda_\nu)(\lambda_1-\lambda_{\nu-1})\cdots(\lambda_1-\lambda_2)X_1$

Άρα $\mu_1(\lambda_1-\lambda_\nu)(\lambda_1-\lambda_{\nu-1})\cdots(\lambda_1-\lambda_2)X_1 = 0$ άτοπο διότι $\mu_1 \neq 0$, $X_1 \neq 0$, $\lambda_1 \neq \lambda_2, \dots, \lambda_1 \neq \lambda_\nu$.



Άρα, δοθέντος ενός πίνακα $A_{N\times N}$ έχουμε διάφορους χαρακτηριστικούς υπόχωρους του (ιδιόχωρους) μέσα στο F^N, οι οποίοι είναι Γρ. Ανεξ. και θα τους μελετήσουμε περαιτέρω. Ο γραμμόχωρος και ο στηλόχωρος τού A που επίσης είναι στο F^N δεν σχετίζονται άμεσα με τους ιδιόχωρους τού A (ωστόσο μεταξύ των δύο, γραμμόχωρου–στηλόχωρου, ο στηλόχωρος σχετίζεται περισσότερο με τους ιδιόχωρους από ότι ο γραμμόχωρος).

Για ειδικής μορφής πίνακες, ερμιτιανούς, unitary,... ισχύουν περαιτέρω πιο ειδικά πράγματα πέραν της Γρ. Ανεξ. των ιδιόχωρων.

$$\underline{A^+ = A, \quad AX_i = \lambda_i X_i, \; AX_j = \lambda_j X_j, \; \lambda_i \neq \lambda_j \quad \Rightarrow \quad X_i^+ X_j = 0}$$

(δηλαδή για ερμιτιανό -άρα και για πραγματικό συμμετρικό - πίνακα, οι ιδιόχωροι διαφορετικών ιδιοτιμών είναι μεταξύ τους κάθετοι ως προς το standard εσωτερικό γινόμενο).

Πράγματι, έστω $A^+ = A$. Οι ιδιοτιμές του ως γνωστόν είναι πραγματικές. Έστω $AX_i = \lambda_i X_i$, $AX_j = \lambda_j X_j$, $\lambda_i \neq \lambda_j$.

Είναι $AX_i = \lambda_i X_i \Rightarrow (AX_i)^+ = (\lambda_i X_i)^+ \Rightarrow X_i^+ A^+ = \lambda_i^* X_i^+ \Rightarrow X_i^+ A = \lambda_i X_i^+ \Rightarrow$
$X_i^+ A X_j = \lambda_i X_i^+ X_j \Rightarrow X_i^+ \lambda_j X_j = \lambda_i X_i^+ X_j \Rightarrow (\lambda_i - \lambda_j) X_i^+ X_j = 0 \Rightarrow X_i^+ X_j = 0.$

Προφανώς στην περίπτωση συμμετρικού πραγματικού πίνακα, η σχέση καθετότητας των ιδιόχωρων γράφεται ως $X_i^T X_j = 0$, $\lambda_i \neq \lambda_j$.

$$\underline{A^+ A = I, \quad AX_i = \lambda_i X_i, \; AX_j = \lambda_j X_j, \; \lambda_i \neq \lambda_j \quad \Rightarrow \quad X_i^+ X_j = 0}$$

(δηλαδή για unitary - άρα και για πραγματικό ορθογώνιο - πίνακα, οι ιδιόχωροι διαφορετικών ιδιοτιμών είναι μεταξύ τους κάθετοι ως προς το standard εσωτερικό γινόμενο).

Πράγματι, έστω $A^+ A = I$. Οι ιδιοτιμές του ως γνωστόν έχουν μέτρο 1. Έστω $AX_i = \lambda_i X_i$, $AX_j = \lambda_j X_j$, $\lambda_i \neq \lambda_j$.

Είναι $AX_i = \lambda_i X_i \Rightarrow (AX_i)^+ = (\lambda_i X_i)^+ \Rightarrow X_i^+ A^+ = \lambda_i^* X_i^+ \Rightarrow$
$(X_i^+ A^+)(AX_j) = (\lambda_i^* X_i^+)(\lambda_j X_j) \Rightarrow X_i^+ (A^+ A) X_j = \lambda_i^* \lambda_j (X_i^+ X_j) \Rightarrow$
$X_i^+ I X_j = \lambda_i^* \lambda_j (X_i^+ X_j) \Rightarrow (\lambda_i^* \lambda_j - 1) X_i^+ X_j = 0.$

Είναι $\lambda_i^* \lambda_j - 1 \neq 0$. Πράγματι, αν $\lambda_i^* \lambda_j - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_i^* \lambda_j = 1$. Επειδή $|\lambda_i| = 1 \Rightarrow \lambda_i \neq 0$. Άρα $\lambda_i \lambda_i^* \lambda_j = \lambda_i \Rightarrow |\lambda_i|^2 \lambda_j = \lambda_i \Rightarrow 1 \cdot \lambda_j = \lambda_i \Rightarrow \lambda_j = \lambda_i$ άτοπο.

Άρα τελικά $X_i^+ X_j = 0$.

Προφανώς, στην περίπτωση ορθογώνιου πραγματικού πίνακα, η σχέση καθετότητας των ιδιόχωρων γράφεται ως $X_i^T X_j = 0$, $\lambda_i \neq \lambda_j$.

Αν ο $A_{N\times N}$ έχει N διακριτές ιδιοτιμές, τότε όλοι οι ιδιόχωροι του είναι μονοδιάστατοι

Πράγματι, έστω ότι ο A έχει N διακριτές ιδιοτιμές $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ και έστω ότι οι αντίστοιχοι ιδιόχωροι είναι οι $V_1, \dots, V_N$.

Είναι $\varphi_A(x) = (-1)^N (x-\lambda_1) \cdots (x-\lambda_N)$, δηλαδή όλες οι ιδιοτιμές είναι απλές, δηλαδή $\rho_i = 1$, $i = 1, \dots, N$.

Αλλά ισχύει $m_i \leq \rho_i \Rightarrow m_i \leq 1 \Rightarrow m_i = 1$, $i=1,\dots,N$ (δεν είναι δυνατόν $m_i = 0$ αφού θα ήταν $X=0$). Τελικά $\dim V_i = 1$, $i = 1, \dots, N$

Το πραγματικό και φανταστικό μέρος μιγαδικού ιδιοανύσματος πραγματικού συμμετρικού πίνακα είναι επίσης ιδιοανύσματα (της αυτής ιδιοτιμής) 15

Πράγματι, έστω ο πραγματικός συμμετρικός πίνακας A. Οι ιδιοτιμές του λ ως γνωστόν είναι πραγματικές. Έστω $X \in \mathbb{C}$ μιγαδικό ιδιοάνυσμα τού A ιδιοτιμής λ, δηλαδή $AX = \lambda X$.

Είναι $X = \chi + i\psi$, $\chi, \psi \in \mathbb{R}$, άρα $AX = A(\chi + i\psi) = A\chi + iA\psi$, $\lambda X = \lambda(\chi + i\psi) = \lambda\chi + i\lambda\psi$.

Άρα η εξίσωση $AX = \lambda X \Leftrightarrow A\chi + iA\psi = \lambda\chi + i\lambda\psi$. Επειδή $A\chi, A\psi, \lambda\chi, \lambda\psi \in \mathbb{R}$, άρα $A\chi = \lambda\chi$, $A\psi = \lambda\psi$. Άρα χ, ψ είναι πραγματικά ιδιοανύσματα τού A (της ίδιας ιδιοτιμής λ με του X).

Παράδειγμα

$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοανύσματα τού A.

Οι ιδιοτιμές βρίσκονται ως ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, δηλαδή

$$|A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm 2$$

Είναι δύο διακριτές ιδιοτιμές, άρα αναμένονται 2 μονοδιάστατοι (και ανεξάρτητοι) υπόχωροι. Ακόμα εδώ ειδικά επειδή $A^T = A$ οι ιδιόχωροι αναμένονται κάθετοι (και καλώς βγήκαν οι ιδιοτιμές πραγματικές).

Είναι $AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2y \\ 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} 2y = \lambda x \\ 2x = \lambda y \end{matrix}\right\}$

- για $\lambda_1 = 2$ είναι $\left.\begin{matrix} 2y = 2x \\ 2x = 2y \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow y = x \Leftrightarrow X_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

  Άρα $V_1 = \langle (1,1) \rangle$

- για $\lambda_2 = -2$ είναι $\left.\begin{matrix} 2y = -2x \\ 2x = -2y \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow y = -x \Leftrightarrow X_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

  Άρα $V_2 = \langle (1,-1) \rangle$

(Είναι $X_1 \cdot X_2 = (1,1) \cdot (1,-1) = 1 - 1 = 0$, άρα $V_1 \perp V_2$)

Στους παραπάνω ιδιόχωρους π.χ. $V_1 = \langle (1,1) \rangle = \{x(1,1)\}$ πρέπει να προσδιοριστεί κανονικά αν $x \in \mathbb{R} = F$ ή $x \in \mathbb{C} = F$, δηλαδή $\{x(1,1),\ x \in \mathbb{R}\}$ ή $\{x(1,1),\ x \in \mathbb{C}\}$. Οι ιδιοτιμές είναι πραγματικές, οπότε $\lambda \in \mathbb{R}$ και $\lambda \in \mathbb{C}$.

Παράδειγμα

$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοανύσματα του A.

Είναι $\varphi_A(x) = |A - xI| = \begin{vmatrix} 1-x & 4 \\ 2 & 3-x \end{vmatrix} = (1-x)(3-x) - 8 = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = (\lambda-5)(\lambda+1)$.

Άρα $\varphi_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (\lambda-5)(\lambda+1) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 5, \ \lambda_2 = -1$.

Επειδή υπάρχουν 2 διακριτές ιδιοτιμές, αναμένονται 2 μονοδιάστατοι (ανεξάρτητοι) ιδιόχωροι.

Είναι $AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x + 4y = \lambda x \\ 2x + 3y = \lambda y \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} (1-\lambda)x + 4y = 0 \\ 2x + (3-\lambda)y = 0 \end{matrix}\right\}$

- για $\lambda_1 = 5$ είναι $\left.\begin{matrix} -4x + 4y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow y = x \Leftrightarrow X_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

  Άρα $V_1 = \langle (1,1) \rangle$

- για $\lambda_2 = -1$ είναι $\left.\begin{matrix} 2x + 4y = 0 \\ 2x + 4y = 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow x + 2y = 0 \Leftrightarrow x = -2y \Leftrightarrow X_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

  Άρα $V_2 = \langle (-2,1) \rangle$.

Πράγματι, οι υπόχωροι V_1, V_2 είναι Γρ. ανεξάρτ., αφού τα $(1,1), (-2,1)$ είναι Γρ. Ανεξ., αφού $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 = 3 \neq 0$.

Όπως και προηγουμένως, θα πρέπει να προσδιορισθεί κανονικά αν $F = \mathbb{R}$ ή $F = \mathbb{C}$. Αν όμως, όπως εδώ, είναι ο πίνακας πραγματικός και οι ιδιοτιμές πραγματικές μπορούμε να το αφήσουμε και ασαφές, αφού και τα δύο $F = \mathbb{R}$, $F = \mathbb{C}$ είναι αποδεκτά. Δηλαδή

$V_1 = \langle (1,1) \rangle = \{ x(1,1), \ x \in \mathbb{R} \}$ ή $V_1 = \langle (1,1) \rangle = \{ x(1,1), \ x \in \mathbb{C} \}$

Παράδειγμα

$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοανύσματα τού A.

Είναι $|A-\lambda I|=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2+1=0 \Leftrightarrow \lambda = \pm i$

Είναι δύο διακριτές ιδιοτιμές, άρα αναμένονται 2 μονοδιάστατοι (ανεξ.) ιδιόχωροι. Ακόμη εδώ ειδικά επειδή $A^T = -A$ οι ιδιοτιμές καλώς βγήκαν φανταστικές.

Είναι $AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{x,y\in\mathbb{C}}{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} -y = \lambda x \\ x = \lambda y \end{matrix}\right\}$

- για $\lambda_1 = i$ είναι $\left.\begin{matrix} -y = ix \\ x = iy \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow y = -ix \Leftrightarrow X_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -ix \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, x \in \mathbb{C}$

  Άρα $V_1 = \langle (1,-i) \rangle = \{ x(1,-i) , x \in \mathbb{C} \}$

- για $\lambda_2 = -i$ είναι $\left.\begin{matrix} -y = -ix \\ x = -iy \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow y = ix \Leftrightarrow X_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ ix \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, x \in \mathbb{C}$

  Άρα $V_2 = \langle (1,i) \rangle = \{ x(1,i), x \in \mathbb{C} \}$

Εδώ είναι φανερό ότι αν περιοριζόμασταν στο $F=\mathbb{R}$ τότε δεν θα υπήρχαν ιδιοτιμές. Στο $F=\mathbb{C}$ υπάρχουν οι ιδιοτιμές $\pm i$, άρα καλώς τα $x \in \mathbb{C}$.

Παράδειγμα

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοανύσματα του A.

Είναι $\varphi_A(x) = |A - xI| = \begin{vmatrix} 1-x & 1 & -1 \\ 0 & 1-x & 0 \\ 1 & 0 & 1-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 0 \\ 0 & 1-x & 1-x \\ 1 & 0 & 1-x \end{vmatrix} = (1-x) \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 0 \\ 0 & 1-x & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$$= (1-x)\left[(-1)(-1) + 1\cdot(1-x)^2\right] = (1-x)\left[1 + (1-x)^2\right] =$$

$$= (1-x)(x^2 - 2x + 2) = -(x-1)\left[x-(1+i)\right]\left[x-(1-i)\right]$$

$\varphi_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 1+i, \quad \lambda_3 = 1-i$

Καταρχήν, καλώς βγήκαν οι μιγαδικές ιδιοτιμές συζυγείς, αφού πρόκειται για χαρακτηριστικό πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές.
Επειδή υπάρχουν 3 διακριτές ιδιοτιμές, αναμένονται 3 μονοδιάστατοι (ανεξάρτητοι) υπόχωροι.

Είναι $AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+y-z \\ y \\ x+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x+y-z = \lambda x \\ y = \lambda y \\ x + z = \lambda z \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} (1-\lambda)x + y - z = 0 \\ (1-\lambda)y = 0 \\ x + (1-\lambda)z = 0 \end{array}\right\}$$

- για $\lambda_1 = 1$ είναι $\left.\begin{array}{l} y - z = 0 \\ x = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} y = z \\ x = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow X_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

  Άρα $V_1 = \langle X_1 \rangle = \langle (0,1,1) \rangle$

- για $\lambda_2 = 1+i$ είναι $\left.\begin{array}{l} -ix + y - z = 0 \\ -iy = 0 \\ x - iz = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} y = 0 \\ z = -ix \end{array}\right\} \Leftrightarrow X_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -ix \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix}$

  Άρα $V_2 = \langle X_2 \rangle = \langle (1,0,-i) \rangle$

- για $\lambda_3 = 1-i$ είναι $\left.\begin{array}{l} ix + y - z = 0 \\ iy = 0 \\ x + iz = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} z = ix \\ y = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow X_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ ix \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}$

  Άρα $V_3 = \langle X_3 \rangle = \langle (1,0,i) \rangle$

Εδώ, αν $F = \mathbb{R}$, υπάρχει μόνο η $\lambda_1 = 1$, άρα $V_1 = \langle (0,1,1) \rangle = \{ x(0,1,1),\ x \in \mathbb{R} \}$

αν $F = \mathbb{C}$, υπάρχουν η $\lambda_1 = 1$ με $V_1 = \langle (0,1,1) \rangle = \{ x(0,1,1),\ x \in \mathbb{C} \}$

η $\lambda_2 = 1+i$ με $V_2 = \langle (1,0,-i) \rangle = \{ x(1,0,-i),\ x \in \mathbb{C} \}$

η $\lambda_3 = 1-i$ με $V_3 = \langle (1,0,i) \rangle = \{ x(1,0,i),\ x \in \mathbb{C} \}$

Παράδειγμα

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοανύσματα.

Είναι $\varphi_A(x) = |A - xI| = \begin{vmatrix} 2-x & 1 & 0 \\ 0 & 1-x & -1 \\ 0 & 2 & 4-x \end{vmatrix} = (2-x)\begin{vmatrix} 1-x & -1 \\ 2 & 4-x \end{vmatrix} = (2-x)(x^2-5x+6)$

$= (2-x)(x-2)(x-3) = -(x-2)^2(x-3)$

Άρα $\varphi_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 2$ (διπλή $\rho_1 = 2$), $\lambda_2 = 3$ (απλή $\rho_2 = 1$)

Είναι $AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2x+y \\ y-z \\ 2y+4z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} (2-\lambda)x + y = 0 \\ (1-\lambda)y - z = 0 \\ 2y + (4-\lambda)z = 0 \end{matrix}\right\}$

- Για $\lambda_1 = 2$ είναι $\left.\begin{matrix} y = 0 \\ -y - z = 0 \\ 2y + 2z = 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} y = 0 \\ z = 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow X_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

  Άρα $V_1 = \langle X_1 \rangle = \langle (1,0,0) \rangle$

  (πράγματι $m_1 = \dim V_1 = 1 \leq \rho_1$)

- Για $\lambda_2 = 3$ είναι $\left.\begin{matrix} -x + y = 0 \\ -2y - z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{matrix} z = x \\ z = -2y = -2x \end{matrix} \Leftrightarrow X_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ -2x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

  Άρα $V_2 = \langle X_2 \rangle = \langle (1,1,-2) \rangle$

Παράδειγμα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι ιδιόχωροι

Είναι $\varphi_A(x) = \begin{vmatrix} 1-x & -2 & 2 \\ 0 & -3-x & 4 \\ 0 & -2 & 3-x \end{vmatrix} = (1-x)\begin{vmatrix} -3-x & 4 \\ -2 & 3-x \end{vmatrix} = (1-x)\left[-(9-x^2)+8\right] =$

$= (1-x)(x^2-1) = -(x-1)^2(x+1)$

Άρα $\varphi_A(\lambda)=0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1$ (διπλή $\rho_1 = 2$), $\lambda_2 = -1$ (απλή $\rho_2 = 1$)

Είναι $AX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x-2y+2z=\lambda x \\ -3y+4z=\lambda y \\ -2y+3z=\lambda z \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left.\begin{matrix} (1-\lambda)x-2y+2z=0 \\ -(3+\lambda)y+4z=0 \\ -2y+(3-\lambda)z=0 \end{matrix}\right\}$

- για $\lambda_1 = 1$ είναι $\left.\begin{matrix} -2y+2z=0 \\ -4y+4z=0 \\ -2y+2z=0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow y = z \Leftrightarrow X_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ y \end{pmatrix} = x\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{X_{1,1}} + y\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{X_{1,2}}$

Άρα $V_1 = \langle X_{1,1}, X_{1,2} \rangle = \langle (1,0,0), (0,1,1) \rangle$

(πράγματι $m_1 = \dim V_1 = 2 \leq \rho_1$)

- για $\lambda_2 = -1$ είναι $\left.\begin{matrix} 2x-2y+2z=0 \\ -2y+4z=0 \\ -2y+4z=0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{matrix} x-y+z=0 \\ y=2z \end{matrix} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x=z \\ y=2z \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$

$X_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ 2z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Άρα $V_2 = \langle X_2 \rangle = \langle (1,2,1) \rangle$.

$AX = \lambda X \Rightarrow A^n X = \lambda^n X, \ n \in \mathbb{N}^*$, $A \in M_{N\times N}(F)$

Πράγματι, $A^n X = A^{n-1} AX = A^{n-1} \lambda X = \lambda A^{n-1} X = \cdots = \lambda^n X$

A αντιστρέψιμος, $AX = \lambda X \Rightarrow A^\kappa X = \lambda^\kappa X, \ \kappa \in \mathbb{Z}^*$

Πράγματι, $AX = \lambda X$ και A αντιστρέψιμος $\Rightarrow X = \lambda A^{-1} X \Rightarrow$

$\Rightarrow A^{-1} X = \lambda^{-1} X$

Αν $\kappa = -n$, $n \in \mathbb{N}^*$, τότε $A^\kappa X = A^{-n} X = (A^n)^{-1} X$

Εξάλλου είναι $A^n X = \lambda^n X \Rightarrow (A^n)^{-1} X = (\lambda^n)^{-1} X \Rightarrow A^\kappa X = \lambda^\kappa X$.

$AX = \lambda X, \ \underset{\text{αναλυτική}}{f}(A) = 0 \Rightarrow f(\lambda) = 0$

Πράγματι, αν $f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n A^n$ τότε $\sum_{n=0}^{\infty} c_n A^n = 0 \Rightarrow \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n A^n\right) X = 0$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} c_n A^n X = 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^n X = 0 \Rightarrow \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^n\right) X = 0 \Rightarrow f(\lambda) X = 0$

$\Rightarrow f(\lambda) = 0$, αφού $X \neq 0$ (υπό την προϋπόθεση ότι οι παραπάνω σειρές συγκλίνουν).

$\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ διακριτές ιδιοτιμές του $A_{N\times N} \Rightarrow \overset{\text{αναλυτική}}{f}(A) = c_0 I + \cdots + c_{N-1} A^{N-1}$, $\underset{i=1,\ldots,N}{f(\lambda_i) = c_0 + \cdots + c_{N-1} \lambda_i^{N-1}}$

Πράγματι, από το θεώρημα Cayley-Hamilton, είναι $f(A) = c_0 I + \cdots + c_{N-1} A^{N-1} \Rightarrow$

$f(A) - c_0 I - \cdots - c_{N-1} A^{N-1} = 0 \Rightarrow f(\lambda_i) - c_0 - \cdots - c_{N-1} \lambda_i^{N-1} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(\lambda_i) = c_0 + \cdots + c_{N-1} \lambda_i^{N-1}$, που είναι ένα γραμμικό σύστημα N εξισώσεων με N αγνώστους $c_0, \ldots, c_{N-1}$.

Παράδειγμα

Αν $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ να βρεθεί το $f(A)$, π.χ. τα e^A, $\ln A$

Λόγω του Cayley-Hamilton θεωρήματος είναι $f(A)=c_0 I+c_1 A$, όπου αρκεί να προσδιοριστούν τα c_0, c_1.

Είναι $|A-\lambda I|=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}-\lambda & 1\\ -1 & -\lambda\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow \lambda^2+1=0 \Leftrightarrow \lambda_1=i,\ \lambda_2=-i.$

Ισχύει $\left.\begin{array}{l} f(\lambda_1)=c_0+c_1\lambda_1\\ f(\lambda_2)=c_0+c_1\lambda_2\end{array}\right\}$ που αποτελούν σύστημα 2 εξισώσεων

για τα c_0, c_1.

Είναι $\left.\begin{array}{l} c_0+ic_1=f(i)\\ c_0-ic_1=f(-i)\end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} c_0=\frac{1}{2}[f(i)+f(-i)]\\ c_1=\frac{1}{2i}[f(i)-f(-i)]\end{array}$

Άρα, τελικά
$$f(A)=\frac{1}{2}[f(i)+f(-i)]\,I+\frac{1}{2i}[f(i)-f(-i)]\,A$$
$$=\frac{1}{2}[f(i)+f(-i)]\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\frac{1}{2i}[f(i)-f(-i)]\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\frac{f(i)+f(-i)}{2} & \frac{f(i)-f(-i)}{2i}\\ \frac{f(-i)-f(i)}{2i} & \frac{f(i)+f(-i)}{2}\end{pmatrix}$$

π.χ. για $f(A)=e^A \Rightarrow e^A=\begin{pmatrix}\frac{e^i+e^{-i}}{2} & \frac{e^i-e^{-i}}{2i}\\ \frac{e^{-i}-e^i}{2i} & \frac{e^i+e^{-i}}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos 1 & \sin 1\\ -\sin 1 & \cos 1\end{pmatrix}$

π.χ. για $f(A)=\ln A \Rightarrow \ln A=\begin{pmatrix}\frac{\ln i+\ln(-i)}{2} & \frac{\ln i-\ln(-i)}{2i}\\ \frac{\ln(-i)-\ln i}{2i} & \frac{\ln i+\ln(-i)}{2}\end{pmatrix}$

Είναι $\left.\begin{array}{l} e^{i\frac{\pi}{2}}=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i \Rightarrow \ln i=i\frac{\pi}{2}\\ e^{-i\frac{\pi}{2}}=\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2}=-i \Rightarrow \ln(-i)=-i\frac{\pi}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\ln i+\ln(-i)=0\\ \ln i-\ln(-i)=i\pi\end{array}$

Άρα $\ln A=\begin{pmatrix}0 & \frac{\pi}{2}\\ -\frac{\pi}{2} & 0\end{pmatrix}$

Είναι φανερό ότι αφού A πραγματικός πίνακας, άρα οφείλει $f(A)$ πραγματικός, παρότι στους ενδιάμεσους υπολογισμούς εμφανίζονται μιγαδικά.

Παράδειγμα

Αν $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ να υπολογιστεί το $f(A)$.

Λόγω του Cayley–Hamilton θεωρήματος είναι $f(A) = c_0 I + c_1 A + c_2 A^2$, όπου αρκεί να προσδιοριστούν τα c_0, c_1, c_2.

Είναι $|A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (1-\lambda)(\lambda^2+1) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = i, \quad \lambda_3 = -i$

Ισχύει
$$\left.\begin{aligned} f(\lambda_1) &= c_0 + c_1\lambda_1 + c_2\lambda_1^2 \\ f(\lambda_2) &= c_0 + c_1\lambda_2 + c_2\lambda_2^2 \\ f(\lambda_3) &= c_0 + c_1\lambda_3 + c_2\lambda_3^2 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} c_0 + c_1 + c_2 &= f(1) \\ c_0 + i c_1 - c_2 &= f(i) \\ c_0 - i c_1 - c_2 &= f(-i) \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$$

$$c_0 = \frac{1-i}{4}\left[(1+i) f(1) + i f(i) + f(-i)\right], \quad c_1 = \frac{i}{2}\left[f(-i) - f(i)\right]$$

$$c_2 = \frac{1-i}{4}\left[(1+i) f(1) - f(i) - i f(-i)\right]$$

Άρα $f(A) = c_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} c_0 - c_1 - c_2 & -2c_1 & 0 \\ c_1 & c_0 + c_1 - c_2 & 0 \\ -c_1 & 2c_2 & c_0 + c_1 + c_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1+i}{2}\left[f(i) - i f(-i)\right] & i\left[f(i) - f(-i)\right] & 0 \\ \frac{i}{2}\left[f(-i) - f(i)\right] & \frac{1-i}{2}\left[f(i) + i f(-i)\right] & 0 \\ \frac{i}{2}\left[f(i) - f(-i)\right] & \frac{1-i}{2}\left[(1+i) f(1) - f(i) - i f(-i)\right] & f(1) \end{pmatrix}$$

Είναι φανερό ότι η μέθοδος αυτή είναι επίπονη. Μέσω διαγωνοποίησης η διαδικασία γίνεται πιο εύκολη.

3| 10|

$|BA-\lambda \mathbb{1}| = | A^{-1}(AB)A - A^{-1}\lambda\mathbb{1}A| = |A^{-1}(AB-\lambda\mathbb{1})A|$

$= |A^{-1}|\,|AB-\lambda\mathbb{1}|\,|A| = |A|^{-1}\,|AB-\lambda\mathbb{1}|\,|A| = |AB-\lambda\mathbb{1}|$

$\Rightarrow$ AB, BA έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.

Αλλιώς: $BA = A^{-1}(AB)A$, άρα AB, BA όμοιοι.

Επίσης, αφού οι AB, BA είναι όμοιοι, και άρα έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές $\lambda_1, \dots, \lambda_\nu$, άρα $tr(AB) = \lambda_1 + \dots + \lambda_\nu = tr(BA) \Rightarrow tr(AB) = tr(BA)$

$|AB| = \lambda_1 \cdots \lambda_\nu = |BA| \Rightarrow |AB| = |BA|$

12| $A = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$

Είναι $|A| = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$, άρα ενδέχεται ο A ορθογώνιος

$A^t A = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}$

Ή αλλιώς $\vec{a} = (\sqrt{3}/2, -1/2)$, $\vec{b} = (1/2, \sqrt{3}/2)$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$, $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 1$

Άρα A ορθογώνιος.

$|A-\lambda\mathbb{1}| = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}-\lambda & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}-\lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\lambda\right)^2 + \frac{1}{4}$

Είναι φανερό ότι $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ είναι $|A-\lambda\mathbb{1}| > 0$, άρα ο A δεν έχει πραγματική ιδιοτιμ

$|A-\lambda\mathbb{1}| = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\lambda\right)^2 + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\lambda\right)^2 = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} - \lambda = \pm \frac{i}{2} \Leftrightarrow \lambda = \frac{\sqrt{3}}{2} \pm i\frac{1}{2} =$

$= \cos\frac{\pi}{6} \pm i \sin\frac{\pi}{6} = e^{\pm i \frac{\pi}{6}}$

Πράγματι, από τη θεωρία, αν $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ τότε $\lambda = e^{\pm i\theta}$. Εδώ $\theta = -\frac{\pi}{6}$,

άρα, πράγματι $\lambda = e^{\pm i \frac{\pi}{6}}$.