ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Σημειώσεις – Ορίζουσες

Κοφινάς Γιώργος

Τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών και Επικοινωνιακών Συστημάτων

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Ορισμός Ορίζουσα είναι μια απεικόνιση $D : M_{N\times N}(F) \to F$ ④
έτσι ώστε

- $D(A^1, \ldots, A^j + B^j, \ldots, A^N) = D(A^1, \ldots, A^j, \ldots, A^N) + D(A^1, \ldots, B^j, \ldots, A^N)$, $\forall j$

  $D(A^1, \ldots, \lambda A^j, \ldots, A^N) = \lambda D(A^1, \ldots, A^j, \ldots, A^N)$, $\forall j$

  (D "γραμμική" ως προς τις στήλες, D "πολυγραμμική")
- $D(A^1, \ldots, A^j, A^j, \ldots, A^N) = 0$ για κάποιο j (D "alternating")
- $D(I_N) = 1$

Αν $A \in M_{N\times N}(F)$, συμβολίζουμε την ορίζουσα τού A με $D(A)$, $|A|$, $\det(A)$, $\mathrm{Det}(A)$
(Θεωρουμένη η ορίζουσα και ως απεικόνιση των στηλών, μπορούμε να βάλουμε και κόμματα).

$\underline{D(A^1, \ldots, 0, \ldots, A^N) = 0}$ Δηλαδή αν μία στήλη είναι μηδέν, η ορίζουσα είναι μηδέν

Πράγματι, από $D(A^1, \ldots, \lambda A^j, \ldots, A^N) = \lambda D(A^1, \ldots, A^j, \ldots, A^N)$, για $\lambda = 0$
είναι $D(A^1, \ldots, 0, \ldots, A^N) = 0$.

$\underline{D(A^1, \ldots, A^j, \ldots, A^k, \ldots, A^N) = -D(A^1, \ldots, A^k, \ldots, A^j, \ldots, A^N)}$, $j \neq k$

$\underline{D(A^1, \ldots, \underset{j\text{-θέση}}{A^j}, \ldots, \underset{k\text{-θέση}}{A^j}, \ldots, A^N) = 0}$ (πιο γενικό από τη 2η ιδιότητα του ορισμού) $(j \neq k)$

Πράγματι, $0 = D(A^1, \ldots, A^j + A^{j+1}, A^j + A^{j+1}, \ldots, A^N) =$
$= D(A^1, \ldots, A^j, A^j + A^{j+1}, \ldots, A^N) + D(A^1, \ldots, A^{j+1}, A^j + A^{j+1}, \ldots, A^N) =$
$= D(A^1, \ldots, A^j, A^j, \ldots, A^N) + D(A^1, \ldots, A^j, A^{j+1}, \ldots, A^N) + D(A^1, \ldots, A^{j+1}, A^j, \ldots, A^N) +$
$+ D(A^1, \ldots, A^{j+1}, A^{j+1}, \ldots, A^N) =$
$= 0 + D(A^1, \ldots, A^j, A^{j+1}, \ldots, A^N) + D(A^1, \ldots, A^{j+1}, A^j, \ldots, A^N) + 0$,
$\Rightarrow D(A^1, \ldots, A^j, A^{j+1}, \ldots, A^N) = -D(A^1, \ldots, A^{j+1}, A^j, \ldots, A^N)$,

δηλαδή εναλλάσοντας δύο γειτονικές στήλες, η ορίζουσα αλλάζει πρόσημο
που είναι πιο ειδικό από αυτό που θέλουμε να δείξουμε.

Θα δείξουμε τώρα ότι αν $A^j = A^k$ με $j < k$ τότε $D(A) = 0$. Αφού $j < k$,
άρα $k = j + \ell$, $\ell = 1, \ldots, N - j$ και άρα

$D(A^1, \ldots, A^j, \ldots, A^k, \ldots, A^N) = D(A^1, \ldots, A^j, \ldots, \underset{(j+\ell)\text{-θέση}}{A^{j+\ell}}, \ldots, A^N) =$
$= -D(A^1, \ldots, A^j, \ldots, \underset{(j+\ell-1)\text{-θέση}}{A^{j+\ell}}, \underset{(j+\ell)\text{-θέση}}{A^{j+\ell-1}}, \ldots, A^N) = -(-)\cdots(-) D(A^1, \ldots, \underset{j\text{-θέση}}{A^j}, \underset{(j+1)\text{-θέση}}{A^{j+\ell}}, \ldots, A^N) =$
$= -(-)\cdots(-) D(A^1, \ldots, A^j, A^k, \ldots, A^N) = -(-)\cdots(-) D(A^1, \ldots, A^j, A^j, \ldots, A^N) = 0$,

δηλαδή δείξαμε ότι αν δύο στήλες είναι ίσες, η ορίζουσα μηδενίζεται.

Τέλος, είναι για $j < k$

$$0 = D(A^1, \dots, \underset{j\text{-θέση}}{A^j + A^k}, \dots, \underset{k\text{-θέση}}{A^j + A^k}, \dots, A^N) =$$

$$= D(A^1, \dots, A^j, \dots, A^j, \dots, A^N) + D(A^1, \dots, A^j, \dots, A^k, \dots, A^N) + D(A^1, \dots, A^k, \dots, A^j, \dots, A^N) +$$

$$+ D(A^1, \dots, A^k, \dots, A^k, \dots, A^N)$$

$$= 0 + D(A^1, \dots, A^j, \dots, A^k, \dots, A^N) + D(A^1, \dots, A^k, \dots, A^j, \dots, A^N) + 0$$

$$\Rightarrow D(A^1, \dots, A^j, \dots, A^k, \dots, A^N) = -D(A^1, \dots, A^k, \dots, A^j, \dots, A^N)$$

$$\underline{D(A^1, \dots, A^j + \lambda A^k, \dots, A^k, \dots, A^N) = D(A^1, \dots, A^j, \dots, A^k, \dots, A^N)} \quad , j \neq k$$

Πράγματι, $D(A^1, \dots, A^j + \lambda A^k, \dots, A^k, \dots, A^N) =$

$$= D(A^1, \dots, A^j, \dots, A^k, \dots, A^N) + D(A^1, \dots, \lambda A^k, \dots, A^k, \dots, A^N) =$$

$$= D(A^1, \dots, A^j, \dots, A^k, \dots, A^N) + \lambda D(A^1, \dots, A^k, \dots, A^k, \dots, A^N) =$$

$$= D(A^1, \dots, A^j, \dots, A^k, \dots, A^N) + \lambda \cdot 0$$

$$= D(A^1, \dots, A^j, \dots, A^k, \dots, A^N)$$

$$Q^j = \sum_{k=1}^{N} \lambda_{kj} A^k \Rightarrow D(Q^1, \dots, Q^N) = D(A^1, \dots, A^N) \cdot \sum_{(k_1, \dots, k_N)} sgn(k_1, \dots, k_N) \lambda_{k_1 1} \cdots \lambda_{k_N N}$$

Πράγματι,

$$D(Q^1, \dots, Q^N) = D\left(\sum_{k_1=1}^{N} \lambda_{k_1 1} A^{k_1}, \dots, \sum_{k_N=1}^{N} \lambda_{k_N N} A^{k_N} \right)$$

$$= \sum_{k_1=1}^{N} \cdots \sum_{k_N=1}^{N} \lambda_{k_1 1} \cdots \lambda_{k_N N} \, D(A^{k_1}, \dots, A^{k_N})$$

$$= \sum_{\substack{(k_1, \dots, k_N) \\ \text{μεταθέσεις}}} \lambda_{k_1 1} \cdots \lambda_{k_N N} \, D(A^{k_1}, \dots, A^{k_N})$$

$$= \sum_{(k_1, \dots, k_N)} \lambda_{k_1 1} \cdots \lambda_{k_N N} \, sgn(k_1, \dots, k_N) \, D(A^1, \dots, A^N)$$

$$= D(A^1, \dots, A^N) \cdot \sum_{(k_1, \dots, k_N)} sgn(k_1, \dots, k_N) \lambda_{k_1 1} \cdots \lambda_{k_N N}$$

Σχόλια

1) Η άθροιση γίνεται πάνω σε όλες τις μεταθέσεις, π.χ. για $N=3$, $(1,2,3)$, $(1,3,2)$, $(2,1,3)$, $(2,3,1)$, $(3,1,2)$, $(3,2,1)$.

2) Το $sgn(k_1, \dots, k_N)$ συμβολίζεται και $\epsilon(k_1, \dots, k_N)$ "πρόσημο μετάθεσης"

3) Είναι $sgn(2,1,3) = -sgn(1,2,3) = -1$

$sgn(3,1,2) = -sgn(1,3,2) = -(-)sgn(1,2,3) = sgn(1,2,3) = 1$

Η εναλλαγή δύο ψηφίων μέσα στη μετάθεση συνοδεύεται με ένα $-$.

$$D(A) = \sum_{(i_1,\dots,i_N)} sgn(i_1,\dots i_N)\; a_{i_1 1} \cdots a_{i_N N}$$

Πράγματι, ξέρουμε ότι αν $Q^j = \sum_{k=1}^{N} \lambda_{kj} A^k$, τότε

$$D(Q) = D(A) \cdot \sum_{(k_1,\dots,k_N)} sgn(k_1,\dots,k_N)\; \lambda_{k_1 1} \cdots \lambda_{k_N N}.$$

Θέτουμε $A^j = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ j-θέση, οπότε

$$D(A) = D(A^1,\dots,A^j,\dots,A^N) = D(I_N) = 1.$$

Εξάλλου, $Q^j = \lambda_{1j} A^1 + \dots + \lambda_{Nj} A^N = \lambda_{1j} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \lambda_{Nj} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{1j} \\ \vdots \\ \lambda_{Nj} \end{pmatrix}$,

άρα $D(Q) = D(Q^1,\dots,Q^N) = \begin{vmatrix} \lambda_{11} \cdots \lambda_{1j} \cdots \lambda_{1N} \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ \lambda_{N1} \cdots \lambda_{Nj} \cdots \lambda_{NN} \end{vmatrix}$.

Τελικά $\begin{vmatrix} \lambda_{11} \cdots \lambda_{1N} \\ \vdots \qquad \vdots \\ \lambda_{N1} \cdots \lambda_{NN} \end{vmatrix} = 1 \cdot \sum_{(k_1,\dots,k_N)} sgn(k_1,\dots,k_N)\; \lambda_{k_1 1} \cdots \lambda_{k_N N}$,

και αλλάζοντας το σύμβολο λ με το a έχουμε

$$D(A) = \begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1N} \\ \vdots \qquad \vdots \\ a_{N1} \cdots a_{NN} \end{vmatrix} = \sum_{(i_1,\dots,i_N)} sgn(i_1,\dots,i_N)\, a_{i_1 1} \cdots a_{i_N N}.$$

Σχόλια

1) Ο παραπάνω τύπος υπολογισμού της ορίζουσας, δείχνει ότι αν όντως υπάρχει ορίζουσα, αυτή είναι μοναδική.

2) Ο παραπάνω τύπος είναι ένα άθροισμα γινομένων, όπου σε κάθε γινόμενο εμφανίζεται ένα ακριβώς στοιχείο από κάθε στήλη (αφού είναι $a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots$) και κάθε γραμμή (αφού δεν είναι δυνατόν $i_1 = i_2$ - αφού $sgn(i_1, i_2, \dots) = sgn(i_1, i_1, \dots) = 0$)

(3) Ο παραπάνω τύπος δεν είναι ιδιαίτερα πρακτικός στον υπολογισμό του $D(A)$.

$$|AB| = |A|\cdot|B| \quad , \quad A, B \in M_{N\times N}(F)$$

Πράγματι, ξέρουμε ότι αν $Q^j = \sum_{k=1}^{N} \lambda_{kj} A^k$ τότε

$$D(Q) = D(A) \sum_{(k_1,\dots,k_N)} sgn(k_1,\dots,k_N)\, \lambda_{k_1 1} \cdots \lambda_{k_N N}$$

$$= D(A)\; D(\Lambda) \, , \qquad \Lambda \equiv (\lambda_{ij})$$

Από $Q^j = \sum_{k=1}^{N} \lambda_{kj} A^k \Rightarrow (Q^j)_i = \sum_{k=1}^{N} \lambda_{kj} (A^k)_i \Rightarrow q_{ij} = \sum_{k=1}^{N} \lambda_{kj}\, a_{ik}$

$$\Rightarrow q_{ij} = \sum_{k=1}^{N} a_{ik} \lambda_{kj} \Rightarrow Q = A\Lambda \Rightarrow D(Q) = D(A\Lambda) .$$

Τελικά $D(A\Lambda) = D(A) D(\Lambda)$

$$A \text{ αντιστρέψιμος} \Rightarrow |A^{-1}| = |A|^{-1}$$

Πράγματι, $1 = D(I_N) = D(AA^{-1}) = D(A)\, D(A^{-1}) \Rightarrow D(A^{-1}) = D(A)^{-1}$.

Σχόλιο Όμοιοι πίνακες $(A,\ B^{-1}AB)$ έχουν την ίδια ορίζουσα.

Πράγματι, $|B^{-1}AB| = |B^{-1}|\,|A|\,|B| = |B|^{-1}\,|A|\,|B| = |A|$.

$$|A^T| = |A|$$

$$D(A^T) = \sum_{(k_1,\dots,k_N)} sgn(k_1,\dots,k_N)\, a_{1k_1} \cdots a_{Nk_N}$$

$$= \sum_{\sigma} \epsilon(\sigma)\; a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{N,\sigma(N)}$$

$$= \sum_{\sigma} \epsilon(\sigma)\; a_{\sigma^{-1}(\sigma(1)),\sigma(1)} \cdots a_{\sigma^{-1}(\sigma(N)),\sigma(N)}$$

$$= \sum_{\sigma} \epsilon(\sigma)\; a_{\sigma^{-1}(1),1} \cdots a_{\sigma^{-1}(N),N}$$

$$= \sum_{\sigma} \epsilon(\sigma^{-1})\; a_{\sigma^{-1}(1),1} \cdots a_{\sigma^{-1}(N),N}$$

$$= \sum_{\sigma^{-1}} \epsilon(\sigma^{-1})\; a_{\sigma^{-1}(1),1} \cdots a_{\sigma^{-1}(N),N}$$

$$= \sum_{\tau} \epsilon(\tau)\; a_{\tau(1),1} \cdots a_{\tau(N),N}$$

$$= D(A)$$

$$D(A_1, \dots, 0, \dots, A_N) = 0$$

$$D(A_1, \dots, A_i, \dots, A_\ell, \dots, A_N) = - D(A_1, \dots, A_\ell, \dots, A_i, \dots, A_N), \quad i \neq \ell$$

$$D(A_1, \dots, \underset{i\text{-θέση}}{A_i}, \dots, \underset{\ell\text{-θέση}}{A_i}, \dots, A_N) = 0 \qquad (i \neq \ell)$$

$$D(A_1, \dots, A_i + \lambda A_\ell, \dots A_\ell, \dots, A_N) = D(A_1, \dots, A_i, \dots, A_\ell, \dots, A_N), \quad i \neq \ell$$

$$D(A) = \sum_{(i_1, \dots, i_N)} \operatorname{sgn}(i_1, \dots, i_N) \, a_{1 i_1} \cdots a_{N i_N}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \\ l_{21} & 1 & & & \\ l_{31} & l_{32} & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ l_{n1} & \cdot & & l_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$LA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ l_{21}a_{11}+a_{21} & l_{21}a_{12}+a_{22} & \cdots & l_{21}a_{1n}+a_{2n} \\ l_{31}a_{11}+l_{32}a_{21}+a_{31} & \cdots & \cdots & l_{31}a_{1n}+l_{32}a_{2n}+a_{3n} \\ \vdots & & & \vdots \\ l_{n1}a_{11}+\cdots+l_{n,n-1}a_{n-1,1}+a_{n1} & \cdots & & l_{n1}a_{1n}+\cdots+l_{n,n-1}a_{n-1,n}+a_{nn} \end{pmatrix}$$

$D(LA) = D(A)$

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ A & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & -I \\ 0 & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & -I \\ AB & 0 \end{pmatrix}$$

$\underbrace{}_{L}$

$$\det\left[\begin{pmatrix} I & 0 \\ A & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & -I \\ 0 & A \end{pmatrix}\right] = \det\begin{pmatrix} B & -I \\ 0 & A \end{pmatrix} \Rightarrow \det\begin{pmatrix} B & -I \\ AB & 0 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} B & -I \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \det(AB) = (\det B)(\det A)$

(Laplace) +

Υπάρχει ορίζουσα κάθε τάξης N και $D(A) = \sum_{j=1}^{N} (-1)^{i+j} a_{ij} D(A_{ij})$ "ανάπτυγμα ως προς την i-γραμμή"

$$= \sum_{i=1}^{N} (-1)^{i+j} a_{ij} D(A_{ij})$$ "ανάπτυγμα ως προς την j-στήλη"

(ο A_{ij} είναι $(N-1)\times(N-1)$ υποπίνακας του A που προκύπτει απαλείφοντας την i-γραμμή και τη j-στήλη του A)

Πράγματι, για $N=1$, η απεικόνιση $M_{1\times1}(F) \to F : (a_{11}) \to a_{11}$ είναι ορίζουσα.

Για $N=2$, η απεικόνιση $M_{2\times2}(F) \to F : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to ad-bc$ έχει τις ιδιότητες

$$\begin{vmatrix} a & b+b' \\ c & d+d' \end{vmatrix} = a(d+d') - c(b+b') = (ad-bc) + (ad'-b'c) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b' \\ c & d' \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & \lambda b \\ c & \lambda d \end{vmatrix} = a(\lambda d) - (\lambda b)c = \lambda(ad-bc) = \lambda \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

όμοια, γραμμικότητα για την πρώτη στήλη

$$\begin{vmatrix} a & a \\ c & c \end{vmatrix} = ac - ac = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.1 - 0.0 = 1 \quad ,$$

άρα είναι ορίζουσα.

Υποθέτουμε ότι υπάρχουν ορίζουσες για όλες τις τάξεις $<N$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει ορίζουσα τάξης N και δίνεται από τον παραπάνω τύπο.

Αφού υπάρχουν ορίζουσες D για όλους τους πίνακες $N'\times N'$, $N'<N$, άρα υπάρχουν τα $D(A_{ij})$ και μάλιστα είναι μοναδικά.

Έστω $\tilde{D}(A) \equiv \sum_{j=1}^{N} (-1)^{i+j} a_{ij} D(A_{ij})$. Θα δείξουμε ότι η $\tilde{D}$ ικανοποιεί τις τρεις ιδιότητες της ορίζουσας, άρα είναι ορίζουσα τάξης N. Περαιτέρω όμως, αφού και η ορίζουσα τάξης N είναι μοναδική, άρα η $\tilde{D}$ είναι η ορίζουσα τάξης N, δηλαδή $\tilde{D}(A) = D(A)$, επομένως τελικά θα έχει δειχθεί ότι $D(A) = \sum_{j=1}^{N} (-1)^{i+j} a_{ij} D(A_{ij})$.

Ο τύπος αυτός έχει μία έννοια αναδρομικού τύπου, δηλαδή δίνει την ορίζουσα ενός πίνακα σε σχέση με τις ελάσσονες υποορίζουσες.

• Θα δείξουμε πρώτα ότι η $\tilde{D}$ εξαρτάται γραμμικά από την τυχούσα στήλη A^k.

Πράγματι, $\tilde{D}(A) = \sum_{j \neq k} (-1)^{i+j} a_{ij} D(A_{ij}) + (-1)^{i+k} a_{ik} D(A_{ik})$.

Τα a_{ij}, $j \neq k$ δεν εξαρτώνται από το A^k, ενώ τα $D(A_{ij})$, $j \neq k$ εξαρτώνται γραμμικά από το A^k, αφού ο πίνακας A_{ij} περιέχει τη στήλη A^k.

Άρα, το $\sum_{j \neq k} (-1)^{i+j} a_{ij} D(A_{ij})$ εξαρτάται γραμμικά από τη στήλη A^k.

Εξάλλου, το a_{ik} εξαρτάται γραμμικά από το A^k, ενώ το $D(A_{ik})$ δεν εξαρτάται από το A^k, άρα το $(-1)^{i+k} a_{ik} D(A_{ik})$ εξαρτάται γραμμικά από το A^k.

Τελικά, το $\tilde{D}(A)$ εξαρτάται γραμμικά από το A^k.

• Αν $A^k = A^{k+1}$ θα δείξουμε ότι $\tilde{D}(A) = 0$.

Πράγματι,
$$\tilde{D}(A) = \sum_{j \neq k, k+1} (-1)^{i+j} a_{ij} D(A_{ij}) + (-1)^{i+k} a_{ik} D(A_{ik}) + (-1)^{i+k+1} a_{i,k+1} D(A_{i,k+1}).$$

Για $j \neq k, k+1$, ο A_{ij} έχει δύο γειτονικές στήλες ίσες, άρα $D(A_{ij}) = 0$.

Εξάλλου, αφού $A^k = A^{k+1}$, άρα $a_{ik} = a_{i,k+1}$ και $A_{ik} = A_{i,k+1}$, άρα $D(A_{ik}) = D(A_{i,k+1})$.

Τελικά, $\tilde{D}(A) = 0 + (-1)^{i+k} a_{ik} D(A_{ik}) - (-1)^{i+k} a_{ik} D(A_{ik}) = 0$.

• Αν $A = I_N$, θα δείξουμε ότι $\tilde{D}(A) = 1$.

Πράγματι, $\tilde{D}(A) = \sum_{j \neq i} (-1)^{i+j} a_{ij} D(A_{ij}) + (-1)^{i+i} a_{ii} D(A_{ii})$.

Οι πίνακες A_{ij}, $i \neq j$ έχουν μία στήλη μηδενική, άρα $D(A_{ij}) = 0$, $i \neq j$.

Εξάλλου, οι πίνακες $A_{ii} = I_{N-1} \Rightarrow D(A_{ii}) = D(I_{N-1}) = 1$.

Τελικά, $\tilde{D}(A) = 0 + 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$.

Για να δείξουμε την δεύτερη έκφραση περί ανάπτυξης τού $D(A)$ ως προς την j-στήλη έχουμε

$$D(A) = D(A^T) = \sum_{i=1}^{N} (-1)^{j+i} (a^T)_{ji} D((A^T)_{ji}) = \sum_{i=1}^{N} (-1)^{i+j} a_{ij} D(A_{ij})$$

Μια πιο γενική πρόταση είναι η εξής

$$\sum_{k=1}^{N} (-1)^{j+k} a_{ik} D(A_{jk}) = D(A)\,\delta_{ij} = \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k+j} a_{ki} D(A_{kj})$$

Για $i=j$ ισχύει, αφού

$$D(A) = \sum_{k=1}^{N} (-1)^{i+k} a_{ik} D(A_{ik}) = \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k+i} a_{ki} D(A_{ki}).$$

Για $i \neq j$, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\sum_{k=1}^{N} (-1)^{j+k} a_{ik} D(A_{jk}) = 0 = \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k+j} a_{ki} D(A_{kj}).$$

Θεωρώ τον πίνακα B με $B_\ell = A_\ell$, $\ell \neq j$ και $B_j = A_i$.
Τότε $B_i = A_i = B_j$, άρα $D(B) = 0$. Εξάλλου, $b_{jk} = (B_j)_k = (A_i)_k = a_{ik}$, $\forall k$.
Επίσης, $B_{jk} = A_{jk}$, αφού οι B, A διαφέρουν μόνο κατά τη j-γραμμή.
Αλλά $D(B) = \sum_{k=1}^{N} (-1)^{j+k} b_{jk} D(B_{jk}) \Rightarrow 0 = \sum_{k=1}^{N} (-1)^{j+k} a_{ik} D(A_{jk})$.

Όμοια, θεωρώ τον πίνακα G με $G^\ell = A^\ell$, $\ell \neq j$ και $G^j = A^i$.
Τότε $G^i = A^i = G^j$, άρα $D(G) = 0$. Εξάλλου, $g_{kj} = (G^j)_k = (A^i)_k = a_{ki}$, $\forall k$.
Επίσης, $G_{kj} = A_{kj}$, αφού οι G, A διαφέρουν μόνο κατά τη j-στήλη.
Αλλά $D(G) = \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k+j} g_{kj} D(G_{kj}) \Rightarrow 0 = \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k+j} a_{ki} D(A_{kj})$.

Η ορίζουσα τριγωνικού άνω (κάτω) πίνακα ισούται με το γινόμενο των διαγώνιων στοιχείων του.

Πράγματι,

$$D\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1N} \\ & a_{22} \cdots & a_{2N} \\ \mathbb{O} & \ddots & \vdots \\ & & a_{NN} \end{pmatrix} = \sum_{(i_1,\dots,i_N)} sgn(i_1,\dots,i_N)\, a_{i_1 1} \cdots a_{i_N N} =$$

$$= sgn(1,2,\dots,N)\, a_{11} \cdots a_{NN} = a_{11} \cdots a_{NN}$$

ή ακόμα

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \mathbb{O} & \ddots & a_{NN} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & \cdots & a_{3N} \\ \mathbb{O} & \ddots & a_{NN} \end{vmatrix} = \cdots = a_{11} a_{22} \cdots a_{NN}$$

Παρατήρηση

Οι ιδιότητες ορίζουσας που έχουμε δει

$$D(A_1,\dots,A_i,\dots,A_\ell,\dots,A_N) = -D(A_1,\dots,A_\ell,\dots,A_i,\dots,A_N),\ i\neq \ell$$

$$D(A_1,\dots,\lambda A_j,\dots,A_N) = \lambda D(A_1,\dots,A_j,\dots,A_N),\ \forall j$$

$$D(A_1,\dots,A_i+\lambda A_\ell,\dots,A_\ell,\dots,A_N) = D(A_1,\dots,A_i,\dots,A_\ell,\dots,A_N),\ i\neq \ell$$

μαζί με την παραπάνω ιδιότητα περί ορίζουσας τριγωνικού πίνακα, μας δίνουν έναν ακόμα ισχυρό τρόπο υπολογισμού οριζουσών μέσω αναγωγής σε κλιμακωτή μορφή.

Παράδειγμα

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ -3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2(5-8) - (5+12) + 0$$

$$= -6 - 17 = -23$$

ή $$= (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} + (-4) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -(5-0) + 1 \cdot (10-0) - 4(4+3)$$

$$= -5 + 10 - 28 = -23$$

ή $$= 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -4(4+3) + 5(2-1) = -28 + 5 = -23$$

Παράδειγμα

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -5 & -7 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{vmatrix} \overset{r_1 \leftrightarrow r_4}{=} - \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -5 & -7 & -3 & 9 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} r_2 \to r_2 - 2r_1 \\ r_3 \to r_3 + 5r_1 \\ r_4 \to r_4 - 5r_1 \end{matrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & 7 & 3 & -10 \\ 0 & -17 & -8 & 29 \\ 0 & 14 & 7 & -19 \end{vmatrix} \begin{matrix} r_3 \to r_3 + \frac{17}{7} r_2 \\ r_4 \to r_4 - 2r_2 \end{matrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & 7 & 3 & -10 \\ 0 & 0 & -5/7 & 33/7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} r_3 \leftrightarrow r_4$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & 7 & 3 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5/7 & 33/7 \end{vmatrix} r_4 \to r_4 + \frac{5}{7} r_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & 7 & 3 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 38/7 \end{vmatrix} = 1 \cdot 7 \cdot 1 \cdot \frac{38}{7} = 38$$

Εναλλακτικά, πιο δύσκολα

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -5 & -7 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = (-5) \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 4 \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} - 9 \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (-5)(-9) + 7(-17) - 3(-15) - 9(-7) = 45 - 119 + 45 + 63 = 38$$

Παράδειγμα

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} \begin{matrix} r_2 \to r_2 + r_1 \\ r_3 \to r_3 + 2r_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 11 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} \begin{matrix} r_1 \to r_1 - 3r_3 \\ r_2 \to r_2 - 2r_3 \end{matrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 0 & -2 & -17 \\ 0 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -2 & -17 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} = -(6 - 51) = 45.$$

Παράδειγμα

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} r_2 \to r_2 - 2r_1 \\ r_3 \to r_3 - 3r_1 \\ r_4 \to r_4 + r_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -2 & 1 \\ 0 & 7 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Παράδειγμα

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & 1 \\ 1 & x & x & x \\ x & 1 & xy & y \\ x & x & xy & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} r_2 \to r_2 - r_1 \\ r_3 \to r_3 - x r_1 \\ r_4 \to r_4 - x r_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & y & 1 \\ 0 & 0 & x-y & x-1 \\ 0 & 1-x^2 & 0 & y-x \\ 0 & x-x^2 & 0 & 1-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & x-y & x-1 \\ 1-x^2 & 0 & y-x \\ x-x^2 & 0 & 1-x \end{vmatrix} =$$

$$= -(x-y) \begin{vmatrix} 1-x^2 & y-x \\ x-x^2 & 1-x \end{vmatrix} = -(x-y)(1-x) \begin{vmatrix} 1-x^2 & y-x \\ x & 1 \end{vmatrix} r_1 \to r_1 + x r_2 =$$

$$= -(x-y)(1-x) \begin{vmatrix} 1 & y \\ x & 1 \end{vmatrix} = -(x-y)(1-x)(1-xy)$$

Παράδειγμα

Δείξτε ότι

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{vmatrix} = a_{11} D(A_{11}) + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{vmatrix}$$

Πράγματι,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{vmatrix} = a_{11} D(A_{11}) - a_{12} D(A_{12}) + - \cdots + (-1)^{1+N} a_{1N} D(A_{1N})$$

Εξάλλου

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{vmatrix} = -a_{12} D(A_{12}) + - \cdots + (-1)^{1+N} a_{1N} D(A_{1N})$$

Άρα

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{vmatrix} = a_{11} D(A_{11}) + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{vmatrix}$$

Παράδειγμα

Να δειχθεί ότι
$$D_N = \begin{vmatrix} \beta & \alpha & \cdots & \alpha \\ \alpha & \beta & \cdots & \alpha \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha & \alpha & \cdots & \beta \end{vmatrix} = [\beta + (N-1)\alpha]\,(\beta-\alpha)^{N-1}$$

Πράγματι,

$$D_N = \begin{vmatrix} \beta & \alpha & \cdots & \alpha \\ \alpha & \beta & \cdots & \alpha \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha & \alpha & \cdots & \beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta+\alpha+\cdots+\alpha & \alpha & \cdots & \alpha \\ \alpha+\beta+\cdots+\alpha & \beta & \cdots & \alpha \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha+\alpha+\cdots+\beta & \alpha & \cdots & \beta \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \beta+(N-1)\alpha & \alpha & \cdots & \alpha \\ \beta+(N-1)\alpha & \beta & \cdots & \alpha \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta+(N-1)\alpha & \alpha & \cdots & \beta \end{vmatrix} = [\beta+(N-1)\alpha] \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \cdots & \alpha \\ 1 & \beta & \cdots & \alpha \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \alpha & \cdots & \beta \end{vmatrix}$$

$$= [\beta+(N-1)\alpha] \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \cdots & \alpha \\ 0 & \beta-\alpha & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \beta-\alpha \end{vmatrix}$$

$$= [\beta+(N-1)\alpha]\,(\beta-\alpha)^{N-1}$$

Παράδειγμα

Να δειχθεί ότι

$$D_N \equiv \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_N \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_N^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{N-1} & x_2^{N-1} & \cdots & x_N^{N-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le j < i \le N} (x_i - x_j) = (x_2 - x_1)\cdot(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)\cdots(x_N - x_1)\cdots(x_N - x_{N-1})$$

"ορίζουσα Vandermonde"

Πράγματι, για $n=2$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1$

Είναι

$$D_N = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_N \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_N^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{N-2} & x_2^{N-2} & \cdots & x_N^{N-2} \\ x_1^{N-1} & x_2^{N-1} & \cdots & x_N^{N-1} \end{vmatrix} \begin{matrix} r_2 \to r_2 - x_1 r_1 \\ r_3 \to r_3 - x_1 r_2 \\ \\ r_N \to r_N - x_1 r_{N-1} \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & \cdots & x_N - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & \cdots & x_N(x_N - x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_2^{N-2}(x_2 - x_1) & \cdots & x_N^{N-2}(x_N - x_1) \end{vmatrix} =$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_N - x_1) \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & \cdots & x_N \\ \vdots & & \vdots \\ x_2^{N-2} & \cdots & x_N^{N-2} \end{vmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_N - x_1)\, D_{N-1}$$

$$= x_{21}\, x_{31} \cdots x_{N1}\, D_{N-1}$$

$$= (x_{21}\, x_{31} \cdots x_{N1})(x_{32} \cdots x_{N2})\, D_{N-2}$$

$$= (x_{21}\, x_{31} \cdots x_{N1})(x_{32} \cdots x_{N2}) \cdots x_{N,N-1}$$

$$\begin{array}{c|ccccc} & & & j & & \\ & 1 & 2 & 3 & \cdots & N \\ \hline 1 & \bullet & & & & \\ 2 & x_{21} & \bullet & & & \\ i \quad 3 & x_{31} & x_{32} & \bullet & & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ N & x_{N1} & x_{N2} & & x_{N,N-1} & \bullet \end{array}$$

π.χ.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & N+1 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & \cdots & (N+1)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2^N & 3^N & \cdots & (N+1)^N \end{vmatrix} = \cdots = 1!\,2!\cdots N!$$

Παράδειγμα

Να δειχθεί ότι η $N \times N$ ορίζουσα

$$D_N = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & \cdots & 2 \end{vmatrix} = N+1$$

Είναι $D_N = 2D_{N-1} - D_{N-2} \Rightarrow D_N - D_{N-1} = D_{N-1} - D_{N-2}$.

Εφαρμόζουμε τη σχέση αυτή πολλές φορές

$$D_N - D_{N-1} = D_{N-1} - D_{N-2}$$

$$D_{N-1} - D_{N-2} = D_{N-2} - D_{N-3}$$

$$\vdots$$

$$D_3 - D_2 = D_2 - D_1$$

και προσθέτοντας κατά μέλη

$$D_N - D_2 = D_{N-1} - D_1 \Rightarrow D_N - D_{N-1} = D_2 - D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 = 3 - 2 = 1.$$

$$\Rightarrow D_N - D_{N-1} = 1.$$

Επομένως, από την αρχική αναδρομική σχέση που ήταν πιο περίπλοκη, αναχθήκαμε σε μία άλλη αναδρομική σχέση που είναι απλούστερη. Αυτή την απλούστερη αναδρομική σχέση θα καταφέρω να την επιλύσω δηλαδή να βρώ τον τύπο. Εν γένει, οι αναδρομικές σχέσεις είναι δύσκολο να επιλυθούν.

Έχω λοιπόν

$$D_N - D_{N-1} = 1$$

$$D_{N-1} - D_{N-2} = 1$$

$$\vdots$$

$$D_2 - D_1 = 1$$

και προσθέτοντας κατά μέλη είναι $D_N - D_1 = N-1 \Rightarrow D_N = D_1 + N - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow D_N = 2 + N - 1 \Rightarrow D_N = N+1.$

Άσκηση.

Να δειχθεί ότι η $N\times N$ ορίζουσα

$$D_N = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \dots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \dots & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1+x^2 \end{vmatrix} = 1+x^2+\dots+(x^2)^N = \frac{(x^2)^{N+1}-1}{x^2-1}$$

Είναι $D_N = (1+x^2)D_{N-1} - x^2 D_{N-2} \Rightarrow D_N - D_{N-1} = x^2(D_{N-1}-D_{N-2})$.

Άρα

$$D_N - D_{N-1} = x^2(D_{N-1}-D_{N-2})$$
$$D_{N-1} - D_{N-2} = x^2(D_{N-2}-D_{N-3})$$
$$\vdots$$
$$D_3 - D_2 = x^2(D_2 - D_1)$$

και προσθέτοντας έχουμε

$$D_N - D_2 = x^2(D_{N-1}-D_1) \Rightarrow D_N - x^2 D_{N-1} = D_2 - x^2 D_1 = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x \\ x & 1+x^2 \end{vmatrix} - x^2(1+x^2) =$$

$$= (1+x^2)^2 - x^2 - x^2(1+x^2) = 1 \Rightarrow D_N - x^2 D_{N-1} = 1.$$

Άρα

$$D_N - x^2 D_{N-1} = 1 \qquad \text{1η εξίσωση}$$
$$D_{N-1} - x^2 D_{N-2} = 1 \Rightarrow x^2 D_{N-1} - (x^2)^2 D_{N-2} = x^2 \qquad \text{2η εξίσωση}$$
$$\vdots$$
$$D_2 - x^2 D_1 = 1 \Rightarrow (x^2)^{N-2} D_2 - (x^2)^{N-1} D_1 = (x^2)^{N-2} \qquad (N-1)\text{η εξίσωση}$$

και προσθέτοντας έχουμε

$$D_N - (x^2)^{N-1} D_1 = 1 + x^2 + \dots + (x^2)^{N-2} \Rightarrow D_N = (x^2)^{N-1}(1+x^2) + 1 + x^2 + \dots + (x^2)^{N-2}$$

$$\Rightarrow D_N = 1 + x^2 + \dots + (x^2)^{N-2} + (x^2)^{N-1} + (x^2)^N$$

Παράδειγμα

Να δειχθεί ότι $D_N = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & & & & 3 \end{vmatrix} = 2^{N+1} - 1$

Πράγματι, $D_N = 3D_{N-1} - 2D_{N-2} \Rightarrow D_N - D_{N-1} = 2(D_{N-1} - D_{N-2})$

$\Rightarrow K_N = 2K_{N-1}$, $K_N \equiv D_N - D_{N-1}$

$\Rightarrow K_N = 2 \cdot 2 \cdot K_{N-2} = \cdots = 2^{N-2} K_{N-(N-2)} = 2^{N-2} K_2 =$

$= 2^{N-2}(D_2 - D_1) = 2^{N-2}\left(\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 3 \right) = 2^{N-2}(9-2-3) = 2^N$

$\Rightarrow D_N - D_{N-1} = 2^N$

$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow D_N &= D_{N-1} + 2^N \\ D_{N-1} &= D_{N-2} + 2^{N-1} \\ &\vdots \\ D_2 &= D_1 + 2^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow D_N = D_1 + 2^2 + \cdots + 2^N$$

$\Rightarrow D_N = 3 + 2^2 + \cdots + 2^N$

$\Rightarrow D_N = 1 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^N$

$\Rightarrow D_N = 2^{N+1} - 1$.

$$D\begin{pmatrix} B_{n\times n} & E_{n\times m} \\ \mathbb{O}_{m\times n} & C_{m\times m}\end{pmatrix} = D(B)\,D(C) \quad , \quad D\begin{pmatrix} B_{n\times n} & \mathbb{O}_{n\times m} \\ E_{m\times n} & C_{m\times m}\end{pmatrix} = D(B)\,D(C)$$

(δηλαδή η ορίζουσα σύνθετου τριγωνικού πίνακα ισούται με το γινόμενο των οριζουσών των "διαγώνιων" πινάκων)

Πράγματι, αν μία απεικόνιση $g: M_{k\times k}(F) \to F$ ικανοποιεί μόνο τα δύο πρώτα αξιώματα τη ορίζουσας (γραμμικότητα και alternating) τότε έχουμε ήδη δείξει (ίσως χωρίς να το καταλάβουμε) ότι ισχύει $g(A) = g(I_k)\,D(A)$, $A \in M_{k\times k}(F)$. (Αν περαιτέρω ισχύει και η τρίτη ιδιότητα $g(I_k) = 1$, τότε $g(A) = D(A) \Rightarrow g = D$, δηλαδή η g είναι η ορίζουσα).

Έστω συμβολίζουμε $D(A) = f(B, C, E)$ ως μία συνάρτηση των υποπινάκων B, C, E.

Θεωρώντας τους υποπίνακες C, E δεδομένους, το $f(B, C, E)$ γίνεται συνάρτηση μόνο του πίνακα B, δηλαδή $h(B) = f(B, C, E)$. Η απεικόνιση h ικανοποιεί τα δύο πρώτα αξιώματα της ορίζουσας, αφού τα ίδια ικανοποιεί και η f θεωρούμενη ειδικά ως συνάρτηση μόνο του B, άρα $h(B) = h(I_n)\,D(B) \Rightarrow f(B, C, E) = f(I_n, C, E)\,D(B) \Rightarrow D(A) = f(I_n, C, E)D(B)$.

Θεωρώντας τώρα τον υποπίνακα E δεδομένο, το $f(I_n, C, E)$ γίνεται συνάρτηση μόνο του πίνακα C, δηλαδή $k(C) = f(I_n, C, E)$. Η απεικόνιση k ικανοποιεί τα δύο πρώτα αξιώματα τη ορίζουσας, αφού τα ίδια ικανοποιεί και η f θεωρούμενη ειδικά ως συνάρτηση μόνο του C, άρα

$$k(C) = k(I_m)\,D(C) \Rightarrow f(I_n, C, E) = f(I_n, I_m, E)\,D(C)$$
$$\Rightarrow D(A) = f(I_n, I_m, E)\,D(C)\,D(B).$$

Αλλά
$$f(I_n, I_m, E) = D\begin{pmatrix} I_n & E_{n\times m} \\ \mathbb{O}_{m\times n} & I_m \end{pmatrix} = D\begin{pmatrix} \begin{matrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{matrix} & E_{n\times m} \\ \mathbb{O}_{m\times n} & \begin{matrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{matrix} \end{pmatrix} = 1$$

↳ διαγώνιος άνω

Άρα $D(A) = 1 \cdot D(C)\,D(B)$.

<u>Παράδειγμα</u>

$$D\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -(-2) - 3(-4) = 14$$

(ή ακόμη πιο απλά $= (-2)\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2(-1-6) = 14$)

Ο παραπάνω πίνακας μπορεί να γραφεί ως σύνθετος τριγωνικός (άνω) πίνακας, δηλαδή

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

Άρα, από την προηγούμενη πρόταση

$$D\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & -2 \end{array}\right) = D\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} D(-2) = (-1-6)\cdot(-2) = 14.$$

$$D\begin{pmatrix} \boxed{B_1} & C & E \\ 0 & \boxed{B_2} & F \\ 0 & 0 & \boxed{B_3} \end{pmatrix} = D(B_1)\, D(B_2)\, D(B_3)$$

Πράγματι,

$$D\begin{pmatrix} \boxed{B_1} & C & E \\ 0 & \boxed{B_2} & F \\ 0 & 0 & \boxed{B_3} \end{pmatrix} = D\begin{pmatrix} \boxed{B_1} & G \\ 0 & \boxed{B} \end{pmatrix} = D(B_1)\, D(B) = D(B_1)\, D\begin{pmatrix} \boxed{B_2} & F \\ 0 & \boxed{B_3} \end{pmatrix}$$

$$= D(B_1)\, D(B_2)\, D(B_3) ,$$

δηλαδή προκύπτει με διαδοχική επανάληψη.

<u>Σχόλιο</u> Αν ειδικά οι "διαγώνιοι" πίνακες $B_1, B_2, B_3, \ldots$ είναι μοναδιάστατοι, δηλαδή στοιχεία τού F, τότε ο πίνακας είναι τριγωνικός άνω (κάτω) και η ορίζουσα του θα είναι $D(B_1)D(B_2)D(B_3)\ldots$ που είναι απλά το γινόμενο των διαγώνιων στοιχείων (κάτι που ήδη ξέρουμε).

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left[(-1)^{i+j}|A_{ij}|\right]^T = \frac{1}{|A|}C^T = \frac{1}{|A|}(\mathrm{adj}A)$$

Έστω $G=(g_{ij}) \equiv \left[(-1)^{i+j}|A_{ij}|\right]^T \Rightarrow g_{ij} = (-1)^{j+i}|A_{ji}|$. Είναι

$$(G\cdot A)_{ij} = \sum_{k=1}^{N} g_{ik}a_{kj} = \sum_{k=1}^{N}(-1)^{k+i}|A_{ki}|a_{kj} = \sum_{k=1}^{N}(-1)^{k+i}a_{kj}|A_{ki}| = |A|\delta_{ij}$$

$$\Rightarrow G\cdot A = |A|I_N \Rightarrow \frac{G}{|A|}\cdot A = I_N \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}G \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left[(-1)^{i+j}|A_{ij}|\right]^T.$$

Σχόλιο Ο πίνακας $C=(c_{ij})$, $c_{ij} \equiv (-1)^{i+j}|A_{ij}|$ λέγεται πίνακας συμπαραγόντων (cofactors) του A (το c_{ij} λέγεται cofactor του a_{ij}). Ο πίνακας C^T λέγεται και adjoint (προσαρτημένος) του A, δηλ. $(\mathrm{adj}A)_{ij} = (C^T)_{ij} = c_{ji}$.

Σχόλιο Ισχύει $A\cdot \mathrm{adj}A = \mathrm{adj}A\cdot A = |A|I_N$ γενικά, είτε $|A|=0$ είτε $|A|\neq 0$.

Παράδειγμα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Υπολογίζουμε τους cofactors:

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

Ο πίνακας των συμπαραγόντων είναι

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Άρα $$C^T = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Επειδή $$|A| = 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 2 + 1 = 1$$

Άρα $$A^{-1} = \frac{1}{|A|} C^T = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Πράγματι $$A A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -4 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Άσκηση

Αν $A_{N\times N}$ αντισυμμετρικός και $N = odd$, δείξτε ότι $D(A) = 0$

Πράγματι, $D(A) = D(A^T) = D(-A) = (-1)^N D(A) \Rightarrow [1-(-1)^N]\, D(A) = 0$

$\Rightarrow [1-(-1)]\, D(A) = 0 \Rightarrow 2\, D(A) = 0 \Rightarrow D(A) = 0.$

Άσκηση

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Βρείτε τον $\mathrm{adj}\, A = \begin{pmatrix} 2 & -7 & 3 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Άσκηση

Δείξτε ότι $\underline{|\mathrm{adj}\, A| = |A|^{N-1}}$

Πράγματι, είναι $A \cdot \mathrm{adj}\, A = |A|\, I_N$.

Έστω $|A| = 0 \Rightarrow A \cdot \mathrm{adj}\, A = \Phi$

Αν υποθέσω ότι ο $\mathrm{adj}\, A$ είναι αντιστρέψιμος δηλαδή ότι $|\mathrm{adj}\, A| \neq 0$, τότε $r(\mathrm{adj}\, A) = N$.

Αλλά ισχύει $r(A) + r(\mathrm{adj}\, A) - N \leq r(A \cdot \mathrm{adj}\, A)$

$\Rightarrow r(A) + N - N \leq r(\Phi) \Rightarrow r(A) \leq 0 \Rightarrow r(A) = 0$ άτοπο,

διότι τότε $A = \Phi$. (Και για $A = \Phi$ πάλι $\mathrm{adj}\, A = 0 \Rightarrow |\mathrm{adj}\, A| = 0 = |A|^{N-1}$)

Άρα $|\mathrm{adj}\, A| = 0 = |A|^{N-1}$.

Έστω $|A| \neq 0 \Rightarrow |A \cdot \mathrm{adj}\, A| = |A|^N\, |I_N| \Rightarrow |A|\, |\mathrm{adj}\, A| = |A|^N \Rightarrow |\mathrm{adj}\, A| = |A|^{N-1}$

Άσκηση

$r(A_{N\times N}) < N-1 \Leftrightarrow \mathrm{adj}\, A = \Phi$

Πράγματι, $r(A_{N\times N}) < N-1 \Leftrightarrow$ όλες οι $(N-1)\times(N-1)$ ελάσσονες ορίζουσες του A είναι μηδέν

$\Leftrightarrow \mathrm{adj}\, A = \Phi$, αφού ο $\mathrm{adj}\, A$ κατασκευάζεται από $(N-1)\times(N-1)$ ελάσσονες ορίζουσες του A

Άσκηση

Δείξτε ότι

$$r(A_{N\times N}) = N \Rightarrow r(\mathrm{adj}\,A) = N$$

$$r(A) = N-1 \Rightarrow r(\mathrm{adj}\,A) = 1$$

$$r(A) < N-1 \Rightarrow r(\mathrm{adj}\,A) = 0$$

- Πράγματι, αν $r(A)=N \Rightarrow$ A αντιστρέψιμος $\Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow$
  $\Rightarrow |\mathrm{adj}\,A| = |A|^{N-1} \neq 0 \Rightarrow$ $\mathrm{adj}\,A$ αντιστρέψιμος $\Rightarrow r(\mathrm{adj}\,A) = N$.

- $r(A) < N-1 \Rightarrow \mathrm{adj}\,A = \Phi$ (το δείξαμε προηγουμένως)

  $\Rightarrow r(\mathrm{adj}\,A) = 0$

- $r(A) = N-1 \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow A\cdot\mathrm{adj}\,A = \Phi \Rightarrow r(A\cdot\mathrm{adj}\,A) = 0 \Rightarrow$

  $\Rightarrow 0 = r(A\cdot\mathrm{adj}\,A) \geq r(A) + r(\mathrm{adj}\,A) - N$

  $\Rightarrow 0 \geq N-1+r(\mathrm{adj}\,A) - N \Rightarrow 0 \geq r(\mathrm{adj}\,A) - 1 \Rightarrow r(\mathrm{adj}\,A) \leq 1$

  $\Rightarrow r(\mathrm{adj}\,A) = 0$ ή $r(\mathrm{adj}\,A) = 1$.

  Αλλά $r(A) = N-1 \Rightarrow \exists$ $(N-1)\times(N-1)$ ελάσσων ορίζουσα του A μη-μηδενική

  $\Rightarrow \mathrm{adj}\,A \neq \Phi$ (διότι ακριβώς περιέχει τέτοιες ορίζουσες)

  $\Rightarrow r(\mathrm{adj}\,A) \neq 0$

  $\Rightarrow r(\mathrm{adj}\,A) = 1$

Άσκηση

$$\operatorname{adj}(\operatorname{adj} A) = |A|^{N-2} A_{N\times N} \qquad (N \neq 1)$$

• Πράγματι, έστω $|A| \neq 0$. Είναι

$$\operatorname{adj} A \cdot \operatorname{adj}(\operatorname{adj} A) = |\operatorname{adj} A|\, I_N$$

$\Rightarrow \quad \operatorname{adj} A \cdot \operatorname{adj}(\operatorname{adj} A) = |A|^{N-1} I_N$ (από προηγουμένως)

$\Rightarrow \quad A \cdot \operatorname{adj} A \cdot \operatorname{adj}(\operatorname{adj} A) = |A|^{N-1} A$

$\Rightarrow \quad |A|\, I_N \cdot \operatorname{adj}(\operatorname{adj} A) = |A|^{N-1} A$

$\Rightarrow \quad \operatorname{adj}(\operatorname{adj} A) = |A|^{N-2} A$

• Έστω $|A| = 0$. Τότε $r(A) \leq N-1$ και από προηγουμένως είναι $r(\operatorname{adj} A) = 0$ ή 1.

(*) Αν $r(\operatorname{adj} A) = 0 \Rightarrow \operatorname{adj} A = \mathbb{O} \Rightarrow \operatorname{adj}(\operatorname{adj} A) = \mathbb{O}$.

Αν $N \neq 2$ τότε $|A|^{N-2} A = 0^{N-2} A = \mathbb{O} \Rightarrow \operatorname{adj}(\operatorname{adj} A) = |A|^{N-2} A$.

Αν $N = 2$ τότε $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{adj}(\operatorname{adj} A) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \mathbb{O} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = \delta = 0 \Rightarrow A = \mathbb{O} \Rightarrow \operatorname{adj}(\operatorname{adj} A) = 0^0 A$.

(*) Αν $r(\operatorname{adj} A) = 1$ και $N = 2$ τότε $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{adj}(\operatorname{adj} A) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{adj}(\operatorname{adj} A) = A \Rightarrow \operatorname{adj}(\operatorname{adj} A) = 0^0 A$.

Έστω $r(\operatorname{adj} A) = 1$ και $N \neq 2$. Τότε κάθε $2\times 2, 3\times 3, \ldots, N\times N$ ελάσσων ορίζουσα του $\operatorname{adj} A$ είναι μηδέν. Αλλά, ο $\operatorname{adj}(\operatorname{adj} A)$ περιέχει $(N-1)\times(N-1)$ ελάσσονες ορίζουσες του $\operatorname{adj} A$ και άρα για $N > 2$ αυτές είναι όλες μηδέν.

Άρα $\operatorname{adj}(\operatorname{adj} A) = \mathbb{O} \Rightarrow \operatorname{adj}(\operatorname{adj} A) = |A|^{N-2} A$

$$AX = b, \quad |A| \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x_i = \frac{1}{|A|} D(A^1, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-θέση}}}{b}, \dots, A^N)$$ "κανόνας Cramer"

Πράγματι, $X = A^{-1} b = \frac{1}{|A|} G \cdot b$, $\quad G = \left[(-1)^{i+j} |A_{ij}|\right]^T$, $\; g_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ji}|$.

Άρα $x_i = \frac{1}{|A|} (G \cdot b)_i = \frac{1}{|A|} \sum_{j=1}^{N} g_{ij} b_j = \frac{1}{|A|} \sum_{j=1}^{N} (-1)^{i+j} |A_{ji}| b_j =$

$$= \frac{1}{|A|} \sum_{j=1}^{N} (-1)^{i+j} b_j |A_{ji}|$$

Αν $\underset{(i)}{\hat{A}} \equiv (A^1, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-θέση}}}{b}, \dots, A^N)$, τότε $\underset{(i)}{\hat{A}}{}^i = b$, $\left(\underset{(i)}{\hat{A}}{}^i\right)_j = \underset{(i)}{\hat{a}}{}_{ji} = b_j$,

$\underset{(i)}{\hat{A}}{}_{ji} = A_{ji}$, $\forall j$. Άρα $D(\underset{(i)}{\hat{A}}) = \sum_{j=1}^{N} (-1)^{j+i} \underset{(i)}{\hat{a}}{}_{ji} |\underset{(i)}{\hat{A}}{}_{ji}|$ ← ανάπτυξη ως προς i-στήλη

$$= \sum_{j=1}^{N} (-1)^{i+j} b_j |A_{ji}|$$

Άρα $x_i = \frac{1}{|A|} D(A^1, \dots, b, \dots, A^N)$.

Άλλη απόδειξη:

$$|A| x_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & & & & \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{Ni} & \cdots & a_{NN} \end{vmatrix} x_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} x_i & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} x_i & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{Ni} x_i & \cdots & a_{NN} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1i} x_i + \cdots + a_{1N} x_N & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2i} x_i + \cdots + a_{2N} x_N & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{N1} x_1 + a_{N2} x_2 + \cdots + a_{Ni} x_i + \cdots + a_{NN} x_N & \cdots & a_{NN} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & b_N & \cdots & a_{NN} \end{vmatrix} = D(A^1, A^2, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-θέση}}}{b}, \dots, A^N)$$

Σχόλιο: Η ορίζουσα $D(A^1, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-θέση}}}{b}, \dots A^N)$ συμβολίζεται και D_i, οπότε ο κανόνας Cramer γράφεται και ως $x_i = \frac{D_i}{D(A)}$

Αν $|A| = 0$ και $\exists D_i \neq 0 \Rightarrow$ αδύνατο

Αν $|A| = 0$ και $\forall D_i = 0 \Rightarrow$ αδύνατο ή αόριστο

Παράδειγμα

$$\left.\begin{array}{r}x_1 - x_2 \qquad = 1\\ x_1 + x_2 + x_3 = 0\\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -2\end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ -2 & -1 & 3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 3\end{vmatrix}} = \frac{6}{5}$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & -2 & 3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 3\end{vmatrix}} = \frac{1}{5}$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & -1 & -2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 3\end{vmatrix}} = -\frac{7}{5}$$

$|A| = 0 \Leftrightarrow |A_{re}| = 0$, $|A| \neq 0 \Leftrightarrow |A_{re}| \neq 0$

Πράγματι, με απευθείας υπολογισμό βλέπουμε ότι κάθε στοιχειώδης πίνακας E_i έχει $|E_i| \neq 0$. Συγκεκριμένα $|\mathcal{E}_{ij}| = -1$, $|\mathcal{E}_i(\lambda)| = \lambda$, $|\mathcal{E}_{ij}(\lambda)| = 1$.

Για κάθε πίνακα A, υπάρχουν στοιχειώδεις πίνακες E_i με $A_{re} = E_k \cdots E_1 A \Rightarrow |A_{re}| = |E_k \cdots E_1 A| \Rightarrow |A_{re}| = |E_k| \cdots |E_1||A|$ και επειδή $|E_i| \neq 0$ προκύπτει η ζητούμενη.

A αντιστρέψιμος $\Leftrightarrow |A| \neq 0$, A μη-αντιστρέψιμος $\Leftrightarrow |A| = 0$

Πράγματι, αν A αντιστρέψιμος $\Rightarrow A_{re} = I_N \Rightarrow |A_{re}| = |I_N| \Rightarrow |A| = 1 \Rightarrow |A| \neq 0$.

Αντίστροφα, θα δείξουμε ότι A μη-αντιστρέψιμος $\Rightarrow |A| = 0$ και επομένως, θα έχουμε δείξει ότι $|A| \neq 0 \Rightarrow A$ αντιστρέψιμος. Πράγματι, αν A μη-αντιστρέψιμος $\Rightarrow r(A) < N \Rightarrow A^1, \dots, A^N$ Γρ. Εξ. $\Rightarrow \exists A^j = \sum_{k \neq j} \lambda_k A^k$

$$\Rightarrow D(A) = D(A^1, \dots, A^j, \dots, A^N) = D(A^1, \dots, \underbrace{\sum_{k \neq j} \lambda_k A^k}_{j\text{-θέση}}, \dots, A^N) =$$

$$= \sum_{k \neq j} D(A^1, \dots, \underbrace{A^k}_{j\text{-θέση}}, \dots, A^N) = 0.$$

$r(A) =$ μέγιστο k για το οποίο υπάρχει μη-μηδενική k- ελάσσων ορίζουσα

Πράγματι, οποιαδήποτε επιλογή μεγαλύτερου πλήθους γραμμών από $r(A)$ είναι γρ. εξ. $\Rightarrow$ κάθε $k' > k$ ελάσ. ορίζουσα $= 0$.

Άσκηση $AB\, \mathrm{adj}(AB) = AB \cdot \mathrm{adj}B \cdot \mathrm{adj}A$

Πράγματι, $AB \cdot \mathrm{adj}B \cdot \mathrm{adj}A = A(B\, \mathrm{adj}B)\mathrm{adj}A = A(|B| I)\mathrm{adj}A = |B|\, A\, \mathrm{adj}A = |B||A| I = |AB| I$

και $AB \cdot \mathrm{adj}(AB) = |AB| I$. Άρα $AB \cdot \mathrm{adj}(AB) = AB \cdot \mathrm{adj}B \cdot \mathrm{adj}A$

Άσκηση A, B αντιστρέψιμοι $\Rightarrow \mathrm{adj}(AB) = (\mathrm{adj}B)(\mathrm{adj}A)$

Πράγματι, A, B αντιστρέψιμοι $\Rightarrow \exists\ |A|, |B| \neq 0 \Rightarrow |AB| = |A||B| \neq 0$

Είναι $\mathrm{adj}(AB) = |AB|(AB)^{-1} = |A||B|\, B^{-1}A^{-1} = (\mathrm{adj}B)(\mathrm{adj}A)$

Άσκηση

Να βρεθεί για όλα τα a, b η τάξη του πίνακα $A=\begin{pmatrix} 2a+b & 3a+3b & -a-2b & 2a+b \\ 3b & 3b & -a+b & a+5b \\ 3a & 4a+2b & -3b & 3a \\ b-a & -2a-b & 3b & 3b \end{pmatrix}$

Είναι

$$\begin{vmatrix} 2a+b & 3a+3b & -a-2b & 2a+b \\ 3b & 3b & -a+b & a+5b \\ 3a & 4a+2b & -3b & 3a \\ b-a & -2a-b & 3b & 3b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a-2b & 3a+3b & -a-2b & 2a+b \\ 0 & 3b & -a+b & a+5b \\ -a-2b & 4a+2b & -3b & 3a \\ a+2b & -2a-b & 3b & 3b \end{vmatrix} =$$

$$= (a+2b)\begin{vmatrix} 0 & a+2b & -a+b & 2a+4b \\ 0 & 3b & -a+b & a+5b \\ 0 & 2a+b & 0 & 3a+3b \\ 1 & -2a-b & 3b & 3b \end{vmatrix} = -(a+2b)(b-a)\begin{vmatrix} a-b & 0 & a-b \\ 3b & 1 & a+5b \\ 2a+b & 0 & 3a+3b \end{vmatrix} =$$

$$= (a+2b)(a-b)^2\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2a+b & a+2b \end{vmatrix} = (a+2b)^2(a-b)^2$$

- $a \neq -2b$ και $a \neq b$

Η τάξη του πίνακα είναι 4 αφού η ορίζουσα είναι διάφορη του μηδενός.

$a = -2b \neq 0$

Ο πίνακας είναι $A = \begin{pmatrix} -3b & -3b & 0 & -3b \\ 3b & 3b & 3b & 3b \\ -6b & -6b & -3b & -6b \\ 3b & 3b & 3b & 3b \end{pmatrix}$

Είναι $r(A) = r_\sigma(A)$. Αλλά ο A έχει την 1η, 2η και 4η στήλη ίδιες, άρα

$r_\sigma(A) = \dim\langle(-3b, 3b, -6b, 3b), (0, 3b, -3b, 3b)\rangle = \dim\langle(-1,1,-2,1), (0,1,-1,1)\rangle = 2$

Άρα η τάξη του πίνακα είναι 2.

- $a = b \neq 0$

Ο πίνακας είναι $A = \begin{pmatrix} 3a & 6a & -3a & 3a \\ 3a & 3a & 0 & 6a \\ 3a & 6a & -3a & 3a \\ 0 & -3a & 3a & 3a \end{pmatrix}$

Είναι φανερό ότι $\begin{pmatrix} -3a \\ 0 \\ -3a \\ 3a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a \\ 3a \\ 3a \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6a \\ 3a \\ 6a \\ -3a \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} 3a \\ 6a \\ 3a \\ 3a \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 3a \\ 3a \\ 3a \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6a \\ 3a \\ 6a \\ -3a \end{pmatrix}$,

άρα $r_\sigma(A) = \dim\langle(3a, 3a, 3a, 0), (6a, 3a, 6a, -3a)\rangle = \dim\langle(1,1,1,0), (2,1,2,-1)\rangle = 2$

Άρα $r(A) = r_\sigma(A) = 2$.

- $a = b = 0$, $A = 0$, $r(A) = 0$.

Παράδειγμα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$ Να βρεθεί το $r(A)$ μέσω οριζουσών

Έστω $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} =$

$= -12 + 1 + 8 + 3 = 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -3 + 2 = -1 \neq 0.$$

Άρα $r(A) = 2$.

Παράδειγμα

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 7 & 5 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$ Να βρεθεί το $r(A)$ μέσω οριζουσών

Έστω $\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 7 & 5 & -1 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 7 & 5 & 0 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 7 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = -5 + 7 = 2 \neq 0$$

Άρα $r(A) = 2$.

Παράδειγμα

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow r(A) = 2$$ (Προφανές) By inspection

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow r(A) = 3$$ »

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow r(A) = 2$$ »

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow r(A) = 2$$ »

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \rightsquigarrow r(A) = 3$$

$$AX = b \overset{|A|\neq 0}{\Leftrightarrow} X = A^{-1} b$$

Αυτός είναι ένας άλλος τρόπος επίλυσης γραμμικών συστημάτων $N\times N$, εφόσον ο πίνακας A αντιστρέφεται.

Παράδειγμα

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+z=3 \\ -y+z=2 \\ x \quad +2z=1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = b$$

Είναι $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Άρα $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} b = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

$v_1, \dots, v_N \in F^N$ Γρ. Ανεξ. $\Leftrightarrow$ $|\overset{\downarrow}{v_1} \cdots \overset{\downarrow}{v_N}| \neq 0$

Πράγματι, $\dim \langle v_1, \dots, v_N \rangle = r(\overset{\downarrow}{v_1} \cdots \overset{\downarrow}{v_N})$. Άρα, $v_1, \dots, v_N$ Γρ. Ανεξ. $\Leftrightarrow$ $\dim \langle v_1, \dots, v_N \rangle = N \Leftrightarrow r(\overset{\downarrow}{v_1} \cdots \overset{\downarrow}{v_N}) = N \Leftrightarrow |\overset{\downarrow}{v_1} \cdots \overset{\downarrow}{v_N}| \neq 0$.

Παράδειγμα

Τα $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (0,1,1)$, $v_3 = (1,-1,1)$ είναι Γρ. Εξ. ή Ανεξ.;

Είναι $|\overset{\downarrow}{v_1}\ \overset{\downarrow}{v_2}\ \overset{\downarrow}{v_3}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 1 = 3 \neq 0$

Άρα v_1, v_2, v_3 Γρ. Ανεξ.

Παράδειγμα

Τα $v_1 = (-1,1,2)$, $v_2 = (1,1,1)$, $v_3 = (2,0,-1)$ είναι Γρ. Εξ. ή Ανεξ.;
Αν είναι Γρ. Εξ., ποια η διάσταση του παραγόμενου υπόχωρου;

Είναι $|\overset{\downarrow}{v_1}\ \overset{\downarrow}{v_2}\ \overset{\downarrow}{v_3}| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 2 = 0.$

Άρα v_1, v_2, v_3 Γρ. Εξ.

Εξάλλου $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow r(\overset{\downarrow}{v_1}\ \overset{\downarrow}{v_2}\ \overset{\downarrow}{v_3}) = 2 \Rightarrow \dim \langle v_1, v_2, v_3 \rangle = 2.$

Παράδειγμα (επίλυση συστήματος μέσω οριζουσών – ελασσόνων οριζουσών)

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 6 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= -1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 5 \end{aligned}\right\}$$

Αν $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ τότε

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & -1 & 2 & 6 \\ -1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right) \underset{\gamma}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 5 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 5 & -1 & 3 \end{array}\right) \underset{\gamma}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 5 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\gamma}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Άρα $r(A|b) = r(A) = 2$ και το σύστημα έχει λύση.

Επειδή $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, άρα

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 6 + x_3 - 2x_4 \\ -x_1 - x_2 &= -1 - 2x_3 + x_4 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$$

$$x_1 = -\begin{vmatrix} 6 + x_3 - 2x_4 & 2 \\ -1 - 2x_3 + x_4 & -1 \end{vmatrix} = 4 - 3x_3$$

$$x_2 = -\begin{vmatrix} 3 & 6 + x_3 - 2x_4 \\ -1 & -1 - 2x_3 + x_4 \end{vmatrix} = -3 + 5x_3 - x_4$$

Άρα $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (4 - 3x_3, \ -3 + 5x_3 - x_4, \ x_3, \ x_4)$

$= (4, -3, 0, 0) + x_3(-3, 5, 1, 0) + x_4(0, -1, 0, 1)$, $x_3, x_4 \in \mathbb{R}$