ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Σημειώσεις – Πίνακες Μέρος Β

Κοφινάς Γιώργος

Τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών και Επικοινωνιακών Συστημάτων

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

<u>Στοιχειώδης μετασχηματισμός γραμμών</u> (σ.μ.γ.) ενός πίνακα $A \in M_{M\times N}(F)$ λέγεται καθεμια από τις παρακάτω τρεις διαδικασίες που κάνουμε στον A:

1) Εναλλαγή γραμμών, δηλ. $r_i \leftrightarrow r_j$
2) Πολ/σμός μιας γραμμής με μη-μηδενικό $\lambda \in F$, δηλ. $r_i \to \lambda r_i$ $(\lambda \neq 0)$
3) Πρόσθεση σε μια γραμμή του πολλαπλασίου μιας άλλης, δηλ. $r_i \to r_i + \lambda r_j$ $(i \neq j)$

Ο συνδυασμός των μετ/μών 2 και 3 σημαίνει αντικατάσταση μιας γραμμής από το άθροισμα ενός μη-μηδενικού πολλαπλασίου αυτής και ενός πολλαπλασίου μιας άλλης, δηλ. $r_i \to \lambda r_i + \mu r_j$ $(\lambda \neq 0)$

<u>Γραμμοϊσοδύναμοι</u> λέγονται δύο πίνακες $A, B \in M_{M\times N}(F)$ αν προκύπτει ο ένας από τον άλλο με πεπερασμένο πλήθος σ.μ.γ. (συμβολίζουμε $A \underset{\gamma}{\sim} B$)

(είναι φανερό ότι κάθε σ.μ.γ. που έχει γίνει σε έναν πίνακα A μπορεί να αναιρεθεί εκτελώντας στον νέο πίνακα κάποιο "αντίστροφο" σ.μ.γ. του ίδιου τύπου. Πιο γενικά, ένα πλήθος σ.μ.γ. που έχουν εκτελεστεί σ' έναν πίνακα A μπορεί να αναιρεθεί εκτελώντας στον νέο πίνακα ένα σύνολο από "αντίστροφους" σ.μ.γ. Επομένως, αν $A \underset{\gamma}{\sim} B$ τότε και $B \underset{\gamma}{\sim} A$ και μιλάμε για A, B γραμμοϊσοδύναμους)

π.χ. Οι πίνακες $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ είναι γραμμοϊσοδύναμοι,

αφού $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to r_2 + 2r_3} \underset{\gamma}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \underset{\gamma}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} = B$,

άρα $A \underset{\gamma}{\sim} B$.

Αντιστρόφως, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \underset{\gamma}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to r_2 - 2r_3} \underset{\gamma}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = A$,

άρα $B \underset{\gamma}{\sim} A$.

<u>Παρατήρηση</u> (1) Προφανώς, ο γραμμόχωρος $\langle A_1, \ldots, A_M \rangle$ τού A δεν αλλάζει κάτω από σ.μ.γ., αφού οι γραμμές του επόμενου πίνακα είναι γραμμικοί συνδυασμοί των γραμμών τού προηγούμενου πίνακα, δηλαδή
$A \underset{\gamma}{\sim} B \Rightarrow \langle A_1, \ldots, A_M \rangle = \langle B_1, \ldots, B_M \rangle$.

2) Η σχέση $\underset{\gamma}{\sim}$ είναι σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο των πινάκων.

Πράγματι, $A \overset{r_i \to 1 r_i}{\underset{\gamma}{\sim}} A$, άρα $A \underset{\gamma}{\sim} A$. Επίσης, αν $A \underset{\gamma}{\sim} B$, τότε $B \underset{\gamma}{\sim} A$. Τέλος, αν $A \underset{\gamma}{\sim} B$ και $B \underset{\gamma}{\sim} C$, τότε $A \underset{\gamma}{\sim} C$ αφού ο C προκύπτει από τον A εφαρμόζοντας το σύνολο των σ.μ.γ. από τον A στον B, ακολουθούμενων από τους σ.μ.γ. από τον B στον C.

<u>Θεώρημα</u> (Μέθοδος απαλειφής Gauss)

Κάθε πίνακας $A \in M_{M\times N}(F)$ είναι γραμμοϊσοδύναμος με έναν $M \times N$ απλό κλιμακωτό πίνακα A_{rc} ("γραμμοκανονική μορφή τού A").

Αντί της τυπικής απόδειξης (που δεν προσφέρει ιδιαίτερα) θα γίνει το θεώρημα κατανοητό μέσω παραδειγμάτων.

1.χ. $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} r_2 \to r_2 + 2r_1 \\ r_3 \to \frac{1}{2} r_3 \end{matrix} \underset{\gamma}{\sim} \overset{\text{κλιμακωτός } A_{re}}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 3 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}} r_2 \to \tfrac{1}{7} r_2 \underset{\gamma}{\sim}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3/7 & 15/7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} r_1 \to r_1 - 2r_3 \\ r_2 \to r_2 - \frac{3}{7} r_3 \end{matrix} \underset{\gamma}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} r_1 \to r_1 - 2r_2 \underset{\gamma}{\sim} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}}_{\text{απλός κλιμακωτός}} = A_{rc}$$

<u>Παρατήρηση</u> (1) Η διαδικασία της μεθόδου απαλειφής Gauss κάνει προφανή την ύπαρξη γραμμοκανονικής μορφής για κάθε πίνακα.

2) Η γραμμοκανονική μορφή κάποιου πίνακα είναι μοναδική.

Πράγματι, αν A_{rc}, A'_{rc} είναι δύο γραμμοκανονικές μορφές τού A, τότε $A \underset{\gamma}{\sim} A_{rc}$, $A \underset{\gamma}{\sim} A'_{rc}$, άρα $A_{rc} \underset{\gamma}{\sim} A'_{rc}$, δηλαδή έχουμε δύο απλούς κλιμακωτούς πίνακες A_{rc}, A'_{rc} γραμμοϊσοδύναμους. Άρα, οι γραμμές του A'_{rc} προκύπτουν ως γραμμικοί συνδυασμοί των γραμμών του A_{rc} και επειδή οι A_{rc}, A'_{rc} είναι σε κλιμακωτή μορφή, άρα οι οδηγοί τών A_{rc}, A'_{rc} πρέπει να βρίσκονται στις ίδιες στήλες. Στη συνέχεια διαπιστώνουμε ότι λόγω της απλής κλιμακωτής μορφής τους είναι $A_{rc} = A'_{rc}$.

Η παρατήρηση αυτή είναι σημαντική διότι λέει ότι ανεξάρτητα από τα ενδιάμεσα βήματα που ακολουθεί κανείς, η τελική γραμμοκανονική μορφή είναι η ίδια.

Για να γίνει πιο κατανοητό τι σημαίνει διαφορετικές γραμμοκανονικές μορφές δίνουμε κάποια παραδείγματα:

για πίνακες 2×2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

για πίνακες 2×3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots,$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

για πίνακες 3×3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(3) Επειδή $\langle A_1, \dots, A_M \rangle = \langle A_{re,1}, \dots, A_{re,M} \rangle = \langle A_{rc,1}, \dots, A_{rc,M} \rangle$, άρα για ένα σύνολο διανυσμάτων (ή για έναν πίνακα) η εύρεση μιας βάσης και της διάστασης του παραγόμενου γραμμόχωρου γίνεται συντομότατα μέσω τη παραπάνω μεθόδου αναγωγής σε κλιμακωτή μορφή (ή και στην γραμμοκανονική μορφή, αν και τούτο δεν είναι αναγκαίο). Επιπλέον $r(A) = r(A_{re}) = r(A_{rc})$.

π.χ. για τα διανύσματα $v_1 = (1,1,1,0,0)$, $v_2 = (1,-1,-1,1,1)$, $v_3 = (2,0,0,1,1)$, $v_4 = (0,-2,-2,1,1)$ του $\mathbb{R}^5$, μία βάση και η διάσταση του παραγόμενου γραμμόχωρου βρίσκεται συντομότατα

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\gamma}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\gamma}{\sim} \overset{\to \text{κλιμακωτό}}{\underset{\text{(ή σταματάμε εδώ)}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}} \underset{\gamma}{\sim} \overset{\to \text{απλό κλιμακωτό}}{\underset{\text{(ή προχωράμε εδώ)}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}}$$

άρα ο υπόχωρος είναι διδιάστατος, με μία βάση τα διανύσματα $(1,1,1,0,0)$, $(0,-2,-2,1,1)$.

π.χ. Ποια είναι η τάξη του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & 35 & -24 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?

Είναι
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & 35 & -24 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} r_1 \leftrightarrow r_2 \\ \\ \\ r_4 \leftrightarrow r_5 \end{matrix} \underset{\gamma}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 35 & -24 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} r_1 \to \tfrac{1}{2} r_1 \underset{\gamma}{\sim}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 35 & -24 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} r_3 \to r_3 - 3r_1 \\ r_4 \to r_4 - 5r_1 \end{matrix} \underset{\gamma}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 35 & -24 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 & 7/2 & -5/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 & 7/2 & -5/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} r_4 \to r_4 - r_3 \underset{\gamma}{\sim}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 35 & -24 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 & 7/2 & -5/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} r_1 \to r_1 - r_3 \\ r_2 \to r_2 - 10r_3 \end{matrix} \underset{\gamma}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 1/2 & 7/2 & -5/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} r_2 \leftrightarrow r_3 \\ r_3 \to 2r_3 \end{matrix} \underset{\gamma}{\sim}$$

$$\underset{\hookrightarrow \text{κλιμακωτό } r(A_{re}) = 3}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \begin{matrix} r_1 \to r_1 - 3r_3 \\ r_2 \to r_2 + 5r_3 \end{matrix} \underset{\gamma}{\sim} \underset{\hookrightarrow \text{απλό κλιμακωτό } r(A_{rc}) = 3}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 26 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 0 & -43 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} = A_{rc}$$

Άρα $r(A) = 3$.

$A \underset{\gamma}{\sim} B \Leftrightarrow A_{rc} = B_{rc} \Leftrightarrow \langle A_1, \dots, A_M \rangle = \langle B_1, \dots, B_M \rangle$

Έστω $A \underset{\gamma}{\sim} B$. Αφού $A \underset{\gamma}{\sim} A_{rc}$, $B \underset{\gamma}{\sim} B_{rc}$, άρα $A \underset{\gamma}{\sim} B_{rc}$. Λόγω της μοναδικότητας της γραμμοκανονικής μορφής τού A έπεται ότι $A_{rc} = B_{rc}$.
Αντίστροφα, έστω $A_{rc} = B_{rc}$. Αφού $A \underset{\gamma}{\sim} A_{rc}$, $B \underset{\gamma}{\sim} B_{rc} = A_{rc}$, άρα $A \underset{\gamma}{\sim} B$.

Έστω $A \underset{\gamma}{\sim} B$. Αφού οι γραμμόχωροι δεν αλλάζουν κάτω από $\underset{\gamma}{\sim}$, άρα $\langle A_1, \dots, A_M \rangle = \langle B_1, \dots, B_M \rangle$.
Αντίστροφα, έστω $\langle A_1, \dots, A_M \rangle = \langle B_1, \dots, B_M \rangle$. Αφού $A \underset{\gamma}{\sim} A_{rc}$, άρα $\langle A_1, \dots, A_M \rangle = \langle A_{rc,1}, \dots, A_{rc,M} \rangle$ και αφού $B \underset{\gamma}{\sim} B_{rc}$, άρα $\langle B_1, \dots, B_M \rangle = \langle B_{rc,1}, \dots, B_{rc,M} \rangle$.
Τελικά, $\langle A_{rc,1}, \dots, A_{rc,M} \rangle = \langle B_{rc,1}, \dots, B_{rc,M} \rangle$. Αφού οι απλοί κλιμακωτοί πίνακες A_{rc}, B_{rc} έχουν τους ίδιους γραμμοχώρους, άρα $A_{rc} = B_{rc}$.

Παρατηρήσεις.

1) Δοθέντων δύο πινάκων A, B δεν είναι προφανές ποια διαδικασία πρέπει να ακολουθηθεί ώστε να αποφανθούμε αν οι A, B είναι γραμμοϊσοδύναμοι ή όχι. Η παραπάνω πρόταση απαντάει σ' αυτό.
π.χ. Δίνονται οι $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Είναι γραμμοϊσοδύναμοι ή όχι?
Έχουμε

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} r_2 \to \frac{1}{2} r_2 \\ r_3 \to \frac{1}{3} r_3 \end{matrix} \underset{\gamma}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A_{rc}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} r_1 \leftrightarrow r_3 \end{matrix} \underset{\gamma}{\sim} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} r_1 \to \frac{1}{4} r_1 \\ r_2 \to \frac{1}{2} r_2 \end{matrix} \underset{\gamma}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B_{rc}$$

Αφού $A_{rc} = B_{rc} \Rightarrow A \underset{\gamma}{\sim} B$.

2) Αν δοθούν δύο σύνολα M το πλήθος διανυσμάτων τού F^N, η παραπάνω πρόταση απαντά με τον συντομότερο τρόπο, το αν οι υπόχωροι των δύο αυτών συνόλων συμπίπτουν ή όχι.
Κι αν ακόμη τα δύο σύνολα διανυσμάτων τού F^N δεν είναι ισοπληθικά, πάλι η διαδικασία εφαρμόζεται μιας και ισχύει το εξής:
Οι γραμμόχωροι δύο συνόλων διανυσμάτων τού F^N συμπίπτουν ανν οι γραμμοκανονικές μορφές των αντίστοιχων πινάκων έχουν ίδιες μη-μηδενικές μορφές.

Πράγματι, αν $\langle A_1, \dots, A_M \rangle = \langle B_1, \dots, B_L \rangle \Rightarrow \langle A_{rc,1}, \dots, A_{rc,M} \rangle = \langle B_{rc,1}, \dots, B_{rc,L} \rangle$
$\Rightarrow$ οι μη-μηδενικές γραμμές των A_{rc}, B_{rc} συμπίπτουν.
Αντίστροφα, αν οι μη-μηδενικές γραμμές των A_{rc}, B_{rc} συμπίπτουν $\Rightarrow$
$\Rightarrow \langle A_{rc,1}, \dots, A_{rc,M} \rangle = \langle B_{rc,1}, \dots, B_{rc,L} \rangle \Rightarrow \langle A_1, \dots, A_M \rangle = \langle B_1, \dots, B_L \rangle$

π.χ. Δίνονται τα σύνολα διανυσμάτων τού $\mathbb{R}^5$

$\{ v_1 = (1,1,1,0,0),\ v_2 = (1,-1,-1,1,1),\ v_3 = (2,0,0,1,1),\ v_4 = (0,-2,-2,1,1) \}$

$\{ u_1 = (3,-1,-1,2,2),\ u_2 = (2,-2,-2,2,2),\ u_3 = (2,2,2,0,0) \}$

Οι δύο παραγόμενοι υπόχωροι συμπίπτουν ή όχι?

Έχουμε

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\gamma}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \text{απλό κλιμακωτό}$$

(έγινε προηγουμένως)

και

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\gamma}{\sim} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 8 & 8 & -4 & -4 \end{pmatrix} \underset{\gamma}{\sim} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\gamma}{\sim}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/3 & -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\gamma}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \text{απλό κλιμακωτό}$$

Άρα, οι μη-μηδενικές γραμμές των δύο απλών κλιμακωτών μορφών είναι ίδιες, επομένως $\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$.

$$\underset{\gamma}{A \overset{r_i \leftrightarrow r_j}{\underset{\sim}{(1^{ου}\ τύπου)}} B} \quad \Leftrightarrow \quad B = \underset{i \neq j}{\mathcal{E}_{ij} A} \quad , \quad \mathcal{E}_{ij} \equiv \begin{array}{c} \\ i \\ j \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & & & & & \mathbb{O} \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & \\ & & 1 & \cdots & 0 & \\ & & & & \ddots & \\ \mathbb{O} & & & & & 1 \end{pmatrix}_{M \times M}$$

"στοιχειώδης πίνακας $1^{ου}$ τύπου"

Πράγματι, γράφουμε το $\mathcal{E}_{ij}$ ως σύνθετο πίνακα

$$\mathcal{E}_{ij} = \left(\begin{array}{c:c:c} \mathbb{1} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \hdashline \mathbb{O} & H & \mathbb{O} \\ \hdashline \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{1} \end{array}\right) \quad , \quad H \equiv \left(\begin{array}{c:c:c} 0 & \mathbb{O} & 1 \\ \hdashline \mathbb{O} & \mathbb{1} & \mathbb{O} \\ \hdashline 1 & \mathbb{O} & 0 \end{array}\right)$$

και τον τυχόντα $A = \left(\begin{array}{c:c:c} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ \hdashline A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ \hdashline A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{array}\right)$. Τότε

$$\mathcal{E}_{ij} A = \left(\begin{array}{c:c:c} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ \hdashline HA_{21} & HA_{22} & HA_{23} \\ \hdashline A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{array}\right) \quad , \quad \text{όπου}$$

$$HA_{21} = \left(\begin{array}{c:c:c} 0 & \mathbb{O} & 1 \\ \hdashline \mathbb{O} & \mathbb{1} & \mathbb{O} \\ \hdashline 1 & \mathbb{O} & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c:c:c} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \\ \hdashline B_1 & B_2 & B_3 \\ \hdashline a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c:c:c} a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} \\ \hdashline B_1 & B_2 & B_3 \\ \hdashline a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \end{array}\right)$$

Άρα $\mathcal{E}_{ij} A = B$

Διαφορετικά: Είναι $\underset{\sim}{(\mathcal{E}_{ij})_{k\ell} = \delta_{k\ell} - (\delta_{ik} - \delta_{jk})(\delta_{i\ell} - \delta_{j\ell})}$

$$= (\delta_{k\ell} - \delta_{ik}\delta_{i\ell} - \delta_{jk}\delta_{j\ell}) + \delta_{ik}\delta_{j\ell} + \delta_{i\ell}\delta_{jk}$$

π.χ. $i=2, j=3$, $(\mathcal{E}_{23})_{k\ell} = \delta_{k\ell} - (\delta_{2k} - \delta_{3k})(\delta_{2\ell} - \delta_{3\ell})$

$$= \begin{cases} k=2, & \delta_{2\ell} - (\delta_{2\ell} - \delta_{3\ell}) = \delta_{3\ell} \\ k=3, & \delta_{3\ell} + (\delta_{2\ell} - \delta_{3\ell}) = \delta_{2\ell} \\ k \neq 2,3, & \delta_{k\ell} \end{cases} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & 1 & \\ & 1 & 0 & \\ & & & \ddots & 1 \end{pmatrix}$$

$$(\mathcal{E}_{ij} A)_{k\ell} = \sum_m (\mathcal{E}_{ij})_{km} A_{m\ell} = \sum_m (\delta_{km} - \delta_{ik}\delta_{im} - \delta_{jk}\delta_{jm} + \delta_{ik}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{jk}) A_{m\ell} =$$

$$= A_{k\ell} - \delta_{ik}A_{i\ell} - \delta_{jk}A_{j\ell} + \delta_{ik}A_{j\ell} + \delta_{jk}A_{i\ell} = A_{k\ell} - (\delta_{ik} - \delta_{jk})(A_{i\ell} - A_{j\ell}) = B_{k\ell}$$

π.χ. $i=2, j=3$, $(\mathcal{E}_{23} A)_{k\ell} = A_{k\ell} - (\delta_{2k} - \delta_{3k})(A_{2\ell} - A_{3\ell})$

$$= \begin{cases} k=2, & A_{2\ell} - (A_{2\ell} - A_{3\ell}) = A_{3\ell} \\ k=3, & A_{3\ell} + (A_{2\ell} - A_{3\ell}) = A_{2\ell} \\ k \neq 2,3, & A_{k\ell} \end{cases} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \end{pmatrix} = B$$

Πιο απλά: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$

Π.χ. $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \; r_2 \leftrightarrow r_3 \;\; \underset{\gamma}{\sim} \; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\mathcal{E}_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{E}_{23} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Σε μορφή πινάκων είναι

$$\underline{\mathcal{E}_{ij} = I + E_{ij} + E_{ji} - E_{ii} - E_{jj}} \quad , \quad E_{ij} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & & j & & \end{array} \\ i & \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\underline{\mathcal{E}_{ij}^{-1} = \mathcal{E}_{ij}}$$

διότι $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Οι πίνακες $\mathcal{E}_{ij}$ είναι συμμετρικοί, δηλαδή $\underline{\mathcal{E}_{ij}^T = \mathcal{E}_{ij}}$. Αυτό φαίνεται με το μάτι, ή ακόμα

$$\mathcal{E}_{ij}^T = I^T + E_{ij}^T + E_{ji}^T - E_{ii}^T - E_{jj}^T = I + E_{ji} + E_{ij} - E_{ii} - E_{jj} = \mathcal{E}_{ij}$$

διότι $E_{ij}^T = E_{ji}$, αφού $(E_{ij})_{k\ell} = \delta_{ik}\delta_{j\ell}$, $(E_{ij}^T)_{k\ell} = (E_{ij})_{\ell k} = \delta_{i\ell}\delta_{jk} = (E_{ji})_{k\ell}$.

Ή ακόμα από $\quad (\mathcal{E}_{ij})_{k\ell} = \delta_{k\ell} - \delta_{ik}\delta_{i\ell} - \delta_{jk}\delta_{j\ell} + \delta_{ik}\delta_{j\ell} + \delta_{i\ell}\delta_{jk}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (\mathcal{E}_{ij})_{\ell k} &= \delta_{\ell k} - \delta_{i\ell}\delta_{ik} - \delta_{j\ell}\delta_{jk} + \delta_{i\ell}\delta_{jk} + \delta_{ik}\delta_{j\ell} \\ &= \delta_{k\ell} - \delta_{ik}\delta_{i\ell} - \delta_{jk}\delta_{j\ell} + \delta_{ik}\delta_{j\ell} + \delta_{i\ell}\delta_{jk} \\ &= (\mathcal{E}_{ij})_{k\ell} . \end{aligned}$$

- $A \underset{\gamma}{\overset{\substack{r_i \to \lambda r_i \\ (2^{ος}\ \text{τύπος})}}{\sim}} B \iff B = \mathcal{E}_i(\lambda) A, \ \lambda \neq 0$, $\mathcal{E}_i(\lambda) \equiv \begin{array}{c c} & i \\ i & \begin{pmatrix} 1 & & \mathbb{O} \\ & \lambda & \\ \mathbb{O} & & 1 \end{pmatrix}_{M\times M} \end{array}$ "στοιχειώδης πίνακας 2ου τύπου"

Πράγματι, $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \lambda & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ a_{i1} & \cdots & a_{iN} \\ a_{M1} & \cdots & a_{MN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \lambda a_{i1} & \cdots & \lambda a_{iN} \\ a_{M1} & \cdots & a_{MN} \end{pmatrix}$

Είναι $\mathcal{E}_i(\lambda) = I + (\lambda - 1) E_{ii}$, $E_{ii} = \begin{array}{c c} & i \\ i & \begin{pmatrix} 0 & & \mathbb{O} \\ & 1 & \\ \mathbb{O} & & 0 \end{pmatrix} \end{array}$

διότι $(\mathcal{E}_i(\lambda))_{k\ell} = \delta_{k\ell} + (\lambda-1)(E_{ii})_{k\ell} = \delta_{k\ell} + (\lambda - 1)\delta_{ik}\delta_{i\ell} = \begin{cases} k=\ell=i, & \lambda \\ k=\ell\neq i, & 1 \\ k\neq \ell, & 0 \end{cases}$

Είναι $\mathcal{E}_i^{-1}(\lambda) = \mathcal{E}_i(\lambda^{-1})$

διότι $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \lambda & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \lambda^{-1} & \\ & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

Είναι $\mathcal{E}_i(\lambda)^T = \mathcal{E}_i(\lambda)$ συμμετρικός

- $A \underset{\gamma}{\overset{\substack{r_i \to r_i + \lambda r_j \\ (3^{ος}\ \text{τύπος})}}{\sim}} B \iff B = \mathcal{E}_{ij}(\lambda) A, \ i \neq j$, $\mathcal{E}_{ij}(\lambda) \equiv \begin{array}{c c} & j \\ \begin{array}{c} i \\ j \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & & & \mathbb{O} \\ & 1 & \lambda & \\ & & 1 & \\ \mathbb{O} & & & 1 \end{pmatrix}_{M\times M} \end{array}$ "στοιχειώδης πίνακας 3ου τύπου"

Πράγματι, απλά $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \lambda\gamma & \beta + \lambda\delta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$.

Διαφορετικά, $(\mathcal{E}_{ij}(\lambda))_{k\ell} = \delta_{k\ell} + \lambda \delta_{ik}\delta_{j\ell}$

$$(\mathcal{E}_{ij}(\lambda) A)_{k\ell} = \sum_m (\mathcal{E}_{ij}(\lambda))_{km} A_{m\ell} = \sum_m (\delta_{km} + \lambda \delta_{ik}\delta_{jm}) A_{m\ell} = A_{k\ell} + \lambda \delta_{ik} A_{j\ell}$$

π.χ. για $i=2, j=3$, $A_{k\ell} + \lambda \delta_{2k} A_{3\ell} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ a_{M1} & a_{M2} & \cdots \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} + \lambda a_{31} & a_{22} + \lambda a_{32} & \cdots \\ a_{M1} & a_{M2} & \cdots \end{pmatrix}$

Δηλαδή $\mathcal{E}_{ij}(\lambda) = I + \lambda E_{ij}$, $E_{ij} = \begin{array}{c c} & j \\ i & \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$

$\mathcal{E}_{ij}^{-1}(\lambda) = \mathcal{E}_{ij}(-\lambda)$

διότι $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

π.χ. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\gamma}{\overset{r_2 \to r_2 - 2r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\mathcal{E}_{21}(-2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\mathcal{E}_{21}(-2)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Είναι $\mathcal{E}_{ij}(\lambda)^T = \mathcal{E}_{ji}(\lambda)$

$A, B \in M_{M\times N}(F)$

$$A \underset{\gamma}{\sim} B \Leftrightarrow \exists\, P_{M\times M} \text{ αντιστρέψιμος } : B = PA$$

Πράγματι, έστω $A \underset{\gamma}{\sim} B$. Τότε $A \underset{\gamma}{\sim} \cdots \underset{\gamma}{\sim} B$, όπου κάθε βήμα είναι σ.μ.γ. Αλλά για κάθε σ.μ.γ. ο προκύπτων πίνακας από κάποιον A' είναι EA' όπου $E = \mathcal{E}_{ij}, \mathcal{E}_i(\lambda), \mathcal{E}_{ij}(\lambda) \in M_{M\times M}(F)$. Άρα $B = E_k \cdots E_1 A = PA$, και επειδή όλοι οι E_i είναι αντιστρέψιμοι, άρα ο $P = E_k \cdots E_1 \in M_{M\times M}(F)$ είναι αντιστρέψιμος.

Αντίστροφα, έστω ότι $\exists\, P_{M\times M}$ αντιστρέψιμος με $B = PA$.
Μπορεί για έναν αντιστρέψιμο πίνακα P να δειχθεί ότι είναι αυτός γινόμενο στοιχειωδών πινάκων.
Θα δείξουμε αυτό για απλότητα για $M = 2$, δηλαδή έστω $P = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.
Αφού $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, άρα $\alpha, \delta \neq 0$ ή $\beta, \gamma \neq 0$.

Αν $\alpha, \delta \neq 0$ τότε
$$P = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \underset{\text{στ. }2^{\text{ου}}}{\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \underset{3^{\text{ου}}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}} \underset{2^{\text{ου}}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\alpha} \end{pmatrix}} \underset{3^{\text{ου}}}{\begin{pmatrix} 1 & \frac{\beta}{\alpha} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Αν $\beta, \gamma \neq 0$ τότε
$$P = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \underset{2^{\text{ου}}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}} \underset{3^{\text{ου}}}{\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \underset{2^{\text{ου}}}{\begin{pmatrix} \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \underset{3^{\text{ου}}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\delta}{\gamma} & 1 \end{pmatrix}} \underset{1^{\text{ου}}}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

Άρα $P = E_k \cdots E_1$, όπου E_i στοιχειώδεις πίνακες. Επομένως, $B = E_k \cdots E_1 A \Rightarrow$

$A \underset{\gamma}{\sim} \cdots \underset{\gamma}{\sim} B \Rightarrow A \underset{\gamma}{\sim} B$

[Για να αντιληφθούμε το πώς βρήκαμε την ανάλυση του P σε στοιχειώδεις πίνακες πηγαίνουμε βήμα - βήμα:

• βήμα 1ο $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \to \frac{1}{\alpha} r_1} \underset{\gamma}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \beta/\alpha \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1/\alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \beta/\alpha \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \underset{2^{\text{ου}}}{\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & \beta/\alpha \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

• βήμα 2ο $\begin{pmatrix} 1 & \beta/\alpha \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to r_2 - \gamma r_1} \underset{\gamma}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \beta/\alpha \\ 0 & \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\alpha} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\gamma & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \beta/\alpha \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \beta/\alpha \\ 0 & \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\alpha} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \beta/\alpha \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \underset{3^{\text{ου}}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & \beta/\alpha \\ 0 & \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\alpha} \end{pmatrix}$$

• βήμα 3ο $\begin{pmatrix} 1 & \beta/\alpha \\ 0 & \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\alpha} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to \frac{\alpha}{\alpha\delta - \beta\gamma} r_2} \underset{\gamma}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \beta/\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha}{\alpha\delta - \beta\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \beta/\alpha \\ 0 & \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \beta/\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \beta/\alpha \\ 0 & \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\alpha} \end{pmatrix} = \underset{2^{\text{ου}}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\alpha} \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & \beta/\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

• βήμα 4ο $\begin{pmatrix} 1 & \beta/\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \to r_1 - \frac{\beta}{\alpha} r_2} \underset{\gamma}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\beta/\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \beta/\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \beta/\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \underset{3^{\text{ου}}}{\begin{pmatrix} 1 & \beta/\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$]

Παρατήρηση (1) $\forall A_{M\times N}$, $\exists\, P_{M\times M}$ αντιστρέψιμος : $A_{rc} = PA$

(2) Το ότι η σχέση $\underset{\gamma}{\sim}$ είναι σχέση ισοδυναμίας μπορεί να δειχθεί και ως εξής:

- $A \underset{\gamma}{\sim} A$ αφού $A = \underbrace{I_{M\times M}}_{\text{αντιστρέψιμος}} A$
- Αν $A \underset{\gamma}{\sim} B$ τότε $B = \underbrace{P}_{\text{αντιστρέψιμος}} A \Rightarrow A = \underbrace{P^{-1}}_{\text{αντιστρέψιμος}} B \Rightarrow B \underset{\gamma}{\sim} A$
- Αν $A \underset{\gamma}{\sim} B$, $B \underset{\gamma}{\sim} C$ τότε $\underbrace{B = PA,\ C = QB}_{P,\,Q \text{ αντιστρέψιμοι}} \Rightarrow C = \underbrace{(QP)}_{\text{αντιστρέψιμος}} A \Rightarrow A \underset{\gamma}{\sim} C$

3) Αν $A_{M\times N} \underset{\gamma}{\sim} B_{M\times N}$, ο πίνακας $P_{M\times M}$ με $PA = B$ βρίσκεται από

$$(A_{M\times N} \mid I_M) \underset{\gamma}{\sim} \cdots \underset{\gamma}{\sim} (B_{M\times N} \mid P_{M\times M}).$$

Πράγματι, $B = E_k \dots E_1 A = PA$, όπου $P = E_k \cdots E_1 = E_k \cdots E_1 I_M$, δηλαδή οι σ.μ.γ. που φέρνουν τον A στο B, φέρνουν και τον I_M στον $P_{M\times M}$.

1) Ομοίως, αν $(A_{M\times N} \mid I_M) \underset{\gamma}{\sim} \cdots \underset{\gamma}{\sim} (A_{rc} \mid P)$ τότε $PA = A_{rc}$.

<u>Παράδειγμα</u>

Είναι
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 9 & 4 & -5 \end{pmatrix} \begin{matrix} r_1 \to r_1 - 2r_2 \\ \\ r_3 \to r_3 - 2r_2 \end{matrix} \underset{\gamma}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & -5 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} r_1 \to -\frac{1}{5} r_1 \\ \\ r_3 \to r_3 - r_1 \end{matrix} \underset{\gamma}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2/5 & -3/5 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B.$$

Να βρεθεί ο $P_{3\times3}$ ώστε $PA = B$.

Είναι
$$(A_{3\times4} \mid I_3) = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 9 & 4 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} r_1 \to r_1 - 2r_2 \\ \\ r_3 \to r_3 - 2r_2 \end{matrix} \underset{\gamma}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 0 & -5 & -2 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & -3 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} r_1 \to -\frac{1}{5} r_1 \\ \\ r_3 \to r_3 - r_1 \end{matrix} \underset{\gamma}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 0 & 1 & 2/5 & -3/5 & -1/5 & 2/5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 \end{array}\right) = (B \mid P)$$

Άρα
$$P = \begin{pmatrix} -1/5 & 2/5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Πράγματι,
$$PA = \begin{pmatrix} -1/5 & 2/5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 9 & 4 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2/5 & -3/5 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

*) $A_{N\times N}$ περιέχει $\mu \geq 1$ το πλήθος μηδενικές γραμμές $\Rightarrow$ A όχι αντιστρέψιμος.

Πράγματι, με σ.μ.γ. 1ου τύπου μπορούμε να "μεταφέρουμε" τις μηδενικές γραμμές τού A στις τελευταίες γραμμές, δηλαδή

$$A \underset{\gamma}{\sim} B = \left(\begin{array}{c} B'_{(N-\mu)\times N} \\ \hdashline B''_{\mu \times N} \end{array} \right), \quad B'' = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \exists \ P_{N\times N}$ αντιστρέψιμος : $B = PA$.

Θα δείξουμε καταρχήν ότι ο B δεν είναι αντιστρέψιμος.
Πράγματι, έστω ότι υπάρχει $C_{N\times N}$ με $BC = I_N$. Μπορούμε πάντοτε να γράψουμε τον $N\times N$ πίνακα C ως τον εξής μορφής σύνθετο πίνακα $C = (C'_{N\times(N-\mu)} \mid C''_{N\times\mu})$. Επομένως

$$BC = \left(\begin{array}{c} B' \\ \hdashline B'' \end{array}\right) (C' \mid C'') = \left(\begin{array}{c:c} (B'C')_{(N-\mu)\times(N-\mu)} & (B'C')_{(N-\mu)\times\mu} \\ \hdashline (B''C')_{\mu\times(N-\mu)} & (B''C'')_{\mu\times\mu} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c:c} B'C' & B'C'' \\ \hdashline \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{array} \right) \neq I_N$$

δηλ. δείξαμε ότι $\forall \ C_{N\times N}$ είναι $BC \neq I_N$, δηλ. B μη-αντιστρέψιμος.
Αν τώρα, ο A ήταν αντιστρέψιμος, τότε ο $B = PA$ θα ήταν αντιστρέψιμος, άτοπο, άρα τελικά A μη-αντιστρέψιμος.

$A_{N\times N}$ αντιστρέψιμος $\Leftrightarrow A_{rc} = I_N \Leftrightarrow r(A) = N$

Πράγματι, $\forall \ A_{N\times N}$, $\exists \ P$ αντιστρέψιμος με $A_{rc} = PA$.
Ο A_{rc} ή είναι ο I_N (αντιστρέψιμος) ή περιέχει μηδενικές γραμμές (μη-αντιστρέψιμος).
Αν λοιπόν, ο A είναι αντιστρέψιμος τότε ο A_{rc} είναι αντιστρέψιμος, δηλ. $A_{rc} = I_N$.
Αντίστροφα, αν $A_{rc} = I_N$, τότε $A = P^{-1}$, δηλ. A αντιστρέψιμος.

(Σχετικά με την απόδειξη ότι A αντιστρέψιμος $\Rightarrow A_{rc} = I_N$ μπορούμε να σκεφτούμε και ως εξής: αφού A αντιστρέψιμος $\Rightarrow$ $A^{-1}A = I_N$. Αλλά ο A^{-1} ως αντιστρέψιμος θα είναι το γινόμενο στοιχειωδών πινάκων, δηλαδή $A^{-1} = E_k \cdots E_1$. Άρα $E_k \cdots E_1 A = I_N$. Επειδή ο I_N είναι απλά κλιμακωτός και επιπλέον η γραμμοκανονική μορφή A_{rc} του A είναι μοναδική, άρα $A_{rc} = I_N$).

Σχετικά με την τελευταία ισοδυναμία, αν $A_{rc} = I_N \Rightarrow r(A) = r(A_{rc}) = r(I_N) = N$, ενώ αντίστροφα, αν $r(A) = N \Rightarrow r(A_{rc}) = N$ και αφού ή $A_{rc} = I_N$ (με $r = N$) ή A_{rc} έχει μηδενικές γραμμές (με $r < N$), άρα $A_{rc} = I_N$.

$A_{N\times N}$ αντιστρέψιμος $\Rightarrow I_N = E_k \dots E_1 A$, $\quad A^{-1} = E_k \dots E_1 I_N$

(Δηλαδή, το ίδιο σύνολο των σ.μ.γ. που φέρνουν τον A στη γραμμοκανονική μορφή του I_N, φέρνουν και τον I_N στον A^{-1}, δηλαδή

$(A \mid I_N) \underset{\gamma}{\sim} \cdots \underset{\gamma}{\sim} (I_N \mid A^{-1})$ είναι ισχυρή μέθοδος υπολογισμού του A^{-1}.)

Πράγματι, αν A αντιστρέψιμος $\Rightarrow A_{rc} = I_N \Rightarrow I_N = E_k \dots E_1 A \Rightarrow A = E_1^{-1} \dots E_k^{-1}$

$\Rightarrow A E_k \dots E_1 = E_1^{-1} \dots E_k^{-1} E_k \dots E_1 = I_N \Rightarrow A^{-1} = E_k \dots E_1 \Rightarrow A^{-1} = E_k \dots E_1 I_N$.

π.χ. $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\quad A^{-1} = ?$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 \to r_2 - 3r_1} \underset{\gamma}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \underset{\gamma}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} r_1 \to r_1 + r_2 \\ \\ r_3 \to r_3 - 5r_2 \end{array}$$

$$\underset{\gamma}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & -3 & 1 & -5 \end{array}\right)_{r_3 \to \frac{1}{8} r_3} \underset{\gamma}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{5}{8} \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 \to r_2 + 2r_3} \underset{\gamma}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3/4 & 1/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & -3/8 & 1/8 & -5/8 \end{array}\right)$$

Άρα $\quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3/4 & 1/4 & -1/4 \\ -3/8 & 1/8 & -5/8 \end{pmatrix}$

Πράγματι $\quad A^{-1} A = A A^{-1} = I_3$.

π.χ. $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad$ Είναι ο A αντιστρέψιμος?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} r_2 \to r_2 + r_1 \\ r_3 \to r_3 - r_1 \end{array} \underset{\gamma}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}_{r_3 \to r_3 - r_2} \underset{\gamma}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A_{rc} \neq I_N$$

Άρα $\quad \nexists\ A^{-1}$.

π.χ. $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. $\quad$ Είναι ο A αντιστρέψιμος?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to r_2 - r_1} \underset{\gamma}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to \frac{1}{3} r_2} \underset{\gamma}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{r_3 \to r_3 - r_2} \underset{\gamma}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{r_1 \to r_1 + r_2}$$

$$\underset{\gamma}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A_{rc} = I_N$$

Άρα $\quad \exists\ A^{-1}$

$A, B \in M_{M\times N}(F)$

$$A \underset{\sigma}{\sim} B \Leftrightarrow \exists\, Q_{N\times N} \text{ αντιστρέψιμος } : B = AQ$$

Πράγματι, $A \underset{\sigma}{\sim} B \Leftrightarrow A \underbrace{\underset{\sigma}{\sim} \cdots \underset{\sigma}{\sim}}_{\text{(στοιχειώδεις) μετ. στηλών}} B \Leftrightarrow A^T \underbrace{\underset{\gamma}{\sim} \cdots \underset{\gamma}{\sim}}_{\text{(στοιχειώδεις) μετ. γραμμών}} B^T \Leftrightarrow E_k \cdots E_1 A^T = B^T$

$\Leftrightarrow (E_k \cdots E_1 A^T)^T = (B^T)^T \Leftrightarrow A E_1^T \cdots E_k^T = B \Leftrightarrow A E_1' \cdots E_k' = B \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow AQ = B$, $Q = E_1' \cdots E_k'$. Οι πίνακες E_i' είναι στοιχειώδεις, διότι οι πίνακες E_i^T είναι στοιχειώδεις.

Παρατήρηση

Αν $A_{M\times N} \underset{\sigma}{\sim} B_{M\times N}$, ο πίνακας $Q_{N\times N}$ με $AQ = B$ βρίσκεται από $(A_{M\times N} \mid I_N) \underset{\sigma}{\sim} \cdots \underset{\sigma}{\sim} (B_{M\times N} \mid Q_{N\times N})$.

Πράγματι, $B = A E_1' \cdots E_\ell' = AQ$, όπου $Q = E_1' \cdots E_\ell' = E_1' \cdots E_\ell' I_N$, δηλαδή οι σ.μ.σ. που φέρνουν τον A στον B, φέρνουν και τον I_N στον $Q_{N\times N}$.

Παράδειγμα

Είναι $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & 2/5 & -3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} c_3 \to c_3 - \frac{1}{5}c_1 \\ c_4 \to c_4 - \frac{1}{5}c_1 \end{matrix} \underset{\sigma}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/5 & -3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} c_3 \to c_3 - \frac{2}{5}c_2 \\ c_4 \to c_4 + \frac{3}{5}c_2 \end{matrix} \underset{\sigma}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$

Να βρεθεί ο $Q_{4\times 4}$ ώστε $AQ = B$

Είναι

$$(A_{3\times 4} \mid I_4) = \left(\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 1/5 & 1/5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/5 & -3/5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} c_3 \to c_3 - \frac{1}{5}c_1 \\ c_4 \to c_4 - \frac{1}{5}c_1 \end{matrix} \underset{\sigma}{\sim}$$

$$\underset{\sigma}{\sim} \left(\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1/5 & -1/5 \\ 0 & 1 & 2/5 & -3/5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} c_3 \to c_3 - \frac{2}{5}c_2 \\ c_4 \to c_4 + \frac{3}{5}c_2 \end{matrix} \underset{\sigma}{\sim}$$

$$\underset{\sigma}{\sim} \left(\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1/5 & -1/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2/5 & 3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = (B \mid Q)$$

Άρα $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/5 & -1/5 \\ 0 & 1 & -2/5 & 3/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Πράγματι, $AQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & 2/5 & -3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/5 & -1/5 \\ 0 & 1 & -2/5 & 3/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$

$$A_{M\times N} \sim B_{M\times N} \Leftrightarrow \exists\, P, Q \text{ αντιστρέψιμοι} : PAQ = B \Leftrightarrow A \underset{\gamma}{\sim} \cdots \underset{\gamma}{\sim} \cdots \underset{\sigma}{\sim} \cdots \underset{\sigma}{\sim} B$$

Πράγματι, $A \underset{\gamma}{\sim} \cdots \underset{\gamma}{\sim} \cdots \underset{\sigma}{\sim} \cdots \underset{\sigma}{\sim} B \Leftrightarrow A \underset{\gamma}{\sim} C \underset{\sigma}{\sim} B \Leftrightarrow \exists\, P, Q$ αντισ. : $PA = C$, $CQ = B \Leftrightarrow PAQ = B$

$\forall A \in \mathcal{M}_{M\times N}(F)$, $\exists P \in \mathcal{M}_{M\times M}(F)$, $Q \in \mathcal{M}_{N\times N}(F)$ αντιστρέψιμοι : $PAQ = \left(\begin{array}{c|c} I_{r(A)\times r(A)} & \mathbb{O}_{r(A)\times[N-r(A)]} \\ \hline \mathbb{O}_{[M-r(A)]\times r(A)} & \mathbb{O}_{[M-r(A)]\times[N-r(A)]} \end{array}\right) = N$

(δηλαδή κάθε πίνακας είναι ισοδύναμος με μία κανονική μορφή N) $A \sim \begin{pmatrix} I_{r(A)} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix}$ "κανονική μορφή του A"

Πράγματι, καταρχήν ο A μπορεί να τεθεί σε γραμμοκανονική μορφή, όπου θα υπάρχουν $r(A)$ μη-μηδενικές γραμμές. Έστω ότι τα ηγετικά 1 στοιχεία αυτών των $r(A)$ γραμμών εμφανίζονται στις στήλες $j_1, \dots, j_{r(A)}$. Τότε, αφαιρώντας κατάλληλα πολλαπλάσια αυτών των στηλών από στήλες που βρίσκονται μετά από αυτές, και κατόπιν εναλλάσσοντας τις στήλες $c_1 \leftrightarrow c_{j_1}, \dots, c_{r(A)} \leftrightarrow c_{j_{r(A)}}$ προκύπτει ο στηλοϊσοδύναμος πίνακας $\left(\begin{array}{c|c} I_{r(A)} & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{array}\right)$

Επομένως, η συνολική (γραμμο/στηλο)-ισοδυναμία $A \underset{\gamma}{\sim} \cdots \underset{\gamma}{\sim} A_{rc} \underset{\sigma}{\sim} \cdots \underset{\sigma}{\sim} \begin{pmatrix} I_r & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix}$ έχει $PA = A_{rc}$, $A_{rc}Q = \begin{pmatrix} I_r & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix}$. Άρα $PAQ = \begin{pmatrix} I_r & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix}$.

Παράδειγμα

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 9 & 4 & -5 \end{pmatrix} \begin{matrix} r_1 \to r_1 - 2r_2 \\ \\ r_3 \to r_3 - 2r_2 \end{matrix} \underset{\gamma}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & -5 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} r_1 \to -\frac{1}{5} r_1 \\ \\ r_3 \to r_3 - r_1 \end{matrix} \underset{\gamma}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2/5 & -3/5 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} r_1 \leftrightarrow r_2 \underset{\gamma}{\sim}$$

$$\underset{\gamma}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2/5 & -3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} r_1 \to r_1 - 2r_2 \underset{\gamma}{\sim} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & 2/5 & -3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A_{rc}} \begin{matrix} c_3 \to c_3 - \frac{1}{5} c_1 \\ c_4 \to c_4 - \frac{1}{5} c_1 \end{matrix} \underset{\sigma}{\sim}$$

$$\underset{\sigma}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/5 & -3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} c_3 \to c_3 - \frac{2}{5} c_2 \\ c_4 \to c_4 + \frac{3}{5} c_2 \end{matrix} \underset{\sigma}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_2 & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix}$$

$A \sim B \iff r(A) = r(B)$ (δηλαδή όλοι οι πίνακες $M\times N$ με την ίδια τάξη αποτελούν μία κλάση μέσα στη σχέση ισοδυναμίας $\sim$).

(ενώ αντιθέτως, για τη γραμμοϊσοδυναμία, η ισότητα της τάξης δεν αρκεί, μιας και στη γραμμοϊσοδυναμία υπάρχει λιγότερη ελευθερία σύνδεσης των πινάκων – δεν υπάρχει ο Q – και έχουμε $A \underset{\gamma}{\sim} B \Leftrightarrow A_{rc} = B_{rc}$)

Πράγματι, έστω $A \sim B$. Τότε $A \sim \begin{pmatrix} I_{r(A)} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix}$, $B \sim \begin{pmatrix} I_{r(B)} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix}$, άρα

$\begin{pmatrix} I_{r(A)} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} I_{r(B)} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix}$. Αν $r(A) \neq r(B)$ η τελευταία σύνδεση δεν μπορεί να ισχύει αφού με $\underset{\gamma}{\sim}, \underset{\sigma}{\sim}$ δεν είναι δυνατόν να φέρουμε τον πρώτο πίνακα στο δεύτερο. Άρα $r(A) = r(B)$.

Αντίστροφα, έστω $r(A) = r(B)$. Είναι $A \sim \begin{pmatrix} I_{r(A)} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix}$ και $B \sim \begin{pmatrix} I_{r(B)} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix}$, άρα $A \sim \begin{pmatrix} I_{r(B)} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix}$, άρα $A \sim B$.

Αλλαγή βάσης σε γραμμικό χώρο

Αν $\{e_i\}$, $\{e_i'\}$, $i=1,\dots,N$ βάσεις του V_N, ισχύουν

$$e_j' = \sum_{i=1}^{N} P_{ij} e_i \Leftrightarrow (e_1' \dots e_N') = (e_1 \dots e_N) P$$

P "πίνακας αλλαγής βάσης"

$$e_i = \sum_{j=1}^{N} (P^{-1})_{ji} e_j' \Leftrightarrow (e_1 \dots e_N) = (e_1' \dots e_N') P^{-1}$$

Αν $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow e_j' = P^j$, $P = (e_1' \dots e_N')$

Πράγματι, αφού $\{e_i\}$ βάση, άρα $\exists\, P_{ij} \in F$ ώστε $e_j' = \sum_i P_{ij} e_i \Leftrightarrow$
$e_j' = \sum_i e_i P_{ij} \Leftrightarrow (e_1' \dots e_N') = (e_1 \dots e_N) P$

Εξάλλου, $\{e_j'\}$ βάση, άρα $\exists\, Q_{ij}$ ώστε $e_i = \sum_j Q_{ji} e_j' \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_k \delta_{ki} e_k = \sum_j Q_{ji} \sum_k P_{kj} e_k = \sum_k \Big(\sum_j P_{kj} Q_{ji} \Big) e_k \Rightarrow \sum_k \Big(\sum_j P_{kj} Q_{ji} - \delta_{ki} \Big) e_k = 0$$

$$\Rightarrow \sum_j P_{kj} Q_{ji} - \delta_{ki} = 0 \Rightarrow \sum_j P_{kj} Q_{ji} = \delta_{ki} \Rightarrow PQ = I$$

Όμοια, $e_j' = \sum_i P_{ij} e_i \Rightarrow \sum_k \delta_{kj} e_k' = \sum_i P_{ij} \sum_k Q_{ki} e_k' = \sum_k \Big(\sum_i Q_{ki} P_{ij} \Big) e_k'$

$$\Rightarrow \sum_k \Big(\sum_i Q_{ki} P_{ij} - \delta_{kj} \Big) e_k' = 0 \Rightarrow \sum_i Q_{ki} P_{ij} - \delta_{kj} = 0 \Rightarrow \sum_i Q_{ki} P_{ij} = \delta_{kj}$$

$\Rightarrow QP = I$

Τελικά $PQ = I = QP \Rightarrow Q = P^{-1}$, άρα $e_i = \sum_j (P^{-1})_{ji} e_j' \Leftrightarrow e_i = \sum_j e_j' (P^{-1})_{ji}$
$\Leftrightarrow (e_1 \dots e_N) = (e_1' \dots e_N') P^{-1}$.

Αν $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in F^N$, τότε $e_j' = \sum_i P_{ij} e_i = P_{1j} e_1 + \dots + P_{Nj} e_N = P_{1j} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + P_{Nj} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} P_{1j} \\ \vdots \\ P_{Nj} \end{pmatrix} = P^j$, άρα $P = (P^1 \dots P^N) = (e_1' \dots e_N')$.

Αν $e_i, e_j' \in F^N$, τότε $\{e_i\}$, $\{e_j'\}$ βάσεις του F^N, άρα $\langle e_j' \rangle = \langle e_i \rangle$. Από $(e_1' \dots e_N') = (e_1 \dots e_N) P$
$\Rightarrow r(P) = N \Rightarrow P$ αντιστρέψιμος $\Rightarrow \exists\, P^{-1}$.
$\Rightarrow (e_1 \dots e_N) = (e_1' \dots e_N') P^{-1}$

$$V \ni v = \sum_{i=1}^{N} v^i e_i = \sum_{j=1}^{N} v'^j e'_j$$

$$v^i = \sum_{j=1}^{N} P_{ij} v'^j \Leftrightarrow \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^N \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} v'^1 \\ \vdots \\ v'^N \end{pmatrix}$$

$$v'^j = \sum_{i=1}^{N} (P^{-1})_{ji} v^i \Leftrightarrow \begin{pmatrix} v'^1 \\ \vdots \\ v'^N \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^N \end{pmatrix}$$

Πράγματι, $v = \sum_i v^i e_i = \sum_{j'} v'^j e'_j = \sum_j v'^j \sum_i P_{ij} e_i = \sum_i \left(\sum_j P_{ij} v'^j \right) e_i$

και αφού τα e_i είναι Γρ. Ανεξ., άρα η ανάπτυξη του v σ' αυτά είναι μοναδική, δηλαδή $v^i = \sum_j P_{ij} v'^j \Leftrightarrow \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^N \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} v'^1 \\ \vdots \\ v'^N \end{pmatrix}$. Δεν μπορεί να είναι $(v^1 \dots v^N) = (v'^1 \dots v'^N) P$, διότι θα έπρεπε να ήταν $v^i = \sum_j P_{ji} v'^j$. Στην πραγματικότητα, η διάταξη των δεικτών P_{ij} στην έκφραση αλλαγής βάσης έγινε ώστε οι συνιστώσες v^i των διανυσμάτων να εκφράζονται ως στηλοδιανύσματα και όχι ως διανύσματα-γραμμή. Εύκολα προκύπτει και η δεύτερη.

Άλλη απόδειξη (πιο απλή, χωρίς χρήση δεικτών, αλλά πινάκων)

Είναι $v = \sum_{i=1}^{N} v^i e_i = v^1 e_1 + \dots + v^N e_N = (e_1 \dots e_N) \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^N \end{pmatrix}$

και όμοια $v = (e'_1 \dots e'_N) \begin{pmatrix} v'^1 \\ \vdots \\ v'^N \end{pmatrix}$. Άρα,

$$(e_1 \dots e_N) \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^N \end{pmatrix} = (e'_1 \dots e'_N) \begin{pmatrix} v'^1 \\ \vdots \\ v'^N \end{pmatrix} \Rightarrow (e_1 \dots e_N) \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^N \end{pmatrix} = (e_1 \dots e_N) P \begin{pmatrix} v'^1 \\ \vdots \\ v'^N \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (e_1 \dots e_N) \left[\begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^N \end{pmatrix} - P \begin{pmatrix} v'^1 \\ \vdots \\ v'^N \end{pmatrix} \right] \Rightarrow \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^N \end{pmatrix} - P \begin{pmatrix} v'^1 \\ \vdots \\ v'^N \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^N \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} v'^1 \\ \vdots \\ v'^N \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P^{-1} \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v'^1 \\ \vdots \\ v'^N \end{pmatrix}$$

(Σχόλιο: Μετά από χρόνια, θα γράφετε ακόμη $e'_j = P^i{}_j e_i$, $e_i = (P^{-1})^j{}_i e'_j = P_i{}^j e'_j$, $v^i = P^i{}_j v'^j$, $v'^j = (P^{-1})^j{}_i v^i = P_i{}^j v^i$, όπου οι δείκτες στα δύο μέλη των εξισώσεων θα εμφανίζονται με το σωστό τρόπο, δηλαδή ή πάνω, ή κάτω — η άθροιση εννοείται παντού για επαναλαμβανόμενο δείκτη).

M γραμμικές εξισώσεις με N αγνώστους

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + \dots + a_{1N} x_N = b_1 \\ \vdots \\ a_{M1} x_1 + \dots + a_{MN} x_N = b_M \end{cases}$$

(Μη-ομογενές γραμμικό σύστημα)

$a_{ij} \in F$ "συντελεστές"

$b_i \in F$ "σταθερές"

$x_j \in F$ "άγνωστοι" ή "μεταβλητές"

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{N} a_{ij} x_j = b_i \quad , \quad i = 1, \dots, M$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{M1} & \dots & a_{MN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_M \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad AX = b \quad , \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad X^T A^T = b^T$$

$$\Rightarrow \quad (x_1 \dots x_N) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{M1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1N} & \dots & a_{MN} \end{pmatrix} = (b_1 \dots b_M)$$

$$\Rightarrow \quad x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{M1} \end{pmatrix} + \dots + x_N \begin{pmatrix} a_{1N} \\ \vdots \\ a_{MN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_M \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 A^1 + \dots + x_N A^N = b \quad , \quad A^j, b \in F^M$$

$b_i = 0$ "ομογενές σύστημα" Ο. Σ.

$(x_1, \dots, x_N)$ "λύση"

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1N} & b_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{M1} & \dots & a_{MN} & b_M \end{array}\right) \equiv (A \mid b)$$

"επαυξημένος" πίνακας του συστήματος

Για ένα γραμμικό σύστημα ενδιαφερόμαστε να ξέρουμε πότε έχει λύση, ποιά η δομή του συνόλου των λύσεων, και με ποιον τρόπο βρίσκουμε τις λύσεις.

$\{AX, X \in F^N\} = \langle A^1, \dots, A^N \rangle$

Πράγματι, $AX = (A^1 \dots A^N) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} = x_1 A^1 + \dots + x_N A^N \Rightarrow \{AX, X \in F^N\} = \{x_1 A^1 + \dots + x_N A^N, x_i \in F\} =$
$= \langle A^1, \dots, A^N \rangle$

Θα περιγράψουμε την κύρια και πάντοτε εφαρμόσιμη διαδικασία επίλυσης ενός γραμμικού συστήματος, που δεν είναι παρά ο αλγόριθμος Gauss που εφαρμόσαμε και στους πίνακες.

Η κύρια παρατήρηση, προκειμένου να μετ/σει κανείς ένα γραμμικό σύστημα σε ένα άλλο ισοδύναμο απλούστερης μορφής, είναι ότι δικαιούται να εναλλάξει τη θέση δύο εξισώσεων ($E_i \leftrightarrow E_j$), να πολ/σει μια εξίσωση με $\lambda \neq 0$ ($E_i \to \lambda E_i$), και να προσθέσει σε μία εξίσωση το πολλαπλάσιο μιας άλλης γραμμής ($E_i \to E_i + \lambda E_j$).

Αυτοί είναι ακριβώς οι μετ/μοί που ορίσαμε στους πίνακες ως σ.μ.γ. και τους χρησιμοποιήσαμε μέσω του αλγορίθμου Gauss για να αναχθούμε στην κλιμακωτή και απλή κλιμακωτή μορφή.

Επομένως, το ίδιο ακριβώς σκεπτικό μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος.

Όταν το σύστημα αναχθεί σε κλιμακωτή μορφή, τότε οι πρώτες $\rho \leq M, N$ εξισώσεις θα έχουν αγνώστους στα αριστερά τους μέλη ("βασικές εξισώσεις"), ενώ οι τελευταίες $M - \rho \geq 0$ εξισώσεις έχουν μηδενικά αριστερά μέλη και σταθερές στα δεξιά τους ("απαλείφουσες" ή "συνθήκες συμβατότητας").

Προφανώς, $\rho = r(A)$ και ο αριθμός αυτός λέγεται και "τάξη" ή "βαθμός" του συστήματος.

Επομένως, το ρ είναι ο αριθμός των πραγματικά ανεξάρτητων εξισώσεων του συστήματος.

Οι ρ άγνωστοι που εμφανίζονται στην αρχή των ρ βασικών εξισώσεων ("βασικές μεταβλητές") μπορούν να λυθούν συναρτήσει των υπόλοιπων $N - \rho$ αγνώστων ("ελεύθερες μεταβλητές" ή "παράμετροι"), δηλαδή
{βασικές μεταβλητές} = {σταθερά} + {γραμ. συνδ. ελεύθερων μεταβλητών}.

Επομένως, το ρ είναι και ο αριθμός των αγνώστων που μπορούν να καθοριστούν από το σύστημα.

Σχόλια

(1) Είναι φανερό ότι το ποιες είναι οι βασικές και οι ελεύθερες μεταβλητές αλλάζει αναλόγως της μεθόδου επίλυσης, ωστόσο το πλήθος τους ρ, $N-\rho$ αντίστοιχα είναι δεδομένο για το σύστημα και ανεξάρτητο της μεθόδου.

(2) Είναι επίσης φανερό ότι το σύστημα έχει λύση ανν ικανοποιούνται ταυτοτικά οι απαλοίφουσες (δηλ. τα δεξιά μέλη των απαλειφουσών είναι μηδέν), δηλαδή ανν $r(A) = r(A|b)$.

(3) Είναι φανερό ότι το ομογενές σύστημα έχει πάντα λύση (τουλάχιστον τη μηδενική) και αυτό σε σχέση με τις απαλοίφουσες είναι προφανές, αφού δεν εμφανίζονται καθόλου απαλοίφουσες.

(4) Επειδή κατά την παραπάνω εφαρμογή του αλγόριθμου Gauss, το μόνο σημαντικό είναι οι συντελεστές και οι σταθερές, μπορούμε να θεωρούμε τον επαυξημένο πίνακα $(A|b)$, να εκτελούμε τους γνωστούς σ.μ.γ. και στο τέλος να αποκαθιστάμε τις μεταβλητές.

Παράδειγμα

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = \lambda \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = \alpha \end{array}\right\} \begin{array}{l} E_2 \to E_2 - E_1 \\ E_3 \to 2E_3 - E_1 \\ E_4 \to E_4 - E_1 \end{array} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 0x_2 + x_3 = -3 \\ 3x_2 + 3x_3 = 2\lambda - 1 \\ 0x_2 + x_3 = \alpha - 1 \end{array}\right\} E_2 \leftrightarrow E_3$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_2 + 3x_3 = 2\lambda - 1 \\ x_3 = -3 \\ x_3 = \alpha - 1 \end{array}\right\} E_4 \to E_4 - E_3 \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_2 + 3x_3 = 2\lambda - 1 \\ x_3 = -3 \\ 0 = \alpha + 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} E_1 \to \frac{1}{2}E_1 \\ E_2 \to \frac{1}{3}E_2 \end{array}$$

κλιμακωτή μορφή (βαθμός $p=3$)

βασικές εξισώσεις

απαλείφουσα ή συνθήκη συμβατότητας

$$\alpha = -2 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = \frac{1}{2} \\ x_2 + x_3 = \frac{1}{3}(2\lambda - 1) \\ x_3 = -3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} E_1 \to E_1 - \frac{1}{2}E_3 \\ E_2 \to E_2 - E_3 \end{array} \quad \left.\begin{array}{l} x_1 - \frac{1}{2}x_2 = 2 \\ x_2 = \frac{2\lambda}{3} + \frac{8}{3} \\ x_3 = -3 \end{array}\right\} E_1 \to E_1 + \frac{1}{2}E_2$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = \frac{\lambda}{3} + \frac{10}{3} \\ x_2 = \frac{2\lambda}{3} + \frac{8}{3} \\ x_3 = -3 \end{array}\right\}$$

Αφού $p=3$, άρα έχουμε πράγματι 3 βασικές μεταβλητές x_1, x_2, x_3 και $N-p = 3-3 = 0$ ελεύθερες μεταβλητές.

Παράδειγμα.

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= a_1 \\ -x_1 + \lambda x_2 &= a_2 \\ \lambda x_1 + x_2 &= a_3 \\ \lambda x_1 + \lambda x_2 &= a_4 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} & \\ &E_2 \to E_2 + E_1 \\ &E_3 \to E_3 - \lambda E_1 \\ &E_4 \to E_4 - \lambda E_1 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= a_1 \\ (\lambda+2)x_2 &= a_1 + a_2 \\ (1-2\lambda)x_2 &= a_3 - \lambda a_1 \\ -\lambda x_2 &= a_4 - \lambda a_1 \end{aligned}\right\}$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις

- $\lambda = -2$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= a_1 \\ 0 &= a_1 + a_2 \\ 5x_2 &= a_3 + 2a_1 \\ 2x_2 &= a_4 + 2a_1 \end{aligned}\right\} E_2 \leftrightarrow E_3 \quad \Leftrightarrow \quad \left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= a_1 \\ 5x_2 &= a_3 + 2a_1 \\ 2x_2 &= a_4 + 2a_1 \\ 0 &= a_1 + a_2 \end{aligned}\right\} E_3 \to E_3 - \tfrac{2}{5}E_2 \quad \Leftrightarrow$$

κλιμακωτή μορφή $(\rho=2)$

βασικές εξισώσεις

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= a_1 \\ 5x_2 &= a_3 + 2a_1 \\ 0 &= 5a_1 - 2a_3 + 6a_1 \\ 0 &= a_1 + a_2 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &E_1 \to E_1 - \tfrac{2}{5}E_2 \\ &E_2 \to \tfrac{1}{5}E_2 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \left.\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{1}{5}(a_1 - 2a_3) \\ x_2 &= \tfrac{1}{5}(a_3 + 2a_1) \end{aligned}\right\}$$

απαλείφουσες

Επομένως για $\lambda = -2$ και $5a_1 - 2a_3 + 6a_1 \neq 0$ ή $a_1 + a_2 \neq 0 \Rightarrow \nexists$ λύση

για $\lambda = -2$ και $5a_1 - 2a_3 + 6a_1 = 0$ και $a_1 + a_2 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x_1, x_2) = \left(\frac{a_1 - 2a_3}{5}, \frac{a_3 + 2a_1}{5}\right)$. Πράγματι, αφού $\rho = 2$ υπάρχουν 2 βασικές μεταβλητές, οι x_1, x_2, και $N - \rho = 2 - 2 = 0$ ελεύθ. μεταβλ., δηλαδή υπάρχει μοναδική λύση.

- $\lambda \neq -2$

$\rho = 2$
κλιμακωτή μορφή

βασικές

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= a_1 \\ (\lambda+2)x_2 &= a_1 + a_2 \\ (1-2\lambda)x_2 &= a_3 - \lambda a_1 \\ -\lambda x_2 &= a_4 - \lambda a_1 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} & \\ & \\ &E_3 \to (\lambda+2)E_3 - (1-2\lambda)E_2 \\ &E_4 \to (\lambda+2)E_4 + \lambda E_2 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= a_1 \\ (\lambda+2)x_2 &= a_1 + a_2 \\ 0 &= (\lambda+2)(a_3 - \lambda a_1) - (1-2\lambda)(a_1 + a_2) \\ 0 &= (\lambda+2)(a_4 - \lambda a_1) + \lambda(a_1 + a_2) \end{aligned}\right\}$$

απαλείφουσες

$$\Leftrightarrow \left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= a_1 \\ (\lambda+2)x_2 &= a_1 + a_2 \end{aligned}\right\} E_1 \to E_1 - \frac{2}{\lambda+2}E_2 \quad \Leftrightarrow \quad \left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\lambda+2}(\lambda a_1 - 2a_2) \\ x_2 &= \frac{1}{\lambda+2}(a_1 + a_2) \end{aligned}\right\}$$

Επομένως, για $\lambda \neq -2$ και $(\lambda+2)(a_3 - \lambda a_1) - (1-2\lambda)(a_1 + a_2) \neq 0$ ή $(\lambda+2)(a_4 - \lambda a_1) + \lambda(a_1 + a_2) \neq 0$
$\Rightarrow \nexists$ λύση

για $\lambda \neq -2$ και $(\lambda+2)(a_3 - \lambda a_1) - (1-2\lambda)(a_1 + a_2) = 0$ και $(\lambda+2)(a_4 - \lambda a_1) + \lambda(a_1 + a_2) = 0$
$\Rightarrow (x_1, x_2) = \left(\frac{\lambda a_1 - 2a_2}{\lambda+2}, \frac{a_1 + a_2}{\lambda+2}\right)$ μοναδική λύση. Πράγματι, $\rho = 2$, $N - \rho = 2 - 2 = 0$.

Παράδειγμα

$$\left.\begin{aligned} 0x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\ 0x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= \lambda \\ 0x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \end{aligned}\right\}$$

Θα λύσουμε το σύστημα θεωρώντας τον επαυξημένο πίνακα

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & \lambda \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} r_2 \to r_2 - 2r_1 \\ r_3 \to r_3 - r_1 \end{array} \underset{\gamma}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) r_2 \leftrightarrow r_3 \underset{\gamma}{\sim}$$

$$\underbrace{\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-2 \end{array}\right)}_{\text{κλιμακωτός}} r_2 \to \tfrac{1}{2} r_2 \underset{\gamma}{\sim} \underset{(\text{Για } \lambda=2)}{\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)} r_1 \to r_1 + r_2 \underset{\gamma}{\sim} \underbrace{\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)}_{\text{απλά κλιμακωτός}}$$

Άρα $\left.\begin{aligned} x_2 \quad + x_4 &= 3/2 \\ x_3 \quad &= 1/2 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} x_2 &= \frac{3}{2} - x_4 \\ x_3 &= \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(x_1, \frac{3}{2} - x_4, \frac{1}{2}, x_4\right)$

$= \left(0, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) + x_1(1,0,0,0) + x_4(0,-1,0,1)$

είναι η λύση του συστήματος για $\lambda = 2$. Για $\lambda \neq 2$ δεν υπάρχει λύση.

Εδώ ο βαθμός του συστήματος είναι $\rho = 2$ (είναι ο βαθμός του επαυξημένου πίνακα $r = 2$), άρα υπάρχουν 2 βασικές μεταβλητές, π.χ. οι x_2, x_3 και $N - \rho = 4 - 2 = 2$ ελεύθερες μεταβλητές, οι x_1, x_4.

Διατυπώνουμε τώρα τα βασικά θεωρήματα για την ύπαρξη και τη δομή του συνόλου των λύσεων. Κάποια από αυτά τα είδαμε ήδη κατά τον αλγόριθμο Gauss, θα τα δούμε τώρα και μέσω των στηλοδιανυσμάτων τού F^N.

<u>Το σύστημα έχει λύση $\Leftrightarrow$ $r(A) = r(A|b)$</u>

Πράγματι, έστω ότι υπάρχει λύση $(x_1, \dots, x_N)$ τού συστήματος, δηλαδή $x_1 A^1 + \dots x_N A^N = b \Rightarrow b \in \langle A^1, \dots, A^N \rangle \Rightarrow \langle A^1, \dots, A^N \rangle = \langle A^1, \dots, A^N, b \rangle$ $\Rightarrow \dim \langle A^1, \dots, A^N \rangle = \dim \langle A^1, \dots, A^N, b \rangle \Rightarrow r(A) = r(A|b)$.

Αντίστροφα, έστω $r(A) = r(A|b) \Rightarrow \dim \langle A^1, \dots, A^N \rangle = \dim \langle A^1, \dots, A^N, b \rangle$ $\Rightarrow b \in \langle A^1, \dots, A^N \rangle \Rightarrow \exists\, x_1, \dots, x_N \in F : b = x_1 A^1 + \dots + x_N A^N \Rightarrow$ $\exists\, (x_1, \dots, x_N)$ λύση τού συστήματος.

<u>Σχόλια</u>

(1) Το σύστημα έχει λύση ανν το b ανήκει στον στηλόχωρο τού A. Είναι φανερό από την παραπάνω απόδειξη.

(2) Το ομογενές σύστημα έχει πάντα λύση, τουλάχιστον την τετριμμένη $(x_1, \dots, x_N) = (0, \dots, 0)$. Πράγματι, για Ο.Σ. είναι $b = 0 \Rightarrow r(A|b) = r(A|0) = r(A)$ και το παραπάνω θεώρημα ικανοποιείται για Ο.Σ.

<u>$W_0 \equiv \{ X \in F^N : AX = 0 \}$ = σύνολο λύσεων Ο.Σ. "Ker(A)" $\Rightarrow W_0 \le F^N$, $\dim W_0 = N - r(A)$</u>

Πράγματι, αν $X_1, X_2 \in W_0$ τότε $AX_1 = 0$, $AX_2 = 0 \Rightarrow A(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2) = \lambda_1 AX_1 + \lambda_2 AX_2 = 0 \Rightarrow W_0 \le F^N$. Επειδή $AX = 0 \Leftrightarrow x_1 A^1 + \dots + x_N A^N = 0$ και από τα διανύσματα $A^1, \dots, A^N$ μόνο τα $r(A)$ είναι Γρ. Ανεξ., άρα μπορούν από το Ο.Σ. να προσδιοριστούν μόνο $r(A)$ από τα $x_1, \dots, x_N$. Άρα ο υπόχωρος των $(x_1, \dots, x_N)$ λύσεων του Ο.Σ. είναι $N - r(A)$ παραμετρικός.

<u>Σχόλια</u>

(1) Αν στο Ο.Σ. πλήθος αγνώστων > πλήθος εξισώσεων $\Rightarrow \exists$ μη-τετριμμένη λύση.
Πράγματι, αν $N > M$, επειδή $r(A) \le M, N$, άρα $r(A) < N \Rightarrow N - r(A) > 0$.
Ή αλλιώς, είναι $A^1, \dots, A^N \in F^M$ με $N > M$, άρα $A^1, \dots, A^N$ Γρ. Εξ. $\Rightarrow \exists (x_1, \dots, x_N) \neq (0, \dots, 0)$ με $x_1 A^1 + \dots + x_N A^N = 0 \Rightarrow \exists$ μη-τετριμμένη λύση.

(2) $W \equiv \{ b \in F^M : AX = b \text{ συμβατό} \} \Rightarrow W \le F^M$, $\dim W = \rho$.
Πράγματι, $W = \langle A^1, \dots, A^N \rangle \le F^M \Rightarrow \dim W = \dim \langle A^1, \dots, A^N \rangle = \rho$.

$r(A) = r(A|b)$ $\Rightarrow$ $S = x + W_0$, $Ax = b$ (S "σύμπλοκο" του F^N)

$S \equiv \{X \in F^N : AX = b\}$ = σύνολο λύσεων Μ.Ο.Σ. $\quad \dim S = N - r(A)$

Αν $x + X_0 \in x + W_0$, $X_0 \in W_0 \Rightarrow A(x + X_0) = Ax + AX_0 = b + 0 = b$

$\Rightarrow x + X_0 \in S \Rightarrow x + W_0 \subseteq S$.

Εξάλλου, αν $X \in S \Rightarrow A(X - x) = AX - Ax = b - b = 0 \Rightarrow X - x \in W_0$

$\Rightarrow X - x = X_0$, $X_0 \in W \Rightarrow X = x + X_0 \in x + W_0 \Rightarrow S \subseteq x + W_0$.

Τελικά, $S = x + W_0$. Άρα $\dim S = \dim W_0 = N - r(A)$.

Σχόλια

(1) Αν $r(A) = r(A|b) = N \Rightarrow \exists!$ λύση. Επιπλέον $N - r(A) = 0 \Rightarrow$ μοναδική λύση.
Πράγματι, αν $r(A) = r(A|b)$ τότε $\exists$ λύση. $r(A) = N \Rightarrow \exists!$ λύση (η μηδενική)
Η ίδια πρόταση ισχύει και για Ο.Σ :

2) Αν πλήθος αγνώστων > πλήθος εξισώσεων $\Rightarrow$ Δεν μπορεί να υπάρχει μοναδική λύση.
Πράγματι, αυτό δείχθηκε για Ο.Σ. Για Μ.Ο.Σ., αν $N > M$ τότε ή δεν υπάρχει λύση ή αν υπάρχει είναι $N - \rho > M - \rho \geq 0$, άρα όχι μοναδική λύση.

(3) Αν $r(A_{N\times N}) = N \Rightarrow \exists!$ λύση $X = A^{-1}b$, $\forall b$.
Πράγματι, αυτό ισχύει για Ο.Σ. Για Μ.Ο.Σ. είναι $(A|b)_{N\times(N+1)} \Rightarrow r(A|b) \leq N$
και $(A|b) = (A^1 \dots A^N\ b) \Rightarrow r(A|b) = \dim\langle A^1, \dots, A^N, b\rangle \geq \dim\langle A^1, \dots, A^N\rangle = r(A) = N$,
άρα $r(A|b) = N \Rightarrow r(A|b) = r(A) \Rightarrow \exists$ λύση. Είναι $N - r(A) = 0$, άρα η λύση είναι μοναδική. Επειδή $r(A_{N\times N}) = N \Rightarrow A$ αντιστρέψιμος και άρα η μοναδική λύση δίνεται από $X = A^{-1}b$.
Ή αλλιώς, αν $r(A_{N\times N}) = N \Rightarrow \dim\langle A^1, \dots, A^N\rangle = N \Rightarrow A^1, \dots, A^N$ Γρ. Ανεξ $\Rightarrow$
$A^1, \dots, A^N$ βάση $F^N \Rightarrow \exists!\ (x_1, \dots, x_N) : b = x_1A^1 + \dots + x_NA^N \Rightarrow \exists!\ X : AX = b$

4) Αν το $AX = b$ έχει μοναδική λύση X , $\forall b \Rightarrow r(A_{N\times N}) = N$.
Πράγματι, αφού το $AX = b$ έχει λύση , άρα το b ανήκει στο στηλόχωρο τού A. Επιπλέον, αφού το X είναι μοναδικό , άρα το b εκφράζεται με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των $A^1, \dots, A^N$. Άρα, τα $A^1, \dots, A^N$ είναι Γρ. Αν. διότι αν ήταν Γρ. ΕΞ. η ανάπτυξη του b δεν θα ήταν μοναδική. Άρα $r(A) = N$.

5) Αν $\exists B_{N\times N} : BA_{N\times N} = I_N \Rightarrow A$ αντιστρέψιμος.
Πράγματι, αν $AX = 0 \Rightarrow B(AX) = 0 \Rightarrow (BA)X = 0 \Rightarrow IX = 0 \Rightarrow X = 0 \Rightarrow \dim W_0 = 0$
$\Rightarrow N - r(A) = 0 \Rightarrow r(A) = N \Rightarrow A$ αντιστρέψιμος.